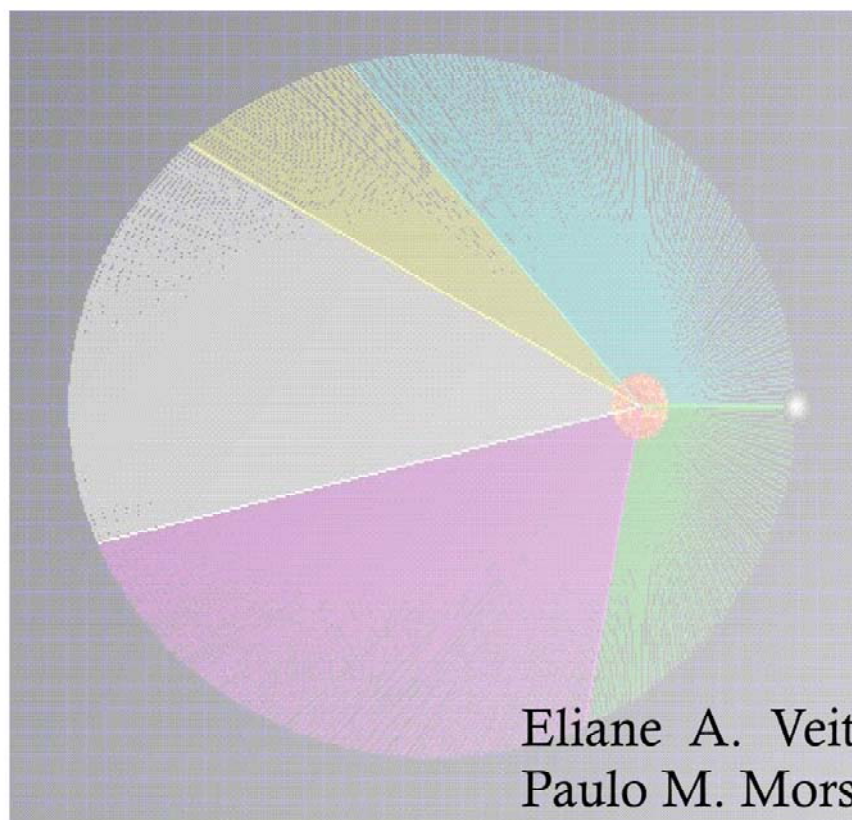


# Física Geral Universitária: Mecânica



Porto Alegre  
2004



## APRESENTAÇÃO

Uma boa formação em Física Básica, nos cursos de Ciências Exatas, é determinante para um bem sucedido transcurso da vida acadêmica do estudante. E uma boa formação em Física, em nível universitário, requer o uso da linguagem matemática, desde os conceitos mais elementares de álgebra linear e vetorial, de trigonometria, até noções básicas de Cálculo Diferencial e Integral. Se os estudantes que ingressam na Universidade têm deficiências em Matemática, é hora de vencê-las. Muitas destas deficiências são decorrentes de um ensino compartimentado, no nível médio, com os tópicos sendo ensinados de modo desconexo, em que os conhecimentos prévios dos estudantes não são levados em consideração, além da sempre constatada falta de motivação para o estudo. Dentro do próprio meio universitário, as disciplinas de Cálculo e Física costumam ser introduzidas em paralelo, sem a necessária integração entre elas. Se, de fato, são estes os maiores problemas enfrentados pelos estudantes ao cursarem as disciplinas introdutórias de Física em um curso universitário de Ciências Exatas, cremos que esta obra poderá ter um papel significativo no processo de ensino-aprendizagem de Física em nível introdutório. Por quê? Essencialmente, porque três foram as nossas constantes preocupações.

i) Procuramos apresentar os tópicos indispensáveis de Matemática gradativamente, na medida em que são requeridos para o desenvolvimento do conteúdo de Física, e partindo de noções bem elementares. Por exemplo, inexistiu uma Unidade dedicada exclusivamente ao estudo de vetores. Noções elementares de grandezas vetoriais são introduzidas na Primeira Unidade, algumas operações com vetores são trabalhadas na Segunda Unidade, o produto escalar é definido na Terceira Unidade e, somente na Sétima Unidade, é introduzido o produto vetorial. Em relação às noções básicas de Cálculo Diferencial e Integral, optamos por introduzir, de modo intuitivo, as noções de limite, derivada e integral, já na Primeira Unidade, de forma a permitir sua utilização, em concomitância com o aprendizado que o estudante está tendo, de maneira formal, em disciplina específica para tal. Sistemáticamente voltamos a estas noções, de modo a dar oportunidade ao estudante de aprender um pouco mais de Física, através do Cálculo, e um pouco mais de Cálculo, através da Física. Por isso, nem sempre seguimos a seqüência usual dos livros-texto. O movimento circular e sua dinâmica, por exemplo, constituíram o caminho natural que adotamos para a introdução das oscilações harmônicas.

ii) Levamos em conta as dificuldades usuais dos ingressantes na Universidade, baseados em nossa experiência de mais de vinte anos de docência, e nas pesquisas em ensino que apontam a importância das concepções espontâneas no aprendizado da Física. Procuramos iniciar todos os tópicos de modo que mesmo o estudante que jamais tenha estudado Física tenha condições de, com interesse e dedicação, acompanhar o raciocínio. Praticamente todos os conceitos apresentados são ilustrados com animações computacionais, a maior parte delas interativas, estimulando o estudante a se tornar ativo no processo de aprendizagem.

iii) Buscamos motivar o estudante de várias formas. Por um lado, o uso do computador, por si só, já será motivação para muitos estudantes. Também, mesclamos uma apresentação com elementos históricos com tópicos mais reais e atuais do que os tradicionalmente tratados em um curso introdutório de Física. Como ainda não deve ser exigido dos estudantes o domínio

de técnicas de solução de equações diferenciais, deixamos esta tarefa para o computador, enquanto ao estudante cabe explorar modelos e construí-los. Exploramos, nas listas de exercícios, com discussões algo detalhadas, tópicos que acreditamos motivantes como, por exemplo, regimes caóticos.

Dividimos o conteúdo em oito Unidades, cobrindo os tópicos usualmente tratados em um curso introdutório de Mecânica. Uma lista de exercícios acompanha cada Unidade — na Primeira Unidade, acrescentamos uma relação dedicada exclusivamente à prática do Cálculo. As listas não podem ser consideradas suficientes, pelo professor, que deve acrescentar a elas problemas usuais, encontrados em muitos manuais tradicionais. Sabemos que, nessa fase, o estudante deve ser instado a exercitar-se o máximo possível na solução de problemas.

O sucesso no uso deste material, como de qualquer material didático, depende fortemente de sua boa aplicação. Temos, a nos ajudar nesse sentido, o aplicativo (*software*) adotado, Modellus. Concebido pelo Professor Vitor Duarte Teodoro, da Universidade Nova de Lisboa, e desenvolvido por João Paulo Duque Vieira e Filipe Costa Clérigo, desde o lançamento de sua primeira versão, em 1996, o Modellus já recebeu importantes prêmios internacionais. Seu uso é livre, para propósitos educacionais, e o endereço de sua página é

<http://phoenix.sce.fct.unl.pt/modellus/>.

Em 1997, iniciamos uma experiência com o uso do Modellus no ensino de Física Geral para estudantes de Engenharia, na Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Nosso entusiasmo ao sermos apresentados ao Modellus somou-se à oportunidade que tivemos para a montagem de um laboratório informatizado de ensino, com recursos do Ministério da Educação, através da Fundação CAPES. Foi, então, criado o CREF — Centro de Referência para o Ensino de Física —, no Instituto de Física da UFRGS, cujas primeiras atividades incluíam a aplicação de nosso projeto. Este livro é resultado dessa experiência. Optamos pelo aplicativo Modellus porque, entre outros atributos, permite que se construa um modelo em que as equações são escritas do mesmo modo que o professor costuma escrever na lousa ou como são apresentadas nos livros. Assim, ou o estudante, por entender o que o professor escreve, será capaz de utilizar o aplicativo com facilidade, ou o aplicativo poderá lhe ser útil no processo de compreensão da linguagem matemática com a qual o professor procura se comunicar.

Nossos principais colaboradores foram os estudantes. A eles agradecemos toda a disposição e paciência que tiveram conosco, cobaias voluntárias admiráveis que foram.

Além dos estudantes, queremos manifestar nosso reconhecimento particular aos Professores Darcy Dillenburg e Silvio Luiz Souza Cunha que, no meio acadêmico-administrativo, nos subsidiaram ao longo do desenvolvimento do Projeto. Merecem registro especial o Professor Vitor Duarte Teodoro, da Universidade Nova de Lisboa, Portugal, incentivador primeiro e constante do Projeto, o Professor Ernesto Martín-Rodríguez, da Universidade de Murcia, Espanha, pela cuidadosa leitura, e nosso colega e grande amigo Professor Victor Hugo Guimarães, que leu e releu criteriosamente o texto, conferiu cada exercício, cada animação, tantas vezes quantas foram as modificações que fizemos durante o desenvolvimento do

Projeto. Sem o interesse contínuo que demonstraram e sem suas construtivas críticas, o que estamos oferecendo ao estudante não teria o mesmo valor.

Esperamos estar contribuindo para uma maior motivação do estudante de Ciências Exatas, e agradecemos qualquer comentário, crítica, contribuição que nos for encaminhada.

Porto Alegre, março de 2004.

Eliane Angela Veit  
([eav@if.ufrgs.br](mailto:eav@if.ufrgs.br))

Paulo Machado Mors  
([mors@if.ufrgs.br](mailto:mors@if.ufrgs.br))



## NOTA AO ESTUDANTE

Basta um computador: você não precisa saber computação!

O *software* Modellus permite que você construa modelos, em qualquer assunto: Matemática, Física, Química, Biologia, Economia, Artes e outros. Trata-se de uma ferramenta riquíssima, no entanto de uso extremamente simples. Não se preocupe em aprender a utilizá-lo, pois isto ocorrerá naturalmente. Este é um exemplo de aprendizado que se dá com o uso, com a prática. Você pode utilizá-lo, também, para explorar modelos já criados. Isto ocorrerá enquanto você estuda este livro. Há mais de trezentos modelos, que acompanham o livro, criados por nós. Caberá a você explorá-los para facilitar a aprendizagem de Física (e um pouco de Cálculo Diferencial e Integral). Instale o *software* na máquina, e vá utilizando-o, à medida que progride no estudo do livro.

O computador não substitui o livro. O computador é algo novo (já nem tanto...) que veio agregar-se ao conjunto de recursos pedagógicos a que estamos acostumados. Então, além do livro, do laboratório, do caderno, do lápis, você tem agora o computador. Nosso texto foi escrito para ser lido no livro. Se quiséssemos que você lesse o texto na tela, você estaria adquirindo apenas um *CD*. O texto impresso, as animações, criadas com o Modellus para serem trabalhadas no computador, e a velha e companheira dupla papel-e-lápis, fazem parte do conjunto de meios materiais que deverão facilitar a sua aprendizagem. Os recursos humanos incluem seu professor, seus colegas e nós, autores do livro. (Por que não? Escreva-nos se quiser fazer algum comentário.) Se você tiver a oportunidade de trabalhar em dupla com algum colega, isto poderá ser ainda mais proveitoso. O diálogo e a troca de idéias com os seus colegas poderá auxiliar, em muito, sua aprendizagem (e a deles).

O *CD* que acompanha o livro contém o programa instalador do Modellus. Além disso, oito pastas, com os títulos Tutor1, Tutor2, ..., Tutor8, contêm todas as animações referidas no texto do livro. Assim, ao chegar a uma expressão do tipo "... abra o arquivo abcd.mdl...", você deve abrir, no Modellus, o arquivo abcd.mdl constante da pasta TutorN, se você está estudando a Unidade N, e a animação que criamos para ilustrar determinado tópico se apresentará na tela.

O *PC* funcionará muito melhor se você transferir todo o conteúdo do *CD* para o disco rígido. As animações foram elaboradas na configuração de tela de 1024 x 768 *pixels*.

Se, ao longo do seu curso introdutório de Mecânica, você sentir satisfação em estudar e aprender, esperamos ter contribuído para isso. Se, ao término de seu curso, você continuar brincando com o Modellus, inclusive construindo modelos, inventando, utilizando o *software* para os mais diversos propósitos, então faça-nos saber disso, para que exultemos de satisfação.

Tenha sempre em mente que não é na primeira leitura que se aprende.

Seja bem-vindo!

Porto Alegre, março de 2004.

Os Autores





## SUMÁRIO

NOTA AO ESTUDANTE.....	7
PRIMEIRA UNIDADE: MOVIMENTO UNIDIMENSIONAL.....	13
INICIANDO.....	13
O CÁLCULO NO ESTUDO DO MOVIMENTO.....	14
A NECESSIDADE DA ESCOLHA DE UM REFERENCIAL.....	14
UNIDADES.....	15
MOVIMENTO EM LINHA RETA.....	16
O CONCEITO DE DESLOCAMENTO.....	17
O CONCEITO DE VELOCIDADE.....	18
DERIVADA: MEDIDA DE VARIAÇÃO.....	21
O CONCEITO DE ACELERAÇÃO.....	23
ALGUNS EXEMPLOS.....	24
OBSERVAÇÃO IMPORTANTE.....	25
DERIVANDO POLINÔMIOS.....	25
QUANDO A ACELERAÇÃO É CONSTANTE.....	26
QUEDA LIVRE.....	28
A IDÉIA DE INTEGRAL.....	30
VETORES E ESCALARES.....	31
INTEGRAL DEFINIDA.....	31
TRABALHAMOS COM MODELOS.....	34
A RELATIVIDADE GALILEANA.....	34
EXERCÍCIOS DA PRIMEIRA UNIDADE.....	37
I – PRATIQUE UM POUCO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL	
UTILIZANDO O MODELLUS.....	37
II – CINEMÁTICA EM UMA DIMENSÃO.....	40
SEGUNDA UNIDADE: MOVIMENTO BIDIMENSIONAL.....	47
VETORES.....	47
SOMANDO VETORES.....	48
MULTIPLICANDO POR ESCALAR.....	50
DECOMPOSIÇÃO DE VETORES.....	50
DE COORDENADAS RETANGULARES $(r_x, r_y)$ PARA POLARES $(r, \theta)$ .....	51
VETOR POSIÇÃO.....	53
DESLOCAMENTO.....	54
VETORES UNITÁRIOS.....	54
SOMANDO COMPONENTES.....	55
VELOCIDADE.....	56
ACELERAÇÃO.....	57
UM EXERCÍCIO SIMPLES.....	58
MOVIMENTO DE PROJÉTEIS.....	60
MOVIMENTO CIRCULAR UNIFORME.....	64
A RELATIVIDADE GALILEANA.....	65
EXERCÍCIOS DA SEGUNDA UNIDADE.....	67
TERCEIRA UNIDADE: MOVIMENTOS PERIÓDICOS.....	75
MOVIMENTO CIRCULAR.....	75
GRANDEZAS CINEMÁTICAS.....	76

QUANDO A ACELERAÇÃO ANGULAR É CONSTANTE .....	77
EXPRESSANDO-SE NA FORMA VETORIAL .....	78
MOVIMENTO CIRCULAR UNIFORME .....	80
ACELERAÇÃO CENTRÍPETA .....	82
DERIVADAS DAS FUNÇÕES SENO E CO-SENO .....	82
RELAÇÕES ENTRE GRANDEZAS ROTACIONAIS E TRANSLACIONAIS .....	83
MOVIMENTO CIRCULAR NÃO UNIFORME .....	84
MOVIMENTOS REPETITIVOS .....	85
EXEMPLO: VÍNCULO ENTRE POLIAS .....	86
MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES .....	87
EXEMPLO: SISTEMA MASSA-MOLA .....	87
MOVIMENTO HARMÔNICO: PROJEÇÃO DE MOVIMENTO CIRCULAR.....	87
PRODUTO ESCALAR DE DOIS VETORES .....	88
VOLTANDO AO MOVIMENTO CIRCULAR.....	89
EXERCÍCIOS DA TERCEIRA UNIDADE.....	91
QUARTA UNIDADE: AS LEIS DE NEWTON PARA O MOVIMENTO .....	101
DINÂMICA .....	101
PRIMEIRA LEI.....	101
SEGUNDA LEI.....	102
TERCEIRA LEI .....	102
PESO .....	103
UNIDADES .....	104
UM EXEMPLO TRIVIAL.....	104
OS TIPOS DE INTERAÇÃO .....	105
UM EXEMPLO MUITO SIMPLES .....	106
UM EXEMPLO SIMPLES .....	108
INCLUINDO O ATRITO .....	109
COEFICIENTES DE ATRITO .....	109
CORPO SOBRE PLANO INCLINADO, COM ATRITO .....	110
PESO APARENTE .....	112
A SEGUNDA LEI COMO UMA EQUAÇÃO DE MOVIMENTO.....	113
CAINDO EM MEIO VISCOSO .....	114
DINÂMICA DO MOVIMENTO CIRCULAR.....	115
SISTEMA MASSA-MOLA .....	116
PÊNDULO SIMPLES COM PEQUENAS AMPLITUDES.....	117
O PRINCÍPIO DA EQUIVALÊNCIA.....	120
EXERCÍCIOS DA QUARTA UNIDADE.....	121
QUINTA UNIDADE: A ENERGIA E SUA CONSERVAÇÃO.....	127
TRABALHO .....	127
TRABALHO DE FORÇA VARIÁVEL .....	128
TRABALHO REALIZADO PELO ATRITO.....	131
FORÇAS CONSERVATIVAS .....	132
UMA FORÇA NÃO CONSERVATIVA.....	133
ENERGIA CINÉTICA.....	134
TEOREMA DO TRABALHO-ENERGIA CINÉTICA.....	134
TEOREMA DO TRABALHO-ENERGIA CINÉTICA PARA UM SISTEMA DE PARTÍCULAS .....	135
ENERGIA POTENCIAL .....	135
ENERGIA MECÂNICA E SUA CONSERVAÇÃO.....	136

ENERGIA POTENCIAL GRAVITACIONAL .....	137
ENERGIA POTENCIAL ELÁSTICA .....	139
RELAÇÃO ENTRE FORÇA CONSERVATIVA E SUA CORRESPONDENTE	
ENERGIA POTENCIAL .....	141
PONTOS DE EQUILÍBRIO .....	141
REGIÕES PROIBIDAS .....	142
O PÊNDULO SIMPLES E SUA ENERGIA POTENCIAL .....	143
MAIS DE UM TIPO DE POTENCIAL .....	144
QUANDO O SISTEMA É NÃO CONSERVATIVO .....	145
POTÊNCIA .....	146
POTÊNCIA MÉDIA .....	147
EXERCÍCIOS DA QUINTA UNIDADE .....	149
SEXTA UNIDADE: O MOMENTUM LINEAR E SUA CONSERVAÇÃO .....	151
COLISÕES .....	151
MOMENTUM LINEAR .....	151
IMPULSO .....	152
FORÇAS IMPULSIVAS .....	153
CENTRO DE MASSA .....	154
FORÇAS INTERNAS NÃO PERTURBAM O CENTRO DE MASSA .....	156
DO DISCRETO PARA O CONTÍNUO .....	157
CONSERVAÇÃO DO MOMENTUM LINEAR .....	158
ALGUNS EXEMPLOS .....	160
CHOQUES ELÁSTICOS .....	162
REFERENCIAL DO CENTRO DE MASSA .....	164
COLISÕES PERFEITAMENTE INELÁSTICAS .....	165
O EXEMPLO CLÁSSICO DA EXPLOSÃO .....	165
JOGO DE BILHAR .....	166
EXERCÍCIOS DA SEXTA UNIDADE .....	171
SÉTIMA UNIDADE: ROTAÇÕES .....	179
TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO DE CORPO RÍGIDO .....	179
PRODUTO VETORIAL DE DOIS VETORES .....	179
TORQUE PRODUZIDO POR UMA FORÇA .....	181
UMA PERGUNTA .....	183
MESMA DIMENSÃO, NATUREZAS DIFERENTES .....	184
MOMENTUM ANGULAR DE UMA PARTÍCULA .....	184
QUANDO A PARTÍCULA DESCREVE UM MOVIMENTO CIRCULAR UNIFORME	
.....	185
MOMENTO DE INÉRCIA DE UMA PARTÍCULA .....	185
OS EXEMPLOS SEGUINTE SÃO MUITO IMPORTANTES! .....	186
SISTEMA DE PARTÍCULAS .....	187
CONTÍNUO DE MATÉRIA .....	188
ROTAÇÃO DE CORPO RÍGIDO EM TORNO DE EIXO FIXO .....	189
PÊNDULO FÍSICO .....	189
CÁLCULO DO MOMENTO DE INÉRCIA DE CORPOS RÍGIDOS .....	190
TEOREMA DE STEINER .....	191
CONSERVAÇÃO DO MOMENTUM ANGULAR .....	193
PÊNDULO DE TORÇÃO .....	195
IMPULSO ANGULAR .....	197
JOGANDO TÊNIS .....	198

ROLAMENTO .....	199
ROLANDO NO PLANO INCLINADO .....	202
POTÊNCIA .....	205
EXEMPLO DE VÍNCULO ENTRE GRANDEZAS DE TRANSLAÇÃO E DE ROTAÇÃO.....	207
O IÔ-IÔ .....	209
UMA COLISÃO INELÁSTICA.....	209
MAIS UM EXEMPLO DE CONSERVAÇÃO DE MOMENTUM ANGULAR .....	210
EXERCÍCIOS DA SÉTIMA UNIDADE.....	212
OITAVA UNIDADE: GRAVITAÇÃO.....	218
NEWTON E A GRAVITAÇÃO .....	218
A ATRAÇÃO GRAVITACIONAL É CENTRAL E ISOTRÓPICA.....	219
POR QUE UMA LEI EM $1/r^2$ ? .....	220
AS LEIS DE KEPLER.....	220
POR QUE UMA LEI EM $1/r^2$ ? .....	222
O PROBLEMA DE DOIS CORPOS .....	222
POR QUE UMA LEI EM $1/r^2$ ? .....	223
AS CÔNICAS .....	223
AINDA O PROBLEMA DE DOIS CORPOS .....	223
O PROBLEMA DE TRÊS CORPOS.....	224
O VALOR DE $g$ NA SUPERFÍCIE DA TERRA.....	224
MASSA INERCIAL, MASSA GRAVITACIONAL.....	225
A ACELERAÇÃO DA GRAVIDADE A UMA ALTITUDE QUALQUER.....	225
A LUA CAINDO NA TERRA .....	227
IMPONDERABILIDADE .....	227
DEMONSTRANDO A SEGUNDA LEI DE KEPLER.....	228
CAMPO GRAVITACIONAL.....	230
CAMPO GRAVITACIONAL NO EXTERIOR DE UMA ESFERA HOMOGÊNEA.....	231
CAMPO GRAVITACIONAL NO INTERIOR DE UMA ESFERA HOMOGÊNEA.....	234
ENERGIA POTENCIAL GRAVITACIONAL .....	235
CAMPO GRAVITACIONAL ESCALAR .....	237
EXERCÍCIOS DA OITAVA UNIDADE .....	240

## PRIMEIRA UNIDADE: MOVIMENTO UNIDIMENSIONAL

Disparada na vertical, a pedra subiu acima da árvore, ponto negro que se reduzia contra o fundo azul do céu, quase na fronteira branca de uma pequena nuvem redonda, e, chegando ao alto, parou por um instante, como quem aproveita para ver a paisagem. Depois, em jeito de desmaio, deixou-se cair, já decidido o ponto em que outra vez se acomodaria na terra. (José Saramago, *Manual de pintura e caligrafia*, Companhia das Letras, 1992, p.130.)

### INICIANDO

Você está iniciando seu curso superior de Física e portanto, com certeza, já tem alguma noção sobre os temas tratados por esta ciência. O que você já aprendeu até agora poderá ajudá-lo em seu estudo atual mas, na verdade, o que você já estudou exatamente não é assim tão importante. Importa, sim, que você já tenha adquirido uma atitude positiva com relação ao estudo.

Este texto o levará a desenvolver conceitos físicos e matemáticos simultaneamente, sempre utilizando seu computador como ferramenta. Trabalharemos no ambiente do programa Modellus, no que chamaremos de *cenários*, onde realizaremos a simulação de eventos físicos e a experimentação de conceitos e de modelos. Se você ainda não está muito seguro no próprio manuseio do programa Modellus, isto virá rapidamente ao longo de seu estudo. A cada cenário corresponde um arquivo com terminação .mdl, nas pastas Tutor1, Tutor2, etc., correspondentes, respectivamente, à Primeira Unidade, à Segunda Unidade, etc.

Nossa porta de entrada no mundo da Física será a Mecânica Newtoniana. Você terá a oportunidade de apreciar a beleza de uma estrutura tão elegantemente elaborada a ponto de ser apresentada, muitas vezes, como protótipo de teoria científica. A base de nosso estudo é a

grande obra de Sir Isaac Newton, editada em 1686, os famosos *Principia*, forma abreviada com que nos referimos aos *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*.

Newton teve Galileu como precursor. Foi Galileu quem derrubou dois milênios de prevalência das idéias aristotélicas, e é hoje considerado como o iniciador daquilo que conhecemos e aceitamos como Ciência.

## O CÁLCULO NO ESTUDO DO MOVIMENTO

Começaremos com a descrição matemática do movimento. É o que chamamos de Cinemática. A Cinemática não se preocupa com as causas dos movimentos. Será aqui que teremos a oportunidade de explorar conceitos matemáticos importantíssimos, como os do Cálculo Diferencial e Integral. Podemos dizer que, estudando a Cinemática, estaremos atuando num excelente laboratório para o início do aprendizado da Matemática Superior.

Se, portanto, nosso objetivo primeiro é o estudo do movimento, talvez seja muito correto colocarmos a questão: o que é o movimento? Mas isso nos remete a uma questão mais fundamental, o conceito de referencial. Vamos, então, abordá-lo.

## A NECESSIDADE DA ESCOLHA DE UM REFERENCIAL

Intuitivamente, você sempre lidou com mudanças de referencial. Quando você viaja em um automóvel que se desloca a 80 km/h, e outro automóvel o ultrapassa a 100 km/h, esses valores estão sendo considerados em relação a um referencial fixo em relação à estrada. O automóvel que o ultrapassa se move a 20 km/h, em relação ao seu automóvel, ou seja, aquele automóvel viaja, no referencial fixo ao seu automóvel, a 20 km/h. E você, em relação ao seu próprio automóvel, quantos quilômetros se move por hora? É claro que a resposta é: nenhum; ou, mais cientificamente falando, sua velocidade será nula, no referencial fixo ao seu próprio automóvel. Ou, ainda, você estará em repouso, no referencial do seu automóvel. Você vê, portanto, que o movimento é algo de constatação explicitamente dependente de referencial. Trabalhem mais sistematicamente esses conceitos.

Começemos pelo movimento unidimensional. São três as dimensões espaciais, mas muitos movimentos ocorrem ao longo unicamente de uma direção. É o caso, por exemplo, do

automóvel que se move em uma estrada reta. Neste caso, adotamos como referencial o eixo cartesiano que tem a direção de interesse, com o sentido escolhido arbitrariamente da forma que nos for mais confortável. Chamemos este eixo de eixo dos  $xx$ , e passemos ao computador. Vamos inaugurar aquilo que será nossa rotina ao longo deste texto, trazendo para a tela o cenário do arquivo `ref_pos1.mdl`. Aqui, nosso objeto de estudo é um personagem que nos acompanhará ao longo de toda nossa aventura de descoberta da Física: um simpático Papai Noel. Na linguagem da Física, ele é o nosso móvel. Em muitos problemas, o móvel é um objeto cuja estrutura não nos interessará. Neste texto, enquanto não chegarmos à Sexta Unidade, onde definiremos o centro de massa de um sistema, nossos móveis serão todos de estrutura desimportante. Na verdade, eles serão tratados como pontos materiais, ou partículas materiais. Isto significa que vamos olhá-los como tendo localização pontual no espaço, onde estará concentrada toda a massa do objeto.

Na animação deste cenário, você coloca o Papai Noel em uma posição qualquer, e vê as indicações dessa posição em quatro referenciais diferentes. Os referenciais  $x_A$ ,  $x_B$  e  $x_C$  têm o centímetro (cm) como unidade de distância. A unidade de distância adotada no referencial  $x_D$  é a polegada ( $1 \text{ in} = 2,54 \text{ cm}$ ). Os referenciais  $x_A$ ,  $x_C$  e  $x_D$  apontam para a direita, o que significa que, neles, os valores da variável posição crescem da esquerda para a direita. No referencial  $x_B$ , dá-se o contrário. A origem (zero) do referencial  $x_C$  não coincide com a dos demais. Colocando o Papai Noel em uma posição qualquer, você tem esta mesma posição espacial localizada por quatro referenciais diferentes, e fica fácil relacionar a medida de um referencial com a de qualquer outro. Por exemplo, a posição  $x_A = 3 \text{ cm}$  equivale à posição  $x_C = 8 \text{ cm}$ . A regra de transformação entre esses dois referenciais é:  $x_C = x_A + L$ , onde  $L = 5 \text{ cm}$ . Identifique as regras de transformação entre  $x_A$  e  $x_B$  e entre  $x_A$  e  $x_D$ .

Nota: Neste texto, separamos a parte inteira da parte decimal de um número por uma vírgula, como é o correto em português. No entanto, o programa foi construído com recursos que adotam a forma inglesa de separação, através de um ponto. Temos certeza de que esta discrepância não o incomodará.

## UNIDADES

Neste primeiro cenário, utilizamos o centímetro e a polegada como unidades de comprimento. O centímetro pertence ao sistema de unidades denominado CGS. Este é o sistema em que as unidades de comprimento, de massa e de tempo são, respectivamente, o centímetro (cm), o grama (g) e o segundo (s). Mais comum, em um curso de Física Geral como o nosso, é o sistema MKS, que adota como unidades básicas o metro ( $1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$ ), o quilograma ( $1 \text{ kg} = 1000 \text{ g}$ ) e o segundo. O MKS serviu de base para o atual Sistema Internacional de Unidades — SI — que é o sistema a que daremos preferência neste texto. Eventualmente, um exemplo poderá ser tratado sem que se escolha um determinado sistema; nesse caso, faremos referência ao fato de estarmos adotando um sistema arbitrário de unidades.

## MOVIMENTO EM LINHA RETA

No cenário do arquivo `pos_dist.mdl` você pode, deslocando a partícula ao longo do eixo referencial, ver a construção do gráfico posição versus tempo, a posição inicial sendo  $x_i = 10 \text{ m}$ . Faça com que a partícula se desloque de muitas maneiras diferentes, e convença-se de que o gráfico  $x$  versus  $t$  representa a posição do Papai Noel em cada instante de tempo, e não a trajetória percorrida por ele. Caso queira rever a animação, mova o cursor na janela Controle. Na mesma animação, constrói-se o gráfico distância percorrida ( $s$ ) versus tempo ( $t$ ), onde a distância percorrida é o comprimento da trajetória (retilínea, neste exemplo) percorrida pelo Papai Noel e que, portanto, nunca pode diminuir à medida que o tempo passa. Consultando a janela Modelo você vê que, realmente, para cada acréscimo  $\Delta x$  à variável posição, acrescenta-se o valor absoluto de  $\Delta x$  à variável distância percorrida. Você poderá estranhar o fato de ver escrita, na janela Modelo, a expressão  $s = s + \text{abs}(\text{deltax})$ , que é, a rigor, algebricamente incorreta. Este é um tipo de expressão muito comum em programação de simulações numéricas. O que ela significa é que, a cada valor anterior da variável  $s$ , devemos adicionar o valor absoluto da variável  $\text{deltax}$ , para obter o novo valor da variável  $s$ , depois de transcorrido um intervalo de tempo escolhido arbitrariamente, o *passo* do programa. Isto fica evidente consultando-se a Tabela 1, onde são listadas as variáveis relevantes do exemplo. Aí, você vê que a animação está sendo realizada adotando-se um passo de  $0,1 \text{ s}$  para o tempo. Também, fica evidente que, deslocando-se o móvel para a esquerda,  $\Delta x$  passa a assumir valores negativos. De maneira geral, a variável  $\Delta x$  é o chamado deslocamento do móvel em um intervalo de tempo considerado. Assim, a cada intervalo de tempo  $\Delta t$  (instante final menos instante inicial) está associado um deslocamento  $\Delta x$  (posição final menos posição inicial).



Nota: Ao trazer um cenário para a tela, algumas janelas estarão abertas, outras não. Para abrir janelas originalmente fechadas e alterar configurações e parâmetros, você precisa fornecer a senha. Adotamos a mesma senha em todos os arquivos. Trata-se, simplesmente, da letra “m”. Os cenários foram elaborados para que surja na tela apenas aquilo que é relevante, em cada caso. No entanto, você pode desativar a senha, quando tiver interesse em “brincar” um pouco mais em um cenário. Mas, atenção ao fazê-lo: há o perigo de se perder informação. Uma maneira de se garantir contra eventuais acidentes é renomear o arquivo em questão, e trabalhar no novo arquivo, preservando o original. Ao fechar o arquivo original, é conveniente fazê-lo sem salvar as alterações ocorridas enquanto ele estava aberto.

## O CONCEITO DE DESLOCAMENTO

Abra, agora, o arquivo pos\_desl.mdl. Aqui, você desloca o móvel a partir da posição inicial  $x_i = 4$  m. Nesta animação, determinamos o deslocamento  $\Delta x$  com relação a esta posição inicial, ocupada pelo móvel no instante inicial  $t_i = 0$ . Assim se, em um certo instante, a posição ocupada pelo móvel for  $x = 9$  m, então o deslocamento correspondente será  $\Delta x = x - x_i = 5$  m. Se, em outro instante qualquer (não importa se anterior ou posterior), o móvel estiver ocupando a posição  $x = 1$  m, o deslocamento correspondente será  $\Delta x = -3$  m. Veja, portanto, que o deslocamento pode ser positivo, negativo, ou nulo. Isto, independente do intervalo de tempo transcorrido. Daí, você já pode perceber que o conceito de deslocamento pode não trazer muita informação sobre o movimento: quem sai de casa às 8 h, passa o dia na Universidade, e retorna para casa às 20 h, terá sofrido um deslocamento nulo, neste intervalo de tempo de doze horas.

Note também, na animação, que duas setas são traçadas, acompanhando o Papai Noel, uma amarela e outra verde. A seta amarela tem sua origem na origem do referencial (ponto  $x = 0$ ) e sua extremidade na posição ocupada pelo Papai Noel. Enquanto estamos lidando com movimento unidimensional, para informar a posição de um móvel, em um dado instante, basta-nos fornecer sua coordenada  $x$  naquele instante. No entanto, quando o movimento não é retilíneo, são necessárias pelo menos duas coordenadas para localizar o móvel. A maneira que utilizaremos para localizar um móvel será através do chamado vetor posição, um vetor com sua origem na origem do referencial e sua extremidade na posição ocupada pelo móvel. Antecipando isto, o vetor posição do Papai Noel, na presente animação, foi desenhado, em amarelo. Já a seta verde tem sua origem na posição inicial, e sua extremidade na posição final

do móvel. É o chamado vetor deslocamento do móvel, no intervalo de tempo considerado. Também o vetor deslocamento, em uma dimensão, é desnecessário: basta nos referirmos ao deslocamento  $\Delta x$ . Aqui, o vetor deslocamento tem módulo (magnitude, intensidade) igual ao valor absoluto de  $\Delta x$ . O módulo de um vetor é uma quantidade essencialmente positiva. Nesta animação unidimensional, um deslocamento positivo significa um vetor deslocamento que aponta no sentido do crescimento dos valores de  $x$  (para a direita, no desenho), um deslocamento negativo significa que o vetor deslocamento está apontando no sentido oposto (para a esquerda).

Nota: em Matemática, a expressão essencialmente positivo significa maior ou igual a zero.

## O CONCEITO DE VELOCIDADE

O móvel tendo se deslocado de  $\Delta x$  em um intervalo de tempo  $\Delta t$ , definimos a velocidade média do móvel, neste intervalo de tempo, como sendo a razão  $\Delta x/\Delta t$ . A notação usual para valor médio de uma grandeza é colocar o símbolo que denota a grandeza entre colchetes, ou sob uma barra horizontal. Também, podemos simplesmente chamar a velocidade média de  $v_{xm}$ . Assim, temos a definição:

$$v_{xm} \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad (\text{I.1})$$

onde  $v_{xm} = \overline{v_x} = \langle v_x \rangle$ , e o símbolo  $\equiv$  denota uma igualdade por definição.

No cenário do arquivo `vel_med1.mdl`, você encontra a elaboração de uma tabela de velocidades médias. Trata-se do movimento regido pela equação  $x = t^2$ . Isto significa que, para qualquer instante  $t$ , você pode determinar a posição  $x$  do objeto, já que conhece a equação que relaciona estas duas variáveis. É o que chamamos de equação de movimento. Neste caso, temos uma equação de movimento muito simples: é uma equação quadrática, onde o tempo aparece elevado ao quadrado. Note que, na janela Modelo, a última linha é um comentário, onde está informado que o sistema de unidades utilizado é o SI. Isto é importantíssimo, pois um movimento que é regido pela equação  $x = t^2$ , no SI, não necessariamente o será pela mesma equação, em outro sistema de unidades. Realmente, nossa equação de movimento poderia ser escrita, mais explicitamente, na forma  $x \text{ (m)} = 1 \text{ (m/s}^2\text{)} \cdot t^2$

(s<sup>2</sup>) : a razão entre  $x$  e  $t^2$  é  $1 \text{ m/s}^2$ , no SI. Em uma linguagem mais rigorosa: é importante notar que  $x$  e  $t$  relacionam-se através de uma constante dimensional. Encontre a equação que rege este mesmo movimento, no sistema CGS.

Voltando ao cenário. A tabela lista valores de velocidade média para intervalos de tempo iguais a um passo que, inicialmente, é feito igual a  $0,20 \text{ s}$ . Este passo é um parâmetro que pode ser alterado acionando-se a tecla Opções da janela Controle (note que, neste cenário, não apropriamos a senha, de modo a permitir a alteração desse parâmetro). Assim, para cada intervalo de tempo  $\Delta t$  igual ao passo, intervalo este iniciando em  $t_1$  e terminando em  $t_2$ , está associado um  $\Delta x$  (deltax, na tabela) facilmente determinado através da equação de movimento. Logo, para cada intervalo de tempo  $\Delta t$ , é possível determinar-se a velocidade média  $v_{xm}$ . Acione a animação, e confira alguns dos resultados listados. Os limites mínimo e máximo da animação são os instantes  $t_{\min} = 1,00 \text{ s}$  e  $t_{\max} = 5,00 \text{ s}$ , respectivamente. Em particular, fixe-se em um intervalo de tempo determinado, por exemplo aquele que inicia em  $t_1 = 2,00 \text{ s}$ . Você verá que, para este intervalo, o valor da velocidade média é  $v_{xm} = 3,80 \text{ m/s}$ . Reduza, agora, na janela Controle, o passo do programa, para  $0,10 \text{ s}$ . Repita o processo, com um passo de  $0,05 \text{ s}$ . Novamente, com  $0,02 \text{ s}$ . Outra vez, com  $0,01 \text{ s}$ . Você verá que a velocidade média passará a ser, sucessivamente,  $3,90, 3,95, 3,98, 3,99 \text{ m/s}$ .

Você pode se sentir tentado a continuar reduzindo o passo, talvez para  $0,005 \text{ s}$ , ou quem sabe  $0,001 \text{ s}$ , ou mesmo  $0,0000001 \text{ s}$ , já que está vendo uma tendência na velocidade média: parece que seu valor está convergindo para  $4 \text{ m/s}$ . Mas, cuidado! A configuração do programa (janela Controle, tecla Opções) prevê que todos os números serão apresentados com duas casas decimais, ou seja, o número de algarismos significativos, ao se fornecer um valor de velocidade média, está limitado. Experimente, mantendo as duas casas decimais, acionar a animação com um passo de  $0,001 \text{ s}$ , e procure interpretar o que é listado. Claro, você poderá aumentar a precisão dos seus cálculos, alterando o número de casas decimais utilizado. Altere para três o número de casas decimais, e observe os resultados.

Acione a animação, agora, estabelecendo os limites  $t_{\min} = -5,00 \text{ s}$  e  $t_{\max} = -1,00 \text{ s}$ , respectivamente. Veja que as velocidades médias passam a ser negativas, contrariamente ao que ocorria anteriormente. Isto se deve ao fato de que a função  $f(t) = t^2$  é decrescente para tempos negativos e crescente para tempos positivos, conforme mostra a figura 1. A figura

apresenta uma simetria evidente: encontre evidências desta simetria, nos resultados da animação.

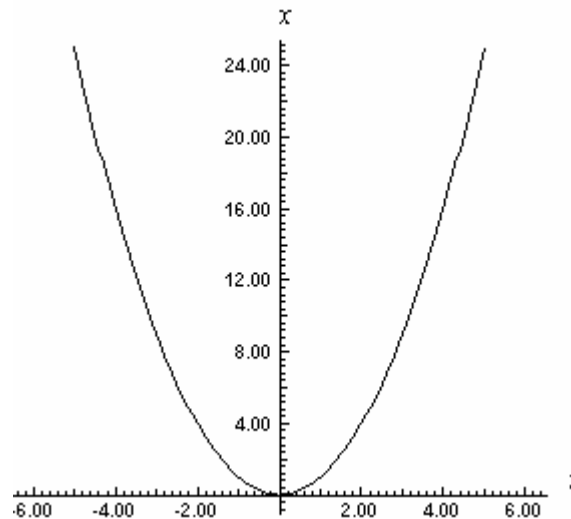


Figura 1 — Posição  $x$  versus tempo  $t$ : sistema SI.

Não estranhe o fato de estarmos lidando com tempos negativos. A escolha do zero de um referencial é arbitrária. O instante zero pode ser imaginado como o instante em que foi acionado um cronômetro, mas nada impede que o fenômeno tratado já estivesse ocorrendo antes deste instante. Se a equação de movimento tivesse sido escrita como  $x = (t-\tau)^2$ , então o móvel estaria ocupando a posição  $x = 0$  no instante  $t = \tau$ , ou seja, a curva acima estaria deslocada de  $\tau$ , para a direita. (Certifique-se disto!)

Nota: Muitas vezes você encontrará, nas animações, variáveis indexadas ( $v_{xm}$ ,  $t_1$ , etc.) com os índices grafados na mesma altura que os demais caracteres ( $v_{xm}$ ,  $t_1$ , etc.). Isto, por questões de ordem prática. Você mesmo, elaborando suas próprias animações, se sentirá inclinado a adotar esta grafia mais cômoda. No entanto, ao longo deste texto, os índices aparecerão todos subscritos.

A determinação de uma razão do tipo  $\Delta x/\Delta t$ , para valores cada vez menores do denominador, é uma operação muito freqüente; trata-se do cálculo de um limite:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}. \quad (\text{I.2})$$

Você pode dizer, então, sobre a situação em discussão, com base nos cálculos acima, que o limite da velocidade média, quando  $t_2$  tende a  $t_1 = 2,00$  s, é de 4,00 m/s.

Como a velocidade média, em um intervalo de tempo, pode não trazer muita informação sobre o movimento, se este intervalo não for pequeno, torna-se natural introduzir uma nova grandeza, a velocidade instantânea ( $v_x$ ) em um certo instante de tempo, que definimos como

$$v_x \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{xm}. \quad (\text{I.3})$$

Logo, estamos discutindo um exemplo onde a velocidade instantânea, no instante  $t_1 = 2,00$  s, é 4,00 m/s.

Assim como as posições nos diferentes instantes de um dado intervalo de tempo, as velocidades instantâneas nesses instantes fornecem uma visão do movimento que o deslocamento e a velocidade média no intervalo não nos podem dar.

Passemos, agora, ao cenário do arquivo `vel_med2.mdl`. Acionando-se a animação, é construída uma curva que representa uma função qualquer  $x$  versus  $t$ . Não importa a expressão analítica da função; nosso interesse, no momento, é o seu perfil. O caso 1 (tecla preta) mostra o cálculo da velocidade média para um determinado intervalo de tempo, que começa em  $t_1$ . O intervalo de tempo considerado, assim como o deslocamento correspondente, são indicados na figura. No caso 2 (tecla verde), é tomado um intervalo de tempo menor. Casos 3 (tecla rosa) e 4 (tecla azul) tomam intervalos de tempo ainda menores. Assim, o acionar sucessivo das teclas preta — verde — rosa — azul, mostra como evolui a inclinação da reta desenhada em vermelho. Deve ficar claro que o valor da velocidade média, cujo cálculo também é indicado, representa a inclinação da reta vermelha. É nítido que esta tende a ser tangente à curva, no instante  $t_1$ . Isto nos leva, naturalmente, a uma interpretação geométrica para o conceito de velocidade instantânea.

## DERIVADA: MEDIDA DE VARIAÇÃO

Para tanto, comentemos primeiro o conceito de derivada de uma função de uma variável, trazendo para a tela o cenário do arquivo `incl_der.mdl`. Acionando-se a animação, é traçada a curva que representa uma função  $y = y(x)$ , juntamente com a reta tangente a esta curva para cada valor de  $x$ . Ao final, fica registrada na tela a curva, com suas tangentes em três pontos diferentes. Em cada um desses pontos, a derivada de  $y$  em relação a  $x$ , que denotamos por  $dy/dx$ , é dada pela inclinação (ou declividade, ou coeficiente angular) da reta tangente à curva no ponto. Assim, onde a função é tal que os valores de  $y$  estão aumentando, com o aumento dos valores de  $x$ , a derivada é positiva, pois a tangente à curva tem inclinação positiva. Quando a tangente é horizontal, tendo inclinação nula, a derivada é nula. Onde os valores de  $y$  estão diminuindo (com os valores de  $x$  crescendo), a derivada é negativa. Estas três situações estão esquematizadas na animação. Em notação matemática:

$$\frac{dy}{dx} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} . \quad (\text{I.4})$$

A derivada da função  $y$  em relação a  $x$ , em um ponto qualquer  $x_i$ , é definida como sendo o limite, quando o intervalo  $\Delta x = x_f - x_i$  tende a zero, da razão  $\Delta y/\Delta x$ , onde o numerador é a variação da função, no intervalo:  $\Delta y = y(x_f) - y(x_i)$ . As variáveis independente e dependente,  $x$  e  $y$  respectivamente, podem representar quaisquer grandezas. Utilizamos, por exemplo, na análise de um movimento unidimensional, o tempo ( $t$ ) como variável independente e a posição ( $x$ ) como variável dependente.

Assim, a definição de velocidade instantânea de um móvel, em um ponto qualquer de sua trajetória (ou em um instante qualquer de sua viagem), pode ser expressa como a derivada em relação ao tempo de sua posição, naquele ponto:

$$v_x \equiv \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{xm} . \quad (\text{I.5})$$

Passemos ao cenário do arquivo `vel_inst.mdl`. Aqui, temos a equação de movimento  $x(t) = 10t - 2t^2$  (SI), que possui um termo linear e outro quadrático (novamente, uma equação de movimento quadrática no tempo: o maior expoente de  $t$  é 2). A janela Modelo indica a equação, além da expressão  $v_x = dx/dt$ . Assim, acionando-se a animação, são desenhados,

simultaneamente, os gráficos da posição e sua velocidade (derivada), com relação ao tempo. Veja que os valores de  $x$  aumentam a partir da origem (região em que a curva é ascendente) até um valor máximo; a partir daí os valores decrescem, o móvel retornando à origem no instante  $t = 5$  s. Enquanto os valores de  $x$  crescem (móvel viajando no sentido do eixo referencial), a derivada da curva é positiva, pois estamos em uma região em que a tangente à curva, em qualquer ponto, é uma reta de inclinação positiva: diz-se, então, que em cada um desses pontos, a própria função  $x$  versus  $t$  tem inclinação positiva (derivada = inclinação). O oposto ocorre quando a curva é descendente: a inclinação da curva é negativa na região em que o móvel está retornando à origem. No ponto de máximo da curva, entre as duas regiões, a tangente é uma reta horizontal, ou seja, a derivada (inclinação) da curva é nula naquele ponto. Trata-se de um ponto de velocidade nula: é onde o móvel pára, instantaneamente, para reverter seu movimento. O gráfico da velocidade mostra que esta tem o valor inicial 10 m/s, vai decrescendo, atinge o zero no instante  $t = 2,5$  s (instante em que a partícula reverte o sentido do movimento), continua decrescendo e atinge, em  $t = 5$  s, o valor -10 m/s (velocidade negativa: movimento no sentido oposto ao do referencial).

Repare que a derivada  $dx/dt = v_x$  tem uma variação linear, o que significa que seu gráfico é uma linha reta: seu valor varia uniformemente ao longo do tempo. Dito de outra maneira, o valor da derivada da velocidade em relação ao tempo é sempre o mesmo (constante), no intervalo de tempo entre  $t = 0$  e  $t = 5$  s já que, em qualquer ponto deste intervalo, a tangente ao gráfico  $v_x$  versus  $t$  é o próprio gráfico, que é uma reta. Logo, a inclinação desta função é uma constante, igual à inclinação da reta que constitui o seu perfil.

## O CONCEITO DE ACELERAÇÃO

Assim como a velocidade é a medida da taxa de variação da posição no tempo (outra maneira que temos para nos referirmos à derivada), dizemos que a taxa de variação da velocidade no tempo é a aceleração. De maneira exatamente análoga ao que fizemos com a variação da posição, podemos fazer as definições seguintes, com relação à variação da velocidade. Inicialmente,

$$a_{xm} \equiv \frac{\Delta v_x}{\Delta t}, \quad (I.6)$$

onde  $a_{xm} = \overline{a_x} = \langle a_x \rangle$ , indica que a aceleração média em um intervalo de tempo  $\Delta t$  é a razão entre a variação da velocidade instantânea neste intervalo e o próprio intervalo. Além disso,

$$a_x \equiv \frac{dv_x}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a_{xm}, \quad (\text{I.7})$$

indicando que a aceleração instantânea é a derivada em relação ao tempo da velocidade instantânea, ou seja, o limite, quando  $\Delta t$  tende a zero, da aceleração média.

Assim como a velocidade instantânea é a derivada temporal da posição, a aceleração instantânea é a derivada segunda da posição em relação ao tempo: representa a derivada da derivada da posição, podendo ser escrita como

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (\text{I.8})$$

No cenário anterior, obtivemos uma função velocidade muito simples. (Sempre que nos referimos a uma velocidade, ou a uma aceleração, sem outra especificação, estamos nos referindo a uma velocidade instantânea, ou a uma aceleração instantânea). Determine, nesse caso, a aceleração do movimento, e faça um desenho, em seu caderno, do gráfico que a representa contra o tempo. A unidade da aceleração, no SI, é o  $m/s^2$ .

No cenário do arquivo `x_v_a.mdl`, procure extrair o máximo de informações sobre o movimento. Aqui, trata-se de um caso de equação de movimento cúbica, como você pode verificar na janela Modelo.

## ALGUNS EXEMPLOS

Trabalhe os exemplos dos arquivos `ex_1_01.mdl`, `ex_1_02.mdl` e `ex_1_03.mdl`. Neste último, são comparados os movimentos de dois móveis, um regido por uma equação de movimento linear no tempo, o outro regido por uma equação quadrática. Resolva analiticamente, em seu



caderno, a questão colocada. O que significa a resposta negativa, para o tempo de encontro dos dois móveis?

### OBSERVAÇÃO IMPORTANTE

Cabe, aqui, um comentário importante. O conceito de velocidade média, em si, não traz informações mais detalhadas sobre o movimento. Da maneira como a introduzimos, a velocidade média serviu de passo intermediário para se chegar a um conceito bastante relevante, o de velocidade instantânea. Ressaltaremos, mais adiante, a natureza vetorial de grandezas cinemáticas como o deslocamento, a velocidade média, a velocidade instantânea. Em movimentos não retilíneos, isto se torna fundamental. Existe, também, um outro conceito — escalar — muito utilizado no dia-a-dia. Trata-se do comprimento da trajetória descrita em um intervalo de tempo, dividido pelo intervalo de tempo, ou seja, a distância total percorrida por intervalo de tempo. Note a profunda diferença entre os dois conceitos: a velocidade média é uma grandeza vetorial; a distância percorrida por intervalo de tempo é um escalar positivo. É esta grandeza escalar que você considera, ao avaliar o desempenho de um piloto de Fórmula 1. Nos textos de Física redigidos em inglês, a distância percorrida dividida pelo intervalo de tempo é referida como “average speed”, que normalmente é traduzido para o português como rapidez média (expressão que adotaremos neste texto) ou velocidade escalar média (que não necessariamente coincide com o módulo da velocidade média!). Abra o arquivo `vel_med3.mdl` e veja, nos três casos da animação, como variam os valores dessas duas grandezas. O cálculo, neste exemplo, é realizado considerando-se o intervalo de tempo que tem como instante inicial o instante do acionamento da animação e são traçados, simultaneamente, para melhor clareza, os gráficos posição versus tempo e velocidade instantânea versus tempo. Voltaremos a este assunto na próxima Unidade.

### DERIVANDO POLINÔMIOS

Tratemos, agora, da derivação analítica de algumas funções simples. Em Cálculo, as funções mais fáceis de serem derivadas são as funções polinomiais. Seja a função  $y = x^n$ . Você verá, em seu curso de Cálculo, que a derivada desta função em relação a  $x$  é  $dy/dx = n x^{n-1}$ . Assim, por exemplo, a derivada de  $x^3$  em relação a  $x$  é igual a  $3 x^2$ . De maneira geral, a derivada em

relação a  $x$  do polinômio  $y = A x^n + B x^m + \dots$  será  $dy/dx = A n x^{n-1} + B m x^{m-1} + \dots$ . Não necessariamente os expoentes precisam ser inteiros, para valer esta regra. A derivada em relação a  $x$  de  $x^{2,5}$ , por exemplo, é  $2,5 x^{1,5}$ . A derivada em relação a  $x$  de  $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$  é  $-0,5 x^{-3/2} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$ . O efeito da derivação em relação a  $x$  de um polinômio em  $x$  é o de reduzir em uma unidade a ordem do polinômio: a derivada de um polinômio cúbico é um polinômio quadrático, a derivada de um polinômio quadrático é um polinômio linear, a derivada de um polinômio linear (representado graficamente por uma reta) é uma constante (reta horizontal). A derivada de uma constante é zero (claro, a derivada indica como varia a função, e função constante não varia...). Traga para a tela o cenário do arquivo `ex_1_04.mdl`. Neste cenário, você trabalha com uma função  $y = y(x)$  cúbica, com quatro conjuntos diferentes de coeficientes — os quatro casos da animação. Acionando a animação, você vê serem construídas, em cada caso, as curvas que representam a função, sua derivada primeira em relação a  $x$  (denotada por  $u_1$ ), a derivada segunda ( $u_2$ ), a terceira ( $u_3$ ) e a quarta ( $u_4$ ). Essas derivadas são calculadas pelo programa. Quando, na janela Modelo você escreve a expressão  $u_1 = \frac{dy}{dx}$ , você está dando ao programa o comando para derivar a função  $y = y(x)$  informada em uma linha anterior, e chamar esta nova função de  $u_1$ , que é traçada na janela Gráfico sempre que, lá, você a selecionar. Calcule, analiticamente, em seu caderno, as quatro derivadas da função apresentada, e trace-as, para os quatro conjuntos de coeficientes. Compare seus resultados com os da animação.

## QUANDO A ACELERAÇÃO É CONSTANTE

Voltemos ao estudo do movimento em uma dimensão. Considere a seguinte equação de movimento:

$$x = x_0 + v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \quad (I.9)$$

Os coeficientes  $x_0$ ,  $v_{x0}$  e  $a_x$  (constantes) receberam estas denominações por razões que logo se tornarão óbvias. Esta é uma função quadrática da posição com relação ao tempo. Conhecendo-a, tem-se a posição  $x$  do móvel em qualquer instante de tempo  $t$ . Em particular, no instante  $t_0 = 0$ , a posição do móvel é  $x = x_0$  (notação justificada...). Dizemos que a posição

inicial do móvel é  $x_0$ , onde por início do movimento queremos dizer o instante em que o cronômetro é acionado.

Tendo a equação de movimento, é fácil determinar a expressão da velocidade do móvel, especialmente em se tratando de derivar um polinômio. Derivando a equação (I.9) em relação ao tempo:

$$v_x = v_{x0} + a_x t \quad (\text{I.10})$$

Neste movimento, então, a velocidade varia linearmente com o tempo: seu gráfico é uma reta, de coeficiente linear  $v_{x0}$  e coeficiente angular  $a_x$ . O coeficiente linear da reta é o ponto em que ela corta o eixo das ordenadas (eixo das velocidades, neste caso), o que ocorre quando o valor da abscissa (tempo, neste caso) é zero. Trata-se aqui, portanto, da velocidade no instante zero, ou seja, da velocidade inicial (notação justificada para  $v_{x0}$ ...). O coeficiente angular da reta é sua inclinação (derivada). Na maior parte das vezes, estas grandezas têm dimensões. Aqui, por exemplo, o coeficiente linear tem dimensão de comprimento sobre tempo (é medido em m/s, no SI), e o coeficiente angular tem dimensão de comprimento sobre o quadrado do tempo (é medido em  $\text{m/s}^2$ , no SI).

Derivando a equação (I.10) em relação ao tempo, temos a aceleração do movimento. Mas esta derivada é simplesmente a constante  $a_x$ : estamos, então, frente a um movimento unidimensional com aceleração constante (notação justificada...).

O movimento retilíneo com aceleração constante, também referido como movimento retilíneo uniformemente acelerado, portanto, é aquele em que a equação de movimento é uma função quadrática do tempo, já que a derivada segunda dessa função é uma constante. Um simples exercício algébrico (fica a seu cargo realizá-lo) desparametriza o tempo das duas equações (I.9) e (I.10), levando à seguinte equação, também muito útil na resolução de problemas:

$$v_x^2 = v_{x0}^2 + 2 a_x (x - x_0), \quad (\text{I.11})$$

onde  $x - x_0 = \Delta x$  é o deslocamento do móvel no intervalo de tempo  $\Delta t = t - t_0 = t$ .

Resumindo. Um movimento retilíneo com aceleração constante  $a_x$ , em que  $x_0$  e  $v_{x0}$  são, respectivamente, a posição e a velocidade do móvel no instante inicial  $t_0 = 0$ , é regido pelas equações seguintes, onde  $x$  e  $v_x$  são, respectivamente, a posição e a velocidade do móvel no instante genérico  $t$ .

$$x = x_0 + v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$v_x = v_{x0} + a_x t$$

$$v_x^2 = v_{x0}^2 + 2 a_x (x - x_0)$$

Um caso particular deste é aquele em que a aceleração constante é nula. Temos, então, uma situação de velocidade constante, e a equação de movimento será simplesmente  $x = x_0 + v_x t$ , com  $v_x = \text{constante}$ .

