



Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO EN FÍSICA

Computación cuántica con qubits superconductores: el transmón

Autor: Juan Álvarez Carrasco

Tutor: Javier Ignacio Díaz Fernández

Convocatoria Extraordinaria

Índice

Resumen	2
1 Introducción	3
2 Computación cuántica: principios teóricos	6
2.1 Qubit, ¿qué es?	8
2.2 Registros y operaciones	12
3 Hardware de un ordenador cuántico	16
3.1 Circuitos superconductores	17
3.2 Otras alternativas	19
4 Teoría de la superconductividad	21
4.1 Aspectos históricos	21
4.2 Ecuaciones de London	22
4.3 Teoría BCS	24
5 Qubits superconductores	28
5.1 Efecto Josephson	29
5.2 Circuitos	32
5.3 Qubits de fase, carga y flujo	34
6 El transmón	38
6.1 Teoría: la caja de pares de Cooper	39
6.2 Desarrollo actual	44
7 Conclusiones	46
Bibliografía	49

Resumen

El presente Trabajo Fin de Grado consiste en un análisis del transmón, un tipo de circuito superconductor basado en qubits de carga diseñado para operar con un ratio de energía Josephson frente a energía de carga E_J/E_C muy elevado. Sin embargo, para llegar a poder explicar este tipo de qubit superconductor es necesario detenerse primero algunos conceptos fundamentales. Por ello, este trabajo estará dividido en los siguientes puntos: un vistazo histórico a la computación clásica a modo de introducción, una revisión de los aspectos más importantes de la mecánica cuántica que serán aplicados a la computación, un repaso a la teoría de la superconductividad y su aplicación al caso que nos ocupa de los qubits superconductores. Una vez repasadas todas estas nociones podremos abordar el transmón desde una perspectiva más amplia.

Capítulo 1

Introducción

En los últimos años se ha ido produciendo una convergencia entre algunas disciplinas de la física con las ciencias de la computación. El estudio de los semiconductores ha permitido un gran desarrollo de tecnologías como el transistor durante las últimas décadas, ya que al ir disminuyendo el tamaño individual de cada transistor se pueden desarrollar circuitos integrados mucho más eficientes y potentes desde el punto de vista energético y del cálculo computacional, respectivamente. Sin embargo, nos estamos acercando a un punto en el que los transistores se van a empezar a encontrar con un límite físico infranqueable, la escala atómica. Por este motivo se hace necesario comenzar a explorar alternativas a la computación clásica que hemos conocido desde hace tantos años. Aquí es donde entra en juego la computación cuántica, uno de los nuevos campos más prometedores de este milenio, que plantea una nueva forma de trabajar con la información basada en la superposición cuántica.

Es importante, antes de entrar en los detalles, definir el sujeto con el que operamos, leemos, escribimos y transmitimos entre dispositivos: la información. Desde los orígenes de la era digital, se estableció el *bit* como la unidad

básica de la información, un nombre que se deriva de la expresión anglosajona *binary digit*, representando un estado lógico con uno de los dos posibles valores: 0 o 1. De acuerdo con Claude E. Shannon en su texto *A Mathematical Theory of Communication*, donde desarrolla la teoría de la información, un bit es la entropía de información de una variable aleatoria binaria que puede valer 0 o 1 con igual probabilidad. De ahí que también se denomine a un bit como un *shannon* en esta teoría. Que la unidad mínima de información sea binaria se deriva de que la entropía de un registro de datos se define con un logaritmo de base 2:[1]

$$H = - \sum_{i=1}^k p_i \log_2(p_i) \quad (1.1)$$

donde k es el grado de indeterminación de un evento aleatorio, es decir, el número de estados posibles, y p_i es la probabilidad de cada uno de esos estados.

Una vez definida la información en la informática clásica es necesario aclarar también el concepto de computación. En otras palabras, entender qué tipo de operaciones, procedimientos o algoritmos se pueden implementar para trabajar con la información de la que disponemos. Este manejo de la información y las operaciones que realizamos con ella son fundamentales para trabajar, entender y sacar provecho de las leyes físicas que rigen nuestro universo. La estructura básica de un proceso de información consistiría en pasarle a un sistema cerrado un conjunto de datos de entrada para obtener unos resultados en el canal de datos de salida. Para clasificar la potencia de cálculo de un sistema computacional recurrimos a las clases de complejidad, un conjunto de categorías que clasifican los problemas como *fáciles* o *difíciles* de resolver computacionalmente hablando.

La supremacía cuántica es un concepto introducido en 2012 por el físico John Preskill[2] empleado para referirse a la hipotética superioridad de un ordenador cuántico sobre un ordenador clásico para la resolución de ciertos problemas o cálculo de determinadas operaciones. Es gracias a las diferencias fundamentales de comportamiento entre una máquina y otra que la computación cuántica abre nuevas puertas que no estaban permitidas para las máquinas tradicionales.

La motivación para realizar este trabajo viene dada por el interés que despierta este tema con tanto recorrido para el futuro de la computación. Estudiaremos las bases teóricas de este proyecto, veremos cómo implementar modelos físicos que funcionen y ver qué opciones hay de construir un ordenador que sea tanto estable en el tiempo como eficiente.

Capítulo 2

Computación cuántica: principios teóricos

La base teórica sobre la que se fundamenta el nuevo paradigma de la computación son los postulados de la mecánica cuántica, un conjunto de principios desarrollados en los años 30 por Dirac y von Neumann que, llevados a la práctica, nos permitirán explotar las ventajas de trabajar con propiedades intrínsecas de los estados cuánticos como son la superposición y el entrelazamiento para realizar operaciones que no están al alcance de los ordenadores tradicionales. Por ello, en esta sección haremos una revisión a estas bases y veremos por qué hacen de este nuevo modelo algo codiciable por su gran capacidad de cálculo.

Es importante comenzar este repaso dejando claro que, a diferencia de la mecánica clásica, el estado físico de una partícula no viene descrito por una trayectoria en el espacio de configuraciones, determinada por las variables de posición y velocidad. En el caso de la mecánica cuántica trabajamos sobre espacios de Hilbert: [3]

Postulado I. El estado de un sistema físico aislado, en un instante de tiempo t , está representado por un vector de estado $|\psi\rangle$ que pertenece a un espacio de Hilbert \mathcal{H} denominado espacio de estados.

Postulado II. Toda magnitud física medible A está descrita por un operador hermítico asociado \hat{A} que actúa sobre el espacio de estados \mathcal{H} . Este operador es un observable, por lo que sus autovectores forman una base de \mathcal{H} .

Postulado III. El resultado de medir la magnitud física A debe ser uno de los autovalores correspondientes del observable \hat{A} .

Postulado IV. Cuando la magnitud física A se mide sobre un sistema en un estado normalizado $|\psi\rangle$, la probabilidad de obtener un autovalor a_n (para el caso de espectro discreto) del correspondiente observable \hat{A} viene dada por el cuadrado de la amplitud de la proyección ortogonal sobre el autovector correspondiente.

$$P(a_n) = \sum_i^{g_n} |\langle \phi_n^i | \psi \rangle|^2 \quad (2.1)$$

donde g_n es la degeneración de autoestados para un mismo autovalor.

Postulado V. Si la medida de la magnitud física A sobre el sistema en el estado $|\psi\rangle$ da como resultado a_n , entonces el estado del sistema colapsa inmediatamente a la proyección normalizada de $|\psi\rangle$ sobre el subespacio asociado a a_n .

$$\psi \xrightarrow{a_n} \frac{P_n |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | P_n | \psi \rangle}} \quad (2.2)$$

donde P_n es el operador proyector.

Postulado VI. La evolución temporal del vector de estado $|\psi(t)\rangle$ está gobernada por la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle \quad (2.3)$$

donde $H(t)$ es el observable asociado con la energía total del sistema, denominado hamiltoniano.

