Curso: Engenharia Mecânica

Disciplina : Mecânica dos fluidos I

Aula 4: Estática dos Fluidos

Prof. Evandro Rodrigo Dário, Dr. Eng.

Estática dos Fluidos

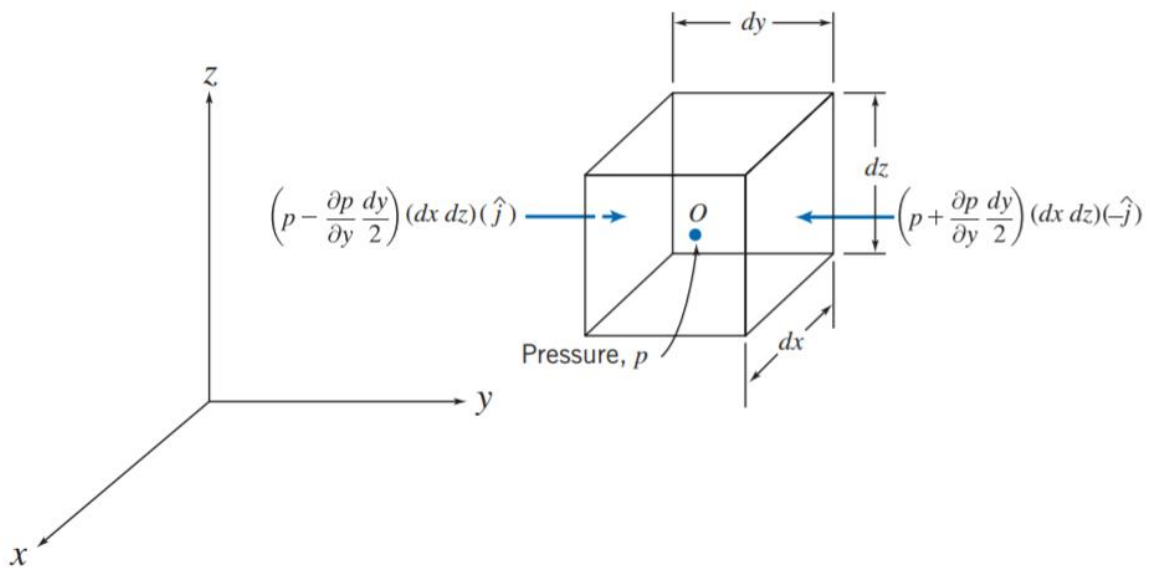
A pressão gerada no interior de um fluido estático é um fenômeno importante em muitas situações práticas.

Usando os ***princípios da hidrostática***, nós podemos calcular forças sobre objetos submersos, desenvolver ***instrumentos para medir pressões e deduzir propriedades da atmosfera e dos oceanos***.

Os princípios da hidrostática também podem ser usados para determinar as forças desenvolvidas por sistemas hidráulicos em aplicações como ***prensas industriais ou freios de automóveis***.

A Equação Básica da Estática dos Fluidos

Aplicamos a ***segunda lei de Newton*** a um elemento de fluido diferencial de massa $\boldsymbol{dm = \rho dV}$, com lados $\boldsymbol{dx}$, $\boldsymbol{dy}$ e $\boldsymbol{dz}$, conforme mostrado:



O elemento fluido está em repouso em relação ao sistema inercial de coordenadas retangulares mostrado.

A Equação Básica da Estática dos Fluidos

Os dois tipos genéricos de forças que podem ser aplicados a um fluido:

- ***Forças de campo*** (ou de ação a distância);
- ***Forças de superfície*** (ou de contato).

Para um elemento de fluido diferencial, a ***força de campo*** é dada por:

$$d\vec{F}_B = \vec{g}\,dm = \vec{g}\rho\, d\mathcal{V}$$

Em ***coordenadas cartesianas,*** $\boldsymbol{dV = dx\, dy\, dz}$, de modo que:

$$d\vec{F}_B = \rho\vec{g}\, dx\, dy\, dz$$

A Equação Básica da Estática dos Fluidos

Em um ***fluido estático***, ***a única*** ***força de superfície é a força de pressão***.

A ***pressão é um campo escalar,*** $\boldsymbol{p = p(x, y, z)}$; de modo geral, esperamos que a pressão varie com a posição dentro do fluido.