## QUEDA LIVRE

Um exemplo clássico de movimento em uma dimensão, com aceleração constante, é o movimento de queda livre no campo gravitacional terrestre. Queda livre significa queda sem nenhuma outra interferência que não a atração da Terra, onde abstraímos efeitos da atmosfera, e outros, sobre o objeto que cai. Um objeto que cai terá seu movimento acelerado para o centro da Terra com uma aceleração que, no nível do mar, tem um módulo médio de  $9,81 \text{ m/s}^2$ . Costuma-se denotar este valor por  $g$ . Normalmente, quando a altura da queda é pequena, a aceleração é considerada constante. Em problemas de queda livre, então, supomos uma aceleração constante, para baixo, de módulo  $9,81 \text{ m/s}^2$  (os valores com dois algarismos significativos  $9,8 \text{ m/s}^2$  e  $10 \text{ m/s}^2$  também são muito utilizados, quando não se requer muita precisão).

Assim, no estudo do movimento de queda livre, se escolhermos um eixo referencial apontando para cima, a aceleração do móvel será constante igual a  $-g$ . Se o referencial aponta para baixo, a aceleração constante vale  $+g$ . Veja, portanto, como o sinal da grandeza é algo puramente matemático, dependente de uma escolha arbitrária (o sentido do referencial), não trazendo nenhuma informação física.

Tratando-se de um movimento unidimensional com aceleração constante, já conhecemos as equações que o regem — equações (I.9), (I.10) e (I.11). Normalmente, porém, o eixo vertical é denotado por eixo dos  $yy$ . Se o eixo dos  $yy$  é um eixo que aponta para cima, a equação de movimento da partícula em queda livre é escrita, então, como

$$y = y_0 + v_{y0} t - \frac{1}{2} g t^2, \quad (\text{I.12})$$

onde  $y_0$  e  $v_{y0}$  são, respectivamente, a posição e a velocidade do móvel no instante inicial  $t_0 = 0$ . Repare que a aceleração da partícula é igual, com esta escolha de referencial, a  $-g$ , tanto na subida da partícula quanto na descida, bem como no instante em que ela atinge o ponto mais alto da trajetória: a aceleração sendo constante, não pode certamente depender da velocidade. As equações (I.10) e (I.11) também podem ser reescritas, com  $a_y = -g$ .

No cenário do arquivo `bola_y1.mdl`, é mostrada a queda livre de uma bola que é largada de uma certa altura. Dizer que a bola é largada de um ponto significa dizer que sua velocidade, nesse ponto, é nula. Assim, este caso refere-se à situação  $v_{y0} = 0$ . O eixo escolhido aponta para cima, e o ponto de largada é  $y_0 = 20$  m. Acionando a animação, vê-se que aumenta nitidamente a distância entre duas posições separadas por intervalos de tempo iguais (0,5 s). Na verdade, esta distância aumenta quadraticamente com o tempo. Determine, em seu caderno, as funções  $y = y(t)$  e  $v_y = v_y(t)$ , e trace seus gráficos. Compare com os gráficos traçados na animação. Refaça os cálculos, agora, adotando um eixo apontando para baixo, e compare seus resultados com os anteriores, identificando as diferenças e certificando-se de que, fisicamente, a situação é exatamente a mesma.

O programa, para realizar a animação, não determina as funções cinemáticas como foi sugerido que você o fizesse. Na janela Modelo se vê que, após ser informada a aceleração, com a indicação  $a_y = -g$  (o valor de  $g$  é dado como parâmetro, na janela Condições Iniciais), são escritas as relações  $dy/dt = v_y$  e  $dv_y/dt = a_y$ . Isto constitui um sistema de equações diferenciais, que é resolvido numericamente pelo programa. Assim, os gráficos traçados são uma solução numérica, e não analítica. Calcular numericamente significa lançar mão de recursos computacionais, que não têm a precisão de um cálculo analítico. É assunto da disciplina Cálculo Numérico estudar técnicas que resolvam problemas numericamente, no menor tempo possível, com precisão aceitável. Aqui, você não precisa se preocupar com detalhes da técnica numérica utilizada.

## A IDÉIA DE INTEGRAL

Note que, na janela Modelo, está escrito  $dy/dt = v_y$ , e não  $v_y = dy/dt$ . Esta última expressão indica que a função  $v_y$  deve ser calculada derivando-se a função  $y$  em relação ao tempo. Já a expressão  $dy/dt = v_y$ , no Modellus (e isto é característica do Modellus), significa que o programa deve determinar (numericamente) a função  $y$  que, quando derivada em relação ao tempo, fornece a função  $v_y$ . (Na animação em questão a própria função  $v_y$ , por sua vez, é determinada a partir do comando  $dv_y/dt = a_y$ .) O lado direito da expressão é o ponto de partida para o cálculo da função escrita no lado esquerdo. A tarefa que o programa executa, neste caso, é a de integrar a função  $v_y$ , obtendo a função  $y$ . Se  $v_y$  é a derivada em relação ao tempo de  $y$ , então a função  $y$  é obtida integrando-se  $v_y$  em relação ao tempo: a operação integração é inversa da operação derivação. A notação adotada é a seguinte.

$$y = \int v_y dt . \quad (\text{I.13})$$

Esta expressão indica que a função  $y = y(t)$  é a integral, em relação ao tempo, da função  $v_y = v_y(t)$ . Ora, mas você sabe que a derivada de uma constante é zero. Assim, a equação (I.13) tem infinitas soluções pois, uma vez encontrada uma solução, somando-se a ela uma constante qualquer — a chamada constante de integração — tem-se outra solução igualmente válida. Diz-se que a equação (I.13) expressa uma integral indefinida. A determinação unívoca da solução do problema depende das condições de contorno. Na animação da bola caindo, as condições de contorno são a posição e a velocidade da bola no instante  $t_0 = 0$ :  $y_0 = 20$  m,  $v_{y0} = 0$ . (Às vezes denotamos um instante inicial por  $t_0$ , às vezes por  $t_i$ , mas isto é irrelevante.) Aqui, as condições de contorno sendo valores no instante inicial, também são chamadas de condições iniciais. A expressão  $dy/dt = v_y$  na janela Modelo, portanto, equivale à equação (I.13) que, com os dois valores iniciais informados na janela Condições Iniciais (onde também consta o valor de  $g$ ), leva à resolução do problema.

O cenário do arquivo `der_int.mdl` mostra o cálculo da derivada de uma função, além do cálculo da integral da expressão analítica da derivada da função. Compare as curvas obtidas, e note a importância da condição inicial que, nesta animação, é a própria constante de integração.

## VETORES E ESCALARES

Traga para a tela o cenário do arquivo bola\_y2.mdl. Neste exemplo, uma bola é lançada verticalmente, para cima, de um ponto que, no referencial adotado, corresponde a  $y_0 = 0$ . A velocidade inicial é de 20 m/s. Com a animação, acompanha-se os vetores velocidade e aceleração da bola, durante todo o seu trajeto. A aceleração é um vetor constante, apontando para baixo. A velocidade tem o sentido do movimento, com seu módulo diminuindo (linearmente com o tempo) na subida, anulando-se no ponto mais alto da trajetória (bola instantaneamente em repouso), e aumentando na descida. É importante notar que a velocidade tem seu sentido revertido, entre subida e descida, já que é um vetor que sempre aponta no sentido do movimento.

Como já foi dito, muitas das grandezas vetoriais podem, em problemas unidimensionais, ser tratadas como escalares. Deslocamento, velocidade (média e instantânea) e aceleração (média e instantânea) são grandezas vetoriais e como tal serão tratadas nas próximas Unidades. Nesta Unidade, dispensamos o tratamento vetorial dessas grandezas, sem perder nenhuma informação relevante. Suas definições são tais que, quando o corpo se move no sentido do eixo dos  $xx$ ,  $\Delta x$  e  $v_x$  são positivos; quando o corpo se move no sentido contrário ao do eixo dos  $xx$ ,  $\Delta x$  e  $v_x$  são negativos. Como a aceleração é a taxa de variação da velocidade no tempo, quando  $v_x$  aumenta,  $a_x$  é positivo; se  $v_x$  diminui,  $a_x$  é negativo. Assim, o valor absoluto da velocidade aumenta, quando  $v_x$  e  $a_x$  têm o mesmo sinal, e diminui quando  $v_x$  e  $a_x$  têm sinais contrários. No cenário do arquivo v\_a\_vet.mdl, você visualiza a representação vetorial dessas grandezas, em uma situação unidimensional. Depois de investigar os três casos apresentados, nos quais a aceleração é constante, você poderá criar movimentos com aceleração variável, movendo verticalmente o cursor que aparece no canto inferior direito da janela.

Os arquivos ex\_1\_05.mdl e ex\_1\_06.mdl mostram, ambos, os mesmos quatro casos de movimento retilíneo uniforme (com aceleração nula) a diferença sendo que, no primeiro destes arquivos, o gráfico posição versus tempo é traçado a partir de sua expressão analítica, enquanto que no segundo é feita a solução numérica da equação diferencial  $dx/dt = v_y$ . Compare os dois cenários e determine, para cada gráfico (reta), o coeficiente linear e o coeficiente angular.

## INTEGRAL DEFINIDA

Voltemos ao Cálculo. Vimos que a integral indefinida relaciona duas funções, e apresenta uma ambigüidade que só é resolvida com o conhecimento das chamadas condições de contorno (que, quando se referem ao instante inicial em um problema, são chamadas de condições iniciais). A equação (I.13) relaciona uma função temporal (a função posição  $y$ ) com outra função temporal (a função velocidade  $v_y$ ). Tratemos, genericamente, da função  $y = y(x)$ , onde não é agora relevante o que, fisicamente, representam as grandezas  $x$  e  $y$ . Se integramos esta função, com relação a  $x$ , em um certo intervalo de valores de  $x$ , estamos frente ao conceito de integral definida, que relaciona uma quantidade (o valor da integral) com a função. Assim,

$$I = \int_{x_1}^{x_2} y \, dx \quad (\text{I.14})$$

indica que o número  $I$  é o resultado da integral definida de  $y$  como função de  $x$ , entre os valores  $x = x_1$  e  $x = x_2$ . Uma integral definida é um valor que resulta da integração de uma função em um certo intervalo da variável independente (o chamado intervalo de integração). Por exemplo, o resultado da integral definida

$$A = \int_1^2 x^2 \, dx$$

é o valor da função  $x^3/3$  calculada no ponto  $x_2 = 2$  menos o valor da função calculada no ponto  $x_1 = 1$ , já que  $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}\right) = x^2$ . A notação usual é a seguinte:

$$A = \left. \frac{x^3}{3} \right|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} .$$

Note que, no cálculo acima, à função  $x^3/3$  poderia ser adicionada qualquer constante, mas esta seria cancelada na subtração que leva ao valor da integral definida. A função  $x^3/3$  é a chamada primitiva da função  $x^2$ .

Não se trata aqui, evidentemente, de apresentar o Cálculo com todo o seu rigor. Isto é estudado em disciplina específica. Mas ainda podemos fazer um comentário pertinente.



Abra o arquivo `vm_area.mdl`. Este cenário traça o gráfico velocidade versus tempo típico de um movimento unidimensional com aceleração constante, entre os instantes  $t_0 = 0$  e  $t_1$ , com velocidade inicial e aceleração positivas. Trata-se, portanto, de uma reta crescente (coeficiente angular positivo) que corta o eixo vertical acima da origem (coeficiente linear positivo). Ao final, é indicado o valor  $v_{xm}$ . A figura à direita mostra como é determinado este valor: trata-se da altura do retângulo cuja base é o intervalo de tempo em questão, e que deve ter a mesma área que o trapézio desenhado sob o gráfico, no mesmo intervalo de tempo. Assim, o retângulo de base  $t_1 - t_0$  e altura  $v_{xm}$  (hachurado em verde) tem a mesma área que o trapézio de lados verticais  $v_{x0}$  e  $v_{x0} + a_x t_1$ , com a mesma base  $t_1 - t_0$  (hachurado em amarelo),  $v_{x0}$  e  $a_x$  sendo, respectivamente, a velocidade inicial e a aceleração. Isto, no Cálculo, é o que define o valor médio de uma função:  $v_{xm}$  é o valor médio da função velocidade. A figura mostra que  $v_{xm}$  está exatamente a meio caminho entre  $v_{x0}$  e  $v_{x0} + a_x t_1$ . Assim, temos:

$$v_{xm} = \frac{v_{x0} + (v_{x0} + a_x t_1)}{2} = v_{x0} + \frac{a_x t_1}{2} . \quad (\text{I.15})$$

Comparando as equações (I.9) e (I.15), concluímos que  $\Delta x = x_1 - x_0 = v_{xm} \Delta t$ , onde  $\Delta t = t_1 - t_0$  (aqui,  $t_0 = 0$ ). Mas esta é exatamente a expressão que define a velocidade média em um movimento unidimensional — equação (I.1). Assim, nossa definição de velocidade média coincide com o conceito de valor médio da função velocidade. Também, é fácil verificar que este valor  $\Delta x = v_{xm} \Delta t$  representa a área do retângulo hachurado em verde ou, equivalentemente, a área do trapézio hachurado em amarelo. Vemos, então, que a área sob a curva velocidade versus tempo, em um certo intervalo de tempo, tem o mesmo valor numérico que o deslocamento sofrido pelo móvel naquele intervalo de tempo.

De maneira geral, a integral definida da equação (I.14) é, numericamente, igual à área sob a curva  $y$  versus  $x$ , entre os pontos  $x = x_1$  e  $x = x_2$ . Esta é a interpretação geométrica da integral definida. Se a função é linear, o cálculo da área se torna muito fácil, pois recai no cálculo da área de uma figura geométrica simples.

Atenção deve ser dada ao fato de estarmos, aqui, comentando uma interpretação gráfica de uma operação do Cálculo. Note que escrevemos que a integral definida é numericamente dada pela área sob a curva. O valor calculado não é, necessariamente, uma área, medido, por exemplo, em  $m^2$ . No exemplo do movimento unidimensional, o cálculo da área sob a curva

velocidade versus tempo é realizado multiplicando-se um intervalo de tempo por uma velocidade, o que leva a uma grandeza com dimensão de deslocamento. Além disso, áreas de figuras geométricas abaixo do eixo horizontal são consideradas negativas, já que se encontram em uma região de valores negativos de ordenada. Programas de computador que avaliam integrais definidas nada mais fazem do que somar áreas, e a maneira otimizada e mais precisa de fazê-lo é assunto da disciplina Cálculo Numérico.

Note, também, que no caso específico do movimento unidimensional com aceleração constante, a velocidade média em um intervalo de tempo coincide com a média aritmética das velocidades extremas, mas isto só porque, neste caso, a velocidade é uma função linear do tempo. De maneira geral, vale a equação (I.1), mas não a equação (I.15).

## TRABALHAMOS COM MODELOS

Um bom exemplo de movimento unidimensional com aceleração não constante é o da queda vertical de um objeto, levando-se em consideração a resistência do meio — queda não livre. Se você larga, de uma mesma altura, uma bola de tênis e uma bola de papel amassado, verá que aquela será a primeira a chegar ao solo. Se isto acontece, é porque a aceleração das duas bolas não é a mesma. Verifica-se que vários fatores determinam a aceleração: a forma do objeto, sua velocidade, a densidade do meio (ar, água, etc.), e outros. Voltaremos a este assunto quando estivermos tratando da Dinâmica. Mas você já deve ter percebido que só podemos tratar matematicamente um problema de Física se construímos um *modelo*. Modelo é uma coleção de premissas, que se supõe serem razoáveis e que levem em consideração todos os parâmetros relevantes ao problema. Assim, comparando a queda de uma bola de tênis com a de uma bola de papel amassado, você percebe que o modelo de queda livre é incompleto, insuficiente para dar conta do que é observado. Um modelo melhorado, mais sofisticado, é o da queda com uma aceleração cujo módulo varia proporcionalmente ao módulo da velocidade. Um físico não tem a pretensão de revelar a Natureza. A tarefa do físico é descrever a Natureza, da melhor maneira possível, utilizando para isso as ferramentas que tem a seu dispor, a Matemática sendo a mais poderosa. Um modelo é sempre limitado, e aí daquele que confunde o modelo com a realidade...

## A RELATIVIDADE GALILEANA

Reportemo-nos ao início deste texto. Lá, em nosso primeiro cenário, comparamos referenciais unidimensionais diferentes. Voltemos a fazer isto, agora com nosso interesse voltado para a grandeza velocidade. Sejam dois referenciais na mesma direção, que chamaremos de referencial S (eixo dos  $xx$ ) e referencial S' (eixo dos  $x'x'$ ). Chamemos de O a origem do referencial S, e de O' a origem do referencial S'. Suponhamos que, em  $t_0 = 0$ , os dois referenciais coincidam. Suponhamos, também, que o referencial S' tenha, com relação ao referencial S, uma velocidade constante igual a  $u$ . Assim,  $u$  é a velocidade de O' com relação a O. Então, em um instante de tempo  $t$  qualquer, o referencial S' está, com relação ao referencial S, localizado na posição  $ut$ , ou seja, a origem O' está localizada no ponto  $x_{O'} = ut$ . Considere um móvel M localizado, neste mesmo instante  $t$ , conforme visto de S, na posição  $x_M$ , e, conforme visto de S', na posição  $x'_M$ . Então, vale a relação

$$x_M = x'_M + x_{O'} \quad , \quad (\text{I.16 a})$$

que informa que a posição do móvel conforme visto do referencial S, em um dado instante  $t$ , é igual à posição do móvel, naquele instante, conforme visto do referencial S', mais a posição do referencial S' com relação ao referencial S, no mesmo instante. Como  $x_{O'} = ut$ , então, equivalentemente,

$$x_M = x'_M + ut \quad , \quad (\text{I.16 b})$$

Derivando esta relação em relação ao tempo, temos:

$$v_M = v'_M + u \quad , \quad (\text{I.17})$$

onde  $v_M$  e  $v'_M$  são, respectivamente, a velocidade do móvel M com relação aos referenciais S e S', e onde foi usado o fato de que a derivada em relação ao tempo da função  $ut$  é igual a  $u$ , já que  $u$  é uma constante.

A equação (I.17) é a versão unidimensional da chamada relatividade galileana, e relaciona as velocidades de um mesmo objeto, medidas em dois referenciais diferentes, onde um referencial desloca-se, em relação ao outro, com velocidade constante. Abra o cenário do arquivo `vel_rel1.mdl`, e aplique a equação (I.17) aos três casos tratados na animação.

Nosso próximo passo é a extensão do estudo do movimento para situações bidimensionais e, para que isto seja bem feito, há que tratarmos com cuidado o tema vetores.

## EXERCÍCIOS DA PRIMEIRA UNIDADE

### I – PRATIQUE UM POUCO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL UTILIZANDO O MODELLUS

1) A equação de movimento de um móvel é  $x(t) = 6t - 2t^3$ , onde são adotadas unidades do SI.

a) Determine, analiticamente, os valores do tempo para os quais a derivada de primeira ordem de  $x(t)$  é nula.

b) Use o Modellus para fazer os gráficos  $x$  versus  $t$  e  $dx/dt$  versus  $t$  no intervalo  $-2 \text{ s} \leq t \leq 2 \text{ s}$ . Qual é o significado físico de  $dx/dt$  ?

c) Compare os resultados obtidos nos itens a) e b).

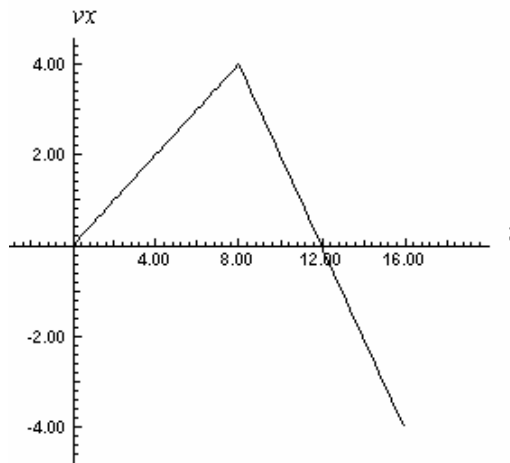
d) Nos gráficos do item b) você pode observar que quando  $x(t)$  atinge um valor máximo,  $dx/dt$  é nulo. Também, quando  $x(t)$  atinge um valor mínimo,  $dx/dt$  é nulo. (O mesmo ocorreria se  $x(t)$  fosse constante.) Portanto, o fato de a derivada de uma função ser nula em um ponto não é suficiente para garantir que este ponto seja um máximo da função. Mas, se este ponto for um máximo da função, naturalmente sua derivada terá que ser nula. (Ou, como se diz em linguagem matemática, a derivada de uma função ser nula em um ponto é uma condição necessária, mas não suficiente, para que este ponto seja de máximo.)

e) Use o Modellus para fazer o gráfico da derivada segunda, em relação ao tempo, da função  $x(t)$ , no intervalo  $-2 \text{ s} \leq t \leq 2 \text{ s}$ . Que grandeza física representa esta derivada? Observando simultaneamente os gráficos  $x$  versus  $t$  e  $d^2x/dt^2$  versus  $t$ , você pode observar que quando  $x(t)$  apresenta um máximo, sua derivada segunda é negativa; quando  $x(t)$  apresenta um mínimo, sua derivada segunda é positiva. (Caso  $x(t)$  fosse constante, sua derivada segunda seria nula.)

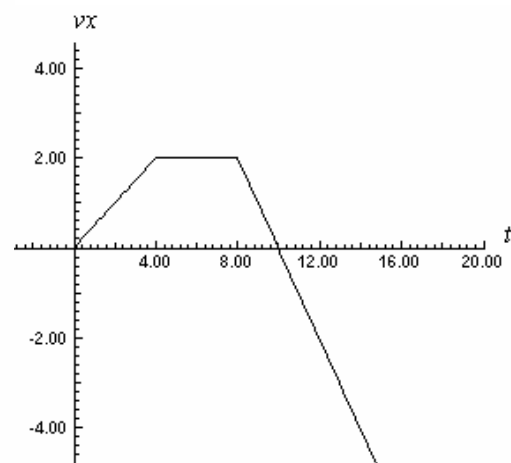
f) Convença-se de que as conclusões do item e) são válidas para qualquer função. Deste modo, sempre que você precisar determinar os pontos de máximo ou mínimo de uma função, bastará procurar os zeros da primeira derivada. Caso queira somente os máximos, a derivada

segunda deverá ser negativa; caso queira os mínimos, a derivada segunda deverá ser positiva. E se a derivada segunda for nula ?

2) a) Faça, no seu caderno, os gráficos de posição e aceleração versus tempo, para os móveis que apresentam suas velocidades variando no tempo conforme as figuras abaixo (unidades do SI). Em ambos os casos, o móvel parte de  $x_0=0$ .



(I)



(II)

b) No cenário do arquivo desc\_der.mdl você tem a possibilidade de conferir seus resultados. Observe que, no caso (I), o valor da aceleração varia abruptamente em torno de  $t_1 = 8$  s. O que dizer sobre a derivada de  $v_x(t)$  neste instante? Diz-se que neste ponto a derivada apresenta uma descontinuidade. A derivada de  $v_x(t)$  no ponto  $t = t_1$  nada mais é que o limite, quando  $t$  tende ao instante  $t_1$ , da razão  $[v_x(t)-v_x(t_1)]/[t-t_1]$ . No caso (I), este limite vale  $0,5 \text{ m/s}^2$ , se o tempo  $t$  é menor que  $t_1$ , e vale  $-1 \text{ m/s}^2$ , se  $t$  é maior que  $t_1$ . Em outras palavras, o limite da função  $v_x(t)$ , em  $t_1 = 8$  s, tomado pela esquerda, vale  $0,5 \text{ m/s}^2$ , e tomado pela direita vale  $-1 \text{ m/s}^2$ . Como estes valores não coincidem, na verdade a função não possui derivada em  $t_1$ : há, neste ponto, uma descontinuidade.

3) No texto foi visto que a derivada, em relação a  $x$ , de uma função do tipo  $y = x^n$ , é  $nx^{(n-1)}$ . No cenário do arquivo der\_pot.mdl, você pode verificar que isto é verdade, comparando a grandeza  $z$ , que é a derivada obtida com o Modellus, com a grandeza  $z_1$ , que é a derivada analítica de  $x^n$ . Você pode, também, comparar estes resultados com  $z_2 = \Delta y/\Delta x$ .

Lembrando que a definição de derivada é:  $\frac{dy}{dx} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ , convença-se de que  $z_2$  deve fornecer o valor da derivada de  $y$  em relação a  $x$ , no limite em que  $\Delta x$  vai a zero. De fato, diminuindo gradativamente o valor de  $\Delta x$  (o passo da animação) você poderá observar, na tabela, que os valores de  $z_2$  vão se aproximando dos valores de  $z$  e  $z_1$ .

4) No arquivo `calc_der.mdl`, você tem a oportunidade de comparar três resultados para a derivada da função  $y(x) = 3x + x^2$  no intervalo  $0 \leq x \leq 10$ . (Observe que na janela Controle a variável independente foi tomada como  $x$ .) O resultado chamado de *exato* provém da forma analítica da derivada da função. O resultado obtido a partir do comando `dy/dx` do Modellus é chamado de *numérico*. O resultado obtido da razão  $\Delta y/\Delta x$ , onde  $\Delta y$  é a variação de  $y$  no intervalo  $\Delta x$  igual ao passo (definido na janela Controle), é chamado de *aproximado*.

a) Consulte a Tabela para comparar estes três resultados. Observe como o resultado numérico e o exato coincidem, neste caso. Está atribuído ao passo o valor inicial 2.

b) Diminuindo gradativamente o passo, verifique que  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$ . Para que valor do passo você chega a esta igualdade?

c) Trabalhe com outras funções e repita os itens a) e b).

5) No arquivo `calc_int.mdl`, você tem a oportunidade de comparar três resultados para a integral definida da função  $y(x) = 20 + 2x$ , com limite inferior  $x_i = 0$  e limite superior no intervalo  $0 \leq x_f \leq 10$ . O resultado chamado de *exato* provém da forma analítica da integral da função. O resultado obtido a partir do comando `du/dx` do Modellus é chamado de *numérico* (no Modellus não se utiliza o símbolo de integral). O resultado chamado de *aproximado* é a soma das áreas de todos os retângulos de base  $\Delta x$  e altura igual ao primeiro valor de  $y$  associado ao intervalo  $\Delta x$ .

a) Consulte a Tabela para comparar estes três resultados. Observe como o resultado numérico e o exato coincidem, neste caso. Está atribuído ao passo o valor inicial 2.

b) Diminuindo gradativamente o passo, verifique que diminui a diferença entre o resultado aproximado e o exato. Para que valor do passo você chega a uma igualdade?

c) Trabalhe com outras funções e repita os itens a) e b).

## II – CINEMÁTICA EM UMA DIMENSÃO

1) Rode a animação noel\_atl.mdl e procure entender qualitativamente a variação da posição, da velocidade instantânea e da aceleração instantânea. Para cada um dos três casos, considere os valores fornecidos na janela Condições Iniciais para determinar os valores das seguintes quantidades: a velocidade máxima alcançada durante a corrida, a aceleração durante a arrancada inicial, a aceleração após passar a linha de chegada.

2) Investigue o cenário corrida.mdl.

3) Explore os dois casos apresentados no modelo inclina.mdl, movendo os cursores. Então, posicione-os de modo a produzir um gráfico:

a) posição versus tempo, representando um móvel que parte da posição  $x_0 = -10$  m com velocidade constante de 2 m/s, no caso da tecla preta;

b) velocidade versus tempo, representando um móvel com velocidade inicial de 10 m/s e aceleração de  $-0,5 \text{ m/s}^2$ , no caso da tecla verde.

4) Faça no seu caderno um gráfico da velocidade em função do tempo, para o móvel cujo gráfico (parabólico) posição versus tempo está mostrado no arquivo xversust.mdl. Confira seu resultado utilizando os recursos do Modellus.

5) Considere um corpo que é lançado verticalmente para cima. Para levar em conta a influência do ar sobre este corpo, vamos admitir que no movimento de subida o módulo de sua aceleração seja de  $12 \text{ m/s}^2$  e que na descida seja de  $8 \text{ m/s}^2$ . Convença-se de que esta suposição (módulo da aceleração na subida maior que o da descida) é razoável. Isto é um



modelo muito simples, mas que funciona bem para uma análise semi-quantitativa em caso de deslocamentos verticais pequenos.

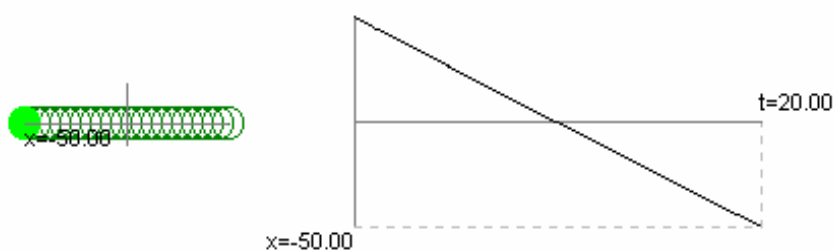
a) Desenhe gráficos qualitativos da aceleração e da velocidade em função do tempo ao longo de todo o movimento, comparando com o caso em que se despreza a resistência do ar.

b) No arquivo `res_ar.mdl` são mostrados os gráficos  $y$  versus  $t$ ,  $v_y$  versus  $t$  e  $a_y$  versus  $t$  correspondentes a este movimento, quando se leva em conta a resistência do ar (caso preto) e desprezando-a (caso verde). Compare com seus desenhos. O que pode ser dito sobre as velocidades inicial e final nos dois casos ?

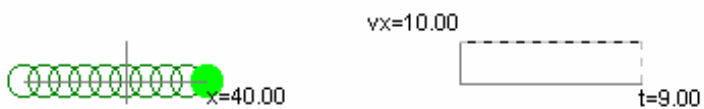
6) Sabendo que a taxa de variação da velocidade com o tempo para um corpo em queda livre, próximo da superfície da Terra, é de  $9,8 \text{ m/s}^2$ , determine sua velocidade e posição como função do tempo, se o corpo for largado da altura de 375 m. (Em caso de dificuldade consulte a Atividade: Velocidade e Aceleração, na “Ajuda” do Modellus.)

7) Use (1°) funções e (2°) equações diferenciais, no Modellus, que permitam obter as seguintes trajetórias retilíneas. (Sistema Internacional de unidades.)

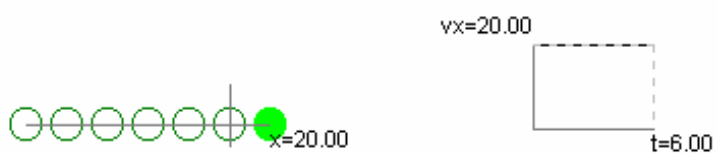
a)



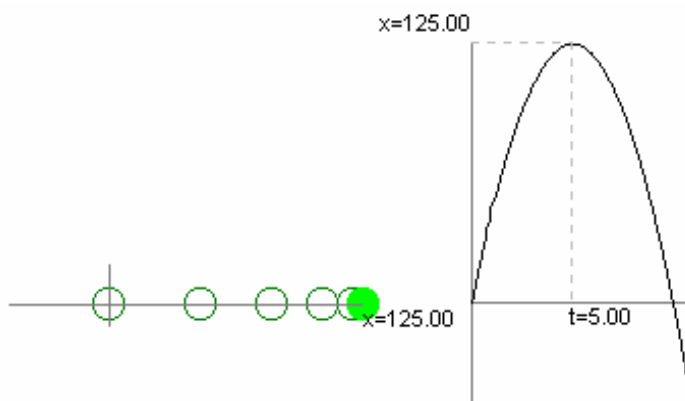
b)



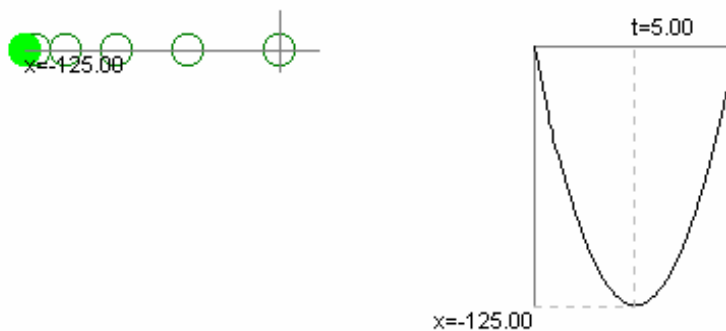
c)



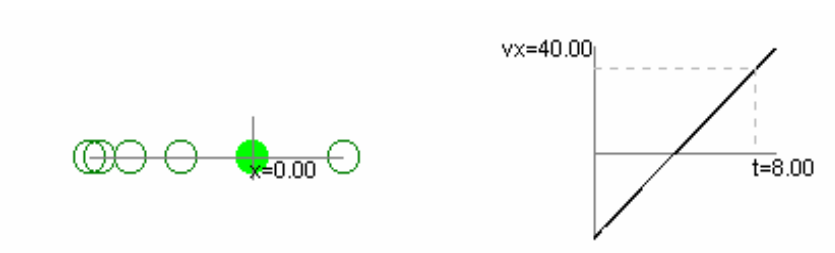
d)



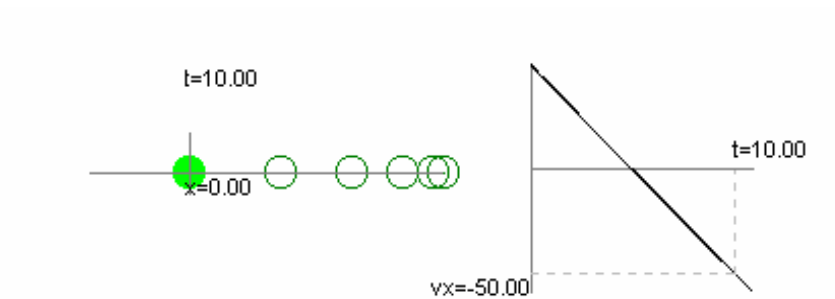
e)



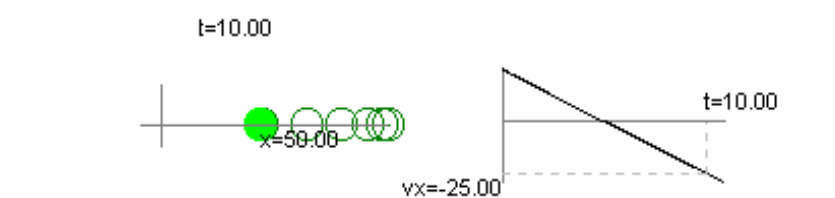
f)



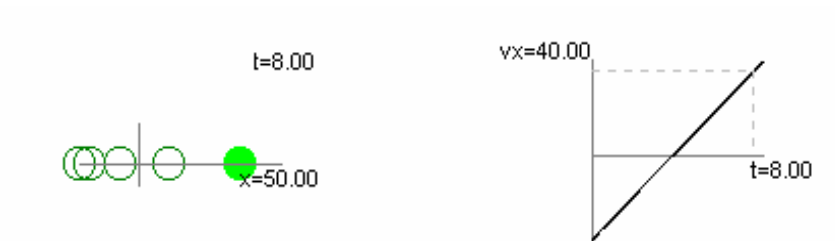
g)



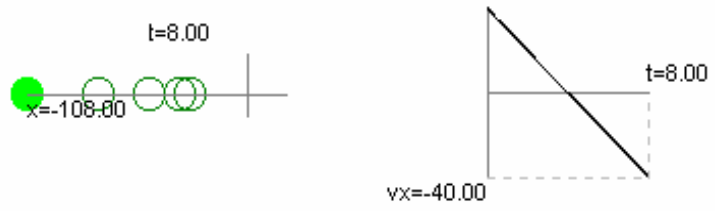
h)



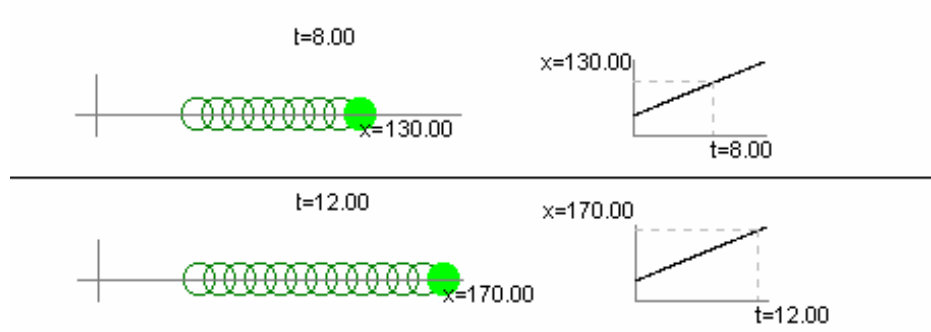
i)



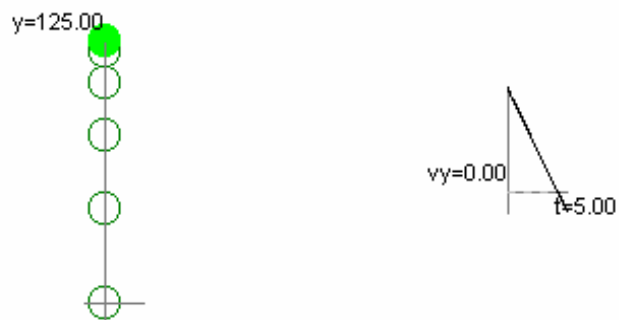
j)



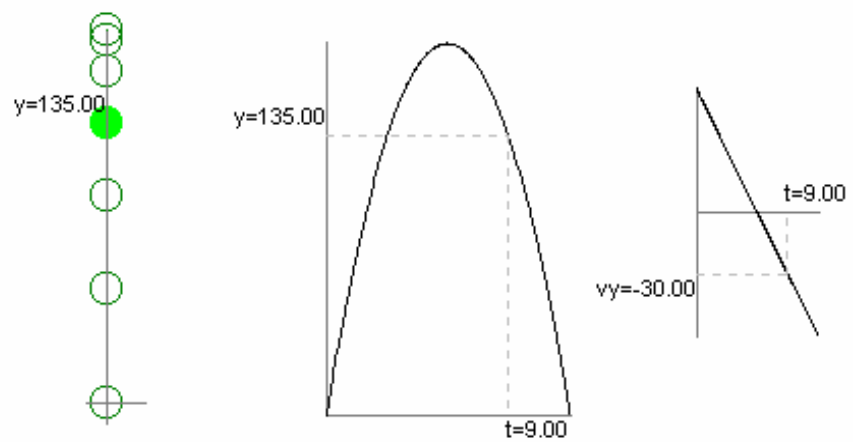
l)



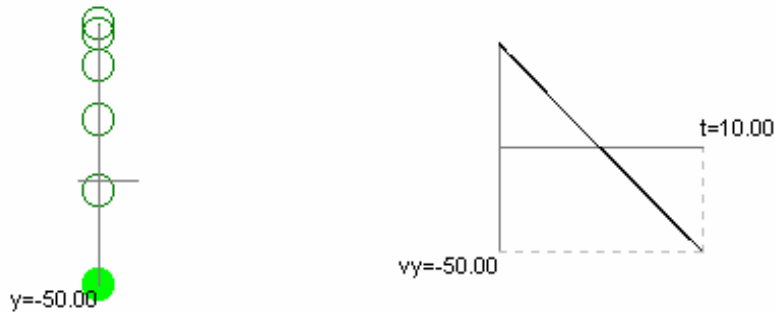
m)



n)



o)



8) Uma bola se move segundo a seguinte equação de movimento:

$$x = v_0 t + c t^3 / 3,$$

onde  $x$  é posição e  $t$  é o tempo e as unidades utilizadas são as do Sistema Internacional.

a) Qual é a dimensão da constante  $c$  ?

Determine o(s) instante(s) em que a posição é igual a 10 m, nos dois casos abaixo:

b)  $v_0 = 1$  e  $c = 3$  (SI);

c)  $v_0 = 3$  e  $c = -3$  (SI).

Confira os resultados encontrados em b) e c), usando o Modélus.

9) No cenário elevador.mdl uma bola é jogada para cima com velocidade inicial de módulo  $v_0$ , em relação a um elevador aberto. Na animação da esquerda, o elevador está parado. Na animação do centro, ele está descendo com velocidade uniforme de módulo  $V$ . Na animação da direita, ele está subindo com velocidade uniforme de módulo  $V$ . Rode a animação e compare as três situações. Compare em especial os tempos de vô da bola (até voltar ao chão do elevador). Compare também as alturas máximas alcançadas pela bola em relação ao prédio.



## SEGUNDA UNIDADE: MOVIMENTO BIDIMENSIONAL

### VETORES

A Cinemática em uma dimensão, tratada na Unidade anterior, mostrou-se um bom laboratório para a familiarização com conceitos básicos do Cálculo Diferencial e Integral de uma variável. As grandezas físicas introduzidas, mesmo aquelas de natureza vetorial, foram então tratadas escalarmente. Chegou o momento de estender aquelas noções para situações mais realísticas. Nosso Universo não é unidimensional. Dizer que se viajou quatrocentos quilômetros, a partir de um certo ponto, pode ser uma afirmação vaga. Você pode dizer que partiu do Rio de Janeiro e viajou quatrocentos quilômetros, e não se poderá concluir se você chegou em São Paulo ou em Belo Horizonte, por exemplo. A direção da viagem, portanto, é informação relevante. Também, são dois os sentidos possíveis sobre uma mesma direção, como já foi visto. Um físico não pode, portanto, prescindir da noção de vetor: muitas grandezas físicas se revelarão de natureza vetorial.

Frente à relevância do tema, vamos detalhá-lo um pouco. O melhor exemplo de grandeza vetorial, e que pode servir como protótipo, é o deslocamento. Se alguém viaja do Rio de Janeiro para São Paulo, o deslocamento associado é o vetor que tem sua origem no ponto inicial da viagem, no Rio de Janeiro, e sua extremidade no ponto final, em São Paulo. Na figura 2, se o ponto de partida é representado por A, e B representa o ponto de chegada, então  $\vec{d}$  é o deslocamento associado ao percurso. A maneira pela qual o percurso foi realizado, o tempo de viagem, a trajetória, não importam: apenas os dois pontos extremos é que determinam o deslocamento.

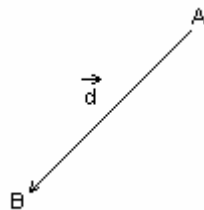


Figura 2 — Vetor deslocamento.

Desenhe, em seu caderno, o mapa de um país fictício, destacando três cidades — Alegre, Feliz e Contente — representadas por três pontos não alinhados, e considere as situações abaixo.

- Policarpo parte de Alegre às 8 h e chega em Contente às 16 h. Desenhe o vetor que representa o deslocamento correspondente a esta viagem.
- Asdrúbal parte de Alegre às 9 h e chega em Contente às 15 h. Desenhe o deslocamento correspondente a esta viagem e compare-o com o do item anterior.
- Epaminondas parte de Alegre, passa por Feliz, onde almoça, e prossegue viagem até Contente. Desenhe o deslocamento correspondente ao percurso de Epaminondas, ente Alegre e Contente, e chame-o de  $\vec{d}$ . Desenhe o deslocamento associado à viagem de Epaminondas, entre Alegre e Feliz, e chame-o de  $\vec{d}_1$ . Desenhe o deslocamento associado à viagem de Epaminondas, entre Feliz e Contente, e chame-o de  $\vec{d}_2$ .

## SOMANDO VETORES

Percebe-se que o deslocamento associado à viagem realizada por Epaminondas entre Alegre e Contente ( $\vec{d}$ ) tem sua origem coincidindo com a origem do deslocamento associado à viagem realizada entre Alegre e Feliz ( $\vec{d}_1$ ), e a extremidade coincidindo com a extremidade do deslocamento associado à viagem realizada entre Feliz e Contente ( $\vec{d}_2$ ). Isto nos ensina a somar vetores. Como o deslocamento total de Epaminondas é a soma do deslocamento que ele realizou antes do almoço com o deslocamento que ele realizou depois do almoço, então  $\vec{d} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2$  significa que o vetor  $\vec{d}$  pode ser desenhado com a origem coincidindo com a origem de  $\vec{d}_1$  e a extremidade coincidindo com a extremidade de  $\vec{d}_2$ , se  $\vec{d}_1$  e  $\vec{d}_2$  são desenhados o primeiro com a extremidade na origem do segundo. Veja o exemplo do arquivo `ex_2_01.mdl`.

É corriqueiro afirmar-se simplesmente que vetores são grandezas que requerem, para sua perfeita caracterização, as três noções de módulo (magnitude), direção e sentido. Realmente, assim é, mas há mais um aspecto importante a ressaltar. Grandezas vetoriais, além de requererem estas três noções, devem apresentar comportamento típico, frente a operações. Por exemplo, seria perfeitamente possível imaginar-se uma grandeza caracterizada por módulo,



direção e sentido, mas cuja soma fosse uma operação definida de forma diferente da operação soma para deslocamentos; neste caso, não se teria uma grandeza vetorial.

O módulo de um vetor corresponde à sua intensidade. É um valor essencialmente positivo. As viagens de Policarpo e Asdrúbal, por exemplo, correspondem a um deslocamento de módulo igual à menor distância entre Alegre e Contente. A linha de traçado do vetor define sua direção. Assim, vetores paralelos são vetores de mesma direção. O sentido do vetor é um dos dois possíveis sentidos sobre sua direção. A palavra orientação engloba os dois conceitos, de direção e sentido. Então, um vetor requer as noções de módulo e orientação, para ser bem caracterizado, sem ambigüidade.

Nota: Em inglês, a palavra *direction* significa orientação, e não direção.

Dois vetores são iguais quando são iguais suas três características, isto é, quando têm o mesmo módulo, a mesma direção e o mesmo sentido, independente de onde cada vetor está localizado. Se dois vetores são iguais, também é correto dizer que eles são o mesmo vetor. Assim, a soma de dois vetores pode ser representada graficamente das duas maneiras apresentadas no cenário do arquivo `vet_som.mdl`. Convença-se disto, e explore bem este cenário. Ao resultado da soma de vetores dá-se o nome de resultante.

Uma regra importante, válida para a soma de vetores, é a comutatividade, segundo a qual a ordem da soma não altera seu resultado: se  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  são dois vetores, então vale a relação  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ . A soma de vetores é comutativa, e você pode visualizar graficamente esta propriedade no cenário do arquivo `vet_com.mdl`. Talvez você nunca tenha sido apresentado a uma operação não comutativa; isto deverá ocorrer brevemente.

No cenário do arquivo `vet_ass.mdl` você visualiza outra propriedade importante da adição de vetores. Trata-se da associatividade. A soma dos vetores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  é o resultado da soma da resultante de dois destes vetores com o terceiro. A soma é uma operação associativa, no sentido de que não importa quais os dois vetores tomados inicialmente. Podemos escrever, por exemplo, que  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ . As propriedades comutativa e associativa, em conjunto, nos permitem escrever, de maneira geral, a soma (resultante  $\vec{r}$ ) de um certo número de vetores,  $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{e} + \dots$ , sem preocupação com a ordem dos fatores e prescindindo-se do uso dos parêntesis.

A subtração de dois vetores é compreendida de imediato, se escrevemos  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ , estabelecendo-se que o vetor  $-\vec{b}$  nada mais é do que o vetor de mesmo módulo e orientação oposta à do vetor  $\vec{b}$ , ou seja,  $-\vec{b}$  é o vetor contrário ao vetor  $\vec{b}$ .

## MULTIPLICANDO POR ESCALAR

Na verdade, o parágrafo anterior menciona uma operação de multiplicação de vetor por escalar. De forma geral, multiplicar-se um vetor  $\vec{c}$  pelo escalar  $k$  consiste em se determinar o vetor cuja orientação é a mesma do vetor  $\vec{c}$ , caso  $k$  seja positivo, ou a orientação contrária, caso  $k$  seja negativo. Seu módulo é igual a  $|k|c$ , onde  $|k|$  é o valor absoluto do escalar  $k$  e  $c$  é o módulo do vetor  $\vec{c}$ . Outras duas operações de multiplicação, envolvendo vetores, serão abordadas oportunamente.

## DECOMPOSIÇÃO DE VETORES

Felizmente, para se trabalhar com grandezas vetoriais, não é necessário o uso de material de desenho, papel quadriculado, etc. Existe uma maneira simples e precisa para se operar com vetores. Trata-se do método de decomposição segundo as direções coordenadas. Considere a figura 3. Lá, está traçado um vetor  $\vec{r}$  que chamamos de  $\vec{r}$ , com sua origem coincidindo com a origem do sistema de coordenadas cartesiano  $x$ - $y$ . (Você já devia estar estranhando ainda não ter surgido um referencial, nesta Unidade. Agora, o uso do referencial torna-se obrigatório.) Estamos nos limitando, por enquanto, ao referencial bidimensional. O vetor está desenhado de forma que seu comprimento guarda uma certa relação com seu módulo (denotado por  $r$ ), e sua orientação é a da seta que o representa. A maneira convencional de se quantificar esta orientação é a de se determinar o ângulo  $\theta$  que o vetor forma com o eixo dos  $xx$ . A convenção usual é a de que o ângulo que indica a orientação do vetor é aquele que o vetor forma com o eixo dos  $xx$ , medido no sentido anti-horário. Assim, por exemplo, um vetor que tem a orientação do eixo forma com este um ângulo nulo, um vetor oposto ao eixo forma com este o ângulo  $\pi$ , um vetor que aponta para o terceiro quadrante forma com o eixo horizontal um ângulo compreendido entre  $\pi$  e  $3\pi/2$ . Em uma situação bidimensional, bastam dois valores para bem caracterizar o vetor, sem ambigüidade, e estes podem ser seu módulo e o ângulo medido da maneira descrita acima.

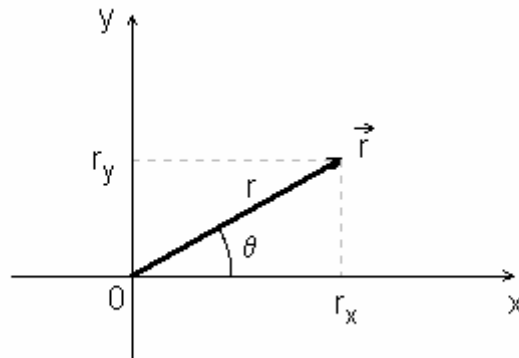


Figura 3 — Vetor posição.

Projetemos ortogonalmente, agora, o vetor  $\vec{r}$  segundo as direções coordenadas. Denotemos por  $r_x$  sua projeção horizontal e  $r_y$  sua projeção vertical. É muito fácil ver, na figura, que estas projeções valem:

$$r_x = r \cos \theta , \quad (\text{II.1 a})$$

$$r_y = r \sin \theta . \quad (\text{II.1 b})$$

Estas são as componentes do vetor segundo as direções coordenadas que, no caso bidimensional, se constituem em um par de valores. Observe que vetor orientado para o primeiro quadrante tem as duas componentes positivas, vetor orientado para o segundo quadrante tem componente x negativa e componente y positiva, etc.

Assim, valores necessários para bem caracterizar o vetor, sem ambigüidade, podem ser suas componentes segundo as duas direções coordenadas. Tanto faz informar o vetor através do par de valores  $(r, \theta)$ , quanto através do par de valores  $(r_x, r_y)$ . As equações (II.1 a) e (II.1 b) são a maneira de se passar da parametrização  $(r, \theta)$  para a parametrização  $(r_x, r_y)$ . Vejamos, agora, o caminho inverso, isto é, como passar da parametrização  $(r_x, r_y)$  para a parametrização  $(r, \theta)$ .

DE COORDENADAS RETANGULARES  $(r_x, r_y)$  PARA POLARES  $(r, \theta)$

Na figura 3 fica fácil identificar um triângulo retângulo, de hipotenusa  $r$  (módulo do vetor  $\vec{r}$ ) e catetos  $r_x$  e  $r_y$ . (De maneira geral, o correto é dizer que os catetos valem  $|r_x|$  e  $|r_y|$ , já que  $r_x$  e  $r_y$  podem assumir valores negativos.) Logo, vale a clássica relação (e, aqui, não importa mais o sinal das componentes  $r_x$  e  $r_y$ )

$$r^2 = r_x^2 + r_y^2 .$$

Então, dadas as componentes  $r_x$  e  $r_y$  do vetor, seu módulo vale

$$r = + \sqrt{r_x^2 + r_y^2} , \quad (\text{II.2 a})$$

onde enfatizamos a escolha da raiz positiva, pois estamos calculando uma grandeza essencialmente positiva.

Quanto ao ângulo  $\theta$ , sua tangente é dada pela razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente, isto é,

$$\text{tg } \theta = \frac{r_y}{r_x} ,$$

o que significa que podemos escrever:

$$\theta = \text{arc tg } \frac{r_y}{r_x} . \quad (\text{II.2 b})$$

A função  $\text{arc tg}$ , também denotada por  $\text{tg}^{-1}$ , é a função inversa da função tangente ( $\text{tg}$ ), e a equação (II.2 b) nos diz que o ângulo  $\theta$ , formado pelo vetor  $\vec{r}$  com o eixo dos  $xx$ , é um ângulo cuja tangente vale  $r_y / r_x$ .

Assim, as equações (II.2 a) e (II.2 b) são a expressão da passagem da parametrização  $(r_x, r_y)$  para a parametrização  $(r, \theta)$ .

Em resumo, um vetor no plano requer a informação de dois valores para sua perfeita caracterização (determinação de módulo, direção e sentido). Uma parametrização usual é a que adota esses valores como sendo  $r$  e  $\theta$ , respectivamente o módulo do vetor e o ângulo que ele forma com o eixo dos  $xx$ , adotando-se a convenção de que este ângulo é medido a partir do eixo dos  $xx$ , no sentido anti-horário (sentido trigonométrico). Outra parametrização usual é a que adota o par de componentes do vetor segundo as duas direções coordenadas,  $r_x$  e  $r_y$ . As equações (II.1 a,b) e (II.2 a,b) permitem que se passe facilmente de uma destas parametrizações para a outra. Analise com cuidado o cenário do arquivo `vet_comp.mdl`.

Consideremos um exemplo simples. Desenhe em seu caderno os vetores  $\vec{a}$ , de componentes  $a_x = -1$  e  $a_y = +1$ , e  $\vec{b}$ , de componentes  $b_x = +1$  e  $b_y = -1$  (unidades arbitrárias). Verifique que estes vetores possuem o módulo igual a  $\sqrt{2}$ . Quais os ângulos que  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  formam com o eixo dos  $xx$ ? Se seu desenho está razoavelmente bem feito, fica evidente que o ângulo formado por  $\vec{a}$ ,  $\theta_a$ , vale  $3\pi/4$ , e que o ângulo formado por  $\vec{b}$ ,  $\theta_b$ , vale  $7\pi/4$ . No entanto,  $a_y/a_x = b_y/b_x = -1$ , e  $\text{arc tg}(-1) = -\pi/4$ , em qualquer tabela (ou calculadora). Esta é uma ambigüidade para a qual você deve estar sempre atento, e preparado para resolver. Ao se realizar a divisão das duas componentes de um vetor, perde-se a informação sobre qual o sinal de cada uma delas. Além disso, as tabelas (e calculadoras) adotam o domínio  $[-\pi/2; +\pi/2]$  para a função tangente, e aqui se pretende medir ângulos no intervalo  $[0; 2\pi]$ . Há, portanto, que se ter o cuidado de resolver a equação (II.2 b) tendo em mente os sinais das componentes do vetor, o que dá a indicação sobre o quadrante para o qual este aponta. Verifique que vale a relação seguinte,

$$\theta = \theta_C + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{r_x}{|r_x|} \right),$$

onde  $\theta_C$  é o resultado fornecido pela calculadora.

## VETOR POSIÇÃO

A notação  $\vec{r}$ , utilizada acima para designar um vetor genérico, é na verdade muito mais utilizada para designar o chamado vetor posição de uma partícula. O vetor posição de uma partícula é aquele que tem sua origem na origem do referencial e sua extremidade no ponto em que está localizada a partícula. Assim, um móvel tem um vetor posição variável com o

tempo. (Outra denominação para vetor posição é raio vetor.) Se um objeto é localizado pelo vetor posição  $\vec{r}$ , as componentes  $r_x$  e  $r_y$  deste vetor são, usualmente, denotadas simplesmente por  $x$  e  $y$ , respectivamente, o par  $(x,y)$  localizando perfeitamente o objeto. Abra o arquivo `ref_pos2.mdl`. O cenário deste arquivo mostra o móvel (Papai Noel) em uma certa posição inicial. Acionando a animação, você pode mudar o Papai Noel de posição, acompanhando a evolução de seu vetor posição e de suas componentes  $x$  e  $y$ .

## DESLOCAMENTO

O arquivo `vet_desl.mdl` traz um cenário com três animações correspondentes a três tipos diferentes de movimento. Nas três animações, é mostrado o vetor posição inicial do móvel,  $\vec{r}_0$ , e o vetor posição  $\vec{r}$  em um instante posterior qualquer, cuja evolução é vista após o acionamento da janela Controle. Outro vetor cuja evolução é mostrada é aquele que tem sua origem na extremidade de  $\vec{r}_0$  e sua extremidade na extremidade de  $\vec{r}$  e que, portanto, se trata do vetor  $\vec{r} - \vec{r}_0$ . Esta diferença é designada por  $\Delta \vec{r}$ . Veja que este vetor nada mais é do que o deslocamento associado ao percurso considerado, já que tem sua origem na posição inicial e sua extremidade na posição final do móvel. Então, o deslocamento do móvel, desde a posição inicial, é:

$$\vec{d} = \Delta \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 . \quad (\text{II.3})$$

A forma  $\Delta \vec{r}$  é muito utilizada para designar deslocamento.

De maneira geral,  $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  é o deslocamento entre  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$ .

No cenário do arquivo `des_dist.mdl` você tem oportunidade de visualizar a diferença entre deslocamento e distância percorrida. É importante reafirmar que a distância percorrida em um certo intervalo de tempo (um valor escalar) usualmente não coincide com o módulo do deslocamento associado ao mesmo intervalo de tempo.