Analizando más allá de los postulados, una de las primeras implicaciones de la no existencia de trayectorias definidas es que resulta imposible distinguir una partícula de otra a diferencia de como puede hacerse en la mecánica clásica. Consecuencia directa de ello es que los estados en los que se pueden encontrar un conjunto de dos o más partículas resulta de la convolución de los estados propios de cada partícula de manera individual. En el caso de sistemas de dos estados, si tenemos n partículas el número total de estados posibles sería de 2^n . Lo grande que puede llegar a ser este número es uno de los motivos más importantes por los que la computación cuántica puede llegar a ser tan potente, acompañado del hecho que sobre esos 2^n estados diferentes pueden realizarse operaciones de manera simultánea gracias al principio de superposición de estados.

2.1. Qubit, ¿qué es?

Un qubit se define como la unidad básica de información cuántica, que no es más que una adaptación del concepto de bit en la computación clásica. Estas unidades de información tendrán su representación física en partículas con dos estados posibles, también conocidos como sistemas de dos estados. La principal diferencia con el bit es que estas nuevas unidades pueden ser 0 y 1 a la vez gracias al principio de superposición.

Vamos a construir nuestro sistema de dos estados más sencillo posible. El ejemplo más habitual es el del espín del electrón, que formalizamos sobre un espacio de Hilbert de dimensión 2. Para ello partimos de las conocidas matrices de Pauli, seleccionando en este caso una dirección que, por conveniencia, será la del eje z :

$$S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Observamos que la matriz ya es diagonal, por lo que directamente obtenemos los vectores propios del observable S_z y que serán la base del espacio de espines en nuestra representación: $|0\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Así, cualquier estado de nuestro sistema vendrá dado por cualquier combinación lineal de los vectores de la base.

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \equiv \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

donde α y β son coeficientes complejos y satisfacen la condición de normalización:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (2.6)$$

Si quisiéramos definir los estados del espín en una dirección arbitraria \vec{u} podemos escribirlo en función de los observables de espín en coordenadas esféricas. Así, el operador tendría la forma:

$$S_{\vec{u}} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta)e^{-i\phi} \\ \sin(\theta)e^{i\phi} & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

y los estados se escribirían como:

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle \quad (2.8)$$

Esta representación matemática se traduce en una representación gráfica conocida como esfera de Bloch:

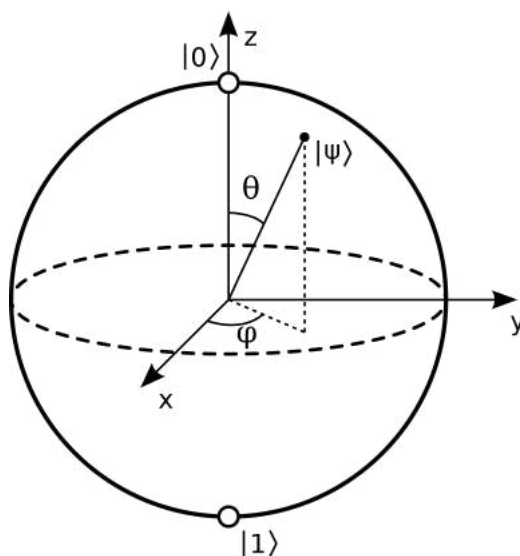


Figura 2.1: Esfera de Bloch.

Este concepto fue desarrollado por el físico suizo Felix Bloch, se trata de una esfera de radio unidad en cuya superficie encontramos los estados puros del sistema y en el volumen interior los estados mixtos. Los estados que se encuentran en puntos antipodales son siempre ortogonales, véase en los polos N y S que cada uno apunta directamente a los autoestados de S_z .

Por último, antes de pasar a comentar los registros de qubits y las operaciones que podremos realizar con ellos es esencial describir las dos propiedades mecanocuánticas más importantes para estas aplicaciones: la superposición y el entrelazamiento.

Superposición

La superposición cuántica es un principio fundamental de esta teoría que sostiene que un sistema físico existe en todos sus estados posibles hasta que realizamos una medida sobre ese sistema, entonces la función de onda (una combinación lineal de los vectores que forman la base del espacio de Hilbert) colapsa al estado que hemos determinado. Es decir, una vez hecha la medida, el estado de la partícula quedaría definido en el estado medido.

Entrelazamiento

El entrelazamiento es la segunda propiedad importante que solo aparece en el ámbito de la mecánica cuántica. Este fenómeno implica que al realizar una medida sobre uno de los qubits de nuestro sistema, el resto de qubits quedan con un estado definido.[4] Veamos un ejemplo muy sencillo con un sistema de 2 qubits. Si preparamos el registro de manera que $|\psi\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$, vemos que si medimos el estado de uno de los qubits y resulta ser 1, automáticamente el estado del otro qubit queda determinado y sería también 1. Si, por el contrario, el estado de esos dos qubits fuera $|\psi\rangle = \frac{|10\rangle + |00\rangle}{\sqrt{2}}$ y midiéramos el estado del segundo qubit, el estado del primero no estaría determinado si no realizamos la medida. Lo que queremos reflejar con este planteamiento es que el entrelazamiento entre estados no siempre sucede, sino que hay que realizar operaciones entre los estados del sistema para obtenerlo. Cabe destacar que esta propiedad del entrelazamiento no solo tiene aplicaciones en la computación sino también en la comunicación.

La generalización de este fenómeno para un conjunto de n qubits nos permitirá construir un sistema escalable sobre el que llevar a cabo la representación de mayores volúmenes de información: el q-registro.

2.2. Registros y operaciones

Como cualquier herramienta orientada a la computación, uno de los aspectos que determinan el rendimiento y la potencia de cálculo de un sistema es la cantidad de información que admite de entrada. Al conjunto de n qubits se le denomina un q-registro, que tendrá un total de 2^n estados posibles. Esta cantidad de estados determinará la cantidad y complejidad de las operaciones que podremos realizar con ellos.

Si nos vamos a los fundamentos de la mecánica cuántica, recordamos que el espacio de estados de un sistema físico formado por otros subsistemas individuales viene dado por el producto tensorial del estado de cada subsistema. Así, podemos representar cada q-registro por un vector de estado de la siguiente forma:

$$|\psi\rangle = |\text{qubit}_{N-1}\rangle \otimes |\text{qubit}_{N-2}\rangle \otimes \dots \otimes |\text{qubit}_0\rangle \quad (2.9)$$

donde N es el número total de qubits que admite el registro de nuestro sistema.

Las principales operaciones con qubits que se llevan a cabo para entrelazar estados se conocen como puertas lógicas, de las cuales la operación Hadamard y la operación CNOT podrían categorizarse como de las más importantes. Estas puertas lógicas son equivalentes a las de un sistema clásico en términos de tener un mismo fin. Una puerta que actúa sobre 2^n qubits vendrá representada por una matriz unitaria de orden $2^n \times 2^n$. Es una condición indispensable que una operación compleja pueda ser descompuesta en una serie de operaciones más simples que se puedan implementar a través de algunas de las puertas lógicas fundamentales que detallaremos a continuación.

Puerta CNOT

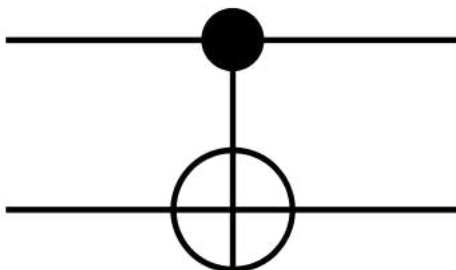


Figura 2.2: Puerta CNOT.

El ejemplo de puerta lógica controlada; esto es, una puerta con dos entradas donde la primera asume la función de entrada de datos y la segunda ejerce de control, es el de la controlledNOT o CNOT. El diagrama de lógica de esta puerta se resume en que si inicializamos la variable de control a 0, los datos de salida están conectados a los de entrada en el sentido de que no se ven alterados mientras que, si la variable de control es 1, entonces los datos de salida vendrán invertidos respecto de los de entrada. Analizaremos en otro momento la implementación física.