A ***força líquida de pressão*** que resulta dessa variação pode ser avaliada pela ***soma de todas as forças que atuam nas seis faces do elemento fluido***.

Para determinar a pressão em cada uma das faces do elemento, utilizamos uma ***expansão em séries de Taylor*** em torno do ***ponto O***.

A Equação Básica da Estática dos Fluidos

A ***pressão na face esquerda*** do elemento diferencial é:

$$p_L = p + \frac{\partial p}{\partial y}(y_L - y) = p + \frac{\partial p}{\partial y}\left(-\frac{dy}{2}\right) = p - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{2}$$

A ***pressão na face direita*** do elemento diferencial é:

$$p_R = p + \frac{\partial p}{\partial y}(y_R - y) = p + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{2}$$

As forças de pressão sobre as outras faces do elemento são obtidas do mesmo modo.

A Equação Básica da Estática dos Fluidos

Combinando todas essas forças, obtemos a força superficial líquida ou resultante agindo sobre o elemento.

$$
\begin{aligned}
d\vec{F}_S = & \left(p - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)(dy\,dz)(\hat{i}) + \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)(dy\,dz)(-\hat{i}) \\
& + \left(p - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)(dx\,dz)(\hat{j}) + \left(p + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)(dx\,dz)(-\hat{j}) \\
& + \left(p - \frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)(dx\,dy)(\hat{k}) + \left(p + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)(dx\,dy)(-\hat{k})
\end{aligned}
$$

Cada força de pressão é um produto de três fatores. O primeiro é o módulo da pressão. Esse módulo é multiplicado pela área da face para dar o módulo da força de pressão, e um vetor unitário é introduzido para indicar o sentido.

A Equação Básica da Estática dos Fluidos

Agrupando e cancelando os termos, obtemos:

$$d\vec{F}_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{k}\right)dx\,dy\,dz$$

O termo entre parênteses é denominado ***gradiente de pressão*** e pode ser escrito como ***grad p*** ou ∇p. Em coordenadas retangulares:

$$\text{grad}\,p \equiv \nabla p \equiv \left(\hat{i}\frac{\partial p}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial p}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial p}{\partial z}\right) \equiv \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)p$$

Usando a ***designação de gradiente***:

$$d\vec{F}_S = -\text{grad}\,p\,(dx\,dy\,dz) = -\nabla p\,dx\,dy\,dz$$

A Equação Básica da Estática dos Fluidos

Combinamos as formulações desenvolvidas para as ***forças de superfície e de campo*** de modo a obter a ***força total*** atuando sobre ***um elemento fluido.***

$$d\vec{F} = d\vec{F}_S + d\vec{F}_B = (-\nabla p + \rho\vec{g})\, dx\, dy\, \mathrm{dz} = (-\nabla p + \rho\vec{g})\, d\maltese$$

ou, ***por unidade de volume***,

$$\frac{d\vec{F}}{d\maltese} = -\nabla p + \rho\vec{g}$$

Para uma partícula fluida, a ***segunda lei de Newton*** fornece $\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{a}}\, \boldsymbol{dm} = \vec{\boldsymbol{a}}\, \boldsymbol{\rho dV}$. Para um fluido estático, $\vec{\boldsymbol{a}} = \mathbf{0}$. Então,

$$\frac{d\vec{F}}{d\maltese} = \rho\vec{a} = 0$$

A Equação Básica da Estática dos Fluidos

Substituindo $\boldsymbol{d\vec{F}/dV}$ na equação anterior temos:

$$-\nabla p + \rho\vec{g} = 0$$

Uma breve revisão dessa equação. O ***significado físico*** de cada termo é:

$$-\nabla p \qquad + \qquad \rho\vec{g} \qquad = 0$$

$$\left\{\begin{matrix} \textit{Força de pressão líquida} \\ \textit{por unidade de volume} \\ \textit{em um ponto} \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} \textit{Força de campo por} \\ \textit{unidade de volume} \\ \textit{em um ponto} \end{matrix}\right\}$$

Essa é uma ***equação vetorial***, o que significa que ela é ***equivalente a três equações de componentes*** que devem ser satisfeitas individualmente.