## VETORES UNITÁRIOS

Em três dimensões, um vetor requer a informação de três valores para sua perfeita caracterização (determinação de módulo, direção e sentido). Adotando-se um referencial cartesiano, estes três valores podem ser as componentes  $r_x$ ,  $r_y$  e  $r_z$ , segundo as direções coordenadas. Isto é visto no cenário do arquivo `vet_tri1.mdl`, em três casos diferentes (para um vetor genérico  $\vec{r}$ ). Note que as projeções do vetor coincidem com os lados de um paralelepípedo ao longo de cuja diagonal está desenhado o vetor. O sinal da componente de um vetor é positivo ou negativo, conforme a projeção se dá na região de valores positivos ou negativos do eixo, quando o vetor é colocado com sua origem coincidente com a origem do referencial. Observe, também, os três vetores  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$ , desenhados a partir da origem. Estes são os chamados vetores unitários (ou versores) das direções coordenadas. São vetores definidos como tendo módulo unitário, e com as orientações respectivas dos três eixos. Assim, por exemplo, o unitário da direção x,  $\vec{i}$ , é um vetor de módulo igual a uma unidade, na direção do eixo dos xx, e o sentido apontando no sentido do crescimento dos valores de x. Com isto, pode-se escrever:

$$\vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k} . \quad (\text{II.4})$$

Os vetores  $r_x \vec{i}$ ,  $r_y \vec{j}$  e  $r_z \vec{k}$  são chamados de componentes vetoriais do vetor  $\vec{r}$  segundo as três direções coordenadas. O cenário do arquivo `vet_tri2.mdl` apresenta um vetor como a soma de suas componentes vetoriais. Você pode acrescentar casos a este modelo, se quiser visualizar vetores que tenham outras orientações. Qual a expressão do módulo de  $\vec{r}$  em função de suas componentes?

## SOMANDO COMPONENTES

Considere dois vetores,  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , dados por suas componentes:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} ,$$

$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} .$$

Então sua resultante, o vetor  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ , será o vetor

$$\vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k} ,$$

onde

$$c_x = a_x + b_x ,$$

$$c_y = a_y + b_y ,$$

$$c_z = a_z + b_z .$$

Isto é facilmente generalizado para a soma de um número qualquer de vetores: as componentes de um vetor soma de vários vetores são as somas das respectivas componentes dos vetores que se está somando. Este é o método analítico de se somar vetores, em contrapartida ao método gráfico, tratado inicialmente.

## VELOCIDADE

Voltemos ao deslocamento. Abra o arquivo dr.mdl. Acionando-se a animação, um objeto descreve uma trajetória no plano x-y, e é traçado o deslocamento  $\Delta\vec{r}$  associado a um certo intervalo de tempo do percurso. Diminuindo este intervalo de tempo (passando do caso preto para os casos verde, rosa e azul), você verifica que o deslocamento tende a uma direção tangente à trajetória do móvel. No limite em que o intervalo de tempo tende a zero ( $\Delta t \rightarrow 0$ ), o deslocamento tende ao chamado deslocamento infinitesimal  $d\vec{r}$  ( $\Delta\vec{r} \rightarrow d\vec{r}$ ), um vetor de orientação tangente à trajetória, apontando no sentido do movimento. Enquanto o deslocamento finito é associado a um intervalo de tempo finito, associa-se um deslocamento infinitesimal a cada instante de tempo, ou seja, a cada ponto da trajetória.

Passemos, agora, a definições cuja analogia com definições feitas na Primeira Unidade você poderá facilmente perceber. Se um móvel sofre o deslocamento  $\Delta\vec{r}$  no intervalo de tempo  $\Delta t$ , sua velocidade média, neste intervalo de tempo, é o vetor

$$\vec{v}_m \equiv \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} . \quad (\text{II.5})$$

A velocidade instantânea do móvel, em um ponto qualquer de sua trajetória (em um instante qualquer de sua viagem), é o vetor



$$\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_m, \quad (\text{II.6})$$

um vetor tangente à trajetória no ponto considerado, apontando no sentido do movimento. Os cenários dos arquivos `vet_vel1.mdl` e `vet_vel2.mdl` mostram bem este importante aspecto.

A equação (II.6) informa que a velocidade instantânea de um móvel é um vetor dado pela derivada (vetorial) do vetor posição em relação ao tempo, ou seja, é o vetor que mede a taxa de variação do vetor posição do móvel ao longo do tempo. Aspectos matemáticos mais rigorosos são tratados em seu curso de Cálculo.

Escrevendo a velocidade instantânea em termos de suas componentes, temos a expressão

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k},$$

onde  $v_x$  é a velocidade instantânea da projeção do móvel sobre o eixo dos  $xx$ , e analogamente para  $v_y$  e  $v_z$ :

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

## ACELERAÇÃO

No que diz respeito à aceleração, definimos o vetor

$$\vec{a}_m \equiv \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}, \quad (\text{II.7})$$

indicando que a aceleração média em um intervalo de tempo  $\Delta t$  é a razão entre a variação da velocidade instantânea neste intervalo e o próprio intervalo. Além disso,

$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{a}_m, \quad (\text{II.8})$$

o que indica que a aceleração instantânea é a derivada vetorial em relação ao tempo da velocidade instantânea, ou seja, o limite, quando  $\Delta t$  tende a zero, da aceleração média.

Podemos, então, escrever:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} . \quad (\text{II.9})$$

Escrevendo a aceleração em termos de suas componentes,

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} ,$$

explicitam-se as acelerações instantâneas das projeções do móvel segundo as direções coordenadas:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} , \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} , \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} .$$

### UM EXERCÍCIO SIMPLES

Segue, agora, um exercício de Cálculo. Trata-se da determinação formal da velocidade média, calculando-se o valor médio da função velocidade instantânea. Se um móvel descreve um certo percurso em um intervalo de tempo  $\Delta t = t_f - t_i$ , sua velocidade média, neste intervalo de tempo, é dada pela integral

$$\vec{v}_m = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_f} \vec{v} dt .$$

Como  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ , podemos escrever  $\vec{v} dt = \frac{d\vec{r}}{dt} dt = d\vec{r}$ . A regra do Cálculo que nos permite manipular os diferenciais desta maneira é a chamada Regra da Cadeia, e ressalta a riqueza da notação utilizada, devida a Leibniz. Ao operarmos assim, estamos realizando uma mudança de variável de integração, da variável tempo para a variável posição. Então, fica:

$$\vec{v}_m = \frac{1}{\Delta t} \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} d\vec{r} .$$

Mas a integral do elemento  $d\vec{r}$ , entre as posições inicial  $\vec{r}_i$  e final  $\vec{r}_f$ , nada mais é que a diferença  $\vec{r}_f - \vec{r}_i$ , ou seja, o deslocamento  $\Delta\vec{r}$ . Assim, a expressão da velocidade média, calculada como o valor médio da velocidade instantânea, ao longo do percurso, recai na equação (II.5). Se você não tem tanta familiaridade com o Cálculo Diferencial e Integral, isto não deve preocupá-lo. Apenas, fica registrado que a expressão apresentada inicialmente como definição de velocidade média é aquela a que chegamos se, formalmente, calculamos o valor médio da função velocidade instantânea, esta tendo sido definida como a derivada temporal do vetor posição.

Resultado bem diverso é obtido se, ao invés de determinarmos o valor médio da velocidade instantânea, determinamos o valor médio do módulo da velocidade instantânea,  $v$ , por muitos autores chamado de rapidez. Agora, integramos uma função escalar. Chamemos esta integral de  $V$ . Então,

$$V = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_f} v \, dt ,$$

e aqui, também, podemos realizar a mudança de variável de integração, fazendo

$$v \, dt = \frac{dr}{dt} \, dt = dr . \text{ Logo,}$$

$$V = \frac{1}{\Delta t} \int_{r_i}^{r_f} dr .$$

O elemento  $dr$  é o módulo do elemento de deslocamento  $d\vec{r}$ . Este é um exemplo de integral de linha: a integração é realizada ao longo da trajetória do móvel. Seu valor, sendo a soma dos (infinitos) comprimentos infinitesimais que constituem toda a trajetória, nada mais é que o comprimento desta trajetória. Chamando de  $s$  este comprimento, fica:

$$V = \frac{s}{\Delta t} .$$

Esta é uma grandeza que tem a dimensão de velocidade, e mede a distância total percorrida pelo móvel dividida pelo intervalo de tempo transcorrido no percurso. É uma quantidade escalar positiva, já referida na Primeira Unidade, que chamamos de rapidez média. É muito importante notar que esta grandeza não é equivalente ao módulo da velocidade média.

Nota: Nos textos em inglês, a palavra *velocity* designa a velocidade instantânea, *speed* designa a rapidez, *average velocity* designa a velocidade média, e *average speed* designa a rapidez média.

## MOVIMENTO DE PROJÉTEIS

Tratemos, agora, de um exemplo clássico de movimento bidimensional: o movimento de um projétil. Por isto, entende-se o movimento de um objeto lançado no campo gravitacional, com uma velocidade inicial dotada de componente horizontal não nula, o que implica em uma trajetória não restrita à direção vertical, como no caso do movimento estudado na Unidade anterior. Desconsideramos, aqui, a resistência do ar: o projétil lançado no campo gravitacional tem a aceleração  $\vec{g}$ , e portanto a situação física é a mesma do caso de queda livre. A diferença está nas trajetórias, vertical na queda livre, curva plana no caso do projétil livre.

A figura 4 mostra a velocidade inicial,  $\vec{v}_0$ , de um projétil lançado de um ponto escolhido, por conveniência, como a origem do referencial, assim como as componentes da velocidade inicial e a trajetória descrita pelo projétil. Note que, não havendo nenhuma outra interação que não a gravitacional, o movimento está todo ele contido em um plano vertical, e um referencial bidimensional é o que basta para descrevê-lo.

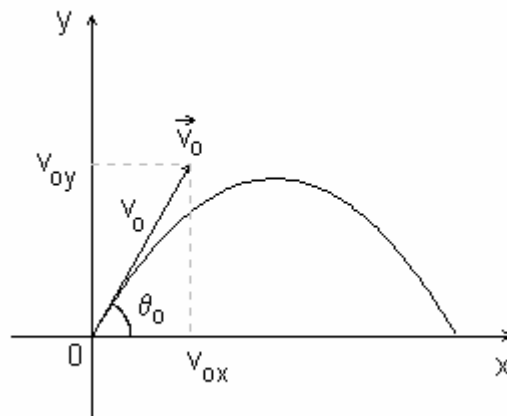


Figura 4 — Lançamento de um projétil.

A velocidade inicial, então, tem as componentes

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta_0$$

e

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta_0 ,$$

onde  $\theta_0$  é o ângulo que ela forma com o eixo horizontal.

Se  $\vec{a}$  é a aceleração do projétil enquanto ele está no ar, suas componentes neste referencial são

$$a_x = 0 \quad (\text{II.10 a})$$

e

$$a_y = -g , \quad (\text{II.10 b})$$

já que, como vimos, a aceleração é vertical apontando para baixo, e o referencial escolhido tem o eixo dos  $yy$  apontando para cima.

Fica fácil fazer, agora, a decomposição do movimento segundo as direções coordenadas. Segundo a direção  $x$  o movimento é sem aceleração e, portanto, de velocidade constante:

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos \theta_0 = \text{constante}, \quad (\text{II.11 a})$$

$$x = x_0 + v_x t, \quad (\text{II.11 b})$$

indicando que temos, ao longo do eixo dos  $xx$ , um movimento retilíneo uniforme. A equação de movimento, então, mostra um crescimento linear com o tempo para o deslocamento  $x - x_0$ . (No caso da figura 4, foi feito  $x_0 = 0$ .)

Na direção  $y$ , o movimento se projeta como um movimento de aceleração constante, o que é exatamente o mesmo movimento de queda livre estudado na Unidade anterior. As equações que regem este movimento são, portanto, escritas da seguinte forma.

$$y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2, \quad (\text{II.12 a})$$

$$v_y = v_{0y} - g t, \quad (\text{II.12 b})$$

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2 g (y - y_0). \quad (\text{II.12 c})$$

As equações (II.12 a,b,c) referem-se à projeção vertical do movimento do projétil. (No caso da figura 4, foi tomado  $y_0 = 0$ .)

O movimento de um projétil livre, portanto, é facilmente tratado quando nos damos conta de que podemos decompô-lo segundo duas direções ortogonais convenientemente escolhidas. Imagine o projétil projetando sua sombra tanto sobre o eixo horizontal (o pavimento) quanto sobre o eixo vertical (a parede). A sombra projetada sobre o pavimento descreve um movimento uniforme, e a sombra projetada sobre a parede descreve um movimento de queda livre vertical. Veja o cenário do arquivo `ex_2_02.mdl`.

O cenário do arquivo `proj_pos.mdl` mostra um projétil sendo lançado por um canhão. A função do canhão é a de imprimir ao projétil uma velocidade inicial. À medida que o projétil se desloca é mostrada a evolução de seu vetor posição, enquanto são traçados os gráficos  $x$  versus  $t$  e  $y$  versus  $t$ , ou seja, os gráficos das projeções do vetor posição segundo as direções coordenadas como função do tempo. Veja que estes gráficos já lhe são bastante familiares.

No cenário do arquivo `proj_ac.mdl` você pode acompanhar, simultaneamente, o lançamento de um projétil, com a mesma velocidade inicial, em três ambientes gravitacionais diferentes (caracterizados por acelerações da gravidade diferentes): a Terra, Marte e a Lua. Na

horizontal, a velocidade constante é a mesma, nos três casos. O caso de aceleração da gravidade menos intensa é o de maior tempo de voo, implicando em um maior alcance horizontal.

O arquivo proj\_tqd.mdl mostra um cenário onde se simula o lançamento de uma bola, que rola para fora de uma mesa, ao mesmo tempo em que outra bola é largada do repouso, da mesma altura. Como a bola que rola da mesa tem uma velocidade inicial horizontal e, portanto, não tem componente vertical de velocidade inicial (assim como aquela que é largada), ambas chegarão ao solo simultaneamente. Observe que, ao longo da queda, em cada instante as duas bolas encontram-se à mesma altura. O que diferencia os dois movimentos é sua projeção horizontal.

Observe, agora, o cenário do arquivo ex\_2\_03.mdl, e interprete com cuidado a animação. Veja que, aqui, o que diferencia os dois movimentos é sua projeção vertical.

Voltando ao tiro de canhão. O cenário do arquivo proj\_vel.mdl mostra duas animações. Enquanto uma apresenta a velocidade do projétil ao longo do movimento, na outra são vistas suas componentes evoluindo no tempo. Estes, também, são gráficos com os quais você já está familiarizado.

Considere um lançamento a partir da origem ( $x_0 = y_0 = 0$ ), como no caso da figura 4. Usando as equações (II.11 a,b) e (II.12 a), você chega à equação que relaciona as componentes  $x$  e  $y$  do vetor posição:

$$y = (\operatorname{tg} \Theta_0) x - \frac{1}{2} \frac{g x^2}{v_0^2 \cos^2 \Theta_0} ,$$

que é a equação da trajetória do projétil. Esta é a equação de uma parábola, indicando que a trajetória de um projétil livre é parabólica.

Nota: A equação de movimento  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ , em um movimento bidimensional, decompõe-se, no referencial  $x$ - $y$ , nas equações  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$ , como é o caso das equações (II.11 b) e (II.12 a). Já a relação entre as duas coordenadas espaciais,  $y = y(x)$ , é a equação da trajetória do móvel no plano  $x$ - $y$ . Nesta, perde-se informação sobre como a trajetória é percorrida, no tempo.

O cenário do arquivo `ex_2_04.mdl` mostra um jogador lançando uma bola, cuja trajetória é traçada. A janelas Condições Iniciais e Tabela indicam valores medidos no SI, e o ângulo de lançamento é dado em graus. A velocidade da bola, no ponto mais alto de sua trajetória, é horizontal e tem, portanto, a componente na direção  $y$  igual a zero. Use esta condição para, com o auxílio da equação (II.12 b), determinar o tempo de subida da bola. Em seguida, determine a altura máxima atingida. Usando a equação (II.12 a), determine o tempo necessário para a bola descrever o resto do percurso, até atingir o solo. Finalmente, você está em condições de determinar o alcance horizontal da bola, que é a deslocamento horizontal entre o ponto de lançamento e o ponto em que a bola chega ao solo. Seus resultados podem ser conferidos com o que é listado na Tabela.

Verifique que o tempo de voo da bola, seu alcance horizontal, e a altura máxima que ela atinge, são consistentes com as condições iniciais do lançamento. Qual a velocidade da bola (módulo e orientação), quando ela se encontra no ponto mais alto, e quando atinge o solo?

Abra o arquivo `ex_2_05.mdl`, cujo cenário mostra a determinação da posição e da velocidade de um projétil, em função do tempo, através da solução das equações diferenciais associadas ao movimento: duas equações para as componentes da velocidade ( $v_x$  e  $v_y$ ), duas para as componentes do vetor posição ( $x$  e  $y$ ). Veja que a janela Condições Iniciais indica a posição inicial do projétil (a origem, neste exemplo), as componentes horizontal e vertical de sua velocidade inicial, e o módulo da aceleração da gravidade ( $g$ ). O sistema de unidades adotado é o SI. Na janela Modelo estão relacionadas as equações diferenciais a serem resolvidas pelo programa, além da expressão que permite calcular o módulo da velocidade do projétil em qualquer instante. Observe todas as curvas que a janela Gráfico pode lhe apresentar, tanto em função de  $x$ , quanto em função de  $t$ .

## MOVIMENTO CIRCULAR UNIFORME

Outro estudo clássico de movimento bidimensional é o chamado movimento circular uniforme. Como a expressão indica, trata-se de um movimento em que a trajetória do móvel é circular. No entanto, a expressão pode ser enganosa por conter a palavra “uniforme”, o que pode sugerir um movimento com velocidade constante, o que não é o caso. Sabemos que velocidade (vetor) constante significa movimento retilíneo, já que esta é sempre tangente à



trajetória. Logo, só uma trajetória linear admite a situação de velocidade constante. No movimento circular uniforme, a uniformidade refere-se ao módulo da velocidade. Trata-se, portanto, de um movimento em que o móvel gira em torno de um ponto central, a uma velocidade de magnitude constante, o que o faz perfazer o mesmo número de voltas em tempos iguais. É um movimento cíclico, periódico. Estamos sendo apresentados ao primeiro movimento periódico de nosso curso. Um movimento periódico é repetitivo, e tem a caracterizá-lo, entre outras, a grandeza período (normalmente denotada por  $T$ ), que é o tempo que o móvel leva para completar um ciclo. Assim, por exemplo, podemos olhar, com boa aproximação, a Lua como descrevendo um movimento circular em torno da Terra, com um período de 27,3 dias (o tempo transcorrido entre duas Luas Cheias). O movimento circular, com sua periodicidade, é assunto de tal importância que para ele reservamos a Unidade seguinte.

## A RELATIVIDADE GALILEANA

Voltemos, agora, ao que foi tratado no final da Unidade anterior, quando abordamos a relatividade galileana em uma dimensão. Você tem, no cenário do arquivo `vel_rel2.mdl`, a oportunidade de relembrar o tema. Repetindo o mesmo raciocínio, agora com o formalismo vetorial, chega-se à relatividade galileana em sua expressão mais geral. Vejamos, então: sejam dois referenciais distintos,  $S$  e  $S'$ , com origens respectivas  $O$  e  $O'$ . Suponhamos que, em  $t_0 = 0$ , as duas origens coincidam. Suponhamos, também, que o referencial  $S'$  tenha, com relação ao referencial  $S$ , uma velocidade constante igual a  $\vec{u}$ . Assim,  $\vec{u}$  é a velocidade de  $O'$  com relação a  $O$ . Então, em um instante de tempo  $t$  qualquer, a origem do referencial  $S'$  é localizada, com relação ao referencial  $S$ , pelo vetor posição  $\vec{r}_0 = \vec{u} t$ . Considere um móvel  $M$  localizado, neste mesmo instante  $t$ , conforme visto de  $S$ , pelo vetor posição  $\vec{r}_M$ , e conforme visto de  $S'$ , pelo vetor posição  $\vec{r}'_M$ . Então, vale a relação

$$\vec{r}_M = \vec{r}'_M + \vec{r}_0, \quad (\text{II.13 a})$$

que informa que o vetor posição do móvel no referencial  $S$ , em um dado instante  $t$ , é igual ao vetor posição do móvel, naquele instante, no referencial  $S'$ , mais o vetor posição da origem do referencial  $S'$  com relação ao referencial  $S$ , no mesmo instante. Como  $\vec{r}_0 = \vec{u} t$ , então, equivalentemente,

$$\vec{r}_M = \vec{r}'_M + \vec{u} t . \quad (\text{II.13 b})$$

Derivando esta relação em relação ao tempo, temos:

$$\vec{v}_M = \vec{v}'_M + \vec{u} , \quad (\text{II.14})$$

onde  $\vec{v}_M$  e  $\vec{v}'_M$  são as velocidades do móvel M com relação aos referenciais S e S', respectivamente.

A equação (II.14) traduz a relatividade galileana, relacionando as velocidades de um mesmo objeto, medidas em dois referenciais diferentes, onde um referencial desloca-se, em relação ao outro, com velocidade constante.

Derivando-se, por sua vez, a equação (II.14) em relação ao tempo, como  $\vec{u}$  é um vetor constante, resulta que

$$\vec{a}_M = \vec{a}'_M , \quad (\text{II.15})$$

indicando que a aceleração de um móvel é a mesma, independente do referencial de onde ele é observado, desde que a velocidade de um referencial com relação a outro seja constante. Abra o cenário do arquivo vel\_rel3.mdl, e veja os dois casos desta animação.

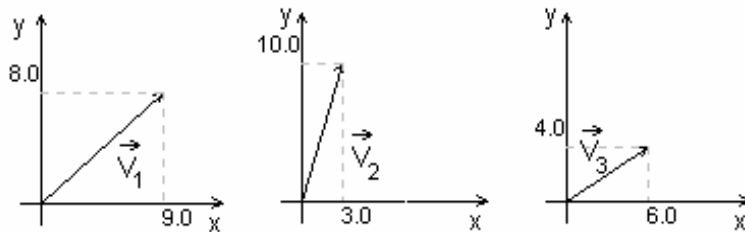
Note que, aqui, não nos preocupamos em distinguir os tempos, conforme observamos o movimento de S ou de S': para nós,  $t = t'$ . Esta é uma característica importante da relatividade galileana, que não persiste no formalismo da relatividade einsteineana.

## EXERCÍCIOS DA SEGUNDA UNIDADE

1) Dados os vetores  $\vec{V}_1$ ,  $\vec{V}_2$  e  $\vec{V}_3$  abaixo, determine as componentes, o módulo e o ângulo formado com o eixo dos xx, de cada um dos vetores:

a)  $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$ ; b)  $\vec{V}_3 - \vec{V}_1$ ; c)  $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3$ .

Utilize o cenário do arquivo soma\_vet.mdl para conferir suas respostas.



2) Crie modelos e utilize a janela Animação do Modellus, para representar os vetores abaixo.

a) Um vetor com componente x igual a 2 unidades e componente y igual a 5 unidades. Calcule o seu módulo e o ângulo que forma com o eixo dos xx.

b) Refaça o item a) admitindo que os valores das componentes x e y podem ser quaisquer, sendo especificados na janela Condições Iniciais. Tome especial cuidado com os casos em que o ângulo se localiza no segundo ou terceiro quadrantes.

c) Um vetor de módulo e orientação a serem especificados na janela Condições Iniciais.

d) O produto do vetor do item a) por um escalar k, a ser especificado na janela Condições Iniciais. Atribua a k diferentes valores (inclusive negativos).

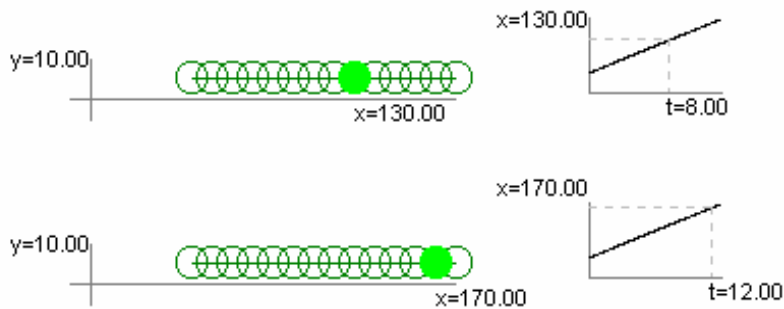
e) Um vetor de componentes  $v_x = 3t$  e  $v_y = 5t$ , onde t é a variável independente da janela Controle. Calcule seu módulo e orientação.

3) O cenário do arquivo `rad_grau.mdl` lhe permite lembrar a definição de radiano e sua relação com o grau. Construa um modelo em que você entra com o ângulo em graus e calcula seu valor em radianos e vice-versa.

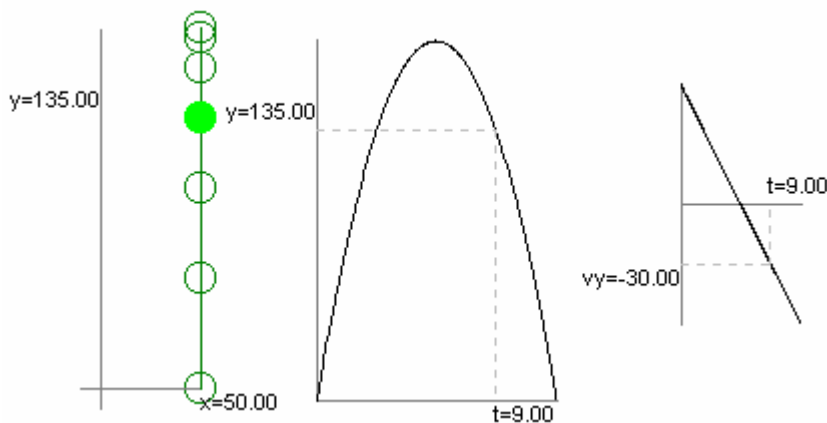
4) Os cenários dos arquivos `fc_trig1.mdl` e `fc_trig2.mdl` tratam das funções trigonométricas seno, co-seno e tangente, bem como de suas relações com os lados de um triângulo retângulo. Explore suas animações.

5) Use (1°) funções e (2°) equações diferenciais, no Modellus, que permitam obter as seguintes trajetórias retílineas. (Sistema Internacional de unidades.)

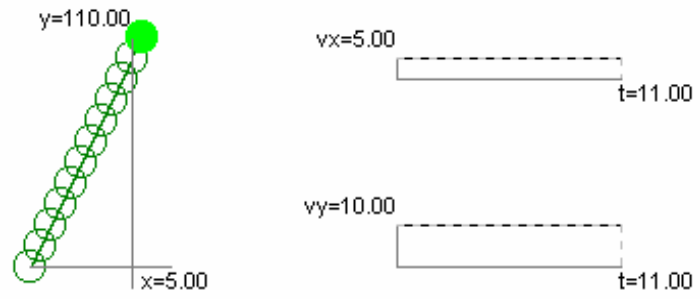
a)



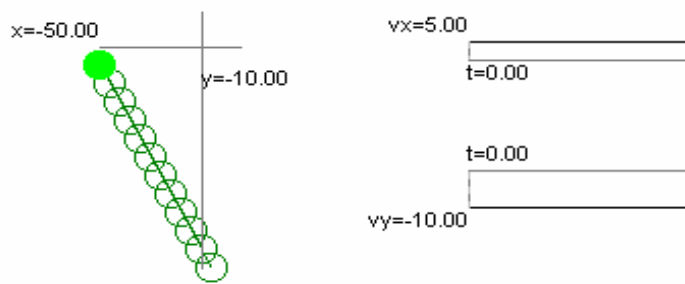
b)



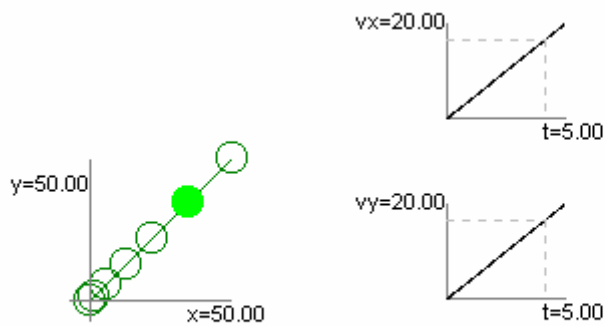
c)



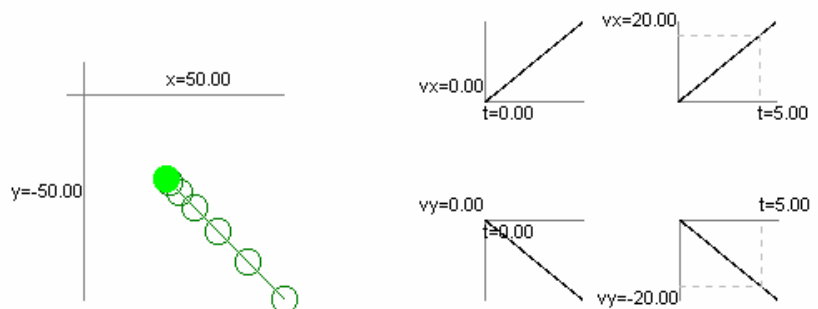
d)



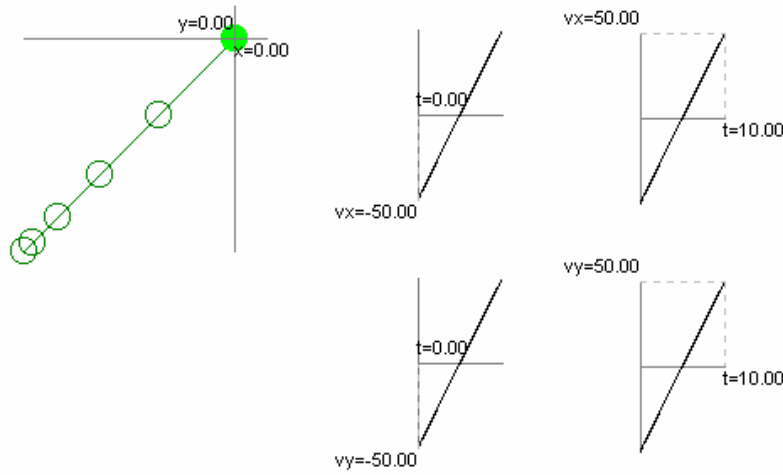
e)



f)

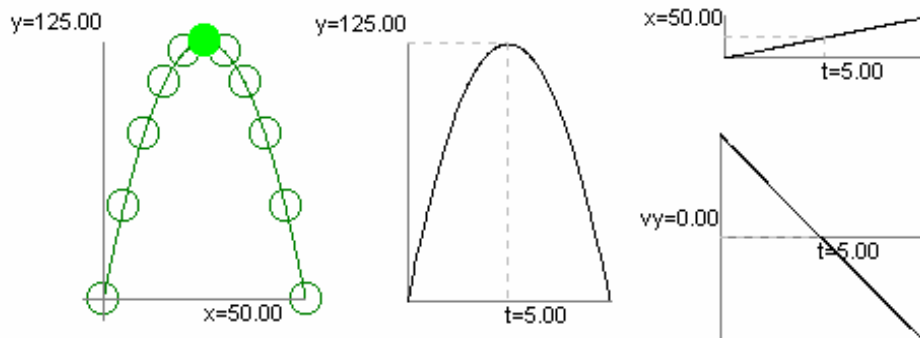


g)

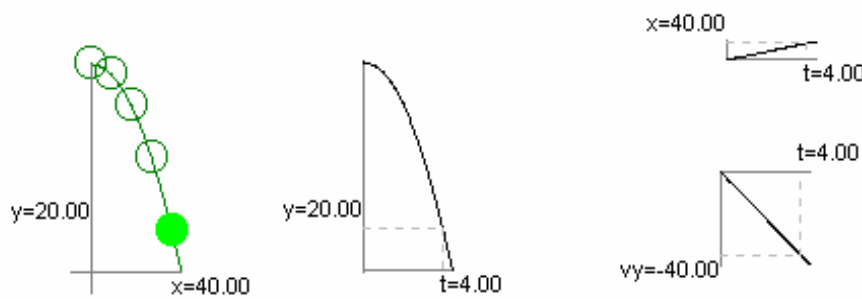


6) Use equações diferenciais, no Modellus, que permitam obter as seguintes trajetórias parabólicas. (Sistema Internacional de unidades.)

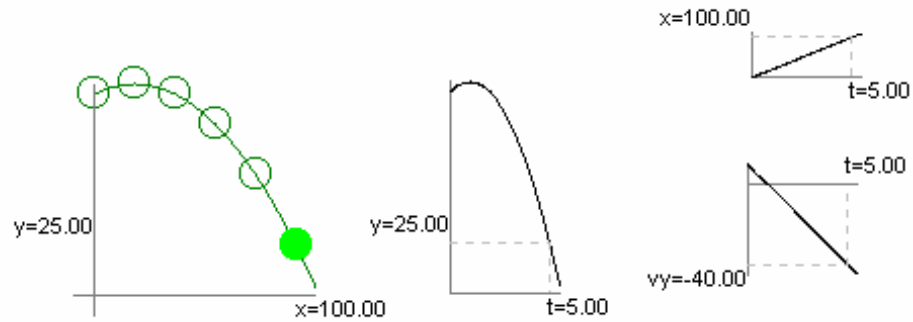
a)



b)



c)



7) Crie um modelo, no Modellus, que lhe permita comparar as trajetórias parabólicas de projéteis na Terra, na Lua e em Vênus.

8) No cenário do arquivo projetil.mdl você vê que, para um dado módulo da velocidade inicial, há dois valores de seu ângulo com a horizontal (ângulo de tiro) que resultam no mesmo alcance. A soma destes ângulos é 90 graus. A bola azul corresponde ao menor ângulo e a vermelha ao maior ângulo. O alcance máximo é obtido para um ângulo de  $45^\circ$  (neste caso, os dois ângulos colapsam em um único). Compare os tempos de vôo das duas bolas e as alturas máximas que elas atingem, para os 4 casos apresentados.

Deduz uma expressão para o tempo de vôo, para a altura máxima e para o alcance horizontal, em função do ângulo de tiro e do módulo da velocidade inicial, e determine:

- o ângulo de tiro para o qual o alcance horizontal é igual a 75 % de seu valor máximo;
- o ângulo de tiro para o qual a altura máxima é igual ao alcance horizontal.

Verifique que seus resultados estão corretos, utilizando a animação.

9) No cenário do arquivo alvo.mdl você vê a tentativa de um Papai Noel Azul alvejar um Papai Noel Vermelho em uma árvore.

- Procure entender por que o Papai Noel Azul não tem sucesso nas tentativas apresentadas nos casos acionados pelos botões preto e azul.

b) Mostre que, se a velocidade inicial do projétil é suficiente para fazê-lo atingir a árvore, o sucesso nos casos acionados pelos botões verde e rosa independe da sua velocidade inicial.

10) No arquivo verifica.mdl, você encontra um cenário que lhe permite conferir cálculos realizados para a resolução de problemas de lançamento de projéteis (unidades SI). Como você pode ver na janela Modelo, foi adotado um referencial cartesiano x-y com o eixo dos yy apontado para cima. As condições iniciais do lançamento podem ser alteradas na janela Condições Iniciais. A janela Tabela lista, para cada instante de tempo t, os valores das componentes x e y do vetor posição do projétil e da velocidade do projétil, assim como o ângulo que o vetor velocidade forma com o eixo dos xx, e o seu módulo. Qualquer texto de Física Básica traz uma lista de problemas sobre movimento de projéteis. Este arquivo poderá lhe ser útil quando trabalhar esses problemas.

11) O cenário do arquivo mov\_rel1.mdl mostra a trajetória de um projétil, no caso uma bola, conforme visto de dois referenciais diferentes, um deles fixo ao solo e o outro movendo-se em relação ao solo (um carro). O carro dispõe de um dispositivo que lança a bola na direção vertical. Você pode modificar os perfis da trajetória, alterando parâmetros na janela Condições Iniciais (unidades SI). Varie, primeiro, apenas as velocidades iniciais do carro em relação ao solo e da bola em relação ao carro. Posteriormente, varie a aceleração do carro, dando-lhe valores no intervalo  $-2 \text{ m/s}^2 \leq a_{\text{carro}} \leq 2 \text{ m/s}^2$ .

12) No cenário do arquivo mov\_rel2.mdl, uma bola é lançada na direção vertical. A trajetória desta bola é vista por diferentes observadores situados em carros que se movem com velocidades constantes. O carro azul se move com a mesma velocidade do carro branco, do qual a bola é lançada.

a) Explique por que a trajetória parabólica vista por um observador no carro violeta apresenta abertura menor do que a vista por um observador no carro amarelo e abertura maior do que a vista por um observador no carro verde.

b) No caso apresentado neste modelo, todos os observadores vêem a bola se movendo para a frente. Em que condições um observador veria a bola se movendo para trás? Verifique se sua resposta está correta, alterando as velocidades na janela Condições Iniciais.



c) Determine a velocidade que o carro violeta deve ter para que um seu passageiro observe a bola se movendo para trás em uma trajetória parabólica de mesma abertura que a trajetória observada por um observador no carro verde. Verifique sua resposta, alterando valores na janela Condições Iniciais.

Sistema de unidades: SI.

13) Observe, no cenário do arquivo navios.mdl, os movimentos de dois navios em relação ao mar e o movimento de um deles (navio azul) em relação ao outro (navio amarelo).

a) Estime, visualmente, o instante em que a distância entre os dois navios é mínima (você pode conferir seus resultados na Tabela).

b) Determine o módulo e a orientação (especificada por um ângulo que você deve caracterizar) da velocidade do navio azul em relação ao navio amarelo.

Sistema de unidades: SI.

14) Nos três casos do cenário do arquivo gota.mdl são informadas, na janela Condições Iniciais, as velocidades de um carro e da chuva, em relação ao solo. Considere o eixo dos  $xx$  apontando para a direita e o eixo dos  $yy$  apontando para cima. Determine a velocidade (módulo e ângulo com a vertical) da chuva com relação ao carro.

15) No cenário do arquivo barqueiro.mdl, um barco (seta vermelha) atravessa o rio. Determine, com os recursos disponíveis na animação: a velocidade do rio em relação à margem, a velocidade do barco em relação ao rio e a velocidade do barco em relação à margem. O sistema de unidades da animação é o SI.



## TERCEIRA UNIDADE: MOVIMENTOS PERIÓDICOS

### MOVIMENTO CIRCULAR

Dedicamos esta Unidade ao movimento circular. Pode parecer um exagero dedicar toda uma Unidade a assunto tão particular, mas logo ficará claro ao leitor que muita conclusão importante será tirada deste estudo. Os antigos gregos consideravam o movimento circular o movimento perfeito: afinal, haveria outra forma de encarar o movimento dos astros em torno do centro do Universo (a Terra)? Hoje, não classificamos a trajetória circular como privilegiada, mas é certo que o estudo do movimento circular é um caminho natural para se iniciar a abordagem de um tema importantíssimo em Física: o movimento periódico.

Inicialmente, tratemos de uma relação muito simples e importante. Seja  $s$  o comprimento do arco de uma circunferência de raio  $R$  subtendido pelo ângulo  $\theta$ , como na figura 5. Então,

$$s = \theta R \quad (\text{III.1})$$

é a expressão que relaciona estas grandezas, desde que  $\theta$  seja medido em radianos. É muito importante atentar para o fato de esta relação ser válida apenas para ângulos medidos em radianos. A equação (III.1) contém, mesmo, a definição do radiano: um radiano é o ângulo que subtende um arco de comprimento igual ao raio da circunferência. O radiano é unidade do Sistema Internacional. Da equação (III.1) vê-se, também, que o comprimento da circunferência vale  $2\pi R$ , a medida de uma volta sendo de  $2\pi$  radianos.

Fica evidente, da equação (III.1), que ângulo é grandeza adimensional. Como tanto  $s$  quanto  $R$  são medidas de comprimento,  $\theta$  não tem dimensão. A unidade radiano (rad) só é referida para se fazer a distinção com outras unidades, como o grau, por exemplo, que é definido de maneira tal que uma volta compreende um ângulo de 360 graus ( $360^\circ$ ). Todas as relações deduzidas a partir da equação (III.1) só valem com ângulos expressos em radianos. Os cenários dos arquivos `ex_3_01.mdl` e `ex_3_02.mdl` são exemplos de aplicação direta desta relação.

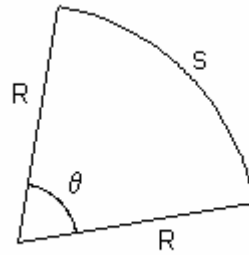


Figura 5 — O arco de comprimento  $s$  subtendido pelo ângulo  $\theta$ .

Seja uma partícula descrevendo um movimento circular. Isto significa que sua trajetória consiste de uma circunferência, centrada em um ponto que podemos considerar como a origem de nosso referencial, como mostra a figura 6. Se  $R$  é o raio da trajetória, a partícula está sempre a uma distância  $R$  da origem. Logo,  $R$  é o módulo de seu vetor posição, em qualquer ponto do percurso. O ângulo que o vetor posição da partícula forma com o eixo dos  $xx$  é a chamada posição angular da partícula. Assim, se a partícula gira no sentido anti-horário, a medida de sua posição angular aumenta; se o movimento é no sentido horário, a medida da posição angular diminui — veja o cenário do arquivo `pos_ang.mdl`.

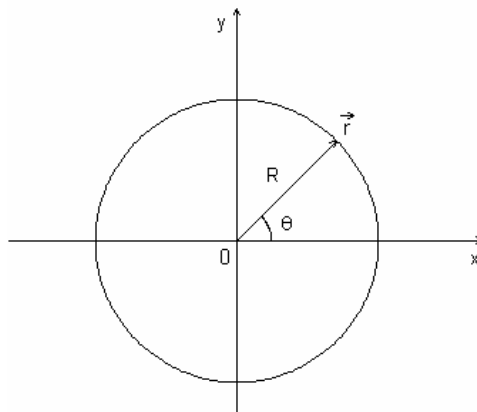


Figura 6 — Trajetória circular com seu centro coincidindo com a origem do referencial.

## GRANDEZAS CINEMÁTICAS

Se  $\Delta t$  é o intervalo de tempo no qual uma partícula sofre o deslocamento angular  $\Delta\theta$ , então a velocidade angular média da partícula, neste intervalo de tempo, é dada por

$$\omega_m \equiv \frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \quad (\text{III.2})$$

uma unidade usual de medida sendo o  $s^{-1}$ , ou rad/s. Aqui, uma outra medida de ângulo pode ser utilizada; o grau, por exemplo. Quando a unidade de medida do deslocamento angular não é explicitamente mencionada, isto significa que está sendo adotado o radiano. Por convenção, deslocamento angular positivo significa rotação no sentido anti-horário; deslocamento angular negativo significa rotação horária. Um deslocamento angular maior que  $2\pi$  significa que o móvel revisita sua trajetória; uma partícula que se desloca de  $3\pi$ , por exemplo, descreve uma volta e meia. Abra o arquivo `w_med.mdl` e analise seus três casos.

A velocidade angular instantânea é definida como a taxa de variação (derivada) temporal da posição angular:

$$\omega \equiv \frac{d\theta}{dt}. \quad (\text{III.3})$$

A aceleração angular média, correspondente a um intervalo de tempo  $\Delta t$ , é a variação da velocidade angular (instantânea) dividida pelo intervalo de tempo:

$$\alpha_m \equiv \frac{\Delta\omega}{\Delta t}, \quad (\text{III.4})$$

uma unidade usual de medida sendo o  $s^{-2}$ , ou rad/s<sup>2</sup>.

A aceleração angular instantânea é definida como a taxa de variação, no tempo, da velocidade angular:

$$\alpha \equiv \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}. \quad (\text{III.5})$$

O cenário do arquivo `ex_3_03.mdl` é um exemplo em que a dependência da posição angular com o tempo é cúbica.

## QUANDO A ACELERAÇÃO ANGULAR É CONSTANTE

Os três casos do arquivo `ex_3_04.mdl` são exemplos de solução numérica das equações diferenciais que levam à determinação da velocidade angular e da posição angular, no caso de aceleração angular constante. De forma geral, se  $\alpha$  é constante e o móvel parte da posição angular  $\theta_0$  com velocidade angular  $\omega_0$ , tem-se, para um instante genérico  $t$ :

$$\omega = \omega_0 + \alpha t , \quad (\text{III.6})$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 , \quad (\text{III.7})$$

onde  $t_0 = 0$  é o instante inicial do percurso. A partir destas duas equações chega-se à expressão abaixo, que relaciona grandezas angulares sem a dependência explícita do tempo:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2 \alpha (\theta - \theta_0) . \quad (\text{III.8})$$

Um objeto em movimento circular com uma velocidade angular positiva e uma aceleração angular negativa, por exemplo, gira no sentido anti-horário, com a velocidade angular diminuindo. O cenário do arquivo `w_alfa.mdl` permite a visualização de trechos de movimento circular contemplando as quatro combinações possíveis de sinais para  $\omega$  e  $\alpha$ . Obviamente, uma aceleração angular nula significa uma velocidade angular constante.

## EXPRESSANDO-SE NA FORMA VETORIAL

Aqui, estamos tratando as grandezas angulares  $\omega$  e  $\alpha$  como escalares, como no caso da velocidade e da aceleração no estudo da cinemática unidimensional. Será que, também para velocidade angular e aceleração angular, cabe o tratamento vetorial? Começemos por analisar o caso do deslocamento angular. O cenário do arquivo `rot1.mdl` mostra que a soma de dois deslocamentos angulares, ou seja, dois deslocamentos angulares realizados em seqüência, não é necessariamente comutativa. Uma sucessão de dois deslocamentos angulares de um objeto pode resultar em uma configuração final que depende da ordem em que os deslocamentos foram realizados. Assim, contrariamente ao caso do deslocamento translacional, deslocamento angular não pode ser visto como vetor, já que não respeita uma das propriedades da soma de vetores. Abra o arquivo `rot2.mdl`, em cujo cenário você visualiza a

mesma experiência sendo realizada mas, agora, com deslocamentos angulares menores. O arquivo rot3.mdl apresenta um cenário em que, novamente, se repete a mesma experiência, com deslocamentos angulares ainda menores. Comparando os resultados das três experiências, fica evidente que, quanto menor a amplitude dos deslocamentos, mais as duas configurações finais se parecem. Podemos prosseguir diminuindo a amplitude, e chegamos à conclusão de que, para deslocamentos infinitesimais, a configuração final será a mesma (os livros estando igualmente posicionados), não importando a ordem das operações. Assim, pode-se concluir que, apesar de deslocamentos angulares finitos não comutarem, deslocamentos angulares infinitesimais apresentam esta propriedade. Então, podemos tratar deslocamentos angulares infinitesimais como grandezas vetoriais. Passamos a definir o vetor deslocamento angular infinitesimal.

Seja uma partícula que sofre um deslocamento angular infinitesimal  $d\theta$ . Então,  $d\vec{\theta}$  é o vetor de módulo  $d\theta$  que tem a direção perpendicular ao plano da rotação, e o sentido dado pela chamada regra da mão direita. A visualização desta regra é apresentada no cenário do arquivo rot\_inf.mdl: observe o polegar da mão direita enquanto os outros quatro dedos são levados a efetuar uma rotação no sentido da rotação em questão (horária ou anti-horária) — o polegar apontará no sentido do vetor  $d\vec{\theta}$ . Assim, se sua mesa de trabalho (na horizontal) é o plano de rotação e a rotação é anti-horária,  $d\vec{\theta}$  é um vetor vertical apontando para cima; se a rotação é horária,  $d\vec{\theta}$  aponta para baixo. Esta regra, também conhecida como regra do parafuso, é a mesma utilizada para se convencionar como desenhamos os eixos  $Ox$ ,  $Oy$  e  $Oz$ , do referencial cartesiano tridimensional. Este é tal que, se com a mão direita simulamos a rotação de  $\pi/2$  que levaria o eixo dos  $xx$  a encontrar o eixo dos  $yy$ , então o polegar indica o sentido do eixo dos  $zz$ . Logo, se  $x$ - $y$  é o plano em que ocorre o deslocamento angular infinitesimal, o vetor que representa este deslocamento tem a direção do eixo dos  $zz$ , com o sentido do eixo se a rotação é anti-horária, e o sentido oposto ao do eixo se a rotação é horária.

Se deslocamentos angulares infinitesimais podem ser definidos como vetores, então podemos definir grandezas cinemáticas angulares vetoriais, como segue.

A velocidade angular instantânea é a medida da taxa com que se altera a posição angular:

$$\vec{\omega} \equiv \frac{d\vec{\theta}}{dt} . \quad (\text{III.9})$$

A aceleração angular instantânea é a medida da taxa de variação da velocidade angular instantânea:

$$\vec{\alpha} \equiv \frac{d\vec{\omega}}{dt} . \quad (\text{III.10})$$

Também podemos definir a aceleração angular média, no intervalo de tempo  $\Delta t$ , como sendo

$$\vec{\alpha}_m \equiv \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} , \quad (\text{III.11})$$

onde  $\Delta\vec{\omega}$  é a variação de velocidade angular instantânea ocorrida em  $\Delta t$ .

Abra o cenário do arquivo `cir_ang1.mdl`. Nele, você encontra quatro casos (condições iniciais diferentes) do chamado movimento circular uniforme, que é aquele de aceleração angular nula. No cenário do arquivo `cir_ang2.mdl` são mostrados dois casos de movimento circular com aceleração angular constante. Nos dois cenários, você visualiza o móvel descrevendo sua trajetória, desenhada no plano x-y, tendo a origem como centro de rotação. O eixo dos zz, nos casos apresentados, é o chamado eixo de rotação. As grandezas cinemáticas angulares variam conforme apresentado nos gráficos, adotando-se a convenção de que valores positivos para velocidade angular e aceleração angular correspondem a vetores que têm o sentido do eixo dos zz; valores negativos correspondem a vetores apontando no sentido oposto ao do eixo dos zz. Estes vetores também são representados. Note que, no caso simples de rotação em torno de eixo fixo, a direção de  $\vec{\omega}$  e  $\vec{\alpha}$  não varia, não havendo, portanto, necessidade de se explicitar sua natureza vetorial. Compare os gráficos com aqueles típicos de movimento de translação em uma dimensão, com aceleração constante.

## MOVIMENTO CIRCULAR UNIFORME



Enfoquemos, mais detidamente, o caso particular do movimento circular uniforme. A aceleração angular sendo nula,  $\omega = \text{constante}$ . Chamemos de  $\phi$  a posição angular inicial  $\theta_0$ . Então, em um instante genérico  $t$ , a posição angular do móvel é dada por

$$\theta = \omega t + \phi, \quad (\text{III.12})$$

onde o ângulo  $\theta$  é conhecido como fase, e o termo independente do tempo,  $\phi$ , é a constante de fase.

O vetor posição da partícula, no instante  $t$ , pode então ser escrito, em termos dos vetores unitários  $\vec{i}$  e  $\vec{j}$ , como

$$\vec{r}(t) = R \cos(\omega t + \phi) \vec{i} + R \sin(\omega t + \phi) \vec{j}. \quad (\text{III.13})$$

Esta é a equação de movimento da partícula, que permite determinar sua posição em qualquer instante do movimento. Chamando simplesmente de  $x$  e  $y$ , respectivamente, as componentes do vetor posição segundo os eixos dos  $xx$  e dos  $yy$ , tem-se:

$$x = R \cos(\omega t + \phi) \quad (\text{III.14 a})$$

e

$$y = R \sin(\omega t + \phi). \quad (\text{III.14 b})$$

Certifique-se de que, realmente,  $x^2 + y^2 = R^2$ , que é a equação de uma circunferência de raio  $R$ .

Podemos encontrar a velocidade da partícula, no instante genérico  $t$ , derivando a expressão (III.13) em relação ao tempo. Como  $R$  e  $\omega$  são constantes, fica:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\omega R \sin(\omega t + \phi) \vec{i} + \omega R \cos(\omega t + \phi) \vec{j}. \quad (\text{III.15})$$

As componentes da velocidade valem, portanto,

$$v_x = -\omega R \sin(\omega t + \phi) \quad (\text{III.16})$$

a)

e

$$v_y = \omega R \cos(\omega t + \phi) . \quad (\text{III.16})$$

b)

### ACELERAÇÃO CENTRÍPETA

A aceleração, então, é dada pela expressão

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\omega^2 R \cos(\omega t + \phi) \vec{i} - \omega^2 R \sin(\omega t + \phi) \vec{j} = -\omega^2 \vec{r}(t) , \quad (\text{III.17})$$

ou seja, é o vetor de componentes

$$a_x = -\omega^2 R \cos(\omega t + \phi) \quad (\text{III.18 a})$$

e

$$a_y = -\omega^2 R \sin(\omega t + \phi) . \quad (\text{III.18})$$

b)

A aceleração da equação (III.17), sendo oposta ao vetor posição (veja a figura 6), é radial e aponta para o centro da trajetória. É por este motivo que a aceleração do movimento circular uniforme é chamada de aceleração centrípeta, que passamos a denotar por  $\vec{a}_c$ . Seu módulo, determinado a partir das equações (III.18 a,b), é igual a:

$$a_c = \omega^2 R . \quad (\text{III.19})$$

### DERIVADAS DAS FUNÇÕES SENO E CO-SENO

As equações (III.15) e (III.17) foram obtidas a partir do resultado da derivação das funções trigonométricas seno e co-seno. Se  $C_1$  e  $C_2$  são constantes e  $z$  é a variável independente, tais que  $C_1 z$  e  $C_2$  são medidas angulares, então vale o resultado

$$\frac{d}{dz} \sin (C_1 z + C_2) = C_1 \cos (C_1 z + C_2)$$

e

$$\frac{d}{dz} \cos (C_1 z + C_2) = - C_1 \sin (C_1 z + C_2) .$$

## RELAÇÕES ENTRE GRANDEZAS ROTACIONAIS E TRANSLACIONAIS

Como a velocidade é um vetor tangente à trajetória, conclui-se que no movimento circular uniforme velocidade e aceleração são perpendiculares, já que a aceleração é radial. Mais adiante, isto será confirmado através de álgebra vetorial.

O cenário do arquivo `cir_vel.mdl` mostra o vetor posição e a velocidade, em um movimento circular uniforme. Note que a expressão movimento circular uniforme refere-se à uniformidade do módulo da velocidade, já que o vetor que a representa não é, de forma alguma, uniforme. Velocidade uniforme (constante), como sabemos, só ocorre em movimento retilíneo. A projeção, segundo as direções coordenadas, da velocidade — equações (III.16 a,b) —, é mostrada no cenário do arquivo `cir_vxvy.mdl`, para os casos de dois valores diferentes da constante de fase  $\phi$ . Analogamente, para a aceleração centrípeta, veja o cenário do arquivo `cir_axay.mdl`.

Para relacionar os módulos da velocidade e da aceleração centrípeta, derivemos em relação ao tempo a equação (III.1). Como  $R$ , o raio da trajetória, é uma constante, fica:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} R .$$

Ora,  $d\theta/dt$  é a medida da velocidade angular,  $\omega$ , enquanto que  $ds/dt$  é a medida da rapidez com que a partícula se desloca ao longo de sua trajetória, ou seja, é o módulo da velocidade de translação,  $v$ . (Às vezes, pode ser conveniente referir-se a  $v$  como sendo a velocidade linear, ou de translação, para diferenciá-la da velocidade angular.) Então,

$$v = \omega R \tag{III.20}$$

expressa a relação entre o módulo da velocidade de translação e o módulo da velocidade angular, o que também pode ser obtido diretamente das equações (III.16 a,b). Veja que, aqui,

o raio  $R$  é uma grandeza com a dimensão de comprimento, dando consistência dimensional à equação. É importante lembrar que, sempre que se utilizar a equação (III.20),  $\omega$  deve ser expresso em radianos por unidade de tempo, já que a equação (III.1) só é válida para ângulos expressos em radianos.

As equações (III.19) e (III.20), combinadas, levam à expressão

$$a_c = \frac{v^2}{R}, \quad (\text{III.21})$$

que fornece o valor do módulo da aceleração centrípeta como função do módulo da velocidade e do raio da trajetória.

Como o módulo  $v$  da velocidade é constante, o módulo da aceleração centrípeta também o é.

A orientação da aceleração centrípeta pode ser confirmada lembrando que a aceleração é o limite da aceleração média em um intervalo de tempo que tende a zero. O cenário do arquivo `cir_acm.mdl` mostra a determinação da aceleração média para três casos, correspondentes a três intervalos de tempo centrados no instante em que o móvel se localiza em determinado ponto de sua trajetória, tornando clara a orientação radial da aceleração, apontando para o centro.

Abra o arquivo `cir_vet.mdl`, em cujo cenário três partículas descrevem, simultaneamente, movimentos circulares uniformes. Após transcorrida a animação, utilizando a tecla da janela Controle que permite levar a imagem para qualquer instante do intervalo de tempo considerado, determine os períodos e as velocidades angulares das partículas. O raio da trajetória mais externa é o dobro do raio das outras duas. Relacione quantitativamente as grandezas  $v$  (módulo da velocidade linear) e  $a_c$  (módulo da aceleração centrípeta) associadas aos três movimentos.

## MOVIMENTO CIRCULAR NÃO UNIFORME

Em um movimento circular não uniforme a velocidade angular varia. Veja os dois casos do cenário do arquivo `cir_dist.mdl`.

Aceleração centrípeta e velocidade são vetores perpendiculares. A aceleração centrípeta, portanto, é responsável unicamente pela variação da orientação da velocidade. Quando esta também varia em módulo — movimento circular qualquer —, deve existir uma componente da aceleração na direção da velocidade, ou seja, na direção tangencial. É a denominada aceleração tangencial,  $\vec{a}_T$ , cujo módulo  $a_T$  é determinado derivando-se em relação ao tempo a equação (III.20):

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R = \alpha R, \quad (\text{III.22})$$

onde  $\alpha$  deve ser expresso em radianos por unidade de tempo ao quadrado. Observe que a equação (III.1) — e, conseqüentemente, a equação (III.20) — se aplicam também a movimentos circulares não uniformes.

De maneira geral, portanto, em um movimento circular a aceleração é o vetor

$$\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{a}_T, \quad (\text{III.23})$$

a soma de uma componente radial (centrípeta) com uma componente tangencial. Veja o cenário do arquivo `cir_at.mdl`.

## MOVIMENTOS REPETITIVOS

Um movimento circular uniforme é um movimento repetitivo, ou periódico. Movimentos periódicos têm a caracterizá-los o período, grandeza que mede o tempo transcorrido ao se fechar um ciclo, ou uma volta. Assim, o período do movimento do ponteiro de minutos de um relógio analógico é de uma hora. O inverso do período é chamado de frequência do movimento periódico: mede quantas voltas são realizadas na unidade de tempo. Qual a frequência, no SI, do movimento do ponteiro de minutos de um relógio analógico? Chamando de  $T$  o período e de  $f$  a frequência, vale então a relação

$$f = \frac{1}{T}. \quad (\text{III.24})$$

A unidade SI de frequência, o  $s^{-1}$ , recebe o nome de hertz (Hz).