Su representación simbólica en un diagrama de circuitos vendría dada por la Figura 2.2. A partir de la tabla de la verdad de esta puerta lógica se puede construir la representación matricial que actuaría sobre los vectores de la base de un sistema de dos qubits.

$$CNOT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Puerta de Hadamard



Figura 2.3: Puerta Hadamard.

Con la puerta Hadamard lograremos poner un q-registro de n qubits en un estado equiprobable. Es decir, los 2^n estados del q-registro tendrán la misma probabilidad. Su representación matricial, en este caso aplicada a un único qubit, tendrá la siguiente forma:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Al actuar sobre los estados de la base acabamos teniendo un estado que es combinación lineal de los autovectores que conforman esa misma base y con la condición de que son equiprobables. Es decir, nos sitúa en un estado donde la probabilidad de obtener 0 o 1 al medir el qubit es idéntica. La generalización a un q-registro de n qubits viene dada por la siguiente expresión:

$$H^n |y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x \in \{0,1\}^n} (-1)^{xy} |x\rangle_n \quad (2.12)$$

Existen otras puertas de carácter fundamental como pueden ser:

- Puertas de Pauli.
- Puerta de desplazamiento de fase.
- Puerta SWAP, que facilita el intercambio de dos qubits.

Disponer de este conjunto de puertas lógicas fundamentales nos permitirá general un amplio abanico de funciones lógicas de mayor complejidad que acabarán plasmándose en la construcción de circuitos electrónicos. Muchas de estas puertas se implementan de manera masiva facilitando la ejecución de algoritmos que cristalizan la supremacía cuántica.

Capítulo 3

Hardware de un ordenador cuántico

En el año 2000, el físico teórico David P. DiVincenzo sentó las bases necesarias para lograr la construcción de un ordenador cuántico. Se tratan de un conjunto de 7 reglas que cualquier montaje experimental debe satisfacer para así poder implementar correctamente algoritmos cuánticos, como pueden ser los algoritmos de Grover o de Shor, entre otros. Estas reglas, denominadas en su conjunto Criterios de DiVincenzo, vienen recogidas por primera vez en su artículo científico *The Physical Implementation of Quantum Computation*:^[5]

1. Un sistema físico escalable con qubits bien caracterizados.
2. La capacidad de inicializar el estado de todos los qubits a un estado base simple, como $|000\dots\rangle$, donde todos los N qubits estarían en estado 0.
3. Tiempos de coherencia suficientemente altos para realizar la operación, el suficiente para corregir también errores.
4. Un conjunto o *set* universal de puertas cuánticas.

5. Capacidad de lectura del estado de un qubit específico. lectura y almacenamiento de datos.

Estas 5 reglas por sí solas serían suficiente para el procesamiento de información cuántica. Para la comunicación cuántica, sin embargo, es necesario establecer dos criterios adicionales.

6. Posibilitar la transferencia interna de información y entrelazamientos entre los sistemas del computador.
7. Disponer de interfaces cuanta-clásicas para el control, lectura y almacenamiento de datos.

En ese mismo artículo DiVincenzo especifica algunos de los montajes experimentales en los que esos 5 criterios fundamentales deben cumplirse: desde qubits superconductores hasta espines nucleares en moléculas, pasando por trampas de iones o puntos cuánticos. Las alternativas son numerosas, pero vamos a centrarnos en la que resulta fundamental para este trabajo.

3.1. Circuitos superconductores

Empecemos por analizar cuáles serían las ventajas de construir un computador cuántico basado en circuitos superconductores:

1. En primer lugar, porque cumplen los criterios de DiVincenzo:
 - a) Podemos construir qubits empleando tecnología ya conocida.
 - b) Los elementos utilizados son superconductores, es decir, materiales no disipativos, lo que nos permitirá contar con largos tiempos de coherencia.

- c) La impedancia de los qubits con su entorno facilita el acoplo entre qubits.
- 2. La construcción es relativamente sencilla, ya que solo necesitamos aluminio para los qubits y dejar aluminio oxidarse para las uniones Josephson.
- 3. Los elementos eléctricos no disipativos no son lineales, lo cual facilita pasar a un sistema de 2 estados.
- 4. Los circuitos los forman líneas de transmisión, capacidades e inductancias.

Todas las magnitudes de estos circuitos tendrán que pasar a a tratarse como si fueran entidades cuánticas, como por ejemplo la corriente o el voltaje. Todas ellas estarán sujetas a una función de probabilidad que será positiva o negativa. El tratamiento será, por tanto, similar al de un átomo con la diferencia de que en un superconductor trabajamos con magnitudes macroscópicas. La base del funcionamiento de un qubit superconductor se debe explicar una vez hayamos entendido los aspectos esenciales de la superconductividad que facilitarán la creación de una corriente mediante efecto túnel entre los electrodos del principal elemento que compondrá nuestro circuito: las uniones Josephson. Pero antes de pasar a centrarnos en esto veremos algunas alternativas que se plantean a los circuitos superconductores, todas ellas de carácter microscópico.

3.2. Otras alternativas

Puntos cuánticos

Con *punto cuántico* se suele hacer referencia a un nanocrystal semiconductor cuyos límites físicos son los que se encargan de confinar a los portadores de carga en el interior del material. La mayor ventaja de estos sistemas es que están bien aislados del entorno y dificultan tener un gran número de grados de libertad internos, que siempre es menor que en sistemas de mayores dimensiones. Todos estos aspectos que mencionamos nos interesan porque llevan a aumentar los tiempos de coherencia de los estados de nuestro qubit. La representación consistiría en un estado fundamental y un primer nivel excitado con los que identificar nuestros estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$. Más información en este artículo de Carol Meyer. [6]

Trampa de iones

Haciendo uso de que átomos cargados eléctricamente tienen una energía que depende del estado en el que se encuentran los electrones podemos enfriar y atrapar iones para ponerlos en un estado de superposición cuántica mediante el uso de láseres en oposición de fase. En este caso construimos los qubits como sistema de dos estados a partir de niveles hiperfinos en el estado fundamental. La preparación de los dos niveles cuyas transiciones queremos controlar se lleva a cabo mediante *optical pumping*. Consiste en emplear un láser que acopla el ion a estados excitados que tras cierto tiempo decaen al estado de menor energía. Una vez se estabiliza en este estado, la trampa de iones ya no estará interactuando con el láser dejando así el sistema preparado en el estado deseado. Para medir el estado de un qubit recurrimos de nuevo al láser: se envía un *beam* acoplado a un cierto estado. Si el ion decae

a dicho estado, se producirá una interacción que conlleva a la emisión del fotón correspondiente. [7]

Espines nucleares en moléculas

En esta implementación física de un ordenador cuántico la información está codificada en el espín nuclear de átomos donantes en dispositivos basados en silicio dopado. Las operaciones lógicas de espines individuales son realizadas mediante la aplicación de campos eléctricos externos, y las medidas de espín mediante el uso de corrientes de electrones con espín polarizado. La consecución de este tipo de ordenador basado en espines nucleares dependerá de los avances que se realicen en el refinamiento de la electrónica del silicio convencional.[8]

Capítulo 4

Teoría de la superconductividad

Para comprender el tipo de computación cuántica que queremos tratar en este trabajo será necesario entender la teoría de la superconductividad, tanto la electrónica detrás de estos procesos así como la teoría electromagnética que la fundamenta. Para ello cabe preguntarse, ¿cuáles son las condiciones físicas que han de darse para que un material se encuentre en régimen de superconductividad?

4.1. Aspectos históricos

El fenómeno de la superconductividad fue descubierto en 1911 por el físico neerlandés Heike K. Onnes, quien comprobó por primera vez que determinados materiales no tienen resistencia eléctrica cuando son enfriados por debajo de una temperatura característica. Y es que si bien la propiedad más destacable de los superconductores es la ausencia de resistencia, la verdad es que no podemos afirmar que estemos hablando de materiales con conductividad infinita. La finitud de este valor viene determinada por el cambio en la periodicidad de la red que producen los fonones u otros defectos de red.