A Equação Básica da Estática dos Fluidos

As equações de componentes em $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{z}$ são são:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x &= 0 \quad x \quad \boldsymbol{dire\Delta\neg o} \\ -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y &= 0 \quad y \quad \boldsymbol{dire\Delta\neg o} \\ -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z &= 0 \quad z \quad \boldsymbol{dire\Delta\neg o} \end{aligned}\right\}$$

Se o sistema de coordenadas for escolhido com o eixo $\boldsymbol{z}$ apontando verticalmente para cima, então $\boldsymbol{g_x = 0}$, $\boldsymbol{g_y = 0}$, $\boldsymbol{g_z = -g}$.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

A Equação Básica da Estática dos Fluidos

A pressão é independente das coordenadas x e y; ela depende de z apenas.

Portanto, como p é uma ***função de uma só variável***, a derivada total pode ser usada no lugar da derivada parcial.

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dp}{dz} = -\rho g \equiv -\gamma}$$

Restrições:

(1) Fluido estático.

(2) A gravidade é a única força de campo.

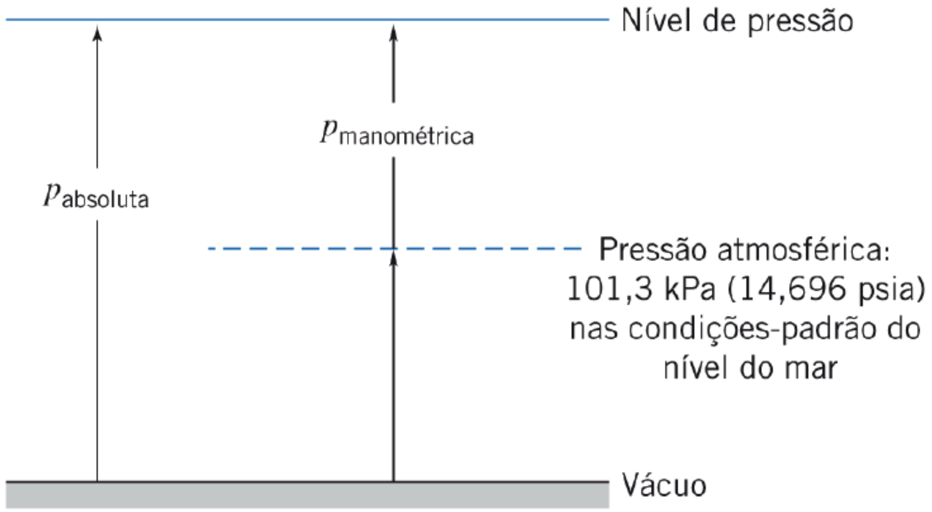
(3) O eixo z é vertical e voltado para cima.

Tipos de pressão

A ***maioria dos medidores de pressão*** indica uma ***diferença de pressão*** — a diferença entre a pressão medida e aquela do ambiente (usualmente a pressão atmosférica).

Os níveis de pressão medidos em relação à pressão atmosférica são denominados ***pressões manométricas***.

$$p_{\text{manométrica}} = p_{\text{absoluta}} - p_{\text{atmosférica}}$$



Variação de pressão em um Fluido estático

A ***variação de pressão*** em qualquer ***fluido em repouso*** é descrita pela ***relação básica pressão- altura:***

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

Na integração da equação acima para achar a ***distribuição de pressão***, devemos fazer ***considerações sobre as variações*** de $\boldsymbol{\rho}$ e $\boldsymbol{g}$.

A maioria das situações práticas da engenharia, a variação em $\boldsymbol{g}$ é desprezível. A variação em g precisa ser considerada apenas em situações de cálculo muito preciso da variação de pressão para grandes diferenças de elevação.

Variação de pressão em um Fluido estático

Líquidos Incompressíveis - Manômetros

Para um ***fluido incompressível,*** $\boldsymbol{\rho = constante}$. Logo, considerando $\boldsymbol{g = constante}$, temos:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = constante$$

Para determinar a ***variação de pressão***, devemos ***integrar e aplicar condições de contorno apropriadas***.