No movimento circular uniforme,  $\omega$  sendo a medida do deslocamento angular por unidade de tempo, pode-se escrever que

$$\omega = 2\pi f, \quad (\text{III.25})$$

já que  $2\pi$  radianos é a medida do deslocamento angular correspondente a uma volta completa.

Analise detidamente todos os casos apresentados no cenário do arquivo ex\_3\_05.mdl.

No cenário do arquivo ex\_3\_06.mdl um objeto descreve um movimento circular uniforme. A janela Condições Iniciais fornece, para os dois casos apresentados, a frequência, a amplitude ( $R$ ) e a constante de fase do movimento. Enquanto este se desenvolve, é traçada a curva que representa o deslocamento angular versus o tempo. Selecione, em cada caso, dois instantes quaisquer do movimento, e calcule, para esses instantes, as componentes  $x$  e  $y$  do móvel, além de sua posição angular, conferindo com os valores da tela. Altere, agora, na janela Condições Iniciais, o valor da constante de fase do primeiro caso (tecla preta), de zero para  $6,28$ . O que muda no movimento?

#### EXEMPLO: VÍNCULO ENTRE POLIAS

O cenário do arquivo polia1\_md1 mostra um problema típico de aplicação da equação (III.20), que relaciona uma grandeza cinemática linear com uma grandeza cinemática angular. Trata-se de duas polias que giram sem deslizamento. Assim, enquanto uma gira no sentido horário, a outra gira no sentido anti-horário (desenhe em perspectiva, no seu caderno, as duas polias, com os vetores que representam suas respectivas velocidades angulares). Procure resolver o que é proposto nos três casos apresentados lembrando que, não havendo deslizamento, os pontos periféricos das polias que estão, instantaneamente, em contato, têm a mesma velocidade linear. O cenário do arquivo polia2\_md1 é uma extensão do mesmo problema, para um sistema de três polias. No arquivo polia3\_md1, as duas polias não se tocam, mas são ligadas por uma correia que não desliza, o que faz com que tenham o mesmo sentido de rotação. Em todos esses casos, o módulo da velocidade linear de um ponto da periferia de

uma polia é o mesmo para um ponto da periferia de outra polia (e, também, de um ponto qualquer da correia).

## MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES

Um movimento unidimensional regido por lei do tipo das equações (III.14 a) ou (III.14 b) é dito um movimento harmônico simples. Os quatro casos do cenário do arquivo `harm_phi.mdl` correspondem a movimentos harmônicos simples de mesmo período (e, portanto, mesma frequência), mas constantes de fase diferentes. Além disso, cada caso apresenta uma amplitude diferente, onde por amplitude entende-se o valor máximo atingido pela função, ao longo de um período. As funções deste cenário são expressas por  $x = A \cos(\omega t + \phi)$ , representando movimentos com amplitude igual a  $A$ . Os quatro casos do cenário do arquivo `harm_T.mdl` são exemplos de movimentos harmônicos simples de constantes de fase nula, com diferentes amplitudes e períodos (e, portanto, diferentes frequências).

Soluções harmônicas recebem esta denominação numa referência às funções seno e co-seno, que possuem o mesmo perfil: seus gráficos são curvas idênticas, a única diferença residindo no fato de cortarem o eixo vertical em pontos diferentes.

## EXEMPLO: SISTEMA MASSA-MOLA

Um exemplo clássico de movimento harmônico simples é o do sistema massa-mola. Trata-se de uma mola com uma de suas extremidades fixa, e a outra presa ao móvel cujo movimento é objeto de estudo. O cenário do arquivo `harm_xva.mdl` mostra este sistema, colocado a oscilar ao longo da direção do eixo dos  $xx$ . São apresentados os gráficos de posição, velocidade e aceleração do móvel, os dois casos referindo-se a constantes de fase diferentes. Alterando valores na janela Condições Iniciais, você pode criar situações diferentes.

## MOVIMENTO HARMÔNICO: PROJEÇÃO DE MOVIMENTO CIRCULAR

O movimento circular uniforme é uma superposição de dois movimentos harmônicos simples, como se pode ver nos quatro casos apresentados no cenário do arquivo `cir_harm.mdl` (cada caso corresponde a um dado par de valores para a velocidade angular  $\omega$  e a constante de fase  $\phi$ .) A projeção do movimento de uma partícula em movimento circular uniforme sobre

qualquer diâmetro de sua trajetória é um movimento harmônico simples. É possível a superposição de dois movimentos harmônicos simples resultar em um movimento não circular? Veja os casos do cenário do arquivo harmonic.mdl, onde você também poderá criar novas situações.

## PRODUTO ESCALAR DE DOIS VETORES

Façamos, agora, uma pequena digressão, ampliando nossa álgebra vetorial com a definição de mais uma operação com vetores. Já foi definido, na Segunda Unidade, o produto de um escalar por um vetor, o que resulta em outro vetor. Há duas outras operações produto envolvendo vetores, e uma delas é apresentada agora. Sejam dois vetores quaisquer,  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ . Define-se o produto escalar destes dois vetores como sendo o escalar obtido da multiplicação do produto dos módulos dos dois vetores pelo co-seno do menor ângulo por eles formado — veja a figura 7

. A notação utilizada para indicar o produto escalar é  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  (leia-se “a escalar b”), de forma que

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \equiv a b \cos \phi , \quad (\text{III.26})$$

onde, aqui,  $\phi$  é o menor ângulo formado pelas direções dos dois vetores ( $0 \leq \phi \leq \pi$ ). O produto escalar é uma operação entre vetores que resulta em um escalar (independe do referencial escolhido), que pode ser positivo ou negativo ( $1 \geq \cos \phi \geq -1$ ).

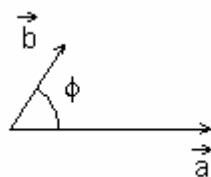


Figura 7 — Desenhar dois vetores a partir de uma origem comum é a melhor maneira de se determinar o menor ângulo por eles formado

Fica, então, claro que dois vetores não nulos podem ter um produto escalar nulo: basta que sejam ortogonais (perpendiculares), quando o ângulo entre eles é  $\pi/2$ , cujo co-seno vale zero. É o caso do produto escalar dos vetores unitários das direções coordenadas  $Ox$ ,  $Oy$  e  $Oz$ , tomados dois a dois:



$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 . \quad (\text{III.27})$$

O produto escalar de um vetor por ele próprio reduz-se ao quadrado de seu módulo, pois um vetor forma, com ele mesmo, o ângulo zero, cujo co-seno vale 1. Assim, dado um vetor  $\vec{a}$ , tem-se que  $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$ , o chamado quadrado do vetor  $\vec{a}$ . Em especial,

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 , \quad (\text{III.28})$$

já que o módulo destes vetores é igual à unidade.

Sejam  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  dois vetores dados por suas componentes segundo as direções coordenadas:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} ,$$

$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} .$$

Com o auxílio das equações (III.27) e (III.28) chega-se à seguinte expressão:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z , \quad (\text{III.29})$$

que nos permite calcular o produto escalar dos dois vetores a partir de suas componentes.

O cenário da arquivo vet\_esc.mdl pode ajudá-lo a se familiarizar com a idéia do produto escalar.

Comparando as equações (III.26) e (III.29), chega-se à seguinte relação para o ângulo entre dois vetores, determinado a partir de seus módulos e de suas componentes:

$$\cos \phi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{a b} . \quad (\text{III.30})$$

VOLTANDO AO MOVIMENTO CIRCULAR

Voltemos à partícula em movimento circular uniforme. O produto escalar da velocidade com a aceleração centrípeta é nulo:

$$\vec{v} \cdot \vec{a}_c = 0 ,$$

resultado a que se chega a partir dos valores de suas componentes, equações (III.16 a,b) e (III.18 a,b). Ora, como de maneira geral nem a velocidade, nem a aceleração centrípeta são nulas, concluímos que estes dois vetores são ortogonais. A esta conclusão já tínhamos chegado, comparando a direção da velocidade, tangencial à trajetória, com a direção radial da aceleração centrípeta.

## EXERCÍCIOS DA TERCEIRA UNIDADE

1) Uma partícula oscila no movimento harmônico simples regido pela relação

$$x(t) = (3,0) \cos (2t + \pi/3),$$

onde se utiliza o Sistema Internacional de unidades.

a) Qual é a posição inicial (em  $t_0 = 0$ ) da partícula?

b) Prove que os instantes em que a partícula ocupa a posição  $x = 0$  são dados pela expressão

$$t_n = \frac{6n + 1}{12} \pi ,$$

onde  $n$  é um número natural ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Deduza expressões análogas para os instantes em que a partícula ocupa as posições  $x = + 3$  m e  $x = - 3$  m.

c) Use o Modélus para construir um modelo que lhe permita conferir suas respostas nas janelas Tabela e/ou Gráfico.

2) No cenário do arquivo `oscil_v.mdl` um sistema massa-mola oscila na direção vertical.

a) Identifique, para cada um dos dois casos apresentados, a amplitude e o período do movimento.

b) Identifique, para cada um dos casos, as posições em que a velocidade se anula, além daquelas em que atinge seus valores máximo e mínimo.

c) Faça, em seu caderno, gráficos qualitativos da posição e da velocidade em função do tempo.

d) A partir do gráfico da velocidade versus tempo, trace qualitativamente o gráfico da aceleração versus tempo.

e) Note que, em cada caso, os gráficos da posição, da velocidade e da aceleração têm perfil semelhante, diferindo pelas amplitudes e pelas constantes de fase. A velocidade está defasada de  $\pi/2$  da posição, enquanto que a aceleração está defasada de  $\pi/2$  da velocidade e de  $\pi$  da posição. Fisicamente, isto está relacionado com o fato de o sistema massa-mola atingir suas velocidades extremas quando a posição é zero, e encontrar-se instantaneamente em repouso quando a posição é extrema. O que dizer quanto à aceleração?

f) Na janela Modelo, você pode observar que a posição da massa é especificada pela equação de movimento  $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ . Identifique o valor da constante de fase  $\phi$  em cada caso.

g) Caso o modelo tivesse sido escrito usando a equação  $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ , quanto valeria a constante de fase para descrever os dois casos apresentados?

3) Três partículas oscilam harmonicamente em movimentos descritos pelas relações:

$$\text{i) } x_1(t) = (3,0) \cos(2\pi t + \pi/3),$$

$$\text{ii) } x_2(t) = (4,0) \cos(2\pi t - \pi/3),$$

$$\text{iii) } x_3(t) = (3,0) \sin(3\pi t + \pi/3),$$

onde se utiliza o Sistema Internacional de unidades.

a) Trace gráficos qualitativos para a posição, a velocidade e a aceleração de cada uma das partículas em função do tempo;

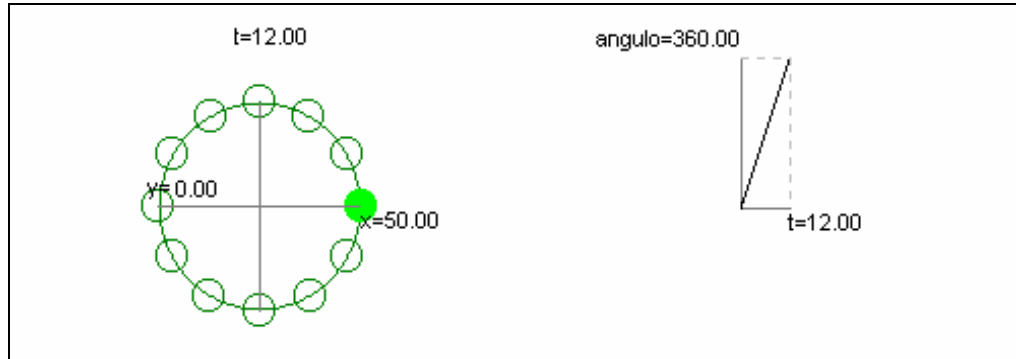
b) A partir do instante  $t_0 = 0$ , qual das partículas atingirá primeiro a posição  $x_0 = 0$ ? E a posição  $x_1 = 1$  m?

c) Qual é o período de cada um dos movimentos?

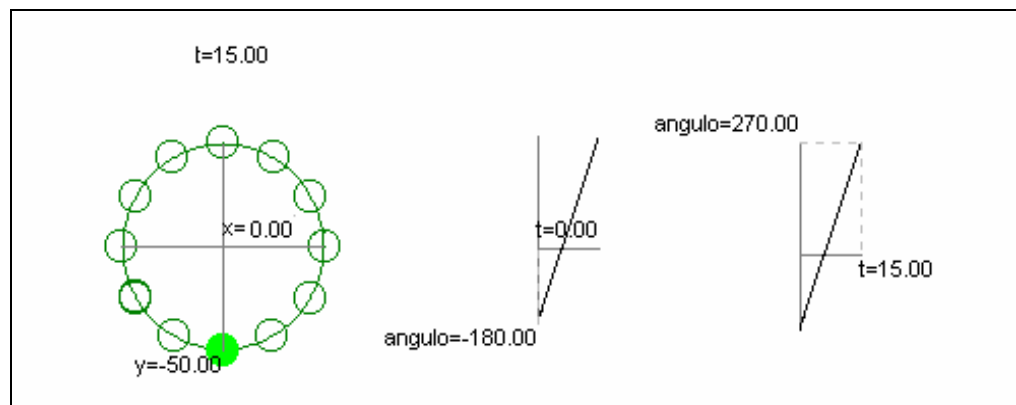
d) Use o Modellus para construir modelo(s) que lhe permita(m) conferir suas respostas.

4) Use funções, no Modells, que permitam obter as seguintes trajetórias circulares. (Sistema Internacional de unidades, exceto para o ângulo, medido em graus.)

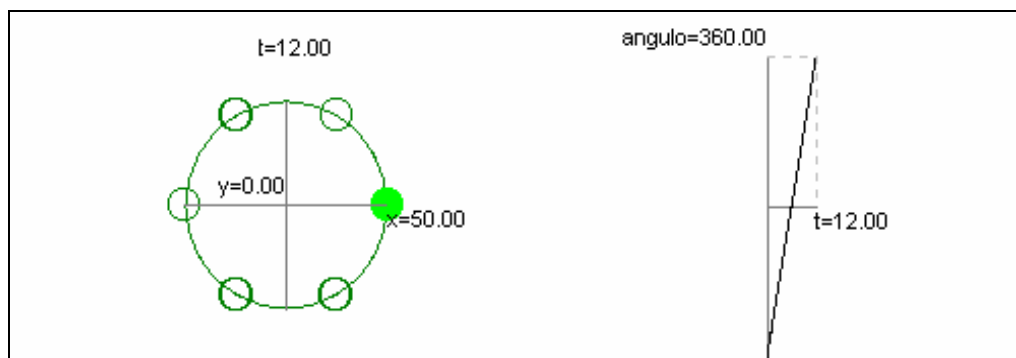
a)



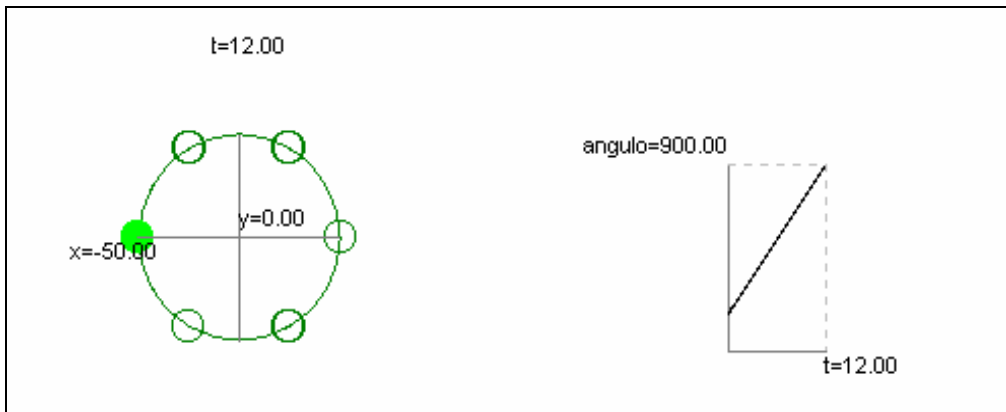
b)



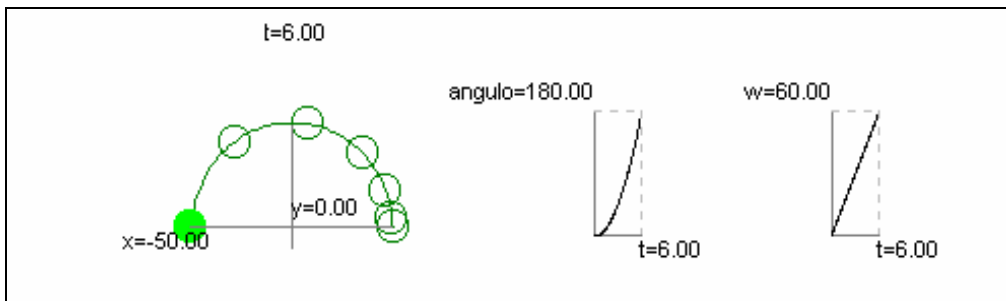
c)



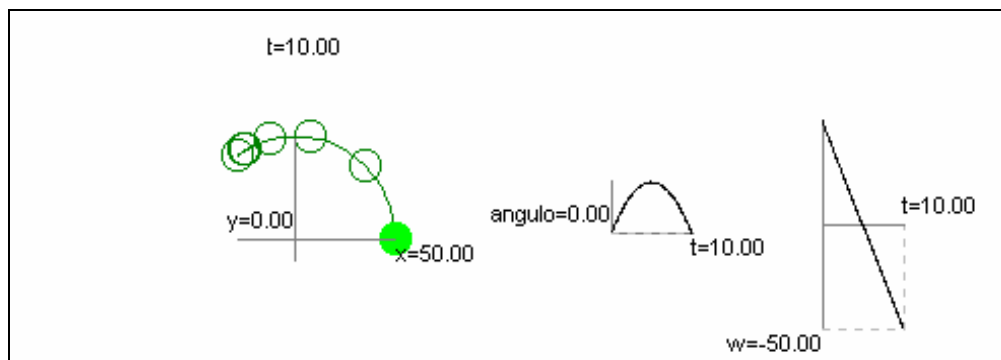
d)



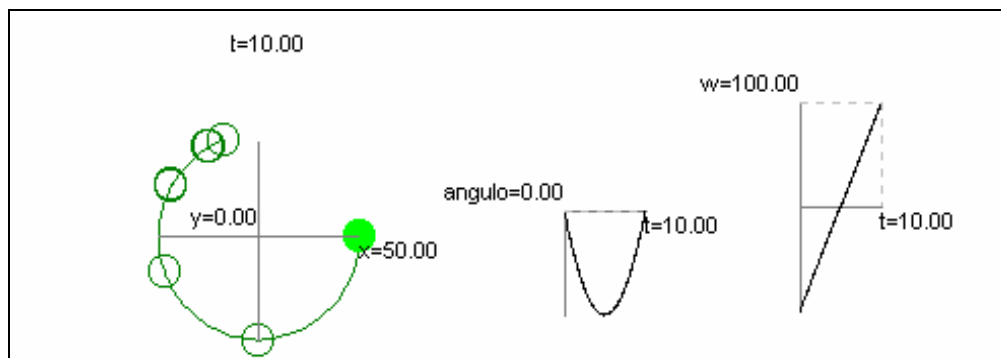
e)



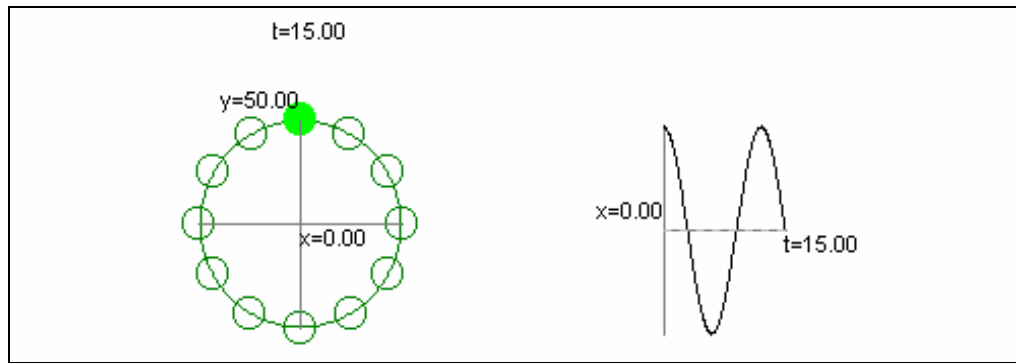
f)



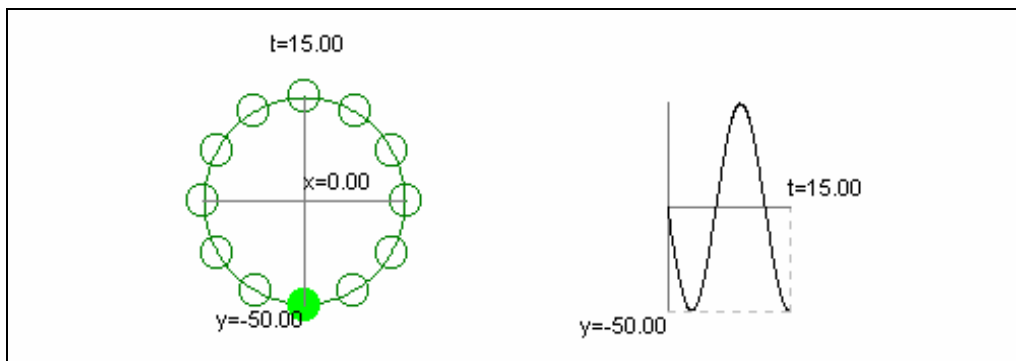
g)



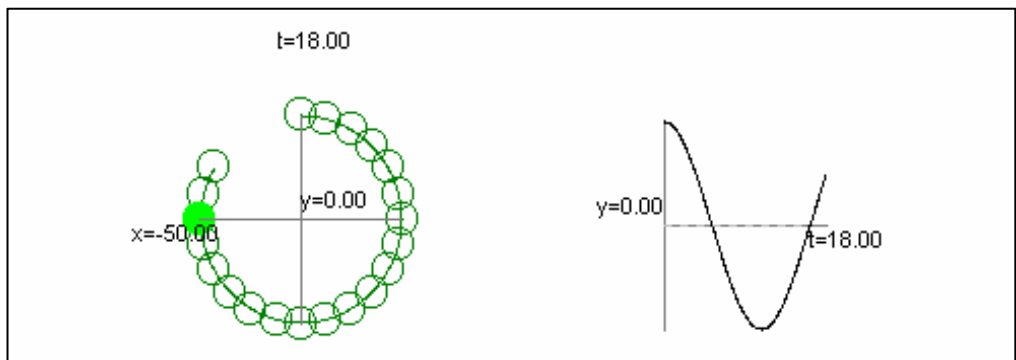
h)



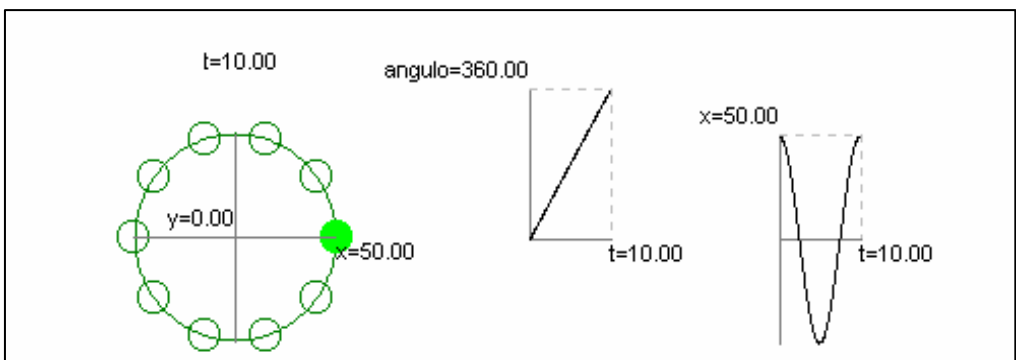
i)



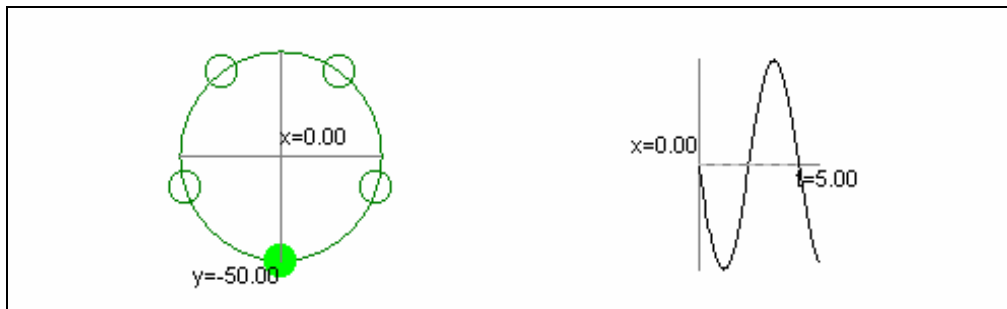
j)



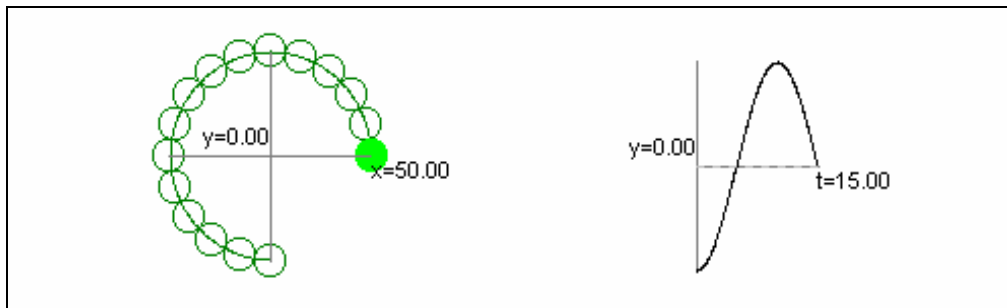
l)



m)

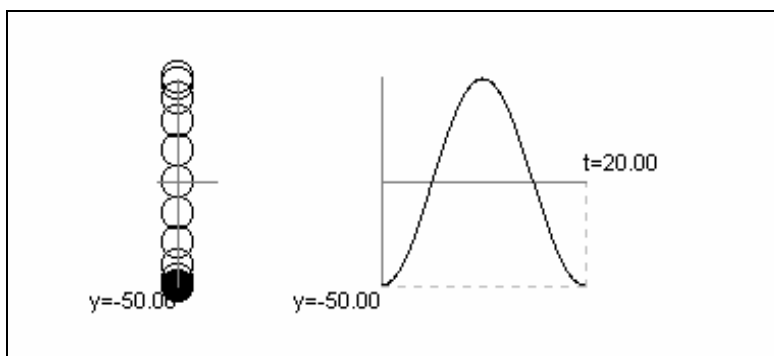


n)



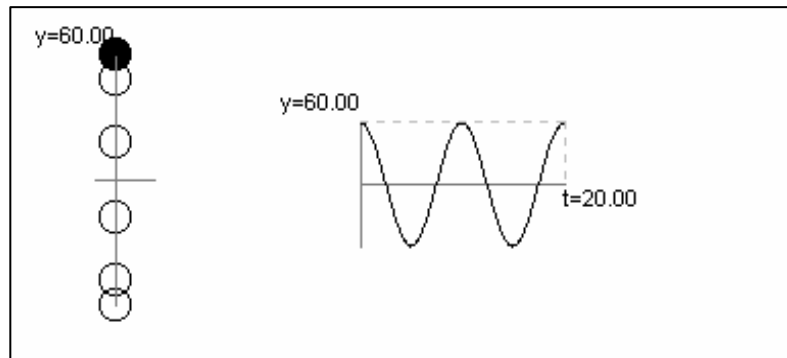
5) Use funções, no Modellus, que permitam obter os seguintes osciladores (Sistema Internacional de unidades).

a)

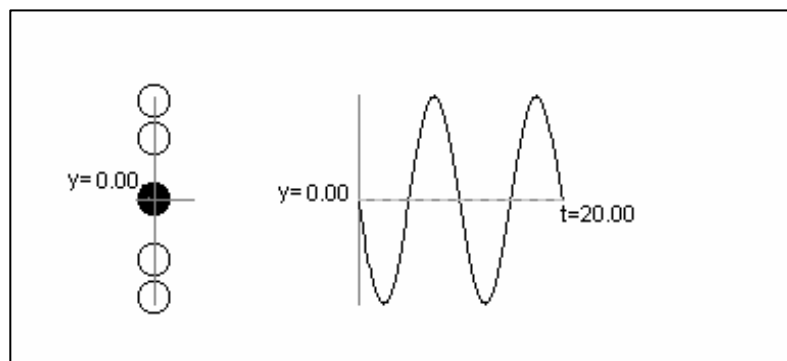




b)



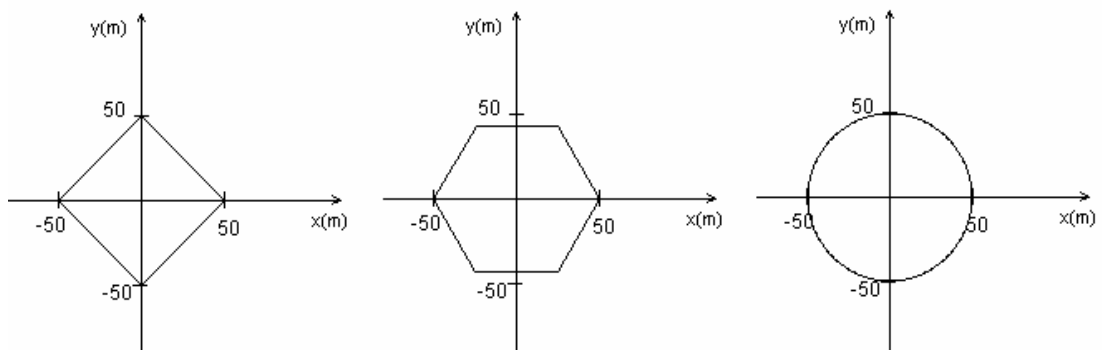
c)



6) Resolva a questão proposta no cenário do arquivo polia4.mdl.

7) A distância  $s$  percorrida por um móvel é igual ao comprimento do caminho por ele descrito.

a) Suponha que um móvel descreva as trajetórias apresentadas na figura abaixo, completando uma volta, e calcule as distâncias percorridas.



b) Utilize o cenário do arquivo `comp_cir.mdl` para conferir seus resultados. Neste modelo o cálculo é efetuado somando-se o comprimento de cada lado do polígono, dado por  $+\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ , onde  $\Delta x$  e  $\Delta y$  são suas respectivas projeções sobre os eixos coordenados. (O círculo foi aproximado por um polígono de 360 lados.)

8) A função co-seno pode ser expandida na seguinte série infinita de potências:

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{2n!}, \quad (\text{III.31})$$

onde o ângulo  $\theta$  é medido em radianos.

Em Cálculo Numérico, a determinação do co-seno de um ângulo é feita somando-se os primeiros N termos desta série, onde N é um número a ser determinado em função da precisão que se deseja. Este procedimento, conhecido como truncamento da série, é o realizado por sua calculadora, ou qualquer computador, sendo que, se o ângulo é fornecido em graus, por exemplo, a máquina inicialmente o converte para radianos. O cenário do arquivo `ser_cos.mdl` mostra diversas aproximações para a função co-seno: na aproximação de ordem zero apenas o primeiro termo da série (termo em  $n=0$ ) é considerado; na aproximação de primeira ordem, a série é somada até o termo de ordem  $n=1$ ; e assim sucessivamente.

a) Observe na animação que, à medida que se considera um número maior de termos na soma, ou seja, à medida em que a ordem da aproximação aumenta, aumenta o intervalo de  $\theta$  no qual a aproximação pode ser considerada boa.

b) Use a tabela para determinar o intervalo de  $\theta$  no qual cada ordem de aproximação apresentada é satisfatória, até duas casas decimais.

c) Em particular, verifique que, para  $\theta \ll 1$  ( $\theta$  em rad!),  $\cos \theta \cong 1$ .

d) Crie um cenário, no Modellus, que lhe permita verificar a série de potências para a função seno:

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (\text{III.32})$$

com  $\theta$  em radianos.

e) Em particular, verifique que, para  $\theta \ll 1$  ( $\theta$  em rad),  $\sin \theta \cong \theta$ .

f) Lembrando que  $\frac{d}{dx} (a x^n) = n a x^{n-1}$ , onde  $a$  é uma constante, mostre, derivando as equações (III.31) e (III.32) em relação a  $\theta$ , que

$$\frac{d}{d\theta} \sin \theta = \cos \theta$$

e que

$$\frac{d}{d\theta} \cos \theta = -\sin \theta.$$

g) Verifique, por observação das séries (III.31) e (III.32), que  $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$  e  $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ , para qualquer  $\theta$ . Diz-se, por isto, que a função co-seno é par, enquanto que a função seno é ímpar.

9) O arquivo pseudo.mdl mostra exemplos de dois vetores que se comportam diferentemente, frente à reflexão especular. Na verdade, a classe de grandezas que se comporta como a velocidade angular é chamada de pseudovetores. Identifique, entre os vetores até agora tratados por você, quais os que são, na realidade, pseudovetores.

10) Determine, utilizando o conceito de produto escalar de dois vetores, o menor ângulo formado pelos vetores  $\vec{a} = 15\vec{i} + 10\vec{j}$  e  $\vec{b} = -10\vec{i} + 15\vec{j}$ . Sua resposta pode ser conferida no arquivo a\_b.mdl.

11) Construa um modelo que simule o movimento do ponteiro de segundos de um relógio.



# QUARTA UNIDADE: AS LEIS DE NEWTON PARA O MOVIMENTO

## DINÂMICA

Iniciamos, aqui, o estudo da Dinâmica. Até agora, nossa preocupação tem sido tão-somente a de descrever o movimento. O estudo de suas causas é o objeto da Dinâmica, cuja formulação está nas origens da Ciência moderna.

Foi Galileu quem mostrou que um objeto pode estar em movimento, sem necessidade de ação externa sobre ele, derrubando dois mil anos de domínio das idéias aristotélicas. Galileu mostrou que um objeto isolado mantém um movimento com velocidade constante, ou seja, um movimento retilíneo uniforme.

## PRIMEIRA LEI

Foi nesta idéia que Newton se apoiou, ao iniciar a formulação da Mecânica. Sua Primeira Lei do movimento, ou Lei da Inércia, estabelece que um objeto livre de ação externa apresenta movimento retilíneo uniforme, desde que visto de um referencial inercial. Aqui, chamamos a atenção para um tipo especial de referencial, que merece ser visto com cuidado.

Abra o arquivo `inerc_1.mdl`. Em seu cenário são mostrados dois referenciais. O referencial preso à tela do computador é um referencial inercial, isto é, não acelerado. O outro referencial gira, em relação à tela do computador, com uma velocidade angular constante e é, portanto, acelerado, ou seja, não inercial (tudo que gira é acelerado). Vê-se que um objeto cujo movimento, em relação ao referencial inercial, é retilíneo uniforme, não tem este tipo de movimento no referencial não inercial.

A lei da inércia é aplicável a referenciais inerciais, ou não acelerados. Como ela é a base da Mecânica newtoniana, esta é uma teoria formulada para ser trabalhada em referenciais inerciais.

Se um referencial não acelerado — inercial — é conhecido, qualquer outro referencial que tenha, com relação a ele, uma velocidade constante, também é um referencial não acelerado e,

portanto, inercial. Existem, pois, infinitos referenciais inerciais. No cenário do arquivo `inerc_2.mdl` você visualiza a lei da inércia, de vários referenciais inerciais diferentes.

Analise a animação do arquivo `inercia.mdl`.

## SEGUNDA LEI

Seja um corpo em movimento retilíneo uniforme, em um referencial inercial. Alterar este estado de movimento significa alterar sua velocidade. E isto significa acelerá-lo, já que a aceleração é uma medida da variação da velocidade. Um móvel está acelerado, portanto, quando existe uma ação externa efetiva sobre ele. A expressão matemática desta relação é a Segunda Lei de Newton, que adotou o termo força para caracterizar ação externa sobre um corpo. Como aceleração é grandeza vetorial, força também deve sê-lo. Abra o arquivo `f_a.mdl`, em cujo cenário você poderá controlar a única força aplicada sobre um móvel, verificando que a aceleração provocada é diretamente proporcional a ela. Trabalhe, também, os cenários dos arquivos `f_a_v.mdl` e `f_a_v_bi.mdl`.

Como mais de um agente externo podem estar atuando, simultaneamente, sobre o corpo, o efeito da ação externa é a soma vetorial de todas as forças que atuam sobre ele. A segunda lei de Newton se escreve na forma

$$\vec{F}_{\text{res}} = m \vec{a} , \quad (\text{IV.1})$$

onde  $\vec{F}_{\text{res}}$  é a força resultante sobre o corpo, ou seja, a soma (vetorial) de todas as forças exercidas sobre ele,  $\vec{a}$  é sua aceleração e  $m$  é sua massa. A massa de um corpo aparece como fator de proporcionalidade na relação entre força resultante e aceleração, pois verifica-se que, para se produzir a mesma aceleração, a força resultante aplicada deve ser tanto mais intensa quanto maior for a massa, em proporção direta. Isto é visto no cenário do arquivo `f_m_a.mdl`.

O conceito de massa tem uma complexidade especial. Newton definiu massa como sendo a quantidade de matéria contida no corpo. Por enquanto, podemos nos contentar com esta noção intuitiva. Futuramente, o estudante terá a oportunidade de aprofundar o tema.

## TERCEIRA LEI

Para que sobre um corpo seja exercida uma força é necessário que este corpo esteja interagindo com outro, ou seja, é necessário que esteja acontecendo uma interação. Não existe outra maneira de um sistema dar-se a conhecer a outro, que não seja interagindo com ele, exercendo sobre ele uma força. A Terceira Lei de Newton afirma que, dados dois corpos que interagem, a interação é caracterizada por um par de forças, cada uma exercida por um corpo sobre o outro, as duas forças sendo opostas e de módulos iguais. A figura 8 mostra dois corpos — 1 e 2 — interagindo entre si, em um caso de interação atrativa (como é, por exemplo, a atração gravitacional). O corpo 1 atrai o corpo 2 exercendo sobre ele a força  $\vec{F}_{21}$ , e o corpo 2 atrai o corpo 1 exercendo sobre ele a força  $\vec{F}_{12}$ . Estas duas forças são de mesmo módulo e orientações opostas:  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ , e constituem o que normalmente é chamado de um par ação-reação. É muito importante observar que, em um par ação-reação, não importa qual das duas forças chamamos de ação, a outra passando a ser a reação: não existe, na terceira lei de Newton, uma relação de causa e efeito, ou seja, a terceira lei não envolve relação de causalidade. As duas forças de um par ação-reação são exercidas sobre corpos diferentes, já que são a manifestação de uma interação entre eles.



Figura 8 — Um par ação-reação associado à interação entre dois corpos.

## PESO

A interação gravitacional é a mais familiar ao Homem. Ela esteve sempre presente, de forma muito evidente, em seu dia-a-dia. É a interação atrativa responsável, por exemplo, pela aceleração  $\vec{g}$  de um projétil livre em seu movimento parabólico. A esta aceleração  $\vec{g}$  associamos o peso do objeto, multiplicando-a por sua massa:

$$\vec{P} \equiv m \vec{g} . \quad (\text{IV.2})$$

O peso de um corpo de massa  $m$  é a força vertical, apontada para baixo (para o centro da Terra), que tem por módulo  $mg$ , onde  $g$  é o módulo da aceleração da gravidade.

## UNIDADES

A unidade SI de força é o newton (N):

$$1 \text{ N} \equiv 1 \text{ kg} \times 1 \text{ m/s}^2 .$$

Uma outra unidade de força bastante usada é o dina (dyn), do sistema CGS:

$$1 \text{ dyn} \equiv 1 \text{ g} \times 1 \text{ cm/s}^2 .$$

É fácil verificar a relação entre estas duas unidades:

$$1 \text{ N} = 10^5 \text{ dyn} .$$

Se sua massa é de 60 kg, então seu peso é uma força exercida sobre seu corpo, verticalmente para baixo, de módulo igual a 600 N, adotando-se o valor aproximado  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

## UM EXEMPLO TRIVIAL

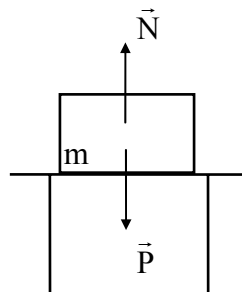


Figura 9 — Caixa sobre mesa.

Considere uma caixa, de massa  $m$ , em repouso sobre a superfície horizontal de uma mesa,



como esquematizado na figura 9. Sua aceleração é nula. O importante, aqui, não é o fato de a caixa ter velocidade nula, mas sim o fato desta velocidade ser constante, o que indica que o sistema não está acelerado. Se a caixa tivesse qualquer outra velocidade, constante, a análise dinâmica que fazemos seria exatamente a mesma. Como a aceleração é nula, a segunda lei de Newton (equação (IV.1)) garante que a força resultante também é nula. Isto quer dizer que a soma (vetorial) das forças exercidas sobre a caixa é igual a zero. Como sobre ela é exercida a força peso, que aponta para baixo, deve haver outra força, apontando para cima, de mesmo módulo que o peso:  $N = P = mg$ . Esta é a força normal à superfície de contato, que a mesa exerce sobre a caixa. Sempre que existe contato entre dois corpos, cada um deles exerce sobre o outro uma força, normal (perpendicular) à superfície de contato.

A figura 9 mostra um diagrama de forças, indicando todas as forças exercidas sobre o sistema objeto de estudo — a caixa, no caso. O peso é uma força de natureza gravitacional, presente devido à interação gravitacional entre caixa e Terra. Sua companheira na constituição de um par ação-reação é a força que a caixa exerce sobre a Terra, em seu centro, uma força vertical apontando para cima, de módulo igual ao módulo do peso,  $mg$ . Esta força não aparece no diagrama de forças, já que não está aplicada sobre a caixa. A força normal tem, como companheira na formação de um par ação-reação, a força de contato que a caixa exerce sobre a mesa, de cima para baixo, e com o mesmo módulo da normal,  $mg$ . Também esta força não é desenhada no diagrama de forças, por não estar aplicada sobre o sistema de interesse, a caixa.

Forças de contato são de natureza eletromagnética, pois têm sua origem nas interações moleculares, no nível microscópico das superfícies em contato. A força normal da figura 9,  $\vec{N}$ , é de natureza eletromagnética, o mesmo valendo para a força de contato da caixa sobre a mesa: um par ação-reação é constituído de forças de mesma natureza.

## OS TIPOS DE INTERAÇÃO

As interações gravitacional e eletromagnética são os dois tipos de interação conhecidos pelo Homem até o século passado. Ambas são de longo alcance: suas forças se fazem sentir mesmo quando os objetos que interagem estão muito afastados entre si. Interações de curto alcance foram detectadas no século 20. Pela atual classificação, são de dois tipos: interação forte e interação fraca, ambas de alcance restrito às distâncias características do núcleo atômico. Apesar do nome, a interação fraca é mais intensa que a eletromagnética. Por ordem

de intensidade, da mais intensa para a menos intensa, as quatro interações conhecidas são: forte, fraca, eletromagnética e gravitacional. O estudo das interações da Natureza é tema fascinante que ocupa uma grande parte dos físicos. Uma possível teoria de unificação das interações é aspiração por enquanto não realizada.

### UM EXEMPLO MUITO SIMPLES

Considere o caso simples da figura 10: um bloco, de massa  $m$ , escorra por um plano inclinado de um ângulo  $\theta$ , sem atrito. Qual sua aceleração? De imediato, devemos tornar claro qual nosso objeto de estudo, o sistema. Aqui, vamos tratar do sistema *bloco de massa m*. Podemos imaginar o Universo como constituído de duas partes: nosso sistema, e o “resto do Universo”. Para desenhar o diagrama de forças aplicadas sobre o sistema, devemos considerar todas as forças que o “resto do Universo” exerce sobre ele. Aqui, são duas essas forças: o peso do bloco, devido à interação gravitacional com a Terra, e a força normal de interação com o plano inclinado. Feito o diagrama, passamos à escolha de um referencial inercial conveniente. O referencial cartesiano cujo eixo dos  $xx$  aponta no sentido do deslocamento do móvel é uma boa escolha já que, nele, a aceleração tem a direção do eixo dos  $xx$ . Resta, finalmente, utilizar a segunda lei de Newton para equacionar o problema. A segunda lei, equação (IV.1), pode ser escrita, para um problema bidimensional, como duas equações escalares, segundo as direções coordenadas:

$$F_{\text{res } x} = m a_x , \quad (\text{IV.3 a})$$

$$F_{\text{res } y} = m a_y . \quad (\text{IV.3 b})$$

Estas são as equações que descrevem o movimento do bloco. As forças peso, de módulo  $P = mg$ , e normal, de módulo  $N$ , têm as seguintes componentes:

$$P_x = P \sin \theta = m g \sin \theta , \quad P_y = -P \cos \theta = -m g \cos \theta , \quad N_x = 0 , \quad N_y = N .$$

Note que o menor ângulo que o peso forma com o eixo dos  $yy$  é o mesmo ângulo de inclinação do plano, pois estes dois ângulos são formados por direções mutuamente perpendiculares.

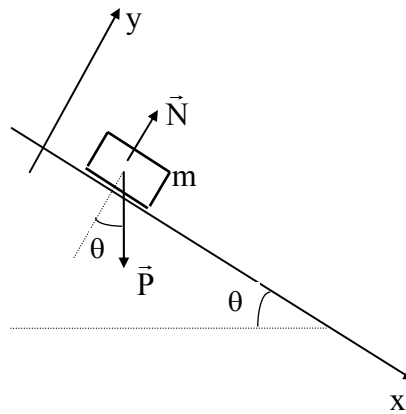


Figura 10 — Bloco em plano inclinado.

A aceleração do bloco tem a orientação do eixo dos  $xx$ . Chamando o seu módulo de  $a$ , suas componentes são, portanto:

$$a_x = a, \quad a_y = 0.$$

Com isto, a equação (IV.3 b) fica:

$$P_y + N_y = m a_y \quad \Rightarrow \quad -m g \cos \theta + N = 0 \quad \Rightarrow \quad N = m g \cos \theta.$$

E a equação (IV.3 a) fornece a aceleração do bloco:

$$P_x + N_x = m a_x \quad \Rightarrow \quad m g \sin \theta = m a \quad \Rightarrow \quad a = g \sin \theta.$$

Veja que a aceleração independe da massa do bloco.

No cenário do arquivo `ex_4_01.mdl` são apresentados três casos de bloco descendo plano inclinado sem atrito. A comparação desses três casos torna claro o fato de a aceleração, ao longo do plano, depender unicamente do ângulo de inclinação, apesar de as forças aplicadas ao bloco dependerem explicitamente de sua massa. (O deslizamento do bloco não parece perfeitamente suave, mas isto é um efeito visual da simulação.)

Trabalhe o exemplo do cenário do arquivo `ex_4_02.mdl`.

## UM EXEMPLO SIMPLES

Um problema clássico é apresentado no cenário do arquivo `atwood.mdl`, onde duas massas,  $m_1$  e  $m_2$ , são ligadas por um fio que passa por uma roldana. Na figura 11, você vê esquematizadas as forças exercidas sobre as duas massas. Consideremos o fio inextensível e sem massa, e a roldana sem massa e sem atrito. Neste caso, as tensões que o fio exerce sobre os dois objetos são iguais:  $\vec{T}_1 = \vec{T}_2 = \vec{T}$ .

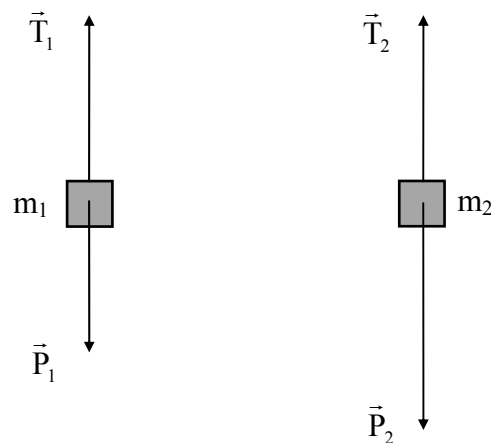


Figura 11 — Diagrama de forças na máquina de Atwood.

Assim, a segunda lei de Newton, escrita para cada uma das massas, leva às expressões

$$P_2 - T = m_2 g - T = m_2 a ,$$

$$T - P_1 = T - m_1 g = m_1 a ,$$

já que, o fio sendo inextensível, o movimento das duas massas é solidário, ou seja, em qualquer instante suas velocidades e acelerações têm mesmos módulos. As equações estão escritas na suposição de que a aceleração do bloco de massa  $m_1$  aponta para cima, enquanto que a do bloco de massa  $m_2$  aponta para baixo. Caso ocorra o contrário, as equações continuam válidas, porém com um valor negativo para  $a$ . Então, resolvendo-se este sistema de duas equações, chega-se aos seguintes valores para as intensidades da aceleração e da tensão:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g ,$$

$$T = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g .$$

Acionando a animação, você é capaz de medir a aceleração dos objetos. Se lhe é informado que a massa  $m_1$  vale 1 kg, qual o valor da massa  $m_2$ ?

## INCLUINDO O ATRITO

O estudo do atrito é feito fenomenologicamente, isto é, de forma empírica, quando nos restringimos a uma abordagem macroscópica. Vejamos, agora, o tratamento mais simples que há para esta questão. Vamos supor que as superfícies em contato são rígidas, indeformáveis. Duas são as possibilidades: ou as superfícies em contato estão em repouso entre si, ou não. No primeiro caso, estamos tratando do chamado atrito estático; caso contrário, trata-se do atrito cinético, ou dinâmico. Uma força de atrito é uma força de contato, assim como a força normal.

## COEFICIENTES DE ATRITO

Verifica-se que, ao se tentar deslocar um objeto que se encontra em contato com outro objeto, havendo repouso relativo entre os dois, surge uma força de atrito oposta ao sentido do movimento que se deseja provocar. Trata-se da força de atrito estático, oposta à força aplicada, e de mesmo módulo, de forma a se ter uma força resultante nula. Mas existe um limite para isto. Aumentando-se a força aplicada, usualmente acaba-se conseguindo provocar o movimento relativo entre as superfícies em contato: existe um limite, a partir do qual o atrito estático não mais consegue manter o repouso relativo. A força de atrito estático, então, é uma força cujo módulo tem um limite superior. É constatação experimental que tal limite é proporcional ao módulo da força normal de contato entre as superfícies. Assim, escreve-se:

$$f_c^{\max} = \mu_c N , \quad (\text{IV.4})$$

onde  $f_c^{\max}$  é o módulo máximo da força de atrito estático,  $N$  é o módulo da força normal de contato entre as superfícies e a constante que relaciona estes dois módulos,  $\mu_c$ , é o chamado coeficiente de atrito estático. Esta é uma grandeza que depende dos materiais de que são feitos os objetos em contato, de seu polimento, mas não depende nem das massas, nem da

área de contato. O coeficiente de atrito estático é um número puro, pois relaciona duas grandezas de mesma dimensão. Uma vez estabelecido o movimento entre as duas superfícies, a força de atrito estático é substituída pela força de atrito cinético, uma força oposta ao movimento. Verifica-se que o módulo da força de atrito cinético é proporcional ao módulo da força normal:

$$f_c = \mu_c N \quad (IV.5)$$

Na equação (IV.5),  $f_c$  designa o módulo da força de atrito cinético e  $\mu_c$  é o coeficiente de atrito cinético, grandeza adimensional que só depende dos materiais de que são feitos os objetos em contato e de seu polimento, sendo independente das massas e da área de contato. Limitamo-nos, aqui, a trabalhar na faixa de baixas velocidades em que o coeficiente de atrito cinético também independe da velocidade relativa entre as superfícies.

O arquivo atrito1.mdl mostra, em seu cenário, algumas situações envolvendo um bloco em contato com uma superfície plana horizontal. Neste cenário, o primeiro caso mostra a força aplicada aumentando de intensidade, até atingir um módulo igual ao da força de atrito estático máxima, quando então o bloco sai do repouso e adquire um movimento acelerado. Para fazer com que o movimento subsequente seja uniforme (aceleração nula), deve-se diminuir a intensidade da força aplicada, uma vez produzido o movimento relativo, como mostrado no segundo caso. O terceiro caso mostra a situação em que, após obtido o movimento, a força aplicada é retirada, o que faz com que o móvel seja acelerado no sentido oposto ao do movimento, isto é, passa a ser freado, até parar.

O coeficiente de atrito estático entre duas superfícies é sempre maior ou igual ao coeficiente de atrito cinético. Isto reflete o fato de ser mais fácil manter um corpo escorregando a uma velocidade constante, sobre uma superfície, do que tirá-lo do repouso em relação à superfície. O arquivo prdx.mdl mostra, em seu cenário, uma situação em que o valor do coeficiente de atrito cinético é maior do que o valor do coeficiente de atrito estático, para uma caixa em contato com uma superfície plana horizontal. Submetida a uma força orientada para a direita, no momento em que sai do repouso a caixa adquire um movimento para a esquerda, situação paradoxal que evidencia o absurdo dos valores atribuídos aos coeficientes.

## CORPO SOBRE PLANO INCLINADO, COM ATRITO

Abra o arquivo pl\_atr.mdl. Seu cenário mostra uma caixa de massa  $m = 1$  kg, inicialmente em repouso sobre uma superfície plana inclinada. São mostradas as forças aplicadas sobre a caixa: a força peso, de módulo  $P = mg$ , a força normal, de módulo  $N$ , e a força de atrito, de módulo  $F_a$ . A força de atrito, orientada de baixo para cima do plano inclinado, é uma força de atrito estático ou cinético, conforme a caixa mantém o repouso relativo, ou escorrega sobre o plano, respectivamente. Da mesma forma que no caso da figura 10, a força normal tem módulo

$$N = m g \cos \theta ,$$

onde  $\theta$  é o ângulo de inclinação do plano. A força resultante sobre a caixa aponta ao longo do plano inclinado, e seu módulo vale

$$F_{\text{res}} = m g \sin \theta - F_a .$$

Se a componente do peso na direção do plano ( $m g \sin \theta$ ) é maior que o módulo da força de atrito estático máxima, então o atrito estático não é capaz de manter a caixa em repouso, e a caixa escorrega ao longo do plano inclinado. O atrito presente, então, é o atrito cinético:  $F_a = f_c$ , e a aceleração da caixa ao longo do plano tem módulo igual a  $F_{\text{res}}/m$ . Se a componente do peso na direção do plano é menor que o módulo da força de atrito estático máxima, então a caixa não se move em relação ao plano, e a força de atrito exercida sobre ela é uma força de atrito estático de módulo igual à componente do peso na direção do plano:  $F_a = f_e = m g \sin \theta$ , de forma a se ter uma força resultante nula. Estas possibilidades são contempladas nos dois casos da animação onde se tem, respectivamente,  $\theta = 15^\circ$ ,  $\mu_e = 0,2$ ,  $\mu_c = 0,1$ ; e  $\theta = 20^\circ$ ,  $\mu_e = 0,4$ ,  $\mu_c = 0,2$ . Confira, nos dois casos, que a animação está correta.

Uma maneira de se determinar o coeficiente de atrito estático entre dois materiais é realizar uma experiência em que um corpo feito de um dos materiais é colocado sobre uma superfície plana de outro corpo, feito do outro material, que possa ser facilmente inclinada. Vai-se inclinando a superfície plana, até se encontrar o ângulo de inclinação a partir do qual o movimento relativo passa a existir (um corpo começa a escorregar sobre o outro). Este é o ângulo associado à força de atrito estático máxima, caso em que a segunda lei de Newton passa a ser escrita como:

$$F_{\text{res}} = m g \sin \theta - f_e^{\text{max}} = m g \sin \theta - \mu_e N = m g \sin \theta - \mu_e m g \cos \theta = 0 .$$

Desta relação, tem-se que  $\mu_e = \text{tg } \theta$ : o coeficiente de atrito estático é igual à tangente do maior ângulo de inclinação que admite o repouso relativo. Calcule o coeficiente de atrito estático do caso apresentado no cenário do arquivo cf\_atr\_e.mdl.

## PESO APARENTE

Um problema interessante é o do peso aparente de um corpo. Todos conhecemos a sensação experimentada em um elevador acelerado, quando nos sentimos mais leves ou mais pesados do que realmente somos. Consideremos esta situação, que é mostrada no cenário do arquivo peso\_ap.mdl, supondo que o passageiro, dentro do elevador, está sobre uma “balança de mola”, do tipo conhecido como “balança de banheiro”. Um instrumento desses, na verdade, não é uma balança. Balança mede massa. O passageiro do elevador está em cima de um dinamômetro, um instrumento que mede força. O que a “balança de banheiro” mede é a força normal de contato entre sua superfície superior e o objeto que está sobre ela. Como, normalmente, ela é utilizada em situação de equilíbrio, o peso e a normal sobre a pessoa em cima da balança serão de módulos iguais e, portanto, indiretamente, o peso está sendo medido. Quando o elevador é acelerado, deixa de haver equilíbrio, e a normal passa a ter um módulo diferente do peso, refletindo a sensação que sentimos. Escolhamos como referencial inercial o eixo dos yy, vertical apontando para cima, preso ao prédio. As forças exercidas sobre o passageiro são seu peso, vertical para baixo, de módulo mg, e a normal, vertical para cima, de módulo N. A aceleração do sistema tem a componente  $a_y$ , segundo o eixo coordenado. O valor de  $a_y$  é positivo se a aceleração é para cima, e negativo quando a aceleração é para baixo. Da segunda lei de Newton, então, temos:

$$N - mg = m a_y \quad \Rightarrow \quad P' = N = m (g + a_y) ,$$

onde chamamos de  $P'$  o peso aparente do passageiro. Assim, se o elevador está acelerado para cima ( $a_y > 0$ ), o passageiro tem um peso aparente maior que o peso real; se o elevador está acelerado para baixo ( $a_y < 0$ ), o peso aparente do passageiro é menor que seu peso real. É importante notar que esta conclusão independe do sentido do movimento do elevador, ou seja,



do sentido de sua velocidade. Um elevador acelerado para cima pode estar viajando para cima, situação em que sua velocidade está aumentando de intensidade (exemplo: a arrancada do andar térreo), ou viajando para baixo, situação em que sua velocidade diminui de intensidade (exemplo: a chegada ao andar térreo). Analogamente, para a situação em que o elevador está acelerado para baixo — imagine os dois casos, para esta situação. Em particular, em um elevador em queda livre ( $a_y = -g$ ) o passageiro tem um peso aparente igual a zero — situação chamada de imponderabilidade (vivida pelos astronautas).