En esta descripción no podemos hablar nunca de resistencia nula (o conductividad infinita) debido a que la segunda ley de la termodinámica prohíbe un cristal sin cierto grado de desorden. E incluso con una red perfecta, los electrones sufrirían los efectos de scattering al avanzar por la corriente eléctrica, causando una pequeña resistencia al avance. Por todo esto, y porque es físicamente imposible comprobar si el valor de una resistencia es nulo ya que siempre existirá cierto error experimental a la hora de hacer la medida, lo único que podemos hacer es establecer una cota superior a dicho valor.

Fijémonos en el caso de Onnes, que como ya adelantamos fue quien descubrió por primera vez el fenómeno de la superconductividad estudiando la resistencia de sustancias como mercurio o plomo a bajas temperaturas. Lo que él midió fue el campo magnético generado por los electrones al girar en una espira. Y lo que encontró fue una discontinuidad en el decaimiento de dicho campo magnético a medida que se enfriaba la sustancia. La temperatura a la que se produce este salto en el comportamiento del material se conoce como temperatura crítica.

4.2. Ecuaciones de London

Dado que la superconductividad es un fenómeno puramente cuántico, no fue hasta los años cincuenta cuando pudo desarrollarse por fin una teoría microscópica que la describiera correctamente. Hasta entonces la investigación en este campo había sido de carácter puramente fenomenológico, ya que las herramientas matemáticas de la que disponían los físicos en aquel momento no les permitía ir más allá de algunos aspectos como la descripción del efecto Meissner.

Es aquí donde entran en juego las ecuaciones de London. Se tratan de

unas expresiones desarrolladas a partir de las ecuaciones convencionales de la electrodinámica. Se limitan a caracterizar el comportamiento de campos magnéticos al interactuar con materiales superconductores, pero en ningún caso buscan dar una explicación microscópica del fenómeno. Para llegar al resultado obtenido por los hermanos Fritz y Heinz London debemos partir de la ecuación de movimiento de un electrón acelerado en un campo eléctrico:[9]

$$m\dot{v} = -eE \quad (4.1)$$

Como la densidad de corriente $j = -nev$ tenemos entonces que:

$$\frac{\partial j}{\partial t} = \frac{ne^2}{m}E \quad (4.2)$$

donde m , n y e son la masa del electrón, la densidad de volumen y la carga del electrón.

Para el siguiente paso recurrimos a la tercera ecuación de Maxwell que relaciona el campo eléctrico con el campo magnético:

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (4.3)$$

y sustituimos la ecuación (4.2) en (4.3) para obtener:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \times j + \frac{ne^2}{m}B \right) = 0 \quad (4.4)$$

Esto se cumple solo para el caso de un medio con resistencia 0. La expulsión del campo requiere que la cantidad entre paréntesis sea igual a 0.

$$\nabla \times j + \frac{ne^2}{m}B = 0 \quad (4.5)$$

De esta forma, el comportamiento de los campos eléctrico y magnético en un superconductor vienen determinados por las dos ecuaciones de London:

$$E = \frac{m}{ne^2}j \quad (4.6)$$

$$B = -\frac{m}{ne^2}\nabla \times j \quad (4.7)$$

Este par de ecuaciones se pueden entender como el análogo de la ley de Ohm en un conductor estándar. Si a ellas le añadimos la cuarta ecuación de Maxwell llegamos a unas ecuaciones de onda amortiguadas que describen la dinámica de las corrientes en el interior del superconductor.

La magnitud $\lambda_{SC} = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 ne^2}}$ se conoce como longitud de penetración, y determina qué distancia consiguen penetrar los campos magnéticos antes de ser apantallados por las corrientes superconductoras. Así, el comportamiento de estas corrientes queda bien determinado por la solución a dichas ecuaciones. De este modo podremos trabajar con flujos de corriente, cuantizarlos y operar con ellos en circuitos superconductores. Lo que no se ha tenido en cuenta en ningún momento de este desarrollo es la dependencia con la temperatura, un factor fundamental a la hora de pensar en construir un sistema físico real.

4.3. Teoría BCS

Se denomina teoría BCS al modelo microscópico que describe la superconductividad. Recibe el nombre en honor a los físicos que la elaboraron: H. Bardeen, L. Cooper y J. Schrieffer. Esta teoría parte de una suposición: existe una interacción atractiva y débil entre los electrones de una red cristalina.

Dicha interacción resulta de las deformaciones de la red debido al campo eléctrico, donde cada electrón atrae los iones cargados positivamente de manera que estos mismos iones atraen a otros electrones. A este acoplamiento entre electrones debido a la interacción atractiva electrón-fonón se les conoce como *pares de Cooper*, y contribuyen a generar estados de menor energía que la de Fermi, dando a entender que los estados están ligados.

En caso de crear un potencial de interacción atractivo constante (V_0) entre dos electrones basado en la idea de que un segundo electrón que viaja por la red interactúa con la estela de deformación creada por un primero, la cual identificamos con un fonón, podemos llegar a encontrar que los niveles de energía vienen dados por la siguiente expresión:

$$\epsilon \approx -2\hbar\omega_D \exp^{-2/V_0 Z(E_F^0)} \quad (4.8)$$

siempre que el valor del potencial constante V_0 tenga valores pequeños.

Existe pues un estado ligado de dos electrones, cuya energía es menor que la del mar de Fermi completamente ocupado ($T = 0$) por una cantidad $\epsilon = E - E_F^0 < 0$. Este nuevo estado al que llega un sistema fruto de la inestabilidad del nivel de Fermi cuando los electrones no están ligados se conoce como la fase superconductora del material. Cabe destacar que el principio de exclusión de Pauli se sigue cumpliendo para estos pares de Cooper. Es decir, la función de onda global será antisimétrica debido a la parte de espín, mientras que la parte espacial será simétrica bajo el intercambio de las coordenadas de cada electrón.

El *ground state* o estado fundamental de la teoría BCS viene dado por una función de onda de carácter macroscópico $|\Phi_{BCS}\rangle$ y estará separado de los niveles de electrones no aparejados por un *gap* de energías Δ de manera que sería necesaria aportar una energía 2Δ para llegar a romper el par de

Cooper. Este *gap* tiene ciertas similitudes con el que encontramos entre las bandas de valencia y conducción en un semiconductor, con la diferencia de que en el caso de los superconductores éste depende con la temperatura, y se cumple que $\Delta(T) \rightarrow 0$ cuando $T \rightarrow T_c$.

Algunas de las predicciones que ha corroborado la teoría BCS al contrastar con datos experimentales ha sido la dependencia del *gap* con la temperatura. Para $T = 0$ se tiene que:

$$\Delta(0) = 2\hbar\omega_D \exp\left(-\frac{1}{V_0 N(E_F)}\right) \quad (4.9)$$

donde ω_D es la frecuencia de Debye de los fonones en la red cristalina, V_0 es el potencial de interacción electrón-fonón y $N(E_F)$ es la densidad de electrones desacoplados para una energía igual a la del nivel de Fermi. A partir de esa expresión se puede definir la temperatura crítica de un material como:

$$k_B T_c = 1,14\hbar\omega_D \exp\left(-\frac{1}{V_0 N(E_F)}\right) \quad (4.10)$$

Consultando algunas temperaturas críticas de los superconductores más habituales nos hacemos una idea de qué condiciones deben darse para construir el hardware necesario para desarrollar circuitos superconductores.

- El rango de temperaturas en el que trabajará el circuito superconductor será por debajo de los 10 K de media, según el material superconductor en cuestión.
- Los materiales más indicados para la construcción de nuestro hardware serán los metales que tengan una fase superconductor BCS. Deben ser abundantes y de fácil manipulación, como es el caso del aluminio.

- Para contener los pares de Cooper, cuyas distancias de interacción se encuentran sobre los 1000 \AA , las distancias de los circuitos deberán ser lo suficientemente amplias.

