Curso de topología

Martín Blufstein - Gabriel Minian

Prefacio

Estas notas están basadas en el curso de Topología dictado por Gabriel Minian en el Departamento de Matemática de la FCEyN- UBA en el segundo cuatrimetre de 2016. La primera parte del curso (capítulos 1 al 7 de estas notas) está dedicada al estudio de topología general. Las referencias utilizadas para esta primera parte son los libros [1, 2, 4, 5, 7].

Varias de las demostraciones que se encuentran aquí son clásicas o estándar y pueden encontrarse en la bibliografía citada, como así también varios de los ejemplos y contraejemplos que exhibimos en estas notas. Sin embargo, el enfoque que le damos acá a ciertos temas difiere del que se encuentra en la bibliografía, por ejemplo nuestra exposición sobre espacios compactos, funciones propias y compactificaciones, el estudio sobre la ley exponencial, la caracterización de espacios T_0 y nuestro abordaje a las topologías finales e iniciales.

En la segunda parte del curso (que abarca los últimos capítulos de estas notas) presentamos una introducción a la topología algebraica: estudiamos el grupo y grupoide fundamental de un espacio, la teoría de revestimientos, el teorema de van Kampen y aplicaciones, y terminamos con una introducción a la homología y sus aplicaciones más inmediatas. Para esta segunda parte, las referencias utilizadas son los libros [2, 3, 5, 6].

La relación entre revestimientos y el grupo fundamental es abordada aquí utilizando la noción de fibración. Esto nos permite clarificar que esa correspondencia se basa principalmente en las propiedades globales que tienen los revestimientos de levantar homotopías y de levantar caminos en forma única, a pesar de que la noción original de revestimiento es de naturaleza local. La relación entre lo local y lo global en este caso se evidencia en el resultado que prueba que todo revestimiento es una fibración con levantamiento único de caminos.

En este curso se incluye también una introducción al estudio de los CW-complejos. La decisión de incluir este tema en el curso se basa en que estos espacios aparecen en forma natural en matemática. Por otra parte, analizar espacios con estructuras de CW-complejos, nos permite calcular fácilmente e intuitivamente sus grupos fundamentales, utilizando para esto una de las aplicaciones del teorema de van Kampen que probamos también en estas notas.

Al final de cada capítulo incluimos una lista de ejercicios, muchos de estos fueron recopilados de las guías prácticas utilizadas en el dictado de la materia. Varios de los ejercicios son clásicos y pueden encontrarse también en la literatura citada.

Índice general

1

Conjuntos bien ordenados

1.1. Conjuntos ordenados y teorema de Zermelo

Vamos a comenzar estas notas con una breve introducción a algunos conceptos de teoría de conjuntos y al estudio de conjuntos ordenados.

Definición. $(X, \leqslant)$ es un poset si $\leqslant$ es reflexiva, transitiva y antisimétrica. Un poset es un orden total si todo par de elementos de X es comparable. Dado $x \in X$ decimos que es un máximo (mínimo) si $\forall y \in X$, $x \geqslant y$ ($x \leqslant y$). Además decimos que x es maximal si $[\forall y \in X, y \geqslant x] \Rightarrow [y = x]$.

Definición. Un conjunto totalmente ordenado es bien ordenado si todo subconjunto no vacío tiene mínimo.

Dado un conjunto totalmente ordenado X y un elemento $a \in X$, denotamos $S_a = \{x \in X \mid x < a\}$ a la *sección* de a.

Definición. Sean $a, b \in X$ con $(X, <)$ un orden total, $a < b$. Si $(a, b) = \varnothing$ decimos que a es predecesor inmediato de b, y b sucesor inmediato de a.

Observación. Si $(X, \leqslant)$ es bien ordenado, todo elemento tiene sucesor inmediato.

Definición. Sea $(X, <)$ un poset (orden total), $A \subseteq X$ un subconjunto. Definimos el orden heredado en A como $a <_A b \Leftrightarrow a < b$ si $a, b \in A$. Con esta relación $(A, <_A)$ es un poset (orden total).

Definición. Sean $(X, <)$, $(Y, <')$ órdenes totales. Definimos en $X \times Y$ el orden lexicográfico dado por $(x, y) < (x', y')$ si $x < x'$ o $x = x'$ e $y <' y'$.

Ejemplos.

1) Dado A un conjunto, $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ resulta un poset.

2) $(\mathbb{R}_{\geqslant 0}, \leqslant)$ es un orden total.

3) $(\mathbb{N}, \leqslant)$ es un buen orden.

4) $(\mathbb{Z}, R)$ con $R = \{(0,x) \mid x \in \mathbb{Z}\} \cup \{(x,y) \mid x < 0 < y\} \cup \{(x,y) \mid xy > 0 \wedge |x| < |y|\}$ es un buen orden.

5) $\mathbb{N}_0 \times [0,1)$ con el orden lexicográfico es un orden total, pero no un buen orden. Podemos compararlo con el caso 2) mediante la siguiente función:

$$\begin{aligned} \mathbb{N}_0 \times [0,1) &\to \mathbb{R}_{\geqslant 0} \\ (n,x) &\mapsto n + x \end{aligned}$$

6) $[0,1) \times \mathbb{N}_0$ con el orden lexicográfico es un orden total, pero no es un buen orden. Sin embargo, a diferencia del caso 5), lo elementos tienen sucesor inmediato.

7) Nos preguntamos si es posible que exista un conjunto totalmente ordenado $(X, <)$ tal que todo $x \in X$ tenga sucesor inmediato y tal que exista un $x_0 \in X$ que no sea mínimo y que no tenga predecesor inmediato. Un ejemplo posible es $X = \{1, 2, 3, ..., w+1, w+2, w+3, ...\}$.

Definición. Sean $(X, <)$, $(Y, <)$ órdenes totales. Un morfismo de orden es una función $f : X \to Y$ tal que si $x < x'$, entonces $f(x) < f(x')$. Cuando f es una biyección, decimos que es un isomorfismo de orden. En caso de que exista dicha f, decimos que X e Y tienen el mismo tipo de orden.

Observamos que si f es un isomorfismo de orden, entonces también lo es f^{-1}.

Pasamos ahora al estudio de conjuntos bien ordenados, definidos al comienzo.

Proposición. Sean $(X, <)$ bien ordenado y $f : X \to X$ un morfismo de orden $\Rightarrow \nexists a \in X$ tal que $f(a) < a$.

Demostración. Supongamos que existe dicho a. Consideramos $A = \{x \in X \mid f(x) < x\}$. Como $a \in A$, $A \neq \varnothing$. Entonces $\exists a_0 \in A$ primer elemento. Como $a_0 \in A$, $f(a_0) < a_0$. Entonces $f(f(a_0)) < f(a_0)$. Luego $f(a_0) \in A$, absurdo. ■

Corolario. Sea $(X, <)$ bien ordenado. y $f : X \to X$ un isomorfismo de orden $\Rightarrow f = id_X$. De esto se deduce que si $(X, <)$, $(Y, <)$ son bien ordenados y tienen el mismo tipo de orden $\Rightarrow \exists! f : X \to Y$ isomorfismo de orden.

Principio de inducción transfinita. Sea J bien ordenado, $\varnothing \neq A \subseteq J$. Si A verifica $[a \in J \wedge S_a \subseteq A] \Rightarrow [a \in A]$, entonces $A = J$ (cuando se cumple esta condición, decimos que A es inductivo).

Demostración. supongamos $A \neq J$, de manera que $J \backslash A \neq \varnothing$. Sea $a_0 = min J \backslash A$. Por definición de a_0, $S_{a_0} \subseteq A$. Como A es inductivo, entonces $a_0 \in A$, absurdo. ■

Teorema. Dado un conjunto A, son equivalentes:

(1) $\exists f : \mathbb{N} \to A$ inyectiva.

(2) $\exists B \subsetneq A$ y $\phi : A \to B$ biyectiva.

(3) A es infinito.

Demostración.

(1) $\Rightarrow$ (2) Sea $a_n = f(n)$ y sea $\phi : A \to A$ definida por $\phi(a_n) = a_{2n}$ o $\phi(x) = x$ si $x \notin f(\mathbb{N})$. Está bien definida pues f es inyectiva. Es claro que ϕ es inyectiva. Sea $B = \phi(A)$, consideramos $\phi|^B : A \to B$ que es biyectiva. Además $B \subsetneq A$ ya que $a_{2n+1} \notin B$ para ningún $n \in \mathbb{N}$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Es evidente, pues $[\![n]\!]$ no está en biyección con $[\![m]\!]$ si $n \neq m$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Debemos hallar $f : \mathbb{N} \to A$ inyectiva. Definiremos f inductivamente. Como A es infinito, en particular es no vacío. Entonces existe $a_1 \in A$. Definimos $f(1) = a_1$. Ahora supongamos definidos $f(1), ..., f(n)$. Como $A \backslash \{f(1), ..., f(n)\}$ no es vacío, existe $a_{n+1} \in A \backslash \{f(1), ..., f(n)\}$ y definimos $f(n+1) = a_{n+1}$. ■

En realidad, al probar (3) $\Rightarrow$ (1) usamos implícitamente el axioma de elección, que enunciamos a continuación.

Axioma de elección. Sea $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos no vacíos disjuntos dos a dos. Entonces existe $C \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ que tiene exactamente un elemento de cada conjunto de $\mathcal{A}$.

Otra forma de equivalente de enunciar el Axioma de elección es la siguiente: Dado un conjunto no vacío A, existe una función *selectora* $c : \mathcal{P}(A) - \{\varnothing\} \to A$ tal que $c(B) \in B$ $\forall B \subseteq A$ no vacío.

Ahora reescribimos la implicación (3) $\Rightarrow$ (1) del teorema anterior usando explícitamente el axioma de elección. Como $A \neq \varnothing$ $\exists c : \mathcal{P}(A) - \{\varnothing\} \to A$ tal que $c(B) \in B$ $\forall B \subseteq A$. Definimos $f(1) = c(A)$. Una vez definidos $f(1), ..., f(n)$, tomamos $f(n+1) = c(A \backslash \{f(1), ..., f(n)\}$.

A continuación vamos a dar varias formulaciones equivalentes al axioma de elección. Probaremos algunas de ellas, dejando como ejercicio al resto (ver también la lista de ejercicios al final del capítulo).

Principio de definición recursiva. Sean J bien ordenado y C un conjunto. Llamamos $F = \{h : S \to C \mid S \subseteq J \text{ sección}\}$. Entonces, dada cualquier función $\rho : F \to C$ $\exists! \tilde{h} : J \to C$ tal que $\tilde{h}(\alpha) = \rho(\tilde{h}|_{S_\alpha})$ $\forall \alpha \in J$. Es decir que $\tilde{h}$ se define recursivamente mediante ρ (en este caso, decimo suqe $\tilde{h}$ es compatible con ρ).

Uno de los enunciados equivalentes más utilizados es el siguiente.

Teorema del buen orden (Zermelo). Todo conjunto admite un buen orden.

Principio del máximo. Sea $(A, \leqslant)$ poset. Entonces existe $C \subseteq A$ cadena maximal.

Demostración. Vamos a construir la función característica $\chi : A \to \{0,1\}$ correspondiente a C. Indexamos a A con un conjunto bien ordenado J. Sea $\mathcal{F} = \{h : S \to \{0,1\} \mid S \subseteq J \text{ sección}\}$. Consideramos $\rho : \mathcal{F} \to \{0,1\}$ dada por: $\rho(h : S_\beta \to \{0,1\}) = 1$ si y sólo si todo $\alpha \in S_\beta$ tal que $h(\alpha) = 1$ es comparable con β. Por el principio de definición recursiva, existe un único $\chi : A \to \{0,1\}$ compatible con ρ, y por construcción es claro que $\chi^{-1}(1)$ es una cadena maximal. ■

Otra de las formulaciones equivalentes que se utiliza a menudo en demostraciones es el lema de Zorn.

Lema de Zorn. Sea $X \neq \varnothing$ un poset. Si toda cadena $C \subseteq X$ tiene cota superior (en X), entonces X tiene elementos maximales.

Veamos ahora la equivalencia entre los dos últimos enunciados.

Teorema. Principio del máximo $\Leftrightarrow$ lema de Zorn.

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $(X, \leqslant)$ poset en el que toda cadena tiene cota superior. Por el principio del máximo $\exists C \subseteq X$ cadena maximal. Sea x_0 una cota superior de C. Supongamos que $y \in X$ verifica $y \geqslant x_0$. Luego $C \cup \{y\}$ es una cadena. Por maximalidad de C, $y \in C$, y en particular $y \leqslant x_0$. Luego $y = x_0$, lo que muestra que $x_0 \in X$ es maximal.

$\Leftarrow$) Sea $(X, \leqslant)$ un poset. Consideramos $F = \{C \subseteq X \mid C \text{ cadena}\}$. Es claro que $F \neq \varnothing$. Sea $\mathcal{C}$ una cadena de F. Consideramos $D = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$, que es una cadena de X y resulta ser cota superior de $\mathcal{C}$ en F. Luego por Zorn F tiene elementos maximales. ■

Para terminar este capítulo, veremos un resultado que va a ser muy útil a la hora de construir ejemplos y contraejemplos más adelante.

Teorema. Existe un conjunto S_Ω que cumple:

(1) S_Ω es no numerable.

(2) S_Ω está bien ordenado.

(3) $\forall x \in S_\Omega$, $S_x = \{y \in S_\Omega \mid y < x\}$ es numerable.

Demostración. Sea X un conjunto no numerable, por Zermelo $\exists <$ orden de X tal que $(X, <)$ es un buen orden. Si $(X, <)$ cumple (3) ya estamos. Si no, entonces $\exists x_0 \in X$ tal que S_{x_0} no es numerable. Sea $A = \{x \in X \mid S_x \text{ no numerable}\}$. Como $x_0 \in A$ y X está bien ordenado, $\exists \Omega \in A$ primer elemento. Consideramos $S_\Omega = \{x \in X \mid x < \Omega\}$ con el orden heredado de X. Entonces:

(1) S_Ω no numerable porque $\Omega \in A$.

(2) S_Ω está bien ordenado porque tiene el orden heredado de X y X está bien ordenado.

(3) Si $x \in S_\Omega \Rightarrow x < \Omega$ en X $\Rightarrow x \notin A \Rightarrow S_x^X = S_x^{S_\Omega}$ es numerable. ■

Proposición. Si $A \subseteq S_\Omega$ es numerable $\Rightarrow A$ tiene cota superior.

Demostración. Sea $B = \bigcup_{a \in A} S_a$. Por hipótesis B es numerable $\Rightarrow B \subsetneq S_\Omega$. Sea $b \in B^c$, veamos que b es cota superior. Supongamos que no $\Rightarrow \exists a \in A$ tal que $b < a$. Entonces $b \in S_a \subseteq B$, absurdo. ■

1.2. Ejercicios

1. **Principio general de definición recursiva**

   Sean J un conjunto bien ordenado y C un conjunto. Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de todas las funciones $h : S \to C$ cuyo dominio S es una sección [1] de J.

   Dada una función $\rho : \mathcal{F} \to C$, existe una única función $h : J \to C$ que es *compatible* con ρ, es decir,
   $$h(\alpha) = \rho(h|_{S_\alpha}) \text{ para todo } \alpha \in J$$

   Para verlo:

   a) Pruebe que si S es una sección de J y $h_1, h_2 : S \to C$ son funciones compatibles con ρ, entonces $h_1 = h_2$.

   b) Pruebe que si $\beta \in J$ y si $h : S_\beta \to C$ una función compatible con ρ, entonces existe una función $\bar{h} : S_\beta \cup \{\beta\} \to C$ que es compatible con ρ.

   c) Pruebe que si $K \subset J$ y si para todo $\alpha \in K$ existe una función $h_\alpha : S_\alpha \to C$ compatible con ρ, entonces existe una función
   $$k : \bigcup_{\alpha \in K} S_\alpha \to C$$
   que es compatible con ρ.

   d) Pruebe que para todo $\beta \in J$ existe una función $h_\beta : S_\beta \to C$ que es compatible con ρ.

   Sugerencia: Estudie por separado el caso en que β tiene un predecesor inmediato y el caso en que no.

   e) Pruebe el principio general de definición recursiva.

2. *a*) Sean J y E dos conjuntos bien ordenados y sea $h : J \to E$ una función. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   I. h preserva el orden (es decir, $\alpha < \beta \Rightarrow h(\alpha) < h(\beta)$) y su imagen es una sección de E.

   II. $h(\alpha) = \min\{E \backslash h(S_\alpha)\}$ para todo $\alpha \in J$.

   III. Para todo $\alpha \in J$ es $h(S_\alpha) = S_{h(\alpha)}$.

[1] Decimos que un subconjunto $\subseteq J$ es una *sección* de J si $\forall \alpha \in S, \forall \beta \in J, \beta \leqslant \alpha \Rightarrow \beta \in S$. En particular, si $\beta \in J$, el conjunto $S_\beta = \{\alpha \in J : \alpha < \beta\}$ es una sección de J. Notemos que si S es una sección de J y $\beta \in S$, entonces $S_\beta \subseteq S$.

b) Pruebe que si E es un conjunto bien ordenado, entonces el tipo de orden de una sección propia de E es distinto del tipo de orden de E, y que dos secciones distintas de E tienen tipos de orden distintos.

Sugerencia: Dado J, existe a lo sumo una aplicación que preserva el orden de J en E cuya imagen es una sección de E.

3. Sean J y E dos conjuntos bien ordenados y sea $k : J \to E$ una función que preserva el orden. Pruebe que el tipo de orden de J es el de una sección de E.

   Sugerencia: Defina inductivamente $h : J \to E$ mediante la recursión $h(\alpha) = \text{mín}\{E \backslash h(S_\alpha)\}$, usando la existencia de k para ver la buena definición de h.

4. *a*) Pruebe que si A y B son dos conjuntos bien ordenados, entonces se satisface exactamente una de las siguientes tres condiciones:

   - A y B tienen el mismo tipo de orden;
   - A tiene el tipo de orden de una sección propia de B;
   - B tiene el tipo de orden de una sección propia de A.

   Sugerencia: Construya un conjunto bien ordenado que contenga a A y a B y use el ejercicio anterior.

   b) Usando el teorema del buen orden pruebe que dados dos conjuntos, uno tiene cardinal mayor o igual que el otro.

5. Sean X un conjunto y sea $\mathcal{A}$ la familia de todos los pares $(A, \leqslant)$ con A un subconjunto de X y $<$ un buen orden en A. Definimos una relación $\preceq$ en $\mathcal{A}$ de manera que $(A, \leqslant) \preceq (A', \leqslant')$ sii $(A, \leqslant)$ es una sección de $(A', \leqslant')$.

   a) Demuestre que la relación $\preceq$ es un orden parcial sobre $\mathcal{A}$.

   b) Sea $\mathcal{B}$ una subfamilia de $\mathcal{A}$ totalmente ordenada por $\preceq$. Sea

   $$B' = \bigcup_{(B, \leqslant) \in \mathcal{B}} B$$

   y sea $\leqslant'$ la unión de las relaciones $\leqslant$ que aparecen como segunda componente de los elementos de $\mathcal{B}$. Muestre que $(B', \leqslant')$ es un conjunto bien ordenado.

6. Muestre que el Lema de Zorn es equivalente al teorema del buen orden.

   Sugerencia: Use el ejercicio 5 para una implicación y el principio general de definición recursiva (ej. 1) para la otra.

7. El objetivo de este ejercicio es demostrar, usando los resultados de los ejercicios 1–5, que el axioma de elección es equivalente al teorema del buen orden.

   Sean X un conjunto y $\mathcal{P}'(X)$ el conjunto de las partes no vacías de X. Sea $c : \mathcal{P}'(X) \to X$ una función de elección fijada, de manera que para cada $T \in \mathcal{P}'(X)$ es $c(T) \in T$. Si T es un subconjunto de X y $\leqslant$ es una relación sobre T, decimos que $(T, \leqslant)$ es una *torre* en X si $\leqslant$ es un buen orden de T y si para cada $x \in T$ se tiene que

   $$x = c(X \backslash S_x(T, \leqslant))$$

   con $S_x(T, \leqslant)$ la sección de $(T, \leqslant)$ por x.

a) Pruebe que si $(T_1, \leqslant_1)$ y $(T_2, \leqslant_2)$ son dos torres en X, entonces uno de estos conjuntos es una sección del otro.

Sugerencia: Suponiendo que $h : T_1 \to T_2$ preserva el orden y que $h(T_1)$ es igual a una sección de T_2, pruebe que $h(x) = x$ para todo $x \in T_1$.

b) Pruebe que si $(T, \leqslant)$ es una torre en X y $T \neq X$, entonces existe una torre en X de la cual $(T, \leqslant)$ es una sección propia.

c) Sea $\{(T_k, \leqslant_k) : k \in K\}$ la familia de todas las torres de X y sean

$$T = \bigcup_{k \in K} T_k \qquad \text{y} \qquad \leqslant = \bigcup_{k \in K} \leqslant_k .$$

Muestre que $(T, \leqslant)$ es una torre en X. Concluya que es $T = X$ y que en consecuencia el axioma de elección implica el teorema del buen orden.

d) Pruebe que el teorema del buen orden implica el axioma de elección.

2

Espacios topológicos

2.1. Conceptos básicos

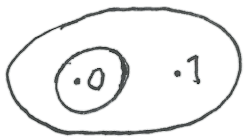
Definición. Sea X un conjunto. Una topología τ para X es una familia de subconjuntos de X que cumple:

1. $\varnothing, X \in \tau$.
2. Si $\{U_i\}_{i\in J}$ es una familia de elementos de τ, entonces $\bigcup_{i\in J} U_i \in \tau$.
3. Si $U_1, ..., U_n \in \tau$, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau$.

En este contexto, a los $U \in \tau$ se los llama abiertos. Un espacio topológico es un par (X, τ).

Ejemplos.

1. X conjunto, $\tau = \{\varnothing, X\}$ (topología indiscreta).
2. X conjunto, $\tau = \mathcal{P}(X)$ (topología discreta).
3. (X, d) espacio métrico, $\tau = \{U \subseteq X \mid \forall x \in U \exists B_\epsilon \subseteq U\}$ (topología métrica).
4. Para $X = \varnothing$ se tiene una única τ.
5. $X = \{*\}$ (singleton).
6. Sea $X = \{0, 1\}$ con $\tau = \{\varnothing, X, \{0\}\}$. Este es el espacio de Sierpinski, que cobrará relevancia cuando estudiemos los espacios T_0. Notemos que la sucesión constante 0 tiende tanto a 0 como a 1.



7. Vamos a definir la topología cofinita o de complemento finito. Dados un conjunto A y un subconjunto $B \subseteq A$, notamos por B^c a su complemento. Sea X un conjunto, y sea $\tau = \{U \subseteq X \mid U = \varnothing \text{ o } U^c \text{ es finito}\}$. Se chequea fácilmente que τ es una topología para X.

Cuando tengamos un conjunto X, vamos a notar por $\tau(X)$ al conjunto de todas las topologías en X. Notamos que $\tau(X)$ resulta un poset con el orden dado por la inclusión. Si tenemos $\tau \leqslant \tau'$, decimos que τ' es más fina que τ.

Definición. Sea (X, τ) un espacio topológico. Un subconjunto $A \subseteq X$ se dice cerrado si A^c es abierto.

Observación. Sea X un espacio topológico y F la familia de todos los cerrados de X. F cumple:

1. $\varnothing, X \in F$.
2. Si $\{A_i\}_{i \in J}$, es una familia de elementos de F, entonces $\bigcap_{i \in J} A_i \in F$.
3. Si $A_1, ..., A_n \in F$, entonces $\bigcup_{i=1}^{n} \in F$.

Observación. La topología τ queda determinada por una familia F que cumpla lo anterior.

Definición. Sea X un espacio topológico, $A \subseteq X$, $A^\circ = \bigcup_{\substack{U \in \tau \\ U \subseteq A}} U$ es el interior de A.

Observaciones.

1. $A^\circ \in \tau$.
2. $A^\circ \subseteq A$.
3. $A^\circ = A \Leftrightarrow A \in \tau$.

Definición. Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Se define la clausura de A como $\bar{A} = \bigcap_{\substack{F^c \in \tau \\ A \subseteq F}} F$.

Observaciones.

1. $\bar{A}$ es cerrado.
2. $A \subseteq \bar{A}$.
3. $A = \bar{A} \Leftrightarrow A$ es cerrado.

Observación. Sea X un espacio topológico. Si $A \subseteq F \subseteq X$ con F cerrado en X, entonces $\bar{A} \subseteq F$.

Definición. Sea X un espacio topológico, $x_0 \in X$. Un entorno de x_0 en X es un subconjunto $V \subseteq X$ tal que $\exists U$ abierto con $x_0 \in U \subseteq V \subseteq X$. Un entorno abierto de x_0 es un abierto de X que contiene a x_0.

Proposición. Sea X un espacio topológico, $A \subseteq X$, $x \in X$. Son equivalentes:

(1) $x \in \bar{A}$.

(2) Todo entorno de x interseca a A.

(3) Todo entorno abierto de x interseca a A.

Demostración.

(1) $\Rightarrow$ (3) Sea U abierto tal que $x \in U$, debemos ver que $U \cap A \neq \varnothing$. Supongamos que $U \cap A = \varnothing \Rightarrow A \subseteq U^c \Rightarrow \bar{A} \subseteq U^c \Rightarrow x \in \bar{A} \subseteq U^c$, absurdo.

(3) $\Rightarrow$ (1) Sea F un cerrado que contiene a A, veamos que $x \in F$. Supongamos que no, entonces $x \in F^c \Rightarrow F^c \cap A \neq \varnothing$, absurdo.

(2) $\Rightarrow$ (3) Un entorno abierto en particular es un entorno.

(3) $\Rightarrow$ (2) Todo entorno contiene un entorno abierto. ■

2.2. Bases y sub-bases

Definición. Sea X un conjunto, una base para una topología en X es una sub-familia $\beta \subseteq \mathcal{P}(X)$ que cumple:

1. $X = \bigcup_{B \in \beta} B$.
2. Si $B_1, B_2 \in \beta$, $x \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists B_3 \in \beta$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Los $B \in \beta$ se llaman abiertos básicos.

Definición. Dada β una base para una topología en X, la topología generada por β es $\tau_\beta = \{U \subseteq X \mid \forall x \in U, \exists B_x \in \beta \text{ tal que } x \in B_x \subseteq U\}$. Es fácil verificar que τ_β resulta una topología.
Con la siguiente proposición vamos a tener una forma alternativa de interpretar una base.

Proposición. Sea X un conjunto, β una base para una topología en X y τ_β la topología generada por β. Entonces τ_β consiste en todas las uniones arbitrarias de elementos de β.

Demostración. Sea τ' la familia de todas la uniones arbitrarias de elementos de β. Queremos ver que $\tau' = \tau_\beta$.

Veamos $\subseteq$). Sea $U \in \tau_\beta \Rightarrow \forall x \in U \exists B_x \in \beta$ tal que $x \in B_x \subseteq U \Rightarrow U = \bigcup_{x \in U} B_x$.

Ahora $\supseteq$). Sea $U \in \tau' \Rightarrow U = \bigcup_{i \in I} B_i$, $B_i \in \beta$, $\beta \subseteq \tau_\beta$ y τ_β es topología. Entonces $U \in \tau_\beta$.
■

Observación. τ_β es la topología menos fina que contiene a β.

Proposición. Sea X un conjunto, β y β' dos bases para la topología en X, y sean τ y τ' las topologías generadas. Son equivalentes:

1. $\tau \leqslant \tau'$.
2. $\forall B \in \beta, x \in B, \exists B' \in \beta'$ tal que $x \in B' \subseteq B$.

Demostración. La primera implicación es obvia. Veamos que $2) \Rightarrow 1)$. Por 2), notamos que dado $B \in \beta$, $B = \bigcup_{B' \subseteq B} B'$ con $B' \in \beta'$. Ahora por la proposición anterior es claro que $\tau \leqslant \tau'$. ■

Ejemplo. La topología usual de $\mathbb{R}$ tiene como base a $\beta = \{(a,b) \mid a < b\}$. Si consideramos $\beta' = \{[a,b) \mid a < b\}$, resulta $\tau_\beta \leqslant \tau_{\beta'}$

Observación. Dado un conjunto X, consideramos el poset $\tau(X)$. Dadas $\tau, \tau' \in \tau(X)$, notamos que $\tau \cap \tau'$ es el ínfimo de τ y τ'. Sin embargo, $\tau \cup \tau'$ no es necesariamente una topología. Más aún, puede no ser una base, pero sí va a ser una sub-base.

Definición. $\beta \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una sub-base para una topología si $X = \bigcup_{B \in \beta} B$.

Dada una sub-base β podemos tomar la base inducida por β, $\tilde{\beta} = \{U_1 \cap ... \cap U_n \mid n \in \mathbb{N}, U_i \in \beta\}$. Resulta que $\tilde{\beta}$ es una base y definimos $\tau_\beta = \tau_{\tilde{\beta}}$. Notamos que τ_β consiste de las uniones arbitrarias de intersecciones finitas de elementos de β.

Ahora sí podemos definir el supremo entre dos topologías τ_1 y τ_2 por $\tau_{\tau_1 \cup \tau_2}$.

2.3. Topología del orden

Sea $(X, <)$ un conjunto totalmente ordenado ($\#X \geqslant 2$). La topología del orden en X es la que tiene como base a:

- $\beta = \{(a,b) \mid a < b\}$ en caso de que X no tenga mínimo ni máximo.
- $\beta = \{(a,b) \mid a < b\} \cup \{[a_0,b) \mid a_0 < b\}$ si tiene mínimo a_0.
- $\beta = \{(a,b) \mid a < b\} \cup \{(b,a_1] \mid b < a_1\}$ si tiene máximo a_1.
- $\beta = \{(a,b) \mid a < b\} \cup \{[a_0,b) \mid a_0 < b\} \cup \{(b,a_1] \mid b < a_1\}$ si tiene mínimo a_0 y máximo a_1.

Es sencillo ver que esta es una base para una topología.

Ejemplos.

1. En $\mathbb{R}$ la topología del orden coincide con la métrica.
2. Tanto en $\mathbb{N}$ como en $\mathbb{Z}$ la topología del orden es la discreta.
3. Si X es finito, la topología del orden es la discreta.
4. Si consideramos $(\mathbb{R}^2, <)$ con el orden lexicográfico, la topología del orden resulta más fina que la métrica.

2.4. Redes

Definición. Sea X un espacio topológico, $A \subseteq X$, $x \in X$ se dice punto de acumulación de A si $\forall V$ entorno de x, $V \cap (A \backslash \{x\}) \neq \varnothing$. Notamos al conjunto de puntos de acumulación de A como A'.

Observación. Un punto de acumulación x puede o no estar en A. Más aún, x es punto de acumulación de A si y sólo si $x \in \overline{A \backslash \{x\}}$. Se deduce que $\bar{A} = A \cup A'$.

Definición. Sea X un espacio topológico y sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X. Decimos que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \in X$ si $\forall V$ entorno de x, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geqslant n_0, x_n \in V$.

Notamos que si una sucesión convergente está contenida en un cierto subconjunto A, entonces su límite pertenece a $\bar{A}$. Además, si X es métrico y $x \in \bar{A}$, entonces $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_n \in A$ tal que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$.

Veamos que en espacios topológicos en general, las sucesiones no alcanzan para definir $\bar{A}$. Es decir $x \in \bar{A} \not\Rightarrow \exists (x_n)_n, x_n \in A$ tal que $x_n \to x$.

Ejemplo. Vamos a trabajar con el conjunto S_Ω antes definido. Notamos que si $\alpha \in S_\Omega \Rightarrow \exists \beta \in S_\Omega$ tal que $\alpha < \beta$. Sea $X = S_\Omega \cup \Omega$ con el orden usual y $\alpha < \Omega \ \forall \alpha \in S_\Omega$. Le damos a X la topología del orden.

Sea $A = S_\Omega \subseteq X$. Afirmamos que $\Omega \in \bar{A}$. Sea V un entorno de Ω, entonces existe $B = (\alpha, \Omega]$ en la base tal que $\Omega \in B \subseteq V$. Observamos que $(\alpha, \Omega] \cap S_\Omega \neq \varnothing$ porque $\forall \alpha \ \exists \gamma \in S_\Omega \Rightarrow \gamma \in (\alpha, \Omega]$.

Veamos ahora que $\nexists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión en S_Ω que converge a Ω. Supongamos que sí existe tal $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Como $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es numerable está acotado superiormente. Entonces existe $\beta \in S_\Omega$ tal que $x_n \leqslant \beta \ \forall n \in \mathbb{N}$. Luego $(\beta, \Omega]$ es un abierto de la base que contiene a Ω y no interseca a $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Definición. Un conjunto dirigido $(\Lambda, \leqslant)$ es un poset con la siguiente propiedad: $\forall \alpha, \beta \in \Lambda \ \exists \gamma \in \Lambda$ tal que $\alpha, \beta \leqslant \gamma$.

Ejemplo. Cualquier conjunto totalmente ordenado es dirigido. En particular $\mathbb{N}$ es dirigido.

Definición. Sea X un espacio topológico. Una red es una función $\phi : \Lambda \to X$ con $(\Lambda, \leqslant)$ un conjunto dirigido.

Por el ejemplo mencionado antes, las sucesiones son un caso particular de redes. Vamos a notar a las redes por $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ con $x_\alpha = \phi(\alpha)$.