Utilizamos, acima, o termo equilíbrio. Equilíbrio, em Mecânica, significa aceleração nula, quando não existe nenhum efeito de interferência externa sobre o sistema, ou seja, a força resultante sobre ele é igual a zero. Temos utilizado, também, o termo sistema. Um sistema é nosso objeto de estudo: um Papai Noel dentro de um elevador, uma caixa escorregando por um plano inclinado, etc. O sistema pode interagir com tudo o mais que existe, ou seja, com o resto do Universo. São as forças sobre o sistema que desenhamos em um diagrama de forças. Elas representam as interações do sistema com o resto do Universo.

## A SEGUNDA LEI COMO UMA EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

A segunda lei de Newton, aplicada a um móvel, fornece sua equação de movimento. Abra o arquivo `ex_4_03.mdl`. Seu cenário mostra um exemplo de uma partícula em movimento unidimensional. A massa da partícula é  $m = 1$  kg, e sobre ela é exercida uma força constante, no sentido do eixo referencial, de módulo  $F = 1$  N. Se esta é a única força sobre a partícula (sendo, portanto, a força resultante sobre ela), então o movimento é de aceleração constante. As condições iniciais são  $x_0 = 0$  (posição inicial) e  $v_{x0} = 0$  (velocidade inicial). Com a cinemática da Primeira Unidade fica fácil descrever o movimento da partícula: sua equação de movimento, com os dados acima, é escrita como  $x = \frac{1}{2} a_x t^2$ , com  $a_x = 1$  m/s<sup>2</sup>. É este o movimento que você visualiza, na animação. No entanto, a janela Modelo mostra que a solução do movimento é obtida resolvendo-se numericamente o sistema constituído pelas equações diferenciais  $dv_x/dt = F_x/m$  e  $dx/dt = v_x$ . Mesmo que já não tivéssemos tratado da cinemática, poderíamos agora desenvolvê-la completamente a partir da segunda lei de Newton. O arquivo `ex_4_04.mdl` mostra um exemplo bidimensional, onde o movimento (parabólico) de um projétil livre no campo gravitacional terrestre é descrito resolvendo-se as equações diferenciais correspondentes à segunda lei de Newton segundo as direções coordenadas.

## CAINDO EM MEIO VISCOSO

A resistência que a atmosfera oferece ao movimento é uma forma de atrito diferente da que já tratamos, e que também merece atenção. Trata-se, de maneira geral, do estudo do movimento em meio viscoso. A forma analítica da força resistiva oposta ao movimento do corpo é expressão do modelo adotado. Newton, nos *Principia*, considerou a força resistiva como sendo proporcional à velocidade, ou ao quadrado da velocidade. Mais tarde, Bernoulli estendeu o tratamento para qualquer potência da velocidade. Verifica-se que a validade do modelo adotado é dependente da faixa de velocidades em que se desloca o móvel. Para pequenas velocidades, uma força resistiva proporcional à velocidade é, normalmente, uma boa aproximação. Consideremos este caso, aplicado à situação de um objeto, de massa  $m$ , em queda vertical. Adotando-se como referencial o eixo dos  $yy$ , vertical para cima, a força resultante sobre o corpo é escrita, então, na forma

$$F_{\text{res } y} = - m g - b v_y ,$$

onde  $b$  é uma constante positiva de dimensão massa sobre tempo (confira isto), dependente da forma do objeto e da constituição do meio viscoso. Se o corpo desce,  $v_y < 0$ , e o termo resistivo é positivo, o que representa uma resistência contrária ao movimento. Se o corpo sobe,  $v_y > 0$ , e o termo resistivo é negativo, igualmente oposto ao movimento. Utilizando a segunda lei de Newton, temos a aceleração do móvel:

$$a_y = - g - \frac{b}{m} v_y .$$

Esta equação nos permite determinar a velocidade terminal do móvel, que é a velocidade que ele atinge quando sua aceleração se torna nula, passando portanto a ter velocidade constante durante o restante da queda. Fazendo  $a_y = 0$ , temos a expressão da velocidade terminal:

$$v_{T y} = - \frac{m g}{b} .$$

No cenário do arquivo `prj_res1.mdl`, Papai Noel é um corpo de prova em uma experiência de queda em meio resistivo.

O arquivo prj\_res2.mdl mostra, em seu cenário, um caso de movimento bidimensional, no campo gravitacional — movimento de projétil — sem e com resistência do ar. Veja como o modelo trata o problema, resolvendo numericamente a equação diferencial de movimento.

## DINÂMICA DO MOVIMENTO CIRCULAR

A Terceira Unidade tratou da cinemática do movimento circular. Foi visto que, no movimento circular, a aceleração pode ser escrita como a soma de duas componentes: a aceleração tangencial e a aceleração centrípeta, ou radial, que aponta para o centro da trajetória. O cenário do arquivo pendulo.mdl mostra um pêndulo simples oscilando (fio sem massa com uma partícula material em sua extremidade), com a indicação das duas forças aplicadas (peso e tensão do fio), da soma destas duas forças (a força resultante), da aceleração e suas componentes tangencial e radial, e da velocidade. O cenário do arquivo mc\_ver.mdl apresenta o mesmo sistema, agora em um movimento vertical circular completo: uma pedra amarrada a um barbante, posta a girar em um plano vertical por um menino, por exemplo.

Em um movimento circular, chamamos de força centrípeta à componente da força resultante que aponta para o centro da trajetória, já que é ela a responsável pela componente centrípeta da aceleração. Denotando a força centrípeta por  $\vec{F}_c$  :

$$\vec{F}_c = m \vec{a}_c ,$$

onde  $\vec{a}_c$  é a aceleração centrípeta do móvel de massa  $m$  .

No movimento circular uniforme a aceleração tangencial é nula, isto é, a aceleração só tem componente centrípeta e, portanto, a força resultante é a própria força centrípeta. Veja, no cenário do arquivo mcu.mdl, quatro casos de movimento circular uniforme. A janela Condições Iniciais indica os valores da intensidade da velocidade, do raio da trajetória e da massa da partícula, no SI. Fazendo deslizar o botão da janela Controle, você verifica que o caso verde tem um período diferente dos demais — por quê?

No movimento da Lua em torno da Terra, que pode ser visto em boa aproximação como um movimento circular uniforme, a força resultante sobre a Lua é seu peso, a força gravitacional

com que a Terra a atrai. É o peso da Lua, portanto, que faz o papel de força centrípeta, em sua “queda” ao redor da Terra.

## SISTEMA MASSA-MOLA

Foi visto, também na Terceira Unidade, o exemplo do movimento unidimensional de um sistema massa-mola, como caso típico de movimento harmônico simples. Quando a oscilação é sobre uma superfície plana horizontal, a força resultante sobre a massa é a força exercida pela mola, já que peso e normal se compensam. O cenário do arquivo `osc_harm.mdl` apresenta dois casos de sistema massa-mola, que passamos a tratar com algum detalhe.

Primeiro Caso (botão preto). Uma mola horizontal está fixa à parede em sua extremidade esquerda, enquanto que sua extremidade livre, a da direita, está fixa a uma partícula de massa  $m$ . O eixo dos  $xx$  é desenhado de maneira a que sua origem coincida com a posição da partícula quando a mola está frouxa, isto é, nem comprimida, nem distendida. Verifica-se experimentalmente que, se a mola é distendida de um comprimento  $\ell$ , então a força que ela exerce sobre a partícula aponta para a esquerda, e tem módulo proporcional a  $\ell$ ; se a mola é comprimida de um comprimento  $\ell$ , então a força que ela exerce sobre a partícula tem o mesmo módulo, mas aponta para a direita. Logo, podemos escrever que a força da mola sobre a partícula tem a forma analítica

$$F(x) = -k x, \quad (\text{IV.6})$$

onde  $k$  é uma constante positiva característica da mola, chamada de constante elástica. Esta relação mostra que, se  $x > 0$ , então  $F(x) < 0$  (força apontando para a esquerda), e se  $x < 0$ , então  $F(x) > 0$  (força apontando para a direita). Este tipo de força é chamado de força restauradora, pois tende a restaurar o sistema à sua configuração anterior. A força restauradora tem uma dependência linear com a posição. O movimento que esta força provoca é regido pela equação obtida a partir da segunda lei de Newton:

$$m a_x = -k x \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0. \quad (\text{IV.7})$$

Esta é uma equação diferencial que descreve um movimento harmônico simples. É imediato verificar que a expressão dada pela equação (III.14 a) satisfaz esta equação de movimento, com o valor de  $\omega$  dado por:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} . \quad (\text{IV.8})$$

Como a frequência angular  $\omega$  se relaciona com o período do movimento na forma (ver equações (III.24) e (III.25))

$$\omega = \frac{2\pi}{T} ,$$

o período  $T$  da oscilação do sistema massa-mola é dado por

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} . \quad (\text{IV.9})$$

A animação deste caso traça as curvas posição versus tempo e velocidade versus tempo, típicas de movimento harmônico simples. Também é traçado o diagrama de fase do movimento, que vem a ser o lugar geométrico dos pontos associados ao movimento, em um gráfico velocidade versus posição. No caso tratado, o diagrama de fase é uma circunferência, cujo traçado é feito em movimento circular uniforme.

Em um sistema massa-mola ideal, a mola é desprovida de massa, e caracterizada unicamente pela sua constante elástica; toda a massa do sistema está concentrada no objeto preso à mola.

Segundo Caso (botão verde). Este é o caso de um oscilador harmônico amortecido. A força sobre a partícula é escrita como

$$F(x) = -kx - b v(x) ,$$

onde o termo resistivo é do mesmo tipo do modelo acima apresentado para a resistência da atmosfera ao movimento:  $b$  é uma constante positiva e  $v(x)$  é a velocidade da partícula. Veja, na animação, a solução numérica do movimento, e note a forma espiralada do diagrama de fase.

## PÊNDULO SIMPLES COM PEQUENAS AMPLITUDES

Voltemos ao pêndulo simples, considerando agora a situação de pequenas amplitudes, isto é, um pêndulo simples cujo afastamento máximo da vertical é um ângulo pequeno. Por ângulo pequeno entenda-se um ângulo cujo seno vale, aproximadamente, o seu próprio valor, em radianos. (veja o exercício 8 da Terceira Unidade). As duas forças exercidas sobre a massa são seu peso e a tensão do fio, mostradas na figura 12. Como a tensão é radial, só o peso tem componente tangencial à trajetória da partícula, e esta componente é de intensidade  $|F_T| = m g \sin\theta$ , onde  $\theta$  é o ângulo que o pêndulo forma com a vertical. Esta é a força restauradora que a partícula sofre ao longo de sua trajetória. Na aproximação de ângulos pequenos,  $|F_T| \cong m g \theta$ . Como o ângulo  $\theta$  se relaciona com o comprimento  $s$  do arco da forma  $s = \theta R$ , onde  $R$  é o raio do arco (veja a equação (III.1)), então a força restauradora sobre o pêndulo tem a intensidade  $|F_T| \cong m g \frac{s}{L}$ , onde o raio da trajetória é  $R = L$ , o comprimento do fio. Esta é uma força proporcional ao deslocamento  $s$ , com a constante de proporcionalidade igual a  $mg/L$ . Portanto, a segunda lei de Newton se escreve como a equação diferencial

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{g}{L} s = 0 . \quad (\text{IV.10})$$

O movimento do pêndulo simples de pequenas amplitudes, então, é análogo ao de um sistema massa-mola — ver equação (IV.8) -, onde devemos identificar:

$$\omega^2 = \frac{g}{L} . \quad (\text{IV.11})$$

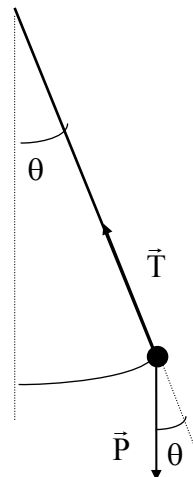


Figura 12 — O pêndulo simples.

Logo, o período para o pêndulo simples na aproximação de pequenas amplitudes vale:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} . \quad (\text{IV.12})$$

Escrevendo a força tangencial como  $F_T = -mg \sin \theta$ , onde o sinal negativo indica a natureza de força restauradora, temos que a aceleração tangencial vale  $a_T = -g \sin \theta$  e, portanto, a expressão para a aceleração angular é

$$\alpha = -\frac{g}{L} \sin \theta ,$$

ou, na aproximação de pequenos ângulos:

$$\alpha \cong -\frac{g}{L} \theta .$$

O cenário do arquivo `pend_apr.mdl` resolve as equações diferenciais do movimento pendular, partindo das duas formas da aceleração angular: com e sem aproximação linear, para um pêndulo partindo de  $\theta=0$  com uma dada velocidade angular inicial. A janela Gráfico mostra a

curva  $\theta$  versus tempo para os dois casos, de onde se pode facilmente tirar os valores da amplitude e do período de cada movimento. Veja que os resultados para o deslocamento angular se sobrepõem, no caso de amplitudes pequenas. Verifique, alterando valores (da velocidade angular inicial, por exemplo) na janela Condições Iniciais, a partir de quais valores para a amplitude os períodos entre os casos aproximado e não aproximado começam a apresentar diferenças importantes.

## O PRINCÍPIO DA EQUIVALÊNCIA

Podemos, aqui, mencionar a possibilidade de se considerar dois tipos de massa, a massa gravitacional e a massa inercial. Massa gravitacional é a propriedade de um corpo associada à força de atração gravitacional exercida sobre ele por outro corpo — é a massa que aparece na expressão do peso. Massa inercial é a propriedade de um corpo associada à resistência que ele pode oferecer à aceleração — é a massa que aparece na segunda lei de Newton. Experimentalmente, não há diferença quantitativa entre as duas grandezas, de modo que as consideramos iguais, utilizando o mesmo símbolo,  $m$ , para caracterizá-las. Esta igualdade implica em todos os corpos caírem com a mesma aceleração, na ausência da resistência do ar. Conhecida como princípio da equivalência, ela é base para a teoria da relatividade geral, de Einstein. A expressão que deduzimos para o período do pêndulo simples de pequenas oscilações, por exemplo, só é válida porque assumimos, a priori, a validade do princípio da equivalência.



## EXERCÍCIOS DA QUARTA UNIDADE

1) No cenário do arquivo `cf_atr_c.mdl`, um bloco desliza ao longo de um plano inclinado. Utilize os dados fornecidos na animação para determinar o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o plano.

2) No arquivo `atrito2.mdl` é mostrada uma animação em que um bloco de massa  $m = 10$  kg está sobre uma placa de massa  $M = 20$  kg que, por sua vez, pode deslizar sem atrito sobre uma superfície plana horizontal. O coeficiente de atrito estático entre o bloco e a placa é  $\mu_e = 0,6$ , enquanto que o coeficiente de atrito cinético vale  $\mu_c = 0,4$ . Descreva, quantitativamente, o movimento de bloco e placa, nos dois casos apresentados, e compare seus resultados com os da animação. No primeiro caso, a força horizontal aplicada sobre o bloco é de módulo  $F = 50$  N e, no segundo caso, de módulo  $F = 70$  N.

3) Veja as animações dos três casos apresentados no cenário do arquivo `prj_incl.mdl` e resolva a questão lá proposta. Sua solução deve ser analítica.

4) No cenário do arquivo `roda_gig.mdl`, Papai Noel está em um parque de diversões. A animação o mostra na roda-gigante, a janela Condições Iniciais indicando, no SI, a massa do Papai Noel (incluído o saco de presentes), a intensidade de sua velocidade linear (constante) no movimento circular (uniforme), o raio da roda-gigante, e a intensidade da aceleração da gravidade — no caso preto, o parque de diversões está localizado no planeta Terra; no caso verde, na Lua. Enquanto a roda gira, são as seguintes as forças exercidas sobre o Papai Noel: o peso, para baixo; a normal, para cima; e uma força de atrito, horizontal apontando para dentro da roda, que o mantém fixo ao brinquedo. Quando nas posições extremas à direita e à esquerda, esta última é a única força radial, sendo, portanto, a própria força centrípeta, e peso e normal se equilibram, de forma que nestas posições o peso aparente do Papai Noel coincide com seu peso real. Quando nas posições extremas acima e abaixo, a força de atrito é nula, e peso e normal são radiais, de forma que é a resultante destas duas que faz o papel de força centrípeta. Daí, o peso aparente ser menor que o peso real, bem lá em cima, e maior, bem lá em baixo. Equacione estas situações, e verifique que são corretos os valores indicados na animação, para o peso aparente do Papai Noel, nessas duas posições. Desafio: equacione,

resolva, e confira, para uma situação genérica em que o Papai Noel está em uma posição em que a direção radial forma um ângulo  $\theta$  com a horizontal. Pegue seu caderno e escreva, em no máximo quinze linhas, sobre os conceitos de massa, peso real e peso aparente.

5) Resolva o proposto no cenário do arquivo f\_mola.mdl.

6) O cenário do arquivo p\_conic.mdl mostra um pêndulo cônico, um pêndulo cuja massa é posta a girar, em movimento circular uniforme, em um plano horizontal, enquanto o fio forma um ângulo constante com a vertical. Se  $L$  é o comprimento do fio e  $\theta$  o ângulo que este forma com a vertical, então o raio da trajetória circular da massa é  $R = L \sin \theta$ . A força resultante sobre a massa é a componente horizontal da tensão,  $T \sin \theta$ , e faz o papel de força centrípeta. A componente vertical da tensão equilibra o peso. Mostre que vale a expressão

$$\omega^2 = \frac{g}{L \cos \theta},$$

onde  $\omega$  é a velocidade angular da massa. Acione a animação e, para os dois casos, medindo o período, determine  $\omega$ , conferindo a expressão acima. ( $L$  e  $\theta$  são fornecidos na janela Condições Iniciais, onde o ângulo está em graus e as demais grandezas, no SI.).

7) Considere o sistema unidimensional sujeito à força

$$F(y) = -m g - k y - b v(y) + f \cos (\omega_{\text{ext}} t),$$

onde o referencial adotado é o eixo dos  $yy$ . Esta é a força resultante sobre uma massa  $m$  presa à extremidade de uma mola de constante elástica  $k$ , pendurada na vertical, em um meio que oferece resistência ao movimento de uma forma linearmente dependente da velocidade. Além disso, existe a aplicação de outra força externa, de amplitude  $f$ , que tem um módulo que varia periodicamente com o co-seno de  $\omega_{\text{ext}} t$ , onde  $t$  é o tempo e  $\omega_{\text{ext}}$  é uma frequência angular forçada sobre o sistema. A força externa periódica é aplicada na extremidade superior da mola. Este é um oscilador harmônico amortecido e forçado. Abra o arquivo osc\_for.mdl. Seu cenário mostra este sistema, com três casos de animação: só com amortecimento ( $f = 0$ ); só com força externa periódica ( $b = 0$ ); e com amortecimento e força externa periódica,

simultaneamente. Veja como o modelo resolve a equação de movimento para o sistema, e aprecie especialmente os diagramas de fase construídos.

8) No cenário do arquivo rsnc.mdl é construído o gráfico posição versus tempo para um oscilador unidimensional, amortecido e forçado, sujeito à força

$$F(x) = -kx - b\dot{x} + f \cos(\omega_{\text{ext}} t),$$

onde  $\omega_{\text{ext}}$  é a frequência angular forçada sobre o sistema. Além desta, existe a frequência angular natural do sistema,  $\omega$ , relacionada com a constante elástica e a massa através da equação (IV.8):

$$\omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Quando a frequência angular forçada coincide com a frequência angular natural do sistema, ocorre o fenômeno conhecido como ressonância: a amplitude do sistema passa a atingir os mais altos valores. Acionando-se a animação, pode-se visualizar a amplitude do movimento, que é o pico mais alto da curva construída. Alterando o valor de  $\omega_{\text{ext}}$ , na janela Condições Iniciais, você pode ver que é para  $\omega_{\text{ext}} = \omega$  que a amplitude é a maior possível. Um tenor que quebra uma taça de cristal, com seu agudo, está emitindo uma frequência forçada igual à frequência normal de vibração do cristal. Um batalhão, ao atravessar uma ponte, recebe ordem para sustar a marcha cadenciada, e fazer a travessia “à maneira civil”, para que não haja o perigo de a frequência da marcha coincidir com a frequência natural da estrutura da ponte, levando-a a oscilar perigosamente.

9) Consideremos uma situação em que o sistema objeto de estudo apresenta regime caótico. Este é um tema bastante atual, ao qual um número cada vez maior de investigadores se dedica. Sistemas que podem apresentar regime caótico são sempre sistemas não lineares. O pêndulo simples, na aproximação de ângulos pequenos, por exemplo, é um sistema linear, e não apresenta caos: a equação diferencial  $\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{g}{L}\right)\theta$ , que resolve o movimento, é linear em  $\theta$  — veja a equação (IV.10). Um pêndulo mais complexo, não linear, e que exhibe caos em sua solução, é o regido pela equação

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{q} \omega - \text{sen } \theta + p \cos \phi ,$$

com

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

e

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_D .$$

Estas equações estão escritas em um sistema de unidades muito particular, onde o tempo é tratado como adimensional. Este tipo de arbitrariedade não é incomum, entre os físicos, e quando cometida serve para simplificar os cálculos que levem às conclusões que interessam. Detalhes podem ser vistos na referência (\*). A grandeza  $\omega$  é a frequência angular do pêndulo,  $\theta$  é o ângulo que ele forma com a vertical,  $q$  é o parâmetro de amortecimento (também chamado de parâmetro de qualidade), e por último há o termo forçado, com amplitude  $p$  e fase  $\phi$ ,  $\omega_D$  sendo a frequência angular forçada, imposta por algum agente externo no ponto de suspensão. Uma característica notável de sistemas não lineares é a forte dependência das condições iniciais. Se, em um sistema linear, alteramos muito levemente as condições iniciais, estamos também alterando muito levemente o movimento subsequente ou, em outras palavras, estamos alterando muito levemente o diagrama de fase. Isto não necessariamente ocorre em sistemas não lineares.

Abra o arquivo caos.mdl. Seu cenário resolve o sistema descrito acima, para os parâmetros  $q=2$  e  $\omega_D = \frac{2}{3}$ . Cada pêndulo é uma haste rígida, leve, com uma massa presa à extremidade oposta àquela onde um agente externo impõe a frequência forçada.. A janela Condições Iniciais apresenta o parâmetro  $p$  e os valores iniciais de  $\omega$ ,  $\theta$  e  $\phi$ . Veja que a única diferença entre os dois casos apresentados está no valor inicial de  $\theta$ , que no caso verde é apenas 0,5% maior que no caso preto. As duas janelas de animação mostram, simultaneamente, os dois pêndulos oscilando. A janela Gráfico mostra os dois diagramas de fase sendo construídos, enquanto ocorre o movimento. O valor indicado de  $p$  é igual à unidade. Acione a animação e observe os movimentos. Comece a aumentar o valor de  $p$ , de 0,5 em 0,5 (mas mantendo-o sempre igual, para os dois casos), e veja como logo os casos preto e verde tomam rotas bem distintas no espaço de fase (o plano onde são traçados os

diagramas de fase).

(\*) G. L. Baker e J. P. Gollub, *Chaotic dynamics: an introduction*, Cambridge University Press, 1990.



## QUINTA UNIDADE: A ENERGIA E SUA CONSERVAÇÃO

### TRABALHO

Esta Unidade introduz um dos conceitos mais importantes em Física, o de energia. Começamos com a noção de trabalho, já que é trabalhando que se fornece energia a um sistema.

Considere uma partícula que sofre um deslocamento  $\vec{d}$  enquanto uma força constante  $\vec{F}$  está sendo exercida sobre ela. Define-se o trabalho  $W$  que a força  $\vec{F}$  realiza, durante o deslocamento  $\vec{d}$ , como sendo dado pelo produto escalar destes dois vetores:

$$W \equiv \vec{F} \cdot \vec{d} . \quad (\text{V.1})$$

Trabalho, portanto, é grandeza escalar. Veja, no cenário do arquivo w1.mdl, as condições para que o trabalho realizado por uma força de dada intensidade, ao longo de um dado deslocamento, seja positivo, negativo, máximo, mínimo ou nulo.

Um menino que puxa um carrinho por um cordão está realizando trabalho sobre o carrinho, através do cordão: a força de tensão do cordão trabalha sobre o brinquedo. Se a intensidade da tensão provocada pelo menino sobre o cordão é sempre a mesma, então o trabalho realizado sobre o brinquedo é máximo no caso de o cordão ser puxado na horizontal. O peso e a força normal do chão sobre o carrinho não trabalham, por serem perpendiculares ao deslocamento. A força de atrito cinético, exercida pelo chão sobre o carrinho, trabalha negativamente.

A unidade SI de trabalho é o joule (J):

$$1 \text{ J} \equiv 1 \text{ N} \times 1 \text{ m} .$$

No CGS, a unidade de trabalho é o erg:

$$1 \text{ erg} \equiv 1 \text{ dyn} \times 1 \text{ cm} .$$

Vale, então, a relação

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N} \times 1 \text{ m} = 10^5 \text{ dyn} \times 10^2 \text{ cm} = 10^7 \text{ erg} .$$

Abra o arquivo `w_peso1.mdl`, cujo cenário apresenta o cálculo do trabalho realizado pelo peso de um objeto, ao longo de um deslocamento vertical. No primeiro caso, o objeto é largado de uma altura  $h$ ; no segundo caso, ele é lançado para cima, alcançando a altura  $h$ . Nos dois casos, o deslocamento é um vetor de módulo igual a  $h$ . Se  $m$  é a massa do objeto, então o trabalho que o peso realiza na subida vale  $-mgh$  (peso e deslocamento com sentidos opostos), enquanto que na descida o trabalho realizado pelo peso vale  $+mgh$  (peso e deslocamento com mesmo sentido). Esses resultados dependem da escolha do referencial?

No cenário do arquivo `w_peso2.mdl` acompanha-se uma bola de futebol, de massa  $m$ , após ser chutada. Entre os pontos  $A$  e  $B$  existe uma diferença de altura  $h$ . O trabalho realizado pelo peso  $\vec{p}$ , no percurso  $A \rightarrow B$ , também vale  $-mgh$ , e isto pode ser visto decompondo-se o deslocamento  $\vec{d}$  nas componentes vetoriais horizontal  $\vec{d}_h$ , que não contribui por ser perpendicular ao peso, e vertical  $\vec{d}_v$ , de módulo igual a  $h$ . Responda às questões propostas no cenário do arquivo `ex_5_01.mdl`.

Um exemplo de força constante por partes é apresentado no cenário do arquivo `ex_5_02.mdl`. Rode a animação e responda às questões lá colocadas. O trabalho total realizado pela força, ao longo de todo o percurso, é dado pela soma dos valores do trabalho realizado pela força em cada um dos trechos em que ela se mantém constante. Nos dois primeiros trechos, a contribuição equivale a áreas (positivas) de dois retângulos; no terceiro, a contribuição é nula; e, no quarto trecho, é o valor da área (negativa) de um retângulo.

## TRABALHO DE FORÇA VARIÁVEL

No cenário do arquivo `w2.mdl`, uma força varia continuamente com a posição. Você pode fazer uma estimativa do trabalho que a força realiza, em dado percurso, substituindo a curva força versus posição por uma função constante por partes, e determinando a área total sob a curva, no percurso. Os casos verde e rosa são aproximações mais refinadas. O valor exato do trabalho é dado, então, pela expressão



$$W = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N F_{xi} \Delta x , \quad (\text{V.2})$$

onde  $N$  é o número de partes da função e  $F_{xi}$  é seu valor (constante) na  $i$ -ésima parte, correspondente à altura de um retângulo de base  $\Delta x$ . Esta equação nada mais é que a expressão que define a integral de  $F_x$ , em relação a  $x$ , no percurso considerado.

Considere uma partícula que se desloca no sentido do eixo dos  $xx$ , sujeita a uma força exercida na direção do deslocamento. O trabalho realizado pela força, entre as posições  $x_i$  e  $x_f$ , é dado pela integral

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx , \quad (\text{V.3})$$

onde a notação  $F(x)$  explicita a dependência da força com a posição.

Um exemplo unidimensional clássico de força dependente de posição é o da força restauradora de mola, já visto na Quarta Unidade:

$$F(x) = -k x ,$$

onde  $k$  é a constante elástica de uma mola que, quando nem comprimida nem distendida, tem sua extremidade móvel posicionada na origem do eixo dos  $xx$ . Se um objeto é preso a esta extremidade, que força deve ser aplicada sobre ele, para deslocá-lo com velocidade constante? Deslocar o objeto com velocidade constante significa deslocá-lo sem aceleração, ou seja, a força resultante sobre o objeto deve ser nula. Logo, deve-se aplicar a ele uma força oposta à força restauradora da mola:

$$F_{\text{apl}} = k x .$$

O trabalho realizado por esta força, em um deslocamento de  $x = 0$  até  $x = L$  (distensão), vale:

$$W = \int_0^L k x \, dx = k \cdot \left. \frac{1}{2} x^2 \right|_0^L = \frac{1}{2} k L^2 . \quad (\text{V.4})$$

Como este resultado depende apenas do quadrado de  $L$ , ele também é válido para um deslocamento de  $x = 0$  até  $x = -L$  (compressão). Assim, o trabalho mínimo (correspondente à situação de velocidade constante) necessário para se distender ou se comprimir de um comprimento  $L$  uma mola de constante elástica  $k$  é dado pelo resultado da equação (V.4). Veja o cenário do arquivo `w_mola1.mdl`, e verifique a equivalência numérica entre o valor do trabalho realizado pela força aplicada e a área sob a curva que representa a força aplicada em função da posição. O trabalho realizado *pela mola*, neste exemplo, é igual a *menos* o trabalho realizado *pela força aplicada*: por quê? O cenário do arquivo `w_int.mdl` compara o resultado (V.4) com o cálculo aproximado realizado computando-se a equação (V.2) com um intervalo  $\Delta x$  relativamente pequeno. Altere o valor de  $\Delta x$  (alterando o valor do passo, através da tecla Opções da janela Controle), para ver como a precisão do cálculo é alterada.

De maneira geral o trabalho que a força realiza, ao longo de um percurso qualquer, é calculado como a soma de elementos (infinitesimais) de trabalho. O trabalho realizado pela força ao longo do deslocamento infinitesimal  $d\vec{s}$  é dado por

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} . \quad (\text{V.5})$$

Para uma trajetória qualquer (não necessariamente retilínea), a integral do elemento de trabalho  $dW$  fornece o trabalho realizado pela força ao longo do percurso:

$$W = \int_i^f dW = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{s} , \quad (\text{V.6})$$

onde a integração é realizada, ao longo do caminho, entre o ponto inicial ( $i$ ) e o ponto final ( $f$ ). Compare as equações (V.3) e (V.6).

O menino brinca, agora, com uma pedra amarrada em uma das extremidades do cordão. Ele a gira no ar, segurando o cordão pela outra extremidade (sem saber que está redescobrimo uma das mais antigas armas de guerra). Aqui, a tensão da corda não trabalha, qualquer que seja o percurso considerado: como, a cada intervalo infinitesimal de tempo  $dt$ , o correspondente

deslocamento  $d\vec{s}$  (tangente à trajetória) é perpendicular à tensão da corda (radial), o produto escalar da equação (V.5) resulta em zero. O integrando  $dW$  sendo sempre nulo, a integral da equação (V.6) é nula, para qualquer trecho do percurso da pedra. Isto é visualizado no cenário do arquivo `w_t.mdl`.

A equação (V.6) expressa o cálculo do trabalho através de uma integral de linha: a força é integrada ao longo do caminho (trajetória). Um exemplo simples é o cálculo do trabalho realizado por uma força constante:

$$W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{s} = \vec{F} \cdot \int_i^f d\vec{s} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{d} , \quad (\text{V.7})$$

onde  $\vec{F}$  pode sair de sob o sinal de integração, por ser constante. A operação, então, se resume ao cálculo do produto escalar de  $\vec{F}$  pelo vetor resultante da integração do elemento de deslocamento  $d\vec{s}$ , ao longo do percurso. Esta integral (de linha) nada mais é do que o deslocamento ao longo do percurso considerado,  $\Delta\vec{r}$ , que também estamos denotando por  $\vec{d}$ . Abra o arquivo `int_ds.mdl`, cujo cenário apresenta uma visualização desta integral.

## TRABALHO REALIZADO PELO ATRITO

Outro exemplo de aplicação da equação (V.6) é o cálculo do trabalho realizado pela força de atrito cinético, ao longo de um percurso. O integrando, neste caso, é o elemento infinitesimal de trabalho

$$\vec{f}_c \cdot d\vec{s} = -f_c ds ,$$

já que a força de atrito cinético,  $\vec{f}_c$ , é, em cada instante, oposta ao elemento de deslocamento  $d\vec{s}$ . Como  $f_c$  é constante, o cálculo se reduz a

$$W_c = -f_c \int_i^f ds . \quad (\text{V.8})$$

Note que, aqui, o integrando (elemento  $ds$ ) é um escalar, diferentemente do que se vê na

equação (V.7) (integrando  $d\vec{s}$ ). Veja, na janela Modelo do arquivo `w_atr1.mdl`, como é feito o cálculo numérico da integral de linha que fornece o trabalho da força de atrito. O valor de  $\int_i^f ds$  se reduz ao comprimento da trajetória descrita pelo móvel.

## FORÇAS CONSERVATIVAS

Voltemos ao cálculo do trabalho realizado pelo peso de um corpo. Imagine o corpo sendo atirado verticalmente, para cima, chegando a atingir a altura máxima  $h$ . Na subida, o trabalho realizado pelo peso vale  $-mgh$ , enquanto que na descida o peso trabalha  $+mgh$ . Assim, o trabalho realizado pelo peso ao longo de toda a viagem vale zero, já que os valores de subida e descida se compensam. O trabalho realizado pelo peso ao longo de um percurso fechado, portanto, é nulo. Mesmo quando o percurso fechado é uma trajetória curva, esta afirmativa continua sendo correta, já que deslocamentos horizontais não contribuem. Abra o arquivo `w_peso3.mdl`, rode a animação e responda às questões propostas.

Outro exemplo de força que realiza trabalho nulo ao longo de um percurso fechado é o da força restauradora de mola. Veja, no cenário do arquivo `w_mola2.mdl`, que, para um circuito fechado, força e elemento de deslocamento têm o mesmo sentido durante metade do percurso, e o sentido oposto na outra metade: o trabalho total associado a todo o ciclo é nulo.

Chamamos de *forças conservativas* as forças que, ao longo de qualquer ciclo fechado, realizam um trabalho nulo. Assim, peso é força conservativa, força restauradora de mola é força conservativa. A razão de ser desta denominação ficará clara até o final da Unidade. Abra o arquivo `w_cons.mdl`. Rodando a animação, você vê uma partícula viajar de um ponto A para um ponto B, e regressar ao ponto A, descrevendo, portanto, um circuito fechado. São vistas duas possibilidades de viagem: ida e volta pelos caminhos identificados por 1 e 2, respectivamente, ou ida e volta pelo mesmo caminho 2. Suponha que apenas uma força, conservativa, é exercida sobre a partícula. Então, o trabalho realizado pela força, ao longo do circuito fechado, vale zero nos dois casos. Em um dos casos, isto pode ser escrito na forma

$$W = W_{A \rightarrow B}^{(1)} + W_{B \rightarrow A}^{(2)} = 0 ,$$

indicando que o trabalho ao longo do ciclo fechado pode ser escrito como a soma do trabalho

que a força realiza ao longo do caminho 1, na ida, com o trabalho realizado ao longo do caminho 2, na volta. No outro caso, vale a expressão

$$W = W_{A \rightarrow B}^{(2)} + W_{B \rightarrow A}^{(2)} = 0 ,$$

onde agora o caminho de ida é o caminho 2. Comparando-se estas duas expressões, conclui-se que

$$W_{A \rightarrow B}^{(1)} = W_{A \rightarrow B}^{(2)} ,$$

ou seja, o trabalho que a força conservativa realiza entre os pontos A e B é o mesmo, ao longo do caminho 1 e ao longo do caminho 2. Como estes caminhos são arbitrários, o trabalho realizado pela força conservativa, entre A e B, é o mesmo ao longo de qualquer caminho escolhido. Logo, este trabalho não depende do caminho, dependendo somente dos pontos inicial e final do percurso considerado. Vê-se, então, que uma força conservativa apresenta esta característica importante: o trabalho por ela realizado sobre um corpo que se desloca entre dois pontos depende unicamente das localizações dos pontos, não dependendo da trajetória tomada.

## UMA FORÇA NÃO CONSERVATIVA

Um exemplo de *força não conservativa* é o da força de atrito cinético. No cenário do arquivo `w_atr2.mdl` são mostrados dois casos de movimento plano horizontal, com trajetória circular. Para um percurso circular fechado, a integral de  $ds$  ao longo da circunferência de raio  $R$  nada mais é que seu comprimento,  $2\pi R$ , de modo que a equação (V.8) fornece, para o circuito fechado:

$$W_c = - f_c (2\pi R) .$$

Realmente, neste caso o integrando pode ser escrito como  $ds=R d\theta$ , de forma que a integral de linha no circuito vale  $\int_i^f ds=R \int_i^f d\theta=R \times 2\pi$ , com os pontos inicial (i) e final (f) da trajetória coincidindo, a integral da variável angular em uma volta completa igualando  $2\pi$ . Então, o trabalho realizado pela força de atrito cinético é diferente de zero (negativo) ao longo

do circuito fechado, e tem seu valor dependente da trajetória.

## ENERGIA CINÉTICA

Uma grandeza de mesma natureza que o trabalho é a energia cinética, definida como segue. Um objeto de massa  $m$ , que em um certo instante possui uma velocidade de módulo  $v$ , tem, nesse instante, uma energia cinética dada por

$$K \equiv \frac{1}{2} m v^2 . \quad (\text{V.9})$$

A energia cinética de um corpo é, portanto, uma grandeza essencialmente positiva.

Para entendermos o porquê desta definição, consideremos o cálculo do trabalho realizado pela força resultante  $\vec{F}_{\text{res}}$  sobre uma partícula de massa  $m$ , ao longo de um percurso qualquer. O trabalho realizado pela resultante, no percurso, vale

$$W_{\text{res}} = \int_i^f \vec{F}_{\text{res}} \cdot d\vec{s} = m \int_i^f \vec{a} \cdot d\vec{s} = m \int_i^f \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = \frac{1}{2} m \int_i^f \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v}) dt = \frac{1}{2} m \int_i^f \frac{d}{dt} (v^2) dt ,$$

onde utilizamos a identidade  $d\vec{s} = \vec{v} dt$  (o vetor  $d\vec{s}$  é o vetor  $d\vec{r}$ , tangente à trajetória), e o fato de que

$$\frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 2 \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} .$$

Logo, o trabalho realizado pela força resultante sobre a partícula vale:

$$W_{\text{res}} = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2) .$$

## TEOREMA DO TRABALHO-ENERGIA CINÉTICA

Assim, com a definição da equação (V.9), podemos escrever que o trabalho realizado pela força resultante sobre uma partícula, em um percurso qualquer, equivale à variação da energia cinética da partícula, no percurso considerado:

$$W_{\text{res}} = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = K_f - K_i \equiv \Delta K \quad . \quad (\text{V.10})$$

A relação  $W_{\text{res}} = \Delta K$  reflete o fato de o trabalho realizado sobre uma partícula ser transformado em energia cinética. A dimensão e as unidades de energia cinética são, portanto, as mesmas que as de trabalho. Não importa a natureza das forças presentes (conservativas ou não, constantes no tempo ou não): a variação da energia cinética da partícula é igual ao trabalho realizado pela força resultante, ou seja, o trabalho total realizado sobre a partícula. Este é o chamado Teorema do Trabalho-Energia Cinética.

### TEOREMA DO TRABALHO-ENERGIA CINÉTICA PARA UM SISTEMA DE PARTÍCULAS

Quando o sistema tratado é constituído por mais de uma partícula, a variação da energia cinética, em um percurso, também é medida pelo trabalho total realizado sobre o sistema o que, agora, não necessariamente equivale ao trabalho realizado pela força resultante. A variação da energia cinética total de um sistema é a soma (algébrica trabalho é grandeza escalar) dos trabalhos realizados pelas resultantes sobre cada uma das partículas do sistema. Note que a força resultante sobre um sistema pode ser nula, e um trabalho total não nulo ser realizado sobre ele. No caso de uma granada explodindo, por exemplo, as forças internas se anulam, o mesmo não ocorrendo com os trabalhos que elas realizam. De maneira geral, portanto:

$$W_{\text{total}} = \Delta K \quad . \quad (\text{V.11})$$

Abra o arquivo `w_ec1.mdl`, em cujo cenário um carrinho é puxado sobre uma superfície horizontal. Como peso e normal não trabalham ao longo do movimento, o trabalho total realizado sobre o carrinho, em um intervalo de tempo qualquer, equivale ao realizado pela força que o puxa,  $\vec{F}$ . Esta força sendo constante, e formando um ângulo  $\theta$  com a horizontal, tem-se que  $F d \cos\theta = \Delta K$ , onde  $\Delta K$  é a variação de energia cinética correspondente ao deslocamento de módulo  $d$ . Rode a animação e responda às questões lá propostas.

### ENERGIA POTENCIAL

A expressão  $W_{\text{total}} = \Delta K$  vale para qualquer sistema. Considere, agora, um sistema sujeito a uma única força, conservativa. Então, o trabalho que esta força realiza (trabalho total), em um percurso fechado, é nulo; logo,  $\Delta K = 0$  ao se fechar um ciclo. Na maioria dos casos, no entanto, estaremos lidando com trechos de trajetórias não fechadas. Torna-se útil, então, definir uma outra quantidade, a energia de configuração, ou energia potencial, da seguinte forma.

A energia de configuração,  $U$ , associada a uma força conservativa, é tal que sua variação  $\Delta U$  satisfaz a relação

$$\Delta K + \Delta U = 0, \quad (\text{V.12 a})$$

qualquer que seja o percurso considerado.

### ENERGIA MECÂNICA E SUA CONSERVAÇÃO

Estamos definindo uma quantidade cuja variação compensa a variação da energia cinética, em qualquer percurso descrito por um móvel sujeito a uma força conservativa. A relação (V.12 a) é equivalente à igualdade  $\Delta(K+U)=0$ , que expressa o fato de a variação da quantidade  $K+U$  ser nula, ao longo de qualquer percurso descrito pelo sistema. A esta quantidade dá-se o nome de energia mecânica do sistema,  $E_m$ :

$$E_m \equiv K + U. \quad (\text{V.13})$$

Logo, uma expressão equivalente à (V.12 a) é a que estabelece a constância da energia mecânica de um sistema submetido a uma força conservativa:

$$E_m = K + U = \text{constante}. \quad (\text{V.12 b})$$

Equivalentemente, se os índices 1 e 2 referem-se a duas configurações quaisquer, então podemos escrever que



$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \quad (\text{V.12 c})$$

Diz-se que um sistema conservativo é aquele que conserva sua energia mecânica.

Se  $\vec{F}$  é a força conservativa exercida sobre um sistema, a combinação das equações (V.11) e (V.12 a) nos permite escrever:

$$\Delta U = -W_F, \quad (\text{V.14})$$

expressão que relaciona a variação de energia de configuração sofrida pelo sistema com o trabalho realizado sobre ele pela força conservativa, em um percurso qualquer.

É importante ressaltar que, na verdade, a energia de configuração não foi definida em termos absolutos, mas sim através de sua variação. Assim, existe sempre uma arbitrariedade em sua determinação. Isto é fácil de ver, através de um cálculo simples, para uma partícula em queda livre.

## ENERGIA POTENCIAL GRAVITACIONAL

Seja uma partícula de massa  $m$ . Qual sua energia de configuração, quando a uma altura  $h$  do solo? A força resultante sobre a partícula é seu próprio peso. Adotemos como referencial o eixo dos  $yy$  apontando para cima, com a origem no solo. Utilizando a equação (V.14), tem-se que

$$\Delta U = -W_{\text{peso}} = -\int_0^h (-mg) dy = mg \int_0^h dy = mgh,$$

onde estamos comparando duas configurações possíveis: uma com a partícula no solo, outra com a partícula à altura  $h$ . Aqui,  $U$  significa a energia de configuração do sistema associada à força conservativa peso da partícula. Então,

$$\Delta U = U(h) - U(0) = mgh \quad \Rightarrow \quad U(h) = U(0) + mgh.$$

A energia de configuração — ou potencial — da partícula a uma altura  $h$  do solo é sua energia de configuração quando no solo, acrescida do fator  $mgh$ . Podemos arbitrar o valor  $U(0) = 0$ , caso em que ficamos com  $U(h) = mgh$ . Como os cálculos se baseiam na equação (V.12 a), que envolve variações, não importa qual o nível zero que tenha sido escolhido. Procura-se fazer a escolha a mais conveniente possível. No caso da energia potencial gravitacional, a escolha feita acima é muitas vezes a mais simples. Mas há situações em que ela não convém: em problemas de mecânica celeste, por exemplo, colocar o nível zero da energia potencial no infinito é normalmente o mais indicado.

Um objeto de massa  $m$ , a uma altura  $h$  do solo, está em uma dada configuração. Se o objeto está em equilíbrio ou não, subindo ou descendo, descrevendo uma trajetória reta ou curva, não importa. É como olhar uma fotografia: ela não lhe diz nada sobre o imediatamente antes nem sobre o imediatamente depois daquele instante. Para esta determinada configuração há uma determinada energia de configuração  $U$ , associada à força conservativa peso do objeto.

O termo energia potencial é muito mais utilizado que energia de configuração e, portanto, passamos a adotá-lo exclusivamente, daqui para frente.

Vale lembrar que a energia potencial, sendo uma quantidade energética, tem a mesma dimensão e as mesmas unidades que as da energia cinética e do trabalho.

Abra o arquivo peso\_en.mdl. O cenário mostra uma bola sendo lançada verticalmente, para cima, em uma situação onde se despreza a resistência do ar. A única força exercida sobre a bola, após o lançamento, é a força de atração da Terra (peso). O sistema, portanto, é conservativo. Logo, a energia mecânica é uma constante de movimento — reta horizontal verde, na animação. Escolhendo o nível zero de energia potencial gravitacional coincidindo com a origem do eixo vertical, tem-se que a energia mecânica, no momento do lançamento, coincide com a energia cinética. À medida que a bola sobe, sua energia cinética vai sendo transformada em energia potencial, até o ponto de altura máxima, onde a energia cinética é nula e a energia mecânica coincide com a energia potencial. Determine, em termos dos dados da janela Condições Iniciais (sistema SI), a energia mecânica total do sistema. Utilize a equação (V12.c) para: (a) determinar a altura máxima atingida pela bola; (b) determinar sua velocidade, quando a uma altura de 3 m. Encontre a expressão para a energia cinética, em função do tempo, verificando que ela é uma equação quadrática — curva vermelha, na

animação. Esta curva, somada à curva azul (energia potencial), resulta na reta verde.

## ENERGIA POTENCIAL ELÁSTICA

Outro exemplo clássico de cálculo de energia potencial é o do sistema massa-mola ideal. A força restauradora da mola sendo conservativa, a ela associamos uma energia potencial, chamada de energia potencial elástica. Imagine um sistema massa-mola oscilando horizontalmente, sobre um piso sem atrito. A força restauradora é a força resultante já que, neste caso, o peso do objeto preso à ponta da mola e a normal do piso sobre ele se anulam. Escolhendo o referencial usual para este sistema — eixo dos  $xx$  com a origem coincidindo com a extremidade livre da mola frouxa — podemos escrever, analogamente ao que fizemos no caso gravitacional:

$$\Delta U = -W_{\text{mola}} = -\int_0^L (-kx) dx = k \int_0^L x dx = \frac{1}{2} k L^2 ,$$

onde a força restauradora tem a forma  $F(x) = -kx$ , e  $x = 0$  e  $x = L$  são as posições correspondentes às configurações que estamos comparando. Assim,

$$\Delta U = U(L) - U(0) = \frac{1}{2} k L^2 \quad \Rightarrow \quad U(L) = U(0) + \frac{1}{2} k L^2 .$$

É usual escolher-se o nível  $U(0) = 0$ , de modo a se ter  $U(L) = \frac{1}{2} k L^2$ : a energia potencial elástica do sistema massa-mola, quando esta está distendida de um comprimento  $L$ , tem o valor  $\frac{1}{2} k L^2$ , se adotamos a configuração de mola frouxa como associada ao zero da energia potencial. Como este comprimento contribui quadraticamente, o valor calculado é o mesmo para o caso de uma compressão de  $L$ . Note que este resultado coincide com o trabalho necessário para distender ou comprimir, de um comprimento  $L$ , a mola de constante elástica igual a  $k$  — equação (V.4): a quantidade de energia correspondente ao trabalho realizado é armazenada pelo sistema em forma de energia potencial. No cenário do arquivo `ex_5_03.mdl`, toda a energia potencial armazenada no sistema massa-mola é transformada em energia cinética do carrinho, que parte do repouso. Verifique, por considerações de energia, que a compressão máxima da mola é igual a 0,5 m.

O arquivo mola\_en.mdl mostra o traçado das curvas energia cinética e energia potencial, versus tempo, para um sistema massa-mola ideal. Passemos à determinação analítica das funções traçadas na animação. Para um instante de tempo genérico  $t$ , posição e velocidade da massa  $m$  podem ser escritos na forma das equações (III.14.a) e (III.16.a):

$$x = A \cos(\omega t + \phi) , \quad (\text{V.15})$$

$$v_x = -\omega A \sin(\omega t + \phi) , \quad (\text{V.16})$$

onde  $\phi$  é uma constante de fase (igual a zero, neste exemplo) e a frequência angular  $\omega$  se relaciona com a massa e a constante elástica através da equação (IV.7):

$$\omega^2 = \frac{k}{m} . \quad (\text{V.17})$$

Então, a energia cinética no instante  $t$  vale:

$$K = \frac{1}{2} m v_x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \phi) , \quad (\text{V.18})$$

onde a última igualdade resulta do uso da equação (V.17).

A energia potencial, em  $t$ , vale:

$$U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \phi) . \quad (\text{V.19})$$

A energia mecânica do sistema, em qualquer instante de tempo, é dada pela soma das equações (V.18) e (V.19), o que resulta em

$$E_m = \frac{1}{2} k A^2 , \quad (\text{V.20})$$

já que a soma dos quadrados do seno e do co-seno de um ângulo é igual à unidade. Este é o valor da energia mecânica do sistema massa-mola, fácil de verificar se observamos que ele

coincide com o valor da energia potencial, em um ponto onde a energia cinética é nula.

## RELAÇÃO ENTRE FORÇA CONSERVATIVA E SUA CORRESPONDENTE ENERGIA POTENCIAL

Vimos que o trabalho realizado por uma força conservativa, ao longo de um percurso qualquer, não depende da trajetória, mas unicamente das posições inicial e final do percurso. Assim, podemos escrever que a força depende explicitamente apenas da posição:  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ . Uma dependência explícita da velocidade, por exemplo, significaria uma dependência da trajetória, já que é a velocidade que “traça” a trajetória. Considere, agora, uma partícula deslocando-se em uma dimensão, sujeita a uma força resultante conservativa. Podemos escrever  $F_{\text{res}} = F_{\text{res}}(x)$ , se  $x$  é a variável posição. Da equação (V.14), vem:

$$\Delta U = - \int_i^f F_{\text{res}}(x) dx \quad , \quad (\text{V.21})$$

uma integração definida entre o início e o final do percurso. Podemos escrever, então, a seguinte relação entre a força resultante e a energia potencial:

$$F_{\text{res}}(x) = - \frac{dU(x)}{dx} \quad . \quad (\text{V.22})$$

Realmente, substituindo-se a relação (V.22) na (V.21):

$$\Delta U = - \int_i^f \left( - \frac{dU(x)}{dx} \right) dx = \int_i^f dU(x) = U(x_f) - U(x_i) \quad .$$

O cenário do arquivo `fc_pot1.mdl` mostra um exemplo de energia potencial com dependência quadrática da posição, dependência esta comum em muitos problemas importantes. Simultaneamente ao traçado da curva energia potencial versus posição, também é traçada a curva força resultante versus posição — equação (V.22).

## PONTOS DE EQUILÍBRIO

Considere uma partícula descrevendo um movimento unidimensional, sujeita a uma força

conservativa, tendo por energia potencial aquela cuja dependência com a posição é apresentada no gráfico da figura 13.

Seja  $E_{m1}$  sua energia mecânica (indicada no gráfico). Considere o ponto  $x_{e1}$ . Neste ponto,  $dU/dx=0$  e, portanto,  $F_{res}=0$ , o que significa equilíbrio. Se, a partir de  $x_{e1}$ , deslocamos a partícula um pouco para a direita (valores de  $x$  maiores que  $x_{e1}$ ), passamos para um trecho da curva em que  $dU/dx>0$  (inclinação positiva) e, portanto,  $F_{res}<0$ , ou seja, força resultante apontando para a esquerda, tendendo a trazer a partícula de volta a  $x_{e1}$ . Se, a partir de  $x_{e1}$ , deslocamos a partícula um pouco para a esquerda, passamos para um trecho da curva em que  $dU/dx<0$  e, portanto, com  $F_{res}>0$ , força resultante que aponta para a direita, tendendo a trazer a partícula de volta a  $x_{e1}$ . Daí, o ponto  $x_{e1}$  ser um ponto de equilíbrio estável. O mesmo se aplica ao ponto  $x_{e2}$ . O ponto  $x_i$ , por argumentos análogos, é um ponto de equilíbrio instável, enquanto que o ponto  $x_0$  é um ponto de equilíbrio indiferente.

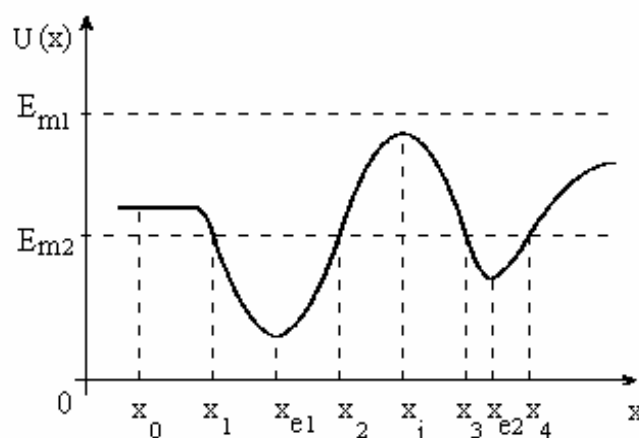


Figura 13 — Uma curva energia potencial versus posição.

## REGIÕES PROIBIDAS

Considere, agora, que a energia mecânica do sistema seja  $E_{m2}$  (também indicada no gráfico da figura 13). Então, usando a equação (V.12 b) e o fato de a energia cinética ser sempre maior ou igual a zero, temos que

$$K(x) = E_{m2} - U(x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad E_{m2} \geq U(x) \cdot$$

Logo, a energia potencial da partícula nunca é maior que sua energia mecânica. Daí, concluímos que a partícula só pode estar localizada nas posições

$$x \in [x_1; x_2] \quad \text{ou} \quad x \in [x_3; x_4]$$

já que, fora destas regiões,  $U(x) > E_{m2}$ . As regiões em que a partícula pode estar são as chamadas regiões permitidas, enquanto as demais são as regiões proibidas. Os pontos de fronteira ( $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  e  $x_4$ ) são os chamados pontos de retorno — pontos em que  $E_{m2} = U(x)$  e, portanto, a partícula tem velocidade nula.

À região da curva entre os pontos  $x_2$  e  $x_3$  é atribuído o nome barreira de potencial, que, para uma partícula com energia mecânica igual a  $E_{m2}$ , é intransponível. Isto, do ponto de vista da Física Clássica, aqui estudada. No mundo subatômico, as regras são ditadas pela Mecânica Quântica, teoria segundo a qual pode haver uma probabilidade de transposição de uma barreira classicamente intransponível. É o caso do decaimento radioativo em que uma partícula alfa, ao ser emitida por um núcleo atômico, sofre um processo de transposição de barreira. Mas, voltemos à Física Clássica.

Se  $U(x)$  é potencial gravitacional, seu gráfico como função de  $x$  reflete o “perfil da montanha” e é interessante analisar o caso de uma bolinha, dotada de certa energia mecânica, percorrendo a região, a título de ilustração. No entanto, o que foi dito é geral, para qualquer sistema conservativo unidimensional.

## O PÊNDULO SIMPLES E SUA ENERGIA POTENCIAL

Abra o arquivo pot\_grav.mdl. Seu cenário mostra um pêndulo simples, de massa  $m = 1$  kg e comprimento  $L = 1$  m, largado do repouso do ponto em que forma um ângulo de 1,4 radianos com a vertical. É adotado como nível zero da energia potencial gravitacional a altura mais baixa da trajetória da massa ( $y = -L$ ). O perfil da energia potencial gravitacional ( $U$ ) é traçado

na janela Gráfico, em função da componente  $x$  da posição. Vimos, na Quarta Unidade, que o movimento do pêndulo simples de pequenas amplitudes é análogo ao de um sistema massa-mola (movimento harmônico simples) caracterizado pela constante elástica dada por  $k=mg/L$ . Sua energia potencial,  $U_{\text{harm}} = \frac{1}{2}kx^2$ , também é traçada na animação. Veja que as duas curvas coincidem, quando o pêndulo forma pequenos ângulos com a vertical, confirmando que o pêndulo simples de pequenas amplitudes é caracterizado por uma energia potencial que depende quadraticamente da posição horizontal (parábola). Muitos sistemas físicos se comportam desta maneira, podendo ser tratados, em uma primeira aproximação, como um oscilador harmônico simples. A Física Molecular é uma área onde esta abordagem é muito freqüente.