$$\int_{p_o}^{p} dp = -\int_{z_o}^{z} \rho g \, dz$$

ou

$$p - p_0 = -\rho g(z - z_0) = \rho g(z_0 - z)$$

Variação de pressão em um Fluido estático

Líquidos Incompressíveis - Manômetros

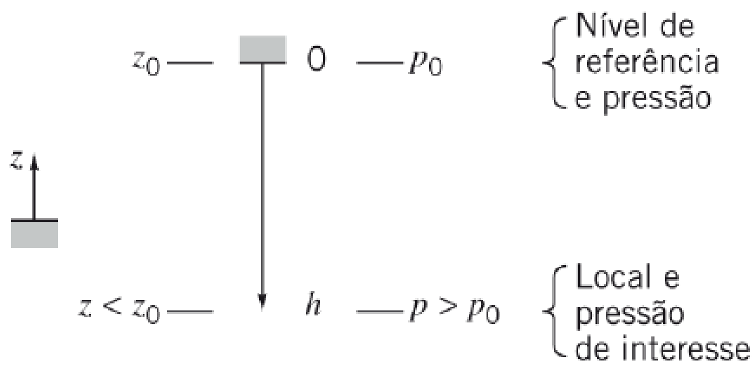
Para líquidos, é conveniente colocar a origem do sistema de coordenadas na superfície livre (nível de referência) e ***medir distâncias para baixo a partir dessa superfície como positivas***, conforme figura ao lado.

Com h medido positivo para baixo, temos:

$$(z - z_0) = h$$

E obtemos:

$$p - p_0 = \Delta p = \rho g h$$



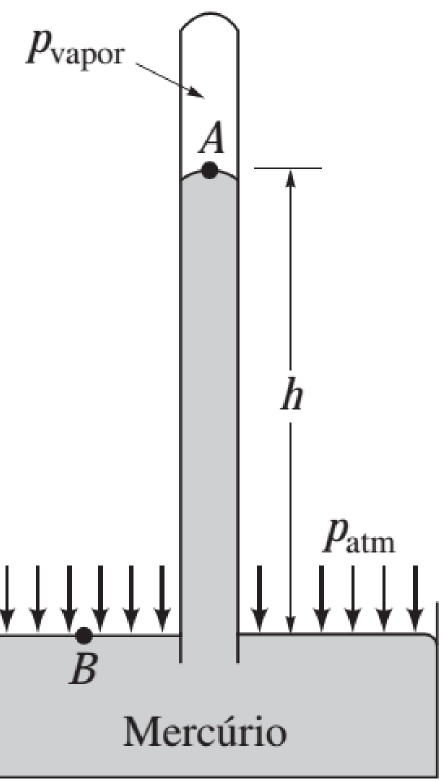
A equação acima indica que ***a diferença de pressão entre dois pontos*** em um fluido estático pode ser determinada pela ***medida da diferença de elevação entre os dois pontos***.

Barômetro

A ***medição da pressão atmosférica*** é realizada usualmente com um ***barômetro de mercúrio***.

Consiste em ***um tubo de vidro fechado em uma extremidade e aberto em outra***, imersa em um recipiente contendo mercúrio.

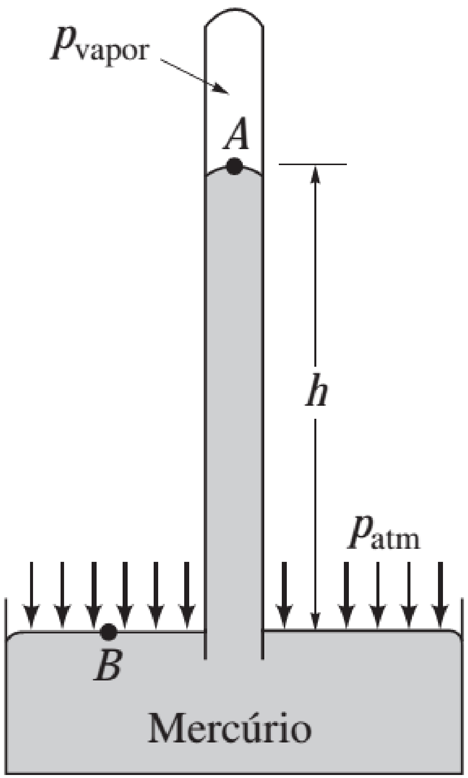
O tubo, inicialmente com a sua ***extremidade aberta voltada para cima***, é ***preenchido com mercúrio*** e então invertido (parte aberta voltada para baixo) em um recipiente de mercúrio.