Definición. Sea $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ un red en X. Decimos que $x_\alpha \to x$ $(x \in X)$ si $\forall V$ entorno de x, $\exists \alpha \in \Lambda$ tal que $\forall \beta \geqslant \alpha$, $x_\beta \in V$.

Observamos que esta nueva definición generaliza el concepto de sucesiones. Veremos que con ella podemos definir $\bar{A}$ como solíamos hacerlo en espacios métricos.

Proposición. Sea X un espacio topológico, $A \subseteq X$, $x \in X$. Entonces $x \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists (x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ red, $x_\alpha \in A$ tal que $x_\alpha \to x$.

Demostración.

$\Leftarrow$) Sea V un entorno de x, $\exists (x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ con $x_\alpha \to x$. Luego $\exists \alpha \in \Lambda$ tal que $x_\beta \in V$ $\forall \beta \geqslant \alpha$. Entonces $V \cap A \neq \varnothing$.

$\Rightarrow$) Sea $x \in \bar{A}$, tenemos que construir una red $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ tal que $x_\alpha \to x$. Sea Λ el conjunto de entornos de x con el siguiente orden: $B_1 \leqslant B_2$ si $B_2 \subseteq B_1$. Dados $B_1, B_2 \in \Lambda$, tomamos $B_3 = B_1 \cap B_2$ obteniendo $B_3 \geqslant B_1, B_2$. Por lo tanto, Λ resulta un conjunto dirigido. Como $x \in \bar{A}$, $\forall B \in \Lambda$ elegimos $x_B \in B \cap A$ y así construimos $(x_B)_{B\in\Lambda}$. Para ver que que $x_B \to x$, dado $\tilde{B}$ entorno de x, tomamos $\tilde{B} \in \Lambda$. Si $B \geqslant \tilde{B} \Rightarrow B \subseteq \tilde{B}$. Luego $x_B \in B \subseteq \tilde{B}$. ■

Al igual que con las subsucesiones queremos introducir el concepto de subred. Para eso necesitamos de las funciones cofinales.

Definiciones.

1. Sea $(\Lambda, \leqslant)$ un poset y $\Lambda' \subseteq \Lambda$ sub-poset. Se dice que Λ' es cofinal (en Λ) si $\forall \alpha \in \Lambda$, $\exists \alpha' \in \Lambda'$ tal que $\alpha \leqslant \alpha'$.

2. Sean $(\Lambda, \leqslant)$ y $(\Gamma, \leqslant)$ dos conjuntos dirigidos. Una función $f : \Gamma \to \Lambda$ se dice cofinal si:

   (I) $f : \Gamma \to \Lambda$ es morfismo de poset.

   (II) $f(\Gamma) \subseteq \Lambda$ es cofinal.

Si bien el concepto de red generaliza el de sucesión, las subredes de una sucesión no necesariamente son subsucesiones. Más adelante vamos a ver un ejemplo de esto (aún nos faltan herramientas para probarlo).

Definición. Sea X un espacio topológico, $\phi : \Lambda \to X$ una red. Dada $f : \Gamma \to \Lambda$ cofinal, la composición $\phi \circ f : \Gamma \to X$ se llama subred. Se denota $(x_{\alpha_\gamma})_{\gamma\in\Gamma}$, donde $\alpha_\gamma = f(\gamma)$, $x_{\alpha_\gamma} = \phi(f(\gamma))$.

Observaciones.

1. Una subred es una red.

2. Si $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ es una red en X y $x_\alpha \to x \Rightarrow \forall$ subred $(x_{\alpha_\gamma})_{\gamma\in\Gamma}$, $x_{\alpha_\gamma} \to x$.

3. Puede pasar que $x_\alpha \to x$, $x_\alpha \to y$ con $x \neq y$.

2.5. Ejercicios

1. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $Y \subseteq X$. Muestre que

$$\tau_Y = \{U \cap Y : U \in \tau\}$$

   es una topología sobre Y. Llamamos a τ_Y la *topología inducida* por τ sobre Y o la *topología subespacio*.

2. Sean X un conjunto infinito, $x_0 \in X$ y $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ el conjunto de las partes de X que tienen complemento finito o que no contienen a x_0. Muestre que τ es una topología y describa sus cerrados.

3. Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de todos los cerrados acotados de $\mathbb{R}$ en su topología usual, junto con $\mathbb{R}$. Pruebe que existe una topología en $\mathbb{R}$ para la cual $\mathcal{F}$ es el conjunto de todos los cerrados.

4. Decimos que un subconjunto U de $\mathbb{R}^2$ es radialmente abierto si su intersección con toda recta que pasa por uno de sus puntos es un abierto de ésta. Muestre que el conjunto de todos los conjuntos radialmente abiertos de $\mathbb{R}^2$ es una topología sobre $\mathbb{R}^2$ y compárela con la topología usual.

Construcción de topologías

5. Sea X un conjunto. Un *sistema de filtros de entornos* $\mathcal{F}$ *en* X es una regla que a cada elemento $x \in X$ asigna una familia $\mathcal{F}_x \in \mathcal{P}(X)$ de manera que

   a) si $x \in X$, $\mathcal{F}_x \neq \varnothing$;
   b) si $x \in X$ y $A \in \mathcal{F}_x$, entonces $x \in A$;
   c) si $x \in X$, $A \in \mathcal{F}_x$ y $B \in \mathcal{P}(X)$ son tales que $A \subseteq B$, entonces $B \in \mathcal{F}_x$;
   d) si $x \in X$ y $A, B \in \mathcal{F}_x$, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}_x$;
   e) si $x \in X$ y $A \in \mathcal{F}_x$, entonces existe $B \in \mathcal{F}_x$ tal que $B \subseteq A$ y $B \in \mathcal{F}_y$ para todo $y \in B$.

   Pruebe que:

   a) Si (X, τ) es un espacio topológico y para cada $x \in X$ definimos
   $$\mathcal{F}_x = \{A \in \mathcal{P}(X) : \text{existe } U \in \tau \text{ tal que } x \in U \subseteq A\},$$
   entonces $\mathcal{F}$ es un sistema de filtros de entornos en X.
   b) Si $\mathcal{F}$ es un sistema de filtros de entornos en X y definimos
   $$\tau = \{A \in \mathcal{P}(X) : \text{para todo } x \in A \text{ es } A \in \mathcal{F}_x\} \cup \{\varnothing\},$$
   entonces τ es una topología sobre X.
   c) Las construcciones de los items a) y b) son inversas.

6. Sea X un conjunto. Una función $c : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ es un *operador de clausura en* X si

   a) $c(\varnothing) = \varnothing$;
   b) si $A \in \mathcal{P}(X)$, entonces $A \subseteq c(A)$;
   c) si $A \in \mathcal{P}(X)$, entonces $c(c(A)) = c(A)$;
   d) si $A, B \in \mathcal{P}(X)$, entonces $c(A \cup B) = c(A) \cup c(B)$;

   Pruebe que

a) Si (X, τ) es un espacio topológico, entonces la función

$$c : A \in \mathcal{P}(X) \mapsto \overline{A} \in \mathcal{P}(X)$$

es un operador de clausura en X.

b) Si $c : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ es un operador de clausura en X, entonces el conjunto

$$\tau = \{U \in \mathcal{P}(X) : c(X \backslash U) = X \backslash U\}$$

es una topología sobre X.

c) Las construcciones de los items a) y b) son inversas.

7. Sea X un conjunto y sea $B \subseteq X$. Pruebe que la función

$$c : A \in \mathcal{P}(X) \mapsto \begin{cases} A \cup B \in \mathcal{P}(X) & \text{si } A \neq \varnothing \\ \varnothing \in \mathcal{P}(X) & \text{si } A = \varnothing \end{cases}$$

es un operador de clausura en X. Describa los abiertos de la topología correspondiente.

Clausura, interior, frontera

8. Sea X un espacio topológico y sean A, $B \subseteq X$. Pruebe las siguientes inclusiones y decida cuáles pueden ser estrictas:

a) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$;

b) $A \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$ cuando A es abierto;

c) $\overline{A} \backslash \overline{B} \subseteq \overline{A \backslash B}$;

d) $\bigcup_\alpha \overline{A_\alpha} \subseteq \overline{\bigcup_\alpha A_\alpha}$;

e) $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A^\circ \subseteq (\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A)^\circ$ y

f) $(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A)^\circ \subseteq \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A^\circ$.

9. Sea X un espacio topológico y sea $A \subseteq X$. Pruebe que:

a) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \backslash A} = \overline{A} \backslash A^\circ$;

b) $X \backslash \partial A = A^\circ \cup (X \backslash A)^\circ$;

c) $\overline{A} = A \cup \partial A$;

d) $A^\circ = A \backslash \partial A$;

e) A es abierto sii $A \cap \partial A = \varnothing$ y

f) A es cerrado sii $\partial A \subseteq A$.

10. *Topología del complemento finito.* Sea X un conjunto y sea $\tau = \{U \in \mathcal{P}(X) : X \backslash U \text{ es finito}\} \cup \{\varnothing\}$. Pruebe que τ es una topología sobre X. Describa el interior, la clausura y la frontera de los subconjuntos de X con respecto a esta topología.

11. Sean X un conjunto no vacío y $x_0 \in X$. Pruebe que:

a) $\{U \in \mathcal{P}(X) : x_0 \in U\} \cup \{\varnothing\}$ es una topología sobre X.

b) $\{U \in \mathcal{P}(X) : x_0 \notin U\} \cup \{X\}$ es una topología sobre X.

Describa el interior, la clausura y la frontera de los subconjuntos de X con respecto a cada una de estas topologías.

12. *Topología del orden.* Considere el conjunto $X = [0,1] \times [0,1]$ con la topología del orden lexicográfico y determine la clausura y el interior de los siguientes subconjuntos de X.

    a) $\{(1/n, 0) : n \in \mathbb{N}\}$,

    b) $\{(1 - 1/n, 1/2) : n \in \mathbb{N}\}$,

    c) $\{(x, 0) : 0 < x < 1\}$,

    d) $\{(x, 1/2) : 0 < x < 1\}$,

    e) $\{(1/2, y) : 0 < y < 1\}$.

13. Pruebe que todo cerrado de $\mathbb{R}^2$ es la frontera de un subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

Bases y sub-bases

14. Sea $\{\tau_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una colección de topologías en X. Pruebe que $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} \tau_\alpha$ es una topología en X. ¿Es $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} \tau_\alpha$ una topología en X?

15. Sea X un conjunto y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Pruebe que existe una topología $\sigma(\mathcal{A})$ sobre X que cumple que

    - todo elemento de $\mathcal{A}$ es abierto para $\sigma(\mathcal{A})$, y
    - si τ es una topología sobre X tal que todo elemento de $\mathcal{A}$ es abierto para τ, entonces $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \tau$.

    En otras palabras, $\sigma(\mathcal{A})$ es la topología menos fina que contiene a $\mathcal{A}$ (la mínima en el orden dado por la inclusión). La topología $\sigma(\mathcal{A})$ es la *topología generada* por $\mathcal{A}$.

    Describa la topología generada por $\mathcal{A} = \{\{a\}, \{b, c\}, \{d\}\}$ sobre el conjunto $X = \{a, b, c, d\}$.

16. Sea $(X, <)$ un conjunto ordenado. Consideremos $\mathcal{S} = \{S_x : x \in X\}$ y $\mathcal{R} = \{R_x : x \in X\}$, donde $R_x = \{y \in Y : x < y\}$. Pruebe que $\mathcal{S} \cup \mathcal{R}$ es una sub-base para la topología del orden.

17. Considere las siguientes colecciones de subconjuntos de $\mathbb{R}$:
    $\mathcal{B}_1 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$,
    $\mathcal{B}_2 = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$,
    $\mathcal{B}_3 = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$,
    $\mathcal{B}_4 = \mathcal{B}_1 \cup \{B \backslash K : B \in \mathcal{B}_1\}$, donde $K = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$
    $\mathcal{B}_5 = \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$,
    $\mathcal{B}_6 = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$,
    $\mathcal{B}_7 = \{B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \mathbb{R} \backslash B \text{ es finito}\}$.

    a) Muestre que cada uno de $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_7$ es una base para una topología en $\mathbb{R}$ y compare las topologías correspondientes.

b) Muestre que $\mathcal{B}_5 \cup \mathcal{B}_6$ es una sub-base para la topología generada por $\mathcal{B}_1$.

c) Determine la clausura del conjunto K en cada una de las siete topologías.

18. Sea $\mathcal{B} = \{(a,b) : a < b\} \cup \{\{n\} : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Muestre que $\mathcal{B}$ es base de una topología sobre $\mathbb{R}$. Describa el interior de los subconjuntos de $\mathbb{R}$ con respecto a ella.

19. *Topología Zariski.* Considere $k[x] = k[x_1, \ldots, x_n]$ el anillo de polinomios en n variables sobre un cuerpo k. Para cada subconjunto $S \subseteq k[x]$, se define el conjunto algebraico dado por S como

$$V(S) = \{(z_1, \ldots, z_n) \in k^n : p(z_1, \ldots, z_n) = 0, \forall\, p \in S\}.$$

Verifique las siguientes propiedades:

a) $V(S) = V(I_S)$, donde I_S es el ideal generado por S.

b) $V(\{0\}) = k^n$ y $V(\{1\}) = \varnothing$. Si $S \subseteq T$, entonces $V(S) \supseteq V(T)$.

c) Si $I, J \subseteq k[x]$ son ideales, entonces $V(I \cap J) = V(I) \cup V(J)$.

d) Si $\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una familia de ideales, entonces $V\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} V(I_\alpha)$.
Los items b), c) y d) muestran que los conjuntos algebraicos verifican los axiomas de los cerrados de una topología. Esta es la topología Zariski de k^n.

e) Los conjuntos $D_f = k^n \backslash V(\{f\})$ forman una base de dicha topología.

f) Si $f \neq 0$, entonces D_f es denso.

Redes

20. Sea (X, τ) un espacio topológico. Pruebe que las redes convergentes verifican las siguientes propiedades:

a) Si $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ es eventualmente constante, entonces $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a la constante.

b) Si $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a x, entonces toda sub-red de $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a x.

c) Si $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ verifica que toda sub-red tiene una sub-sub-red que converge a x, entonces $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a x.

d) Sean Λ un conjunto dirigido, y para cada $\alpha \in \Lambda$ sea Γ_α un conjunto dirigido. Supongamos que para cada $\alpha \in \Lambda$ se tiene una red $(x^\alpha_k)_{k\in\Gamma_\alpha}$ que converge a $x^\alpha \in X$, y que además $(x^\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a $x \in X$. Considere $\Phi = \Lambda \times \prod_{\alpha\in\Lambda} \Gamma_\alpha$ ordenado por el orden producto, esto es,

$$(\alpha, (k_\beta)_{\beta\in\Lambda}) \geqslant (\alpha', (k'_\beta)_{\beta\in\Lambda}) \iff \alpha \geqslant \alpha' \text{ y } k_\beta \geqslant k'_\beta \ \forall \beta \in \Lambda.$$

Entonces la red $(\alpha, (k_\beta)_{\beta\in\Lambda}) \mapsto x^\alpha_{k_\alpha}$ converge a x.

21. Sea (X, τ) un espacio topológico. Pruebe que

$$\overline{A} = \{x \in X : \exists (x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subset A, \text{ y } x_\alpha \to x\}$$

22. Si $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ es una red, decimos que $x \in X$ es un punto de acumulación de la red si para todo $A \in \mathcal{F}_x$, el conjunto $\{\alpha \in \Lambda : x_\alpha \in A\}$ es cofinal en Λ. Pruebe que x es un punto de acumulación de la red si y sólo si existe una subred de $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ que converge a x.

    Sugerencia: para probar $\Rightarrow$), considere como conjunto dirigido el formado por los pares (α, U) con $\alpha \in \Lambda$ y U un entorno (abierto) de x que contiene a x_α.

3

Funciones continuas, topologías iniciales y finales

3.1. Introducción

Al igual que ocurre en el caso particular de los espacios métricos, para espacios topológicos podemos definir funciones continuas. Vamos a comenzar con una definición análoga a la que se da en el caso de espacios métricos, y después veremos algunas equivalencias.

Definición. Sean X e Y espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ es continua si $\forall U \subseteq Y$ abierto, $f^{-1}(U) \subseteq X$ es abierto.

Observación. Como $f^{-1}(\bigcup_{i \in J} U_i) = \bigcup_{i \in J} f^{-1}(U_i)$ y $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$, entonces para ver que f es continua, basta ver que $f^{-1}(U)$ es abierto para todo U de una sub-base de Y.

La demostración del siguiente resultado queda como ejercicio para el lector.

Teorema. Sean X e Y espacios topológicos, $f : X \to Y$ función. Son equivalentes:

1. f es continua.
2. $\forall A \subseteq X$, $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.
3. $f^{-1}(F)$ es cerrado para todo $F \subseteq Y$ cerrado.
4. $\forall$ red $x_\alpha \to x$ en X, $f(x_\alpha) \to f(x)$ en Y.

Observación. Una composición de funciones continuas es continua.

Definición. Sean X e Y espacios topológicos, $f : X \to Y$ función. Se dice:

1. f abierta si $\forall U \subseteq X$ abierto, $f(U) \subseteq Y$ es abierto.
2. f cerrada si $\forall F \subseteq X$ cerrado, $f(F) \subseteq Y$ es cerrado.
3. f es homeomorfismo si es continua, biyectiva y f^{-1} es continua.

Observación. f es homeomorfismo $\iff$ es continua, abierta y biyectiva $\iff$ es continua, cerrada y biyectiva.

Observación. Sean X un conjunto y τ y τ' dos topologías en X. Consideramos $1_X : (X, \tau) \to (X, \tau')$, con $1_X(x) = x$. Notamos que:

a) 1_X es continua $\iff \tau \geqslant \tau'$.

b) 1_X es abierta $\iff \tau' \geqslant \tau$.

c) 1_X es homeomorfismo $\iff \tau = \tau'$.

3.2. Topologías iniciales

Dados X un espacio topológico y $A \subseteq X$ un subconjunto, queremos darle a A una topología τ_A que herede de X. Esta se llamará la topología de subespacio y puede ser definida de varias formas equivalentes.

Definición 1. Definimos $\tau_A = \{U \cap A \mid U \subseteq X \text{ abierto}\}$.

Decimos que (A, τ_A) es un subespacio de X. Observamos que τ_A hace a la inclusión $i : A \hookrightarrow X$ continua. Sin embargo hay muchas topologías en A que hacen a la inclusión continua. La diferencia es que τ_A es la menos fina con dicha propiedad.

Definición 2. τ_A es la topología menos fina que hace a $i : A \hookrightarrow X$ continua.

Proposición. Sea X un espacio topológico, $A \subseteq X$. La topología τ_A cumple la siguiente propiedad: para todo espacio topológico Z y para toda función $f : Z \to A$, f es continua si y solo si $i \circ f : Z \to X$ es continua.

Demostración.

$\Rightarrow$) Composición de continuas es continua.

$\Leftarrow$) Sea $V \subseteq A$ abierto, debemos ver que $f^{-1}(V) \subseteq Z$ es abierto. Como $V = i^{-1}(U)$ para algún $U \subseteq X$ abierto, entonces $f^{-1}(V) = f^{-1}(i^{-1}(U)) = (f \circ i)^{-1}(U)$, que es abierto. ■

Proposición. Sea X un espacio topológico, $A \subseteq X$, entonces τ_A es la única topología en A que cumple la propiedad de la proposición anterior.

Demostración. Para ver que es la única, sea τ una topología que cumple la propiedad. Tenemos:

$$\begin{tikzcd} (A,\tau) \arrow[r, "1_A"] \arrow[rr, bend right, hook, "i"'] & (A,\tau_A) \arrow[r, hook, "i"] & X \end{tikzcd}.$$

Como (A,τ_A) cumple la propiedad, $(A,\tau) \xrightarrow{1_A} (A,\tau_A)$ es continua. Análogamente $(A,\tau_A) \xrightarrow{1_A} (A,\tau)$ resulta continua, y por lo tanto homeomorfismo. Luego $\tau = \tau_A$. ■

Conclusión. Dado $A \subseteq X$, consideramos $i : A \hookrightarrow X$. Podemos definir la topología subespacio en A de tres formas equivalentes:

1. $\tau_A = \{U \cap A \mid U \subseteq X \text{ abierto}\}$.
2. τ_A es la topología menos fina que hace a $i : A \hookrightarrow X$ continua.
3. τ_A es la única topología que cumple la siguiente propiedad: para todo espacio topológico Z y para toda función $f : Z \to A$, f es continua si y solo si $i \circ f : Z \to X$ es continua.

Observaciones. Sean X un espacio topológico, $A \subseteq X$ subespacio, $i : A \hookrightarrow X$ la inclusión:

1. Sea $g : X \to Y$ continua, entonces la restricción $g|_A = g \circ i : A \to Y$ es continua, pues i lo es.
2. Sea $h : Y \to X$ continua con $h(Y) \subseteq A$, entonces la correstricción $h|^A : Y \to A$ es continua por el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "h|^A"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & A \arrow[r, hook, "i"] & X \end{tikzcd}.$$

Definición. $A \subseteq X$ es un subespacio cerrado (abierto) si A tiene la topología subespacio y A es cerrado (abierto) de X.

Observación. $A \subseteq X$ es subespacio cerrado (abierto) $\iff$ A es subespacio e $i : A \hookrightarrow X$ es cerrada (abierta).

Ahora vamos a generalizar el concepto de topología subespacio. Lo que antes hacíamos para la inclusión ahora lo vamos a hacer para funciones en general. Dados X un espacio topológico y $g : A \to X$ una función con A un conjunto, queremos darle a A una topología que herede de X vía g. Lo podemos hacer, como antes, de varias formas equivalentes.

Definición 1. $\tau_A^g = \{g^{-1}(U) \mid U \subseteq X \text{ abierto}\}$.

Definición 2. τ_A^g es la topología menos fina que hace a g continua.

Definición 3. τ_A^g es la topología que cumple la siguiente propiedad: $\forall Z$ espacio topológico, $\forall f : Z \to A$ función, f es continua $\iff g \circ f$ es continua.

Definición. En cualquiera de los tres casos (son equivalentes al igual que antes) decimos que A tiene la topología inicial respecto de g (o equivalentemente, g es inicial).

En general vamos a decir que A es subespacio de X si existe $j : A \to X$ inyectiva e inicial. Esto es equivalente a decir que $j : A \to j(A) \subseteq X$ es un homeomorfismo, donde $j(A)$ tiene la topología de subespacio de X. Análogamente extendemos las definiciones de subespacio abierto y cerrado (j abierta o cerrada).

Sea X un conjunto, $X = \bigcup_{i \in I} A_i$, $A_i \subseteq X$ subconjuntos. Dar una función $f : X \to Y$ equivale a dar funciones $f_i : A_i \to Y$ tales que $\forall i \in I$ si $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, $f_i|_{A_i \cap A_j} = f_j|_{A_i \cap A_j}$. En espacios topológicos esto no es cierto. Si f es continua, entonces cada f_i lo es, pero no vale la vuelta. Para eso hay que pedir más condiciones.

Lema de pegado (cerrados). Sean X un espacio topológico y $\{F_1, ..., F_n\}$ un cubrimiento por subespacios cerrados de X. Si $f : X \to Y$ es tal que $f|_{F_i}$ es continua para todo $1 \leqslant i \leqslant n$, entonces f es continua.

Demostración. Sea $f : X \to Y$, llamamos $f_i := f|_{F_i} : F_i \to Y$. Por hipótesis f_i es continua para todo $1 \leqslant i \leqslant n$. Sea $A \subseteq Y$ cerrado. Tenemos que $f^{-1}(A) = f_1^{-1}(A) \cup ... \cup f_n^{-1}(A)$. Cada $f_i^{-1}(A) \subseteq F_i$ es cerrado pues f_i es continua. Luego como F_i es cerrado, $f_i^{-1}(A)$ es cerrado en X para todo i. Entonces $f^{-1}(A)$ es cerrado en X. ■

Lema de pegado (abiertos). Sean X un espacio topológico y $\{U_i\}_{i \in J}$ un cubrimiento por abiertos de X. Si $f : X \to Y$ es tal que $f|_{U_i}$ es continua para todo $i \in J$, entonces f es continua.

Demostración. Es análoga a la demostración para el caso cerrados. ■

A continuación vamos a estudiar la topología producto para luego generalizar el concepto de función inicial al de familia inicial.

Sean X e Y espacios topológicos, $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$. Tenemos las dos proyecciones usuales p_X y p_Y. Podemos definir la topología producto de las siguientes maneras equivalentes:

Definición 1. La topología producto en $X \times Y$ es la menos fina que hace a p_X y p_Y continuas.

Definición 2. La topología producto es la topología con sub-base $\mathcal{B} = \{U \times Y \mid U \subseteq X \text{ abierto}\} \cup \{X \times V \mid V \subseteq Y \text{ abierto}\}$.

Definición 3. Una base de la topología producto es $\tilde{\mathcal{B}} = \{U \times V \mid U \subseteq X, V \subseteq Y \text{ abiertos}\}$

Definición 4. La topología producto cumple la siguiente propiedad: para todo Z espacio topológico y toda función $f : Z \to X \times Y$, f es continua si y sólo si $p_X \circ f$ y $p_Y \circ f$ lo son.

Más en general dada $\{X_i\}_{i \in J}$ una familia de espacios topológicos, consideramos $\prod_{i \in J} X_i$ con las proyecciones p_i usuales. Al igual que en el caso de dos espacios topológicos podemos definir la topología producto para una familia arbitraria.

Definición 1. La topología producto en $\{X_i\}_{i \in J}$ es la menos fina que hace a p_i continua $\forall i \in J$.

Definición 2. La topología producto es la topología con sub-base

$$\mathcal{B} = \{p_i^{-1}(U_i) \mid U_i \subseteq X_i \text{ abierto}\}_{i \in J}.$$

Definición 3. Una base de la topología producto es

$$\tilde{\mathcal{B}} = \{\prod_{i \in J} U_i \mid U_i \subseteq X_i \text{ abierto}, U_i \neq X_i \text{ sólo para finitos } i\}.$$

Definición 4. La topología producto cumple la siguiente propiedad: para todo Z espacio topológico y toda función $f : Z \to \prod_{i \in J} X_i$, f es continua si y sólo si $p_i \circ f$ lo es $\forall i \in J$.

Observación. Sean X un espacio topológico y S un conjunto. Tenemos $\prod_{s \in S} X = X^S = \{f : S \to X \text{ función}\}$ con la topología producto. Allí definimos la diagonal $\Delta : X \to X^S$ con $\Delta(x) = (x)_{s \in S}$. Es fácil ver que es continua, usando cualquiera de las definiciones anteriores.

Ejemplo. Puede suceder que X sea discreto pero que X^S no lo sea. Por ejemplo, $X = \{0, 1\}$ es discreto, pero X^S con $S = \mathbb{N}$ no. Para que fuese discreto, cada punto debería ser un abierto, pero sabemos que los abiertos básicos de X^S son de la forma $\prod_{n \in \mathbb{N}} U_n$ con $U_n = X$ para todos salvo finitos n.

Consideramos ahora otra posible topología que se puede dar al producto cartesiano, la topología caja, con base $\mathcal{B} = \{\prod_{i \in J} U_i \mid U_i \subseteq X_i \text{ abierto}\}$. En caso de que J sea finito, la topología caja y la topología producto coinciden; si J es infinito, entonces la topología caja, en general, es más fina que la topología producto. En particular, no es la menos fina que hace a las proyecciones p_i continuas.

Observaciones.

1. Si X_i es discreto para todo $i \in J$, entonces $\prod_{i \in J} X_i$ es discreto con la topología caja.
2. Si S es infinito y $\prod_{s \in S} X$ tiene la topología caja, entonces la diagonal $\Delta : X \to X^S$ puede no ser continua. Por ejemplo, si $X = \mathbb{R}$ y $S = \mathbb{N}$, consideramos $U = \prod_{n \in \mathbb{N}} (\frac{-1}{n}, \frac{1}{n})$. Así $\Delta^{-1}(U) = \{0\}$, que no es abierto en $\mathbb{R}$.

Generalizando las dos situaciones anteriores, podemos definir una topología inicial de un espacio respecto a una familia arbitraria de funciones.

Definición. Dada $\{X_i\}_{i\in J}$ una familia de espacio topológico, sean X un conjunto y $f_i : X \to X_i$ funciones. La topología inicial en X con respecto a la familia $\{f_i\}_{i\in J}$ es la menos fina que hace que f_i sea continua para todo $i \in J$. Llamamos a $\{f_i\}_{i\in J}$ familia inicial.

Equivalentemente, tenemos las dos siguientes definiciones:

1. Es la topología que tiene como sub-base a
$$\{f_i^{-1}(U_i) \mid U_i \subseteq X_i \text{ abierto}\}_{i\in J}.$$
2. Es la topología que cumple la siguiente propiedad: $\forall Z$ espacio topológico $\forall f : Z \to X$, f es continua si y sólo si $f_i \circ f$ es continua $\forall i \in J$.

La siguiente proposición resulta de gran utilidad al trabajar con topologías iniciales.

Proposición. Sean $f : X \to Y$ continua y $\{f_s : Y \to Y_s\}_{s\in S}$ continuas. Si $\{f_s \circ f : X \to Y_s\}_{s\in S}$ es una familia inicial, entonces f es inicial.

Demostración. Sean Z un espacio topológico y $g : Z \to X$ función continua. Como f es continua, $f \circ g$ lo es. Recíprocamente, supongamos que $f \circ g$ es continua. Queremos ver que g lo es. Para cada s en S tenemos

$$Z \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{f_s} Y_s.$$

Como $\{f_s : Y \to Y_s\}_{s\in S}$ son continuas por hipótesis, la composición $f_s \circ f \circ g$ es continua $\forall s \in S$. Ahora al ser $\{f_s \circ f : X \to Y_s\}_{s\in S}$ inicial, g resulta continua. ■

3.3. Topologías finales

Sean X un espacio topológico, Y un conjunto y $f : X \to Y$ función. Vamos a darle una topología a Y para que f sea continua, y lo haremos de manera que sea la más fina con esta propiedad. Es decir, estamos dualizando el concepto anterior.

Definición 1. La topología final en Y es la más fina que hace a f continua.

Definición 2. La topología final es la topología

$$\tau = \{U \subseteq Y \mid f^{-1}(U) \text{ abierto}\}.$$

Definición 3. La topología final es la única topología en Y que cumple: $\forall Z$ espacio topológico y $\forall h : Y \to Z$ función, h es continua si y sólo si $h \circ f$ es continua.

Dejamos a cargo del lector la comprobación que las 3 definiciones anteriores son equivalentes.

Ejemplo. Consideramos la inclusión $i : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ con $i(x) = (x, 0)$. La topología usual en $\mathbb{R}$ es la inicial respecto a i. Sin embargo, la topología final en $\mathbb{R}^2$ dada por i no coincide con la usual de $\mathbb{R}^2$; es estrictamente más fina.

Al igual que en el caso inicial, podemos generalizar la situación anterior a una familia de funciones:

Definición 1. Sean $\{X_s\}_{s\in S}$ una familia de espacios topológicos, Y un conjunto y $\{f_s : X_s \to Y\}_{s\in S}$ una familia de funciones. La topología final en Y respecto de $\{f_s : X_s \to Y\}_{s\in S}$ es la más fina que hace a todas las f_s continuas.

Definición 2. La topología final es $\tau = \{U \subseteq Y \mid f_s^{-1}(U) \subseteq X_s \text{ abierto } \forall s \in S\}$.

Definición 3. La topología final es la única topología en Y que cumple: $\forall Z$ espacio topológico y $\forall h : Y \to Z$, h es continua si y sólo si $h \circ f_s$ es continua $\forall s \in S$.

Veamos ahora unos ejemplos relevantes. Comencemos con el concepto dual a la topología producto. Dada una familia $\{X_s\}_{s\in S}$ de espacios topológicos, consideramos su unión disjunta $X = \coprod_{s\in S} X_s$; tenemos las inclusiones usuales i_s y le damos a X la topología final respecto a ellas. Es decir, $U \subseteq X$ es abierto $\iff$ $U \cap X_s \subseteq X_s$ es abierto en X_s $\forall s \in S$.

Observación. Los lemas de pegado de subespacios vistos anteriormente se pueden reformular de la siguiente manera:

1. Versión cerrados: sea X un espacio topológico, $X = \bigcup_{i=1}^n F_i$, con $F_i \subseteq X$ subespacios cerrados. Entonces X tiene la topología final respecto de la familia de inclusiones $\{i_j : F_j \to X\}_{1\leqslant j\leqslant n}$.

2. Versión abiertos: sea X un espacio topológico, $X = \bigcup_{i\in J} U_i$, con $U_i \subseteq X$ subespacios abiertos. Entonces X tiene la topología final respecto de la familia de inclusiones $\{i_j : U_j \to X\}_{j\in J}$.

Ahora pasamos a estudiar el caso más importante de topología final, la topología cociente.

Definición. Una función continua $f : X \to Y$ es cociente si es sobreyectiva y final.

Observación. Dados una función $f : X \to Y$ y $A \subseteq X$ vale que $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

Definición. En la situación anterior, decimos que A es saturado (respecto de f) si $A = f^{-1}(f(A))$.