Por estas complicaciones añadidas resulta interesante la investigación que se lleva a cabo en materiales superconductores de altas temperaturas.

Capítulo 5

Qubits superconductores

Como ya adelantábamos en la sección 3.1 de este trabajo, para entender bien los circuitos superconductores empleados en computación cuántica era necesario hacer un breve repaso a la teoría de la superconductividad para adentrarnos ahora en los aspectos más importantes de este tema. A continuación desarrollaremos cómo construir qubits basados en superconductores partiendo de un efecto muy importante, el efecto Josephson. La información que se detalla en toda esta sección está extraída del artículo científico *Superconducting Qubits: A Short Review*, publicado el 11 de octubre de 2004.[10]

Los qubits superconductores son circuitos eléctricos de estado sólido que se basan en gran medida en las técnicas de circuitos integrados tradicionales. Como venimos adelantando, se fundamentan en las uniones Josephson. Son el único elemento no lineal y no disipativo disponible a bajas temperaturas. A diferencia del resto de alternativas para la construcción de qubits como espines o átomos, este tipo de computadores cuánticos tienden a acoplarse bien a otros circuitos facilitando la lectura de datos y la implementación de las puertas lógicas que describimos anteriormente.

5.1. Efecto Josephson

La unión Josephson es una unión túnel entre superconductores, donde los únicos portadores de carga que atraviesan dicha unión son los pares de Cooper. Recordemos que estos pares eran parejas de electrones que sufrían una fuerza atractiva débil entre sí debido a la interacción electrón-fonón en los planos de la red cristalina. Para estudiar esta unión pensemos en dos SC (de ahora en adelante serán las siglas designadas para referirnos a superconductor) similares separados por una capa aislante. Será una región que no permita la conducción pero lo suficientemente pequeña como para permitir que haya efecto túnel entre un lado y otro. Para que exista una corriente aplicamos una diferencia de potencial entre ambos lados siguiendo el esquema que vemos a continuación:

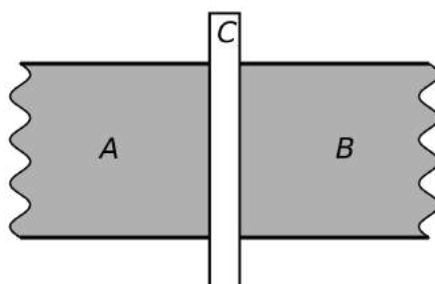


Figura 5.1: Esquema de una unión Josephson donde A y B son los superconductores y C representa la región no conductora.

Además del amplio abanico de propiedades mecano-cuánticas que se pueden aprovechar con esta unión Josephson, también ofrece muchas posibilidades en el campo de la electrónica analógica y digital como pueden ser osciladores, mezcladores, amplificadores o detectores SQUID.

Supongamos ahora un sistema como el de la Figura 5.1. Definimos ψ_A y ψ_B como la función de onda del estado superconductor en el caso izquierdo y derecho, respectivamente. La evolución del sistema con el tiempo sigue la

ecuación de Schrödinger para cada función de onda:

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_A = H_A\psi_A + T\psi_B \quad (5.1)$$

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_B = H_B\psi_B + T\psi_A \quad (5.2)$$

donde suponemos que ψ_i es la solución a H_i y el túnel $T\psi_i$ produce una perturbación en el sistema. Estas funciones de onda pueden definirse a su vez como:

$$\psi_A = \sqrt{n_A}e^{i\phi_A} \quad (5.3)$$

$$\psi_B = \sqrt{n_B}e^{i\phi_B} \quad (5.4)$$

donde n_i es la densidad de carga y ϕ_i la fase de cada SC. Una vez definidos todos estos parámetros, el circuito de la Figura 5.1 se cierra por los extremos conectándolo a una fuente de alimentación. Una corriente túnel en C dará lugar a una diferencia de potencial U entre los SC, de modo que la energía por par de Cooper será $-2eU$. Sustituyendo (5.3) y (5.4) en las ecuaciones de Schrödinger para cada SC, ecs. (5.1) y (5.2), y suponiendo que $n_A = n_B \equiv n$ obtenemos las siguientes relaciones:

$$\hbar\dot{n}_A = -\hbar\dot{n}_B = 2Tn \sin(\phi_A - \phi_B) \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi_A - \phi_B) = -\frac{2eU}{\hbar} \quad (5.6)$$

Estas son las ecuaciones que rigen el efecto Josephson entre dos SC. Analizándolas detenidamente podemos observar que la intensidad de la corriente está relacionada con con el flujo no de manera lineal, sino mediante el seno

de la fase. En otras palabras, habrá corriente en la unión siempre que haya una diferencia de fase entre los SC sin necesidad de que haya una diferencia de potencial U entre cada lado. La corriente únicamente cesará cuando las fases de cada SC se hayan igualado.

Si conectamos entonces una fuente externa con un voltaje aplicado U_{ext} , la corriente túnel persistirá y será constante siempre que la caída de tensión entre los SC sea nula. Esto ocurrirá siempre que dicho voltaje externo sea lo suficientemente bajo, ya que en caso contrario se aumenta la corriente túnel hasta que llega a un valor máximo a partir del cual entramos en un régimen de corriente alterna que se suma a la corriente continua.

Otra forma de parametrizar la inductancia de carácter no lineal consiste en asignar magnitudes de voltaje e intensidades a las de carácter más microscópico como la densidad de portadores de carga que introdujimos en las ecuaciones (5.2) y (5.3). Recapitulando, el principal resultado que buscamos al estudiar una unión Josephson es la relación entre la corriente túnel y la diferencia de fase, al igual que la relación entre dicha diferencia de fase y la caída de tensión de los SC a ambos extremos del túnel:

$$I = I_0 \sin(\delta) = I_0 \sin\left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) \quad (5.7)$$

siendo I_0 la corriente crítica y Φ_0 el cuanto de flujo magnético estudiado por la teoría BCS.

$$\partial_t \delta = \frac{2\pi}{\Phi_0} V \quad (5.8)$$

Esta ecuación de la unión Josephson nos recuerda al mismo comportamiento de una autoinductancia, con la diferencia de que en lugar de tener una relación lineal. Sin embargo, aproximando para valores pequeños del seno

tenemos:

$$I = I_0 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{\Phi}{L_{J0}} \quad (5.9)$$

Podemos definir la inductancia de Josephson y la energía de Josephson como cantidades fundamentales que definen una unión de este tipo:

$$L_J(\delta) = \left(\frac{\partial I}{\partial \Phi} \right)^{-1} = \frac{L_{J0}}{\cos(\delta)} \quad (5.10)$$

$$E_J = -I_0^2 L_{J0} \cos\left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) = E_{J0} \cos(\delta) \quad (5.11)$$

Además de la inductancia y la energía correspondiente a dicha inductancia, la unión Josephson también contiene una capacidad asociada a la barrera del efecto túnel. Dicha energía será:

$$E_{JC} = \frac{(2e)^2}{2C_J} (N - Q_r/2e)^2 \quad (5.12)$$

donde Q_r es una carga residual que proviene de cómo se ha formado la unión.

Una vez comprendidas las bases de la unión Josephson ya podemos desarrollar los circuitos integrados que harán posible la construcción de un computador cuántico. Por supuesto la solución no es única, existen varias alternativas para tratar de resolver el mismo problema: crear un circuito superconductor que respete las reglas de DiVincenzo (ver págs. 16-17) y ser tecnológicamente viable.

5.2. Circuitos

Como ya dijimos previamente, uno de los puntos fuertes de los qubits con circuitos superconductores es que toman prestadas muchas de las ideas y, por

qué no decirlo, de los beneficios de las leyes tradicionales de los circuitos. Con esto nos referimos a que el enfoque a cada montaje que hagamos con uniones Josephson consistirá en obtener las leyes de Kirchhoff de cada uno. A partir de ese planteamiento inicial podremos obtener las ecuaciones de movimiento a partir del hamiltoniano del sistema en cuestión. Cada magnitud física podrá representarse con un operador cuántico con el que haremos operaciones sobre la estructura de niveles del circuito con la intención de reducirlo siempre a un sistema de dos estados con el que formar nuestro qubit. Según el montaje, podremos controlar la carga, la corriente o el flujo dando así lugar a distintos tipos de qubits que veremos en la siguiente sección.