Barômetro

A ***coluna de mercúrio alcançará uma posição de equilíbrio*** na qual **o peso da coluna mais a força devida à pressão do vapor** (que se desenvolve no espaço da coluna) **equilibram a força devida à pressão atmosférica**.

$$p_{atm} = \gamma h + p_{vapor}$$



Para a maioria das finalidades práticas, a ***contribuição da pressão de vapor do mercúrio pode ser desprezada*** uma vez que ela é muito pequena.

$$p_{atm} \approx \gamma h$$

Manômetria

Uma ***técnica padrão para a medição da pressão*** envolve o uso de colunas de líquido em tubos verticais ou em tubos inclinados.

Os ***dispositivos de medição de pressão baseados nessa técnica são denominados manômetros***.

Os ***manômetros de tubo em U são aparelhos simples e baratos*** usados com frequência. em medições de pressão.

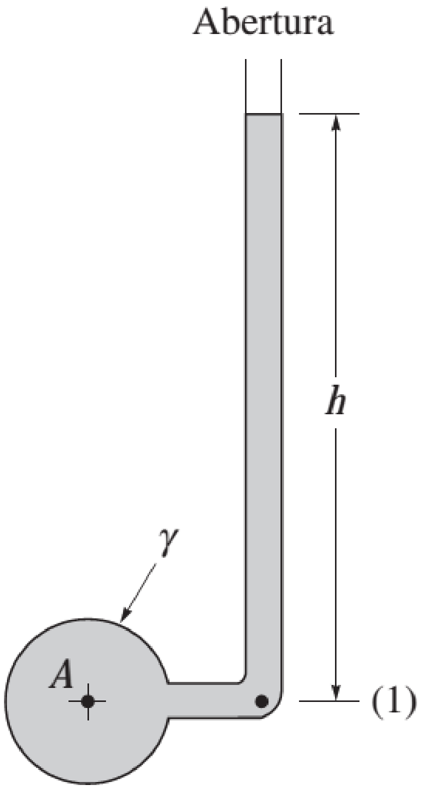
Dois tipos comuns de manômetros são o ***tubo piezométrico*** e o ***manômetro de tubo em U***.

Manômetria - Tubo Piezométrico

O tipo mais simples de manômetro consiste em um tubo v aberto na parte superior, e fixado a um recipiente cuja pres deseja determinar.

A equação fundamental que descreve o seu uso é:

$$p = \gamma h + p_0$$

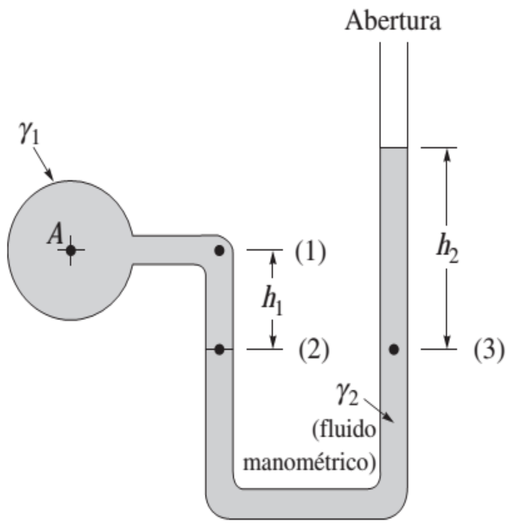


Embora o tubo piezométrico seja um dispositivo de medição de pressão muito simples e preciso, apresenta diversas desvantagens.

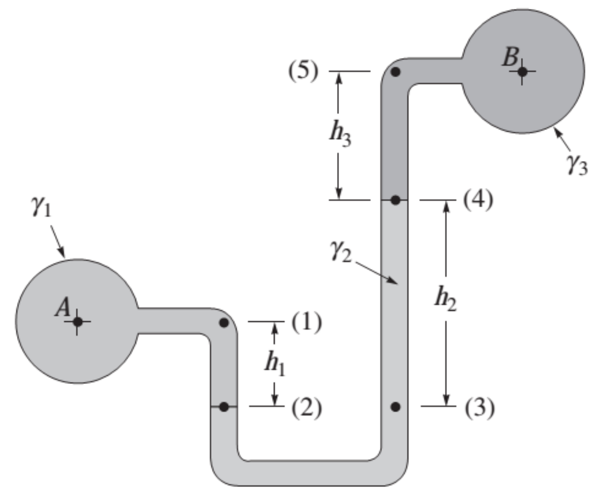
Ele só é apropriado se a pressão no recipiente for maior do que a pressão atmosférica e se a pressão a ser medida for relativamente baixa, de modo a altura necessária da coluna seja razoável.