Observación. Dados $q : X \to Y$ sobreyectiva y $V \subseteq Y$, entonces $q^{-1}(V)$ es saturado.

Proposición. Sea $q : X \to Y$ continua y sobreyectiva. Son equivalentes:

1. q es cociente.
2. $\forall U \subseteq X$ abierto saturado, $q(U)$ es abierto en Y.
3. $\forall F \subseteq X$ cerrado saturado, $q(F)$ es cerrado en Y.

Demostración.

1) $\Rightarrow$ 2) Sea $U \subseteq X$ un abierto saturado, queremos ver que $q(U) \subseteq Y$ es abierto. Como Y tiene la topología final, debemos ver que $q^{-1}(q(U))$ es abierto en X. Eso es cierto porque $U = q^{-1}(q(U))$.

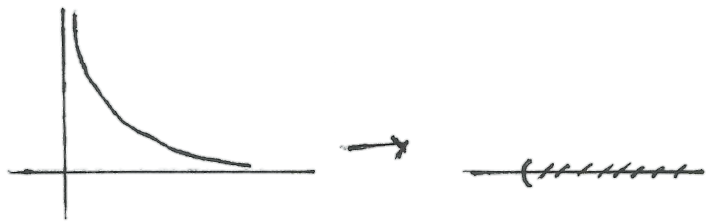
2) $\Rightarrow$ 1) Debemos ver que q es final, o sea que si $V \subseteq Y$ tal que $q^{-1}(V)$ es abierto en X, hay que ver que V es abierto en Y. Como q es sobreyectiva, $V = q(q^{-1}(V))$, y como habíamos observado antes, $q^{-1}(V)$ es abierto saturado de X. Luego por 2), V es abierto.

De la misma manera se prueba 1) $\iff$ 3). ■

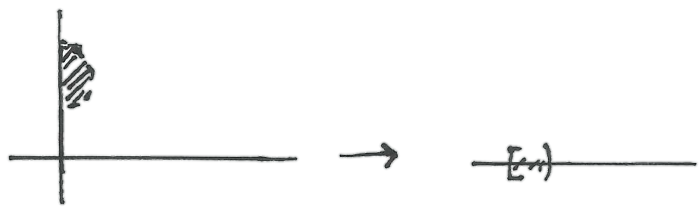
Corolario. Sea $q : X \to Y$ continua, sobreyectiva y abierta (resp. cerrada). Entonces q es cociente.

Ejemplo. Veamos que $q : X \to Y$ cociente no implica que q sea abierta o cerrada. Tomamos $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0 \text{ o } y = 0\}$ con la topología subespacio de $\mathbb{R}^2$. A su vez tenemos $Y \subseteq X$ el eje x con la topología subespacio. Sea $q : X \to Y$ la proyección a la coordenada x. Es claro que q es continua y sobreyectiva, veamos que es final. Sea $F \subseteq Y$ tal que $q^{-1}(F) \subseteq X$ es cerrado, queremos ver que F es cerrado en Y. Notamos que $F = q^{-1}(F) \cap Y$, que es una intersección de cerrados. Entonces F es cerrado en Y.

Para ver que q no es cerrada vemos que $q(\{(x, 1/x) \mid x > 0\}) = (0, +\infty)$.

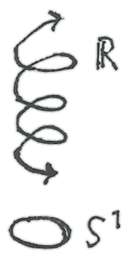


Para ver que no es abierta le aplicamos q a $X \cap B_1(0, 2)$.



Ejemplos.

1. Dada $\{X_i\}_{i\in J}$ una familia de espacios topológicos, las proyecciones $\prod_{i\in J} X_i \xrightarrow{p_i} X_i$ son cociente (continuas, abiertas y sobreyectivas).
2. $f : \mathbb{R} \to S^1$ con $f(t) = e^{2\pi i t}$ es cociente (continua, abierta y sobreyectiva).



3. Consideramos $X = \mathbb{R}$ e $Y = \{0,1\}$ como conjunto. Tenemos $q : X \to Y$ con $q(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geqslant 0 \end{cases}$. Si le damos a Y la topología cociente, Y resulta ser el espacio de Sierpinski. Este ejemplo muestra que los cocientes pueden tener propiedades topológicas muy diferentes a las de los espacios originales.

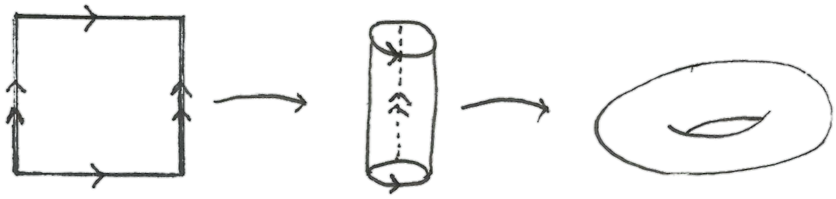
Definición. Dadas $q : X \to Y$ función, $y \in Y$, a $q^{-1}(y)$ lo llamamos la fibra de y.

Teorema. Sean $q : X \to Y$ cociente y $f : X \to Z$ continua tal que f es constante en cada fibra de q. Entonces $\exists! \bar{f} : Y \to Z$ continua tal que $\bar{f}(q(x)) = f(x)\ \forall x \in X$.

Demostración. Sea $y \in Y$, definimos $\bar{f}(y) = f(x)$ si $x \in q^{-1}(y)$. La función $\bar{f}$ resulta bien definida porque como q es sobreyectiva, $q^{-1}(y) \neq \varnothing$, y f es constante en $q^{-1}(y)$. Por la propiedad universal de la topología final en Y, $\bar{f}$ es continua. ∎

Construimos ahora un cociente a partir de una relación de equivalencia, Para ello necesitamos X un espacio topológico y $\sim$ una relación de equivalencia. Consideramos $q : X \to X/\sim$ con $q(x) = [x]$ y le damos a $X/\sim$ la topología cociente.

Ejemplo. Sean $X = [0,1] \times [0,1]$ y $\sim \begin{cases} (x,y) \sim (x,y) \\ (0,t) \sim (1,t) \\ (s,0) \sim (s,1) \end{cases}$. Entonces $X/\sim$ es el toro.



Notación. Dado un subespacio $A \subseteq X$, definimos en X la relación de equivalencia $\sim$ $\begin{cases} x \sim x & \\ a \sim a' & \forall a, a' \in A \end{cases}$. A $X/\sim$ lo notamos X/A.

Ejemplos. Definimos $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| \leqslant 1\}$ y $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid ||x|| = 1\} = \partial D^{n+1}$.

1. Si $X = D^2$ y $A = \partial X = S^1$, entonces $X/A = S^2$.
2. Más en general $D^n/\partial D^n = S^n$. Si vemos a los elementos de D^n como tv, donde v es un versor y $0 \leqslant t \leqslant 1$, tenemos la función continua $f : D^n \to S^n$ con $f(tv) = (sen(t\pi)v, cos(t\pi))$. Es fácil ver que f pasa al cociente y que resulta un homeomorfismo.

Corolario. Sean $f : X \to Z$ continua, $A \subseteq X$ subespacio tal que $f|_A$ es constante. Entonces existe única $\bar{f} : X/A \to Z$ tal que $\bar{f}[x] = f(x)$.

Teorema. Sea $f : X \to Y$ cociente. Definimos en X la relación de equivalencia $x \sim x'$ si $f(x) = f(x')$. Entonces Y es homeomorfo a $X/\sim$.

Demostración. Sea $q : X \to X/\sim$, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & Y \arrow[dl, dotted, bend left, "\exists! \bar{q}"] \\ X/\sim \arrow[ur, dotted, "\exists! \bar{f}"] & \end{tikzcd}$$

Si $[x] = [x'] \Rightarrow f(x) = f(x') \Rightarrow f$ es constante en las fibras de $q \Rightarrow \exists! \bar{f} : X/\sim \to Y$ tal que $\bar{f}[x] = f(x)$. De la misma manera, q es constante en las fibras de f. Entonces $\exists! \bar{q} : Y \to X/\sim$ tal que $\bar{q}(y) = q(x) = [x]$ si $f(x) = y$. Ahora $\bar{f}(\bar{q}(y)) = \bar{f}(q(x)) = \bar{f}[x] = f(x) = y$, y lo mismo en el otro sentido. Así $\bar{f}$ y $\bar{q}$ son inversas, por lo que Y es homeomorfo a $X/\sim$. ■

3.4. Ejercicios

Funciones continuas

1. Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Pruebe que cada una de las siguientes condiciones sobre f es equivalente a que f sea continua:

   a) Para todo $x \in X$ y para todo $A \in \mathcal{F}_y$ $(y = f(x))$ existe $B \in \mathcal{F}_x$ tal que $f(B) \subset A$.

   b) Para toda red $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \subset X$ tal que $x_\alpha \to x$ se tiene que $f(x_\alpha) \to f(x)$.

   c) Para todo $A \subset X$ se tiene $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$.

   d) Si $\mathcal{B}$ es una base para la topología de Y, entonces $f^{-1}(B)$ es abierto en X para todo $B \in \mathcal{B}$.

   e) Si $\mathcal{S}$ es una sub-base para la topología de Y, $f^{-1}(S)$ es abierto en X para todo $S \in \mathcal{S}$.

2. Sean X un espacio topológico y $E \subseteq X$. Sea $\chi_E : X \to \mathbb{R}$ la función característica de E, esto es,
$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases}$$
Pruebe que χ_E es continua en x si y sólo si x no pertenece a la frontera de E.

3. *a*) Sean X, Y conjuntos ordenados con la topología del orden. Pruebe que si $f : X \to Y$ es biyectiva y preserva el orden, entonces f es un homeomorfismo.
   b) Sea $n \in \mathbb{N}$. Sea $g : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, $g(x) = \sqrt[n]{x}$. Pruebe que g es un homeomorfismo.
   c) Sea $X = (-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$ con la topología euclídea. Definimos $f : X \to \mathbb{R}$ por:
$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$
   Pruebe que f es biyectiva y preserva el orden. ¿Es f un homeomorfismo?

4. Sea Y un conjunto ordenado con la topología del orden. Sean $f, g : X \to Y$ funciones continuas.
   a) Pruebe que el conjunto $\{x \in X : f(x) \leqslant g(x)\}$ es cerrado en X.
   b) Sea $h : X \to Y$ la función $h(x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\}$. Pruebe que h es continua.

5. Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una colección de subconjuntos del espacio X tal que $X = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$. Sea $f : X \to Y$ y supongamos que $f|_{A_\alpha}$ es continua para cada $\alpha \in \mathcal{A}$.
   a) Pruebe que si cada A_α es abierto, entonces f es continua.
   b) Pruebe que si $\mathcal{A}$ es finito y cada conjunto A_α es cerrado, entonces f es continua.
   c) Encuentre un ejemplo donde la colección $\mathcal{A} = \mathbb{N}$, cada A_α es cerrado, pero f no es continua.
   d) Una familia $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ se dice localmente finita si para cada $x \in X$ existe un abierto $U \subseteq X$, $x \in U$, tal que $U \cap A_\alpha \neq \varnothing$ sólo para finitos valores de α. Muestre que si la familia $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ es localmente finita y cada A_α es cerrado, entonces f es continua.

Subespacios

6. Sea X un espacio topológico. Pruebe que si $Z \subset A$ y A subespacio de X, entonces la topología de Z como subespacio de A coincide con la topología de Z como subespacio del subespacio X.

7. Sea X un conjunto totalmente ordenado, dotado de la topología del orden, y sea $Y \subseteq X$ un subconjunto.
   a) Muestre que la topología del orden de Y no necesariamente concide con la topología de Y como subespacio de X.
   b) Y se dice **convexo** si satisface $a, b \in Y \Rightarrow (a, b) \subset Y$. Pruebe que si Y es convexo, entonces estas dos topologías sí coinciden.

8. Considere a $I = [-1, 1]$ como subespacio de $\mathbb{R}$. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son abiertos en I? ¿Cuáles son abiertos en $\mathbb{R}$?

$$\begin{array}{ll} A = \{x : \frac{1}{2} < |x| < 1\} & B = \{x : \frac{1}{2} < |x| \leqslant 1\} \\ C = \{x : \frac{1}{2} \leqslant |x| < 1\} & D = \{x : \frac{1}{2} \leqslant |x| \leqslant 1\} \\ E = \{x : 0 < |x| < 1, 1/x \notin \mathbb{N}\} & F = \{x : |x| \leqslant 1\} \end{array}$$

Productos

9. Sean X e Y espacios topológicos. Sean A un subespacio de X, B un subespacio de Y. Pruebe que la topología producto en $A \times B$ coincide con la topología de subespacio de $X \times Y$.

10. Sean X, Y espacios topológicos. Pruebe que las proyecciones $p_1 : X \times Y \to X$ y $p_2 : X \times Y \to Y$ son abiertas. Halle ejemplos en los que no sean cerradas.

11. Sean X, Y, Z espacios topológicos, y sea $f : X \times Y \to Z$ una función. f se dice **continua en** x si $f(-, y) : X \to Z$ es continua para todo $y \in Y$. Analogamente, f se dice **continua en** y si $f(x, -) : Y \to Z$ es continua para todo $x \in X$.

    a) Pruebe que si f es continua, entonces es continua en cada variable.

    b) Dé un ejemplo en el que f sea continua en cada variable y sin embargo no sea continua.

12. Sean $A \subset X$ y $B \subset Y$. Pruebe que $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$. Concluya que si A es cerrado en X y B es cerrado en Y, entonces $A \times B$ es cerrado en $X \times Y$.

13. *a*) Pruebe que la topología del orden lexicográfico en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ coincide con la topología producto de $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$, donde $\mathbb{R}_d$ es el conjunto $\mathbb{R}$ dotado de la topología discreta. Compare con la topología usual de $\mathbb{R}^2$.

    b) Sea $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Compare las siguientes topologías sobre $I \times I$:

    - la topología producto;
    - la topología del orden para el orden lexicográfico;
    - la topología producto $I_d \times I$, donde I_d denota a I con la topología discreta.

14. Sea $\mathbb{R}_l$ el espacio topológico cuyo conjunto subyacente es $\mathbb{R}$ y cuya topología tiene como base de abiertos al conjunto $\{[a, b), a, b \in \mathbb{R}\}$. Sea L una recta en el plano. Describa la topología de L como subespacio de $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}$ y como subespacio de $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$.

15. *a*) Sean $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$. Pruebe que las funciones $f : X \to X \times Y$ y $g : Y \to X \times Y$ definidas por $f(x) = (x, y_0)$, $g(y) = (x_0, y)$ son subespacios.

    b) Sea X un espacio métrico con métrica $d : X \times X \to \mathbb{R}$. Pruebe que la topología inducida por la métrica es la menos fina que hace que d sea una función continua.

    Sugerencia: si d es continua, también lo es $d_{x_0} : X \to \mathbb{R}$, $d_{x_0}(x) = d(x, x_0)$.

16. Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos, y sea para cada $i \in I$ un subconjunto $A_i \subset X_i$. Decida cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas y cuáles falsas si se toma en $X = \prod_{i \in I} X_i$ la topología producto. ¿Y si se toma la topología caja?

a) Si cada A_i es cerrado en X_i entonces $\prod_{i\in I} A_i$ es cerrado en X.

b) $\overline{\prod_{i\in I} A_i} = \prod_{i\in I} \overline{A_i}$.

17. Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos, y sea $X = \prod_{i\in I} X_i$ el espacio producto con proyecciones $\{p_i : X \to X_i\}_{i\in I}$. Dada $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ una red en X, pruebe que $x_\alpha \to x$ si y sólo si $p_i(x_\alpha) \to p_i(x)$ para todo $i \in I$. ¿Es cierto ésto si se toma en X la topología caja?

18. Se define en $\mathbb{R}$ la métrica acotada como $\overline{d}(a,b) = \text{mín}\{|a-b|, 1\}$. Pruebe que induce la misma topología que la usual. Sea $\mathbb{R}^\omega$ el conjunto de las sucesiones de números reales. Se define en $\mathbb{R}^\omega$ la métrica uniforme como

$$\overline{\rho}((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sup_n\{\overline{d}(a_n, b_n)\}.$$

Verifique que la métrica uniforme es efectivamente una métrica.

19. Decida si las siguientes funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^\omega$ son continuas tomando en $\mathbb{R}$ la toplogía usual y tomando en $\mathbb{R}^\omega$ la topología uniforme, la topología producto y la topología caja.

$$f(t) = (t, 2t, 3t, \ldots) \qquad g(t) = (t, t, t, \ldots) \qquad h(t) = (t, \frac{1}{2}t, \frac{1}{3}t, \ldots)$$

20. Decida si las siguientes sucesiones convergen en $\mathbb{R}^\omega$ con las topologías uniforme, producto y caja.

a) $(1,1,1,1,\ldots), (0,2,2,2,\ldots), (0,0,3,3,\ldots), \ldots$

b) $(1,1,1,1,\ldots), \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots\right), \left(0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots\right), \ldots$

c) $(1,0,0,0,\ldots), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \ldots), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \ldots), \ldots$

d) $(1,1,0,0,\ldots), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \ldots), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, \ldots), \ldots$

21. Calcule la clausura del conjunto de las sucesiones eventualmente cero con respecto a las topologías uniforme, producto y caja.

22. Sean (X_n, d_n) espacios métricos. Pruebe que $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ con la topología producto es metrizable.
Sugerencia: Considere $d(x,y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \frac{\bar{d}_n(x_n, y_n)}{n} \right\}$.

Cocientes

23. *a*) Sean X e Y espacios topológicos y sea $f : X \to Y$ una función continua. Pruebe que si existe $g : Y \to X$ continua tal que $f \circ g = id_Y$, entonces f es un cociente.

b) Si $A \subset X$, una **retracción** de X sobre A es una aplicación continua $r : X \to A$ tal que $r(a) = a$ para todo $a \in A$. Pruebe que una retracción es una aplicación cociente.

24. Sea $p_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la proyección a la primer coordenada. Muestre que:

a) si $X = (\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$, entonces $p_1|_X : X \to \mathbb{R}$ es un cociente cerrado pero no abierto;

b) si $Y = (\mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$, entonces $p_1|_Y : Y \to \mathbb{R}$ es un cociente que no es ni abierto ni cerrado.

25. Sea Z el subespacio $\mathbb{R} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R}$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Definimos $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to Z$ por la fórmula
$$g(x,y) = \begin{cases} (x,0) & x \neq 0 \\ (0,y) & x = 0 \end{cases}$$

a) ¿Es g un cociente? ¿Es g continua?

b) Halle una base para la topología cociente en Z inducida por g.

26. Sea G un grupo. Un G-**espacio** es un espacio topológico X junto con una acción $. : G \times X \to X$ tal que $x \mapsto g \cdot x$ es continua para todo $g \in G$. Pruebe que los siguientes espacios topológicos son G-espacios.

a) $X = \mathbb{R}$, $G = \mathbb{Z}$ y la acción es $n \cdot x = n + x$.

b) $X = \mathbb{R}^2$, $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y la acción es $(n,m) \cdot (x,y) = (n+x, m+y)$.

c) $X = S^n$, $G = \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ y la acción es $\pm 1 \cdot x = \pm x$.

d) $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}\}$, $G = \mathbb{Z}$ y la acción es $m \cdot (x,y) = (m + x, (-1)^m y)$.

27. Si X es un G-espacio, definimos una relación de equivalencia $\sim_G$ en X como sigue:
$$x \sim_G y \iff \exists\, g \in X \text{ tal que } y = g \cdot x.$$
Notamos X/G al espacio cociente $X/\sim_G$ y $p : X \to X/G$ a la proyección. Pruebe que p es abierta; y que si G es finito, entonces p también es cerrada.

28. *a*) Pruebe que el espacio cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (ejercicio 26, *a*)) es homeomorfo a S^1.

b) Pruebe que el espacio cociente $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (ejercicio 26, *b*)) es homeomorfo al toro $S^1 \times S^1$.

c) Pruebe que el espacio cociente $S^2/\mathbb{Z}_2$ (ejercicio 26, *c*)) es homeomeorfo a $\mathcal{P}^2(\mathbb{R})$, el plano proyectivo real.
Recuerde que el plano proyectivo real se define como el cociente de $[0,1] \times [0,1]$ por la relación que identifica $(0,y)$ con $(1, 1-y)$ para todo $y \in [0,1]$, y $(x,0)$ con $(1-x, 1)$ para todo $x \in [0,1]$).

d) Pruebe que el espacio cociente $X/\mathbb{Z}$ (ejercicio 26, *d*)) es homeomorfo a la banda de Möbius.
Recuerde que la banda de Möbius se define como el cociente de $[0,1] \times [0,1]$ por la relación que identifica $(0,y)$ con $(1, 1-y)$ para todo $y \in [0,1]$).

Familias iniciales y finales

29. Pruebe que si $f : X \to Y$ es inyectiva y final entonces es subespacio.

30. Pruebe que si $f : X \to Y$ es suryectiva e inicial, entonces es cociente.

31. Sea X un espacio topológico con topología τ, y sea $\mathfrak{S} = \{0,1\}$ el espacio de **Sierpinski**, con topología $\{\varnothing, \{0\}, \mathfrak{S}\}$.

    a) Pruebe que $U \subset X$ es abierto si y sólo si $\mathbf{1} - \chi_U : X \to \mathfrak{S}$ es continua, donde χ_U es la función característica de U.

    b) Pruebe que la familia $\{\chi_U : X \to \mathfrak{S}\}_{U\in\tau}$ es inicial.

32. Sea k un cuerpo. Dotamos a k de la topología cofinita. Pruebe que $\{p : k^n \to k\}_{p\in k[x_1,\cdots,x_n]}$ es una familia inicial para la topología Zariski en k^n.

33. Sea $\{f_i : X \to X_i\}_{i\in I}$ una familia inicial de funciones, y sea $e : X \to \prod X_i$ la *función evaluación*, definida por
$$e(x) = (f_i(x))_{i\in I}$$
    Pruebe que $e : X \to \mathrm{Im}(e)$ es abierta.

34. Decimos que $\{f_i : X \to X_i\}_{i\in I}$ *separa puntos* de X si para todo $x \neq y \in X$, existe $i \in I$ tal que $f_i(x) \neq f_i(y)$. Pruebe que $\{f_i : X \to X_i\}_{i\in I}$ es un familia inicial para la topología de X y separa puntos de X si y sólo si la función evaluación $e : X \to \prod X_i$ es subespacio, donde $\prod X_i$ tiene la topología producto.

35. Sea $X = \coprod X_i$, dotado de la topología coproducto. Dada una familia de funciones $\{f_i : X_i \to Y\}_{i\in I}$, existe una única $f : X \to Y$ tal que $f \circ \iota_i = f_i$ para todo $i \in I$, donde $\iota_i : X_i \to X$ es la función inclusión. Pruebe que $\{f_i\}_{i\in I}$ es familia final si y sólo si f es final.

4

Conexión y arco conexión

4.1. Conexión

Definición. Sea X un espacio topológico. Una desconexión de X es un par $\{U, V\}$ donde $U, V \subseteq X$ son abiertos no vacíos tales que $U \cup V = X$ y $U \cap V = \varnothing$. X se dice conexo si no admite desconexiones.

Observación. X es conexo si y sólo si los únicos subconjuntos de X que son abiertos y cerrados al mismo tiempo son X y $\varnothing$.

Ejemplos.

1. Un espacio con la topología indiscreta es conexo.
2. Un espacio de cardinal mayor a 1 con la topología discreta no es conexo.
3. El espacio de Sierpinski es conexo.

Definición. X se dice totalmente disconexo si $\forall a \neq b \in X \; \exists \{U, V\}$ desconexión de X tal que $a \in U$, $b \in V$.

Ejemplo. Un espacio discreto con más de un punto es totalmente disconexo.

Ejemplo. $\mathbb{Q}$ es totalmente disconexo, pero no discreto.

Proposición. Sean X un espacio topológico, $\{U, V\}$ una desconexión de X e $Y \subseteq X$ subespacio conexo. Entonces $Y \subseteq U$ o $Y \subseteq V$.

Demostración. Sean $U' = U \cap Y$ y $V' = V \cap Y$. Entonces U' y V' son abiertos de Y con $U' \cup V' = Y$ y $U' \cap V' = \varnothing$. Entonces, como Y es conexo, $U' = \varnothing$ o $V' = \varnothing$. En el primer caso resulta $Y \subseteq V$ y en el segundo $Y \subseteq U$. ∎

Dejamos la demostración de los siguientes resultados como ejercicios para el lector.

Resultados sobre conexión.

1. Sean X espacio topológico, $A \subseteq X$ subespacio conexo, $B \subseteq X$ subespacio tal que $A \subseteq B \subseteq \bar{A} \subseteq X$ entonces B es conexo. En particular $\bar{A}$ es conexo.

2. Sean $f : X \to Y$ continua, X conexo. Entonces $f(X) \subseteq Y$ es un subespacio conexo. En particular, si f es un homeomorfismo, X es conexo si y sólo si $f(X)$ lo es.

3. Sean $f : X \to Y$ continua, X conexo, Y totalmente disconexo. Entonces f es constante.

Definición. Un linear continuum es un conjunto totalmente ordenado $(X, <)$ que cumple:

1. Todo subconjunto no vacío acotado superiormente tiene supremo.

2. Dados $a < b \in X$, $\exists c \in X$ tal que $a < c < b$.

Ejemplos. $\mathbb{R}$ y $[0, 1] \times [0, 1]$ con el orden lexicográfico son linear continuums.

Teorema. Sea $(X, <)$ un linear continuum. Consideramos a X con la topología del orden. Entonces X es conexo. Más aún, todos los intervalos y semirrectas en X son conexos.

Demostración. Vamos a probar que cualquier subconjunto $Y \subseteq X$ convexo es conexo. Supongamos que Y admite una desconexión $\{U, V\}$. Sean $u \in U$, $v \in V$, y supongamos que $u < v$. Como Y en convexo, el intervalo $[u, v] \subseteq Y$. Luego $[u, v] = ([u, v] \cap U) \cup ([u, v] \cap V)$. Llamamos $U_0 = [u, v] \cap U$ y $V_0 = [u, v] \cap V$. Tenemos que $\{U_0, V_0\}$ es una desconexión de $[u, v]$. Sea $w = \sup U_0$. Veamos que w no pertenece a U_0 ni a V_0, lo cual sería un absurdo.

Si $w \in V_0$, $w \neq u$. Luego $w = v$ o $u < w < v$. En cualquier caso, como V_0 es abierto, existe un intervalo $(z, w] \subseteq V_0$. Si $w = v$ tenemos una contradicción puesto que z resulta una cota superior de U_0 menor que w. Si $w < v$, $(w, v]$ no interseca a U_0, y por lo tanto $(z, v]$ no interseca U_0. De la misma manera, z resulta una cota superior de U_0 menor que w.

Si $w \in U_0$, entonces $w \neq v$. Luego $w = u$ o $u < w < v$. Como U_0 es abierto en $[u, v]$, existe un intervalo de la forma $[w, z')$ contenido en U_0. Como X es un linear continuum, podemos elegir un $z \in X$ tal que $w < z < z'$. Entonces $z \in U_0$, contradiciendo el hecho de que w es cota superior de U_0. ■

4.2. Arco conexión y π_0

De ahora en adelante vamos a denotar I al intervalo real $[0, 1]$ con la topología usual.

Definición. Sea X un espacio topológico, un camino en X es una función continua $\omega : I \to X$. Dados $x, y \in X$, un camino de x a y es un camino $\omega : I \to X$ tal que $\omega(0) = x$ y $\omega(1) = y$.

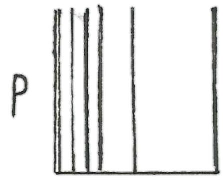
Definición. X se dice arco conexo si $\forall x, y \in X$ $\exists w : I \to X$ tal que $\omega(0) = x$ y $\omega(1) = y$.

Proposición. Si X es arco conexo, entonces es conexo.

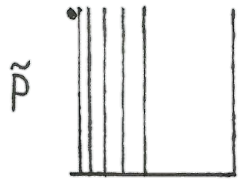
Demostración. Supongamos que X no es conexo. Entonces existe una desconexión $\{U, V\}$. Sean $x \in U$, $y \in V$, como X es arco conexo, existe $\omega : I \to X$ con $\omega(0) = x$ y $\omega(1) = y$. Como I es conexo, entonces $\omega(I) \subseteq X$ es conexo. Entonces $\omega(I) \subseteq U$ u $\omega(I) \subseteq V$, absurdo. ■

Ejemplos.

1. Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo, entonces es arco conexo.
2. El peine, $P = \{(x, 0) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\} \cup \{(0, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1\} \cup \{(1/n, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1, n \in \mathbb{N}\}$, es arco conexo.



3. El peine reducido, $\tilde{P} = \{(x, 0) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\} \cup \{(1/n, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1, n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0, 1)\}$, es conexo, pero no arco conexo.



Observación. Sean $f : X \to Y$ continua, X arco conexo. Entonces $f(X) \subseteq Y$ es subespacio arco conexo. En particular, S^n es arco conexo porque es la imagen del cociente $q : D^n \to D^n/\partial D^n$, y D^n es un convexo de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplos.

1. Si $n \geqslant 2$, $\mathbb{R}^n \backslash \{\text{finitos puntos}\}$ es arco conexo.
2. Si $n \geqslant 1$, $q : \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\} \to S^n$ con $q(x) = \frac{x}{||x||}$ nos da otra forma de ver que S^n es arco conexo.

Vamos a formalizar ahora el concepto de componentes arco conexas. Necesitamos para esto algunas definiciones y notaciones previas (éstas serán utilizadas nuevamente en la segunda parte del curso, al estudiar el grupo fundamental de un espacio).

Definiciones.

1. Dado $\omega(0) \xrightarrow{\omega} \omega(1)$, definimos el camino inverso $\bar{\omega} : I \to X$ con $\bar{\omega}(t) = \omega(1 - t)$.
2. Sea $x \in X$, definimos el camino constante $e_x(t) = x \; \forall t \in I$.

3. Dados dos caminos ω, ω' tales que $\omega(1) = \omega'(0)$, definimos la composición de caminos $\omega * \omega' : I \to X$ con
$$\omega * \omega'(t) = \begin{cases} \omega(2t) & 0 \leqslant t \leqslant 1/2 \\ \omega'(2t-1) & 1/2 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}.$$
Notamos que $\omega * \omega'$ es continua por el lema de pegado para cerrados.

De estas tres definiciones se desprende que $[x \sim y \iff \exists$ camino de x a $y]$ es una relación de equivalencia. A partir de esto, podemos definir el *invariante topológico*
$$\pi_0(X) = \{[x] \mid [x] = [y] \text{ si } x \sim y\}.$$
Los elementos de $\pi_0 X$ se denominan componentes arco conexas de X. El $\pi_0(X)$ es un invariante topológico, en el sentido que a un homeomorfismo entre espacios le asigna una biyección en los π_0. Concretamente, dada una $f : X \to Y$, podemos considerar $f_* : \pi_0 X \to \pi_0 Y$ con $f_*[x] = [f(x)]$, que es fácil ver que está bien definida. Este pasaje de X a $\pi_0 X$ es funtorial. Es decir:

- $(1_X)_* = 1_{\pi_0 X}$.
- $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

Corolario. Si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces $f_* : \pi_0 X \to \pi_0 Y$ es una biyección de conjuntos.

Esto nos dice por ejemplo, que $\mathbb{R}$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 2$), pues $\mathbb{R}$ se desconecta al sacarle un punto, pero $\mathbb{R}^n$ no.

Al igual que en el caso de las componentes arco conexas, podemos estudiar la componentes conexas de un espacio. Dado un espacio X, vamos a definir la relación $[x \sim y$ si $\exists A \subseteq X$ conexo tal que $x, y \in A]$. Es fácil probar que $\sim$ es una relación de equivalencia. Las clases de equivalencia van a ser la componentes conexas. Tenemos la siguiente caracterización de las componentes conexas:

Ejercicio. Las componentes conexas de X, $\{C_i\}_{i \in J}$ dan una partición de X y cumplen:

1. C_i es conexo para todo i.
2. Para todo $A \subseteq X$ conexo, $\exists! i$ tal que $A \subseteq C_i$.

Solución.

1. Supongamos que hay una componente C_i que no es conexa. Entonces admite una desconexión $\{U, V\}$. Tomamos $u \in U$ y $v \in V$. Por definición de componente conexa, existe un A conexo (que va a estar contenido en C_i) que contiene a u y v. Pero $\{A \cap U, A \cap V\}$ resulta una desconexión de A, absurdo.
2. Se desprende directamente de la definición de componente conexa. ■

Como siempre, podemos estudiar los conceptos localmente.

Definición. X es localmente conexo (arco conexo) si $\forall x \in X$ y $\forall V$ entorno de x, existe $U \subseteq X$ abierto conexo (arco conexo) con $x \in U \subseteq V$.

Ejemplos.

1. $X = (-1, 2) \cup (2, 5)$ con la topología subespacio es localmente conexo, pero no conexo.

2. El peine reducido es conexo, pero no localmente conexo. Falla en el $(0, 1)$.

3. $\mathbb{Q}$ no es conexo ni localmente conexo.

Ejercicio. Si X es conexo y localmente arco conexo entonces X es arco conexo.

Solución. Dado $x \in X$ consideramos el espacio C compuesto por todos los puntos que pueden conectarse a x. Como $x \in C$, basta ver que C es abierto y cerrado para concluir que $C = X$ (pues X es conexo).