### MAIS DE UM TIPO DE POTENCIAL

A cada força conservativa exercida sobre um sistema, podemos associar uma energia potencial, de forma que, para um sistema conservativo, a expressão da conservação da energia mecânica é feita através da generalização da equação (V.12 a):

$$\Delta K + \sum \Delta U = 0, \quad (\text{V.23})$$

onde são somadas as variações de todas as formas de energia potencial — tantas quantas são as forças conservativas presentes. Assim, por exemplo, em uma situação envolvendo tanto variação de energia potencial gravitacional (associada ao peso de um objeto), quanto variação de energia potencial elástica (associada a uma força restauradora), devemos levar em consideração, em cada instante, a existência destas duas formas de energia potencial. No cenário do arquivo `pot_g_k.mdl`, um bloco de massa  $m = 25 \text{ kg}$  é largado de uma altura  $h_1 = 30 \text{ m}$ , atinge a mola que tem sua extremidade livre  $20 \text{ m}$  acima da origem do referencial escolhido, comprime a mola até a altura  $h_2 = 13,39 \text{ m}$ , e é lançado para cima, voltando à posição de onde é largado. A compressão máxima sofrida pela mola, então, vale  $L = 6,61 \text{ m}$ . Determinemos a constante elástica da mola,  $k$ , a partir da conservação da energia mecânica, igualando seu valor em dois pontos notáveis: o ponto de onde o bloco é largado,  $y = h_1$ , e o ponto onde o bloco comprime a mola ao máximo,  $y = h_2$ :

$$K(h_1) + \sum U(h_1) = K(h_2) + \sum U(h_2) .$$



Adotemos a origem como nível zero da energia potencial gravitacional, e a posição da extremidade livre da mola, quando frouxa ( $y = 20\text{m}$ ), como nível zero da energia potencial elástica. Como o bloco encontra-se instantaneamente em repouso, tanto quando em  $h_1$  como quando em  $h_2$ ,  $K(h_1) = K(h_2) = 0$ . A energia potencial no ponto mais alto é uma energia potencial puramente gravitacional:  $\sum U(h_1) = mgh_1$ . A energia potencial no ponto de compressão máxima da mola é a soma de um termo gravitacional com um termo elástico:  $\sum U(h_2) = mgh_2 + \frac{1}{2}kL^2$  Assim:

$$m g h_1 = m g h_2 + \frac{1}{2} k L^2 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2}{L^2} m g (h_1 - h_2) .$$

Determine este valor. Calcule, agora, o módulo da velocidade do bloco, quando em pontos localizados nas alturas de 25m, 20m e 15m, e compare seus resultados com o que indica o velocímetro da animação (utilize  $g=10\text{m/s}^2$ ).

### QUANDO O SISTEMA É NÃO CONSERVATIVO

Havendo forças não conservativas, a elas não podemos associar nenhuma energia potencial, e a energia mecânica não se conserva. Neste caso,  $K + \sum U$  não se mantém constante, aumentando ou diminuindo de valor, conforme as forças não conservativas trabalhem positiva ou negativamente sobre o sistema. Assim, em um sistema não conservativo a variação  $\Delta K + \sum \Delta U$  será positiva ou negativa, e podemos escrever:

$$\Delta K + \sum \Delta U = W_{nc} , \quad (\text{V.24})$$

onde  $W_{nc}$  expressa o trabalho total não conservativo realizado sobre o sistema, no percurso considerado.

O cenário do arquivo `diss_ar1.mdl` mostra uma bola sendo lançada verticalmente, para cima, em presença de atmosfera. Neste caso, o lado direito da equação (V.24) é o trabalho realizado pela resistência do ar em um dado percurso, um resultado de valor negativo, já que a resistência do ar é exercida sempre em oposição ao deslocamento, resultando em uma diminuição da energia mecânica. Calculemos esta quantidade, associada ao percurso de

subida da bola. Neste caso, a variação da energia cinética vale  $-\frac{1}{2}mv_0^2$ , já que a energia cinética no ponto mais alto é nula. A variação da energia potencial gravitacional vale  $mgh$ , onde  $h$  é a altura máxima atingida. Assim, o trabalho realizado pela atmosfera sobre a bola, em sua subida, é dado pela expressão  $W_{nc} = mgh - \frac{1}{2}mv_0^2$ . Determine este valor, no caso da animação. O trabalho realizado pela bola contra a resistência do ar é de mesma intensidade que o realizado pela atmosfera, mas positivo, por ser realizado por uma força oposta à da resistência do ar, com o sentido do deslocamento — a força de resistência do ar sobre a bola e a força exercida pela bola contra a resistência do ar constituem um par ação-reação.

## POTÊNCIA

Abra o arquivo `w_tempo.mdl`. Em seu cenário, dois blocos iguais, de massa  $m$ , são levantados de uma mesma altura  $h$ , por duas empilhadeiras. Uma delas desempenha a tarefa mais rapidamente que a outra. Ambas realizam o mesmo trabalho:  $mgh$ . No entanto, você pode dizer que uma das empilhadeiras é mais “eficiente” que a outra. Uma grandeza importante é aquela que mede a rapidez com que o trabalho é realizado sobre um sistema. A essa grandeza, damos o nome de potência. Define-se a potência instantânea desenvolvida por uma força  $\vec{F}$  como sendo medida por

$$P \equiv \frac{dW}{dt}, \quad (\text{V.25})$$

a taxa (temporal) com que a força realiza trabalho. Levando em conta a equação (V.5), podemos escrever que

$$P = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt}.$$

Reconhecendo em  $d\vec{s}/dt$  a expressão da velocidade,  $\vec{v}$ , fica:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (\text{V.26})$$

Portanto, a potência instantânea desenvolvida por uma força exercida sobre um sistema, em um dado instante, é dada pelo produto escalar da força pela velocidade do sistema, no instante considerado. Abra o arquivo `potencia.mdl`, em cujo cenário você pode alterar a direção que

uma força forma com o deslocamento do móvel, e ver como isso se reflete na determinação da potência instantânea.

No Sistema Internacional, a unidade de potência é o watt (W):

$$1 \text{ W} \equiv 1 \frac{\text{J}}{1 \text{ s}} .$$

Em Engenharia Mecânica, é muito utilizada a unidade cavalo-vapor (cv):

$$1 \text{ cv} \equiv 735,5 \text{ W} .$$

## POTÊNCIA MÉDIA

Podemos, também, trabalhar com a potência média, definida como sendo a quantidade de trabalho realizado, por intervalo de tempo:

$$\bar{P} \equiv \frac{\text{trabalho realizado pela força}}{\text{intervalo de tempo}}$$

Em particular, a força resultante sobre uma partícula desenvolve, em um intervalo de tempo  $\Delta t$ , uma potência média

$$\bar{P} = \frac{\Delta K}{\Delta t} ,$$

já que o trabalho que ela realiza é a variação da energia cinética da partícula, no intervalo de tempo (equação (V.10)).

Abra o arquivo `ex_5_04.mdl`, cujo cenário mostra três situações distintas, em que uma caixa é puxada a partir do repouso, por uma força horizontal. Além da força aplicada pelo laboratorista, são indicados o peso, a força normal e as forças de atrito (estático e cinético). Veja, em cada caso, os gráficos da potência instantânea desenvolvida pela força aplicada e pelo atrito, ao longo do tempo. Inicialmente, enquanto não se produz deslocamento, nenhuma força trabalha - potência nula. Nos três casos apresentados, após o início do movimento

(substituição da força de atrito estático pela de atrito cinético), a força aplicada ainda continua aumentando de intensidade, até o momento em que: no primeiro caso (tecla preta), passa a ter um módulo constante; no segundo caso (tecla verde), sofre uma redução em módulo, passando a ter a mesma intensidade da força de atrito cinético; no terceiro caso (tecla rosa), deixa de existir (rompimento do fio). Assim, no primeiro caso, a caixa em movimento está sempre acelerada para a direita; no segundo caso, ela atinge equilíbrio (velocidade constante); no terceiro caso, ela é levada ao repouso, quando acelerada para a esquerda pela força de atrito cinético. A força de atrito cinético, sendo oposta ao deslocamento, trabalha negativamente nos três casos.

## EXERCÍCIOS DA QUINTA UNIDADE

- 1) Responda às questões propostas nos dois casos do cenário do arquivo `w_ec2.mdl`.
- 2) Resolva a questão proposta no cenário do arquivo `cons_en1.mdl`.
- 3) Resolva a questão proposta no cenário do arquivo `cons_en2.mdl`.
- 4) Resolva a questão proposta no cenário do arquivo `cons_en3.mdl`.
- 5) Resolva a questão proposta no cenário do arquivo `cons_en4.mdl`.
- 6) Responda às questões propostas no cenário do arquivo `cons_en5.mdl`.
- 7) Responda às questões propostas no cenário do arquivo `fc_pot2.mdl`.
- 8) Resolva a questão proposta no cenário do arquivo `diss_ar2.mdl`.
- 9) Responda às questões propostas no cenário do arquivo `diss_atr.mdl`.
- 10) Abra o arquivo `en_mec.mdl`, em cujo cenário uma bola, de massa 1 kg, é largada em queda vertical, em dois casos distintos. O eixo dos  $y$  aponta para cima, e o nível zero de energia potencial gravitacional é escolhido no ponto  $y_0 = 0$ . As janelas Modelo e Condições Iniciais estão abertas.
  - a) No caso preto, não existe resistência do ar. Calcule a energia potencial, a energia cinética, e a energia mecânica da bola, no ponto de onde ela é largada ( $y_1 = 70$  m) e no ponto  $y_2 = 25$  m, e confira com os dados na tela.
  - b) No caso verde, a bola é largada em um meio resistivo. Obtenha a energia potencial, a energia cinética, e a energia mecânica da bola, no ponto de onde ela é largada ( $y_1 = 70$  m) e, com os dados da tela, no ponto  $y_3 = 35$  m. Calcule, para a queda de  $y_1$  até  $y_3$ , a quantidade de

energia dissipada, o trabalho realizado pela atmosfera sobre a bola, e o trabalho realizado pela bola para vencer a resistência do ar.

11) O cenário do arquivo pot\_harm.mdl mostra um sistema massa-mola, onde a extremidade livre da mola, quando frouxa, coincide com a posição  $x_0 = 0$ . Responda às questões formuladas.

## SEXTA UNIDADE: O MOMENTUM LINEAR E SUA CONSERVAÇÃO

### COLISÕES

O centroavante chuta a bola que está sobre a marca do pênalti. A bola adquire uma velocidade, para a frente. O que aconteceu, neste curto espaço de tempo? O chute sobre a bola é um exemplo de colisão, um dos objetos de estudo mais comuns na Física. Pode-se dizer que muito do que se faz em Física é estudar colisões. Uma experiência de espalhamento entre partículas elementares é um estudo de colisão. Uma pedra que cai, sob a ação da atração gravitacional terrestre, é um exemplo de colisão (pedra-Terra). Se não existisse o espalhamento (colisão) de partículas com algum instrumento de medida — por exemplo, fótons espalhados na retina do observador — não se poderia retirar dados de uma experiência no laboratório. Esta Unidade é dedicada essencialmente ao tratamento clássico das colisões.

### MOMENTUM LINEAR

Comecemos por introduzir um novo conceito: o de momentum linear. Seja uma partícula de massa  $m$  dotada, em um certo instante, da velocidade  $\vec{v}$ . Diz-se, então, que neste instante de tempo a partícula possui o momentum linear  $\vec{p}$  dado pela expressão:

$$\vec{p} \equiv m \vec{v} . \quad (\text{VI.1})$$

O momentum linear de uma partícula, portanto, é um vetor com a mesma orientação da velocidade da partícula, e com módulo igual ao produto da massa pelo módulo da velocidade. No Sistema Internacional de unidades, a unidade do momentum linear é o kg.m/s, sem nome especial a caracterizá-la. O momentum linear (plural: momenta lineares) também é denominado quantidade de movimento linear. Com esta definição, a segunda lei de Newton para uma partícula pode ser escrita na forma

$$\vec{F}_{\text{res}} = \frac{d\vec{p}}{dt} . \quad (\text{VI.2})$$

Realmente, a equação (VI.2) se reduz à equação (IV.1), se a massa da partícula é uma constante:

$$\vec{F}_{\text{res}} = \frac{d}{dt} (m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{a} .$$

Quando o móvel tem massa variável vale a equação (VI.2), por ser mais geral.

## IMPULSO

O chute do centroavante, então, imprimiu um momentum linear à bola, em um curto intervalo de tempo. A variação de momentum linear sofrida por um móvel é chamada de impulso. Se a bola estava inicialmente em repouso, o impulso que ela sofreu, por consequência do chute, coincide com o momentum linear adquirido. Chamando o impulso de  $\vec{I}$ , a equação (VI.2) nos permite concluir que

$$\vec{I} \equiv \Delta\vec{p} = \int_i^f d\vec{p} = \int_i^f \vec{F}_{\text{res}} dt , \quad (\text{VI.3})$$

onde a integração é realizada entre o início (i) e o final (f) da colisão: o impulso sofrido pela partícula em uma colisão é o resultado da integral da força resultante exercida sobre ela, ao longo do intervalo de tempo que dura a colisão.

O cenário do arquivo impulso.mdl mostra o gráfico da força resultante sobre uma partícula inicialmente em repouso, como função do tempo (unidades SI). Ao mesmo tempo em que este gráfico é traçado, também vai sendo traçado o gráfico do impulso sofrido pela partícula, desde o instante inicial. A animação apresenta dois casos. No primeiro caso (tecla preta), a força resultante está presente durante um intervalo de tempo maior do que no segundo caso (tecla verde), mas os dois casos são tais que a integral no tempo da força resultante é a mesma, implicando no mesmo impulso final. No caso verde, a curva representando a força apresenta um pico muito mais alto e estreito do que no caso preto, já que a área sob a curva (integral) é a mesma. O impulso sofrido pela partícula equivale, numericamente, à área sob a curva força resultante versus tempo. Quando uma força é exercida durante um intervalo de tempo muito pequeno, em comparação com os tempos característicos do sistema, ela é



chamada de força impulsiva. Com seu chute, o centroavante exerce uma força impulsiva sobre a bola, durante um intervalo de tempo muito pequeno, em comparação com o tempo que a bola levará para descrever sua trajetória no ar, por exemplo.

## FORÇAS IMPULSIVAS

Normalmente, uma força impulsiva assume intensidades tão maiores que as demais forças exercidas sobre o móvel, que ela pode ser tratada, enquanto presente, como única, ou seja, como a força resultante, cuja integral temporal fornece o impulso. O peso da bola chutada pelo centroavante, por exemplo, não é relevante no cálculo do momentum linear que ela adquire imediatamente após chutada.

Muitas vezes, fica difícil a determinação do perfil de uma força impulsiva, em função do tempo, caso em que se trabalha com uma constante, o valor médio da força. A integral da força média deve coincidir com a integral da própria força, ao longo do mesmo intervalo de tempo. Tratamento semelhante, para a velocidade média, foi feito na Primeira Unidade. Como a integral temporal da força é o impulso, então é usual substituir-se uma força impulsiva pelo valor médio

$$\bar{F}_m = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}, \quad (\text{VI.4})$$

onde  $\Delta t$  é o intervalo de tempo de aplicação da força.

O cenário do arquivo muro.mdl mostra uma bola de ping-pong sendo lançada, horizontalmente, sobre o muro em que é rebatida, retornando na mesma direção. Qual a força impulsiva média exercida sobre a bola, em sua interação com o muro? Estamos, aqui, desprezando a ação da gravidade sobre a bola, nos instantes imediatamente antes e imediatamente após a colisão; daí, traçamos sua trajetória como horizontal. O momentum linear inicial da bola,  $\vec{p}_i$ , é mostrado na animação. Também, são mostrados seu momentum linear final,  $\vec{p}_f$ , e a variação do momentum linear (impulso),  $\Delta \vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$ . É razoável supor que as velocidades imediatamente antes e imediatamente depois do choque são de mesma intensidade,  $v$ . Neste caso, os momenta incidente e emergente têm o mesmo módulo,  $p=mv$ , onde  $m$  é a massa da bola. Escolhendo o eixo dos  $xx$  apontando para a esquerda, na

animação, o impulso é um vetor apontando no sentido do referencial, de módulo  $\Delta p = 2mv$ . Assim, a força média impulsiva da parede sobre a bola de ping-pong aponta para a esquerda, e é de módulo

$$F_m = \frac{2mv}{\Delta t}.$$

Se a bola de ping-pong tem a massa  $m = 10 \text{ g}$ , e colide com o muro a uma velocidade  $v = 5 \text{ m/s}$ , permanecendo em contato com este durante o intervalo de tempo  $\Delta t = 10^{-3} \text{ s}$ , então a força média tem módulo  $F_m = 100 \text{ N}$ . Compare este valor com o módulo do próprio peso da bola,  $P = mg = 10^{-1} \text{ N}$ , e fica claro por que podemos desprezar o peso, durante o choque.

## CENTRO DE MASSA

Temos confundido, até agora, nossos sistemas com pontos materiais, partículas. No entanto, muitas vezes somos levados a lidar com sistemas constituídos de muitas partículas, ou de um contínuo de matéria com um certo volume, não restrito a um único ponto. Uma caixa contendo um dado gás, por exemplo, é um sistema de muitas partículas (da ordem de  $10^{23}$ ), cada uma com seu próprio movimento; o globo terrestre, no que diz respeito à sua interação gravitacional com a Lua, pode ser visto como um ponto localizado em seu centro, tendo como massa a massa da Terra, mas em outras circunstâncias deve ser visto de forma mais realística, com a massa distribuída esfericamente. Torna-se útil, portanto, um conceito que passamos a apresentar, o de centro de massa de um sistema.

Começemos pelo caso mais simples, o de um sistema binário, constituído de duas partículas localizadas sobre o eixo dos  $xx$ . Chamemos de  $x_1$  a posição da partícula de massa  $m_1$ , e de  $x_2$  a posição da partícula de massa  $m_2$ . Define-se o centro de massa deste sistema como sendo o ponto localizado na posição dada pela relação

$$x_{CM} \equiv \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \quad (\text{VI.5 a})$$

o que significa que o centro de massa está localizado entre as duas partículas, na reta que as liga, em uma posição mais próxima da partícula mais massiva. Se as duas partículas têm a

mesma massa, o centro de massa do sistema binário está exatamente a meio caminho entre as duas partículas. Se, de forma mais geral, estivermos trabalhando no referencial cartesiano x-y-z, então valem expressões análogas para as direções y e z:

$$y_{\text{CM}} \equiv \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}, \quad (\text{VI.5 b})$$

$$z_{\text{CM}} \equiv \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2}. \quad (\text{VI.5 c})$$

As três relações acima expressam as projeções nas direções coordenadas da expressão vetorial

$$\vec{r}_{\text{CM}} \equiv \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad (\text{VI.5})$$

definição do vetor posição do centro de massa de um sistema binário constituído pelas partículas de massas  $m_1$  e  $m_2$ , localizadas respectivamente nas posições  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$ .

Derivando-se em relação ao tempo a expressão (VI.5), obtém-se a velocidade do centro de massa do sistema binário:

$$\vec{v}_{\text{CM}} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}, \quad (\text{VI.6})$$

onde  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  são as velocidades respectivas das partículas de massas  $m_1$  e  $m_2$ .

Analogamente, para a aceleração:

$$\vec{a}_{\text{CM}} = \frac{m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2}{m_1 + m_2}. \quad (\text{VI.7})$$

Abra o arquivo cm1.mdl, em cujo cenário duas partículas, de massas conhecidas, se deslocam no plano, as componentes x e y dos vetores posição sendo informadas à medida que o movimento ocorre. Assim, é possível, com o uso da equação (VI.5) (neste caso, mais propriamente as equações (VI.5 a,b)), determinar a posição do centro de massa do sistema em

qualquer instante de tempo. Os dados na tela permitem, também, determinar a velocidade de cada partícula, e verificar que elas são constantes ao longo do movimento. Então, com a equação (VI.6) pode-se determinar a velocidade do centro de massa em qualquer momento, que será uma constante de movimento. Realmente, pela equação (VI.7), a aceleração do centro de massa é nula, já que são nulas as acelerações das duas partículas.

Generalizando, para um sistema de  $N$  partículas de massas  $m_1, m_2, \dots, m_N$ , posição, velocidade e aceleração do centro de massa, em um instante qualquer, são respectivamente dados por

$$M \vec{r}_{CM} \equiv \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i, \quad (\text{VI.8})$$

$$M \vec{v}_{CM} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i, \quad (\text{VI.9})$$

$$M \vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i, \quad (\text{VI.10})$$

onde  $M = m_1 + m_2 + \dots + m_N = \sum_{i=1}^N m_i$  é a massa total do sistema.

### FORÇAS INTERNAS NÃO PERTURBAM O CENTRO DE MASSA

Na equação (VI.10), o  $i$ -ésimo termo da direita,  $m_i \vec{a}_i$ , representa a força resultante sobre a  $i$ -ésima partícula. Logo, o lado direito da equação equivale à soma das forças resultantes sobre todas as partículas que formam o sistema. Abra o arquivo `cm_fres1.mdl`, em cujo cenário você pode visualizar o fato de que esta soma se reduz à resultante unicamente das forças externas exercidas sobre o sistema, pois as forças internas (forças de interação entre partículas do sistema) se anulam duas a duas, devido à terceira lei de Newton. A equação (VI.10), portanto, pode ser reescrita na forma

$$\vec{F}_{\text{ext}}^{\text{res}} = M \vec{a}_{CM}, \quad (\text{VI.11})$$

evidenciando que a força externa resultante sobre um sistema é igual à massa total do sistema multiplicada pela aceleração de seu centro de massa. Isto significa que o centro de massa é o ponto notável que se comporta como se toda a massa do sistema estivesse nele concentrada, e como se todas as forças externas aplicadas sobre o sistema nele fossem exercidas.

O cenário do arquivo `cm_col1.mdl` mostra duas partículas colidindo. Veja que o centro de massa deste sistema binário tem um movimento que não é alterado pela colisão: o movimento do centro de massa do sistema não é afetado pela interação entre as partículas que o constituem. Rode a animação do arquivo `cm_col2.mdl` e responda à questão formulada. Observe aqui, também, o movimento inalterado do centro de massa.

No cenário do arquivo `cm2.mdl` é mostrado um sistema binário com centro de massa acelerado. Neste caso, o que você pode afirmar sobre a força externa resultante sobre o sistema?

## DO DISCRETO PARA O CONTÍNUO

Se o sistema é uma distribuição contínua de massa (e não discreta, como considerado até agora), o tratamento é o mesmo, devendo-se apenas, na definição do centro de massa, fazer a substituição do somatório (sobre todas as partículas) por uma integral (sobre todo o volume do sistema). Assim, a equação (VI.8) passa a ser escrita como:

$$M \vec{r}_{CM} \equiv \int_V \vec{r} \, dm \quad , \quad (VI.12)$$

onde  $M = \int_V dm$  é a massa total do sistema. Na integral (tridimensional),  $dm$  é o elemento infinitesimal de massa localizado na posição  $\vec{r}$ . A equação (VI.11) continua valendo, isto é, o centro de massa tem a característica de ser o ponto que se desloca segundo uma lei de movimento do tipo segunda lei de Newton, onde a massa é a massa total do sistema, e a força resultante é a soma das forças externas exercidas sobre o sistema.

A determinação do centro de massa de uma distribuição contínua de massa, envolvendo cálculo integral em três dimensões, não é tema sobre o qual nos deteremos. Na disciplina de Cálculo, isto é geralmente tema de exemplos e exercícios. Basta que mencionemos a utilidade

de aproveitarmos as simetrias do sistema. Uma esfera homogênea, por exemplo, tem o centro de massa localizado em seu centro geométrico: a cada partícula da esfera corresponde outra partícula com a qual forma um sistema binário que tem como centro de massa o centro da esfera. Um pneu homogêneo também tem o centro de massa localizado em seu centro; neste caso, o centro de massa está localizado em um ponto onde não existe nenhuma massa.

Abra o arquivo `ex_6_01.mdl`. O cenário deste arquivo mostra um haltere, objeto com uma simetria que permite determinar claramente a localização do centro de massa: em seu centro geométrico. Inicialmente em repouso sobre uma superfície plana horizontal sem atrito, o haltere recebe a aplicação de uma força impulsiva, em uma de suas extremidades, e seu centro de massa adquire uma velocidade que se mantém constante já que, após o início do movimento, é nula a força externa resultante (ver equação (VI.11)).

No cenário do arquivo `ex_6_02.mdl`, o haltere é lançado da origem do referencial x-y, sujeito à atração gravitacional na direção y. Neste caso, na equação (VI.11)  $M$  representa a massa do haltere e  $\vec{F}_{\text{ext res}}$  representa seu peso, de forma que o centro de massa descreve a trajetória parabólica que o sistema descreveria, se fosse uma partícula com a mesma massa do haltere, lançada com a mesma velocidade inicial.

## CONSERVAÇÃO DO MOMENTUM LINEAR

Voltemos à equação (VI.9), que relaciona a velocidade do centro de massa de um sistema de  $N$  partículas com suas  $N$  velocidades individuais. Esta equação pode ser escrita, também, na forma

$$M \vec{v}_{\text{CM}} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i, \quad (\text{VI.13})$$

onde  $\vec{p}_i$  é o momentum linear da  $i$ -ésima partícula. Então, o lado direito da equação (VI.13) equivale à soma dos  $N$  momenta lineares das partículas, ou seja, ao momentum linear total do sistema, que passamos a denotar por  $\vec{p}$  (temos certeza que você não irá confundir esta notação com a força peso):

$$M \vec{v}_{CM} = \vec{P} . \quad (\text{VI.14})$$

Esta equação relaciona o momentum linear total do sistema com a velocidade de seu centro de massa. Ela é válida também para uma distribuição contínua de matéria, caso em que os somatórios sobre as distribuições discretas devem ser substituídos por integrais de volume.

Podemos escrever a força resultante sobre o sistema como a soma das forças resultantes sobre todas as partículas que o constituem e, usando a equação (VI.2), tem-se:

$$\vec{F}_{res} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{res\ i} = \sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i .$$

Lembrando que a força resultante sobre o sistema se reduz à soma das forças externas sobre ele aplicadas, e como o somatório da direita expressa o momentum linear total, concluímos que

$$\vec{F}_{res\ ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} , \quad (\text{VI.15})$$

equação (também válida para uma distribuição contínua de matéria) que expressa a generalização, para um sistema qualquer, da equação (VI.2), escrita para uma partícula. Esta é a segunda lei de Newton em sua forma mais geral: a força externa resultante sobre um sistema é a medida da variação temporal de seu momentum linear total.

No caso de um sistema de massa total constante, derivando-se a equação (VI.14) em relação ao tempo, tem-se:

$$M \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt} ,$$

ou seja:

$$M \vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{P}}{dt} , \quad (\text{VI.16})$$

que, combinada com a equação (VI.15), nos remete à equação (VI.11):

$$\vec{F}_{\text{ext}} = M \vec{a}_{\text{CM}} \quad \text{res}$$

Decorre, da equação (VI.15), que quando a força externa resultante sobre um sistema é nula, seu momentum linear total deve permanecer constante. Esta é a expressão da conservação do momentum linear. Na Quinta Unidade, trabalhamos a conservação da energia mecânica; agora, introduzimos uma nova lei de conservação, segundo a qual o momentum linear total de um sistema isolado (ou seja, um sistema sobre o qual não há ação externa efetiva) é uma constante de movimento. Para um sistema de massa total constante, se a força externa resultante é nula, a conservação do momentum linear total implica na constância da velocidade do centro de massa (aceleração do centro de massa nula), como em alguns exemplos já tratados.

#### ALGUNS EXEMPLOS

Veja o cenário do arquivo `mola_cm1.mdl` onde dois blocos, ligados por uma mola, deslocam-se sobre uma superfície horizontal. Observe o movimento do centro de massa nos dois casos apresentados, para concluir que, no primeiro deles (tecla preta), não existe força externa resultante sobre o sistema, enquanto que no segundo (tecla verde), obviamente existe uma resultante não nula.

No cenário do arquivo `ex_6_03.mdl`, um soldado está sobre uma plataforma que pode deslizar sem atrito, sobre o solo. O soldado dá um tiro para a direita, e o conjunto soldado+plataforma recua para a esquerda. A massa do projétil é 20 g, enquanto que soldado e plataforma têm uma massa total de 100 kg. O projétil é disparado com uma velocidade de 100 m/s, em relação ao rifle. Qual a velocidade de recuo? Não havendo atrito entre plataforma e solo, a força externa resultante sobre o sistema, durante o tiro, é nula. Depois, o peso do projétil não mais poderá interferir sobre o recuo do soldado. Como o momentum linear total do sistema, inicialmente, é nulo, ele deverá permanecer nulo, para se manter constante. Logo,

$$\vec{P} = M \vec{V} + m (\vec{V} + \vec{v}) = 0 \quad ,$$

onde  $M$  é a massa do sistema soldado+plataforma,  $\vec{V}$  é sua velocidade de recuo,  $m$  é a



massa do projétil e  $\vec{v}$  é a velocidade deste em relação à arma. A velocidade do projétil em relação ao solo, resultante de uma transformação galileana, é  $\vec{V} + \vec{v}$ . O momentum linear que o projétil adquire para a direita deve ter o mesmo módulo do momentum linear que o sistema soldado+plataforma adquire para a esquerda, para que a soma dos dois momenta seja zero. Reescrevendo:

$$(M + m) \vec{V} = - m \vec{v} .$$

Em termos de módulos, fica:

$$(M + m) V = m v .$$

A velocidade de recuo, portanto, tem módulo  $V = mv/(M + m)$ . Determine este valor.

Abra o arquivo noel\_cm1.mdl. O cenário mostra Papai Noel correndo a uma velocidade constante para a direita, e saltando em dado momento para cima de uma plataforma que rola sem atrito sobre o chão. São conhecidas as massas do Papai Noel ( $m_{PN}$ ) e da plataforma ( $m_p$ ), as velocidades iniciais do Papai Noel e da plataforma, além da velocidade final do Papai Noel em relação à plataforma. Pede-se a velocidade final da plataforma. Escolhamos como referencial o eixo dos xx apontando para a direita. Chamemos de  $\vec{u}$  e  $\vec{U}$  as velocidades iniciais do Papai Noel e da plataforma, respectivamente, e de  $\vec{v}$  e  $\vec{V}$  suas respectivas velocidades finais, em relação ao solo. Se  $\vec{w}$  é a velocidade final do Papai Noel em relação à plataforma, então vale (relatividade galileana unidimensional):

$$\vec{v}_x = \vec{w}_x + \vec{V}_x .$$

Não havendo força resultante sobre o sistema Papai Noel + plataforma, seu momentum linear total deve se manter constante, o que é expresso da forma:

$$m_{PN} \vec{u}_x + m_p \vec{U}_x = m_{PN} \vec{v}_x + m_p \vec{V}_x .$$

Combinação dessas duas relações fornece o resultado:

$$V_x = \frac{m_{PN} (u_x - w_x) + m_p U_x}{m_{PN} + m_p} .$$

Na animação, o velocímetro mostra o módulo da velocidades da plataforma. Resolva os três casos, e confira seus resultados com a indicação do velocímetro. Determine, também, a velocidade final do Papai Noel em relação ao solo e as velocidades inicial e final do centro de massa do sistema, nos três casos. Altere dados na janela Condições Iniciais (unidades SI), criando outras situações.

Este exemplo pode ser visto como uma colisão entre Papai Noel e plataforma. Em uma colisão, existe conservação do momentum linear total do sistema constituído por todos os participantes do processo, pois as forças de interação entre eles — forças internas — não contribuem para alterar a velocidade do centro de massa.

## CHOQUES ELÁSTICOS

Quando, em uma colisão, a energia cinética total do sistema (soma das energias cinéticas dos constituintes do sistema) se mantém constante, o choque é dito elástico. (Os termos colisão e choque são igualmente utilizados.) Muitas colisões podem ser consideradas elásticas. Uma bola de ping-pong que rebate em uma parede é um exemplo.

O cenário do arquivo col\_el\_1.mdl ilustra uma colisão elástica unidimensional entre duas partículas de mesma massa ( $m$ ). Uma delas (partícula 1), passamos a chamar de projétil; a outra (partícula 2), de alvo. Nos três casos apresentados, o projétil incide da esquerda para a direita. Escolhemos, então, este sentido para o eixo referencial. No que segue, as letras  $u$  e  $v$  denotam velocidades antes e depois do choque, respectivamente. Conhecidas as velocidades iniciais, quais são as velocidades finais?

A força externa resultante sobre o sistema de duas partículas é nula, de forma que o momentum linear total se conserva:

$$m u_{1x} + m u_{2x} = m v_{1x} + m v_{2x} \quad \Rightarrow \quad u_{1x} - v_{1x} = v_{2x} - u_{2x} . \quad (\text{VI.17})$$

O choque sendo elástico, vale:

$$\frac{1}{2} m u_{1x}^2 + \frac{1}{2} m u_{2x}^2 = \frac{1}{2} m v_{1x}^2 + \frac{1}{2} m v_{2x}^2 \quad \Rightarrow \quad u_{1x}^2 - v_{1x}^2 = v_{2x}^2 - u_{2x}^2 ,$$

expressão que pode ser escrita como

$$(u_{1x} + v_{1x})(u_{1x} - v_{1x}) = (v_{2x} + u_{2x})(v_{2x} - u_{2x}) . \quad (\text{VI.18})$$

Dividindo a equação (VI.18) pela equação (VI.17), fica:

$$u_{1x} + v_{1x} = u_{2x} + v_{2x} . \quad (\text{VI.19})$$

No caso particular em que  $v_{1x} = u_{1x}$  e  $v_{2x} = u_{2x}$ , a divisão efetuada para se chegar à equação (VI.19) não seria permitida, pois seria uma divisão por zero. Mas este caso não nos interessa, já que representa a solução trivial (que corresponde à situação antes da colisão).

As equações (VI.17) e (VI.19) formam um sistema de duas equações lineares de duas incógnitas, com solução:

$$v_{1x} = u_{2x}$$

$$v_{2x} = u_{1x}$$

Assim, com a colisão, a partícula-projétil emerge com a velocidade inicial da partícula-alvo, enquanto esta passa a ter a velocidade inicial do projétil. Como as massas das partículas são iguais, elas também trocam de momentum linear.

Em situação um pouco mais geral, quando as partículas têm massas diferentes, conservação da energia cinética total e do momentum linear total do sistema, em passos análogos aos que levam da equação (VI.17) à equação (VI.19), permitem chegar às seguintes expressões para as velocidades finais das partículas:

$$v_{1x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_{1x} + \frac{2 m_2}{m_1 + m_2} u_{2x} , \quad (\text{VI.20 a})$$

$$v_{2x} = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} u_{1x} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} u_{2x} , \quad (\text{VI.20 b})$$

onde  $m_1$  e  $m_2$  são as massas do projétil e do alvo, respectivamente.

## REFERENCIAL DO CENTRO DE MASSA

Muitas vezes, é interessante observar uma colisão do ponto de vista de um referencial muito especial: o referencial do centro de massa do sistema. Este é o referencial onde o centro de massa permanece em repouso, durante todo o processo. Assim, denotando por  $\vec{u}'$  e  $\vec{v}'$  as respectivas velocidades inicial e final de uma partícula, conforme vistas do referencial do centro de massa, podemos realizar a transformação galileana

$$\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}_{\text{CM}} , \quad (\text{VI.21 a})$$

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_{\text{CM}} , \quad (\text{VI.21 b})$$

onde  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são as respectivas velocidades inicial e final no referencial do laboratório em que a colisão ocorreu e  $\vec{v}_{\text{CM}}$  indica a velocidade do centro de massa neste mesmo referencial.

Um exemplo de mudança de referencial no estudo de uma colisão elástica unidimensional é o do cenário do arquivo `cm_lab_1.mdl`. A partícula de massa  $m_1 = 3 \text{ kg}$  incide sobre a de massa  $m_2 = 1 \text{ kg}$ , com a velocidade  $u_{1x} = 20 \text{ m/s}$ . O alvo, inicialmente, tem a velocidade  $u_{2x} = -10 \text{ m/s}$  (movimento da direita para a esquerda). Com o uso da equação (VI.6), você pode chegar à velocidade do centro de massa do par de partículas:

$$v_{\text{CMx}} = \frac{m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x}}{m_1 + m_2} = 12,5 \text{ m/s} ,$$

valor que se mantém constante durante a colisão. Assim, no referencial do centro de massa, pela equação (VI.21 a):

$$u'_{1x} = u_{1x} - v_{CMx} = 7,5 \text{ m/s} ,$$

$$u'_{2x} = u_{2x} - v_{CMx} = -22,5 \text{ m/s} .$$

As velocidades após o choque são determinadas a partir das equações (VI.20 a,b):

$$v_{1x} = 5 \text{ m/s}, \quad v_{2x} = 35 \text{ m/s} .$$

E, realizando a transformação galileana (VI.21 b):

$$v'_{1x} = -7,5 \text{ m/s}, \quad v'_{2x} = 22,5 \text{ m/s} .$$

Veja, na animação, os momenta lineares durante a colisão. Na janela Condições Iniciais, você pode criar situações diferentes.

## COLISÕES PERFEITAMENTE INELÁSTICAS

Abra o arquivo col\_in\_1.mdl. O cenário mostra um exemplo de colisão perfeitamente inelástica. Entende-se por isto uma colisão onde as partículas se unem de modo a ter-se um único móvel, após o choque. Nesta animação, a colisão é unidimensional. Em colisões inelásticas, não há conservação da energia cinética. A análise do problema, portanto, deve ser feita unicamente a partir da conservação do momentum linear total do sistema que, neste caso unidimensional, se escreve como:

$$m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x} = (m_1 + m_2) v_x ,$$

onde  $v_x$  é a velocidade do sistema, após a colisão. Determine, nos três casos da animação, a velocidade final do sistema. Os dados da janela Condições Iniciais estão no SI.

## O EXEMPLO CLÁSSICO DA EXPLOSÃO

Abra o arquivo explosao.mdl, em cujo cenário é mostrada a explosão de um objeto que se parte em três fragmentos, que passam a se deslocar em um mesmo plano, sem atrito. Como, inicialmente, o objeto estava em repouso, seu centro de massa permanecerá em repouso durante o processo de fragmentação. Logo,  $\vec{p} = 0$  também após a explosão, o que, em termos

das velocidades  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  e  $\vec{v}_3$ , com que emergem os fragmentos de massas  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$ , se expressa na forma

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} + m_3 v_{3x} = 0 ,$$

$$m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} + m_3 v_{3y} = 0 .$$

Utilize estas relações para determinar, nos dois casos, a velocidade (módulo e ângulo que forma com o eixo dos xx) do fragmento que, na animação, emerge para baixo.

## JOGO DE BILHAR

O cenário do arquivo col\_el\_3.mdl mostra uma colisão elástica bidimensional entre duas bolas iguais (como em um jogo de bilhar, por exemplo). O equacionamento do problema, portanto, lança mão da conservação do momentum linear total e da conservação da energia cinética total. A bola incidente não atinge o alvo frontalmente. A colisão seria frontal se a direção de incidência coincidissem com a direção da linha que une os centros das duas bolas, caso em que se teria um problema unidimensional. Uma expressão útil, que nos será aqui conveniente, é a que relaciona a energia cinética de uma partícula de massa  $m$  com o módulo de seu momentum linear,  $p$ :

$$K = \frac{p^2}{2m} , \quad (\text{VI.22})$$

fácil de provar lembrando que  $p=mv$ , onde  $v$  é o módulo de sua velocidade. Sejam  $\vec{p}_0$  o momentum linear inicial do projétil,  $\vec{p}_1$  o seu momentum linear emergente, e  $\vec{p}_2$  o momentum linear emergente do alvo. A conservação do momentum linear total do sistema se expressa como:

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 . \quad (\text{VI.23})$$

A conservação da energia cinética total pode ser escrita, com o auxílio da equação (VI.22), na forma:

$$p_0^2 = p_1^2 + p_2^2, \quad (\text{VI.24})$$

onde foi usado o fato de serem iguais as massas das duas bolas.

Elevando ao quadrado a equação (VI.23), — lembre-se de que elevar um vetor ao quadrado equivale a multiplicá-lo escalarmente por si mesmo — temos:

$$\vec{p}_0 \cdot \vec{p}_0 = (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \cdot (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \quad \Rightarrow \quad p_0^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2 \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2. \quad (\text{VI.25})$$

Comparando as equações (VI.24) e (VI.25), vemos que ambas só podem ser válidas simultaneamente se o terceiro termo da última equação for nulo. Logo,  $\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = p_1 p_2 \cos \phi = 0$ , onde  $\phi$  é o menor ângulo definido pelos momenta lineares emergentes. Isto significa que  $\phi = \pi/2$ , ou seja, as duas bolas seguem, após o choque, em direções perpendiculares. Portanto, em um choque elástico bidimensional entre partículas de mesma massa, o alvo estando inicialmente em repouso, a emergência se dá a noventa graus.

Este é um exemplo de um problema com quatro incógnitas: as duas componentes de cada um dos momenta lineares emergentes, por exemplo (ou os módulos dos momenta emergentes e os ângulos que eles formam com uma dada direção). Logo, só existe solução única se dispomos de quatro equações. A conservação do momentum linear (equação (VI.23)), sendo uma igualdade vetorial no plano, representa duas equações — suas projeções nas direções x e y. A conservação de energia (equação (VI.24)) é mais uma equação. Logo, são três as equações, número insuficiente para que se chegue a uma solução única. A quarta informação, necessária para se determinar uma solução única, pode ser obtida de uma quantidade geométrica, o chamado parâmetro de impacto. Veja, na animação, que alterando o ângulo de emergência da bola-alvo, você altera a configuração do problema, mantendo perpendiculares as direções finais. Esta alteração equivale a aproximar, ou afastar, a direção de incidência do centro do alvo. A figura 14 mostra, esquematicamente, o parâmetro de impacto —  $b$  — da colisão bidimensional entre bolas de mesmo diâmetro. O valor de  $b$  é a distância do centro da bola-alvo (bola 2) à direção de incidência da bola-projétil (bola 1). Se  $R$  é o raio de cada bola, então só ocorrerá colisão se  $0 \leq b \leq 2R$ .

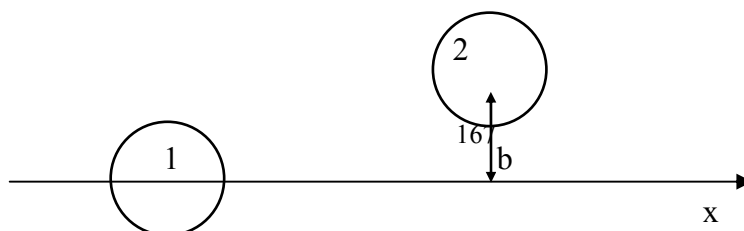
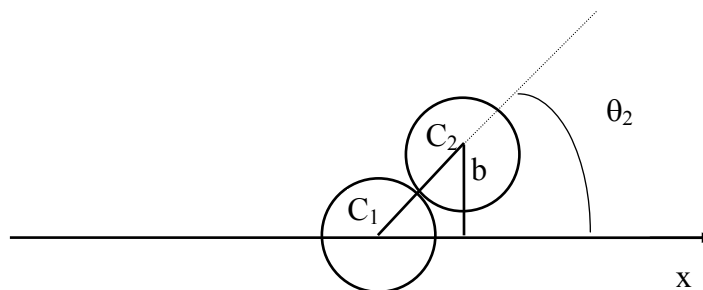


Figura 14 — Parâmetro de impacto:  $b$ .

Abra o arquivo `col_el_4.mdl`. Neste cenário, visualiza-se a colisão elástica bidimensional de duas bolas de mesmo tamanho, mas de massas não necessariamente iguais, com o alvo inicialmente em repouso. A cada vez que se roda a animação, um novo parâmetro de impacto  $b$  é escolhido pelo programa e seu valor, em unidades de  $R$  (raio de cada bola), é indicado na tela. Qual o ângulo de emergência da bola-alvo, em relação à direção de incidência (eixo dos  $xx$ )? A determinação deste ângulo ( $\theta_2$ ) é muito simples, se observarmos a figura 15, que mostra as posições dos centros do projétil ( $C_1$ ) e do alvo ( $C_2$ ), no instante em que ambos se tocam.

Figura 15 — Ângulo de emergência do alvo:  $\theta_2$ .

Neste instante, a distância entre os centros é igual a  $2R$ , de forma que vale:

$$2R \sin \theta_2 = b \quad \Rightarrow \quad \theta_2 = \arcsin \frac{b}{2R} . \quad (\text{VI.26})$$

Veja que este é um resultado puramente geométrico, não dependendo nem da velocidade de incidência do projétil, nem das massas das duas bolas.

O cenário do arquivo `cm_lab_3.mdl` mostra uma colisão elástica bidimensional entre duas



bolas de mesma massa, vista de dois referenciais notáveis: o referencial do laboratório e o referencial do centro de massa do sistema. A animação mostra as relações entre as velocidades das bolas, depois do choque, nos dois referenciais, respeitando a equação (VI.21 b). É ilustrada, também, a conservação do momentum linear total, nos dois referenciais.

Se, em um problema de colisão entre duas partículas, nenhuma delas se encontra inicialmente em repouso, uma transformação de coordenadas (galileana) pode transportar o problema para o referencial onde o alvo está em repouso. Uma vez encontrada a solução (velocidades finais, por exemplo), esta pode sofrer a transformação inversa que leva de volta ao referencial original. Assim, não existe nenhuma perda de generalidade em se apresentar a solução deste tipo de problema supondo o alvo inicialmente em repouso.



## EXERCÍCIOS DA SEXTA UNIDADE

- 1) Resolva a questão proposta no cenário do arquivo cm3.mdl.
- 2) Responda às questões propostas no cenário do arquivo cm\_fres2.mdl, para os dois casos apresentados.
- 3) Responda às questões propostas no cenário do arquivo mola\_cm2.mdl, para os dois casos apresentados.
- 4) No cenário do arquivo noel\_cm2.mdl, Papai Noel e plataforma estão inicialmente em repouso. Considere ausência de atrito entre a plataforma e o solo, de modo a valer a conservação do momentum linear total do sistema. Assim, o centro de massa do sistema deverá se manter em repouso. Igualando as expressões da posição do centro de massa do sistema antes e após a caminhada do Papai Noel, você será capaz de resolver as questões formuladas.  
  
Dica: supondo-se homogênea a plataforma, seu centro de massa estará localizado em seu centro geométrico. Chame de  $D$  a diferença entre as posições iniciais do Papai Noel e do centro da plataforma. Você verificará que a solução independe de  $D$ .
- 5) Conclua, com base na equação (VI.19), que, em uma colisão unidimensional elástica de partículas de mesma massa, a velocidade de aproximação do alvo, em relação ao projétil, é igual à velocidade com que o projétil se afasta, em relação ao alvo.
- 6) Deduza as equações (VI.20 a,b), que expressam as velocidades finais de duas partículas que sofrem uma colisão unidimensional elástica, como função de suas massas e velocidades iniciais.
  - a) Mostre que, se a massa do alvo é muito maior que a massa do projétil ( $m_2 \gg m_1$ ), então as partículas emergem com as velocidades

$$v_{1x} \cong -u_{1x} + 2u_{2x} ,$$

$$v_{2x} \cong u_{2x} .$$

O alvo, neste caso, praticamente mantém sua velocidade, não sendo afetado pela colisão. Se o alvo está inicialmente em repouso, então ele permanece em repouso, e o projétil é rebatido no sentido oposto ao de incidência, mantendo o módulo da velocidade (exemplo: bola de ping-pong contra parede).

b) Mostre que, se a massa do alvo é muito menor que a massa do projétil ( $m_2 \ll m_1$ ), então as partículas emergem com as velocidades

$$v_{1x} \cong u_{1x} ,$$

$$v_{2x} \cong 2u_{1x} - u_{2x} .$$

Neste caso, é o projétil que mantém sua velocidade.

c) O cenário do arquivo col\_el\_2.mdl mostra a colisão unidimensional elástica entre duas partículas de massas diferentes. Calcule, para cada caso, as velocidades finais e os momenta lineares finais das partículas. Altere os dados da janela Condições Iniciais (unidades SI), para criar situações que confirmem as conclusões dos itens a) e b) acima.

7) O arquivo cm\_lab\_2.mdl mostra, em seu cenário, uma colisão unidimensional perfeitamente inelástica, vista tanto do referencial do laboratório quanto do referencial do centro de massa. Na janela Condições Iniciais são apresentadas as massas e as velocidades iniciais no referencial do laboratório (eixo apontando para a direita), em unidades SI. Determine:

a) a velocidade do centro de massa do sistema, no referencial do laboratório;

b) as velocidades das duas partículas, depois do choque, no referencial do laboratório;

c) as velocidades das duas partículas, antes e depois do choque, no referencial do centro de massa;

d) os momenta lineares das duas partículas, antes e depois do choque, no referencial do laboratório;

e) os momenta lineares das duas partículas, antes e depois do choque, no referencial do centro de massa.

8) Os três casos do cenário do arquivo col\_in\_2.mdl referem-se a colisões unidimensionais inelásticas entre dois blocos. A janela Condições Iniciais fornece, no SI, as massas dos blocos e as componentes, na direção  $x$ , de suas velocidades iniciais e da velocidade final do bloco que incide da esquerda. Determine, para cada caso:

a) a velocidade final do outro bloco;

b) o percentual de energia cinética perdida na colisão.

9) No cenário do arquivo vel\_bala.mdl, dá-se um tiro sobre um bloco preso a uma mola, que por sua vez está fixa à parede. Não existe atrito entre o bloco e o chão. São dados, na janela Condições Iniciais (unidades SI), as massas do bloco ( $m_B$ ) e da bala ( $m_b$ ), e a constante elástica da mola ( $k$ ). A bala penetra no bloco, fixando-se a ele. Assim, a colisão bala-bloco é perfeitamente inelástica.

a) Prove, utilizando conservação de momentum linear, que o módulo da velocidade do sistema bloco-bala, imediatamente após a colisão, vale:

$$V = \frac{m_b}{m_B + m_b} u ,$$

onde  $u$  é o módulo da velocidade inicial da bala.

b) Com o resultado do item a), mostre que a energia cinética do sistema, imediatamente após o choque, vale:

$$K = \frac{1}{2} \frac{m_b^2}{m_B + m_b} u^2 .$$

c) A compressão máxima da mola ocorre quando toda a energia cinética é transformada em energia potencial elástica. Prove, então, que a compressão máxima é dada pela expressão:

$$\lambda = \frac{m_b u}{\sqrt{k(m_B + m_b)}} .$$

d) Use o resultado do item c) para determinar, no caso da animação, o módulo da velocidade da bala antes do choque.

10) Resolva o problema proposto no arquivo col\_mola.mdl. Além da conservação do momentum linear total do sistema dois blocos + mola, você deverá utilizar conservação de energia mecânica (energias cinéticas dos dois blocos mais energia potencial elástica da mola).

11) O cenário do arquivo col\_in\_3.mdl mostra uma colisão bidimensional perfeitamente inelástica. A bola 1 viaja, inicialmente, no sentido do eixo dos xx, enquanto a bola 2 viaja no sentido do eixo dos yy. As componentes de suas velocidades iniciais, assim como suas massas, são dadas na janela Condições Iniciais, em unidades do SI.

a) Determine as componentes x e y da velocidade com que emerge o binário formado na colisão, o módulo desta velocidade, e o ângulo que ela forma com o eixo dos xx.

b) Qual o percentual de energia cinética perdida no encontro?

12) O cenário do arquivo col\_in\_4.mdl mostra uma colisão bidimensional inelástica. Uma bola (1) incide, no sentido do eixo dos xx, sobre outra bola (2) inicialmente em repouso. A janela Condições Iniciais informa, no SI, as duas massas e o módulo da velocidade com que emerge a bola 1, além dos dois ângulos de emergência, em graus. Estes ângulos são medidos a partir do eixo dos xx, no sentido horário para a bola 1, no sentido trigonométrico para a bola 2.

a) Determine o módulo e as componentes x e y da velocidade final da bola 2.

b) Determine a velocidade de incidência da bola 1.

c) Qual o percentual de energia cinética perdida no choque?

13) Em uma colisão unidimensional de duas partículas, define-se o coeficiente de restituição,  $\mathcal{E}$ , como a razão entre a rapidez de afastamento das partículas (imediatamente após o choque) e a rapidez de aproximação (exatamente antes do choque):

$$\mathcal{E} = \frac{|v_1 - v_2|}{|u_1 - u_2|},$$

onde estamos adotando a notação do texto (equações (VI.20 a,b), por exemplo). Como deve valer  $u_1 > u_2$ , para que ocorra a colisão, e  $v_1 < v_2$ , pois no movimento de uma dimensão uma partícula não pode passar por cima da outra, podemos rescrever:

$$\mathcal{E} = \frac{v_2 - v_1}{u_1 - u_2}.$$

Uma bola que cai ao chão colide com algo de massa muito maior (a Terra). Neste caso, a rapidez relativa de aproximação coincide com a rapidez com que a bola atinge o solo, e a rapidez relativa de afastamento é a rapidez com que a bola é novamente lançada para cima.

Abra o arquivo *restituicao.mdl*, onde este exemplo é mostrado em dois casos. Um cursor permite você alterar o valor de  $\mathcal{E}$ , enquanto a bolinha está quicando. Qual deve ser o coeficiente de restituição para que a bolinha, ao recomeçar uma subida, alcance uma altura igual à metade da altura de queda imediatamente anterior?

14) No cenário do arquivo *superbola.mdl*, está reproduzida a experiência descrita na referência (\*). Utilize os recursos da animação para determinar os coeficientes de restituição na colisão da bola maior com o solo, e na interação entre as duas bolas. Considere elásticas todas as colisões. Observe que adotamos uma aproximação, ao permitir que a bola maior retorne à sua altura inicial, o que, a rigor, a conservação da energia mecânica não permite.

(\*) G. Stroink, *Superball Problem*, The Physics Teacher, volume 21, outubro de 1983, p.466.

15) No cenário do arquivo recuo.mdl, um soldado está sobre uma plataforma que pode deslizar sem atrito, sobre o solo. Ele atira para a direita, com o fuzil de repetição, e recua para a esquerda.  $N$  projéteis iguais, de massa  $m$  cada um, são disparados sucessivamente, com a velocidade  $\vec{v}$  em relação à arma. Soldado armado e plataforma têm a massa total  $M$ . Mostre que, imediatamente após a emissão do  $n$ -ésimo projétil, a velocidade de recuo vale

$$\vec{V}_n = \vec{V}_{n-1} - \frac{m}{M + (N-n+1)m} \vec{v} ,$$

onde  $\vec{V}_{n-1}$  é a velocidade de recuo imediatamente antes da emissão do  $n$ -ésimo projétil.

Note que  $\vec{V}_0 = 0$  e que  $1 \leq n \leq N$ .

16) No cenário do arquivo foguete.mdl, o foguete se desloca livre de atração gravitacional, não estando sujeito a nenhuma força externa. A propulsão se dá pela queima de combustível: o momentum linear carregado pelo gás expelido é oposto ao momentum linear adquirido pelo foguete. Fisicamente, não existe diferença entre este fenômeno e o do recuo de uma metralhadora. No caso da metralhadora, ocorre a emissão discreta de projéteis de uma determinada massa. No caso do foguete, a emissão de massa é contínua. Na animação, o foguete se desloca ao longo da horizontal. Seja  $v_x$  sua velocidade em um certo instante. Seu momentum linear, então, vale

$$P_{1x} = m v_x , \quad (\text{VI.27})$$

onde  $m$  refere-se à massa do foguete mais o combustível nele contido, quantidade que diminui à medida que o combustível vai sendo queimado. Neste instante, uma quantidade infinitesimal de massa é expelida a uma velocidade constante  $u_x$  em relação ao foguete, o que provoca um acréscimo  $dv_x$  na velocidade do foguete, que passa a viajar com a velocidade  $v_x + dv_x$ , agora com a massa  $m + dm$ . (O acréscimo de massa do foguete é negativo:  $dm < 0$ .) O momentum linear total do sistema, então, pode ser escrito como

$$P_{2x} = (m + dm)(v_x + dv_x) - dm(v_x + dv_x + u_x) , \quad (\text{VI.28})$$



onde  $v_x + dv_x + u_x$  é a velocidade do gás expelido, em relação ao referencial fixo à tela, obtida através de uma transformação galileana.

Como o momentum linear total do sistema deve se conservar, igualando (VI.27) a (VI.28), tem-se:

$$m dv_x = u_x dm, \quad (\text{VI.29})$$

expressão que relaciona, em um instante qualquer, o acréscimo infinitesimal de velocidade do foguete com o acréscimo infinitesimal de sua massa. Este último, negativo, tem o sinal compensado pelo fato de a velocidade do gás expelido, em relação ao foguete, ser negativa ( $u_x < 0$ : emissão para a esquerda, na tela).

Integrando a equação (VI.29):

$$v_{2x} - v_{1x} = \int_1^2 dv_x = u_x \int_1^2 \frac{dm}{m}, \quad (\text{VI.30})$$

já que  $u_x$  é constante. A velocidade  $v_{2x}$  é uma velocidade posterior à velocidade  $v_{1x}$ . Levando em consideração que  $\int dm/m = \ln m$  (ver qualquer tabela de integrais), fica:

$$v_{2x} = v_{1x} - u_x \ln \frac{m_1}{m_2}, \quad (\text{VI.31})$$

onde utilizamos a propriedade dos logaritmos segundo a qual  $\ln a - \ln b = \ln a/b = -\ln b/a$ .

Na animação, o foguete parte do repouso e tem sua velocidade aumentando de acordo com a equação (VI.31). Os valores da janela Condições Iniciais estão no SI:  $m_i$  é a massa inicial do foguete, com todo seu carregamento de combustível, e  $m_f$  é sua massa final, após todo o combustível ter sido queimado. Veja que é relativamente pequena a massa do foguete propriamente dito. Também é informada a taxa com que o combustível é queimado. Este parâmetro, taxa\_gases, equivale ao negativo da taxa com que a massa do foguete varia no tempo:

$$\text{taxa\_gases} = - \frac{dm}{dt}.$$

A partir da equação (VI.29), podemos escrever a equação diferencial

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{u_x}{m} \frac{dm}{dt},$$

ou seja:

$$a_x = - \frac{u_x}{m} \text{taxa\_gases}, \quad (\text{VI.32})$$

expressão que fornece a aceleração do foguete, no instante em que sua massa vale  $m$ .

## SÉTIMA UNIDADE: ROTAÇÕES

### TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO DE CORPO RÍGIDO

Quando um móvel não é uma simples partícula, em muitos casos a combinação dos movimentos de translação e de rotação deve ser considerada. O cenário do arquivo `ex_7_01.mdl` mostra um objeto (haltere) lançado de forma a não sofrer rotação: a força impulsiva que o lança é aplicada em seu centro de massa. O arquivo `rot_trns.mdl` ilustra, nos três casos, as noções de translação pura, rotação pura, e combinação dos dois tipos de movimento.