Supongamos un circuito LC equivalente a una unión Josephson como la siguiente.

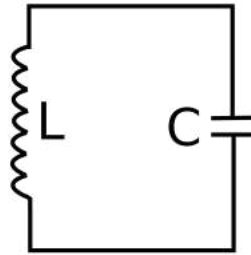


Figura 5.2: Esquema de un circuito LC.

Aplicando la ley de Kirchhoff de los nodos tendremos: $I = I_0 \sin \delta + C \frac{\partial V}{\partial t}$

La solución a este circuito es analítica y conocida. Sin embargo, haciendo un tratamiento cuántico de este circuito no llegaremos a una solución plenamente analítica a pesar de las analogías con un circuito tradicional. El hamiltoniano de un circuito de estas características se calcula a partir de las energías de la inductancia y el condensador.

$$H = \frac{Q^2}{2C} + \frac{\Phi^2}{2L} \quad (5.13)$$

Vemos rápidamente que recuerda al hamiltoniano de un oscilador armónico donde la carga puede tomarse como la variable canónica del momento P y el flujo como la variable canónica espacial X cumpliéndose así que

$$[Q, \Phi] = i\hbar \quad (5.14)$$

y los autoestados de este sistema vienen dados por:

$$E_n = \hbar\omega_0(n + 1/2); \quad \hbar\omega_0 = \hbar/\sqrt{LC} \quad (5.15)$$

En este tipo de circuito los estados serían equidistantes en términos de energía, complicando la condición necesaria de aislar dos de esos estados (por ejemplo, el fundamental y el primer excitado) del resto. De ahí la necesidad de encontrar una relación no lineal para el flujo, como la que vimos en la unión Josephson.

5.3. Qubits de fase, carga y flujo

En la categoría de qubits basados en superconductores podemos clasificarlos en tres subcategorías diferentes en función del parámetro que sea necesario para modificar el estado del qubit. Esta diferenciación entre circuitos viene de la intención de suprimir el efecto perjudicial de las fluctuaciones del término Q_r con diferentes aproximaciones.

- Qubits de carga.
- Qubits de flujo.
- Qubits de fase.

Qubit de carga

En el qubit de carga la unión Josephson se une a un condensador al que se le aplica un voltaje de modo que la carga residual Q_r se compense y pueda controlarse mediante la carga que se almacena en la unión. ¿Cómo se consigue esto? Con uno de los circuitos más importantes y más sencillos posibles: el circuito CPB o *single Cooper-pair box*, que consiste en un pequeño bloque superconductor conectado por unión túnel a otro bloque superconductor de gran tamaño.

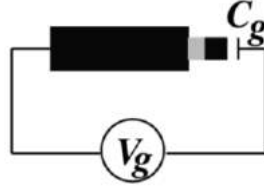


Figura 5.3: Circuito de qubit de carga: CPB.

El hamiltoniano de este circuito donde $U \equiv V_g$ será el siguiente:

$$H = \frac{Q^2}{2C} + E_J = \frac{(2e^2)}{2(C_J + C_g)} \left(N - \frac{Q_r}{2e} + C_g U / 2e \right)^2 + E_J \quad (5.16)$$

$$= \frac{(2e)^2}{2(C_J + C_g)} (N - N_g)^2 + E_J \quad (5.17)$$

$$= E_C (N - N_g)^2 + E_J \quad (5.18)$$

El borne que conecta la unión con el condensador C_g regulador de la carga es lo suficientemente pequeño para ser muy sensible a la discretización de la carga superconductor. Estaremos por tanto en un régimen tal que $E_C \gg E_J$.

La configuración de los niveles de energía de este hamiltoniano es no lineal.

Varía dependiendo de los valores de N_g que se controla con el potencial U de la fuente y con E_J que depende del campo magnético externo. Si $N_g = 1/2$ los niveles de energía correspondientes a 0 y 1 cargas de Cooper en la unión estarán degenerados.

Qubit de flujo

Un qubit de flujo puede implementarse mediante un circuito RF-SQUID en el que el régimen de energías se invierte respecto al caso anterior, ahora tenemos que $E_J \gg E_C$. Veamos la forma que tiene su hamiltoniano sabiendo que la representación gráfica de estos circuitos es la de la siguiente figura:

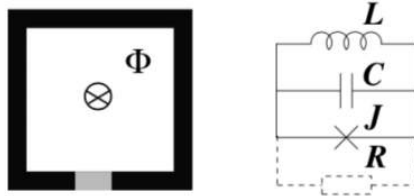


Figura 5.4: Circuito de qubit de flujo: RF-SQUID.

$$H = \frac{Q^2}{2C_J} + \frac{\phi^2}{2L} - E_J \cos\left(\frac{2e}{\hbar}(\phi - \Phi_{ext})\right) \quad (5.19)$$

Emplea un transformador superconductor en lugar de un condensador para ajustar el hamiltoniano. Los dos lados de la junta con capacidad C_J están conectados por un circuito cerrado superconductor con inductancia L . El voltaje en estos bornes varía con la aplicación de un campo externo, igual que un transformado tradicional. Las energías del hamiltoniano (5.19) no son calculables de manera analítica. En este tipo de qubit el problema de la carga residual Q_r se elimina usando la inductancia gracias a la condición de las energías que ya explicamos anteriormente.

Qubit de fase

En este qubit se hace pasar una corriente controlada a la unión Josephson, procurando en todo momento que sea cercana a la corriente crítica I_0 . El hamiltoniano correspondiente al circuito de la figura será:

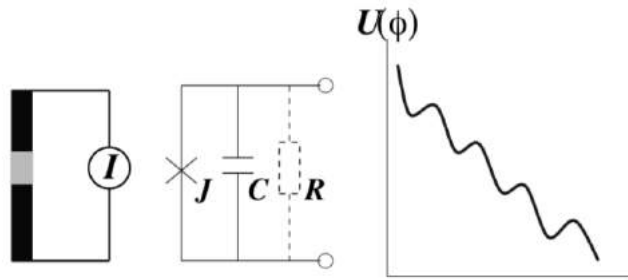


Figura 5.5: Circuito de qubit de fase.

$$H = \frac{(2e)^2}{2C_J} p^2 + I \frac{\Phi_0}{2\pi} \delta - I_0 \frac{\Phi_0}{2\pi} \cos \delta \quad (5.20)$$

donde el primer término corresponde a la capacidad de la unión, el segundo es la inductancia y el tercero es el de la unión Josephson. Son los dos últimos términos los que definen el potencial del circuito.

En la representación gráfica vemos que tiene unos máximos y mínimos relativos bajo una pendiente descendente que depende de la relación I/I_0 . Centraremos nuestro interés en la estructura de niveles que hay en cada pozo de potencial.

Capítulo 6

El transmón

Llegamos a esta última sección principal del trabajo después de un largo proceso describiendo una serie de conceptos absolutamente imprescindibles para llegar con el conocimiento suficiente que nos permita comprender el funcionamiento de uno de los circuitos con más proyección en el mundo de la computación cuántica: el transmón. Para describir este qubit tan específico e interesante nos vamos a apoyar principalmente en el artículo publicado por Sam Bader en 2013 titulado *The Transmon Qubit*.^[11]

Hemos visto muchas propuestas diferentes sobre cómo realizar la implementación física de un qubit, la mayoría de las cuales se basaban en aproximaciones desde el mundo microscópico: espines electrónicos o nucleares, polarización de fotones, niveles electrónicos en trampas de iones o defectos en redes cristalinas. Sin embargo, el enfoque de este trabajo se centraba en estudiar las ventajas de las propiedades macroscópicas del fenómeno cuántico de la superconductividad. La primera ventaja consiste en que, a diferencia de un átomo o molécula, estos materiales pueden diseñarse y construirse según unas especificaciones deseables. La segunda es que, debido a los tamaños, se pueden emplear las técnicas de fabricación de la industria de los semicon-

ductores. Debido al tamaño macroscópico de estos circuitos, encontramos su principal desventaja en que se acoplan fácilmente al entorno en comparación con los sistemas microscópicos mejor aislados. Esto provoca tiempos cortos de coherencia, lo que esencialmente viene a decir que los tiempos que el sistema mantiene un comportamiento cuántico coherente no son muy prolongados. Sin embargo se han ido encontrando formas con el tiempo de disminuir la sensibilidad al ruido exterior.