Para ver que es abierto, sea $c \in C$. Existe un entorno $c \in U$ arco conexo porque X es localmente arco conexo. Dado un punto $u \in U$, podemos concatenar los caminos que unen a x con c y a c con u para obtener un camino de x a u. Luego $U \subseteq C$, y C es abierto.

Para ver que es cerrado, sean $c \in \bar{C}$ y U un entorno arco conexo de c. Como $c \in \bar{C}$, $C \cap U \neq \varnothing$. Sea $u \in C \cap U$. Tenemos que x se conecta con u, y u se conecta con c, por lo que x se conecta con c. Luego $c \in C$. $\blacksquare$

Esto nos dice que en caso de que el espacio sea localmente arco conexo, las componentes conexas coinciden con las arco conexas.

4.3. Primeros axiomas de separación

Comenzaremos ahora con el estudio de los primeros axiomas de separación. Los axiomas de separación son propiedades que cumplen ciertas clases de espacios topológicos y que permiten estudiarlos, caracterizarlos o manipularlos más fácilmente. De alguna manera, dar una topología es darle una forma a un conjunto. Las propiedades de separación de una topología nos dicen que tanto podemos separar entre sí los puntos del espacio.

Definición. X se dice T_0 si $\forall x, y \in X$, $\exists U \subseteq X$ abierto tal que $x \in U, y \notin U$ o $y \in U, x \notin U$.

Proposición. Productos y subespacios de espacios T_0 son T_0

Demostración. Ejercicio.

Vamos ahora a caracterizar los espacios T_0 utilizando el espacio de Sierpinski S. La primera proposición queda como ejercicio para el lector.

Proposición 1. Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$ un subconjunto. La función característica de A, $\chi_A : X \to S$ es continua si y sólo si A es cerrado.

Proposición 2. Sea X un espacio topológico. La familia $H = \{h : X \to S \mid h \text{ continua}\}$ es una familia inicial.

Demostración. Sean Z un espacio topológico y $f : Z \to X$. Debemos ver que f es continua si y sólo si $h \circ f : Z \to S$ es continua para toda $h \in H$.

$\Rightarrow$) Trivial.

$\Leftarrow$) Supongamos que $h \circ f : Z \to S$ es continua para toda $h \in H$. Sea $A \subseteq X$ cerrado, debemos ver que $f^{-1}(A) \subseteq Z$ es cerrado. Por la proposición 1, tenemos que $\mathcal{X}_A \circ f : Z \to S$ es continua. Entonces $f^{-1}(A) = (\mathcal{X}_A \circ f)^{-1}(\{1\}) \subseteq Z$ es cerrado. Luego f es continua.

Proposición 3. Sea X un espacio topológico, y H la familia de las funciones continuas de X a S. Entonces la función $i : X \to \prod_{h \in H} S$, con $(i(x))_h = h(x)$ es inicial.

Demostración. La función i es continua porque cada coordenada lo es. Además es inicial porque es continua, las proyecciones $p_h : \prod_{h \in H} S \to S$ son continuas y (por la proposición 2) la familia $\{p_h \circ i\}_{h \in H}$ es inicial. ■

Como consecuencia de esta proposición, podemos deducir la caracterización de espacios T_0.

Teorema. X es T_0 si y sólo si es un subespacio de un producto de copias de S.

Demostración.

$\Leftarrow$) S es T_0, producto de T_0 es T_0 y subespacio de T_0 es T_0.

$\Rightarrow$) Consideramos $i : X \to \prod_{h \in H} S$. Por la proposición 3, i es inicial. Debemos ver que si X es T_0, i resulta inyectiva. Sean $x \neq y \in X$. Basta ver que existe $h \in H$ tal que $h(x) = (i(x))_h \neq (i(y))_h = h(y)$. Como X es T_0, existe $A \subseteq X$ cerrado tal que $x \in A$ e $y \notin A$ (o al revés). Consideramos $h = \mathcal{X}_A$ la función característica. Entonces $h(x) = 1 \neq 0 = h(y)$. ■

Vamos a estudiar ahora un axioma de separación que impone una restricción más fuerte que el de T_0.

Definición. X se dice T_1 si $\forall x \neq y \in X$, $\exists U, V \subset X$ abiertos tales que $x \in U$, $y \in V$, $x \notin V$, $y \notin U$.

Proposición. X es T_1 si y sólo si los puntos son cerrados en X.

Demostración. Ejercicio.

Proposición. Al igual que con es caso de T_0, productos y subespacios de T_1 van a ser T_1.

Demostración. Ejercicio.

Observación. Si X es un espacio topológico finito y T_1, entonces es discreto. En particular, el espacio de Sierpinski es un ejemplo de un espacio T_0 que no es T_1.

Para finalizar esta sección, vamos a introducir el axioma de separación más usual, T_2.

Definición. X se dice T_2 (o Hausdorff) si $\forall x \neq y \in X$, $\exists U, V \subseteq X$ abiertos disjuntos tales que $x \in U$, $y \in V$.

Notar que $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$.

Ejemplo. Sea X de cardinal infinito, considerado con la topología complemento finito. Esta es la topología dada por tomar como abiertos a los subconjuntos de X con complemento finito (además de $\varnothing$ y X). Por la proposición anterior, X es T_1 pues los complementos de los puntos son abiertos. Sin embargo, X no es T_2, pues dos abiertos no vacíos tienen intersección no vacía.

Proposición. Sea X un espacio topológico. Son equivalentes:

1. X es T_2.
2. La diagonal $\Delta : X \to X \times X$ es cerrada.
3. Toda red convergente tiene único límite.

Demostración.

1) $\Rightarrow$ 2) Es claro que basta ver que $\Delta(X)$ es cerrado. Para ello veamos que $(\Delta(X))^c$ es abierto. Sea $(x, y) \in (\Delta(X))^c$, entonces $x \neq y$. Como X es T_2, existen abiertos disjuntos U y V tales que $x \in U$, $y \in V$. Entonces $(x, y) \in U \times V \subseteq (\Delta(X))^c$.

2) $\Rightarrow$ 1) Sean $x \neq y$, entonces $(x, y) \in (\Delta(X))^c$. Luego existe $U \times V$ abierto de la base tal que $(x, y) \in U \times V \subseteq (\Delta(X))^c$. En particular $U \cap V = \varnothing$.

1) $\Rightarrow$ 3) Sea$(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ una red en X. Supongamos que $x_\alpha \to x$ y $x_\alpha \to y$ $(y \neq x)$. Sean U y V abiertos disjuntos en X tales que $x \in U$ e $y \in V$. Como $x_\alpha \to x$, existe $\alpha_1 \in \Lambda$ tal que $\forall \alpha > \alpha_1$, $x_\alpha \in U$. De la misma manera existe $\alpha_2 \in \Lambda$ tal que $\forall \alpha > \alpha_2$, $x_\alpha \in V$. Sea $\alpha_3 \geqslant \alpha_1, \alpha_2$. Entonces $\forall \alpha > \alpha_3, x_\alpha \in U \cap V = \varnothing$, absurdo.

3) $\Rightarrow$ 1) Sean $x \neq y \in X$. Consideramos $\mathcal{A} = \{U \cap V \mid U \subseteq X$ abierto, $x \in U$, $V \subseteq X$ abierto, $y \in V\}$. Debemos ver que $\varnothing \in \mathcal{A}$. Supongamos que $\varnothing \notin A$. Entonces $\forall A \in \mathcal{A}$ elegimos $x_A \in A$. Dados $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, decimos que $A_1 \leqslant A_2$ si $A_2 \subseteq A_1$. Con este orden $\mathcal{A}$ es dirigido. Además, por la definición de $\mathcal{A}$, $(x_A)_{A \in \mathcal{A}}$ converge a x e y, absurdo. Entonces $\varnothing \in \mathcal{A}$. ■

Vamos a enumerar algunas propiedades de los espacios Hausdorff, cuya demostración queda como ejercicio.

Propiedades de espacios Hausdorff.

1. Productos y subespacios de T_2 son T_2.
2. Sean $f, g : X \to Y$ continuas con Y T_2. Entonces $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ es cerrado en X.
3. Sean $f, g : X \to Y$ continuas con Y T_2. Si $A \subseteq X$ es denso y $f|_A = g|_A \Rightarrow f = g$.

4.4. Ejercicios

Conexión

1. Sea X un conjunto y τ, τ' dos topologías sobre X. Pruebe que si (X, τ) es un espacio topológico conexo y $\tau' \subset \tau$, entonces (X, τ') es un espacio topológico conexo.
2. Pruebe que:
   a) si X es un espacio conexo y $A \subsetneq X$ es un subconjunto propio no vacío, entonces $\partial A \neq \varnothing$;
   b) recíprocamente, si X es disconexo entonces existe $B \subsetneq X$ un subconjunto propio no vacío tal que $\partial B = \varnothing$.
3. *a*) Sean $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una colección de subespacios conexos de X y A un subespacio conexo de X tales que $A \cap A_\alpha \neq \varnothing$ para todo $\alpha \in \Lambda$. Pruebe que $A \cup \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ es conexo.
   b) Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subespacios conexos de X tales que $A_n \cap A_{n+1} \neq \varnothing$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pruebe que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ es conexo.
4. ¿Cuáles de los siguientes espacios dotados de sus topologías del orden lexicográfico son conexos?
   a) $\mathbb{N} \times [0, 1)$.
   b) $[0, 1) \times \mathbb{N}$.
   c) $[0, 1) \times [0, 1]$.
   d) $[0, 1] \times [0, 1)$.
5. Sea X un espacio topológico y sea $A \subseteq X$. Pruebe que si A es conexo, entonces $\bar{A}$ también. Más aún, todo subespacio B de X tal que $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ resulta conexo. ¿Qué ocurre con ∂A y con A°?
6. Sea X un espacio y $A \subseteq X$ un subconjunto conexo. Si $B \subseteq X$ es tal que $A \cap B \neq \varnothing$ y $A \cap (X \setminus B) \neq \varnothing$, entonces $A \cap \partial B \neq \varnothing$.
7. Sea $p : X \to Y$ una función cociente. Pruebe que si Y es conexo y además $p^{-1}(y)$ es conexo para todo $y \in Y$, entonces X es conexo.
8. Muestre que entre los espacios $(0, 1)$, $(0, 1]$ y $[0, 1]$ no hay dos homeomorfos. Concluya que la existencia de funciones subespacio $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ no implica que X e Y sean homeomorfos.

9. *a*) Sea $f : S^1 \to \mathbb{R}$ una función continua. Pruebe que existe un punto $x \in S^1$ tal que $f(x) = f(-x)$.

   b) Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función continua. Pruebe que existe un punto fijo de f.

10. *a*) Muestre que si $A \subset \mathbb{R}^2$ es finito, entonces $\mathbb{R}^2 \backslash A$ es conexo.

    b) Muestre que si $B \subset S^2$ es finito, entonces $S^2 \backslash B$ es conexo.

11. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

    a) X es localmente conexo.

    b) Las componentes de todo subespacio abierto de X son abiertas en X.

    c) Los abiertos conexos de X forman una base de la topología de X.

    Concluya que si X localmente conexo, entonces las componentes conexas de X son abiertas.

12. Una función $f : X \to Y$ se dice *localmente constante* si para todo $x \in X$, existe U entorno abierto de x tal que $f|_U$ es constante. Pruebe que si f es localmente constante y X es conexo, entonces f es constante.

Arco conexión

13. Sea $T \subset \mathbb{R}^2$ la curva *seno del topólogo*, equipada con la topología de subespacio.

$$T = \{(t, \sin(1/t)) : 0 < t \leqslant 1\}$$

    Muestre que T es arco-conexa, y que sin embargo $\overline{T} \subset \mathbb{R}^2$ no es arco-conexa.

14. Pruebe que si $A, B \subset X$ son subespacios arco-conexos y $A \cap B \neq \varnothing$, entonces $A \cup B$ es arco-conexo.

15. Pruebe que si X e Y son arco-conexos, entonces $X \times Y$ es arco-conexo.

16. *a*) Pruebe que si X es localmente arco-conexo y $U \subset X$ es abierto, entonces U es localmente arco-conexo.

    b) Pruebe que si X es localmente arco-conexo y conexo, entonces es arco-conexo.

    c) Concluya que si $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, entonces

$$U \text{ es conexo} \Leftrightarrow U \text{ es arco-conexo}$$

Componentes

17. Calcule las componentes conexas de $\mathbb{R}_l$ y $\pi_0(\mathbb{R}_l)$.

18. Pruebe que el cuadrado ordenado $I \times I$ es localmente conexo pero no es localmente arco-conexo. Calcule las componentes conexas de $I \times I$ y $\pi_0(I \times I)$.

19. Dados x, y puntos de X, decimos que $x \sim y$ si no existe separación $X = A \cup B$ de X en dos conjuntos abiertos y disjuntos tales que $x \in A$ e $y \in B$.

a) Pruebe que $\sim$ es una relación de equivalencia. Las clases de equivalencia se llaman *cuasi-componentes* de X.

b) Muestre que cada componente de X está contenida en una cuasi-componente.

c) Determine las cuasi-componentes, las componentes conexas y las arco-conexas de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ (donde K denota el conjunto $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, y $-K$ denota el conjunto $\{-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$).

1) $(K \times [0,1]) \cup (\{0\} \times [0,1])$.
2) $(A \setminus \{(0, \frac{1}{2})\})$.
3) $B \cup ([0,1] \times \{0\})$.
4) $(K \times [0,1]) \cup (-K \times [-1,0]) \cup ([0,1] \times -K) \cup ([-1,0] \times K)$.

5

Funciones propias, compacidad y compactificaciones

5.1. Pullbacks, funciones propias y compactos

Dado un diagrama de la siguiente forma

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd},$$

queremos encontrar un espacio W y funciones continuas $\bar{g}$, $\bar{f}$ tales que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\bar{g}"] \arrow[d, "\bar{f}"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd},$$

y que, en cierto sentido, $W, \bar{g}, \bar{f}$ sean finales con esta propiedad: es decir, que W sea el espacio que está "más cerca por la izquierda" del diagrama original. Más precisamente, $\forall W', f', g'$ tales que $fg' = gf'$ existe una única $q : W' \to W$ tal que $\bar{g}q = g'$, $\bar{f}q = f'$.

$$\begin{tikzcd} W' \arrow[dr, dotted, "\exists! q"] \arrow[drr, bend left, "g'"] \arrow[ddr, bend right, "f'"'] & & \\ & W \arrow[r, "\bar{g}"] \arrow[d, "\bar{f}"] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

Un W que cumple dicha propiedad universal se llama pullback o producto fibrado. Esta construcción puede realizarse en distintas categorías. En el contexto de espacios topológicos, podemos hacer explícito a W de la siguiente manera. Definimos

$$W := X \underset{Z}{\times} Y = \{(x,y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$$

con la topología subespacio de $X \times Y$. Además tomamos $\bar{f}$ y $\bar{g}$ como las proyecciones q_X y q_Y. Entonces dados W', f' y g', definimos $q(w') = (g'(w'), f'(w'))$. La terna $(W, \bar{f}, \bar{g})$ satisface lo pedido. Como W cumple una propiedad universal, queda determinado (por esta propiedad) en forma única, salvo homeomorfismos.

Ejemplos de productos fibrados.

1.

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "p_X"] \arrow[d, "p_Y"'] & X \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & * \end{tikzcd}$$

2. Sea $y_0 \in Y$.

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(y_0) \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ * \arrow[r, "cte_{y_0}"] & Y \end{tikzcd}$$

3. Sea $A \subseteq Y$ un subespacio.

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{f}"'] & X \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, hook, "i"] & Y \end{tikzcd}$$

4.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_Y"'] & X \arrow[d, "1_X"] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

Ejercicio. Dado el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d] & C \arrow[d] \\ D \arrow[r, "h"] & E \arrow[r, "i"] & F \end{tikzcd},$$

si ambos cuadrados son pullbacks, entonces el rectángulo es pullback, y si el rectángulo y el segundo cuadrado son pullbacks, entonces el primer cuadrado lo es.

Definición. Una clase $\mathcal{C}$ de funciones continuas se dice estable por cambio de base si cada vez que se tiene un producto fibrado

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\bar{g}"] \arrow[d, "\bar{f}"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

y $f \in \mathcal{C}$, entonces $\bar{f} \in \mathcal{C}$.

Ejercicios:

1. Los homeomorfismos son estables por cambio de base. Por el ejemplo 3, es claro que los subespacios cerrados son estables por cambio de base, así que sólo resta ver la sobreyectividad. Por unicidad salvo homeomorfismo, basta probarlo para el caso

$$\begin{tikzcd} X \times_Z Y \arrow[r, "q_X"] \arrow[d, "q_Y"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd} .$$

   Como f es sobreyectiva, cada elemento de Y está apareado al menos con un elemento de X, por lo que q_X es sobreyectiva.

2. Las funciones abiertas son estables por cambio de base. Nuevamente basta probarlo para el caso

$$\begin{tikzcd} X \times_Z Y \arrow[r, "q_X"] \arrow[d, "q_Y"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd} .$$

   Basta ver que proyectar la intersección de un abierto básico de $X \times Y$ con $X \times_Z Y$ es abierto en Y. Sea $U \times V$ un abierto básico de $X \times Y$. Tenemos que $U \times V \cap X \times_Z Y = \{(u, v) \in U \times V \mid f(u) = g(v)\}$. Entonces $q_Y(\{(u, v) \in U \times V \mid f(u) = g(v)\}) = V \cap g^{-1}(f(U))$, que es abierto pues f es abierta y g continua.

3. Las funciones cerradas no son estables por cambio de base. Por ejemplo

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & \mathbb{R} \arrow[d] \\ \mathbb{R} \arrow[r] & * \end{tikzcd}$$

   y consideramos la proyección del gráfico de la función $\frac{1}{x}$.

Definición. Una función continua $f : X \to Y$ se dice propia (o universalmente cerrada) si cada vez que se tiene un producto fibrado

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\bar{g}"] \arrow[d, "\bar{f}"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd} ,$$

la función $\bar{f}$ es cerrada.

Observación. Notamos que si f es propia, en particuar es cerrada.

Observación. Las inclusiones cerradas son propias, pues vimos que eran estables por cambio de base.

Propiedades.

1. Los homeomorfismos son funciones propias.
2. Composición de funciones propias es propia.
3. La clase de funciones propias es estable por cambio de base.

Dado un espacio topológico X, puede suceder que $X \to *$ sea propia o no. Por ejemplo, $* \to *$ es propia, pero $\mathbb{R} \to *$ no. Esto motiva la siguiente definición.

Definición. Vamos a decir que un espacio topológico es compacto si la función al punto es propia.

Notamos que X va a ser compacto si y sólo si $\forall Y$ espacio topológico, la proyección $X \times Y \to Y$ es cerrada. Esto se debe a que tenemos el siguiente producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "p_X"] \arrow[d, "p_Y"] & X \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & * \end{tikzcd}.$$

El siguiente ejercicio caracteriza a las funciones propias.

Ejercicio. Sea $f : X \to Y$ una función continua. Son equivalentes:

1. f es cerrada y $f^{-1}(\{y\})$ es compacto para todo $y \in Y$.
2. f es cerrada y $f^{-1}(K)$ es compacto para todo $K \subseteq Y$ compacto.
3. Para todo Z espacio topológico, $id_Z \times f : Z \times X \to Z \times Y$ es cerrada.
4. f es propia.

Proposición. El producto de finitos compactos es compacto.

Demostración. Se deduce fácilmente de lo recién observado.

Proposición. Sean X un compacto y $A \subseteq X$ cerrado. Entonces A es compacto.

Demostración. Usar que las inclusiones de subespacios cerrados son funciones propias.

Nos disponemos ahora a probar varias equivalencias a la definición de espacios compactos que dimos.

Definición. Un punto $x \in X$ es un punto de acumulación de $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ si $\forall U$ entorno de x, $\forall \alpha \in \Lambda$, $\exists \alpha' \geqslant \alpha$ tal que $x_\alpha \in U$.

Lema. x es punto de acumulación de $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ si y sólo si existe una subred de $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ que converge a x.

Demostración.

$\Rightarrow$) Consideramos $\Gamma = \{(\alpha, U) \mid \alpha \in \Lambda, U$ entorno de x tal que $x_\alpha \in U\}$ con el orden dado por $(\alpha_1, U_1) \leqslant (\alpha_2, U_2)$ si $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$ y $U_2 \subseteq U_1$. Veamos que Γ es dirigido. Dados (α_1, U_1) y (α_2, U_2) tomamos $\alpha_3 \geqslant \alpha_1, \alpha_2$. Como x es punto de acumulación, existe $\alpha_4 \geqslant \alpha_3$ tal que $x_{\alpha_4} \in U_1 \cap U_2$. Entonces $(\alpha_4, U_1 \cap U_2) \geqslant (\alpha_1, U_1), (\alpha_2, U_2)$. Ahora tenemos $\phi : \Gamma \to \Lambda \to X$ cofinal con $\phi((\alpha, U)) = \alpha$. Resta ver que la subred (x_{α_γ}) converge a x. Dado U entorno de x, $\exists x_\alpha \in U$, entonces $(\alpha, U) \in \Gamma$. Si tomamos $(\alpha', U') \geqslant (\alpha, U)$, $x_{(\alpha', U')} = x_{\alpha'} \in U' \subseteq U$.

$\Leftarrow$) Fácil. ■

Teorema. Sea X un espacio topológico. Son equivalentes:

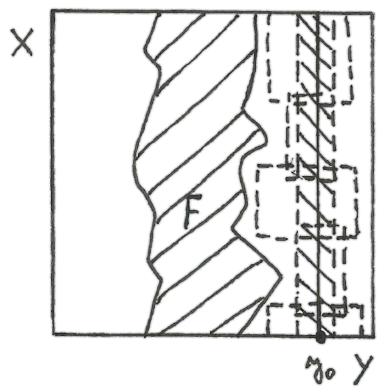
1. X es compacto.
2. Todo cubrimiento por abiertos $\{U_s\}_{s\in S}$ de X admite un subcubrimiento finito.
3. Toda familia de cerrados $\{F_s\}_{s\in S}$ en X con la propiedad de intersección finita (es decir, $\forall S' \subseteq S$ finito, $\bigcap_{s\in S'} F_s \neq \varnothing$) cumple que $\bigcap_{s\in S} F_s \neq \varnothing$.
4. Toda red en X tiene una subred convergente en X.

Demostración.

2) $\Leftrightarrow$ 3) Es claro tomado $F_s = U_s^c$ pues:

- $\bigcap_{s\in S} F_s = \varnothing \iff \bigcup_{s\in S} U_s = X$,
- $\bigcap_{s\in S'} F_s = \varnothing \iff \bigcup_{s\in S'} U_s = X$.

2) $\Rightarrow$ 1) En este paso se demuestra una versión del lema del tubo. Sea Y espacio topológico, debemos ver que $p_Y : X \times Y \to Y$ es cerrada. Sea $F \in X \times Y$ cerrado, veamos que $p_y(F)^c$ es abierto. Tomamos un $y_0 \in p_Y(F)^c$ y queremos ver que existe $y_0 \in W \subseteq p_Y(F)^c$ abierto. Como $y_0 \notin p_Y(F)$, $X \times \{y_0\} \subseteq F^c$. Luego $\forall x \in X$, $\exists \{U_x \subseteq X$ abierto, $V_x \subseteq Y$ abierto$\}$ tal que $(x, y_0) \in U_x \times V_x \subseteq F^c$.



Así $\{U_x\}_{x\in X}$ es un cubrimiento por abiertos de X. Por hipótesis existe un subcubrimiento finito $U_1, ..., U_n$ de X. Entonces $X \times \{y_0\} \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i \times V_i \subseteq F^c$. Sea $W = \bigcap_{i=1}^n V_i$. Veamos que $W \subseteq p_Y(F)^c$. Esto sucede $\iff W \cap p_Y(F) = \varnothing \iff X \times W \subseteq F^c$. Sea $(x, y) \in X \times W$, entonces $x \in U_{i_0}$ para algún $i_0 = 1, ..., n$, $y \in V_{i_0}$. Por lo tanto $(x, y) \in \bigcup_{i=1}^n U_i \times V_i$, y $X \times W \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i \times V_i \subseteq F^c$.

$1) \Rightarrow 4)$ Sea $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ una red en X. Por el lema anterior alcanza probar que tiene un punto de acumulación $x \in X$. Sea $\Lambda^* = \Lambda \cup \{\infty\}$ con la siguiente topología: si $\alpha \in \Lambda \Rightarrow \{\alpha\}$ es abierto de Λ^*. Los entornos de ∞ son $\{\Lambda^*_{\geqslant\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}$, con $\Lambda^*_{\geqslant\alpha} = \{\beta \in \Lambda \mid \beta \geqslant \alpha\} \cup \{\infty\}$. Notamos que $\bar{\Lambda} = \Lambda^*$. Por hipótesis sabemos que $p_{\Lambda^*} : \Lambda^* \times X \to \Lambda^*$ es cerrada. Sea $F = \overline{\{(\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}}$. Tenemos que $p_{\Lambda^*}(F) \subseteq \Lambda^*$ es cerrado y $\Lambda \subseteq p_{\Lambda^*}(F) \subseteq \Lambda^*$. Entonces como $\bar{\Lambda} = \Lambda^*$ y $p_{\Lambda^*}(F)$ es cerrado, $p_{\Lambda^*}(F) = \Lambda^*$. Por lo tanto existe $x \in X$ tal que $(\infty, x) \in F$. Veamos que x es punto de acumulación de la red. Como $(\infty, x) \in F = \overline{\{(\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}}$, dado un entorno de (∞, x), este interseca a $\{(\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$. Para todo V entorno de x en X y $\alpha \in \Lambda$ consideramos $\Lambda^*_{\geqslant\alpha} \times V$ entorno de (∞, x). Luego existe $(\alpha', x_{\alpha'}) \in \Lambda^*_{\geqslant\alpha} \times V$, con lo cual obtuvimos un $x_{\alpha'} \in V$ con $\alpha' \geqslant \alpha$.

$4) \Rightarrow 3)$ Sea $\{F_s\}_{s\in S}$ una familia de cerrados en X tal que $\forall J \subseteq S$ finito, $\bigcap_{s\in J} F_s \neq \varnothing$. Debemos ver que $\bigcap_{s\in S} F_s \neq \varnothing$. Definimos $\Gamma = \{J \subseteq S \mid J \text{ finito}\}$, y decimos que $J_1 \leqslant J_2$ si $J_1 \subseteq J_2$. Tomando la unión de dos elementos de Γ, se puede ver que Γ es dirigido. Para cada $J \in \Gamma$ elegimos $x_J \in \bigcap_{s\in J} F_s$, construyendo así una red $(x_J)_{J\in\Gamma}$ en X. Por hipótesis existe $x \in X$ un punto de acumulación de la red. Veamos que $x \in \bigcap_{s\in S} F_s$. Como F_s es cerrado $\forall s \in S$, basta ver que $\forall s$, $\forall U$ entorno de x, $U \cap F_s \neq \varnothing$. Sean $s \in S$ y U un entorno de x. Como $\{s\} \in \Gamma$ y x es punto de acumulación de $(x_J)_{J\in\Gamma}$, existe $J \in \Gamma$ con $J \geqslant \{s\}$ $(s \in J)$ tal que $x_J \in U$. Es decir, $x_J \in \bigcap_{s'\in J} F_{s'}$. Entonces $x_J \in U \cap F_s$. ■

De estas equivalencias puede deducirse, por ejemplo, que un espacio con finitos abiertos es compacto. Algo que no vale en general es que un subespacio compacto sea cerrado.

Proposición. Si X es T_2 y $A \subseteq X$ es compacto, entonces A es cerrado en X.

Demostración. Sea $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ una red en A con límite $x \in X$. Como A es compacto existe una subred $(x_{\alpha_\gamma})_{\gamma\in\Gamma}$ que converge a $y \in A$. Ademas $x_{\alpha_\gamma} \to x$ por ser subred de $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$. Como X es T_2, $y = x$, y por lo tanto $x \in A$. ■

Ejercicio. Sea $f : X \to Y$ continua y $K \subseteq X$ compacto. Entonces $f(K) \subseteq Y$ es subespacio compacto.

El siguiente resultado será utilizado en muchas oportunidades a lo largo del curso.

Corolario. Sea $f : X \to Y$ continua y biyectiva, con X compacto e Y Hausdorff. Entonces f es un homeomorfismo.

Proposición. Sea X espacio T_2, $K \subseteq X$ compacto y $x \in K^c$. Entonces existen U y V abiertos de X tales que $K \subseteq U$, $x \in V$, $U \cap V = \varnothing$.

Demostración. Para cada $y \in K$ existen abiertos disjuntos U_y, V_y con $y \in U_y$, $x \in V_y$. Como K es compacto, existen $U_1 ... U_n$ tales que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i =: U$. Sea $V = \bigcap_{i=1}^n V_i \ni x$. Es claro que $U \cap V = \varnothing$. ■

Corolario. Sea X espacio T_2 y sean $A, B \subseteq X$ subespacios compactos tales que $A \cap B = \varnothing$. Entonces existen abiertos disjuntos U, V con $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.

Como ya hicimos antes, podemos definir la noción de localmente compacto.

Definición. X se dice localmente compacto si todo $x \in X$ tiene algún entorno compacto.

Notamos que todo espacio compacto es localmente compacto. La definición es más ligera (y en cierto sentido, no es análoga) a la que dimos de localmente conexo o localmente arco conexo.

Proposición. Si X es T_2, entonces X es localmente compacto si y sólo si $\forall x \in X$, $\forall U$ entorno de X, $\exists V$ abierto tal que $x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U$ y $\bar{V}$ es compacto.

Demostración.

$\Leftarrow$) Es claro.

$\Rightarrow$) Sean $x \in X$ y U un entorno de x. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que U es abierto. Sea F_x un entorno compacto de x. Si $F_x \subseteq U$ ya estamos (tomamos $V = F_x^\circ$). Si no, sea $A = F_x \cap U^c \neq \varnothing$, con $x \notin A$. Como A es un cerrado en un compacto, es compacto. Entonces existen W y W' abiertos disjuntos tal que $x \in W$, $A \subseteq W'$. Sea $V = W \cap F_x^\circ$. Notamos que V es abierto y que $x \in V$. Como $V \subseteq F_x$ y F_x es cerrado, $\bar{V}$ es compacto. Ahora $V \subseteq W \subseteq (W')^c \Rightarrow \bar{V} \subseteq (W')^c \subseteq A^c = (F_x \cap U^c)^c = F_x^c \cup U$. Entonces $\bar{V} \subseteq U$ ya que $\bar{V} \subseteq F_x$. ■

Estudiamos ahora la primera (y más sencillas) de las compactificaciones: la compactificación de Alexandroff.

Definición. Sea X un espacio topológico. La compactificación de Alexandroff de X es el espacio topológico $X^* = X \cup \{\infty\}$ con base de entornos $\beta = \beta_X \cup \beta_\infty$, donde β_X es una base de entornos de X y

$$\beta_\infty = \{U \subseteq X^* \mid \infty \in U, X \backslash U \text{ compacto y cerrado en } X\}.$$

Ejercicio. Sean X espacio topológico y X^* su compactificación de Alexandroff. Entonces:

1. $X \subseteq X^*$ es subespacio.

2. X^* es compacto.

3. $X^* = \bar{X} \iff X$ no es compacto.

4. Si X es localmente compacto y T_2, entonces X^* es T_2.

Solución de 3.

$\Leftarrow$) Como X no es compacto, existe una red $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ sin ninguna subred convergente. Sin embargo esa red sí tiene una subred convergente en X^*, y como X es subespacio, esa subred debe converger a ∞. Por lo tanto $\infty \in \bar{X}$.

$\Rightarrow$) Si X es compacto, $\{\infty\}$ resulta un abierto de X^*, por lo que $\bar{X} = X$.

5.2. Axiomas de separación, segunda parte

Vamos a continuar con los axiomas de separación que comenzamos a estudiar antes. Progresivamente vamos a ir pidiendo hipótesis más fuertes a nuestros espacios, algunas de las cuales van a ser necesarias para teoremas posteriores.

Definición. X se dice regular o T_3 si:

1. X es T_1.

2. Separa puntos de cerrados mediante abiertos: $\forall x \in X$, $\forall F \subseteq X$ cerrado con $x \notin F$, $\exists U, V \subseteq X$ abiertos disjuntos tales que $x \in U$ y $F \subseteq V$.

Ejemplos.

1. X con la topología indiscreta y $\#X > 1$ cumple 2), pero no 1).

2. Sea $\mathbb{R}_K$ el espacio que se obtiene al agregarle a la base de la topología usual de $\mathbb{R}$ los abiertos de la forma $(a, b)\backslash K$, donde $K = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Este espacio es T_2, pues $\mathbb{R}$ con la topología usual ya lo es, pero no es T_3: sea U un abierto que contiene al 0 y no interseca a K. Podemos suponer que U es de la forma $(a, b)\backslash K$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n \in (a, b)$. Entonces elegimos un entorno básico de $1/n$ de la forma (c, d). Podemos tomar un z tal que $\text{máx}\{c, 1/(n+1)\} < z < 1/n$. Sin embargo este z pertenece a ambos entornos, por lo que no pueden ser disjuntos.

Lema. Sea X espacio topológico T_1. Entonces X es T_3 si y sólo si $\forall x \in X$, $\forall U$ abierto, $x \in U$, $\exists V$ abierto tal que $x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U$. En particular si X es T_2 y localmente compacto, X es T_3.