Um conceito importante, nesta unidade, é o de corpo rígido. Quando, para quaisquer dois pontos de um objeto, a distância entre eles se mantém constante, então pode-se dizer que o objeto é um corpo rígido. Se, escolhido um par de eixos  $x'-y'$  desenhado sobre o corpo rígido, estes eixos mantiverem, ao longo do movimento, suas direções em relação a um referencial externo  $x-y$ , então o corpo está sofrendo uma translação pura, no referencial  $x-y$ . Caso contrário, existe rotação. Veja, no cenário do arquivo `ex_7_02.mdl`, aspectos importantes a distinguir a rotação da translação de um corpo rígido.

### PRODUTO VETORIAL DE DOIS VETORES

Chegou o momento de ampliarmos nossa álgebra vetorial com a definição de mais uma operação: o produto vetorial. Sejam dois vetores quaisquer,  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ . Define-se o produto vetorial destes dois vetores como sendo um terceiro vetor,  $\vec{c}$ , cujo módulo é o escalar obtido pela multiplicação do produto dos módulos dos dois vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  pelo seno do menor ângulo por eles formado. A notação utilizada para indicar o produto vetorial é  $\vec{a} \times \vec{b}$  (leia-se “a vetorial b”) de forma que, se

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} ,$$

então

$$c \equiv a b \sin \phi, \quad (\text{VII.1})$$

onde  $\phi$  é o menor ângulo formado pelas direções dos dois vetores:  $0 \leq \phi \leq \pi$ . O seno de um ângulo neste intervalo é um valor essencialmente positivo, coerente com o fato de que a expressão (VII.1) fornece o módulo de um vetor. O cenário do arquivo pr\_vet1.mdl mostra que o módulo de  $\vec{c}$  equivale à área da figura plana formada por  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ .

Dois vetores não nulos podem ter um produto vetorial nulo: basta que sejam paralelos (ou antiparalelos), quando o ângulo entre eles é 0 (ou  $\pi$ ), cujo seno vale zero. Para ângulos diferentes desses valores, os dois vetores definem um plano, e o produto vetorial dos dois vetores é perpendicular a esse plano, conforme caracterizado nos quatro casos do cenário do arquivo pr\_vet2.mdl. O sentido de  $\vec{c}$  é dado pela chamada regra da mão direita: imaginando-se arrastar  $\vec{a}$  até seu alinhamento com  $\vec{b}$ , utilizando-se para isto os dedos da mão direita, o polegar apontará no sentido de  $\vec{c}$ .

É importante notar que o produto vetorial é uma operação não comutativa. Mais especificamente, a operação é anticomutativa, pois a inversão da ordem com que se opera implica em uma mudança de sinal:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}, \quad (\text{VII.2})$$

conforme mostrado nos quatro casos do cenário do arquivo anti\_com.mdl.

Calculando o produto vetorial dos vetores unitários das direções coordenadas Ox, Oy e Oz, tomados dois a dois, tem-se:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0, \quad (\text{VII.3})$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}. \quad (\text{VII.4})$$

Nas três igualdades da equação (VII.4), os vetores unitários aparecem sempre na mesma seqüência cíclica:  $\vec{i} \rightarrow \vec{j} \rightarrow \vec{k}$ . Devido à propriedade expressa na equação (VII.2):

$$\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \quad (\text{VII.5})$$

os unitários aparecendo agora em ordem inversa.

Uma animação interativa, mostrando o produto vetorial de dois vetores, é vista no cenário do arquivo pr\_vet3.mdl.

Sejam  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  dois vetores dados por suas componentes segundo as direções coordenadas:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$

$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}.$$

Com o auxílio das equações (VII.3) - (VII.5) chega-se às seguintes expressões para as componentes do produto vetorial  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ :

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y,$$

$$c_y = a_z b_x - a_x b_z,$$

$$c_z = a_x b_y - a_y b_x.$$

Podemos escrever, então, que

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \quad (\text{VII.6})$$

um determinante fácil de memorizar.

## TORQUE PRODUZIDO POR UMA FORÇA

É através de um produto vetorial que definimos o que, na rotação, desempenha um papel análogo ao da força, na translação. Trata-se do conceito de torque. Considere uma força  $\vec{F}$  aplicada em um ponto localizado, em relação a uma origem  $O$ , pelo vetor posição  $\vec{r}$ . Diz-se, então, que o torque da força  $\vec{F}$  em relação ao ponto  $O$  é o vetor  $\vec{\tau}_O$  que resulta do produto vetorial de  $\vec{r}$  por  $\vec{F}$ :

$$\vec{\tau}_O \equiv \vec{r} \times \vec{F} . \quad (\text{VII.7})$$

A figura 16 mostra uma força  $\vec{F}$ , aplicada no ponto  $P$ , localizado pelo vetor posição  $\vec{r}$  em relação à origem  $O$ . Pela regra da mão direita, o torque da força em relação à origem é um vetor que sai perpendicularmente da página e, pela equação (VII.1), o módulo deste vetor é dado por

$$\tau_O = r F \sin \phi , \quad (\text{VII.8})$$

onde  $\phi$  é o menor ângulo definido pelos dois vetores.

Esta expressão pode ser escrita como

$$\tau_O = r (F \sin \phi) ,$$

ou

$$\tau_O = F (r \sin \phi) .$$

Chamando de  $F_{\perp}$  a projeção  $F \sin \phi$  da força na direção perpendicular à direção do vetor posição de  $P$ , e de  $r_{\perp}$  a projeção  $r \sin \phi$  deste vetor posição na direção perpendicular à direção de aplicação da força, temos que:

$$\tau_O = r F_{\perp} = F r_{\perp} . \quad (\text{VII.9})$$

A componente  $r_{\perp}$  do vetor posição do ponto de aplicação, na direção perpendicular à linha de aplicação da força, nada mais é do que a distância entre esta linha de aplicação e o ponto escolhido como origem, e é chamada braço de alavanca. Veja o cenário do arquivo

r\_perp.mdl.

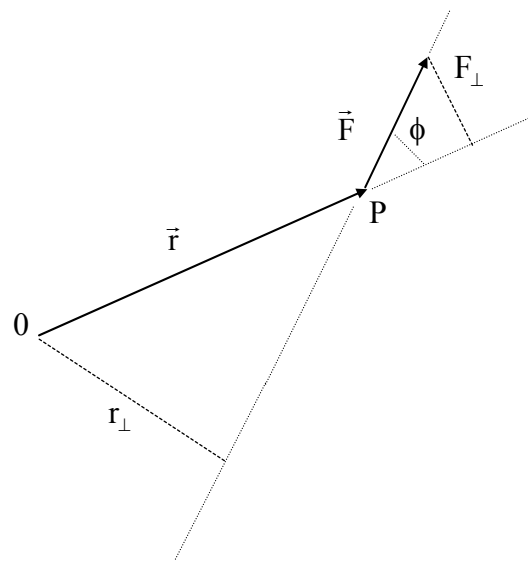


Figura 16 - A distância  $r_{\perp}$  é o braço de alavanca.

Alterando-se o ponto de aplicação da força, altera-se o torque que ela produz com relação a um dado ponto (origem). Também, uma mesma força, aplicada sobre um mesmo ponto, apresentará torques diferentes, calculados com relação a pontos (origens) diferentes. Vê-se, assim, que o torque de uma força é uma grandeza explicitamente dependente da geometria. Deve-se, sempre, referir ao ponto em relação ao qual se calcula o torque. No cenário do arquivo tq\_r.mdl, onde é mostrado como o torque varia com a mudança do ponto de aplicação da força, esta é sempre perpendicular ao vetor posição do ponto de aplicação, situação em que se produz um torque de módulo máximo, para uma força de dada intensidade em um dado ponto de aplicação (braço de alavanca máximo:  $\sin\phi=1$ ). O mesmo vale para a situação apresentada no cenário do arquivo tq\_f.mdl, onde o que você pode variar é o módulo da força aplicada sobre o corpo rígido.

#### UMA PERGUNTA

Responda, agora: por que a maçaneta não costuma ser colocada no meio da porta?

No cenário do arquivo tq\_phi.mdl você visualiza o efeito, sobre o torque, da variação do ângulo entre força aplicada e vetor posição do ponto de aplicação — variação do braço de alavanca. Isso também sugere a maneira mais fácil de abrir uma porta...

## MESMA DIMENSÃO, NATUREZAS DIFERENTES

Torque tem dimensão de força multiplicada por comprimento. Sua unidade, no Sistema Internacional, é o N.m, sem nome especial. Apesar da dimensão do torque ser igual à do trabalho (energia), as unidades de trabalho (joule, etc.) não são utilizadas para medir o torque, por se tratarem de grandezas físicas bem diversas.

## MOMENTUM ANGULAR DE UMA PARTÍCULA

Também utilizamos um produto vetorial para definir o que, na rotação, desempenha um papel análogo ao do momentum linear, na translação. Trata-se do momentum angular, definido como segue. Considere uma partícula, de massa  $m$ , dotada de uma velocidade  $\vec{v}$ , no instante em que é localizada, em relação a uma origem  $O$ , pelo vetor posição  $\vec{r}$ . Diz-se, então, que o momentum angular  $\vec{\ell}_0$  da partícula, em relação ao ponto  $O$ , é o vetor que resulta do produto vetorial de  $\vec{r}$  pelo seu momentum linear  $\vec{p}$  ( $\vec{p}=m\vec{v}$ ):

$$\vec{\ell}_0 \equiv \vec{r} \times \vec{p} . \quad (\text{VII.10})$$

Então,

$$\ell_0 = r_{\perp} p = r_{\perp} m v , \quad (\text{VII.11})$$

onde  $r_{\perp}$  é a projeção do vetor posição da partícula na direção perpendicular à direção de seu momentum linear (ou de sua velocidade).

Momentum angular tem a dimensão de comprimento vezes massa vezes velocidade. Sua unidade, no Sistema Internacional, é o  $\text{kg.m}^2/\text{s}$ , sem nome especial.

No cenário do arquivo `m_a_1.mdl`, o momentum angular de uma partícula com velocidade constante é calculado em dois casos onde  $r_{\perp}$  não varia durante o movimento, o que implica em momentum angular constante.

Também no cenário do arquivo `ex_7_03.mdl`,  $r_{\perp}$  não se altera durante o movimento da



partícula. Determine, nos dois casos exemplificados, o (vetor) momentum angular da partícula.

### QUANDO A PARTÍCULA DESCREVE UM MOVIMENTO CIRCULAR UNIFORME

No cenário do arquivo `m_a_2.mdl` são mostrados dois casos de partícula em movimento circular uniforme, com momentum angular, em relação ao centro da trajetória, de módulo

$$\ell_0 = m v r = m (\omega r) r = m r^2 \omega , \quad (\text{VII.12})$$

onde  $\omega$  é o módulo da velocidade angular da partícula. Os momenta angulares dos dois casos são de sentidos opostos. Note que, em cada caso, os vetores momentum angular e velocidade angular têm a mesma orientação.

### MOMENTO DE INÉRCIA DE UMA PARTÍCULA

A quantidade  $m r^2$ , que aparece após a última igualdade da equação (VII.12), é o chamado momento de inércia da partícula em relação ao eixo de rotação (o eixo dos  $z$ , na animação). Denotando por  $I_0$  este valor (o índice  $0$  refere-se ao ponto do plano de rotação por onde passa o eixo de rotação):

$$\ell_0 = I_0 \omega , \quad (\text{VII.13})$$

com

$$I_0 = m r^2 . \quad (\text{VII.14})$$

Podemos, então, escrever:

$$\vec{\ell}_0 = I_0 \vec{\omega} . \quad (\text{VII.15})$$

Como  $I_0$  é uma constante, derivando esta equação em relação ao tempo temos:

$$\frac{d\vec{\ell}_0}{dt} = I_0 \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_0 \vec{\alpha} ,$$

$\vec{\alpha}$  sendo a aceleração angular da partícula.

Mas, com a definição (VII.10):

$$\frac{d\vec{\ell}_0}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}\right) + \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}\right) = \vec{r} \times \vec{F}_{\text{res}} = \vec{\tau}_{0 \text{ res}} ,$$

já que  $\frac{d\vec{p}}{dt}$  é a força resultante sobre a partícula, e o primeiro termo da soma é nulo, por representar o produto vetorial da velocidade da partícula pelo seu momentum linear, que são vetores paralelos. Comparando estas duas últimas relações temos, então, que o torque resultante sobre a partícula, calculado em relação a um ponto qualquer, é a medida da variação do momentum angular da partícula em relação ao mesmo ponto, e igual ao seu momento de inércia em relação ao eixo perpendicular ao plano de rotação, passando pelo ponto considerado — chamado de eixo de rotação —, multiplicado pela aceleração angular da partícula:

$$\vec{\tau}_{0 \text{ res}} = \frac{d\vec{\ell}_0}{dt} = I_0 \vec{\alpha} . \quad (\text{VII.16})$$

Esta é uma versão rotacional da segunda lei de Newton.

**OS EXEMPLOS SEGUINTE SÃO MUITO IMPORTANTES!**

Veja, no cenário do arquivo tq\_al\_w.mdl, a variação dos vetores velocidade e aceleração angulares, enquanto você varia o torque resultante sobre uma partícula que mantém constante a distância ao centro de rotação. Em particular, encontre uma situação de torque constante que permita a visualização da reversão do vetor velocidade angular.

No cenário do arquivo tq\_alph.mdl você altera o torque resultante variando a força que o provoca, tanto em módulo quanto em orientação.

Depois de rodar os cenários dos arquivos tq\_m\_al.mdl e tq\_r\_al.mdl, responda às perguntas que surgem nas janelas Animação.

O cenário do arquivo `ex_7_04.mdl` apresenta o exemplo de uma partícula que, em movimento circular, é freada pela força de atrito cinético. Procure responder às questões propostas antes de abrir a janela com a solução.

Também a força de atrito cinético é a responsável pelo freamento da partícula que se move em linha reta, no cenário do arquivo `ex_7_05.mdl`. O torque produzido é constante, o que faz com que o momentum angular tenha sua intensidade decrescendo de maneira constante, ou seja, linearmente com o tempo, como mostra o gráfico.

O exemplo do cenário do arquivo `ex_7_06.mdl` é o de uma partícula sujeita a um torque resultante constante. Variando a posição da partícula, você altera o seu momento de inércia. São construídos dois gráficos do módulo da aceleração angular, um em função da distância da partícula ao centro de rotação, o outro em função do inverso do quadrado dessa distância. Explique as duas curvas. Fica evidente que o momento de inércia da partícula é a resistência que ela oferece a ser acelerada angularmente, da mesma forma que a massa inercial é a resistência oferecida pela partícula à tentativa de se acelerá-la translacionalmente.

Abra o arquivo `torq_pen.mdl`. Seu cenário mostra o torque produzido pelo peso de um pêndulo simples, calculado em relação ao ponto de suspensão. Quando a massa se encontra à esquerda da linha vertical que passa pelo ponto de suspensão, esse torque aponta para fora da tela; com a massa à direita, o torque aponta para dentro da tela. Trata-se do torque restaurador responsável pela oscilação; no caso de pequenas amplitudes, pelo movimento harmônico simples descrito pelo sistema. Vê-se, claramente, como a variação da intensidade do torque acompanha a variação do braço de alavanca: no ponto mais baixo da trajetória, o braço de alavanca é nulo; no ponto mais alto, é máximo. A tensão da corda não produz torque em relação ao ponto de suspensão (por quê?) — logo, o torque do peso é o torque resultante sobre a massa. Sua variação, portanto, é proporcional à aceleração angular da massa, ou seja, à variação da velocidade angular, já que o sistema tem momento de inércia constante, em relação ao eixo de rotação (distância constante entre o eixo e a partícula).

## SISTEMA DE PARTÍCULAS

Para melhor compreensão do conceito de momento de inércia, calculemos a energia cinética de um sistema constituído por  $N$  partículas de massas  $m_i$  ( $i=1,\dots,N$ ), todas elas sofrendo

rotação em torno de determinado eixo fixo, com a mesma velocidade angular de módulo  $\omega$ . Somando-se os valores da energia cinética de cada partícula, temos:

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 .$$

Podemos escrever a rapidez da  $i$ -ésima partícula como  $v_i = \omega r_i$ , onde  $r_i$  é sua distância ao eixo de rotação — equação (III.20). Como  $\omega$  tem o mesmo valor, para todas as partículas, fica:

$$K = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \right) \omega^2 .$$

Definindo a quantidade entre parênteses como o momento de inércia do sistema em relação ao eixo de rotação que passa pelo ponto 0,  $I_0$ :

$$I_0 \equiv \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 , \quad (\text{VII.17})$$

a energia cinética é escrita como

$$K = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 . \quad (\text{VII.18})$$

## CONTÍNUO DE MATÉRIA

No caso de um corpo rígido, que é uma distribuição contínua de massa, o momento de inércia é o resultado de uma integração em volume, ao invés da soma discreta da equação (VII.17):

$$I_0 \equiv \int_V r^2 dm , \quad (\text{VII.19})$$

com o elemento infinitesimal de massa  $dm$  distando  $r$  do eixo de rotação.

A analogia entre momento de inércia (rotação) e massa inercial (translação) é muito clara, na

equação (VII.18).

## ROTAÇÃO DE CORPO RÍGIDO EM TORNO DE EIXO FIXO

No caso da rotação de corpo rígido em torno de eixo fixo, valem expressões análogas às equações (VII.15) e (VII.16):

$$\vec{L}_0 = I_0 \vec{\omega} , \quad (\text{VII.20})$$

$$\vec{\tau}_{0 \text{ res}} = I_0 \vec{\alpha} . \quad (\text{VII.21})$$

Aqui,  $I_0$  é o momento de inércia do sólido em relação ao eixo de rotação que contém o ponto com respeito ao qual são calculados seu momentum angular,  $\vec{L}_0$ , e o torque resultante sobre ele,  $\vec{\tau}_{0 \text{ res}}$ .

## PÊNDULO FÍSICO

O arquivo pen\_fis1.mdl mostra, em seu cenário, exemplos do que chamamos de pêndulo físico: um objeto oscilando livremente em torno de um eixo horizontal. Quando o pêndulo, de massa  $M$ , está deslocado da vertical de um ângulo  $\theta$ , o torque restaurador que o seu peso exerce, em relação ao ponto de suspensão, vale

$$\tau_0 = - h M g \text{ sen} \theta ,$$

onde  $h$  é a distância entre o ponto de suspensão e o centro de massa. O sinal negativo indica a natureza restauradora do torque, atuando sempre no sentido de reduzir o valor do ângulo com a vertical. Da equação (VII.21), portanto:

$$- h M g \text{ sen} \theta = I_0 \frac{d^2 \theta}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{h M g}{I_0} \text{ sen} \theta = 0 ,$$

onde  $I_0$  é o momento de inércia do pêndulo em relação ao eixo de rotação.

Na aproximação de pequenos ângulos ( $\text{sen} \theta \cong \theta$ ), e utilizando a equação (III.1) que, aqui, é

escrita como  $s = \theta h$  :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{h M g}{I_0} s = 0 . \quad (\text{VII.22})$$

A equação (VII.22) é a que descreve um movimento harmônico simples de frequência angular

$$\omega = \sqrt{\frac{h M g}{I_0}} , \quad (\text{VII.23})$$

como fica claro lembrando as equações (IV.10) e (IV.11). Assim, o período do pêndulo físico de pequenas amplitudes é dado por

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{h M g}} , \quad (\text{VII.24})$$

a ser comparado com a expressão  $2\pi\sqrt{L/g}$ , período do pêndulo simples de pequenas amplitudes, cujo comprimento  $L$  deve ser substituído, no caso do pêndulo físico, pela razão  $I_0/hM$ . Realmente, o pêndulo simples é um pêndulo físico trivial, com  $h=L$  e  $I_0 = M L^2$ , caso em que  $\frac{I_0}{h M} = L$ .

O comprimento de um pêndulo simples que tenha o mesmo período de um dado pêndulo físico (na aproximação de pequenas amplitudes) localiza, a partir do ponto de suspensão deste, o chamado centro de oscilação. Assim, o centro de oscilação de um pêndulo físico em equilíbrio, para um dado centro de suspensão, é um ponto localizado verticalmente, a partir do ponto de suspensão, a uma distância igual a  $\frac{I_0}{h M}$ .

## CÁLCULO DO MOMENTO DE INÉRCIA DE CORPOS RÍGIDOS

A avaliação da expressão (VII.19), para diferentes corpos rígidos, é um problema clássico da disciplina Cálculo Integral. Quando o objeto apresenta alguma simetria, este fato é aproveitado para simplificar o cálculo. Tabelas com valores de momento de inércia de alguns sólidos, com relação a eixos notáveis, são apresentadas em manuais de Física, Matemática e Engenharia. Como exemplo, calculemos o momento de inércia de uma haste fina, homogênea,

de comprimento  $L$ , em relação a um eixo que passa, perpendicularmente, por uma de suas extremidades — ver figura 17.

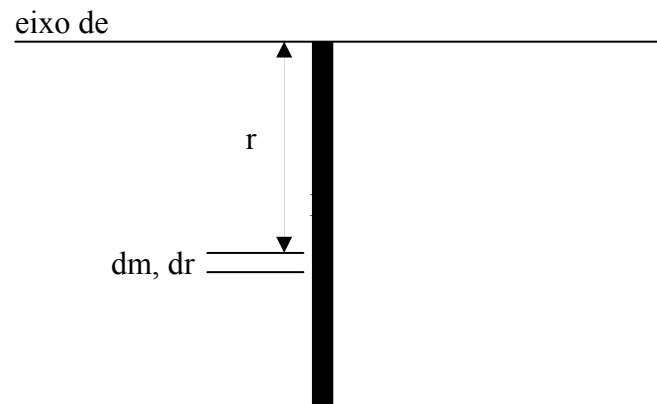


Figura 17 – Cálculo de momento de inércia de uma haste.

O elemento de massa  $dm$ , de comprimento  $dr$ , dista  $r$  do eixo de rotação. Se a haste é homogênea, então a densidade linear de massa,  $\lambda$ , é constante:

$$\lambda = \frac{dm}{dr} = \frac{M}{L},$$

onde  $M$  é sua massa. Logo,

$$dm = \lambda dr = \frac{M}{L} dr.$$

Assim, o cálculo da integral fica, simplesmente:

$$I_0 = \int_V r^2 dm = \frac{M}{L} \int_0^L r^2 dr = \frac{1}{3} M L^2, \quad (\text{VII.25})$$

onde a integral de volume se reduziu a uma integral simples, por estarmos considerando a haste de espessura desprezível, frente a seu comprimento.

#### TEOREMA DE STEINER

A figura 18 representa, esquematicamente, um corpo rígido cujo centro de massa (CM) coincide com a origem de um referencial convenientemente escolhido.

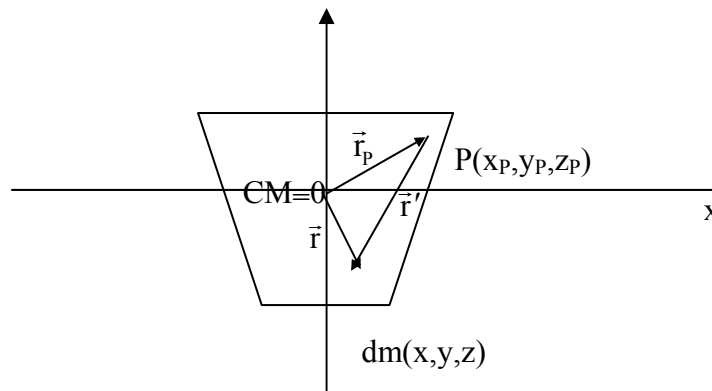


Figura 18 – Esquema para compreensão do Teorema de Steiner.

Consideremos dois eixos de rotação possíveis, perpendiculares à página e paralelos entre si. Um deles, passando pelo centro de massa (eixo CM); o outro, passando pelo ponto P (eixo P), localizado por  $\vec{r}_p$ . Calculemos o momento de inércia do corpo em relação ao eixo P:

$$I_p = \int_V r'^2 dm ,$$

onde  $r'$  é a distância do elemento de massa  $dm$  ao eixo P, isto é, o módulo do vetor  $\vec{r}'$ .

É fácil de ver, na figura, que

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_p ,$$

onde  $\vec{r}$  é o vetor posição do elemento de massa. Logo, fica:

$$I_p = \int_V r^2 dm + r_p^2 \int_V dm - 2 \vec{r}_p \cdot \int_V \vec{r} dm .$$

Como  $\int_V dm = M$ , massa do objeto, e  $\int_V \vec{r} dm = M \vec{r}_{CM}$  (equação (VI.12)), e aqui, com a escolha de referencial que fizemos,  $\vec{r}_{CM} = 0$ :

$$I_p = \int_V r^2 dm + M r_p^2 .$$



Mas a integral  $\int_V r^2 dm$  nada mais é do que o momento de inércia do sólido em relação ao eixo CM. Chamando, então, de  $d$  a distância  $r_P$  entre o eixo P e o eixo CM, temos que

$$I_P = I_{CM} + M d^2 , \quad (\text{VII.26})$$

relação conhecida como Teorema de Steiner, ou Teorema dos Eixos Paralelos, que garante que o momento de inércia de um sólido em relação a um eixo qualquer é igual ao momento de inércia com relação a um eixo paralelo ao primeiro, passando pelo centro de massa, mais a massa do sólido multiplicada pelo quadrado da distância entre os dois eixos. Com base nesta conclusão podemos dizer que, dada uma direção qualquer no espaço, o eixo nessa direção em relação ao qual o sólido tem o menor momento de inércia é aquele que passa pelo seu centro de massa.

## CONSERVAÇÃO DO MOMENTUM ANGULAR

Decorre, da equação (VII.16), que quando é nulo o torque resultante sobre uma partícula, em relação a um dado ponto, seu momentum angular em relação ao mesmo ponto permanece constante:

$$\vec{\tau}_{0 \text{ res}} = \frac{d\vec{\ell}_0}{dt} : \quad \vec{\tau}_{0 \text{ res}} = 0 \Rightarrow \vec{\ell}_0 = \text{constante} .$$

O cenário do arquivo `cons_m_a.mdl` mostra uma partícula em movimento circular, em um plano horizontal, presa à extremidade de um fio. O raio da trajetória pode ser modificado alterando-se o comprimento do fio, que passa por um tubo vertical. O momentum angular da partícula, em relação ao centro da trajetória, se conserva (por quê?). Assim, alteração do momento de inércia em relação ao eixo de rotação (alteração do comprimento do fio) implica na necessária alteração da velocidade angular para que o produto dessas duas quantidades se mantenha o mesmo — ver equação (VII.15).

No caso de um corpo rígido que gira em torno de um eixo fixo, as equações (VII.20) e (VII.21) nos levam a concluir que, não havendo torque resultante sobre o corpo, em relação a

um ponto do eixo, então a rotação se dará com velocidade angular constante e, portanto, seu momentum angular em relação ao mesmo ponto também será constante.

Passemos à formulação mais geral da conservação do momentum angular. Já trabalhamos os princípios de conservação da energia mecânica (Quinta Unidade) e do momentum linear (Sexta Unidade). De acordo com este último, o momentum linear total de um sistema isolado — ou seja, um sistema sobre o qual não existe força externa resultante — é uma constante de movimento. Lembrando a analogia que existe entre força e torque, momentum linear e momentum angular, podemos sugerir o seguinte enunciado: se for nulo o torque externo resultante sobre um sistema, calculado em relação a um dado ponto do espaço, então o momentum angular total do sistema, calculado em relação ao mesmo ponto, será uma constante de movimento. Note a necessidade, aqui, de se mencionar o ponto comum em relação ao qual as grandezas rotacionais são calculadas.

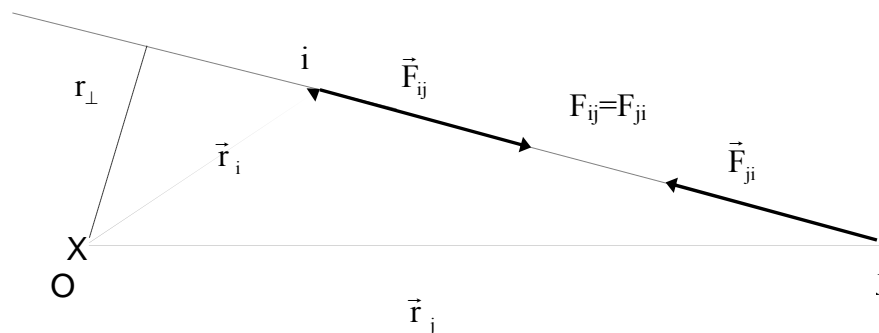


Figura 19 – Um par ação-reação entre duas partículas.

Consideremos um sistema constituído por  $N$  partículas. O torque resultante sobre este sistema, calculado em relação a um ponto  $O$ , pode ser escrito como a soma dos torques interno e externo, resultantes sobre o sistema:

$$\vec{\tau}_{0 \text{ res}} = \vec{\tau}_{0 \text{ int}} + \vec{\tau}_{0 \text{ ext}}$$

O primeiro fator desta soma reduz-se a zero, já que se trata da soma dos torques produzidos por todos os pares ação-reação de forças de interação entre as partículas do sistema, tomadas duas a duas. Isto pode ser visto na figura 19, onde é esquematizado o par de forças de interação entre as partículas  $i$  e  $j$ . Como estas forças, opostas e de mesma intensidade, são

exercidas ao longo da mesma linha de ação, o braço de alavanca,  $r_{\perp}$ , é o mesmo para as duas e, portanto, os torques que elas provocam em relação ao ponto 0 são vetores de mesma intensidade e orientações opostas, um deles saindo da página, o outro entrando. Assim, é nula a contribuição de cada par de partículas para o fator  $\vec{\tau}_{0 \text{ int}}^{\text{res}}$ , o que torna nulo o próprio fator.

Também,

$$\vec{\tau}_{0 \text{ res}} = \sum_{i=1}^N \vec{\tau}_{0 \text{ res } i} = \sum_{i=1}^N \frac{d\vec{\ell}_{0i}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{\ell}_{0i} = \frac{d\vec{L}_0}{dt} ,$$

indicando que o torque resultante sobre o sistema é igual à soma dos torques resultantes sobre todas as partículas do sistema, calculados em relação ao mesmo ponto. Isto equivale, de acordo com a equação (VII.16), à soma das derivadas temporais dos momenta angulares individuais, ou seja, à derivada temporal do momentum angular total do sistema em relação ao ponto considerado.

Assim,

$$\vec{\tau}_{0 \text{ ext}}^{\text{res}} = \frac{d\vec{L}_0}{dt} , \quad (\text{VII.27})$$

expressão que indica que o torque externo resultante sobre o sistema é a medida da variação temporal de seu momentum angular total, quando calculados em relação ao mesmo ponto. Esta equação também vale para uma distribuição contínua de matéria correspondendo, no caso de corpo rígido girando em torno de eixo fixo, às equações (VII.20) e (VII.21).

Se  $\vec{\tau}_{0 \text{ ext}} = 0$ , então  $\vec{L}_0$  é uma constante de movimento, confirmando o enunciado feito acima, que merece ser repetido: se for nulo o torque externo resultante sobre um sistema, calculado em relação a um dado ponto do espaço, então o momentum angular total do sistema, calculado em relação ao mesmo ponto, será uma constante de movimento.

## PÊNDULO DE TORÇÃO

Voltemos a tratar de pêndulos. Agora, para introduzir o chamado pêndulo de torção,

apresentado no cenário do arquivo pen\_tor.mdl. Um disco homogêneo oscila no plano horizontal, em torno de seu eixo de simetria (momento de inércia em torno do eixo:  $I_0 = (1/2)MR^2$ , M e R sendo a massa e o raio do disco, respectivamente). A oscilação ocorre devido à torção do fio que sustenta o disco, refletida na equação

$$\tau_0 = -\kappa \theta , \quad (\text{VII.28})$$

onde  $\tau_0$  é a intensidade do torque restaurador sobre o disco, com respeito a seu centro,  $\theta$  é o deslocamento angular e  $\kappa$  a constante elástica, característica do fio. Como este torque é uma medida da aceleração angular do disco — ver a equação (VII.21) — podemos escrever:

$$-\kappa \theta = I_0 \alpha = I_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\kappa}{I_0} \theta = 0 ,$$

equação diferencial linear de segunda ordem de tipo já tratado anteriormente: equação (IV.7). Lá, a força restauradora exercida sobre a partícula de massa m é responsável pelo movimento harmônico de frequência angular  $\omega = \sqrt{k/m}$ ; aqui, o torque restaurador exercido sobre o disco de momento de inércia  $I_0$  é responsável pelo movimento harmônico de frequência angular

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I_0}} , \quad (\text{VII.29})$$

e, portanto, período

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{\kappa}} , \quad (\text{VII.30})$$

com  $I_0$  referindo-se ao eixo de rotação. Na animação, os valores numéricos estão no SI — constante elástica em N.m/rad. Utilize medidas de tempo, através da janela Controle, para verificar que o período do pêndulo tem o valor apropriado. Veja, no gráfico deslocamento angular versus tempo, o perfil típico de um movimento harmônico simples.

Abra o arquivo steiner.mdl. Seu cenário apresenta um pêndulo de torção que oscila em um

plano horizontal, em torno de um eixo cuja posição é alterada, de caso para caso. No primeiro caso (tecla preta), o eixo passa pelo centro de massa do disco; nos segundo, terceiro e quarto casos (teclas verde, rosa e azul, respectivamente), o eixo passa cada vez mais próximo da borda do disco. No primeiro caso, o momento de inércia do pêndulo, em relação ao eixo de rotação, vale  $I_0 = I_{cm} = \frac{1}{2} M R^2$ . Com os dados da tela, o período dado pela equação (VII.30) vale  $T = 6,95$  s, o que coincide com o valor que você pode medir no registro de tempo da janela Controle. Determine, através do teorema de Steiner, o valor de  $I_0$ , momento de inércia do disco em relação ao eixo de rotação, para cada um dos demais casos. Obtenha, com a equação (VII.30), os respectivos períodos de oscilação, e confira os valores encontrados com os medidos no registro de tempo da janela Controle.

## IMPULSO ANGULAR

Continuemos com as analogias. Definimos, na Sexta Unidade, o vetor impulso, variação do momentum linear em um intervalo de tempo. Da mesma maneira, definimos aqui o vetor impulso angular, como sendo a variação de momentum angular sofrida por um sistema em um dado intervalo de tempo:

$$\Delta \vec{L}_0 = \int_i^f d\vec{L}_0 = \int_i^f \vec{\tau}_{0, \text{res ext}} dt, \quad (\text{VII.31})$$

onde a integração é realizada entre o início (i) e o final (f) do intervalo de tempo e a notação é a da equação (VII.27).

No caso de rotação de corpo rígido em torno de eixo fixo, as equações (VII.21) e (VII.31) permitem escrever, escalarmente:

$$\Delta L_0 = \int_i^f \tau_{0, \text{res ext}} dt = \overline{F_{\text{res ext}}} R \Delta t = I_0 (\omega_f - \omega_i). \quad (\text{VII.32})$$

Esta expressão mostra como a força resultante externa, cujo braço de alavanca é  $R$ , e cuja intensidade média vale  $\overline{F_{\text{res ext}}}$ , provoca o impulso angular responsável pela variação de velocidade angular indicada.

No cenário do arquivo `mom_in_1.mdl`, forças impulsivas iguais atingem, em intervalos de tempo iguais, as extremidades de dois halteres de mesma massa, que se encontram inicialmente em repouso. O momento de inércia do haltere da direita, em relação ao eixo de rotação, é menor que o da esquerda (por quê?). Logo, de acordo com a equação (VII.32), a intensidade da velocidade angular adquirida será maior para o haltere da direita.

## JOGANDO TÊNIS

Voltemos a lidar com o pêndulo físico. Definimos, anteriormente, o centro de oscilação, um ponto do pêndulo físico que dista  $d = I_0 / h M$  do ponto de suspensão. Este é o comprimento de um pêndulo simples que, na aproximação de pequenas amplitudes, tem o mesmo período do pêndulo físico. Uma propriedade importante do centro de oscilação é que, aplicando-se sobre ele, perpendicularmente ao pêndulo, uma força impulsiva, não se produzirá reação no ponto de suspensão, ao longo da direção de aplicação da força. Para compreensão deste fato, abra o arquivo `percuss1.mdl`, em cujo cenário é mostrada uma haste que pode girar livremente em um plano horizontal, em torno de um eixo vertical que passa por uma de suas extremidades. Neste caso,  $I_0 = 1/3 M L^2$  e  $h = L/2$ . A animação mostra a força de reação que o eixo exerce sobre a haste, enquanto uma força impulsiva é aplicada. Depois de rodar a animação, retroceda até o instante  $t = 0,4$  s e percorra os quatro casos apresentados, visualizando a sensível dependência da força de reação com a distância  $d$  entre o ponto de aplicação da força impulsiva e o eixo de rotação. No terceiro caso (tecla cor de rosa), em que a força impulsiva é aplicada em um ponto situado a uma distância  $d = 2/3 L = 0,66667$  m do eixo, a força de reação é nula. Este ponto é o chamado centro de percussão. Caso a haste estivesse suspensa por sua extremidade, este ponto coincidiria com o centro de oscilação, que dista  $d = I_0 / h M = 2/3 L$  do ponto de suspensão. Este é o motivo pelo qual o tenista procura atingir a bola com um ponto da raquete que diste da empunhadura a mesma distância que separa os pontos de suspensão e de oscilação: a empunhadura faz o papel de ponto de suspensão, o ponto de impacto da bola será o centro de oscilação/percussão. Em um caso idealizado, em que bolinha e empunhadura fossem ambos pontuais, se a bolinha atingisse a raquete exatamente no centro de percussão desta, a força de reação na empunhadura seria exatamente nula.

## ROLAMENTO

Uma situação muito comum é a de um objeto rolando, sem deslizar, sobre uma superfície; por exemplo, uma bola que rola no chão de uma quadra de esportes. Se podemos olhar esse objeto como um corpo rígido, o problema torna-se de tratamento muito fácil. Considere o corpo rígido de perfil circular (esfera, cilindro, anel, ...) esquematizado na figura 20, rolando sem deslizar sobre a superfície plana e horizontal. Chamamos de P o ponto do objeto em contato com o solo. Q é o ponto diametralmente oposto a P. Se o objeto é homogêneo, seu centro coincide com o centro de massa (CM). Seja  $v_{CM}$  a rapidez do centro de massa. Como não há deslizamento, o ponto P não está escorregando, nem para a frente, nem para trás; instantaneamente, ele está em repouso. Um instante imediatamente após, este ponto perde o contato com o solo, e outro ponto virá posicionar-se em contato com o solo, mantendo-se instantaneamente em repouso. O ponto do espaço que coincide com o ponto P, no instante em que este toca o solo, é o chamado *centro instantâneo de rotação*, ponto em torno do qual, naquele instante, o objeto está girando. O eixo perpendicular à página, que passa pelo centro instantâneo de rotação, é o *eixo instantâneo de rotação*. Note que o centro instantâneo de rotação (e, solidário a ele, o eixo instantâneo de rotação) viaja para a frente com a velocidade do centro de massa do objeto. Os cenários das animações *rolando1.mdl* e *rolando2.mdl* focalizam a trajetória de um ponto periférico de uma roda.

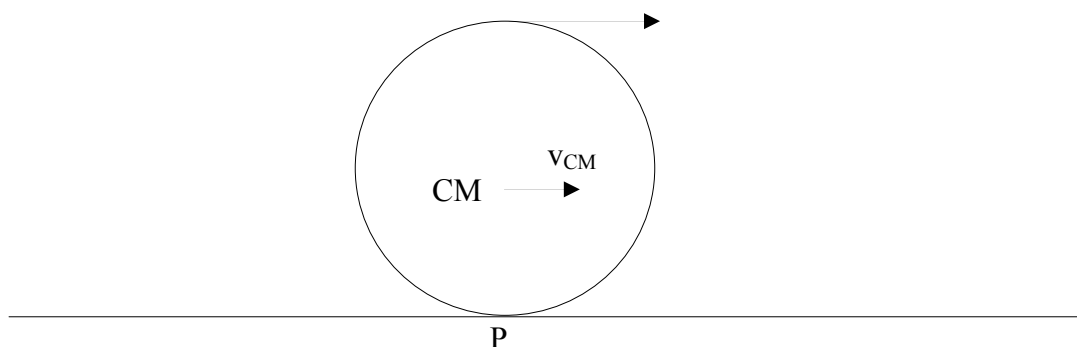


Figura 20 – Corpo rígido rolando sem deslizar.

Se  $R$  é o raio do objeto que rola, e  $\omega$  é a rapidez angular com que se dá o rolamento em torno do eixo instantâneo de rotação, a equação (III.20) nos permite escrever:

$$v_{CM} = \omega R , \quad (\text{VII.33})$$

com  $\omega$  medido em radianos por unidade de tempo.

Passemos, agora, a considerações energéticas. A energia cinética do corpo vale

$$K = \frac{1}{2} I_{\text{eir}} \omega^2 , \quad (\text{VII.34})$$

com  $I_{\text{eir}}$  simbolizando seu momento de inércia em relação ao eixo instantâneo de rotação.

Pelo teorema de Steiner:

$$I_{\text{eir}} = I_{CM} + M R^2 , \quad (\text{VII.35})$$

onde  $I_{CM}$  é o momento de inércia em relação ao eixo que passa pelo centro de massa e é paralelo ao eixo instantâneo de rotação, e  $M$  é a massa do corpo rígido.

Substituindo a equação (VII.35) na (VII.34):

$$K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M R^2 \omega^2 . \quad (\text{VII.36})$$

Substituindo a equação (VII.33) no segundo termo do lado direito da equação (VII.36):

$$K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2 , \quad (\text{VII.37})$$

relação que pode ser lida como: a energia cinética do corpo rígido que rola, sem deslizar, é a soma da energia cinética de translação que o corpo teria caso se deslocasse, sem girar, com a rapidez do centro de massa ( $\frac{1}{2} M v_{CM}^2$ ), mais a energia cinética que teria caso girasse unicamente, em torno do centro de massa, com uma rapidez angular igual à de sua rotação em



torno do eixo instantâneo de rotação ( $\frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$ ). Esta decomposição pode ser visualizada afirmando-se que a figura 20 representa a “soma” das figuras 21 e 22.

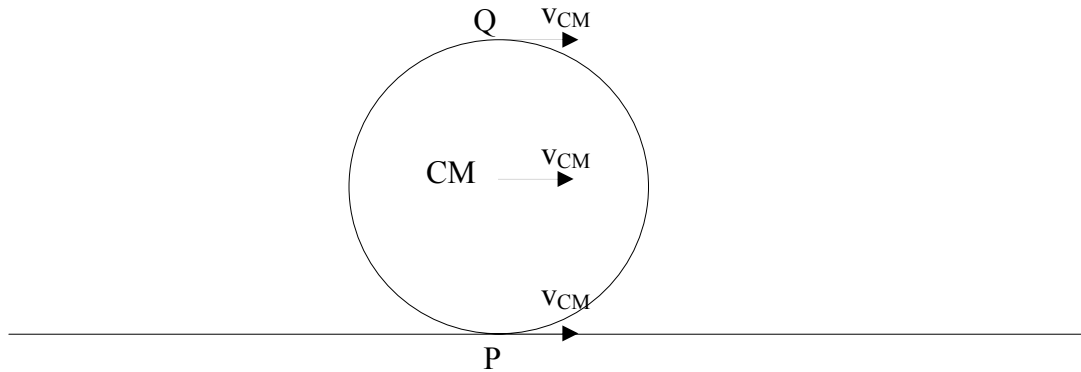


Figura 21 – Translação simples.

A velocidade do ponto Q, na figura 20, é o vetor soma de dois vetores iguais — mesmo módulo e mesma orientação — que representam a velocidade de Q nas figuras 21 e 22. Assim, na figura 20,

$$v_Q = 2 v_{CM} = 2 \omega R = \omega (2R) , \quad (\text{VII.38})$$

indicando que a rapidez do ponto Q é igual ao produto da rapidez angular de sua rotação em torno do eixo instantâneo de rotação ( $\omega$ ) vezes sua distância a esse eixo ( $2R$ ). Da mesma forma, vê-se que a velocidade do ponto P, na figura 20, é a soma dos dois vetores opostos esquematizados nas figuras 21 e 22, ou seja, é nula; realmente, como vimos, este ponto está instantaneamente em repouso. Assim, para qualquer ponto do objeto, é possível fazer-se essa decomposição de velocidades, como ilustra o cenário do arquivo rol\_tr.mdl.

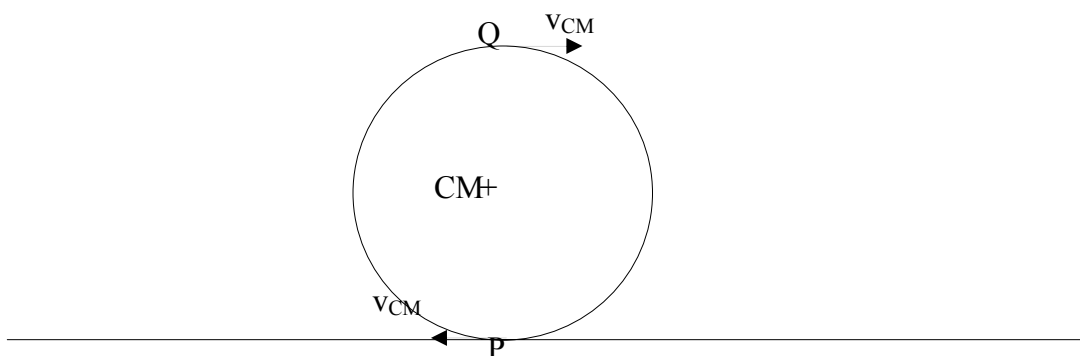


Figura 22 – Rotação simples em torno do centro de massa.

No caso mais simples em que  $v_{CM}$  é uma constante, o corpo rola uniformemente, com  $\omega$  também mantido constante — ver a equação (VII.33). Calculados em relação ao centro de massa, seu momentum angular também se mantém constante, e o torque resultante é nulo — ver equações (VII.20) e (VII.21). Realmente, as únicas forças exercidas sobre o corpo são seu peso e a normal, ambas passando pelo centro de massa. Este é um caso de combinação de inércia translacional com inércia rotacional.

### ROLANDO NO PLANO INCLINADO

O cenário do arquivo `ex_7_07.mdl` mostra um objeto redondo, de raio  $R$  e massa  $M$ , que rola sem deslizar ao longo de uma superfície plana inclinada de um ângulo  $\theta$ , a partir do repouso. Aqui, o objeto está acelerado, tanto em seu movimento de translação, quanto no de rotação. Contamos com a contribuição de mais uma força, provocando torque em relação ao centro de massa: a força de atrito estático,  $\vec{f}$ . Ela é necessária para que não ocorra deslizamento. Escrevendo a segunda lei de Newton, para a translação:

$$M g \sin\theta - f = M a_{CM} , \quad (\text{VII.39})$$

onde  $a_{CM}$  é o módulo da aceleração do centro de massa.

Analogamente, para a rotação (equação (VII.21)):

$$f R = I_{CM} \alpha , \quad (\text{VII.40})$$

onde  $f R$  é o módulo do torque da força de atrito em relação ao centro de massa. As intensidades da aceleração angular ( $\alpha$ ) e da aceleração do centro de massa se relacionam através da expressão

$$a_{CM} = \alpha R , \quad (\text{VII.41})$$

derivada temporal da equação (VII.33).

Combinando as equações (VII.39) a (VII.41):

$$a_{\text{CM}} = \frac{M g \sin \theta}{\frac{I_{\text{CM}}}{R^2} + M} . \quad (\text{VII.42})$$

Se o objeto se reduz a um ponto, seu momento de inércia é nulo, e a aceleração tem por módulo  $g \sin \theta$ , conforme foi visto na Quarta Unidade.

A equação (VII.42) explicita a dependência do resultado com a forma do objeto. Fazendo  $I_{\text{CM}} = \Phi M R^2$ , onde  $\Phi$  é um fator adimensional, função da forma geométrica do objeto que rola, fica:  $a_{\text{CM}} = g \sin \theta / (1 + \Phi)$ , independente da massa e do raio. Assim, a aceleração ao longo do plano inclinado (e, portanto, o tempo de descida) é um valor dependente da inclinação e da geometria do objeto.

Combinando as equações (VII.40) a (VII.42), podemos escrever o módulo da força de atrito estático como:

$$f = \frac{M g \sin \theta}{1 + \frac{M R^2}{I_{\text{CM}}}} .$$

Sabemos que existe um limite superior para este valor:

$$f \leq \mu_e M g \cos \theta ,$$

onde  $\mu_e$  representa o coeficiente de atrito estático entre o plano e o objeto que rola, e utilizamos o fato de que o módulo da força normal vale  $N = M g \cos \theta$ . Combinando estas duas expressões, verificamos que existe um limite superior para o ângulo de inclinação do plano, a partir do qual passará a ocorrer deslizamento. Para que haja rolamento puro, portanto, o ângulo de inclinação é limitado pela relação

$$\operatorname{tg} \theta \leq \mu_c \left(1 + \frac{M R^2}{I_{\text{CM}}}\right) .$$

Por considerações energéticas podemos abordar este mesmo problema, do objeto redondo rolando ao longo do plano inclinado, da maneira que segue.

Se não há deslizamento, a energia mecânica total do sistema se conserva:

$$M g h = \frac{1}{2} M v_{\text{CM base}}^2 + \frac{1}{2} I_{\text{CM}} \omega_{\text{base}}^2 , \quad (\text{VII.43})$$

expressando a transformação de energia potencial gravitacional em energia cinética na base do plano.

Substituindo-se  $\omega_{\text{base}}$  pelo valor obtido com o uso da equação (VII.33),  $\omega_{\text{base}} = v_{\text{CM base}}/R$  :

$$v_{\text{CM base}}^2 = 2 \frac{M g h}{\frac{I_{\text{CM}}}{R^2} + M} , \quad (\text{VII.44})$$

Se o objeto se reduz a um ponto, seu momento de inércia é nulo, e sua velocidade na base tem por módulo simplesmente  $\sqrt{2gh}$  .

Abra o arquivo `rolando3.mdl`. Neste cenário, um objeto redondo rola, inicialmente, plano inclinado abaixo; em seguida, por uma superfície horizontal e, finalmente, plano inclinado acima. O rolamento se dá sem deslizamento. Após a queda o movimento é uniforme, enquanto horizontal, passando a ocorrer o freamento na subida. A janela Animação 1 mostra, ao longo de todo o percurso, grandezas físicas relevantes ao exemplo.

Este é um exemplo de sistema conservativo. A energia cinética aumenta enquanto, na descida, o peso trabalha sobre o corpo. Em um intervalo de tempo infinitesimal  $dt$ , o trabalho realizado pelo peso é igual a

$$dW = P \operatorname{sen} \theta \, ds , \quad (\text{VII.45})$$

produto da componente da força na direção do movimento ( $P \sin\theta$ ) pelo elemento de deslocamento ( $ds$ ).

Lembrando que para um arco de comprimento  $s$ , subtendido pelo ângulo  $\phi$ , em uma circunferência de raio  $R$ , vale  $s = \phi R$ , temos:

$$ds = R d\phi, \quad (\text{VII.46})$$

com  $d\phi$  representando o elemento infinitesimal de deslocamento angular.

Assim, o elemento infinitesimal de trabalho pode ser escrito como

$$dW = P \sin\theta \cdot R d\phi. \quad (\text{VII.47})$$

Reconhecendo o produto  $P \sin\theta \cdot R$  como o módulo do torque produzido pelo peso, calculado em relação ao centro instantâneo de rotação  $\tau_{\text{cir}}$ , este trabalho elementar também pode ser escrito como

$$dW = \tau_{\text{cir}} d\phi. \quad (\text{VII.48})$$

As equações (VII.45) e (VII.48) expressam o mesmo elemento  $dW$ , uma em termos de variáveis translacionais, a outra em termos de variáveis rotacionais.

No caso apresentado no cenário do arquivo `w_rot.mdl`, uma única força é aplicada, tangencialmente, sobre uma roda que gira em torno de um eixo fixo. O torque exercido pela força em relação ao centro da roda, portanto, é responsável por sua aceleração angular, e o trabalho que o torque (ou a força) realiza equivale ao acréscimo na energia cinética da roda.

## POTÊNCIA

Também podemos expressar a potência instantânea em termos de variáveis rotacionais. No caso desta animação, usando a definição da equação (V.25):

$$P = \frac{dW}{dt} = F R \frac{d\phi}{dt} = F R \omega ,$$

$\omega$  representando a rapidez angular no instante considerado.

O produto  $FR$  sendo o módulo do torque resultante em relação ao centro de massa,  $\tau_{CM, res}$ , fica:

$$P = \tau_{CM, res} \omega , \quad (VII.49)$$

o análogo, no movimento rotacional de corpo rígido, do caso unidimensional da expressão (V.26).

Voltando ao rolamento sem deslizamento, uma expressão como a equação (VII.49) pode ser escrita com respeito ao centro instantâneo de rotação:

$$P = \tau_{cir, res} \omega , \quad (VII.50)$$

com o mesmo valor de  $\omega$ , já que a velocidade angular em torno do centro de massa e do centro instantâneo de rotação é a mesma — ver equação (VII.38).

Daí, podemos escrever que

$$\tau_{cir, res} \omega = \frac{d}{dt} \left( \frac{I_{cir} \omega^2}{2} \right) , \quad (VII.51)$$

traduzindo o fato de que a taxa com que trabalho é realizado sobre o corpo rígido (potência) iguala a taxa de variação de sua energia cinética. O lado direito da equação (VII.51) é válido por ser uma rotação pura a rotação em torno do eixo instantâneo.

Efetuando a derivação em relação ao tempo:

$$\tau_{cir, res} \omega = \frac{1}{2} \dot{I}_{cir} \omega^2 + I_{cir} \omega \dot{\omega} . \quad (VII.52)$$

Sabendo que  $\dot{\omega}$  é  $\alpha$ , o módulo da aceleração angular, dividindo toda a expressão por  $\omega$ , e lembrando que, por estarmos tratando de corpo rígido e homogêneo, o momento de inércia em relação ao eixo de rotação é uma constante de movimento ( $\dot{I} = 0$ ), fica:

$$\tau_{\text{cir}} = I_{\text{eir}} \alpha, \quad (\text{VII.53})$$

o que mostra que também podemos aplicar a equação (VII.21) com relação ao eixo instantâneo de rotação, além do eixo de rotação que passa pelo centro de massa do corpo que rola. Isto se torna útil, na solução de muitos problemas. Um belo texto sobre o tema é o de M. S. Tiersten, em *American Journal of Physics*, volume 59, agosto de 1991, páginas 733 a 738.

O cenário do arquivo pot1.mdl mostra uma partícula que gira em uma superfície horizontal, com atrito, em torno de um eixo coincidente com o eixo dos  $zz$  do referencial adotado. A força de atrito cinético (de módulo  $f$ ) sendo constante, e tangente à trajetória circular descrita pela partícula, provoca um torque constante em relação à origem, de módulo  $\tau_0 = fR$ , onde  $R$  é o comprimento do fio que liga a partícula ao centro de rotação (origem). Este é o torque resultante em relação à origem, já que a outra força sobre a partícula, a tensão do fio, tem sua linha de aplicação passando pela origem. O momento de inércia em relação ao eixo de rotação também é uma constante:  $I_0 = mR^2$ , onde  $m$  é a massa da partícula. Para este caso, portanto, a equação (VII.50) se escreve

$$P = fR \omega,$$

onde  $\omega$  é a rapidez angular em cada instante, que decresce à taxa constante  $\alpha$  obtida, por exemplo, da equação (VII.16):

$$fR = mR^2 \cdot \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{f}{mR}.$$

Temos aqui, portanto, um movimento circular uniformemente acelerado.

## EXEMPLO DE VÍNCULO ENTRE GRANDEZAS DE TRANSLAÇÃO E DE ROTAÇÃO

No cenário do arquivo `ex_7_08.mdl`, um bloco de massa  $m = 1 \text{ kg}$  é largado de uma altura  $h = 1 \text{ m}$ , preso a um fio inextensível e sem massa, que está enrolado em torno da roldana de raio  $R = 0,1 \text{ m}$ , cujo momento de inércia em relação ao eixo de rotação vale  $I = 0,01 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ . Com que aceleração cai o objeto, e quanto tempo leva para atingir a origem do referencial? Aqui, o fato de se levar em conta o momento de inércia da roldana (ou seja, sua massa e seu tamanho) implica em que estamos considerando a relação entre sua rotação e a translação do bloco. O vínculo entre estes dois movimentos está expresso por uma relação igual à equação (VII.41):

$$a = \alpha R , \quad (\text{VII.54})$$

onde  $a$  é o módulo da aceleração do bloco e  $\alpha$ , o módulo da aceleração angular da roldana. De fato, se o fio é inextensível, a também deve representar o módulo da aceleração de um ponto periférico da roldana de raio  $R$ .

A segunda lei de Newton, escrita para o bloco, tem a forma:

$$m g - T = m a , \quad (\text{VII.55})$$

onde  $T$  é a intensidade da tensão no fio.

Mas é a tensão no fio que provoca o torque sobre a roldana que, calculado em relação ao seu centro, tem  $TR$  por intensidade. Este é o torque responsável pela aceleração angular da roldana:

$$T R = I \alpha . \quad (\text{VII.56})$$

Combinando as equações (VII.54) e (VII.56):

$$a = \frac{m g}{m + \frac{I}{R^2}} ,$$

que, com os dados fornecidos, tem o valor  $a = 4,9 \text{ m/s}^2$ . Conseqüentemente, o tempo de queda será



$$t = +\sqrt{\frac{2h}{a}} = 0,64 \text{ s} ,$$

o que pode ser conferido na animação. Se desprezamos massa e tamanho da roldana, supondo  $I=0$ , recaímos no caso limite em que  $T=0$  e  $a=g$ .

## O IÔ-IÔ

Um iô-iô é o protagonista do cenário do arquivo `io_io.mdl`. A animação mostra o brinquedo subindo verticalmente até o ponto de reversão do sentido do movimento, seguindo-se a descida. Duas são as forças exercidas sobre o iô-iô: seu peso e a tensão do fio. O problema pode ser visto como o de um corpo rígido que rola, sem deslizar. O centro instantâneo de rotação, neste caso, é o ponto em que o fio perde contato com a periferia do disco que serve de eixo para o iô-iô, de raio  $r$ . Se  $M$  é a massa do brinquedo, seu momento de inércia em relação ao eixo instantâneo de rotação e o momento de inércia em relação ao centro de massa relacionam-se, de acordo com o teorema de Steiner, como  $I_{\text{eir}} = I_{\text{CM}} + M r^2$ . A animação mostra os vetores torque, aceleração angular e velocidade angular. Adotando-se como sentido positivo o sentido que aponta para dentro da tela, podemos tratar o torque como negativo, em um equacionamento escalar do problema. Verifique, como exercício, que a aceleração linear do iô-iô vale

$$a_y = -g \frac{1}{1 + \frac{I_{\text{CM}}}{M r^2}}$$

Se, ao invés do que é apresentado na animação, o problema é equacionado calculando-se o torque resultante em relação ao centro de massa do iô-iô (torque da tensão), a mesma solução será obtida.