El transmón se define como un qubit semiconductor de carga diseñado para tener una menor sensibilidad al ruido de carga. Dado que se construye a partir de una versión modificada de un qubit idealizado como es la caja de pares de Cooper, comenzaremos ahí nuestra discusión para luego ir ganando más profundidad en la discusión de uno de los paradigmas más prometedores para el futuro de la computación cuántica. Fue propuesto inicialmente en el año 2007 y han pasado a convertirse en la arquitectura líder de qubits superconductores. Se han conseguido tiempos de coherencia $\sim 100\mu s$, se ha demostrado entrelazamiento entre múltiples qubits, entre otros logros.

6.1. Teoría: la caja de pares de Cooper

La caja de pares de Cooper (de ahora en adelante CPB) es el qubit de carga "prototipo". Esto es, un qubit donde la carga es el grado de libertad utilizado para las interacciones y los acoplamientos. En su forma más básica consiste en una isla superconductora donde los pares de Cooper se transportan por efecto túnel vía una unión Josephson. Podemos observar esta estructura en la figura que se muestra a continuación, donde vemos una implementación física en (a) y su traducción a un esquema en (b) donde la caja con una cruz representa la unión Josephson.

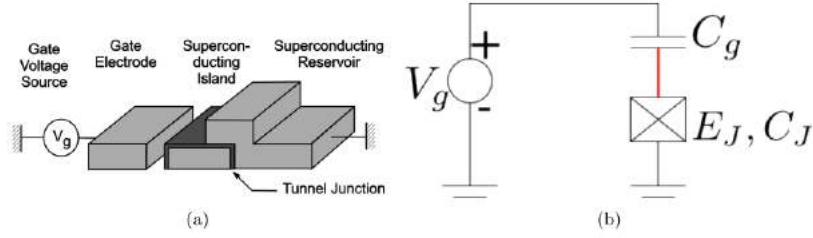


Figura 6.1: Caja de pares de Cooper sencilla.

El hamiltoniano del circuito de la Figura 6.1(b) se deriva en el Apéndice A de [11] a partir del lagrangiano calculando la parte de la energía cinética y potencial por separado y luego mediante la transformada de Legendre ya conocida de la mecánica clásica. Así, el resultado al que se llega es el siguiente:

$$H = \frac{(Q_J - C_g V_g)^2}{2C_\Sigma} - E_J \cos \delta \quad (6.1)$$

donde $C_\Sigma = C_g + C_J$ es la capacidad de total de la isla superconductora, Q_J es la carga de la isla y δ es la diferencia de fase entre los extremos de la unión.

La ecuación (6.1) se puede reescribir englobando algunas cantidades bajo un nuevo nombre. La escala de la energía de carga viene determinada por $E_C = e^2/2C_\Sigma$ y también pasamos de trabajar con la variable de carga a dejar el hamiltoniano en función de la densidad de portadores $n = Q_J/(2e)$, que viene a ser el número de pares de Cooper en el interior de la isla:

$$H = 4E_C(n - n_g)^2 - E_J \cos \delta \quad (6.2)$$

donde $n_g = C_\Sigma V_g/(2e)$ recibe el nombre de *offset* de carga efectivo. Esta nueva forma del hamiltoniano será con la que trabajaremos de ahora en adelante ya que refleja rápidamente las escalas de energía en las que nos movemos.

Unión dividida

En la práctica, la forma esquemática del circuito es ligeramente más complicada que la vista en la Figura 6.1. Normalmente se implementa el qubit con una caja de pares de Cooper *partida*, conocida en inglés como *split Cooper Pair Box (sCPB)*. Se sustituye la unión Josephson individual por dos uniones en paralelo aunque no tiene una gran repercusión ya que de manera efectiva es como si siguiéramos teniendo una única unión JJ. Esto es vital porque el hamiltoniano visto en la ecuación (6.2) para una CPB sencilla también se aplica a este nuevo circuito, y además permite ajustar los parámetros del qubit (entre ellos la frecuencia a la que opera) lo cual será muy útil a la hora de implementar las puertas lógicas.

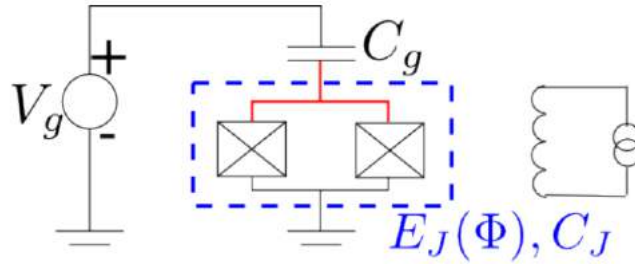


Figura 6.2: Caja de pares de Cooper partida.

Para cuantizar el circuito CPB en régimen de dominancia para la energía de carga almacenada en el condensador ($E_C \gg E_J$) escogemos la base natural de estados del sistema $\{|n\rangle\}$ etiquetados por el número de excedentes de pares de Cooper en la isla superconductora.

$$H = 4E_C(n - n_g)^2 |n\rangle \langle n| - \frac{E_J}{2} \left(\sum_n |n+1\rangle \langle n| + |n-1\rangle \langle n| \right) \quad (6.3)$$

¿Cómo conseguimos ahora que un par de niveles de energía estén bien separados de los demás para considerar el hamiltoniano como un sistema de dos niveles? La respuesta está en el término n_g , que en el caso de CPB siempre tiende al punto dulce: $n_g \approx 1/2$. De este modo, el término de carga estará degenerado respecto de $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ y solo el término de la unión JJ puede romper dicha degeneración. Al cumplirse que ($E_C \gg E_J$), el resto de niveles energéticos estarán bien separados de los dos primeros estados.

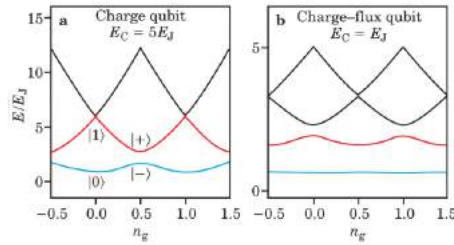


Figura 6.3: Niveles de energía de un circuito CPB en función de n_g .

CPB capacitiva

Vamos a explorar los beneficios de trasladar el qubit de carga a un régimen de $E_J \gg E_C$, un escenario completamente diferente al habitual. ¿Cuál es la importancia de ajustar bien este ratio entre las dos escalas de energía del circuito? Pues se nos plantea un dilema, ya que la elección de este cociente afecta tanto a la anarmonicidad del dispositivo como a su sensibilidad al ruido de carga.

Un ratio bajo crea un espectro de energías que depende fuertemente de n_g siendo así muy susceptible al ruido ambiente de carga. Para combatirlo se puede considerar aumentar el ratio E_J/E_C para reducir la influencia del término de offset, produciendo así un qubit de carga-flujo.

Sin embargo, un ratio bajo es lo que aporta una alto grado de anarmoni-

cidad al sistema. La separación entre los niveles de energía no es homogénea por lo que podemos seleccionar transiciones específicas entre niveles mediante pulsos. Y si decidiéramos aumentarlo perderíamos esta característica y el circuito se asemejará al de un oscilador armónico con una separación uniforme entre niveles, lo cual no nos interesa.