Demostración.

$\Rightarrow$) Sean $x \in X$, U entorno abierto de x. Sea $F = U^c$, $x \notin F$. Entonces existen V, W abiertos disjuntos tal que $x \in V$, $F \subseteq W$. Veamos que $\bar{V} \subseteq U$. Esto sucede si $\bar{V} \cap F = \varnothing$, pero si $y \in F \Rightarrow y \in W$. Como W es abierto, esto dice que $y \notin \bar{V}$.

$\Leftarrow$) Consideramos $U = F^c$. Entonces existe V entorno abierto de x tal que $x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U$. Es claro que V y $\bar{V}^c$ separan a x de F.

Proposición.

1. Subespacios de T_3 son T_3.
2. Productos de T_3 son T_3.

Demostración.

1. Sea X un espacio T_3, Y un subespacio de X
   a) Y es T_1 por serlo X.
   b) Sean $y \in Y$, $A \subseteq Y$ cerrado tal que $y \notin A$. Sabemos que $A = B \cap Y$ con B un cerrado en X. Como $y \notin A$, entonces $y \notin B$. Entonces, como X es T_3, existen U, V abiertos disjuntos de X tales que $y \in U$ y $B \subseteq V$. Entonces $U \cap Y$ y $V \cap Y$ sirven.
2. Sea $\{X_s\}_{s \in S}$ una familia de espacios T_3, $X = \prod_{s \in S} X_s$
   a) X es T_1 porque cada X_s lo es.
   b) Por el lema anterior basta ver que dados $x \in X$ y U un entorno abierto de x, existe V abierto tal que $x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U$. Podemos suponer que U es un abierto de la base. Es decir $U = \prod_{s \in S} U_s$ con $U_s \subseteq X_s$ abiertos y $U_s = X_s$ salvo finitos. Para cada $s \in S$ tal que $U_s \neq X_s$, existe un V_s abierto tal que $x_s \in V_s \subseteq \overline{V_s} \subseteq U_s$. En los otros casos tomamos $V_s = U_s = X_s$. Así, $V = \prod_{s \in S} V_s$ cumple lo buscado. ■

Definición. X se dice normal o T_5 si:

1. X es T_1.
2. Separa cerrados disjuntos con abiertos disjuntos: $\forall A, B \subseteq X$ cerrados disjuntos, $\exists U, V \subseteq X$ abiertos disjuntos tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.

Observamos que por un resultado anterior, un espacio T_2 y compacto es T_5

Lema. Sea X espacio topológico T_1. Entonces X es T_5 si y sólo si $\forall A$ cerrado y U abierto tal que $A \subseteq U$, $\exists V$ abierto tal que $A \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U$.

Demostración.

$\Rightarrow$) Sean $A \subseteq X$, U entorno abierto de A. Sea $F = U^c$, $A \cap F = \varnothing$. Entonces existen V, W abiertos disjuntos tal que $A \subseteq V$, $F \subseteq W$. Veamos que $\bar{V} \subseteq U$. Esto sucede si $\bar{V} \cap F = \varnothing$, pero si $y \in F \Rightarrow y \in W$. Como W es abierto, esto dice que $y \notin \bar{V}$.

$\Leftarrow$) Consideramos $U = B^c$. Entonces existe V entorno abierto de A tal que $A \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U$. Es claro que V y $\bar{V}^c$ separan a A de B.

Teorema. Si $(X, <)$ es bien ordenado, entonces con la topología del orden es T_5.

Demostración. Antes de comenzar hacemos algunas observaciones:

1. Para todo $x \in X$, $\{x\}$ es cerrado en X, pues $\{x\} = (\{y \mid y < x\} \cup \{y \mid y > x\})^c$. Es decir que X es T_1.

2. Si $x \in X$ no es máximo, entonces tiene sucesor inmediato x' ya que el conjunto $A = \{y \in X \mid y > x\} \neq \varnothing$ tiene mínimo. Luego los conjuntos de la forma $(a, b]$ son abiertos si $a < b$ ($(a, b] = (a, b')$).

3. Si x_0 es el mínimo de X, entonces $\{x_0\}$ es abierto.

Sean $A, B \subseteq X$ cerrados disjuntos. Veamos que existen U, V abiertos disjuntos tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.

Primero vamos a ver el caso en el que $x_0 \notin A, B$. Para cada $a \in A$, como $a \notin B$ y B es cerrado, existe un abierto de la base (a^-, a^+) (o $(a^-, a^+]$) tal que $a \in (a^-, a^+)$ y $(a^-, a^+) \cap B = \varnothing$. Entonces tenemos abiertos $(a^-, a]$ con $(a^-, a] \cap B = \varnothing$, y $A \subseteq \bigcup_{a \in A}(a^-, a] =: U$. Análogamente $B \subseteq \bigcup_{b \in B}(b-, b] =: V$ con $(b^-, b] \cap A = \varnothing$. Veamos que $U \cap V = \varnothing$. Supongamos que existe $x \in (a^-, a] \cap (b^-, b]$. Como $a \in A$, $b \in B$, $A \cap B = \varnothing$, entonces $a \neq b$. Supongamos $a < b$. Como $x \in (a^-, a] \cap (b^-, b]$, $b^- < x < a < b$. Entonces $a \in (b^-, b]$, absurdo.

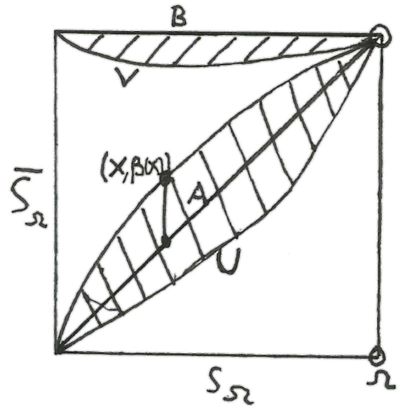
Ahora supongamos que $x_0 \in A$. Sea $A' = A \backslash \{x_0\}$. Por la observación 3), A' es cerrado. Volvemos a la situación anterior con A' y B, consiguiendo abiertos U' y V. Tomamos $U = U' \cup \{x_0\}$. ■

Ejemplo. El conjunto S_Ω es bien ordenado, no numerable y cumple que toda sección es numerable. Entonces S_Ω con la topología del orden es T_5. Sea $S_\Omega^* = S_\Omega \cup \{\Omega\}$ con $\alpha < \Omega$ $\forall \alpha \in S_\Omega$. Sigue siendo bien ordenado, así que S_Ω^* es T_5 con la topología del orden. Los entornos de Ω van a ser $(\alpha, \Omega] \neq \{\Omega\}$, pues $\forall \alpha \in S_\Omega$ $\exists \beta > \alpha$. Entonces $S_\Omega^* = \overline{S_\Omega}$. Se puede probar (ver el libro de Munkres "Topology"Thm. 27.1) que S_Ω^* es la compactificación de Alexandroff de S_Ω.

Consideramos $\overline{S_\Omega} \times \overline{S_\Omega}$, que es compacto, T_2 y por lo tanto T_5. Vamos a ver que $S_\Omega \times \overline{S_\Omega}$ no es T_5. Esto nos dice tres cosas: que un espacio T_3 (más aún T_4) puede no ser T_5; que un subespacio de un T_5 puede no ser T_5; y que producto de T_5 no es necesariamente T_5.

Proposición. $S_\Omega \times \overline{S_\Omega}$ no es T_5.

Demostración. Debemos exhibir dos cerrados A, B disjuntos que no puedan ser separados por abiertos. La diagonal $\Delta \subseteq \overline{S_\Omega} \times \overline{S_\Omega}$ es cerrada porque $\overline{S_\Omega}$ es T_2. Sea $A = \Delta \cap S_\Omega \times \overline{S_\Omega}$, A es cerrado en $S_\Omega \times \overline{S_\Omega}$. Sea $B = S_\Omega \times \{\Omega\} = (S_\Omega \times S_\Omega)^c \subseteq S_\Omega \times \overline{S_\Omega}$. Como $S_\Omega \times S_\Omega$ es abierto, B es cerrado. Ya tenemos que $A \cap B = \varnothing$. Supongamos que existen U, V abiertos que separan a A y B respectivamente.



Para todo $x \in S_\Omega$ $\exists x < \beta < \Omega$ tal que $(x, \beta) \notin U$. Supongamos que no, entonces $\forall \beta > x$, $(x, \beta) \in U \Rightarrow (x, \Omega) \in \bar{U}$, pero V es un abierto tal que $(x, \Omega) \in V$, $U \cap V = \varnothing$, absurdo. Sea $\beta(x) = \min\{b \in S_\Omega \mid x < \beta < \Omega, (x, \beta) \notin U\}$, entonces $x < \beta(x)$ y $(x, \beta(x)) \notin U$. Definimos una sucesión en S_Ω: x_1 es cualquier punto de S_Ω y $x_n = \beta(x_{n-1})$. La sucesión es creciente, y por la propiedad de S_Ω tiene cota superior. Sea $b = \sup_{n \in \mathbb{N}}\{x_n\}$, entonces $x_n \to b$. Luego $(x_n, \beta(x_n)) \to (b, b) \in A \subseteq U$, absurdo pues U no contiene a ningún $(x, \beta(x))$. ■

Definición. X se dice completamente regular o T_4 si:

1. X es T_1.
2. Separa puntos de cerrados mediante funciones continuas: $\forall x \in X$, $\forall F \subseteq X$ cerrado con $x \notin F$, $\exists h : X \to I$ continua tal que $h(x) = 0$ y $h(F) = 1$.

Notamos que $T_4 \Rightarrow T_3$, pero no vale la recíproca.

Ejemplo. Puede encontrarse un contraejemplo para la vuelta en el siguiente link: https://dantopology.wordpress.com/2012/09/01/regular-but-not-completely-regular/

Lema de Urysohn. Si X es un espacio topológico T_5, entonces $\forall A, B \subseteq X$ cerrados disjuntos $\exists h : X \to I$ continua tal que $h(A) = 0$ y $h(B) = 1$.

Observaciones. Previo a la demostración observamos que:

1. Como consecuencia de Urysohn $T_5 \Rightarrow T_4$.
2. La demostración no funciona para probar $T_3 \Rightarrow T_4$.

Demostración. Vamos a hacer uso de los números diádicos para la demostración del lema. Definimos $D = \{\frac{n}{2^m} \mid n \text{ impar}, m \in \mathbb{N}, 0 < \frac{n}{2^m} < 1\}$. Este conjunto es denso en $[0, 1]$. Sea $U = B^c$, entonces $A \subseteq U$. Luego, como X es T_5, existe $U_{1/2}$ abierto de X tal que $A \subseteq U_{1/2} \subseteq \overline{U_{1/2}} \subseteq U$. Como $A \subseteq U_{1/2}$ y $\overline{U_{1/2}} \subseteq U$, existen $U_{1/4}$ y $U_{3/4}$ abiertos tales que $A \subseteq U_{1/4} \subseteq \overline{U_{1/4}} \subseteq U_{1/2} \subseteq \overline{U_{1/2}} \subseteq U_{3/4} \subseteq \overline{U_{3/4}} \subseteq U$.

Repitiendo inductivamente este procedimiento tenemos una familia de abiertos $\{U_d\}_{d \in D}$ tales que:

1. $A \subseteq U_d \subseteq \overline{U_d} \subseteq U \ \forall d \in D$.

2. $\forall d, d' \in D$, si $d < d'$ entonces $U_d \subseteq \overline{U_d} \subseteq U_{d'} \subseteq \overline{U_{d'}}$.

Sea $h : X \to [0,1]$, definida como

$$h(x) = \begin{cases} \inf\{d \mid x \in U_d\} & \text{si } x \in U_d \text{ para algún } d \\ 1 & \text{si } x \notin U_d \ \forall d \end{cases}.$$

Como D es denso en $[0,1]$, por la primera propiedad $h(A) = 0$. Además $h(B) = 1$ porque $B = U^c$ y $U_d \subseteq U \ \forall d \in D$. Sólo falta ver que h es continua. Veamos que $\forall V$ abierto de una sub-base de $[0,1]$, $h^{-1}(V)$ es abierto en X. Por ejemplo tomamos la sub-base compuesta por elementos de la forma $[0,a)$ y $(b,1]$.

Primero tenemos que $h^{-1}([0,a)) = \bigcup_{d<a} U_d$. Ambas contenciones se deducen fácilmente de la definición de h.

Para ver que $h^{-1}((b,1])$ es abierto, veamos que $h^{-1}((b,1]^c)$ es cerrado. Ahora $h^{-1}([0,b]) = \bigcap_{d>b} \overline{U_d}$:

$\subseteq$) Supongamos que $x \notin \overline{U_r}$ para algún $r > b$. Entonces $x \notin U_d \ \forall d \leqslant r$ y en consecuencia $h(x) \geqslant r > b$.

$\supseteq$) Si $x \in \overline{U_r}$, entonces $x \in U_d \ \forall d > r$. Luego $h(x) \leqslant r$. Por lo tanto, en este caso $h(x) \leqslant d \ \forall d > b$. Es decir $h(x) \leqslant b$. ■

Esta demostración no funciona para ver que $T_3 \Rightarrow T_4$, porque falla el paso inductivo.

Ejercicio.

1. Producto de T_4 es T_4.

2. Subespacio de T_4 es T_4.

Demostración.

1. Sea $X = \prod_{s\in S} X_s$ un producto de espacios T_4. Sean $x \in X$ y $A \subseteq X$ un cerrado disjunto de x. Tomamos un abierto básico $\prod_{s\in S} U_s$ disjunto de A que contenga a x. Sabemos que $U_s = X_s$ salvo en finitos $s_1, ..., s_n \in S$. Para cada $i = 1, ..., n$ existe una función continua $h_i : X_{s_i} \to [0,1]$ con $h_i(x_{s_i}) = 1$ y $h_i(X_{s_i} \backslash U_{s_1}) = 0$. Con estas funciones definimos $\phi_i : X \to [0,1]$ con $\phi_i(x) = h_i(\pi_{s_i})(x)$. Por último consideramos $\phi = \phi_1 ... \phi_n$. Esta función vale 1 en x y se anula en el complemento de U, que contiene a A.

2. Sean X T_4 e $Y \subseteq X$ un subespacio. Sean $x \in Y$ y $A \subseteq Y$ un cerrado disjunto de x. Notamos que $A = \bar{A} \cap Y$ con la clausura tomada en X. Luego $x \notin \bar{A}$. Podemos entonces tomar una función continua $h : X \to [0,1]$ tal que $h(x) = 1$ y $h(\bar{A}) = 0$. La restricción de esta h a Y funciona.

Proposición. Un espacio topológico X es T_4 si y sólo si es subespacio de un producto de copias de I.

Demostración.

$\Leftarrow$) Se deduce del ejercicio anterior.

$\Rightarrow$) Consideramos $\prod_{H=\{h:X\to I \text{ continua}\}} I$ y definimos $i : X \to \prod_H I$ por $(i(x))_h = h(x)$. Notamos que i es continua porque en cada coordenada lo es. Veamos que i es inicial. Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & I \arrow[d, dotted, no head] \\
X \arrow[r, "i"] & \prod_H I \arrow[ur, "p_h"] \arrow[r, "p_{h'}"] \arrow[dr, "p_{h''}"] & I \arrow[d, dotted, no head] \\
 & & I
\end{tikzcd}.$$

Como i es continua y $\{p_h\}_{h\in H}$ es inicial, para ver que i es inicial, basta ver que H es inicial. Para ello alcanza probar que si $U \subseteq X$ es abierto, entonces existe $J \subseteq H$ tal que $U = \bigcup_{j\in J} h_j^{-1}(U_j)$, con $h_j \in H$ y $U_j \subseteq I$ abiertos. Para cada $x \in U$ tenemos $h_x : X \to I$ continua tal que $h_x(x) = 0$ y $h_x(U^c) = 1$. Observamos que $x \in h_x^{-1}([0, 1/2)) \subseteq U$, por lo que $U = \bigcup_{x\in U} h_x^{-1}([0, 1/2))$.

Por último, veamos que i es inyectiva. Sean $x \neq y \in X$. Como X es T_4, existe $h : X \to I$ continua tal que $h(x) = 1$ y $h(y) = 0$, pues los puntos son cerrados. Entonces $i(x) \neq i(y)$, pues difieren en una coordenada. ■

5.3. Teorema de Tychonoff

Observación. Un espacio topológico X es compacto si y sólo si $\forall\mathcal{F}$ familia con la p.i.f. (propiedad de intersección finita), $\bigcap\limits_{F\in\mathcal{F}} \bar{F} \neq \varnothing$.

Observación. Dada una familia de compactos $\{X_s\}_s \in S$, para ver que $X = \prod_{s\in S} X_s$ es compacto debemos ver que dada una familia $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i\in J}$ con la p.i.f., $\bigcap_{i\in J} \overline{F_i} \neq \varnothing$. Para cada $s \in S$ tenemos $P_s(\mathcal{F}) = \{p_s(F)\}_{F\in\mathcal{F}}$ una familia en X_s. Entonces como X_s es compacto, $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} p_s(F) \neq \varnothing$. Podemos elegir $x_s \in \bigcap_{F\in\mathcal{F}} p_s(F)$ para cada $s \in S$. Sin embargo $(x_s)_{s\in S}$ puede no estar en $\bigcap_{f\in\mathcal{F}} \bar{F}$.

Lema 1. Sean X un espacio topológico y $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos de X con la p.i.f.. Entonces $\exists\mathcal{D}$ familia de subconjuntos de X que cumple:

1. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}$.

2. $\mathcal{D}$ tiene la p.i.f.

3. $\mathcal{D}$ es maximal con esta propiedad.

Demostración. Sea

$$A = \{\mathcal{G} \text{ familia de subconjuntos de } X \text{ tal que } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}, \mathcal{G} \text{ tiene la p.i.f.}\},$$

con el orden dado por la inclusión. Esta familia es no vacía porque contiene a $\mathcal{F}$. Veamos que toda cadena tiene cota superior. Sea C una cadena, veamos que $\mathcal{C} = \bigcup_{\mathcal{G} \in C} \mathcal{G}$ pertenece a A. Es evidente que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}$. Ahora sean $D_1, ..., D_n \in \mathcal{C}$. Cada D_i está en algún elemento de C. En particular, todos ellos están en el mayor de esos n elementos. Luego su intersección es no vacía y por lo tanto $\mathcal{C}$ tiene la p.i.f.. Entonces por Zorn existe un elemento maximal $\mathcal{D}$ que es lo que buscamos. ■

Lema 2. Sean X un espacio topológico y $\mathcal{D}$ una familia de subconjuntos de X con la p.i.f., maximal con esa propiedad. Entonces:

1. Si $D_1, ..., D_n \in \mathcal{D}$, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} D_i \in \mathcal{D}$.

2. Si $A \subseteq X$ es tal que $A \cap D \neq \emptyset \ \forall D \in \mathcal{D}$, entonces $A \in \mathcal{D}$.

Demostración. En el primer caso, es fácil ver que si le agregamos $\bigcap_{i=1}^{n} D_i$ a $\mathcal{D}$, sigue teniendo la p.i.f., y por maximalidad de $\mathcal{D}$, debe pertenecer a él.

Para el segundo caso. Sean $D_1, ..., D_s \in \mathcal{D}$, tenemos que $A \cap D_1 \cap ... \cap D_s = A \cap (D_1 \cap ... \cap D_s)$. Por el primer caso, el segundo término pertenece a $\mathcal{D}$, y por la propiedad que cumple A, $A \cap D_1 \cap ... \cap D_s \neq \emptyset$. Luego $A \in \mathcal{D}$. ■

Teorema de Tychonoff. Sea $\{X_s\}_{s \in S}$ una familia de compactos, entonces $\prod_{s \in S} X_s$ es compacto.

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ una familia se subconjuntos de X con la p.i.f.. Debemos ver que $\bigcap_{f \in \mathcal{F}} \bar{F} \neq \emptyset$. Por el lema 1, existe un $\mathcal{D}$ maximal con la p.i.f. tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}$. Si probamos que $\bigcap_{D \in \mathcal{D}} \bar{D} \neq \emptyset$ ya estamos.

Para cada $s \in S$, consideramos $\{p_s(D)\}_{D \in \mathcal{D}}$. Como X_s es compacto y $\{p_s(D)\}_{D \in \mathcal{D}}$ tiene la p.i.f., $\bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{p_s(D)} \neq \emptyset$. Elegimos $x_s \in \bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{p_s(D)}$. Sea $x = (x_s)_{s \in S}$, veamos que $x \in \bigcap_{D \in \mathcal{D}} \bar{D}$. Es decir que para todo U abierto tal que $x \in U$, $U \cap D \neq \emptyset \ \forall D \in \mathcal{D}$. Basta probar esto para abiertos de la base:

1. Supongamos primero que $U \subseteq X$ es un abierto de la sub-base tal que $x \in U$. Existe un $s' \in S$ tal que $U = p_{s'}^{-1}(U_{s'})$ con $U_{s'} \subseteq X_{s'}$ abierto que contiene a $x_{s'}$. Como $x_{s'} \in \bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{p_{s'}(D)}$, $U_{s'} \cap p_{s'}(D) \neq \emptyset \ \forall D \in \mathcal{D}$. Entonces $U \cap D \neq \emptyset \ \forall D \in \mathcal{D}$. Luego por el lema 2, $U \in \mathcal{D}$.

2. Sea U un abierto de la base tal que $x \in U$, debemos ver que $U \cap D \neq \emptyset \ \forall D \in \mathcal{D}$. Existen abiertos de la sub-base $U_1, ..., U_n$ tales que $x_i \in U_i$ y $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$. Como cada $U_i \in \mathcal{D}$, entonces por el lema 2, $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{D}$. Entonces como $\mathcal{D}$ tiene la p.i.f., $U \cap D \neq \emptyset \ \forall D \in \mathcal{D}$. ■

Ejemplo. Vamos a ver ahora un ejemplo en el que queda claro que las subredes de sucesiones no tienen por qué ser sucesiones. Consideramos el espacio I^I con la topología producto, que es compacto por el teorema de Tychonoff.

Veamos que no es secuencialmente compacto. Predeterminamos para cada $x \in I$, una única representación binaria (i.e. no termina en infinitos 1). Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : I \to I$ la función que manda cada x en su dígito n-ésimo en la expresión binaria prefijada. Sea $(f_{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Tomamos $x \in I$ tal que su expresión binaria tenga unos en los lugares n_l cuando l es impar, y ceros en todos los demás. Entonces $f_{n_l}(x)$ es alternada y por lo tanto (ejercicio sencillo) $(f_{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$ no puede converger.

Sin embargo, como I^I es compacto, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ debe tener una subred convergente. Por un lema anterior, para encontrar una subred convergente, basta exhibir un punto de acumulación. Una función $f : I \to I$ va a ser un punto de acumulación si $\forall U$ entorno de f, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists m \geqslant n$ tal que $f_m \in U$. Los entornos básicos de f van a ser conjuntos de funciones con libertad en todos salvo finitos $x \in I$, en los cuales van a parar a entornos abiertos de $f(x)$. Es decir que f va a ser punto de acumulación si para todo conjunto finito $x_1, ..., x_m \in I$, $S_f(x_1, ..., x_m) := \{n \in \mathbb{N} \mid f_n(x_i) = f(x_i)\ \forall 1 \leqslant i \leqslant m\}$ es infinito.

Ya sabemos cómo van a ser los límites de las subredes convergentes, ahora miremos quiénes son estas subredes. Indexamos a la subred por los subconjuntos finitos de I y definimos la función cofinal ϕ con $\phi(\{x_1, ..., x_m\} = \text{mín}\, S_f(x_1, ..., x_m)$. Es claro que esta subred converge a f por cómo están definidos los S_f.

5.4. Compactificación de Stone Čech

Una compactificación de un espacio topológico X va a ser, en el sentido tradicional, un par (Y, i) con Y espacio topológico compacto, $i : X \to Y$ continua tal que:

1. i es subespacio.

2. $i(X)$ es denso en Y.

Nosotros relajaremos la condición de que i sea subespacio, para poder extender la existencia de compactificaciones a espacios más generales. La compactificación de Stone Čech es una compactificación $i : X \to Y$ que cumple:

1. Y es compacto y T_2.

2. Extiende funciones $f : X \to Z$ en forma única si Z es compacto y T_2.

Observamos que la i no necesariamente es subespacio. Si lo fuera, X debería ser T_4 pues Y es T_5.

Vamos a construir dicha compactificación gradualmente. Primero, dado un espacio topológico X, buscamos βX un espacio compacto y T_2, y una función continua $i : X \to \beta X$ tal que $\forall f : X \to I$ continua, $\exists! \bar{f} : \beta X \to I$ continua tal que

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & \beta X \arrow[dl, "\exists! \bar{f}"] \\ I & \end{tikzcd} .$$

Consideramos $\prod_{H=\{h:X\to I \text{ continua}\}} I$ y la función $i : X \to \prod_H I$ con $(i(x))_h = h(i)$. Sabemos que $\prod_H I$ es compacto y T_2, y para cada $f : X \to I$ tenemos

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & \prod_H I \arrow[dl, "p_f"] \\ I & \end{tikzcd},$$

pero no podemos asegurar la unicidad para la p_f. Para tener unicidad, podemos considerar $i(X) \subseteq \prod_H I$ con la topología subespacio. El problema ahora es que $i(X)$ puede no ser compacto. Para eso tomamos $\beta X = \overline{i(X)} \subseteq \prod_H I$, que es compacto y T_2. Así obtenemos:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & i(X) \arrow[r, hook] \arrow[dl, "p_f|"] & \overline{i(X)} = \beta X \arrow[r, hook] \arrow[dll, "p_f|"] & \prod_H I \arrow[dlll, "p_f"] \\ I & & & \end{tikzcd}.$$

Como $p_f|_{i(X)}$ es única tal que el diagrama conmuta, y como $i(X) \subseteq \beta X$ es denso e I es T_2, entonces $\bar{f} = p_f|_{\beta X}$ es única tal que $\bar{f}i = f$.

Definición. A $i : X \to \beta X$ se lo llama la compactificación de Stone Čech de X.

Por la construcción que hicimos y por una proposición anterior, si X es T_4, entonces $i : X \to \beta X$ es subespacio denso.

Teorema. Sea X un espacio topológico y sea $i : X \to \beta X$ su compactificación de Stone Čech. Entonces $\forall K$ compacto y T_2 y toda $f : X \to K$ continua, $\exists! \bar{f} : \beta X \to K$ continua tal que:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & \beta X \arrow[dl, dotted, "\exists! \bar{f}"] \\ K & \end{tikzcd}.$$

Demostración. Como K es compacto y T_2, es T_5 y en particular T_4. Entonces K es subespacio de $\prod_{\{h:K\to I \text{ continua}\}} I$. Para cada $h : K \to I$ continua, consideramos p_h. Como hacemos esto para cada h, $\exists! \bar{f} : \beta X \to \prod_{\{h:K\to I \text{ continua}\}} I$ tal que $\bar{f}i = jf$, como se ve en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & \beta X \arrow[d, "\bar{f}"] \arrow[dr, dotted, "\exists! \overline{hf}"] & \\ K \arrow[r, hook, "j"] & \prod_{\{h:K\to I\}} I \arrow[r, "p_h"] & I \end{tikzcd}.$$

Si vemos que $\bar{f}(\beta X) \subseteq j(K)$, entonces como $j : k \to j(K)$ es un homeomorfismo, $\bar{f}$ puede ser vista como una función $\bar{f} : \beta X \to K$. Ahora, $\bar{f}(i(X)) \subseteq j(K)$, entonces como K es compacto y un compacto dentro de un T_2 es cerrado, $\bar{f}(\beta X) = \bar{f}(\overline{i(X)}) \subseteq \overline{j(K)} = j(K)$. ■

5.5. Ejercicios

Compacidad

1. Sean τ, τ' dos topologías en X.

   a) Pruebe que si τ' es más fina que τ y (X, τ') es compacto, entonces (X, τ) es compacto.
   b) Pruebe que si (X, τ) y (X, τ') son compactos y Hausdorff, entonces o bien $\tau = \tau'$ o bien τ y τ' no son comparables.

2. Sea (X, τ) un espacio topológico Hausdorff y sea
$$\tau_c = \{U \in \tau : X \smallsetminus U \text{ es compacto}\} \cup \{\varnothing\}.$$
   Pruebe que τ_c es una topología sobre X.

3. Pruebe que si X tiene la topología del complemento finito, entonces es compacto.

4. Decida si $[0, 1]$ es compacto para

   a) la topología $\{U : [0, 1] \backslash U \text{ es numerable o igual a } [0, 1]\}$.
   b) la topología de subespacio de $\mathbb{R}_l$.

5. Pruebe que S_Ω no es compacto pero es secuencialmente compacto.

6. Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de espacios topológicos T_1 tales que $X_n \subseteq X_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y sea $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ con la topología final respecto de las inclusiones $\iota_n : X_n \to X$. Probar que si $K \subseteq X$ compacto, entonces $K \subseteq X_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

7. Sea X metrizable. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   a) X es acotado para toda métrica que induzca la topología de X.
   b) Toda función continua $\phi : X \to \mathbb{R}$ es acotada.
   c) X es compacto.

8. Sean X e Y espacios topológicos, con X compacto e Y Hausdorff. Muestre que si una función $f : X \to Y$ es continua, entonces es cerrada.

9. Sean X e Y espacios topológicos, con Y compacto y Hausdorff. Puebe que una función $f : X \to Y$ es continua si y sólo su gráfico $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}$ es cerrado en $X \times Y$.

10. Sea $f : X \to Y$ función continua. Son equivalentes:

    a) f es cerrada y $f^{-1}(\{y\})$ es compacto para todo $y \in Y$.
    b) f es cerrada y $f^{-1}(K)$ es compacto para todo $K \subseteq Y$ compacto.
    c) Para todo Z espacio topológico, $id_Z \times f : Z \times X \to Z \times Y$ es cerrada.
    d) f es propia.

11. Sea $f : X \to Y$ suryectiva y propia. Pruebe que si X es Hausdorff, entonces Y también lo es.

Compacidad local

12. Pruebe que $\mathbb{Q}$ no es localmente compacto.

13. Pruebe que $[0,1]^\omega$ no es localmente compacto con la topología uniforme.

14. Pruebe que si $\prod_{i\in I} X_i$ es localmente compacto y $X_i \neq \varnothing$ para todo i, entonces cada X_i es localmente compacto y todos los X_i, salvo una cantidad finita, son compactos.

15. Pruebe que si X es localmente compacto y $f : X \to Y$ es continua y abierta, entonces $f(X)$ es localmente compacto. Halle un ejemplo que muestre que la hipótesis f abierta es necesaria.

Compactificación de Alexandroff

16. Pruebe que la compactificación a un punto de $\mathbb{N}$ es homeomorfa a $\{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ con la topología subespacio de $\mathbb{R}$.

17. Usando la proyección estereográfica $p : S^n \backslash \{N\} \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$p(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n)$$

pruebe que la compactificación a un punto de $\mathbb{R}^n$ es homeomorfa a S^n.

18. Pruebe que si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces f se extiende a un homeomorfismo entre sus compactificaciones a un punto.

Axiomas de separación

19. Pruebe que si X es regular, entonces dos puntos distintos cualesquiera de X admiten entornos cuyas clausuras son disjuntas.

20. Pruebe que si X es normal, entonces todo par de cerrados disjuntos de X admiten entornos cuyas clausuras son disjuntas.

21. Pruebe que un subespacio cerrado de un espacio normal es normal.

22. Pruebe que si X tiene la topología del orden, entonces X es regular.

23. Sea $\{X_\alpha\}$ una familia de espacios topológicos no vacíos. Pruebe que si $\prod X_\alpha$ es Hausdorff ó regular ó normal, entonces también lo es cada X_α.

24. Sea X un conjunto y sean τ, τ' topologías en X tales que $\tau \subset \tau'$. Suponiendo que X es Hausdorff (o regular o normal) con una de estas topologías, ¿qué puede deducirse de X con la otra topología?

25. Sean $f, g : X \to Y$ continuas, Y Hausdorff. Pruebe que $\{x : f(x) = g(x)\}$ es cerrado en X.

26. Pruebe que si X es normal y conexo entonces tiene un solo punto o es no numerable.

27. Sea Z un espacio topológico. Si Y es un subespacio de Z, decimos que Y es retracto de Z si existe una función continua $r : Z \to Y$ tal que $r(y) = y$ para todo $y \in Y$.

    a) Pruebe que si Z es Hausdorff e Y es un retracto de Z, entonces Y es cerrado en Z.

b) Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ con dos elementos. Pruebe que A no es un retracto de $\mathbb{R}^2$.

c) Pruebe que S^1 es un retracto de $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$.

28. Pruebe que si $\{f_\alpha : X \to \mathbb{R}\}$ es una familia de funciones continuas que separan puntos de cerrados, entonces es inicial.

29. Pruebe que si Y es normal con base $\mathcal{B}$, entonces Y es subespacio de $[0,1]^J$ con $J \subset \mathcal{B} \times \mathcal{B}$.

30. Pruebe que $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$ no es normal, pero es completamente regular.

31. Sea X completamente regular. Sean A, B cerrados disjuntos de X. Pruebe que si A es compacto, entonces existe una función continua $f : X \to I$ tal que $f(A) = \{0\}$ y $f(B) = \{1\}$.