## UMA COLISÃO INELÁSTICA

Abra o arquivo `colisaoi.mdl`, cujo cenário apresenta uma experiência em que dois discos, partilhando o mesmo eixo de rotação, estão inicialmente afastados pelo experimentador. O

disco de baixo gira a uma certa velocidade angular constante (de módulo  $\omega_1$ ), enquanto que o disco de cima está em repouso. Uma vez que este é largado sobre o outro, ambos passam a girar solidariamente, com outra velocidade angular (constante, de módulo  $\omega_2$ ). Como determiná-la? Sejam  $I_1$  e  $I_2$  os momentos de inércia dos discos inferior e superior, respectivamente, em relação ao eixo de rotação. O conjunto dos dois discos tem, portanto, em relação ao mesmo eixo, o momento de inércia  $I = I_1 + I_2$ . Não existe, aqui, nenhum torque resultante em relação a qualquer ponto do eixo. Logo, conserva-se o momentum angular total do sistema, em relação a um ponto do eixo de rotação, o que, utilizando a equação (VII.20), é expresso como:

$$I_1 \omega_1 = (I_1 + I_2) \omega_2 .$$

o que permite a determinação de  $\omega_2$ , a partir dos dados iniciais. Verifique que a energia cinética do sistema diminui, neste experimento, e explique o fato. Os dados na janela Condições Iniciais estão no SI.

### MAIS UM EXEMPLO DE CONSERVAÇÃO DE MOMENTUM ANGULAR

Outro exemplo de conservação de momentum angular é o apresentado no cenário do arquivo `l_cons_1.mdl`. Papai Noel começa a caminhar, no carrossel. Inicialmente, estavam ambos em repouso. Não havendo torque externo resultante sobre o sistema carrossel mais Papai Noel, em relação a um ponto qualquer do eixo de rotação, o momentum angular total deve permanecer constante, em relação a esse ponto. O momentum angular total inicial é nulo; logo, o momentum angular que o Papai Noel passa a possuir, com sua caminhada, deve forçosamente ser oposto ao adquirido pelo carrossel, para que a soma dos dois, que é o momentum angular final, também seja nula.



## EXERCÍCIOS DA SÉTIMA UNIDADE

1) Para cada um dos casos apresentados no cenário do arquivo torque.mdl, calcule o torque da força em relação à origem do referencial.

2) Resolva a questão proposta nos três casos do cenário do arquivo m\_a\_3.mdl.

3) Resolva a questão proposta no cenário do arquivo mom\_in\_2.mdl.

4) Uma barra de massa  $M$ , que pode girar livremente em torno de um eixo que passa por sua extremidade esquerda, mantém-se em equilíbrio na posição horizontal. Repentinamente, retira-se o apoio da extremidade direita. Mostre que o módulo da força que o eixo exerce sobre a extremidade esquerda reduz-se, instantaneamente, a  $Mg/4$ . Abra o cenário do arquivo barra.mdl, para ver a força que o eixo exerce sobre a barra durante o movimento.

5) No cenário do arquivo en\_cin.mdl três partículas giram, com uma velocidade angular constante, em torno de um eixo perpendicular à tela, que passa pelo ponto  $O$ , presas por barras de massa desprezível. Os dados da janela Condições Iniciais — massas e distâncias ao centro de rotação — estão em unidades do SI.

a) Calcule a energia cinética de translação de cada uma das partículas.

b) Calcule o momento de inércia do sistema em relação ao ponto  $O$ .

c) Determine a energia cinética de rotação do sistema e compare-a com a soma dos valores obtidos no item a).

6) Abra o arquivo pen\_fis2.mdl, em cujo cenário você pode alterar o ponto de suspensão de uma haste fina que faz o papel de um pêndulo físico.

a) Mostre que, quando a haste está suspensa por uma de suas extremidades, o período deste pêndulo, para pequenas amplitudes, vale

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

Calcule este valor, para  $L=1$  m.

b) Faça, na animação, o ponto de suspensão coincidir com uma das extremidades da haste, e utilize o registro de tempo da janela Controle para medir o período do pêndulo.

c) Compare os valores obtidos nos itens a) e b). A que você atribui a diferença entre os dois?

d) Com a animação em andamento, faça com que o ponto de suspensão coincida com o centro de massa da haste. Descreva e explique o que ocorre, neste caso.

7) Calcule, integrando, o momento de inércia de uma haste (barra) fina e homogênea, de massa  $M$  e comprimento  $L$ , em relação a um eixo que passa, perpendicularmente, pelo centro de massa. Compare seu resultado com o obtido na equação (VII.25), verificando que o Teorema de Steiner é satisfeito.

8) Utilize o Teorema de Steiner para mostrar que o ponto de suspensão e o centro de oscilação de um pêndulo físico podem ser intercambiados, sem que se altere o período.

9) Resolva a questão proposta no cenário do arquivo `imp_m_a.mdl`.

10) A barra fina e homogênea do cenário do arquivo `bar_livr.mdl` pode se deslocar livremente, sem atrito, sobre a superfície plana horizontal. Inicialmente em repouso, ela recebe o impacto de uma força horizontal de intensidade  $F = 10$  N, durante um intervalo de tempo  $\Delta t = 0,05$  s. A barra tem comprimento e massa  $L = 1$  m e  $M = 0,25$  kg, respectivamente. Na tela é informada, para os quatro casos, no SI, a distância  $h$  do ponto de aplicação da força ao centro da barra. Determine, em cada caso, a velocidade do centro de massa da barra e sua velocidade angular (vetor), após o impacto.

11) Resolva a questão proposta no cenário do arquivo `mom_in_3.mdl`.

12) No cenário do arquivo `percus2.mdl` vê-se uma haste que pode girar livremente no plano horizontal, em torno de um eixo vertical localizado à distância  $h$  do centro de massa. Uma

força impulsiva é aplicada num ponto que dista  $|h'|$  do centro de massa, onde  $h'$  é positivo se este ponto está abaixo (na tela) do centro de massa; negativo, caso contrário.

a) Mostre que a força de reação no eixo é nula quando  $M h h' = I_{CM}$ , com  $h' > 0$ . Neste caso, a força impulsiva está sendo aplicada no centro de percussão.

b) Dados  $L = 1,0$  m e  $h = 0,4$  m, determine o valor de  $h'$  para o qual a condição do item a) é satisfeita. Veja, na animação, que para este valor de  $h'$  não há força de reação no eixo.

c) Mostre que a condição do item a) pode ser escrita na forma  $d = \frac{I_0}{h M}$ , onde  $d = h + h'$  e  $I_0$  é o momento de inércia da haste em relação ao eixo de rotação.

13) Resolva as questões propostas no cenário do arquivo w\_w.mdl.

14) Um menino puxa horizontalmente um rolo de papel de raio  $R$ , desenrolando-o, sem deslizar, sobre uma superfície plana. Enquanto o rolo descreve uma volta completa:

a) Qual o comprimento de papel desenrolado?

b) Que distância percorre o centro de massa do rolo?

c) Que distância percorre a mão do menino?

Confira suas respostas no cenário do arquivo rolo.mdl.

15) Um carretel, de massa  $M$  e raio externo  $R_e$ , rola sem deslizar sobre um piso horizontal, puxado pelo fio por uma força paralela ao piso, de módulo  $F$ , exercida acima de seu centro de massa. Esta força não supera, em intensidade, a força de atrito estático máxima entre o carretel e o piso. Considere como boa aproximação o momento de inércia do carretel, em relação a seu eixo, valendo  $\frac{1}{2} MR_e^2$ . Determine o sentido da força de atrito quando o raio interno,  $R_i$ , é tal que:

a)  $R_i = 0,8 R_e$ ;

b)  $R_i = 0,25 R_e$ .

Determine para que valor da razão  $R_i/R_e$  a força de atrito será nula.

Confira suas respostas no cenário do arquivo `fa_carre.mdl`.

16) Considere uma esfera e um cilindro, maciços, homogêneos, e de mesmos raio  $R$  e massa  $M$ . Ambos são postos a descer planos inclinados iguais, rolando sem deslizar, após largados no mesmo instante e de uma mesma altura. Qual dos dois objetos chegará primeiro à base? Os momentos de inércia, em relação aos seus eixos, valem  $\frac{2}{5} M R^2$  (esfera) e  $\frac{1}{2} M R^2$  (cilindro).

Confira sua resposta no cenário do arquivo `cil_esf.mdl`.

17) No cenário do arquivo `roldana.mdl`,  $I$  representa o momento de inércia da roldana em relação a seu eixo de rotação. Determine a aceleração linear dos blocos, a aceleração angular da roldana, as tensões no fio (inextensível e sem massa) e o tempo que o bloco mais pesado leva para atingir a origem do referencial. Nota: como estamos levando em conta o momento de inércia da roldana (ou seja, sua massa e seu tamanho) o fio sofre tensões diferentes, à direita e à esquerda.

18) Responda às perguntas formuladas na tela, após transcorrida a animação do cenário do arquivo `pot2.mdl`.

19) Resolva o problema proposto no cenário do arquivo `freio.mdl`.

20) No cenário do arquivo `l_cons_2.mdl` Papai Noel, de 80 kg de massa, corre em linha reta a 2 m/s, em uma direção que tangencia o carrossel, inicialmente em repouso. O carrossel, de 3 m de raio, tem um momento de inércia em relação ao eixo de rotação de  $2000 \text{ kg m}^2$ . Uma vez alcançado pelo Papai Noel, o carrossel passa a girar. Com que velocidade angular ocorre esta rotação?

21) Abra o arquivo `i_barra.mdl`. O cenário mostra um eixo vertical (em branco), ao longo do eixo dos  $yy$ . No primeiro caso (tecla preta) o sistema considerado é um binário de duas

partículas iguais. Determine o momento de inércia desse sistema, em relação ao eixo indicado. No segundo caso (tecla verde), são quatro as partículas que constituem o sistema. Qual o momento de inércia do novo sistema, em relação ao eixo? No caso da tecla rosa, são oito as partículas. Determine, aqui também, o momento de inércia. O último caso (tecla azul) mostra um conjunto de  $N$  partículas, com  $N$  muito grande. Generalize seu resultado para  $N$ , tome o limite para  $N \rightarrow \infty$ , e verifique que o resultado coincide com a equação (VII.25).

Nota:  $\sum_{n=1}^N n^p = \frac{N^{p+1}}{p+1} + O(p)$ , onde  $O(p)$  significa soma de termos de ordem até  $p$ .





## OITAVA UNIDADE: GRAVITAÇÃO

### NEWTON E A GRAVITAÇÃO

Isaac Newton, com suas três leis do Movimento, mais a lei da Gravitação Universal, publicadas nos *Principia*, realizou o feito de unificar o que, até a sua época, eram fenômenos dissociados: a Física da Terra e a Física dos Céus. A visão aristotélica separava o estudo do movimento em nosso mundo “impuro”, abaixo da esfera da Lua, da observação do movimento na região além da Lua, onde imperava a “perfeição”, os objetos movendo-se mergulhados na quinta-essência. Segundo a lei da Gravitação, duas partículas de massas  $m_1$  e  $m_2$  atraem-se mutuamente através de forças de intensidade proporcional ao inverso do quadrado da distância que as separa. Este par ação-reação pode ser escrito, então, como:

$$\vec{F}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} \quad (\text{VIII.1 a})$$

e

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \quad (\text{VIII.1 b})$$

onde  $\vec{F}_{12}$  e  $\vec{F}_{21}$  são as forças exercidas sobre a partícula 1 (de massa  $m_1$ ) pela partícula 2 (de massa  $m_2$ ) e sobre a partícula 2 pela partícula 1, respectivamente, e  $\hat{r}_{12}$  representa o vetor unitário apontando da partícula 1 para a partícula 2. A constante  $G$ , chamada de constante de gravitação universal, vale  $6,67 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2 \cdot \text{kg}}$ . Este valor tão pequeno torna para nós

imperceptível a interação gravitacional entre objetos de nosso cotidiano (atração entre uma bola e uma mesa, por exemplo). Daí, a dificuldade em sua determinação. A primeira experiência precisa para a medida do valor de  $G$  foi a realizada por Henry Cavendish, em 1798.

Abra o arquivo `f_grav.mdl`, em cujo cenário são mostradas, através de três casos, as forças de atração gravitacional entre duas partículas. No primeiro caso (botão preto) as partículas têm a mesma massa  $m$  e estão afastadas de uma certa distância  $d$ . O segundo caso (botão verde) mostra as mesmas duas partículas, afastadas de  $2d$ . Como a intensidade da força de atração

sobre cada partícula é proporcional ao inverso do quadrado da distância que as separa, dobrar esta distância implica em dividir as forças por 4. Volte ao primeiro caso, as partículas de massa  $m$  afastadas de  $d$ . Acionando o terceiro caso (botão rosa), você vê a consequência de se reduzir à metade a massa de uma das partículas: a partícula verde tem, agora, a massa  $m/2$ . Como a força gravitacional é diretamente proporcional a cada uma das massas que interagem, as forças de atração estão, agora, reduzidas à metade.

## A ATRAÇÃO GRAVITACIONAL É CENTRAL E ISOTRÓPICA

Note, também, que a linha de ação da força exercida pela partícula amarela sobre a partícula verde passa pela partícula amarela, e vice-versa. Isto é característica das forças centrais. Se houvesse outras partículas na região, as forças com que elas seriam atraídas pela partícula verde teriam suas linhas de ação todas passando pela partícula verde.

A interação gravitacional, além de central, também é isotrópica. Isto significa que a intensidade com que as partículas verde e amarela se atraem depende apenas da distância entre ambas não importando, por exemplo, se a partícula verde está situada, na tela, acima da partícula amarela, ou à sua direita.

O cenário do arquivo `cent_iso.mdl` ilustra o caráter central da interação gravitacional, bem como sua natureza isotrópica. Estão desenhadas as forças de atração gravitacional que uma partícula  $p$  exerce, em dado instante, sobre outras quatro: as partículas 1, 2, 3 e 4, de massas iguais. Não estão indicadas as forças de interação mútua entre estas quatro partículas, nem as forças com que elas atraem  $p$ . Como a interação é central, todas as forças indicadas têm linha de ação passando por  $p$ . Além disso, a isotropia da interação garante que as forças exercidas por  $p$  sobre 1 e 2 são de mesmo módulo, já que ambas as partículas estão igualmente afastadas de  $p$ . O mesmo vale para as partículas 3 e 4.

A força de atração gravitacional do Sol sobre qualquer um de seus planetas, por exemplo, tem linha de ação passando pelo centro do Sol, que é o chamado *centro de força* do sistema.

## POR QUE UMA LEI EM $1/r^2$ ?

Por que o fator  $1/r^2$ , na expressão da intensidade da força gravitacional entre duas partículas separadas pela distância  $r$ ? Muito provavelmente, foi a terceira lei de Kepler que induziu Newton a esta formulação. As três leis de Kepler, estabelecidas empiricamente pouco tempo antes do trabalho de Newton, são o produto da observação do movimento dos planetas em torno do Sol. Vejamos inicialmente, pela ordem, o que estabelecem essas leis.

## AS LEIS DE KEPLER

A primeira Lei de Kepler estabelece que um planeta descreve órbita elíptica em torno do Sol, com um dos focos da elipse localizado no Sol. Esta também é conhecida como a lei das elipses. O termo órbita é muito utilizado, para designar a trajetória de um objeto atraído gravitacionalmente por outro.

No cenário do arquivo `ex_8_01.mdl` são mostrados quatro casos de órbita fechada. A maior distância do centro da elipse a um de seus pontos é o chamado semi-eixo maior da elipse; a menor distância é o semi-eixo menor. A excentricidade de uma elipse é tal que o produto de seu valor pelo valor do semi-eixo maior fornece a distância de cada um dos focos da elipse ao seu centro. A circunferência é uma elipse de excentricidade igual a zero, isto é, uma elipse em que os focos coincidem (no centro). A órbita da Terra em torno do Sol e a da Lua em torno da Terra são praticamente circulares.

O cenário do arquivo `kepler1.mdl` ilustra a primeira lei de Kepler. Repare como o planeta viaja muito mais rapidamente, quando mais próximo do Sol. Isto reflete o estabelecido na segunda lei de Kepler, segundo a qual o vetor posição que localiza o planeta em relação ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais. A segunda lei, conhecida como lei das áreas, está ilustrada no cenário do arquivo `kepler2.mdl`, onde no primeiro caso (botão preto) a órbita é circular.

A órbita elíptica sendo fechada, o movimento do planeta em torno do Sol é um movimento periódico. A cada período transcorrido, o planeta retorna à mesma posição, reiniciando o traçado da mesma elipse. A terceira lei de Kepler, também conhecida como lei dos períodos, ou lei harmônica, estabelece que o semi-eixo maior da elipse, elevado ao cubo, é proporcional

ao período do movimento, elevado ao quadrado. Chamando de  $a$  o semi-eixo maior da elipse e de  $T$  o período do planeta, esta lei expressa que

$$T^2 \propto a^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{T^2}{a^3} = \text{constante} . \quad (\text{VIII.2})$$

No caso de órbita circular, isto é facilmente verificável. Chamemos de  $M_s$  e  $m$  as massas respectivas do Sol e do planeta, e de  $R$  a distância entre os dois. A força gravitacional com que o Sol atrai o planeta faz o papel da força centrípeta do movimento circular uniforme descrito pelo planeta em torno do Sol:

$$G \frac{M_s m}{R^2} = m \frac{v^2}{R} . \quad (\text{VIII.3})$$

Mas a rapidez do planeta equivale ao comprimento da trajetória (circunferência) dividido pelo tempo transcorrido em traçá-la (período):

$$v = \frac{2 \pi R}{T} . \quad (\text{VIII.4})$$

Combinando as equações (VIII.3) e (VIII.4):

$$T^2 = \frac{4 \pi^2}{GM_s} R^3 , \quad (\text{VIII.5})$$

mostrando que a relação entre  $T^2$  e  $R^3$  só depende da massa do Sol, sendo constante para todos seus planetas. Um artigo que apresenta, de forma clara e simples, uma demonstração geral da terceira lei de Kepler, foi publicado em *The Physics Teacher*, volume 34, de janeiro de 1996, páginas 42 e 43: *Kepler's Third Law for Elliptical Orbits*, por Ellis D. Noll.

No cenário do arquivo kepler3.mdl é apresentado um gráfico  $T$  versus  $a$  para os nove planetas de nosso sistema solar, em que  $a$  é o raio médio da órbita de cada planeta. Os pontos verdes representam valores observados, enquanto que a curva traçada corresponde à equação  $T^2 = (4\pi^2/GM_s) a^3$ . Também, a janela Gráfico mostra  $T^2$  versus  $a^3$ , cuja linearidade

confirma a terceira lei de Kepler. O raio médio da órbita de um planeta coincide com o semi-eixo maior da trajetória, pois é definido como sendo a média aritmética dos valores da distância mais próxima ao Sol (periélio) e da distância mais distante do Sol (afélio), valores estes que, somados, igualam o eixo maior da trajetória, ou seja,  $2a$ .

Alguns dados de nosso sistema solar, com uma visão da órbita mais excêntrica — a de Plutão — são o cenário do arquivo `st_solar.mdl`.

### POR QUE UMA LEI EM $1/r^2$ ?

Kepler enunciou suas três leis a partir de dados observados, por ele e por seu mestre e precursor, Tycho Brahe. Newton se valeu desse trabalho para estabelecer sua lei de força com a dependência  $1/r^2$ . Imagine a Lua em órbita circular em torno da Terra, e chame de  $T_1$  e  $R_1$ , respectivamente, o período e o raio deste movimento. Se pudéssemos duplicar o raio da trajetória da Lua, fazendo-a descrever o círculo de raio  $R_2 = 2R_1$ , então, como a terceira lei de Kepler estabelece que  $T \propto R^{3/2}$ , o novo período passaria a ser  $T_2 = 2^{3/2}T_1 = \sqrt{8}T_1 = 2\sqrt{2}T_1$ . A força de atração da Terra sobre a Lua, no caso da trajetória circular de raio  $R_1$ , é de intensidade  $F_1 = M_L v_1^2 / R_1$ , onde  $M_L$  é a massa da Lua e  $v_1 = 2\pi R_1 / T_1$ . No caso da trajetória de raio  $R_2$ , a força de atração gravitacional tem a intensidade  $F_2 = M_L v_2^2 / R_2$ , com  $v_2 = 2\pi R_2 / T_2 = 2\pi(2R_1) / (2\sqrt{2})T_1 = (\sqrt{2}/2)2\pi R_1 / T_1 = (\sqrt{2}/2)v_1$ . Logo,  $F_2 = M_L (1/2) v_1^2 / 2R_1 = 1/4 F_1$ . Então, dobrar o raio da trajetória implica em dividir por quatro a força de atração. Portanto, a força de atração deve diminuir com o aumento da distância na proporção do inverso do quadrado da distância. É por este motivo que a interação é conhecida como uma *interação em  $1/r^2$* . Uma outra interação em  $1/r^2$ , bem conhecida, é a eletromagnética.

### O PROBLEMA DE DOIS CORPOS

Abra o arquivo `2corpos1.mdl`, cujo cenário apresenta a solução da equação de movimento do “planeta” de massa  $m$  atraído gravitacionalmente pelo centro de força de massa  $M = 10^9 m$ . Como o centro atrator tem massa muito maior, podemos ignorar seu deslocamento, colocando-o em repouso na origem do referencial inercial. A equação de movimento é a

segunda lei de Newton, onde a força resultante é a força de atração gravitacional. O problema é decomposto segundo as duas direções coordenadas (eixos dos  $x$  e dos  $y$ ). Em cada direção, é realizada a dupla integração numérica no tempo: a integração da aceleração levando à velocidade e, em seguida, a integração da velocidade dando a posição. Fixando-se as condições iniciais, posição e velocidade em  $t_0 = 0$ , a trajetória do planeta fica completamente determinada. Com os valores constantes na janela Valores Iniciais, a órbita (gráfico  $x$  versus  $y$ ) é circular, e percorrida de maneira uniforme. Altere a velocidade inicial, introduzindo o valor  $0,13 \text{ m/s}$  para sua componente horizontal, e você verá, agora, uma órbita elíptica, traçada de maneira não uniforme.

### POR QUE UMA LEI EM $1/r^2$ ?

Uma idéia de como os corpos gravitariam sob leis diferentes é dada no cenário do arquivo  $r^n.mdl$ , onde os quatro casos apresentados contemplam leis de atração em  $1/r^n$ , com os expoentes  $n=2$ ,  $n=1$ ,  $n=1,8$  e  $n=2,2$ . Você pode modificar a velocidade inicial do “planeta”, em cada caso, na janela Condições Iniciais, alterando o perfil das trajetórias. Os três últimos casos lhe parecem ser de movimentos periódicos?

### AS CÔNICAS

Abra o arquivo  $excentr.mdl$ , em cujo cenário são traçadas possíveis trajetórias de uma partícula atraída por um centro de força de massa muito maior (situado na origem do referencial da janela Gráfico). São quatro os casos apresentados. Em dois deles (botões preto e verde) a trajetória é fechada, cíclica, e o movimento é periódico. Nos outros dois (botões rosa e azul) a trajetória é aberta. Mas as quatro trajetórias pertencem à mesma classe de curvas, as cônicas. As duas trajetórias fechadas são a circunferência e a elipse, as duas abertas são a parábola e a hipérbole. Se  $\varepsilon$  é o valor da excentricidade da cônica, tem-se que, para estas quatro curvas,  $\varepsilon = 0$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ ,  $\varepsilon = 1$  e  $\varepsilon > 1$ , respectivamente. É importante notar que são as condições iniciais que determinam a excentricidade e, portanto, a forma da trajetória.

### AINDA O PROBLEMA DE DOIS CORPOS

O cenário do arquivo 2corpos2.mdl mostra o movimento de atração entre duas partículas de massas iguais. O centro de massa do sistema binário está representado por um ponto vermelho. As trajetórias elípticas têm um dos focos coincidindo com o centro de massa. A janela Condições Iniciais está aberta, e você pode alterar os dados para ver que movimentos resultam. Uma análise da atração gravitacional entre partículas de massas comparáveis pode ser vista na seção 7.3 de *Analytical Mechanics*, sixth edition, de G. R. Fowles e G. L. Cassiday, editado por Saunders College, 1999.

### O PROBLEMA DE TRÊS CORPOS

Quando são três corpos que interagem simultaneamente, não existe solução analítica para o problema. O equacionamento é simples, pois basta escrever a segunda lei de Newton aplicada a cada um dos corpos, mas os recursos matemáticos disponíveis não permitem solução analítica. Uma solução numérica é apresentada no cenário do arquivo 3corpos.mdl, para três casos distintos. No primeiro caso (botão preto) as massas das partículas respeitam a proporção 20/5/1. Nos outros casos (botões verde e rosa) a proporção vale 3/5/2, a diferença residindo nas posições e velocidades iniciais das partículas.

### O VALOR DE $g$ NA SUPERFÍCIE DA TERRA

Nas unidades anteriores tratamos apenas de problemas de atração gravitacional junto à superfície da Terra, onde é uma boa aproximação considerar constante a distância entre o centro da Terra e o objeto cujo movimento estudamos. Esta distância constante é tomada igual ao raio da Terra e, por estar sujeito a uma força de atração constante, o objeto também tem uma aceleração constante. Realmente, neste caso podemos igualar a intensidade da força de interação das equações (VIII.1 a,b) com o módulo do peso do móvel:

$$G \frac{M_T m}{R_T^2} = m g \quad \Rightarrow \quad g = G \frac{M_T}{R_T^2}, \quad (\text{VIII.6})$$

onde  $m$  é a massa do móvel,  $M_T$  e  $R_T$  são a massa e o raio da Terra, respectivamente, e  $g$  é o módulo da aceleração da gravidade na superfície da Terra. A substituição dos valores  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 / (\text{s}^2 \cdot \text{kg})$ ,  $M_T = 5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$  e  $R_T = 6,38 \times 10^6 \text{ m}$  leva a  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .



## MASSA INERCIAL, MASSA GRAVITACIONAL

Cabe, aqui, lembrar o comentário que fizemos no último parágrafo da Quarta Unidade, onde mencionamos o princípio da equivalência, segundo o qual massa gravitacional e massa inercial são idênticas. Suponhamos, por um momento, que isto não se verifique, e consideremos uma partícula de massa inercial  $m_i$  e massa gravitacional  $m_g$ , em uma região próxima à superfície da Terra. Agora, a equação (VIII.6) deve ser substituída por

$$G \frac{M_T m_g}{R_T^2} = m_i g \quad \Rightarrow \quad g = G \frac{M_T m_g}{R_T^2 m_i},$$

já que a massa inercial é o fator de proporcionalidade na segunda lei de Newton, enquanto que a massa gravitacional é a presente na lei da Gravitação. Desta forma, a aceleração de queda livre seria diferente, para corpos diferentes, dependendo da razão  $m_g/m_i$  de cada um, o que não se observa.

## A ACELERAÇÃO DA GRAVIDADE A UMA ALTITUDE QUALQUER

Quando a distância do objeto ao centro da Terra é significativamente variável, sua aceleração deixa de ser uma constante, e o problema cresce em complexidade. Seja uma partícula de massa  $m$ , atraída pela Terra. Escolhamos o eixo dos  $yy$  orientado do centro da Terra para a partícula, conforme indicado na figura 23.

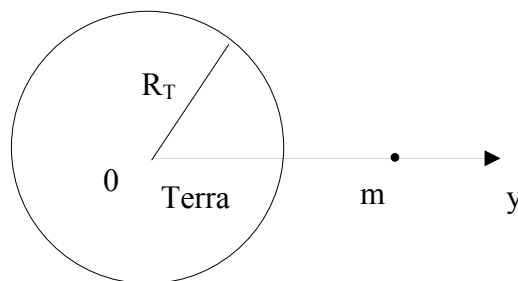


Figura 23 — Referencial para o estudo da variação da aceleração da gravidade.

A segunda lei de Newton, agora, se escreve como

$$m \frac{dv}{dt} = -G \frac{M_T m}{y^2},$$

onde o sinal negativo indica o sentido da força de atração. Uma relação muito útil, na solução de equações diferenciais unidimensionais de movimento, é obtida fazendo-se a substituição

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy} \frac{dy}{dt}, \text{ e reconhecendo que } \frac{dy}{dt} = v:$$

$$\frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{dy}. \quad (\text{VIII.7})$$

Com isto:

$$v \frac{dv}{dy} = -GM_T \frac{1}{y^2}.$$

Logo:

$$\int_{v_1}^{v_2} v \, dv = -GM_T \int_{R_T}^{R_T+h} \frac{dy}{y^2}, \quad (\text{VIII.8})$$

onde  $v_1$  e  $v_2$  são os módulos das velocidades da partícula na superfície da Terra (quando  $y = R_T$ ) e a uma altura  $h$  (quando  $y = R_T + h$ ), respectivamente.

Realizando as integrações:

$$\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) = GM_T \left( \frac{1}{R_T + h} - \frac{1}{R_T} \right) \Rightarrow v_2^2 = v_1^2 - 2GM_T \frac{h}{R_T(R_T + h)}. \quad (\text{VIII.9})$$

Note que, se estamos próximos à superfície da Terra, com  $h \ll R_T$ , podemos fazer a aproximação  $v_2^2 = v_1^2 - 2 \frac{GM_T}{R_T^2} \frac{h}{1 + h/R_T} \cong v_1^2 - 2gh$ , onde foi utilizada a equação (VIII.6). Este é

um resultado familiar, em problemas de queda livre.

A equação (VIII.9) permite, por exemplo, que se determine a altura máxima atingida por um objeto lançado verticalmente para cima, da superfície da Terra, com dada rapidez  $v_1$ . Chamando de  $H$  esta altura, e lembrando que ela é atingida quando  $v_2 = 0$ , obtém-se

$$H = \frac{R_T^2 v_1^2}{2GM_T - R_T v_1^2} .$$

Você pode confirmar esta expressão abrindo o arquivo `alt_max.mdl`, em cujo cenário o lançamento vertical é resolvido através da integração numérica da equação de movimento. Veja como varia a aceleração, que diminui de módulo com o aumento da altitude. Este pode ser o exemplo de um foguete que, uma vez lançado, desloca-se sem propulsão própria. Seu ponto de lançamento, na superfície da Terra, é localizado por  $y_1 = R_T$ . Os dados numéricos são informados no SI.

Outros fatores responsáveis pela variação da aceleração da gravidade, aqui não tratados, são o devido à não uniformidade da Terra (densidade de massa não constante) e o devido à sua rotação.

## A LUA CAINDO NA TERRA

Se o lançamento é inclinado, sabemos que o projétil descreve uma trajetória plana curva que, no caso de aceleração constante, tem um perfil parabólico. Abra o arquivo `newton.mdl`, cujo cenário mostra um projétil lançado, horizontalmente, do cume de uma elevação. Com o aumento da velocidade de lançamento, o ponto em que o solo é atingido torna-se mais distante. Isto pode ser visto acionando-se, sucessivamente, os botões preto, verde e rosa. No caso do botão rosa, a trajetória acompanha a curvatura da Terra: neste caso, ao invés de atingir o solo, o projétil permanecerá em órbita em torno da Terra. Este foi o argumento utilizado por Newton para mostrar que o movimento da Lua ao redor da Terra é de mesma natureza que o de queda livre de uma pedra. A Lua está em permanente queda livre. A aceleração centrípeta de seu movimento circular é a própria aceleração da gravidade em um ponto cuja distância ao centro da Terra é igual ao raio da trajetória lunar.

## IMPONDERABILIDADE

Um astronauta, viajando em uma cápsula espacial em órbita em torno da Terra, experimenta a sensação de imponderabilidade (ausência de peso) por possuir a mesma velocidade e a mesma aceleração centrípeta da cápsula, que lhe serve de referencial. Nas filmagens de *Apollo 13*, o diretor Ron Howard utilizou o avião KC-135 da NASA, para simular este efeito — veja o cenário do arquivo `kc_135.mdl`.

## DEMONSTRANDO A SEGUNDA LEI DE KEPLER

Voltemos a um planeta orbitando em torno do Sol, com este situado na origem de um referencial inercial. Como o Sol é muito mais massivo do que o planeta, podemos considerá-lo em repouso. O Sol, na origem, é o centro atrator do planeta, um centro de força em torno do qual o planeta se desloca. Se  $\vec{r}$  é o vetor posição do planeta, em um instante de tempo qualquer  $t$ , então neste mesmo instante a força gravitacional que atrai o planeta para o Sol,  $\vec{F}$ , será oposta a  $\vec{r}$ . Logo, a força de atração tem sua linha de ação passando sempre pela origem. Em relação à origem, portanto, a força não produz torque, já que o braço de alavanca é nulo. Se esta é a única força exercida sobre o planeta, o torque externo sobre ele é nulo e, de acordo com o princípio de conservação do momentum angular, o momentum angular do planeta em relação à origem,  $\vec{L}$ , será uma constante de movimento. Temos, aí, uma importante conclusão: é constante o momentum angular de um planeta em sua trajetória em torno do Sol, como consequência do fato de ser central a força de interação gravitacional. Lembremos que

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} ,$$

onde  $m$  e  $\vec{v}$  são a massa do planeta e sua velocidade, respectivamente. Sendo o produto vetorial do vetor posição do planeta pelo seu momentum linear ( $\vec{p} = m\vec{v}$ ), o momentum angular  $\vec{L}$  é dirigido perpendicularmente ao plano definido por  $\vec{r}$  e  $\vec{p}$ . Como  $\vec{L}$  é um vetor constante, então este plano também se mantém constante, isto é, o vetor  $\vec{p}$  está sempre no mesmo plano (o que também vale, naturalmente, para a velocidade  $\vec{v}$ ). Logo, o movimento planetário é plano. Isto é consequência da conservação do momentum angular, em relação ao centro de força, valendo para qualquer força central, não apenas para a atração gravitacional. Estamos exemplificando com um sistema planeta-Sol por motivos históricos, pois aí está a

origem das leis de Kepler. Veja o cenário do arquivo `r_v_1.mdl`, onde o plano da órbita do planeta é o plano x-y.

Podemos escrever a conservação de momentum angular de um planeta, em sua trajetória em torno do Sol, lançando mão da equação (VII.20):

$$I\omega = \text{constante} \quad , \quad (\text{VIII.10})$$

onde  $I$  e  $\omega$  denotam, respectivamente, o momento de inércia do planeta em relação a um eixo perpendicular ao plano da trajetória, que passa pelo Sol, e o módulo de sua velocidade angular. Quanto mais afastado o planeta estiver do Sol, maior será o momento de inércia e menor será a velocidade angular. Isto está ilustrado no cenário do arquivo `cons_1.mdl`, para dois casos de planeta orbitando em torno do Sol, o primeiro deles apresentando uma trajetória circular. O Sol, muito mais massivo que o planeta, está colocado, em repouso, na origem do referencial.

A conservação do momentum angular nos leva facilmente à demonstração da segunda lei de Kepler. Lembremos, primeiro, que ao definirmos o produto vetorial de dois vetores, no início da Sétima Unidade, foi visto que o produto vetorial tem por módulo o valor da área do paralelogramo definido pelos dois vetores. A figura 24 mostra o vetor posição e o elemento de deslocamento infinitesimal de um planeta, em

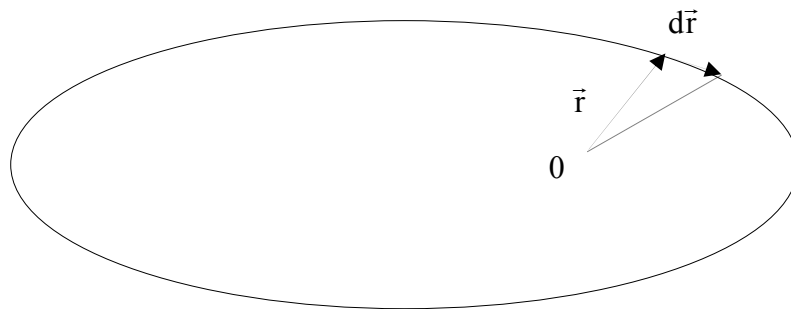


Figura 24 — Esquema para demonstração da lei das áreas.

um instante qualquer. Em um intervalo de tempo  $dt$ , o vetor posição  $\vec{r}$  varre o triângulo formado por  $\vec{r}$ ,  $d\vec{r}$ , e a linha tracejada que une a origem (o foco da elipse, origem do vetor posição) à extremidade de  $d\vec{r}$ . Mas este triângulo tem, por área, a metade da área do quadrilátero definido por  $\vec{r}$  e  $d\vec{r}$ . A área do triângulo, portanto, vale a metade do módulo do

produto vetorial desses dois vetores. Seja  $dA$  a notação para esta área elementar. Podemos, então, escrever:

$$dA = \frac{1}{2} |\vec{r} \times d\vec{r}| .$$

Logo:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \left| \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| = \frac{1}{2m} |\vec{r} \times m\vec{v}| = \frac{1}{2m} |\vec{L}| ,$$

onde  $\vec{L}$  é o momentum angular do planeta, em relação ao centro de força. Como esta é uma quantidade constante,  $dA/dt$  é uma constante de movimento, e o vetor posição do planeta varre áreas iguais em tempos iguais. Veja o exemplo do planeta que percorre a órbita do cenário do arquivo `ex_8_02.mdl`.

## CAMPO GRAVITACIONAL

Temos tratado as interações através das forças a elas associadas, à luz das segunda e terceira leis de Newton. Um outro conceito, muitas vezes útil na abordagem de problemas, é o de campo. Aqui, interessa-nos o campo gravitacional. Para introduzi-lo, precisamos primeiro definir o que é um corpo de prova. Considere uma partícula de massa  $m$ , situada em uma região onde se encontra outra partícula, de massa  $M$ , de modo que ocorre interação gravitacional entre ambas. A partícula de massa  $m$  será um corpo de prova se sua massa for tão pequena a ponto de não alterar significativamente o efeito da atração que  $M$  possa vir a exercer sobre uma eventual terceira partícula colocada na região. Uma maneira de indicar isto é escrevendo:  $m \ll M$ . (No eletromagnetismo também, de maneira análoga, se define a carga de prova, como sendo uma partícula de carga muito menor que a de outra com a qual interage, de modo a não interferir perceptivelmente na interação eletromagnética desta outra com uma eventual terceira carga que venha a ser colocada na região.) Consideremos um sistema de coordenadas com a origem coincidindo com a posição da partícula de massa  $M$ . Seja  $\vec{r}$  o vetor posição do corpo de prova, neste referencial. Então, a atração gravitacional exercida por  $M$  sobre  $m$  se dá através da força

$$\vec{F} = -G \frac{M m}{r^2} \hat{r} , \quad (\text{VIII.11})$$

onde denotamos por  $\hat{r}$  o vetor unitário  $\vec{r}/r$  (veja a equação (VIII.1 a)). Definimos o campo gravitacional  $\vec{g}$  como sendo a grandeza vetorial

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{G M}{r^2} \hat{r} , \quad (\text{VIII.12})$$

uma grandeza independente da massa do corpo de prova. Este é um campo vetorial. Você ainda terá a oportunidade de ser apresentado, na Física, a outras formas de campos vetoriais e escalares. O campo gravitacional é um campo vetorial, central e isotrópico, explicitamente dependente de posição, e tem a mesma dimensão da aceleração. Abra o arquivo campo1.mdl, em cujo cenário você pode alterar a localização do corpo de prova, vendo como varia com a posição o campo gravitacional criado, em uma região do espaço, por uma determinada massa. No cenário do arquivo campo2.mdl as responsáveis pelo campo gravitacional, em determinada região do espaço, são duas partículas de mesma massa, em um dos casos, e de massas diferentes, no outro caso. Mudando a posição do corpo de prova, você vê como variaria o campo gravitacional devido a cada uma dessas massas, se a outra não existisse e, em uma composição vetorial, o campo gravitacional efetivo (seta amarela), soma vetorial dos dois campos individuais.

O arquivo g\_varia.mdl permite visualizar, em seu cenário, a variação do módulo do campo gravitacional criado por um objeto com massa igual à da Terra. Na janela Animação 1 o objeto é a própria Terra, na janela Animação 2 o objeto é uma partícula pontual. Enquanto a distância entre o corpo responsável pelo campo e o corpo de prova é igual ou maior que o raio da Terra, o campo é o mesmo nas duas animações. A diferença está nas distâncias menores que o raio da Terra. No caso de um atrator pontual, o comportamento é o dado pela equação (VIII.12) mas, quando o atrator é a Terra, vê-se que a variação do campo é linear, em seu interior, a partir de zero no centro da Terra (a Terra, aqui, é perfeitamente esférica e homogênea). Em qualquer ponto exterior à Terra, o campo coincide com a aceleração da gravidade no ponto.

## CAMPO GRAVITACIONAL NO EXTERIOR DE UMA ESFERA HOMOGÊNEA

Procuramos, portanto, entender a variação do campo gravitacional criado pela Terra. Inicialmente, consideremos uma casca esférica de raio  $R$  e massa  $M$ . Seja  $r$  a distância, ao centro da casca, de uma partícula de massa  $m$ , e consideremos, para começar,  $r \geq R$ , isto é, a partícula localizada externamente à casca — veja a figura 25.

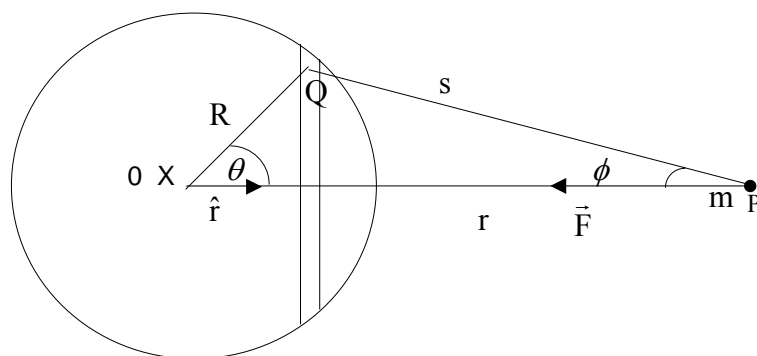


Figura 25 — Partícula atraída gravitacionalmente por uma casca esférica.

O ponto  $Q$  pertence à casca. A linha radial que liga este ponto ao centro da casca forma o ângulo  $\theta$  com a linha que une o centro à partícula localizada em  $P$ . O segmento de comprimento  $s$  liga os pontos  $P$  e  $Q$ . O ângulo entre os segmentos de comprimentos  $r$  e  $s$  é  $\phi$ . A força com que a partícula é atraída pela casca,  $\vec{F}$ , tem a orientação indicada, devido à simetria do problema. O vetor  $\hat{r}$  é o unitário na direção da força. A figura mostra um anel elementar, de massa  $dM$  e raio igual a  $R \sin \theta$ , que contém o ponto  $Q$ . Como este anel tem uma espessura infinitesimal, esta espessura vale o mesmo que o arco elementar em  $Q$ :  $R d\theta$ . Seja  $\rho$  a densidade superficial de massa da casca, ou seja, a razão da massa da casca por sua superfície:

$$\rho = \frac{M}{4\pi R^2} . \quad (\text{VIII.13})$$

A massa do anel elementar é o produto da densidade por sua superfície elementar. Como esta superfície é igual ao produto da espessura elementar do anel por sua circunferência, fica:



$$dM = \rho \cdot 2\pi R \sin\theta \cdot R d\theta = 2\pi R^2 \rho \sin\theta d\theta .$$

Cada ponto do anel dista  $s$  da partícula. Por simetria, as componentes perpendiculares ao segmento de comprimento  $r$  das forças com que cada um desses pontos atrai a partícula se anulam, somando-se apenas as horizontais, que na figura apontam para a esquerda. É por este motivo que o elemento de força com que a partícula é atraída aponta para a esquerda, e tem o módulo

$$dF = G \frac{m dM}{s^2} \cos\phi .$$

Esta é a força de atração devida ao anel. A força exercida pela casca esférica é obtida integrando-se o elemento de força ao longo de todos os anéis que constituem a casca, variando-se o ângulo  $\theta$  de zero até  $\pi$  :

$$F = \int dF = G m \int \frac{dM}{s^2} \cos\phi = G m 2\pi R^2 \rho \int_0^\pi \frac{\cos\phi \sin\theta}{s^2} d\theta . \quad (\text{VIII.14})$$

Uma expressão para  $\sin\theta d\theta$  pode ser obtida da relação abaixo, para o triângulo OQP :

$$r^2 + R^2 - 2rR \cos\theta = s^2 .$$

Como  $r$  e  $R$  são constantes:

$$2rR \sin\theta d\theta = 2s ds \quad \Rightarrow \quad \sin\theta d\theta = \frac{s ds}{r R} . \quad (\text{VIII.15})$$

Para o mesmo triângulo, também vale a relação

$$r^2 + s^2 - 2rs \cos\phi = R^2 ,$$

que nos permite chegar a uma expressão conveniente para  $\cos\phi$  :

$$\cos\phi = \frac{r^2 + s^2 - R^2}{2rs} . \quad (\text{VIII.16})$$

Com a substituição das equações (VIII.15) e (VIII.16) na equação (VIII.14):

$$F = \frac{G M m}{4 r^2 R} \int_{r-R}^{r+R} \left( 1 + \frac{r^2 - R^2}{s^2} \right) ds , \quad (\text{VIII.17})$$

onde foi feita a substituição da densidade superficial de massa pelo seu valor — equação (VIII.13). Com esta mudança da variável de integração (de  $\theta$  para  $s$ ), os limites de integração passam a ser o valor de  $s$  quando  $\theta$  é igual a zero,  $r-R$ , e o valor de  $s$  quando  $\theta$  é igual a  $\pi$ ,  $r+R$ . Calculando a integral, e escrevendo em notação vetorial:

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r} , \quad (\text{VIII.18})$$

o que coincide com a força que a partícula, localizada em  $P$ , sofreria se fosse atraída gravitacionalmente por uma partícula de massa  $M$  localizada em  $O$  — veja a equação (VIII.11). Assim, provamos que a massa da casca esférica atua gravitacionalmente, sobre uma partícula externa, como se estivesse concentrada em seu centro geométrico. Se isto vale para a casca, vale também para uma esfera maciça, que pode ser vista como uma sucessão infinita de cascas, uma encaixada sobre a outra, com raios variando de zero até o próprio raio da esfera. A Terra, então, atrai um corpo como se ela fosse uma partícula com a sua massa, localizada em seu centro. Claro, continuamos vendo a Terra, simplificada, como possuindo simetria esférica.

## CAMPO GRAVITACIONAL NO INTERIOR DE UMA ESFERA HOMOGÊNEA

O mesmo cálculo pode ser repetido, considerando a partícula localizada no interior da casca esférica, e portanto com  $r < R$ . Neste caso, os limites de integração na equação (VIII.17) passam a ser  $R-r$  e  $R+r$ , o que anula a integral. Então, uma partícula no interior da casca esférica não é atraída gravitacionalmente por ela, existindo uma compensação perfeita das

atrações por cada ponto da casca. Logo, fazendo a extensão para uma esfera maciça, podemos concluir que uma partícula no interior de uma esfera só é atraída gravitacionalmente pela porção da esfera contida em uma região de raio menor que a distância da partícula ao centro da esfera.

No cenário do arquivo *simetria.mdl* uma partícula é atraída gravitacionalmente por outras oito, dispostas simetricamente em um plano. Acionando a animação, você tem uma idéia de como ocorrem as compensações que anulam a força resultante sobre a partícula, dentro da casca.

Coloquemos a partícula dentro da Terra, distante  $r$  de seu centro. Se  $\rho_T$  é a densidade volumétrica de massa da Terra, então

$$\rho_T = \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} .$$

A partícula está sendo atraída pela esfera de raio  $r$ , e portanto de volume  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ . A massa desta esfera vale

$$M = \rho_T V = \left(\frac{r}{R_T}\right)^3 M_T .$$

Logo, a força de atração sobre a partícula tem módulo

$$F = G \frac{mM}{r^2} = G \frac{m}{r^2} \left(\frac{r^3}{R_T^3}\right) M_T = G \frac{mM_T}{R_T^3} r . \quad (\text{VIII.19})$$

A equação (VIII.19) nos diz que, à medida que vamos penetrando no interior da Terra, diminuindo a distância radial  $r$  que nos separa de seu centro, a força de atração gravitacional (e, conseqüentemente, também o campo) vai diminuindo linearmente com  $r$ .

## ENERGIA POTENCIAL GRAVITACIONAL

Passemos, agora, a considerações energéticas. Como a força gravitacional é conservativa, podemos associar a ela uma energia potencial. Uma partícula de massa  $M$  atrai outra, de massa  $m$ , através da força expressa na equação (VIII.11), que pode ser escrita como

$$\vec{F} = -F(r) \hat{r} ,$$

onde

$$F(r) = GMm \frac{1}{r^2}$$

é uma função da posição radial  $r$ .

Fazendo uso da equação (V.22), a energia potencial  $U(r)$  varia radialmente de acordo com a expressão

$$\frac{dU(r)}{dr} = GMm \frac{1}{r^2} .$$

Logo,

$$U(r) = GMm \left( \frac{-1}{r} \right) + \text{constante} .$$

É usual fazer-se nula esta constante, em problemas gravitacionais em que ocorrem grandes variações da distância entre os objetos que se atraem. Assim:

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} . \quad (\text{VIII.20})$$

Esta escolha significa que se adotou o valor zero da energia potencial no infinito:  $U(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ . Logo, a energia potencial é negativa, qualquer que seja a distância  $r$  finita. Esta é uma escolha conveniente, e o fato de se trabalhar com uma energia potencial sempre negativa é simples consequência da escolha arbitrária de uma constante de integração, não

possuindo nenhum significado físico. Se alteramos as posições das partículas de forma a que a distância entre elas passe de  $r_1$  para  $r_2$ , então teremos realizado um trabalho

$$W = U(r_2) - U(r_1) = -GMm \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right).$$

Se  $r_2 > r_1$ , então o trabalho realizado é positivo: temos que trabalhar sobre o sistema, para afastar as duas partículas que se atraem. Isto, sim, tem significado físico.

Papai Noel passeia, no cenário do arquivo ex\_8\_03.mdl, atraído pelo centro de força de massa  $M$  muito maior que sua própria massa. Enquanto a distância entre o centro de força e Papai Noel é constante, a energia potencial do sistema,  $U$ , não varia. Mas, nos intervalos de tempo entre 1,00 e 1,02 segundos, entre 2,00 e 2,02 segundos, e entre 3,00 e 3,02 segundos, existe variação de  $U$ , por ter ocorrido variação na distância radial. Quando Papai Noel se aproxima do centro de força,  $U$  diminui (torna-se mais negativo); quando Papai Noel se afasta,  $U$  aumenta. Assim, nos percursos em que se aproxima do centro de força, trabalho é realizado sobre o Papai Noel, em quantidade igual à diminuição da energia potencial; nos percursos em que se afasta, Papai Noel deve trabalhar, em quantidade igual ao aumento de  $U$ .

Como no interior de uma casca esférica a força gravitacional exercida sobre uma partícula é nula, então a energia potencial do sistema é constante. O valor dessa constante deve coincidir com o valor da energia potencial quando a partícula encontra-se em um ponto qualquer da superfície da casca esférica.

## CAMPO GRAVITACIONAL ESCALAR

Podemos, também, definir um campo escalar, muitas vezes chamado de potencial gravitacional, como sendo a energia potencial por unidade de massa:

$$\phi(r) = -\frac{GM}{r}.$$

Formalmente, escreve-se

$$\phi(r) = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{U(r)}{m}, \quad (\text{VIII.21})$$

evidenciando o fato de que se toma um corpo de prova de massa muito pequena, de modo a não alterar o campo que se quer medir. Um objeto massivo, portanto, cria ao seu redor um campo vetorial e um campo escalar, funções de posição dependentes da massa que os cria, existentes mesmo quando não haja nenhuma outra partícula sendo atraída.

Se no interior de uma casca esférica a energia potencial do sistema casca-corpo de prova é constante, e igual ao valor que tem quando o corpo de prova se encontra na superfície da casca, então o potencial gravitacional criado pela casca esférica vale  $\phi = -GM/R$ , para pontos do espaço com  $r \leq R$ , onde  $R$  e  $M$  são os valores respectivos do raio e da massa da casca esférica. Externamente à casca,  $\phi(r) = -GM/r$ . Isto pode ser visualizado no cenário do arquivo `ph_casca.mdl`.

A conservação de energia mecânica para uma partícula de massa  $m$  que é atraída por outra, de massa  $M$ , é escrita como:

$$E = K(r) + U(r) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \text{constante}, \quad (\text{VIII.22})$$

onde  $v$  é a rapidez do “planeta” e estamos considerando  $M \gg m$ , de modo a podermos imaginar o centro de força imóvel, no referencial inercial adotado. Abra o arquivo `orbitas.mdl`, em cujo cenário a partícula atraída (um cometa atraído pelo Sol, por exemplo) vai traçando sua trajetória (órbita) na tela. São apresentados os quatro casos correspondentes aos valores de excentricidade  $\varepsilon = 0$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ ,  $\varepsilon = 1$  e  $\varepsilon > 1$ , respectivamente: trajetórias circular (botão preto), elíptica (botão verde), parabólica (botão rosa) e hiperbólica (botão azul). Sobre um mesmo par de eixos são indicadas a função energia potencial,  $U(r)$ , e a energia mecânica  $E$  (constante: linha reta horizontal). Uma barra vertical indica o valor que a energia cinética  $K(r)$  deve ter, para que seja respeitada a conservação de energia. Também, é indicada no eixo horizontal (variável de posição  $r$ ) a distância do cometa ao Sol, em cada instante, chamada de

R . As escalas para medida de distâncias, no gráfico e na representação das trajetórias, não são iguais, para tornar mais confortável a visualização do conjunto. Note que as órbitas fechadas correspondem à energia total negativa, pois neste caso existe sempre uma região proibida, para valores de  $r$  acima de um certo valor, e a trajetória deve se restringir à região permitida — veja o comentário que se segue à figura 13.

## EXERCÍCIOS DA OITAVA UNIDADE

- 1) Resolva o proposto no cenário do arquivo int\_grav.mdl.
- 2) Um objeto celeste muito estudado é a estrela dupla, que consiste em duas massas orbitando em torno de seu centro de massa. A relação entre as massas de uma estrela dupla é facilmente deduzida, utilizando-se a conservação do momentum linear. Responda às questões propostas no arquivo 2corpos3.mdl, em cujo cenário duas partículas interagem gravitacionalmente.
- 3) Com base na segunda lei de Kepler, faça a estimativa solicitada no cenário do arquivo cometa.mdl.
- 4) Resolva as questões propostas no cenário do arquivo sat\_v\_a.mdl.
- 5) Suponha que um túnel seja perfurado na Terra, de pólo a pólo. Largando-se uma bola nesse poço sem fundo, ela terá o movimento mostrado no cenário do arquivo tunel.mdl. Com a origem colocada no centro da Terra, a força de atração sobre a bola pode ser escrita como

$$F(r) = -k r ,$$

com

$$k = \frac{G m M_T}{R_T^3} ,$$

onde  $m$  é a massa da bola. Verifique que isto é verdade, lembrando a equação (VIII.19). Então, a bola é submetida a uma força restauradora do tipo força elástica de mola, e descreve um movimento harmônico simples. Determine o período deste movimento, e confira o valor encontrado no gráfico da animação (unidades SI).



6) Abra o arquivo mov\_sat.mdl. Na Animação 2 pode-se ver dois satélites que orbitam em torno da Terra, com períodos iguais. Na Animação 1, suas órbitas podem ser comparadas. Justifique por que o período dos satélites é o mesmo.

7) Resolva o proposto no cenário do arquivo iw\_const.mdl.

8) Define-se velocidade de escape como sendo a velocidade mínima com que um projétil deve ser lançado da superfície da Terra para escapar de seu campo gravitacional, isto é, nem retornando à superfície, nem entrando em órbita em torno da Terra. A rigor, o projétil só escapa do campo gravitacional terrestre quando  $r \rightarrow \infty$ , já que a interação gravitacional é de longo alcance. A velocidade de escape, então, é aquela suficiente para que o projétil atinja, em repouso, um ponto infinitamente distante da Terra. Logo, ela corresponde à situação de energia mecânica igual a zero, se adotamos a referência  $U(r \rightarrow \infty) = 0$ .

a) Determine a expressão para a velocidade de escape,  $v_e$ , em nosso planeta, e calcule seu valor.

b) Calcule o módulo da velocidade de um satélite rasante, isto é, um satélite que orbita em torno da Terra em uma trajetória circular de raio igual ao raio da Terra.

c) Mostre que o valor calculado no item a) é o dobro daquele calculado no item b).

d) Qual a trajetória descrita por um projétil lançado da superfície da Terra com uma velocidade de módulo igual a  $v_e$ ?

e) Qual a trajetória descrita por um projétil lançado da superfície da Terra com uma velocidade de módulo maior que  $v_e$ ?

Confira suas respostas no cenário do arquivo escape.mdl, onde os dados numéricos estão no SI.

9) Ao contornar um objeto celeste de grande massa, uma espaçonave pode sofrer um ganho em sua energia cinética. Este é o chamado efeito catapulta, ou efeito estilingue, que ocorreu

com a Pioneer, em sua viagem em torno de Júpiter, quando foi projetada para fora do Sistema Solar: veja em *The Physics Teacher*, volume 11, de maio de 1973, às páginas 299 e 300, o artigo *Pioneer Jupiter whiplash*, de Lewis Epstein. O cenário do arquivo *catap.mdl* mostra o fenômeno, tanto do ponto de vista de um referencial inercial externo aos dois objetos (referencial S), quanto visto de um referencial fixo ao objeto mais massivo, que viaja a uma velocidade constante em relação a S (referencial S'). Em S' a nave tem, assintoticamente, a mesma rapidez de aproximação e de afastamento, uma característica das colisões elásticas. (Assintoticamente, aqui, significa uma visão a uma distância muito grande.) Em S, a rapidez de afastamento da nave é maior que a de aproximação. Isto viola a conservação de energia? Explique.

10) Resolva a questão proposta no cenário do arquivo *campo3.mdl*.

11) Resolva a questão proposta no cenário do arquivo *w\_grav.mdl*.

12) Aqui nos despedimos. Papai Noel embarca em um balão, rumo a seu lar (Pólo Norte?), no cenário do arquivo *tchau.mdl*. Acionando a animação, você o verá partir.