En resumen, la necesidad de anarmonicidad entre los niveles de energía nos inclina más por valores bajos del ratio E_J/E_C , pero las ventajas de una menor sensibilidad al ruido de carga decanta la balanza por valores más elevados. El principal problema ahora consiste en buscar un equilibrio entre ambas propiedades y encontrar una relación entre energías que lo favorezca.

Anarmonicidad

Cuando el ratio aumenta, el término $\cos \delta$ domina sobre los demás provocando que los estados localizados en cada pozo de desacoplan más y más entre sí. El resultado en este caso es que la anarmonicidad, calculándola como la diferencia relativa entre las dos primeras frecuencias de transición, decae con la siguiente dependencia:

$$\frac{E_{12} - E_{01}}{E_{01}} \approx -(8E_J/E_C)^{-1/2} \quad (6.4)$$

Dispersión de carga

Por el otro lado tenemos la dependencia de los niveles de energía con el término n_g , y la altura de las barreras de potencial con el término E_J/E_C . Así, en barreras altas, los efectos de la estructura de bandas y por tanto la dependencia con n_g son suprimidos exponencialmente por grandes E_J/E_C . Este hecho es importante para entender por qué realmente se prefiere que este término sea grande. La dispersión de carga decae exponencialmente rápido

mientras que la anarmonicidad decrece más lentamente. Conseguimos reducir la sensibilidad al ruido y mantener cierto grado de niveles de energía anarmónicos. Esto se consigue añadiendo un condensador en paralelo a la unión Josephson con una capacidad C_B mucho mayor que C_J . En este tipo de circuitos tendremos que E_C se encuentra en los cientos de MHz y E_J en las decenas de GHz.

Terminamos esta sección con el circuito efectivo del transmón de forma esquemática.

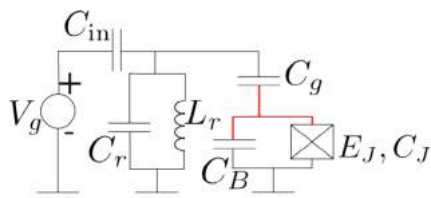


Figura 6.4: Esquema del circuito efectivo del transmón.

6.2. Desarrollo actual

El transmón se ha ido modificando a nivel conceptual desde su nacimiento en 2007, pero los aspectos más fundamentales del mismo se mantienen a día de hoy. El rápido crecimiento de esta arquitectura se demuestra por la tendencia que se observa en la siguiente figura:

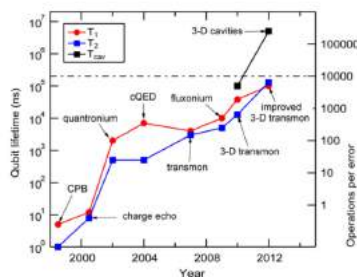


Figura 6.5: Evolución de los tiempos de coherencia de distintos qubits.

Uno de los casos más interesante, también de los más recientes y que más expectación ha generado ha sido el proyecto de ordenador cuántico de Google. En un artículo científico publicado en la revista Nature a finales de 2019 [12] anunciaron haber alcanzado la supremacía cuántica con Sycamore, un procesador que dispone de un array bidimensional con hasta 54 qubits basados en el transmón, por lo que son de tipo superconductor. En dicho artículo aseguran que su proyecto de computador cuántico ha tardado 200 segundos en *samplear* un millón de veces una instancia de un circuito cuántico. Según sus benchmarks, estiman que esa misma tarea tardaría en torno a 10000 años en completarse en uno de los supercomputadores más potentes que haya ahora mismo en operación. También aseguran que este dramático aumento de velocidad en la ejecución de dicha tarea es un logro experimental que corrobora la supremacía cuántica, al menos para esa tarea en concreto.

Capítulo 7

Conclusiones

Lograr la supremacía cuántica nos permitiría llevar a cabo simulaciones de sistemas físicos y otras operaciones matemáticas que no están al alcance de los supercomputadores clásicos más potentes del mundo. Algunos ejemplos de estas aplicaciones serían algoritmos basados en el camino aleatorio cuántico como sería el caso de una molécula que se desplaza por un líquido o por un gas; por otro lado tendríamos las transformadas de Fourier cuánticas que se emplean por ejemplo en el algoritmo de factorización de Shor. Todos estos problemas tienen una clase de complejidad distinta en un computador cuántico que en cualquier computador clásico.

Este trabajo nos ha permitido recorrer de manera estructurada todas las áreas esenciales para comprender en qué consiste la computación cuántica, de dónde viene todo su potencial teórico, cómo implementarla mediante sistemas físicos reales hasta llegar al caso específico del transmón, uno de los modelos con más proyección de futuro que hay a día de hoy. La idea ahora es que este texto pueda servir como referencia a quien desee introducirse en el apasionante campo de la computación cuántica.

CONCLUSIONES

Con este campo se abren una gran cantidad de caminos de gran interés y que darán mucho que hablar en un futuro no muy lejano, como la criptografía cuántica, nuevas formas de comunicación o la capacidad de simular sistemas que a día de hoy nos resultan imposibles con la computación clásica. Sin duda se trata de un campo que irá abriendo cada vez más líneas de investigación.

Bibliografía

- [1] C. E. Shannon. A Mathematical Theory of Communication. *Bell System Technical Journal*, 27(4):623–656, 1948.
- [2] John Preskill. Quantum computing and the entanglement frontier. pages 1–18, 2012.
- [3] C. Cohen-Tannoudji. *Quantum mechanics: Volume 2*. 2019.
- [4] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical Review*, 47(10):777–780, may 1935.
- [5] David P. DiVincenzo. The physical implementation of quantum computation. *Fortschritte der Physik*, 48(9-11):771–783, 2000.
- [6] Carola Meyer. Quantum Computing with Semiconductor Quantum Dots. 2002.
- [7] M. H. Holzscheiter. Ion-Trap Quantum Computation. *Los Alamos Science*, 27, 2002.
- [8] B. E. Kane. A silicon-based nuclear spin quantum computer. *Nature*, 393, 1998.

BIBLIOGRAFÍA

- [9] London F. and London H. The electromagnetic equations of the supraconductor. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A - Mathematical and Physical Sciences*, 149(866):71–88, mar 1935.
- [10] M. H. Devoret, A. Wallraff, and J. M. Martinis. Superconducting Qubits: A Short Review. 2004.
- [11] Sam Bader. The Transmon Qubit Theory. 2013.
- [12] Frank Arute, Kunal Arya, Ryan Babbush, Dave Bacon, Joseph C Bardin, Rami Barends, Rupak Biswas, Sergio Boixo, Fernando G S L Brandao, David A Buell, Brian Burkett, Yu Chen, Zijun Chen, Ben Chiaro, Roberto Collins, William Courtney, Andrew Dunsworth, Edward Farhi, Brooks Foxen, Austin Fowler, Craig Gidney, Marissa Giustina, Rob Graff, Keith Guerin, Steve Habegger, Matthew P Harrigan, Michael J Hartmann, Alan Ho, Markus Hoffmann, Trent Huang, Travis S Humble, Sergei V Isakov, Evan Jeffrey, Zhang Jiang, Dvir Kafri, Kostyantyn Kechedzhi, Julian Kelly, Paul V Klimov, Sergey Knysh, Alexander Korotkov, Fedor Kostritsa, David Landhuis, Mike Lindmark, Erik Lucero, Dmitry Lyakh, Salvatore Mandrà, Jarrod R Mcclean, Matthew Mcewen, Anthony Megrant, Xiao Mi, Kristel Michielsen, Masoud Mohseni, Josh Mutus, Ofer Naaman, Matthew Neeley, Charles Neill, Murphy Yuezhen Niu, Eric Ostby, Andre Petukhov, John C Platt, Chris Quintana, Eleanor G Rieffel, Pedram Roushan, Nicholas C Rubin, Daniel Sank, Kevin J Satzinger, Vadim Smelyanskiy, and Kevin J Sung. Quantum supremacy using a programmable superconducting processor. *Nature*, 574(July), 2019.