32. Pruebe que si X es compacto y Hausdorff, entonces es normal.

33. Pruebe que si X es localmente compacto y Hausdorff, entonces es completamente regular.

Compactificación de Stone-Čech

34. Sea Y una compactificación T_2 de X, y sea $\beta(X)$ la compactificación de Stone-Čech. Pruebe que existe una función cerrada y suryectiva $g : \beta(X) \to Y$ que se restringe a la identidad de X.

35. *a*) Pruebe que si $f : S_\Omega \to \mathbb{R}$ es continua, entonces es eventualmente constante.

    b) Pruebe que la compactificación en un punto de S_Ω y la compactificación de Stone-Čech son equivalentes.

    c) Concluya que toda compactificación de S_Ω es equivalente a la compactificación en un punto.

36. Sea X completamente regular. Pruebe que X es conexo si y sólo si $\beta(X)$ es conexo.

37. Sea X discreto.

    a) Pruebe que si $A \subset X \subset \beta(X)$, entonces $\overline{A}$ y $\overline{X \backslash A}$ son disjuntos, donde las clausuras se toman en $\beta(X)$.

    b) Pruebe que si U es abierto en $\beta(X)$, entonces $\overline{U}$ es abierto en $\beta(X)$.

    c) Pruebe que $\beta(X)$ es totalmente disconexa.

Grupos topológicos

Un *grupo topológico* G es un grupo y un espacio topológico tal que las funciones $(x, y) \mapsto x.y$, $x \mapsto x^{-1}$ y $x \mapsto e$ son continuas.

38. Pruebe que $(\mathbb{R}, +)$, $(S^1, \cdot)$ y $(GL(n, \mathbb{R}), \cdot)$ son grupos topológicos.

39. Pruebe que G es un grupo topológico si y sólo si la función $H : G \times G \to G$, $H(g, h) = g \cdot h^{-1}$ es continua.

40. Pruebe que para cada $a \in G$, las funciones $L_a : G \to G$ y $R_a : G \to G$, definidas por $L_a(g) = a \cdot g$, $R_a(g) = g \cdot a$ son homeomorfismos.

41. Sea G un grupo topológico, sea e el neutro de G y sea U abierto que contiene a e. Pruebe que existe V abierto que contiene a e tal que $V \cdot V \subset U$ y $V^{-1} = V$.

42. Pruebe que si un grupo topológico G es T_0, entonces es T_2.

43. Pruebe que si H es un subgrupo de un grupo topológico G, entonces la clausura de H es también un subgrupo. Pruebe que si H es invariante, entonces su clausura también.

44. De los grupos topológicos $GL(n,\mathbb{R}), SL(n,\mathbb{R}), O(n,\mathbb{R}), SO(n,\mathbb{R})$, decida cuáles son compactos y cuáles son conexos.

5.6. Ejercicio adicional: El teorema de Tietze

El objetivo de esta sección es demostrar el teorema de extensión de Tietze. Para ello, proponemos su demostración como un ejercicio guiado.

Teorema. Sean X un espacio topológico normal y $A \subseteq X$ cerrado. Entonces,

- Toda función continua $f : A \to [-1,1]$ admite una extensión continua $\bar{f} : X \to [-1,1]$.
- Toda función continua $f : A \to \mathbb{R}$ admite una extensión continua $\bar{f} : X \to \mathbb{R}$.

Ejercicio. Pruebe el teorema de Tietze resolviendo los siguientes pasos.

- Sea $f : A \to [-1,1]$ continua. Demuestre que existe una función continua $g : X \to [-1,1]$ tal que
$$|g(x)| \leqslant \frac{1}{3}, \text{ para } x \in X$$
$$|f(a) - g(a)| \leqslant \frac{2}{3}, \text{ para } a \in A.$$
Sugerencia: considere los cerrados $B = f^{-1}([-1,-\frac{1}{3}])$ y $C = f^{-1}([\frac{1}{3},1])$.

- Sea $f : A \to [-1,1]$ continua. Construya una sucesión de funciones continuas $g_n : X \to [-1,1]$ tales que para cada $n \in \mathbb{N}$
$$|g_n(x)| \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}, \text{ para } x \in X$$
$$\left| f(a) - \sum_{k=1}^{n} g_k(a) \right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n}, \text{ para } a \in A.$$
Verifique que la función $g : X \to \mathbb{R}$ dada por
$$g(x) = \sum_{n \geqslant 1} g_n(x),\ x \in X,$$
está bien definida y es una extensión continua de f.

- Sea $f : A \to (-1, 1)$ continua. Pruebe que hay una extensión continua $h : X \to (-1, 1)$ de f. Para eso, tome una extensión $g : X \to [-1, 1]$ y considere los cerrados disjuntos A y D, donde
$$D = g^{-1}(\{-1\}) \cup g^{-1}(\{1\}).$$

6

Espacios de funciones

6.1. Topología de convergencia puntual

Dados espacios topológicos X e Y, consideremos el conjunto $Y^X = \{f : X \to Y\}$. Dentro de él podemos considerar el subconjunto $Hom(X,Y) = \{f : X \to Y \text{ continua}\}$. Queremos darle a este último conjunto una topología conveniente.

La primera opción es darle a $Y^X = \prod_{x\in X} Y$ la topología producto, y a $Hom(X,Y) \subseteq Y^X$ la topología subespacio. A esa topología la llamamos topología de convergencia puntual.

Una sub-base para esta topología es $\beta = \{S(x,U)\}_{\substack{x\in X \\ U\subseteq Y \text{ abierto}}}$, donde $S(x,U) = \{f : X \to Y \text{ continua tal que } f(x) \in U\} = p_x^{-1}(U) \cap Hom(X,Y)$. Dar un abierto U de la base es dar $x_1, ..., x_n \in X$ y $U_1, ..., U_n \subseteq Y$ abiertos, de manera que $U = \bigcap_{i=1}^n S(x_i,U_i) = \{f : X \to Y \text{ continua} \mid f(x_i) \in U_i \;\; \forall 1 \leqslant i \leqslant n\}$.

El problema con esta topología es que sus abiertos son muy grandes, en el sentido de que no separan mucho a las funciones. Vamos a ser más específicos con esto en lo que sigue.

6.2. Ley exponencial y topología compacto-abierta

Dados A, B y C conjuntos, tenemos una biyección

$$Hom(A \times B, C) \underset{\psi}{\overset{\phi}{\longleftrightarrow}} Hom(A, Hom(B,C))$$

con $\phi(f)(a)(b) = f(a,b)$ y $\psi(g((a,b))) = g(a)(b)$. Esta es la ley exponencial para conjuntos. Queremos una propiedad equivalente para espacios topológicos. Concretamente, dados X, Y y Z espacios topológicos, buscamos una biyección

$$Hom(Z \times X, Y) \underset{\psi}{\overset{\phi}{\longleftrightarrow}} Hom(Z, \mathcal{C}(X,Y)) \;\; ,$$

donde $\mathcal{C}(X,Y)$ es $Hom(X,Y)$ con una topología conveniente.

Observación. Dados $f : Z \times X \to Y$ continua y $z \in Z$, notar que $\phi(f)(z)$ resulta continua. Esto se deduce del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_z"] & Z \times X \arrow[r, "f"] & Y \\ x \arrow[r, mapsto] \arrow[rr, bend right, "\phi(f)(z)"'] & (z,x) \arrow[r, mapsto] & f(z,x) \end{tikzcd} .$$

Para ver que la biyección que buscamos exista, ϕ y ψ deben estar bien definidas. Para eso vamos a necesitar que la topología de $\mathcal{C}(X,Y)$ cumpla:

1. Si $f : Z \times X \to Y$ es continua, entonces $\phi(f) : Z \to \mathcal{C}(X,Y)$ es continua.

2. Si $g : Z \to \mathcal{C}(X,Y)$ es continua, entonces $\psi(g) : Z \times X \to Y$ es continua.

En caso de que se cumplan 1) y 2), como $\phi = \psi^{-1}$ se tendrá la biyección de conjuntos buscada.

Observación. Dados X, Y espacios topológicos definimos $ev : \mathcal{C}(X,Y) \times X \to Y$ con $ev(f,x) = f(x)$. Veamos que si ev es continua, entonces $\forall g : Z \to \mathcal{C}(X,Y)$ continua, $\psi(g) : Z \times X \to Y$ es continua. Es decir, se resuelve 2). Dada $g : Z \to \mathcal{C}(X,Y)$ continua, tenemos el siguiente diagrama,

$$\begin{tikzcd} Z \times X \arrow[r, "g \times 1_X"] \arrow[dr, "\psi(g)"'] & \mathcal{C}(X,Y) \times X \arrow[d, "ev"] \\ & Y \end{tikzcd} .$$

Entonces $\psi(g)$ es continua si ev lo es.

En definitiva, queremos darle una topología a $Hom(X,Y)$ (que denotamos $\mathcal{C}(X,Y)$) tal que:

1. Si $f : Z \times X \to Y$ es continua, entonces $\phi(f) : Z \to \mathcal{C}(X,Y)$ es continua.

2′. $ev : \mathcal{C}(X,Y) \times X \to Y$ es continua.

Conseguiremos una topología que cumpla 1), y que cumpla 2′) cuando X es localmente compacto y T_2. Esa topología va a llamarse topología compacto abierta y lo que se tendrá es:

Ley exponencial para espacios topológicos. Dados X, Y, Z espacios topológicos, si X es localmente compacto y T_2, existe una biyección

$$Hom(Z \times X, Y) \underset{\psi}{\overset{\phi}{\longleftrightarrow}} Hom(Z, \mathcal{C}(X,Y)) \ ,$$

donde $\mathcal{C}(X,Y)$ tiene la topología compacto abierta.

Definición. Sean X, Y espacios topológicos, $K \subseteq X$ compacto y $U \subseteq Y$ abierto. Sea $S(K,U) = \{f : X \to Y \text{ continua} \mid f(K) \subseteq U\} \subseteq Hom(X,Y)$. La topología compacto abierta en $Hom(X,Y)$ es la que tiene como sub-base a $\beta = \{S(K,U)\}_{\substack{K\subseteq X \text{ compacto} \\ U\subseteq Y \text{ abierto}}}$. Notar que $\forall x \in X$, $S(x,U)$ es un elemento de la sub-base con $K = \{x\}$. Esto nos dice que esta topología es más fina que la topología convergencia puntual.

Proposición 1. La topología compacto abierta cumple 1).

Demostración. Basta probar que si $S(K,U)$ es un abierto de la sub-base, entonces $\phi(f)^{-1}(S(K,U))$ es abierto en Z. Veamos que $(\phi(f)^{-1}(S(K,U))^c$ es cerrado en Z. Como f es continua, $f^{-1}(U) \subseteq Z \times X$ es abierto. Entonces $(f^{-1}(U) \cap Z \times K) \subseteq Z \times K$ es abierto. Luego $(f^{-1}(U) \cap Z \times K)^c$ es cerrado en $Z \times K$. Como K es compacto $p_Z((f^{-1}(U) \cap Z \times K)^c)$ es cerrado en Z. Pero $p_Z((f^{-1}(U) \cap Z \times K)^c) = \{z \in Z \mid \exists k \in K \text{ tal que } f(z,k) \notin U\} = (\phi(f)^{-1}(S(K,U)))^c$. ■

Proposición 2. Si X es localmente compacto y T_2 entonces la topología compacto abierta cumple $2')$.

Demostración. Sea $U \subseteq Y$ abierto, y sea $(f_0, x_0) \in \mathcal{C}(X,Y) \times X$ tal que $ev(f_0, x_0) \in U$. Debemos ver que existe A abierto de $\mathcal{C}(X,Y) \times X$ tal que $(f_0, x_0) \in A$ y $ev(A) \subseteq U$. Tenemos que $x_0 \in f_0^{-1}(U) = W$, con W abierto de X, pues f_0 es continua. Entonces, como X es localmente compacto y Hausdorff, $\exists V \subseteq X$ abierto tal que $x_0 \in V \subseteq \bar{V} \subseteq W$ y $\bar{V}$ es compacto. Sea $A = S(\bar{V}, U) \times V$, notamos que $(f_0, x_0) \in A$ y $ev(A) \subseteq U$. ■

Por lo tanto, hemos probado así la ley exponencial para espacios topológicos. Terminamos este capítulo con una observación sobre esta topología.

Observación. Si $\mathcal{C}'(X,Y)$ es una topología en $Hom(X,Y)$ tal que $ev : \mathcal{C}'(X,Y) \times X \to Y$ es continua, entonces $\mathcal{C}'(X,Y)$ es más fina que $\mathcal{C}(X,Y)$. Esto es porque si $ev : \mathcal{C}'(X,Y) \to Y$ es continua, por la proposición 1, $\phi(ev) : \mathcal{C}'(X,Y) \to \mathcal{C}(X,Y)$ es continua. Pero $\phi(ev)(h)(x) = ev(h,x) = h(x)$, es decir $\phi(ev) = 1_{hom(X,Y)}$.

6.3. Ejercicios

1. Sean X e Y espacios topológicos. Dotamos a $C(X,Y)$ de la topología compacto-abierta $\tau_{c.a.}$. Para cada $y \in Y$, sea $\phi_y : X \to Y$ la función constante con valor y, y sea $\phi : Y \to C(X,Y)$, definida por $\phi(y) = \phi_y$. Entonces ϕ es un homeomorfismo a su imagen y, si Y es Hausdorff, tiene imagen cerrada.

2. *a*) Pruebe que Y es T_0, T_1, T_2 si y sólo si $(C(X,Y), \tau_{c.a.})$ es T_0, T_1, T_2 respectivamente.

   b) Pruebe que Y es regular si y sólo si $(C(X,Y), \tau_{c.a.})$ es regular. [1]

   c) Muestre que si Y es normal, entonces no necesariamente $(C(X,Y), \tau_{c.a.})$ lo es.

[1] *Si $\overline{U} \subseteq V$, entonces $\overline{S(K,U)} \subseteq S(K,V)$.*

3. Sean X e Y espacios topológicos, $A \subseteq X$ subespacio. Dotamos a $C(X,Y)$ y $C(A,Y)$ de la topología compacto-abierta. La función *restricción* $r_A : C(X,Y) \to C(A,Y)$, definida por $r_A(f) = f|_A$, es continua.

4. Sean X, Y y Z espacios topológicos. Dotamos a $C(X,Y)$, $C(Y,Z)$ y $C(X,Z)$ de la topología compacto-abierta. Si Y es localmente compacto y Hausdorff, entonces la función *composición* $\circ : C(Y,Z) \times C(X,Y) \to C(X,Z)$, definida por $\circ(f,g) = f \circ g$ es continua. [2]

5. Pruebe que si $p : E \to B$ es cociente y X es localmente compacto y Hausdorff, entonces $p \times id : E \times X \to B \times X$ es cociente.

6. Sean X un espacio topológico e (Y,d) un espacio **métrico**. Sobre $C(X,Y)$ se definen las siguientes topologías:

   - τ_f la *topología fina*, cuya base es
   $$\{B(f,\delta) : f \in C(X,Y), \delta : X \to \mathbb{R}_{>0} \text{ continua}\},$$
   donde $B(f,\delta) = \{g \in C(X,Y) : d(f(x),g(x)) < \delta(x)\ \forall x \in X\}$.
   - la *topología de la convergencia uniforme*, cuya base es
   $$\{B^\rho(f,\varepsilon) : f \in C(X,Y), \varepsilon > 0\},$$
   donde ρ es la distancia definida por $\rho(f,g) = \sup\{\bar{d}(f(x),g(x)) : x \in X\}$
   - τ_c la *topología de la convergencia compacta*, cuya base es
   $$\{B_K(f,\varepsilon) : f \in C(X,Y), \varepsilon > 0, K \subseteq X \text{ compacto}\},$$
   donde $B_K(f,\varepsilon) = \{g \in C(X,Y) : d(f(x),g(x)) < \varepsilon\ \forall x \in K\}$

   Pruebe que:

   a) top. fina $\supseteq$ top. conv. uniforme $\supseteq$ top. conv. compacta $\supseteq$ top. conv. puntual

   b) Si X es compacto, entonces las topologías de la convergencia uniforme, de la convergencia compacta y fina coinciden.

   c) Si X es discreto, entonces la topología de la convergencia compacta coincide con la topología de la convergencia puntual

   d) Si X es discreto, entonces $Y^X = C(X,Y)$ y la topología caja coincide con la fina.

   e) (f_n) converge a f con la topología de convergencia compacta si y sólo si para todo $K \subseteq X$ compacto, $f_n|_K$ converge a $f|_K$ con la topología de convergencia uniforme.

   f) La topología de convergencia compacta y la compacto-abierta coinciden.

7. *a*) Sea $f_n : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ la sucesión de funciones definida por $f_n(x) = \dfrac{1}{nx}$. Decida con cuáles de las topologías del ejercicio anterior (f_n) tiene límite.

---
[2] *Si $f \circ g \in S(K,U)$, encontrar V tal que $g(K) \subseteq V$ y $f(\overline{V}) \subseteq U$.*

b) Sea $f_n : (-1,1) \to \mathbb{R}$ la sucesión de funciones definida por $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^k$. Pruebe que la (f_n) converge con la topología de convergencia compacta (y concluya que la función límite es continua), pero que no converge con la topología uniforme.

8. Pruebe que el conjunto de las funciones acotadas $\mathcal{B} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ acotada}\}$ no es cerrado en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ con la topología de convergencia compacta pero sí lo es con la topología uniforme.

7

Adjunción y CW-complejos

7.1. Espacios de adjunción

Definición. Sean X, Y espacios topológicos, $A \subseteq X$ subespacio cerrado y $f : A \to Y$ continua. El espacio de adjunción $X \bigcup_f Y$ es el que se obtiene de $X \coprod Y$ identificando los puntos $a \in A$ con $f(a) \in Y$. Concretamente, si R es la relación de equivalencia generada por $a \sim f(a)$, $X \bigcup_f Y = \frac{X \coprod Y}{R}$, la unión disjunta cocientada por esa relación de equivalencia. Esta situación puede representarse en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & Y \arrow[d, "\bar{i}"] \\ X \arrow[r, "\bar{f}"] & X \bigcup\limits_f Y \end{tikzcd} .$$

Como las inclusiones a la unión disjunta son finales, y el cociente es final, $\{\bar{i}, \bar{f}\}$ resulta una familia final. Es decir que $U \subseteq X \bigcup_f Y$ es abierto (resp. cerrado) si y sólo si $\bar{i}^{-1}(U) \subseteq Y$ y $\bar{f}^{-1}(U) \subseteq X$ son abiertos (resp. cerrados). Visto como conjunto, $X \bigcup_f Y$ es la unión disjunta de $X \backslash A$ e Y.

Notar que, como se toma la relación de equivalencia generada por $a \sim f(a)$ y, como la función f no es necesariamente inyectiva, si se tiene $a, b \in A$ tales que $f(a) = f(b)$, esos puntos quedarán automáticamente identificados en el espacio de adjunción. El espacio $X \bigcup\limits_f Y$ es el que está "más cerca" por la derecha del diagrama original:

Proposición. El espacio de adjunción tiene la siguiente propiedad universal: $\forall Z$, $\forall q_X, q_Y$ tales que $q_Y f = i q_X$, $\exists! q : X \bigcup_f Y \to Z$ tal que

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & Y \arrow[d, "\bar{i}"] \arrow[ddr, bend left, "q_Y"] & \\
X \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[drr, bend right, "q_X"'] & X \bigcup_f Y \arrow[dr, dotted, "\exists! q"] & \\
& & Z
\end{tikzcd}.$$

Demostración. Ejercicio.

Más en general, puede definirse la noción de pushout, que queda ilustrada en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & Y \arrow[d, "\bar{g}"] \arrow[ddr, bend left, "q_Y"] & \\
X \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[drr, bend right, "q_X"'] & P \arrow[dr, dotted, "\exists! q"] & \\
& & Z
\end{tikzcd}.$$

En espacios topológicos, el pushout va a existir, y se va a construir de manera análoga al espacio de adjunción. El espacio P va a ser el cociente del la unión disjunta por la relación R generada por $f(w) \sim g(w)\ \forall w \in W$.

Ejemplos de espacios de adjunción.

1. La unión disjunta de dos espacios es un caso particular de espacio de adjunción.

$$\begin{tikzcd}
\varnothing \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\
X \arrow[r] & X \coprod Y
\end{tikzcd}.$$

2.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_X"] & Y \arrow[d, "1_Y"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}.$$

3.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "i"] & A \arrow[d, "i"] \\
X \arrow[r, "1_X"] & X
\end{tikzcd}.$$

4. Sean $F, G \subseteq X$ subespacios cerrados. $F \cup G$ con la topología de subespacio de X, resulta (por el lema del pegado para cerrados) el espacio de adjunción:

$$\begin{array}{ccc} F \cap G & \xrightarrow{j} & G \\ \downarrow i & & \downarrow \bar{i} \\ F & \xrightarrow{\bar{j}} & F \cup G \end{array} .$$

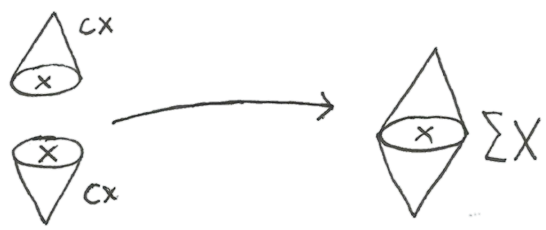
5. Un cociente de un espacio por un subespacio cerrado es un caso particular de espacio de adjunción.

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & * \\ \downarrow i & & \downarrow i \\ X & \xrightarrow{q} & X/A \end{array} .$$

6. Sea $CX = \frac{X \times I}{(x,0) \sim (x',0)}$ el cono de X, es decir el espacio que se obtiene del cilindro $X \times I$ identificando todos los puntos de una de las "tapas". Notar que se tiene una inclusión cerrada $i : X \to CX$ en la otra tapa. Se define la suspensión de X como el siguiente espacio de adjunción (que se obtiene pegando dos conos):

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & CX \\ \downarrow i & & \downarrow \\ CX & \longrightarrow & \sum X \end{array} .$$

$\sum X$ denota la suspensión de X.



Ejercicio.

1. $CS^n = D^{n+1}$.

2. $\sum S^n = S^{n+1}$.

3. $CD^n = D^{n+1}$.

4. $\sum D^n = D^{n+1}$.

Solución.

1. Definimos $f : S^n \times I \to D^{n+1}$ con $f(x_1, ..., x_{n+1}, t) = ((1-t)x_1, ..., (1-t)x_{n+1})$. Es claro que f es continua y sobreyectiva. Además f se factoriza por el cociente CS^n, porque $f(x_1, ..., x_{n+1}, t) = f(y_1, ..., y_{n+1}, s)$ si $t = s = 1$ o $t = s$ y $x_i = y_i$ $\forall i$. Esta $\bar{f}$ que sale de CS^n es biyectiva y además es homeomorfismo porque CS^n es compacto y D^{n+1} es T_2.

2. Por la parte anterior, basta ver que pegar dos D^{n+1} por sus bordes es homeomorfo a S^{n+1}. Esto se ve proyectando los bordes de los discos al ecuador, y sus interiores a ambos hemisferios (uno cada uno). Luego es claro que pasa bien al cociente y se tiene un homeomorfismo por las mismas razones.

Veamos ahora dos ejemplos más de espacios de adjunción.

Unión wedge de espacios. Sean X e Y espacios topológicos T_1, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, $A = \{x_0\} \subseteq X$ y $f : A \to Y$ la función $f(x_0) = y_0$. Obtenemos

$$\begin{array}{ccc} \{x_0\} & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{q} & X \vee Y \end{array}.$$

$X \vee Y$ es el wedge de X e Y, y consiste en pegarlos en un punto en común.

Adjunción de celdas. Si consideramos $A = S^{n-1} \hookrightarrow D^n = X$ tenemos

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{f} & Y \\ \big\downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow \\ D^n & \xrightarrow{\bar{f}} & D^n \bigcup_f Y \end{array}.$$

Notamos $D^n \bigcup_f Y = Y \cup e^n$, y decimos que es el espacio que se obtiene de Y adjuntándole una n-celda. La función f se llama función de adjunción de la celda, y $\bar{f}$ la función característica de la celda. La n-celda cerrada es $e^n = \bar{f}(D^n) \subseteq Y \cup e^n$.

Este último ejemplo es de mucho interés y vamos a desarrollarlo con más profundidad. Para comenzar a asimilarlo, vamos a ver qué sucede al adjuntar celdas de dimensión $n = 0, 1, 2$:

$n = 0$ Adjuntar una 0-celda a un espacio Y, es tomar la unión disjunta con un punto ($D^0 = \{*\}$ y, por convención, $S^{-1} = \varnothing$).

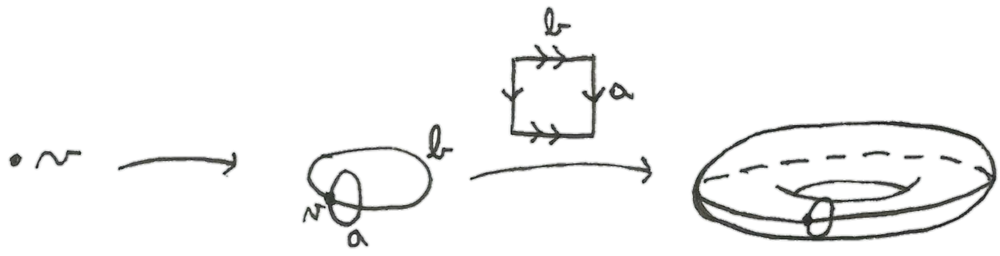
$n = 1$ Adjuntar una 1-celda es pegar un intervalo por sus dos extremos, los extremos pueden estar pegados en un mismo punto o en puntos distintos. Las siguientes figuran ilustran las posibles situaciones:

$n = 2$ Adjuntar una 2-celda ya es un poco más complejo. Un ejemplo elemental es pegar un D^2 a un S^1 mediante la identidad en el borde, lo que nos devuelve un D^2. Es decir que rellenamos el agujero. Un caso un poco más interesante es el plano proyectivo: tomando $Y = S^1$ y $f : S^1 \to S^1$ con $f(x) = x^2$ se tiene:

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & S^1 \arrow[d] \\ D^2 \arrow[r, "\bar{f}"] & \mathbb{R}P^2 \end{tikzcd}.$$

Más en general, el espacio proyectivo de dimensión n van a ser las rectas que pasan por el origen en $\mathbb{R}^{n+1}$. Esto es equivalente a $\frac{S^n}{x \sim -x}$, es decir al espacio que se obtiene de la esfera n-dimensional identificando las antípodas.

Otro ejemplo interesante es el toro, que puede construirse al adjuntarle una 2-celda a un wedge de dos S^1 como se muestra en la siguiente ilustración



Proposición. Sea $A \subseteq X$ cerrado y $f : A \to Y$ continua. Consideremos el espacio de adjunción

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & Y \arrow[d, "\bar{i}"] \\ X \arrow[r, "\bar{f}"] & X \bigcup_f Y \end{tikzcd}.$$

Entonces:

1. $\bar{i} : Y \to X \bigcup_f Y$ es subespacio cerrado.

2. $\bar{f}|_{X \setminus A} : X \setminus A \to X \bigcup_f Y$ es subespacio abierto.

Demostración.

1. Es claro que $\bar{i}$ es continua e inyectiva, veamos que es cerrada. Sea $F \subseteq Y$ cerrado, debemos ver que $\bar{i}(F) \subseteq X \bigcup_f Y$ es cerrado. Como $X \bigcup_f Y$ tiene la topología final con respecto a $\bar{i}$ y $\bar{f}$, basta tomar preimagen por ellas:
   - $\bar{i}^{-1}(\bar{i}(F)) = F$, que es cerrado en Y.
   - $\bar{f}^{-1}(\bar{i}(F)) = f^{-1}(F)$, que es cerrado en X, pues A es cerrado.
2. Nuevamente la dificultad está en ver que es abierta. Sea $U \subseteq X \backslash A$ abierto, queremos ver que $\bar{f}|_{X\backslash A}(U) = \bar{f}(U)$ es abierto:
   - $\bar{f}^{-1}(\bar{f}(U)) = U$, que es abierto en X, pues A es cerrado.
   - $\bar{i}^{-1}(\bar{f}(U)) = \varnothing$. ■

Observación. Si X e Y son T_2, $X \bigcup_f Y$ no es necesariamente T_2.

Ejemplo. Si tenemos

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \longrightarrow & * \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow \\ \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}/\mathbb{Q} \end{array},$$

$\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$ son T_2, pero su cociente no.

Ejercicio. Pensar un ejemplo con A cerrado. (pista: T_2, pero no T_3)

Definición. Sea $A \subseteq X$ un subespacio. Una retracción es una función continua $r : X \to A$ tal que $r \circ i = 1_A$. En este caso A se dice retracto.

Un ejemplo de un subconjunto que no es un retracto es D^1 con $A = S^0$, pues A es disconexo. Más en general vale que $S^{n-1} \subseteq D^n$ no es retracto para ningún n (esto se verá más adelante).

Definición. $A \subseteq X$ subespacio se llama retracto de entorno si $\exists U \subseteq X$ abierto tal que $A \subseteq U$ e $i : A \hookrightarrow U$ es retracto.

Si bien $S^{n-1} \subseteq D^n$ no era retracto, sí es retracto de entorno tomando $U = D^n \backslash 0$ y $r(x) = \frac{x}{||x||}$.

Proposición. Sean X e Y espacios topológicos, $A \subseteq X$ un cerrado y $f : A \to Y$ continua. Si se cumplen estas tres condiciones:

1. X, Y son espacios T_2.
2. $\forall x \in X \backslash A$, $\exists V$ abierto tal que $x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq A^c$ (por ejemplo, si X es T_3 esto se cumple).
3. $A \subseteq X$ es un retracto de entorno.

Entonces $X \bigcup_f Y$ es Hausdorff.

Demostración. Dados $x, y \in X \bigcup_f Y$, debemos separarlos con abiertos disjuntos. Vamos a dividir la demostración en tres casos:

1. Supongamos que $x, y \in X \backslash A$. Como X es T_2, $X \backslash A$ es T_2. Entonces existen W_1, W_2 abiertos disjuntos de $X \backslash A$ tales que $x \in W_1, y \in W_2$. Como $\bar{f}|_{X \backslash A}$ es subespacio abierta, $V_i = \bar{f}(W_i)$ son abiertos disjuntos en $X \bigcup_f Y$ que los separan.

2. Ahora $x \in X \backslash A$ e $y \in Y$. Por hipótesis, existe U abierto de X tal que $x \in U \subseteq \bar{U} \subseteq X \backslash A$. Sean $V_1 = \bar{f}(U)$ y $V_2 = (X \bigcup_f Y) \backslash \overline{U}$. Notamos que $x \in V_1$ y V_1 es abierto porque $\bar{f}|_{X \backslash A}$ es subespacio abierta. Además V_2 es abierto porque:
   - $\bar{i}^{-1}(V_2) = Y$.
   - $\bar{f}^{-1}(V_2) = X \backslash \overline{U}$, que es abierto en X.

3. Por último, supongamos que $x, y \in Y$. Como Y es T_2, $\exists W_1, W_2$ abiertos disjuntos en Y tales que $x \in W_1$, $y \in W_2$. El problema es que $\bar{i}(W_i)$ no es necesariamente abierto en $X \bigcup_f Y$. Consideramos $f^{-1}(W_1), f^{-1}(W_2) \subseteq A$ abiertos en A y disjuntos. Sea $N \subseteq X$ un entorno abierto de A tal que $r : N \to A$ es una retracción. Sean $V_i = r^{-1}(f^{-1}(W_i))$. Son abiertos en X porque son abiertos en N, que es abierto en X. Notamos que como r es una retracción, $V_i \backslash A = V_i \backslash f^{-1}(W_i)$. Consideramos $U_i = \bar{i}(W_i) \cup \bar{f}(V_i \backslash A)$, abiertos disjuntos de $X \bigcup_f Y$, $x \in U_1$, $y \in U_2$. Son abiertos pues:
   - $\bar{i}^{-1}(U_i) = W_i$, que es abierto de Y.
   - $\bar{f}^{-1}(U_i) = \bar{f}^{-1}(\bar{i}(W_i)) \cup \bar{f}^{-1}(\bar{f}(V_i \backslash A)) = f^{-1}(W_i) \cup V_i \backslash A = V_i$, que es abierto en X (en la penúltima igualdad usamos que $\bar{f}|_{X \backslash A}$ es subespacio). ■

Como corolario inmediato de este resultado se deduce que, adjuntarle una n-celda a un espacio Hausdorff da como resultado otro espacio Hausdorff. Esto será utilizado en la sección siguiente.