Manômetria – Manômetro de Tubo em U

Para superar as dificuldades observadas anteriormente, um outro tipo de manômetro que é amplamente utilizado consiste em um tubo em forma de U.



Manômetro de tubo em U simples.



Manômetro de tubo em U diferencial.

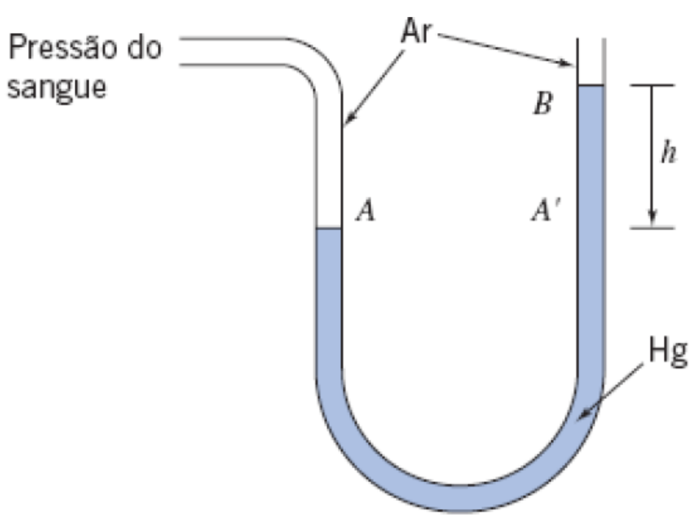
A principal vantagem do manômetro de tubo em U reside no fato de que o fluido manométrico pode ser diferente do fluido no recipiente cuja pressão deve ser determinada.

Exemplo 1: Pressão Sistólica e Diastólica

A pressão sanguínea normal em um ser humano é de 120/80 mmHg. Simulando um manômetro de tubo em U como um esfigmomanômetro (medidor de pressão arterial), converta essas pressões para kPa.

Dados: Pressões manométricas de 120 e 80 mmHg.

Determinar: As pressões correspondentes em kPa.



Considerações: (1) Fluido estático.
(2) Fluidos incompressíveis.
(3) Massa específica do ar desprezível em relação à massa específica do mercúrio.

Exemplo 2: Análise de Manômetro de Tubo Inclinado

Um manômetro de reservatório com tubo inclinado é construído como mostrado. Deduza uma expressão geral para a deflexão do líquido, L, no tubo inclinado, em termos da diferença de pressão aplicada, Δp. Obtenha, também, uma expressão geral para a sensibilidade do manômetro e discuta os efeitos sobre a sensibilidade exercida nos parâmetros D, d, θ e SG.

Dados: Manômetro de reservatório e tubo inclinado.

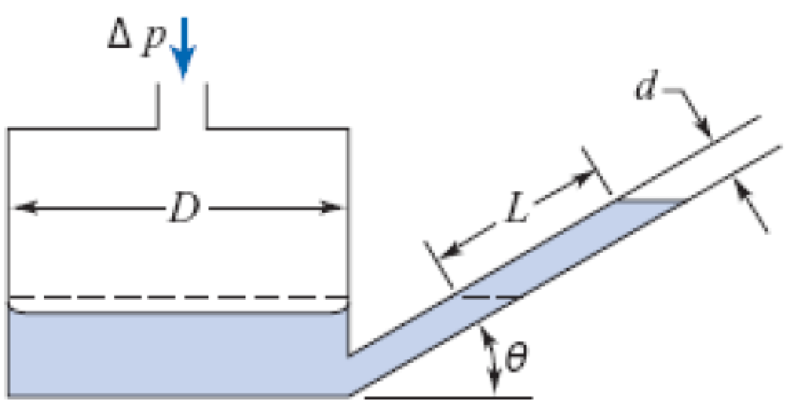
Determinar: Expressão para L em termos de Δp.

Expressão geral para a sensibilidade do manômetro.

Efeito de valores dos parâmetros sobre a sensibilidade.

Solução:

Use o nível do líquido em equilíbrio como referência



Considerações: (1) Fluido estático.

(2) Fluido incompressível.

Exercícios Sugeridos:

FOX, Robert W., PRITCHARD, Philip J. McDONALD, Alan T. Introdução à mecânica dos fluidos. 8a Ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.

Capítulo 3:

9, 11, 15, 18, 24, 26, 27, 36.