7.2. CW-complejos

A continuación, vamos a seguir desarrollando la idea de adjntar n-celdas para construir un nuevo tipo de espacios. En el contexto de adjuntar una n-celda tenemos:

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"] & Y \arrow[d, "\bar{i}"] \\ D^n \arrow[r, "\bar{f}"] & Y \cup e^n \end{tikzcd} .$$

Denotamos por $\dot{e}^n = \bar{f}(S^{n-1})$ al borde de la n-celda, y $\mathring{e}^n = e^n - \dot{e}^n$ al interior de la n-celda. Podemos adjuntar más de una celda a la vez:

$$\begin{tikzcd} \coprod\limits_{\alpha \in J_n} S^{n-1} \arrow[r, "\coprod f_\alpha"] \arrow[d, "i"] & Y \arrow[d, "\bar{i}"] \\ \coprod\limits_{\alpha \in J_n} D^n \arrow[r, "\coprod \bar{f}_\alpha"] & Y \bigcup\limits_{\alpha \in J_n} e^n_\alpha \end{tikzcd} .$$

Es claro que $e^n_\alpha \cap e^n_\beta$ puede no ser vacío, pero $e^n_\alpha \cap e^n_\beta = \dot{e}^n_\alpha \cap \dot{e}^n_\beta$ y $\mathring{e}^n_\alpha \cap \mathring{e}^n_\beta = \varnothing$

Corolario. De la proposición anterior se deduce que si Y es T_2, entonces $Y \bigcup_\alpha e^n_\alpha$ es T_2.

Definición. Sea X un espacio topológico. Una estructura de CW-complejo en X es dar una familia de subespacios $X^0 \subseteq X^1 \subseteq ... \subseteq X^n \subseteq ... \subseteq X$ tales que:

1. X^0 es discreto (o equivalentemente, se obtiene de adjuntarle 0-celdas a $\varnothing$).
2. $\forall n$, X^n se obtiene de adjuntarle n-celdas a X^{n-1} (indexadas por J_n).
3. $X = \bigcup\limits_{n \geqslant 0} X^n$ con la topología final.

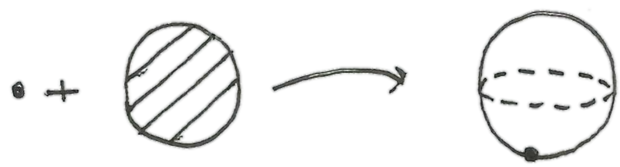
Definición. X se dice CW-complejo si admite una estructura de CW-complejo.

Dado un CW-complejo, vamos a decir que su dimensión es n si $X = X^n$ y $X \neq X^{n+1}$. Es decir, si X tiene celdas de dimensión n, pero no de dimensión mayor. Si la dimensión de X no es finita, decimos que $\dim X = \infty$. Se puede probar que la dimensión está bien definida y no depende de la estructura de CW-complejo elegida. La demostración de este hecho requiere de resultados de homología que figuran al final de las notas. Cuando X tiene finitas celdas se dice finito.

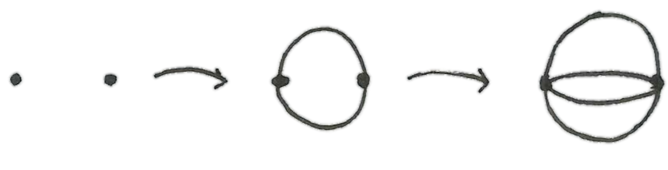
Observación. $\mathring{e}^n_\alpha \cap \mathring{e}^m_\beta = \varnothing \; \forall n, m, \alpha, \beta$. Se deduce fácilmente que si $x \in X$, $\exists! e^n_\alpha$ tal que $x \in \mathring{e}^n_\alpha$ (tomando el mínimo n tal que $x \in X^n$).

Ejemplos.

1. Vamos a ver dos posibles estructuras de CW para S^n. La primera consiste en tomar $X^0 = \{e^0\}$, $X^0 = X^1 = ... = X^{n-1}$ y $X^n = S^n$, adjuntándole una n-celda a X^{n-1}, pegando todo el borde del n-disco en la 0-celda.

   Otra forma es comenzar con $X^0 = \{e^0_1, e^0_2\}$ y para cada n, X^n se obtiene de X^{n-1} adjuntando dos n-celdas como hemisferios de S^n. En este caso, cada *esqueleto* X^k es la esfera k-ésima metida dentro del esqueleto X^{k+1} como su ecuador.

2. $\mathbb{R}$ puede construirse tomando una 0-celda por cada entero, y uniéndolas con 1-celdas.

3. Podemos ir generando los espacios proyectivos de dimensión n-ésima con el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, "q"] \arrow[d, hook] & \mathbb{R}P^{n-1} \arrow[d] \\ D^n \arrow[r] & \mathbb{R}P^n \end{tikzcd}.$$

   De esta forma vemos que cada espacio proyectivo está incluido en el siguente como el esqueleto de una dimensión menor. En particular, $\mathbb{R}P^n$ admite una estructura celular con una k-celda para cada $k \leqslant n$.

Proposición. Sea X un CW-complejo. Si $K \subseteq X$ es compacto, entonces está contenido en un subcomplejo finito. En particular, existen sólo finitas celdas tales que $K \cap \mathring{e}^n_\alpha \neq \varnothing$.

Demostración. Primero vamos a demostrar que K sólo interseca a finitas celdas abiertas de X. Supongamos que no. Entonces existe $S = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq K$ con cada x_i en una celda abierta distinta. Veamos que S es cerrado. Asumiendo que $S \cap X^{n-1}$ es cerrado por inducción en n, entonces para cada celda e^n_α de X, $\varphi^{-1}_\alpha(S)$ es cerrado en ∂D^n_α, y $\phi^{-1}_\alpha(S)$ agrega a lo sumo un punto de S en D^n_α, por lo que $\phi^{-1}_\alpha(S)$ es cerrado en D^n_α. Luego $S \cap X^n$ es cerrado en X^n para cada n, y S es cerrado en X. De la misma manera, cualquier subconjunto de S es cerrado, así que S es discreto. Pero también es compacto al ser un cerrado dentro de K, absurdo.

Como K está contenido en finitas celdas, basta ver que la unión de finitas celdas está en un subcomplejo finito de X. Una unión finita de subcomplejos finitos es un subcomplejo finito, así que el problema se reduce a ver que una celda e^n_α está contenida en un subcomplejo finito. La imagen de φ_α es compacta, luego haciendo inducción en la dimensión, esta imagen está contenida en un subcomplejo finito $A \subseteq X^{n-1}$. Por lo tanto, e^n_α está contenida en el subcomplejo finito $A \cup e^n_\alpha$. ■

Cuando comenzamos con el tema de espacios de adjunción, vimos un resultado que nos permitía saber si la adjunción de espacios Hausdorff resultaba Hausdorff. A partir de él, puede deducirse que todo CW-complejo finito es Hausdorff. Más aún, usando este hecho podemos obtener lo siguiente.

Proposición. Todo CW-complejo es T_2.

Demostración. Ejercicio.

Proposición. Sea X un CW-complejo. Entonces tiene la topología final respecto de $\{e^n_\alpha\}_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ \alpha \in J_n}}$.

Demostración. Sea A un abierto en X. Por la continuidad de las funciones características de cada celda, A va a ser abierto en cada una de ellas. Ahora supongamos que $\phi^{-1}_\alpha(A)$ es abierto para toda celda, veamos que $A \subseteq X$ es abierto. Supongamos por inducción que

$A \cap X^{n-1}$ es abierto. Como $\phi_\alpha^{-1}(A)$ es abierto en D_α^n para todo α, $A \cap X^n$ es abierto en X^n por construcción de X^n:

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\alpha \in J_n} S_\alpha^{n-1} & \xrightarrow{\coprod \varphi_\alpha^n} & X^{n-1} \\ \Big\downarrow i & & \Big\downarrow \bar{i} \\ \coprod_{\alpha \in J_n} D_\alpha^n & \longrightarrow & X^n \end{array} .$$

Entonces, como X tiene la topología final con respecto a los X^n, A es abierto en X. ■

Proposición. Todo CW-complejo es localmente arco conexo.

Demostración. Consideramos un CW-complejo X. Dados $x \in X$ y $x \in U \subseteq X$ abierto, queremos encontrar un entorno abierto y arco conexo V de x con $V \subseteq U$. Para eso vamos trabajar en los n-esqueletos de X. Un subconjunto de X es abierto si y sólo si lo es en cada X^n. Lo que vamos a hacer es ir definiendo V^n inductivamente en cada n-esqueleto de manera que $V^n \cap X^{n-1} = V^{n-1}$ $\forall n$. Esta última condición nos asegura que si cada V^n es abierto en X^n, entonces $V = \bigcup_n V^n$ va a ser abierto en X.

Sean x y U como arriba. Comenzamos por V^0, que va a ser x si $x \in X^0$ y vacío si no. De la misma forma, si $x \in \mathring{e}_\alpha^m$, $V^k = \varnothing$ $\forall k < m$. Ahora construiremos V^m. En $\mathring{e}_\alpha^m$ tenemos la función característica ϕ_α correspondiente que sale de D^n. Como $x \in \mathring{e}_\alpha^m$, $\phi_\alpha^{-1}(x)$ está contenido en una bola abierta B dentro de $\phi_\alpha^{-1}(U)$ con $\overline{B} \subseteq \phi_\alpha^{-1}(U)$. Tomamos como V^m a $\phi_\alpha(B)$, que es abierto, arco conexo, contiene a x, está contenido en U y cumple $V^m \cap X^{m-1} = V^{m-1} = \varnothing$.

Ahora supongamos que ya tenemos V^k definidos $\forall k < n$. Si $e_\alpha^n \cap V^{n-1} \neq \varnothing$, vamos a expandir el abierto radialmente en e_α^n. Podemos suponer que $\overline{\phi_\alpha^{-1}(V^{n-1})} \subseteq \phi_\alpha^{-1}(U)$ (queda claro al ver cómo vamos a construir V^n). Entonces, como ∂D^n es compacto, por el lema del tubo existe $0 < r_\alpha < 1$ tal que $A \backslash D_{1-r_\alpha}^n \subseteq \phi_\alpha^{-1}(U)$, donde $D_{1-r_\alpha}^n$ es el disco de radio $1 - r_\alpha$ y $A = \{\lambda x \mid 0 \leqslant \lambda \leqslant 1, x \in \overline{\phi_\alpha^{-1}(V^{n-1})}\}$. Entonces, dentro de D^n expandimos radialmente a $\partial D^n \cap \phi_\alpha^{-1}(V^{n-1})$ por radio $\frac{r_\alpha}{2}$ (por esto es que podemos pedir $\overline{\phi_\alpha^{-1}(V^{n-1})} \subseteq \phi_\alpha^{-1}(U)$). Haciendo esto para todas las n-celdas, tomando su imagen por las características correspondientes y agregándoselas a V^{n-1} obtenemos V^n, que es claramente abierto, arco conexo, está contenido en U y cumple que $V^n \cap X^{n-1} = V^{n-1}$.

Así tenemos construidos los V^n que queríamos para todo n. Sólo resta ver que $V = \bigcup_n V^n \subseteq U$ es arco conexo. Dados $y, z \in V$, $y \in V^{k_1}$ y $z \in V^{k_2}$ para ciertos k_1, k_2. Entonces ambos pertenecen a $V^{k_1+k_2}$, y los conectamos por allí. Por lo tanto X es localmente arco conexo ■

7.3. Ejercicios

Sean X, Y espacios topológicos, $A \subseteq X$ un subespacio cerrado y $f : A \to Y$ una función continua. Denotaremos por $X \bigcup_f Y$ al espacio de adjunción correspondiente, junto con las funciones naturales $\bar{i} : Y \to X \bigcup_f Y$, $\bar{f} : X \to X \bigcup_f Y$.

1. Pruebe que Y es un retracto de $X \bigcup_f Y$ si y sólo si existe una función $g : X \to Y$ tal que $g|_A = f$. Deduzca que si A es un retracto de X, entonces Y es un retracto de $X \bigcup_f Y$.

2. Si X e Y son compactos, entonces $X\bigcup_f Y$ es compacto.
3. Si X e Y son T_1, entonces $X\bigcup_f Y$ es T_1.
4.
   a) Si A es no vacío y X e Y son conexos, entonces $X\bigcup_f Y$ es conexo.
   b) Si A es no vacío y X e Y son arco-conexos, entonces $X\bigcup_f Y$ es arco-conexo.
   c) Si Y es conexo y si A interseca cada componente conexa de X, entonces $X\bigcup_f Y$ es conexo.
   d) Si A es conexo y no vacío y $X\bigcup_f Y$ es conexo, entonces Y es conexo.
5. Sean $X' \subseteq X$ e $Y' \subseteq Y$ son subespacios tales que $A \subseteq X'$ y $f(A) \subseteq Y'$. Entonces $X'\bigcup_f Y'$ es subespacio de $X\bigcup_f Y$.
6.
   a) Sean Y' un espacio topológico y $g : Y \to Y'$ una función continua. Dado que Y puede verse como un subespacio cerrado de $X\bigcup_f Y$, podemos construir el espacio $\left(X\bigcup_f Y\right)\bigcup_g Y'$. Por otro lado, podemos construir el espacio de adjunción $X\bigcup_{g\circ f} Y$. Pruebe que hay un homeomorfismo natural $\left(X\bigcup_f Y\right)\bigcup_g Y' \cong X\bigcup_{g\circ f} Y$.
   b) Sea ahora $K : X \to X'$ una inclusión cerrada, de manera que tiene sentido el espacio de adjunción $X'\bigcup_f Y$. Entonces $X'\bigcup_f Y \cong X'\bigcup_{\bar{f}}\left(X\bigcup_f Y\right)$.
7. Sean X e Y espacios topológicos y sea $f : X \to Y$ una función continua. Consideremos $f' : X \times \{0\} \to Y$ definida por $f'(x, 0) = f(x)$. Como $X \times \{0\}$ es un subespacio cerrado de $X \times I$, podemos definir el espacio de adjunción $M(f) := Y\bigcup_{f'}(X \times I)$, que se denomina el *cilindro* de f. El *cono* de f se define como $C(f) = M(f)/(X \times 1)$.

   Pruebe que si X e Y son T_2, entonces tanto $M(f)$ como $C(f)$ son T_2.
8. Exhiba varias estructuras de CW-complejo para el plano proyectivo $\mathbb{R}(P^2)$, S^n, D^n, el toro $S^1 \times S^1$, la banda de Möbius y la botella de Klein.
9. Sean $v, e, f \in \mathbb{N}$ tales que $v - e + f = 2$. Construya una estructura celular de S^2 que tenga v 0-celdas, e 1-celdas y f 2-celdas.
10. Sea X un CW-complejo finito. Pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes:
    - X^1 es conexo.
    - X es arco-conexo.
    - X es conexo.
11. Sean X, Y CW-complejos finitos. Pruebe que $X \times Y$ tiene estructura de CW-complejo.
12. Sean X, Y CW-complejos finitos. Una función continua $f : X \to Y$ se dice *celular* si para cada $n \geqslant 0$ cumple $f(X^n) \subseteq Y^n$. Pruebe que si $A \subseteq X$ es un subcomplejo y $f : A \to Y$ es un morfismo celular, entonces el espacio de adjunción $X\bigcup_f Y$ tiene una estructura de CW-complejo.

    Concluya que el cociente de un CW-complejo por un subcomplejo tiene estructura de CW-complejo.

8

Conceptos básicos de categorías

8.1. Categorías

Dado que en la segunda parte del curso veremos algunos invariantes topológicos que tienen propiedades funtoriales, es conveniente desarrollar previamente un poco de lenguaje categórico. Por otro lado, entender las nociones básicas de la teoría de categoría hará más sencillo el estudio de algunas propiedades básicas de los grupoides fundamentales de los espacios.

Definición. Una categoría $\mathcal{C}$ consiste de:

1. Una clase $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ de objetos.
2. Para cada $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, un conjunto $\mathcal{C}(X,Y)$ de morfismos de X a Y (también llamados "flechas").
3. Una regla de composición de flechas: $\forall X, Y, Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(X,Y) \times \mathcal{C}(Y,Z) &\longrightarrow \mathcal{C}(X,Z) \\ (f,g) &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

   que cumple asociatividad y existencia de identidades para cada objeto X de $\mathcal{C}$ (denotadas 1_X).

Definición. Una categoría se dice pequeña si $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ es un conjunto.

Vamos a nombrar algunos ejemplos clásicos para ilustrar el concepto.

Ejemplos de categorías.

1. La categoría **Set** cuyos objetos son los conjuntos, con funciones como flechas.
2. La categoría de espacios topológicos y funciones continuas **Top**.

3. Dado un cuerpo $\mathbb{K}$, $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ es la categoría de $\mathbb{K}$-espacios vectoriales con morfismos $\mathbb{K}$ lineales como flechas.

4. De manera análoga, podemos tomar A un anillo y cosiderar la categoría de A-módulos a izquierda **A-mod**.

5. La categoría $\mathbf{Set}_*$ de conjuntos punteados con

$$\mathrm{Obj}(\mathbf{Set}_*) = \{(A, a_0) \mid A \text{ conjunto}, a_0 \in A\}$$

$$\mathbf{Set}((A, a_0), (B, b_0)) = \{f : A \to B \mid f(a_0) = b_0\}.$$

6. La misma idea la podemos aplicar a **Top** para obtener $\mathbf{Top}_*$, la categoría de espacios topológicos punteados. Tenemos

$$\mathrm{Obj}(\mathbf{Top}_*) = \{(A, a_0) \mid A \text{ espacio topológico}, a_0 \in A\}$$

$$\mathbf{Top}((A, a_0), (B, b_0)) = \{f : A \to B \mid f(a_0) = b_0\}.$$

7. Generalizando este concepto, tenemos **Par-top**, la categoría de pares topológicos donde

$$\mathrm{Obj}(\mathbf{Par\text{-}top}) = \{(X, A) \mid X \text{ espacio topológico}, A \subseteq X\}$$

$$\mathbf{Par\text{-}top}((X, A), (Y, B)) = \{f : X \to Y \mid f(A) \subseteq B\}.$$

8. Un preorden es una categoría pequeña $\mathbf{P}$ tal que $\forall X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathbf{P})$, $\#\mathbf{P}(X, Y) \leqslant 1$. Esto equivale a dar un conjunto P y una relación $\leqslant$ reflexiva y transitiva.

Definición. Sea $\mathcal{C}$ una categoría, $f \in \mathcal{C}(a, b)$ tiene inversa a derecha si $\exists g \in \mathcal{C}(b, a)$ tal que $f \circ g = 1_b$. Análogamente, tiene inversa a izquierda si $\exists h \in \mathcal{C}(b, a)$ tal que $h \circ f = 1_a$.

Observación. Si $f \in \mathcal{C}(a, b)$ tiene inversa a ambos lados, entonces tiene inversa. Además su inversa es única y se nota f^{-1}. En este caso a f se lo llama un isomorfismo.

Definición. Dos objetos de una categoría se dicen isomorfos si existe un isomorfismo entre ellos.

Observación. Un poset P es una categoría pequeña tal que $\forall a, b \in \mathrm{Obj}(P)$, $\#P(a, b) \leqslant 1$ y no existen $a, b \in \mathrm{Obj}(P)$ con $a \neq b$ isomorfos.

Definición. Un grupoide es una categoría pequeña tal que toda flecha es un isomorfismo.

8.2. Funtores

Ahora que ya tenemos establecida la noción de categoría, nos interesa ver cómo se relacionan entre ellas. Para eso vamos a introducir el concepto de funtor.

Definición. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ dos categorías. Un funtor (covariante) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ le asigna a cada objeto $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ un objeto $F(A) \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$ y a cada $f \in \mathcal{C}(A, B)$ una $F(f) \in \mathcal{D}(F(A), F(B))$ que cumple:

1. $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$.
2. $F(1_A) = 1_{F(A)}$.

Observación. Dados $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor y $f \in \mathcal{C}(A, b)$ un isomorfismo, entonces $F(f) \in \mathcal{D}(F(A), F(B))$ es un isomorfismo. En particular, si A y B son isomorfos, $F(A)$ y $F(B)$ lo son.

Vamos a ilustrar con algunos ejemplos entre los cuales se encuentran construcciones que ya aparecieron a lo largo de las notas.

Ejemplos.

1. Si P, P' son pre-óredenes o posets, entonces dar un funtor $F : P \to P'$ es equivalente a dar un morfismo de orden.
2. El π_0 que estudiamos cuando vimos arco conexión es un funtor:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{Top} & \xrightarrow{\pi_0} & \mathbf{Set} \\ X & \longmapsto & \pi_0(X) \\ f & \longmapsto & f_* : \pi_0(X) \to \pi_0(Y) \end{array},$$

   donde $f_*[x] = [f(x)]$.

3. Podemos definir el funtor π_0, pero para espacios topológicos punteados:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{Top}_* & \xrightarrow{\pi_0} & \mathbf{Set}_* \\ (X, x_0) & \longmapsto & (\pi_0(X), [x_0]) \\ f : (X, x_0) \to (Y, y_0) & \longmapsto & f_* : (\pi_0(X), [x_0]) \to (\pi_0(Y), [y_0]) \end{array}.$$

4. En general, los functores olvido van a ignorar alguna estructura de la categoría saliente. en el caso de espacios topológicos tenemos:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{Top} & \xrightarrow{U} & \mathbf{Set} \\ X & \longmapsto & X \\ f & \longmapsto & f_* \end{array},$$

   Donde X y f_* son el mismo conjunto y la misma función, pero vista cono función entre conjuntos.

5. También podemos ir en el sentido opuesto:

$$\begin{aligned} \mathbf{Set} &\longrightarrow \mathbf{Top} \\ X &\longmapsto X \quad , \\ f &\longmapsto f* \end{aligned}$$

donde a X lo dotamos con la topología indiscreta.

6. Dada una categoría $\mathcal{C}$ y $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, se tiene el funtor representable

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &\xrightarrow{\mathcal{C}(X,\_)} \mathbf{Set} \\ Y &\longmapsto \mathcal{C}(X,Y) \qquad , \\ f: Y \to Z &\longmapsto f_*: \mathcal{C}(X,Y) \to \mathcal{C}(X,Z) \end{aligned}$$

donde $f_*(h) = f \circ h$.

7. Fijado un $n \in \mathbb{N}$, podemos definir un funtor F que vaya de cuerpos en grupos por $F(K) = \mathrm{Gl}(n,K)$, y que a un morfismo de cuerpos $f : K \to K'$ lo mande a $f_* : \mathrm{Gl}(n,K) \to \mathrm{Gl}(n,K')$, que aplica f coeficiente a coeficiente.

8. Otro funtor que va de cuerpos en grupos es tomar el grupo multiplicativo del cuerpo. Es decir $G(K) = K^*$. Los morfismos de cuerpos son en particular morfismos del grupo multiplicativo, así que nos quedamos con ellos mismos.

8.3. Grupoides

Si bien el estudio de categorías puede profundizarse, a nosotros nos van a interesar principalmente un tipo de categorías, los grupoides. Recordamos que los grupoides son categorías pequeñas en las que todas las flechas son isomorfismos.

En grupoides vamos a denotar la composición al revés. Es decir, dado un grupoide $\mathcal{G}$ y dados $\omega \in \mathcal{G}(a,b), \omega' \in \mathcal{G}(b,c)$, escribimos $\omega' \circ \omega = \omega * \omega'$. A veces vamos a notar a la identidad de $\mathcal{G}(a,a)$ como e_a. Además vamos a escribir $\mathcal{G}_a = \mathcal{G}(a,a)$. Como todas las flechas tienen inverso, dado ω vamos a denotar $\bar{\omega}$ a su inverso.

Observación. Con la notación recién establecida, $(\mathcal{G}_\alpha, *, e_a)$ es un grupo para todo $\alpha \in \mathrm{Obj}(\mathcal{G})$.

Observación. Un grupo puede pensarse como un grupoide con un solo objeto.

Definición. $\mathcal{G}$ se dice conexo si $\forall a, b \in \mathrm{Obj}(\mathcal{G}), \mathcal{G}(a,b) \neq \emptyset$.

Dado $\mathcal{G}$ podemos considerar las componentes $\pi_0(\mathcal{G})$, donde dados dos objetos a y b, $[a] = [b]$ si y sólo si $\mathcal{G}(a,b) \neq \emptyset$.

Definición. $\mathcal{G}$ se dice simplemente conexo si $\#\mathcal{G}(a,b) = 1 \ \forall a, b \in \mathrm{Obj}(\mathcal{G})$.

Observaciones.

1. Sea $\mathcal{G}$ un grupoide, $a, b \in \mathrm{Obj}(\mathcal{G})$, $\alpha \in \mathcal{G}(a, b)$. Se tiene un isomorfismo de grupos $\hat{\alpha} : \mathcal{G}_a \to \mathcal{G}_b$ dado por $\hat{\alpha}(\omega) = \hat{\alpha} * \omega * \alpha$. El inverso de $\hat{\alpha}$ va a ser $\hat{\bar{\alpha}}$.

2. En un grupoide conexo $\mathcal{G}$ tomamos $a, b, a', b' \in \mathrm{Obj}(\mathcal{G})$. Entonces tenemos una biyección $\phi : \mathcal{G}(a, b) \to \mathcal{G}(a', b')$ dada por $\phi(\epsilon) = \alpha * \epsilon * \beta$ con $\alpha \in \mathcal{G}(a', a)$ y $\beta \in \mathcal{G}(b, b')$.

Proposición. Sea $\mathcal{G}$ un grupoide, $a, b \in Obj(\mathcal{G})$ en la misma componente conexa ($\mathcal{G}(a, b) \neq \varnothing$). Entonces $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{G}(a, b)$, $\hat{\alpha} = \hat{\beta} \iff \mathcal{G}_a$ es abeliano.

Demostración.

$\Rightarrow$) Dados $\omega, \omega' \in \mathcal{G}_a$, queremos ver que $\omega * \omega' = \omega' * \omega$. Es decir $\omega * \omega' * \bar{\omega} = \omega' \; \forall \omega, \omega'$. Esto equivale a ver que $\hat{\omega} : \mathcal{G}_a \to \mathcal{G}_a$ es la identidad $\forall \omega \in \mathcal{G}_a$. Elegimos $\alpha \in \mathcal{G}(a, b)$ y tenemos $\omega = \alpha * \bar{\alpha} * \omega = \alpha * \bar{\beta}$ con $\beta = \bar{\omega} * \alpha \in \mathcal{G}(a, b)$. Sabemos que $\hat{\alpha} = \hat{\beta} : \mathcal{G}_a \to \mathcal{G}_b$. Como $\omega = \alpha * \bar{\beta}$, $\hat{\omega} = \widehat{\alpha * \bar{\beta}} = \hat{\alpha} \circ \hat{\beta}^{-1} = 1$.

$\Leftarrow$) Sean $\alpha, \beta \in \mathcal{G}(a, b)$. Tenemos que $\alpha * \bar{\beta} \in \mathcal{G}_a$, y como $\mathcal{G}_a$ es abeliano $\Rightarrow \widehat{\alpha \circ \bar{\beta}} = 1 \Rightarrow \hat{\alpha} \circ \hat{\beta}^{-1} = 1 \Rightarrow \hat{\alpha} = \hat{\beta}$. ■

Definición. Un morfismo de grupoides $F : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ es un funtor entre las categorías.

8.4. Transformaciones naturales

Definición. Sean $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{H}$ funtores. Una transformación natural $\eta : F \to G$ le asigna a cada objeto $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ una flecha $\eta_A : F(A) \to G(A)$ en $\mathcal{D}$ tal que $\forall h \in \mathcal{C}(A, B)$

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(h)"] \arrow[d, "\eta_A"] & F(B) \arrow[d, "\eta_B"] \\ G(A) \arrow[r, "G(h)"] & G(B) \end{tikzcd}$$

conmuta en $\mathcal{D}$.

La transformación natural $\eta : F \to G$ se dice isomorfismo natural si $\eta_A : F(A) \to G(A)$ es un isomorfismo para todo $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.

Ejemplos.

1. Sean $\mathcal{C} = \mathcal{D} = \mathbf{FVect}_K$ (K-espacios vectoriales de dimensión finita). Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ el funtor identidad, y $G : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ dado por tomar doble dual. Es decir $G(V) = V^{**}$. Definimos una transformación natural $\eta : F \to G$ con $V \xrightarrow{\eta_V} V^{**}$ el morfismo natural

entre un espacio vectorial de dimensión finita y su doble dual. Entonces sabemos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{h} & W \\ \downarrow{\scriptstyle \eta_V} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_W} \\ V^{**} & \xrightarrow{h^{**}} & W^{**} \end{array}.$$

Además, como η_V es un isomorfismo de espacio vectoriales para todo V, η es un isomorfismo natural.

2. Consideramos F : **Cuerpos** $\to$ **Gr** dado por $F(K) = \mathrm{Gl}(n, K)$ y G : **Cuerpos** $\to$ **Gr** dado por $G(K) = K^*$. Tenemos la transfomación natural $\det : F \to G$ con $\det_K : \mathrm{Gl}(n, K) \to K^*$ la función determinante usual.

9

Grupo fundamental

9.1. Homotopías

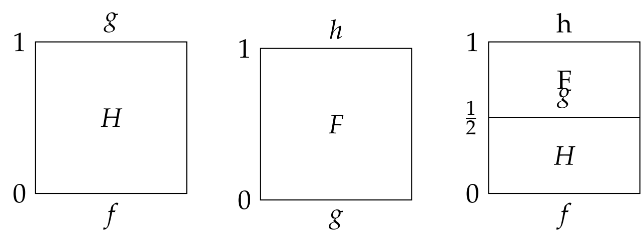
Definición. Sean $f, g : X \to Y$ funciones continuas. Una homotopía de f a g es una función continua $H : X \times I \to Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$ $\forall x \in X$. La notamos $H : f \simeq g$.

Si existe una homotopía de f a g, decimos que f es homotópica a g y lo notamos $f \simeq g$. Observamos que, dada una homotopía H, para cada $t \in I$ se tiene una función continua $H_t : X \to Y$ con $H_t(x) = H(x, t)$.

Dada una homotopía $H : X \times I \to Y$, $H : f \simeq g$, podemos definir una nueva homotopía $\bar{H}$ tal que $\bar{H} : g \simeq f$ de la siguiente manera: $\bar{H}(x, t) = H(x, 1 - t)$. Además podemos definir la composición vertical de homotopías $H : f \simeq g$, $F : g \simeq h$ como:

$$H \underset{V}{*} F(x,t) = \begin{cases} H(x, 2t) & 0 \leqslant t \leqslant 1/2 \\ F(x, 2t-1) & 1/2 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases} .$$

Gráficamente esto puede ilustrarse con los siguientes diagramas:



Proposición. $\simeq$ es una relación de equivalencia.

Ejemplo. Dado $C \subset \mathbb{R}^n$ un convexo, X un espacio topológico cualquiera y $f, g : C \to X$ dos funciones continuas, entonces $H : X \times I \to C$, $H(x, t) = tg(x) + (1 - t)f(x)$, cumple $H : f \simeq g$.

Proposición. Sean $f_0, f_1 : X \to Y$, $g_0, g_1 : Y \to Z$. Si $f_0 \simeq f_1$ y $g_0 \simeq g_1$, entonces $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$.

Demostración. Es claro que basta ver las siguientes implicaciones:

$$(1)\ f_0 \simeq f_1 \Rightarrow g \circ f_0 \simeq g \circ f_1.$$

$$(2)\ g_0 \simeq g_1 \Rightarrow g_0 \circ f \simeq g_1 \circ f.$$

(1) Sea $H : f_0 \simeq f_1$. Tenemos que $g \circ H : g \circ f_0 \simeq g \circ f_1$.

(2) Sea $G : g_0 \simeq g_1$. Consideramos $F := H \circ (f, id) : X \times I \to Z$, y $F : g_0 \circ f \simeq g_1 \circ f$. ■

Gracias a esta proposición y a que $\simeq$ es una relación de equivalencia, podemos definir la categoría $hTop$ compuesta por $Obj(hTop) = Obj(Top)$ y $Hom_{hTop}(X, Y) = \{[f] \mid f : X \to Y \text{ continua}\}$, donde $[f] = [g]$ si $f \simeq g$.

Definición. Una función continua $f : X \to Y$ se dice equivalencia homotópica si $\exists g : Y \to X$ continua tal que $gf \simeq 1_X$ y $fg \simeq 1_Y$. Decimos que X e Y son homotópicamente equivalentes (o que tienen el mismo tipo homotópico) si existe una equivalencia homotópica $f : X \to Y$. Lo notamos $X \simeq Y$.

Observación. $X \simeq Y$ si y sólo si son isomorfos en $hTop$.

Ejemplos.

1) Si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces es una equivalencia homotópica.

2) $i : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ es una equivalencia homotópica con $r : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{S}^{n-1}$ definida por $r(x) = \frac{x}{||x||}$. Es claro que $r \circ i = id_{\mathbb{S}^{n-1}}$, veamos que $i \circ r \simeq id_{\mathbb{R}^n \backslash \{0\}}$. Definimos $H : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \times I \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ como $H(x, t) = tx + (1 - t)\frac{x}{||x||}$. Es fácil chequear que H nunca vale 0 y por lo tanto está bien definida.

Definición. Una función continua $f : X \to Y$ se dice null homotópica si $f \simeq cte_{y_0}$ para algún $y_0 \in Y$.

Definición. X se dice contráctil si $X \simeq *$.

Proposición. Son equivalentes:

(1) X es contráctil.

(2) 1_X es null homotópica.

(3) $1_X \simeq cte_x\ \forall x \in X$.

(4) $\forall Z$ espacio topológico, $\forall f : Z \to X$ continua, $\forall x \in X$, $f \simeq cte_x$.

(5) $\forall Z$ espacio topológico, $\forall f : X \to Z$ continua, $f \simeq cte_z$ para algún $z \in Z$.

Demostración.

(1) $\Rightarrow$ (2) Sean $f : X \to *$ y $g : * \to X$ las funciones de la equivalencia. Entonces $1_X \simeq g \circ f = cte_{g(*)}$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Como $H : 1_X \simeq cte_{x_0}$, $H(x_1, t)$ es un camino de x_1 a x_0. Luego $cte_x \simeq cte_y$ $\forall x, y \in X$. Entonces $1_X \simeq cte_{x_0} \simeq cte_x$ $\forall x \in X$.

(3) $\Rightarrow$ (4) $f = 1_X \circ f \simeq cte_x \circ f = cte_x$ $\forall x \in X$.

(4) $\Rightarrow$ (5) $f = f \circ 1_X \simeq f \circ cte_x \simeq cte_{f(x)}$.

(5) $\Rightarrow$ (1) Consideramos $Z = X$ y $1_X : X \to X$. Sea $x \in X$ tal que $1_X \simeq cte_x$. Tomemos ahora $f : X \to *$ y $g : * \to X$ tal que $g(*) = x$. Entonces $fg = 1_*$ y $gf = cte_x \simeq 1_X$. ■

Ejemplos.

1) $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo es contráctil.

2) El peine es contráctil.

Muchas veces es necesario trabajar con el concepto de homotopía relativa. Así como una homotopía es una deformación continua de una función en otra, la homotopía relativa a un subespacio es una deformación que en todo instante de tiempo deja fijo al subespacio en cuestión.

Definición. $A \subset X$ subespacio, $f, g : X \to Y$ continuas, $f|_A = g|_A$. Decimos que $f \simeq g$ rel A si existe $H : X \times I \to Y$ continua tal que $H : f \simeq g$ y $H(a, t) = f(a) = g(a)$ $\forall a \in A$ $\forall t \in I$.

Un caso particular es cuando $A = \{x_0\}$ con $x_0 \in X$. En esta situación, notamos $f \simeq g$ rel x_0.

Teorema. $f : \mathbb{S}^n \to X$ continua, $p_0 \in \mathbb{S}^n$. Son equivalentes:

(1) f es null homotópica.

(2) f se extiende continuamente a $\mathbb{D}^{n+1}$.

(3) $f \simeq cte$ rel p_0.

Demostración.

(1) $\Rightarrow$ (2) Como f es null homotópica, existe $H : \mathbb{S}^n \times I \to X$ continua tal que $H : f \simeq c_{x_0}$ con $x_0 \in X$. Consideramos:

$$g(z) = \begin{cases} x_0 & 0 \leqslant ||z|| \leqslant 1/2 \\ H(\frac{z}{||z||}, 2 - 2||z||) & 1/2 \leqslant ||z|| \leqslant 1 \end{cases} .$$

$(2) \Rightarrow (3)$ Necesitamos $H : \mathbb{S}^n \times I \to X$ tal que $H : f \simeq cte_{f(p_0)}$ rel p_0. Sea g la extensión de f a $\mathbb{D}^{n+1}$, consideramos:

$$H(x,t) = g(tp_0 + (1-t)x).$$

Esta H cumple que $H(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = f(p_0) = cte_{p_0}$ y $H(p_0,t) = f(p_0)\ \forall t \in I$.

$(3) \Rightarrow (1)$ No hay nada que hacer. ■

Observación. Por el teorema anterior $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{D}^{n+1}$ es retracto $\Leftrightarrow 1_{\mathbb{S}^n} \simeq cte \Leftrightarrow \mathbb{S}^n$ es contráctil. Más adelante veremos que esto no sucede.

Definiciones.

(1) $A \subset X$ se llama retracto por deformación (rd) si $\exists r : X \to A$ tal que $ri = 1_A \wedge ir \simeq 1_X$. En particular $i : A \hookrightarrow X$ es una equivalencia homotópica.

(2) $A \subset X$ es un retracto por deformación fuerte (rdf) si $\exists r : X \to A$ tal que $ri = 1_A \wedge ir \simeq 1_X$ rel A.

Ejemplos.

1) X espacio topológico, $x_0 \in X$, entonces $\{x_0\} \subset X$ es retracto. Además es rd si y sólo si X es contráctil.

2) $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo, $x_0 \in C$, entonces $\{x_0\} \subset C$ es rdf.

3) Sea P el peine. Entonces $\forall x_0 \in P$, $\{x_0\} \subset P$ es rd. Sin embargo, no siempre es rdf. Por ejemplo si tomamos $x_0 = (0,1)$. Consideremos un entorno abierto U de x_0, disjunto de $I \times \{0\}$. Sea $H : cte_{x_0} \simeq 1_P$ rel x_0. Entonces $H^{-1}(U)$ es un entorno de $\{x_0\} \times I$. Por el lema del tubo, existe un abierto $V \subseteq P$ tal que $\{x_0\} \times I \subseteq V \times I \subseteq H^{-1}(U)$. Esto significa que todos los elementos de V se mantienen en U durante la homotopía. Sin embargo, un punto de la forma $(x,1)$, $x > 0$, debe recorrer un camino hasta x_0, pero no hay ninguno de esos caminos dentro de U.

4) $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ es rdf.

9.2. Grupoide fundamental

Recordamos que dados X espacio topológico, $x_0, x_1 \in X$, un camino de x_0 a x_1 es $\omega : I \to X$ continua con $\omega(0) = x_0$ y $\omega(1) = x_1$.

Observaciones. Con la notación usual y las suposiciones necesarias:

1) $(\omega * \omega') * \omega'' \neq \omega * (\omega' * \omega'')$.

2) $\omega * e_{x_1} \neq \omega$.

3) $\omega * \bar{\omega} \neq e_{x_0}$.

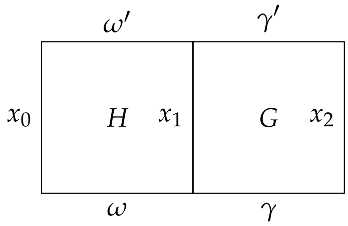
Definición. Sean ω, ω' caminos en X de x_0 a x_1. Decimos que son homotópicos como caminos (y denotamos $\omega \underset{p}{\simeq} \omega'$) si $\omega \simeq \omega'$ rel $\{0,1\}$.

Es decir $\exists H : I \times I \to X$ tal que $H(s,0) = \omega(s)$, $H(s,1) = \omega'(s)$, $H(0,t) = x_0$, $H(1,t) = x_1$ $\forall t \in I$. Observamos que H_t es un camino de x_0 a x_1 $\forall t \in I$.

Proposición. Ser homotópicos como caminos es una relación de equivalencia en el conjunto de caminos de x_1 a x_0.

Proposición. $\underset{p}{\simeq}$ se lleva bien con la composición de caminos $*$. Es decir: $\omega \underset{p}{\simeq} \omega'$, $\gamma \underset{p}{\simeq} \gamma'$, $\omega(1) = \gamma(0) \Rightarrow \omega * \gamma \underset{p}{\simeq} \omega' * \gamma'$.

Demostración. Sean $H : \omega \underset{p}{\simeq} \omega'$, $G : \gamma \underset{p}{\simeq} \gamma'$. Observemos el siguiente diagrama:



Consideramos la composición horizontal de H y G como:

$$H \underset{h}{*} G(s,t) = \begin{cases} H(2s,t) & 0 \leqslant s \leqslant 1/2 \\ G(2s-1,t) & 1/2 \leqslant s \leqslant 1 \end{cases} .$$

Es claro que $H \underset{h}{*} G : \omega * \gamma \underset{p}{\simeq} \omega' * \gamma'$. ■

Definición. Dado un espacio topológico X, se define el grupoide fundamental $\pi_1 X$ como la categoría

$$Obj(\pi_1 X) = X,$$

$$\pi_1(X, x_0, x_1) = \{[\omega] \mid \omega \text{ camino de } x_0 \text{ a } x_1\},$$

donde $[\omega] = [\omega']$ si $\omega \underset{p}{\simeq} \omega'$.

Consideramos la aplicación

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0, x_1) \times \pi_1(X, x_1, x_2) &\to \pi_1(X, x_0, x_2) \\ [\omega] \times [\gamma] &\mapsto [\omega * \gamma] \end{aligned}$$

que resulta bien definida por la proposición anterior.

Para ver que $\pi_1 X$ es un grupoide, debemos verificar:

(1) $\forall [\omega] \exists [\bar{\omega}]$ tal que $[\omega] * [\bar{\omega}] = [e_{x_0}]$, $[\bar{\omega}] * [\omega] = [e_{x_1}]$.

(2) $([\omega][\omega'])[\omega''] = [\omega]([\omega'][\omega''])$.

(3) $[e_{x_0}][\omega] = [\omega]$, $[\omega][e_{x_1}] = [\omega]$.

Estas propiedades se deducen del siguiente teorema.

Teorema. $x_0 \xrightarrow{\omega} x_1 \xrightarrow{\omega'} x_2 \xrightarrow{\omega''} x_3$:

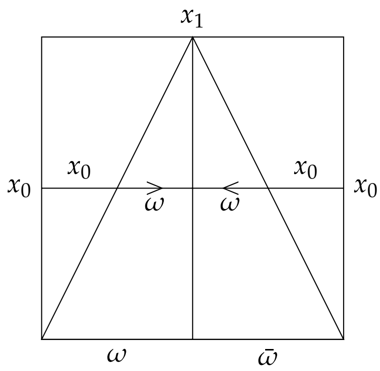
(1) $\omega * \bar{\omega} \underset{p}{\simeq} e_{x_0}$, $\bar{\omega} * \omega \underset{p}{\simeq} e_{x_1}$.

(2) $(\omega * \omega') * \omega'' \underset{p}{\simeq} \omega * (\omega' * \omega'')$.

(3) $\omega * e_{x_1} \underset{p}{\simeq} \omega$, $e_{x_0} * \omega \underset{p}{\simeq} \omega$.

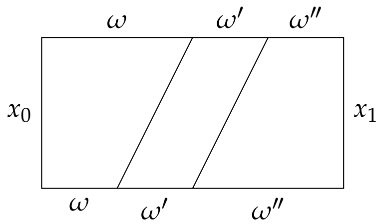
Demostración.

(1)



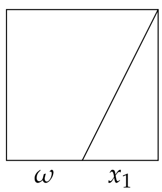
$$H : I \times I \to X,\ H(s,t) = \begin{cases} x_0 & 0 \leqslant s \leqslant t/2 \\ \omega(2s-t) & t/2 \leqslant s \leqslant 1/2 \\ \omega(2-2s-t) & 1/2 \leqslant s \leqslant 1-t/2 \\ x_0 & 1-t/2 \leqslant s \leqslant 1 \end{cases}.$$

(2)



$$H : I \times I \to X,\ H(s,t) = \begin{cases} \omega(\frac{4s}{t+1}) & 0 \leqslant s \leqslant \frac{t+1}{4} \\ \omega'(4(s-\frac{t+1}{4})) & \frac{t+1}{4} \leqslant s \leqslant \frac{t+2}{4} \\ \omega''((\frac{4}{2-t})(s-\frac{t+2}{4})) & \frac{t+2}{4} \leqslant s \leqslant 1 \end{cases}.$$

(3)



$$H : I \times I \to X, H(s,t) = \begin{cases} \omega(\frac{2s}{t+1}) & 0 \leqslant s \leqslant \frac{t+1}{2} \\ x_1 & \frac{t+1}{2} \leqslant s \leqslant 1 \end{cases} . \blacksquare$$

En conclusión, $\pi_1 X$ es un grupoide bien definido.

Ahora, sea $x_0 \in X$, $\pi_1(X, x_0, x_0)$ resulta un grupo con $*$. Lo denotamos $\pi_1(X, x_0)$ y lo llamamos grupo fundamental de X con punto de base en x_0.

Observación. X es arco conexo si y sólo si $\pi_1 X$ es un grupoide conexo. Dado $x_0 \xrightarrow{\alpha} x_1$ un camino, consideramos

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} : \pi_1(X, x_0) &\to \pi_1(X, x_1) \\ [\omega] &\mapsto [\bar{\alpha} * \omega * \alpha]. \end{aligned}$$

Notar que $\hat{\alpha}$ es un isomorfismo con inversa $\hat{\bar{\alpha}}$. En particular, si X es arco conexo, entonces $\pi_1(X, x_0) \equiv \pi_1(X, x_1)$ $\forall x_0, x_1 \in X$.

Definición. X es simplemente conexo si es arco-conexo y $\pi_1(X, x_0)$=0.

Observación. X es simplemente conexo si y sólo si $\pi_1 X$ es un grupoide simplemente conexo.

Definición. Dada $f : X \to Y$ una función continua, $x_0, x_1 \in X$, definimos

$$\begin{aligned} f_* : \pi_1(X, x_0, x_1) &\to \pi_1(Y, f(x_0), f(x_1)) \\ [\omega] &\mapsto [f \circ \omega]. \end{aligned}$$

Notamos que $f \circ (\omega_1 * \omega_2) = f \circ \omega_1 * f \circ \omega_2$. Así, $f_* : \pi_1 X \to \pi_1 Y$ es un morfismo de grupoides. En particular, para cada $x_0 \in X$, $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ es un morfismo de grupos. Luego nos queda definido el funtor π_1:

$$\begin{aligned} Top &\xrightarrow{\pi_1} Grupoides \\ X &\mapsto \pi_1 X \\ (f : X \to Y) &\mapsto f_* : \pi_1 X \to \pi_1 Y, \end{aligned}$$

donde $\begin{cases} (f \circ g)_* = f_* \circ g_* \\ (1_X)_* = 1_{\pi_1 X} \end{cases}$.

Corolario. Dada $f : X \to Y$ homeomorfismo se tiene que $f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ es un isomorfismo de grupoides. En particular para cada $x_0 \in X$, $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ es un isomorfismo de grupos.

Ejercicio. Sean X espacio topológico, $x_0 \in X$ y $C \subset X$ componente arco conexa que contiene a x_0, entonces la inclusión $i : C \to X$ induce un isomorfismo de grupos $\pi_1(C, x_o) \to \pi_1(X, x_o)$.

Ejercicio. Sean $f : X \to Y$ continua, $x_0, x_1 \in X$ y $x_0 \xrightarrow{\alpha} x_1$ un camino continuo, probar que se obtiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X,x_0) \arrow[r, "f_*^{x_0}"] \arrow[d, "\hat{\alpha}"'] & \pi_1(Y,f(x_0)) \arrow[d, "\widehat{f\circ\alpha}"] \\
\pi_1(X,x_1) \arrow[r, "f_*^{x_1}"'] & \pi_1(Y,f(x_1))
\end{tikzcd}$$

Lema. Sean $f, g : X \to Y$ funciones continuas, tales que $f \simeq g$ y sea $H : f \simeq g$ una homotopía entre f y g. Sea $x_0 \in X$ y α=$H_{x_0} : I \to Y$ definida por $\alpha(t) = H(x_0, t)$ el camino inducido $f(x_0) \xrightarrow{\alpha} g(x_0)$. Entonces se tiene un diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X,x_0) \arrow[rr, "f_*"] \arrow[dr, "g_*"'] & & \pi_1(Y,f(x_0)) \arrow[dl, "\hat{\alpha}"] \\
& \pi_1(Y,g(x_0)) &
\end{tikzcd}$$

Es decir $g_*[w] = \hat{\alpha} \circ f_*[w]$.

Demostración. Para la demostración de este lema debemos ver que para todo w, lazo de x_0, $[g \circ w] = [\bar{\alpha} * f \circ w * \alpha]$. Es decir $g \circ w$ y $\bar{\alpha} * f \circ w * \alpha$ son homotópicos como caminos. Para ello definimos $\bar{\alpha}_t : I \to Y$ dada por $\bar{\alpha}_t(s) = \bar{\alpha}((1-t)s) = \alpha(1-(1-t)s)$ para cada $t \in [0,1]$.

Observemos que $\bar{\alpha}_t$ es un camino desde $g(x_0)$ a $\alpha(t)$. En efecto es claro que $\bar{\alpha}_t$ es una función continua y $\bar{\alpha}_t(0) = g(x_0)$ y $\bar{\alpha}_t(1) = \alpha(t)$.

Definimos entonces $G : I \times I \to Y$, como $G(s,t) = (\bar{\alpha}_t * H_t \circ w * \alpha_t)(s)$, veamos que G es una homotopía entre $\bar{\alpha} * f \circ w * \alpha$ y $e_{g(x_0)} * g \circ w * e_{g(x_0)}$ y que además $G(0,t) = G(1,t) = g(x_0)$;

$$G(s,0) = (\bar{\alpha}_0 * H_0 \circ w * \alpha_0)(s) = (\bar{\alpha} * f \circ w * \alpha)(s),$$

$$G(s,1) = (\bar{\alpha}_1 * H_1 \circ w * \alpha_1)(s) = (e_{g(x_0)} * g \circ w * e_{g(x_0)})(s),$$

$$G(0,t) = (\bar{\alpha}_t * H_t \circ w * \alpha_t)(0) = \bar{\alpha}_t(0) = g(x_0),$$

$$G(1,t) = (\bar{\alpha}_t * H_t \circ w * \alpha_t)(1) = \alpha_t(1) = g(x_0).$$

Ahora usando el hecho de que $[e_{g(x_0)} * g \circ w * e_{g(x_0)}] \underset{p}{\simeq} [g \circ w]$ podemos concluir la demostración. ■

Corolario. Dada $f : X \to Y$ equivalencia homotópica se tiene que $f_* : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,f(x_0))$ es un isomorfismo de grupos.

Demostración. Sea $g : Y \to X$ una inversa homotópica de f, es decir $f \circ g \simeq 1_Y$ y $g \circ f \simeq 1_X$. Sea $H : g \circ f \simeq 1_X$. Consideramos $\alpha = H_{x_0}$ un camino entre $g \circ f(x_0) \xrightarrow{\alpha} x_0$. Por el lema anterior

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X, x_0) \arrow[rr, "g_*^{f(x_0)} \circ f_*^{x_0}"] \arrow[dr, "1_X"'] & & \pi_1(X, g \circ f(x_0)) \arrow[dl, "\hat{\alpha}"] \\
& \pi_1(X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

Como 1_X y $\hat{\alpha}$ son isomorfismos entonces $g_*^{f(x_0)} \circ f_*^{x_0}$ es un isomorfismo, con lo cual, $f_*^{x_0}$ es un monomorfismo y $g_*^{f(x_0)}$ es un epimorfismo. Por otra parte tomando $G : f \circ g \simeq 1_Y$ y $\beta = G_{f(x_0)}$ y aplicando nuevamente el lema obtenemos:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(Y, f(x_0)) \arrow[rr, "f_*^{g \circ f(x_0)} \circ g_*^{f(x_0)}"] \arrow[dr, "1_Y"'] & & \pi_1(Y, f \circ g \circ f(x_0)) \arrow[dl, "\hat{\beta}"] \\
& \pi_1(Y, f(x_0)) &
\end{tikzcd}$$

Como 1_Y, $\hat{\beta}$ son isomorfismos entonces $g_*^{f(x_0)}$ es un monomorfismo, juntando esto con lo anterior obtenemos que $g_*^{f(x_0)}$ es un isomorfismo, pero como $g_*^{f(x_0)} \circ f_*^{x_0}$ es un isomorfismo resulta que $f_*^{x_0}$ es un isomorfismo. ■

Corolario. Si X es contráctil entonces $\pi_1(X, x_0) = 0$

9.3. Ejercicios

Homotopía

1. Pruebe que si $h, h' : X \to Y$ son homotópicas (rel $A \subseteq X$) y $k, k' : Y \to Z$ son homotópicas (rel $B \supseteq h(A)$), entonces $kh, k'h' : X \to Z$ son homotópicas (rel A).

2. Sea X es un espacio topológico. Pruebe que las aplicaciones i_0, $i_1 : X \to X \times I$ definidas por $i_j(x) = (x, j)$ ($j \in \{0, 1\}$) son equivalencias homotópicas con la misma inversa $p : (x, t) \in X \times I \mapsto x \in X$. Más aún, $i_0 \simeq i_1$.

3. Sean $f, g : X \to Y$ funciones continuas tal que $f \simeq g$. Pruebe que si f es una equivalencia homotópica, entonces g también lo es.

4. Dé un ejemplo de una función f que tenga inversa homotópica a izquierda (a derecha) pero no a derecha (a izquierda).

5. Pruebe que:

   a) Si f posee una inversa homotópica a izquierda y una inversa homotópica a derecha, entonces f es una equivalencia homotópica.

   b) f es una equivalencia homotópica si y sólo si existen functiones $g, h : Y \to X$ tales que $f \circ g$ y $h \circ f$ son equivalencias homotópicas.

6. Sean X un espacio, $A \subseteq X$ un subespacio y $a_0 \in A$. Supongamos que existe una función continua $H : X \times I \to X$ tal que: $H(x, 0) = x$ para todo $x \in X$;$H(A \times I) \subseteq A$; y $H(a, 1) = a_0$ para todo $a \in A$. Entonces la aplicación cociente $q : X \to X/A$ es una equivalencia homotópica.

7. Pruebe que:

   a) Si $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es un subespacio convexo, entonces es contráctil. Más aún, C tiene a cualquiera de sus puntos como retracto por deformación fuerte. Concluya que I y $\mathbb{R}$ son contráctiles.

   b) Si X es contráctil, entonces es arcoconexo.

   c) Todo retracto de un espacio contráctil es contráctil.

8. Pruebe que:

   a) Todo subespacio compacto convexo de $\mathbb{R}^n$ es retracto por deformación fuerte de $\mathbb{R}^n$.

   b) Si A es un retracto de X, entonces para todo Y espacio topológico, $A \times Y$ es retracto de $X \times Y$.

   c) Si X es un espacio conexo y $A \subseteq X$ es un subespacio discreto con más de un punto, entonces A no es un *retracto débil* de X, es decir, $\nexists\, r : X \to A$ continua tal que $r \circ i \simeq \mathrm{id}_A$.

9. Sean X, Y espacios topológicos. Sea $[X, Y]$ el conjunto de clases homotópicas de funciones continuas de X en Y. Pruebe que:

   a) Si Y es contráctil, entonces $[X, Y]$ tiene un sólo elemento.

   b) Si X es contráctil e Y arcoconexo, entonces $[X, Y]$ tiene un sólo elemento.

   c) Hay una biyección natural $[*, Y] \to \pi_0(Y)$.

   d) Más generalmente, si Y es contráctil, entonces hay una biyección natural $[Y, X] \to \pi_0(X)$.

   e) Si X' es otro espacio y $X \simeq X'$, entonces hay una biyección entre $\pi_0(X)$ y $\pi_0(X')$.

10. Sea $f : X \to Y$ una función continua y sea Z un espacio topológico. Definimos aplicaciones

$$f^* : [g] \in [Y, Z] \mapsto [g \circ f] \in [X, Z],$$
$$f_* : [g] \in [Z, X] \mapsto [f \circ g] \in [Z, Y].$$

   a) Las funciones f^* y f_* están bien definidas.

   b) Si $f' : X \to Y$ es otra función continua y $f \simeq f'$, entonces $f^* = f'^*$ y $f_* = f'_*$.

   c) Si f es una equivalencia homotópica, entonces f^* y f_* son biyecciones.

11. Sea X el *peine*, esto es, el subespacio de $\mathbb{R}^2$ dado por

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant y \leqslant 1, x = 0 \vee x^{-1} \in \mathbb{N}\} \cup \{(x, 0) : 0 \leqslant x \leqslant 1\}.$$

   Sea $x_0 = (0, 1) \in X$.

a) El espacio X es contráctil.

b) No existe una homotopía *relativa a* x_0 entre la identidad $\mathrm{id}_X : X \to X$ y la función constante $c : x \in X \mapsto x_0 \in X$.

Esto nos dice que toda contracción de X a x_0 mueve al punto x_0.

c) Por otro lado, el espacio Y que resulta de pegar dos copias de X identificando los puntos x_0 en un solo punto *no* es contráctil.

d) La inclusión $i : X \to [0,1] \times [0,1]$ es una equivalencia homotópica pero no un retracto.

12. Si X es un espacio, el *cono* de X es el espacio $CX = X \times I/\sim$ donde $\sim$ es la relación de equivalencia $(x,1) \sim (y,1)$ para todo par de puntos x, $y \in X$. Si $x \in X$ y $t \in I$, escribimos $[x,t] \in CX$ a la clase de equivalencia de (x,t) en $X \times I$.

   a) La función $i : x \in X \mapsto [x,0] \in CX$ es continua, inyectiva y cerrada.

   b) El espacio CX es contráctil.

   c) X es contráctil si y sólo si $i : X \to CX$ es un retracto.

   d) $f : X \to Y$ es homotópica a una función constante si y sólo si f se puede extender a una función continua $\bar{f} : CX \to Y$.

El grupo fundamental

13. Sea X es un espacio topológico y, $x_0 \in X$. Sea
$$\Omega(X,x_0) = \{\alpha \in C(I,X) : \alpha(0) = \alpha(1) = x_0\}$$
con la topología de subespacio de la topología compacto-abierta. Pruebe que hay una biyección
$$\pi_0(\Omega(X,x_0)) = \pi_1(X,x_0).$$

14. Sea X un espacio topológico, $x_0 \in X$ y sea $s \in S^1$ un punto cualquiera. Sea
$$[(S^1,s),(X,x_0)] = \{[f] | f : S^1 \to X \text{ continua tal que } f(s) = x_0\}$$
donde $[f] = [g]$ si $f \simeq g$ rel $\{s\}$. Pruebe que $\pi_1(X,x_0) = [(S^1,s),(X,x_0)]$.

15. Sean $x_0, x_1 \in X$ dos puntos en un espacio arcoconexo X. Probar que $\pi_1(X,x_0)$ es abeliano si y sólo si para todo par de caminos $x_0 \xrightarrow{\omega,\omega'} x_1$ se tiene $\widehat{\omega} = \widehat{\omega'}$.

16. Pruebe que $\pi_1(X \times Y,(x,y))$ es isomorfo a $\pi_1(X,x) \times \pi_1(Y,y)$.

17. Sea X un espacio, sea $A \subseteq X$ un subespacio y sea $i : A \to X$ la inclusión.

   a) Si $r : X \to A$ es una retracción, entonces cualquiera sea $a_0 \in A$ el morfismo $r_* : \pi_1(X,a_0) \to \pi_1(A,a_0)$ es un epimorfismo y el morfismo $i_* : \pi_1(A,a_0) \to \pi_1(X,a_0)$ es un monomorfismo.

   b) Si A es un retracto por deformación , entonces para todo $a_0 \in A$ se tiene que $\pi_1(X,a_0) \cong \pi_1(A,a_0)$.

18. Sean X un espacio topológico, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un subespacio y $f : A \to X$ una función continua. Pruebe que si f se extiende a una función $g : \mathbb{R}^n \to X$, entonces para todo $a \in A$, el morfismo $f_* : \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, f(a))$ es el morfismo cero.

19. Sea $(G, \cdot, e)$ un grupo topológico. Si $\alpha, \beta \in \Omega(G, e)$, sea

$$\alpha \odot \beta : t \in I \mapsto \alpha(t) \cdot \beta(t) \in G.$$

Esto define una operación $\odot$ en el conjunto $\Omega(G, e)$ que hace de él un grupo.

a) La operación $\odot$ induce una operación, que también notamos $\odot$, sobre $\pi_1(G, e)$ y con ésta $\pi_1(G, e)$ es un grupo.

b) Esta estructura de grupo coincide con la estructura usual de $\pi_1(G, e)$.

c) $\pi_1(G, e)$ es un grupo abeliano.

10

Fibraciones y revestimientos

10.1. Fibraciones y levantamiento de caminos

En lo que sigue, dados una función $p : E \to B$ y $b_0 \in B$, $E_{b_0} := p^{-1}(b_0) \subseteq E$ es la fibra de b_0. Notamos que $E_{b_0} = \varnothing \iff b_0 \notin p(E)$.

Definición. Sean $p : E \to B$ y $f : X \to B$ continuas. Decimos que f se levanta a E si $\exists \bar{f} : X \to E$ continua tal que $p\bar{f} = f$.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, dotted, "\bar{f}"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} .$$

Las fibraciones van a ser funciones que admitan levantamientos de homotopías con ciertas condiciones iniciales. Más precisamente:

Definición. Una función continua $p : E \to B$ se dice fibración si $\forall X$ espacio topológico, $\forall H : X \times I \to B$ y $\forall f : X \to E$ tales que $H_0 = pf$, $\exists G : X \times I \to E$ tal que $pG = H$ y $G_0 = f$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[ur, dotted, "\exists G"] \arrow[r, "H"'] & B \end{tikzcd} .$$

Dada una fibración $p : E \to B$, al espacio B se lo llama *espacio base* y a E se lo llama *espacio total* de la fibración.

Ejemplo. Dado B un espacio topológico, la proyección $B \times Y \xrightarrow{p_1} B$ es una fibración para cualquier espacio Y.

Proposición. Sea $p : E \to B$ fibración, $f, g : X \to B$, $f \simeq g$. Entonces f se levanta a E si y sólo si g se levanta a E. En este caso se pueden encontrar levantados $\tilde{f}, \tilde{g} : X \to E$ tales que $\tilde{f} \simeq \tilde{g}$.

Demostración. Sea $H : f \simeq g$. Supongamos que f se levanta a E, es decir $\exists \tilde{f} : X \to E$ tal que $p\tilde{f} = f$. Por definición, $\exists G : X \times I \to E$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dotted, "\exists G"] & B \end{tikzcd} .$$

Sea $\tilde{g} = G_1$, $p\tilde{g} = pG_1 = H_1 = g$. Además $G : \tilde{f} \simeq \tilde{g}$. ∎

Observación. Notar que el hecho de que p sea una fibración no implica que dadas $h_1, h_2 : X \to E$ tales que $ph_1 \simeq ph_2$ valga que $h_1 \simeq h_2$.

Dejamos a cargo del lector probar las siguientes propiedades básicas de las fibraciones.

Ejercicio.

1. Los homeomorfismos son fibraciones.
2. Composición de fibraciones es fibración.
3. Las fibraciones son estables por cambio de base.

Proposición. Sea $p : E \to B$ fibración, $b_0 \in B$, $e_0 \in E_{b_0}$, ω camino en B que empieza en b_0. Entonces $\exists \tilde{\omega}$ camino en E tal que $\tilde{\omega}(0) = e_0$ y $p\tilde{\omega} = \omega$.

Demostración. Tomamos $X = *$ y tenemos el siguiente diagrama,

$$\begin{tikzcd} * \arrow[r, "e_0"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ * \times I \arrow[r, "\omega"] \arrow[ur, dotted, "\tilde{\omega}"] & B \end{tikzcd} . \blacksquare$$

Observamos que el levantamiento de caminos puede no ser único. Por ejemplo, si consideramos la fibración trivial $E \to *$, cualquier camino en E es levantado del camino constante.

Definición. Una $p : E \to B$ continua tiene la L.U.C. (propiedad de levantamiento único de caminos) si $\forall b_0 \in B$, $\forall e_0 \in E_{b_0}$ y ω camino en B con $\omega(0) = b_0$, $\exists! \tilde{\omega} : I \to E$ tal que $p\tilde{\omega} = \omega$ y $\tilde{\omega}(0) = e_0$.

Observación. Si $p : E \to B$ tiene la L.U.C. y ω, ω' son caminos en E tales que $\omega(0) = \omega'(0)$ y $p\omega = p\omega' \Rightarrow \omega = \omega'$.

Lema. Si $p : E \to B$ tiene la L.U.C., $b_0 \in B$, ω camino en E que cae en $E_{b_0} \Rightarrow \omega$ es constante.

Demostración. Sea $e_0 = \omega(0)$, notamos que $e_0 \in E_{b_0}$. Además $p\omega = cte_{b_0} = pcte_{e_0}$ y $\omega(0) = e_0 = cte_{e_0}(0)$. Entonces $\omega = cte_{e_0}$. ■

Veremos ahora los resultados que relacionan el grupo fundamental del espacio base de una fibración con L.U.C. con la fibra. Estos resultados los utilizaremos luego para el caso particular de los revestimientos (una vez que probemos que los revestimientos son fibraciones con L.U.C.).

Teorema. Sea $p : E \to B$ fibración con L.U.C.. Sean ω, ω' caminos en E tales que $\omega(0) = \omega'(0)$ y $p\omega \underset{p}{\simeq} p\omega' \Rightarrow \omega \underset{p}{\simeq} \omega'$. En particular $\omega(1) = \omega'(1)$.

Demostración. Sea $H : p\omega \underset{p}{\simeq} p\omega'$ una homotopía que esquematizamos con la siguiente figura:

$$\begin{array}{ccc} & p\omega' & \\ b_0 & \boxed{\;H\;} & b_1 \\ & p\omega & \end{array}.$$

Consideramos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ I \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, "\exists G"] & B \end{tikzcd},$$

lo que nos da una homotopía (de funciones) con las condiciones de borde esquematizadas en la siguiente figura:

$$\begin{array}{ccc} & \omega'' & \\ \varphi_0 & \boxed{\;G\;} & \varphi_1 \\ & \omega & \end{array},$$

con $\omega'' = G_1$. Tenemos que $\varphi_0 : I \to E$, $\varphi_0(t) = G(0,t)$, $p\varphi_0 = cte_{b_0}$. Entonces φ_0 es un camino en E_{b_0}, y por lo tanto es constante. Como $\varphi_0(0) = \omega(0) = \omega'(0) = e_0$, $\varphi_0 = cte_{e_0}$. De la misma manera, $\varphi_1 = cte_{e_1}$. Además $\omega''(0) = \omega'(0) = e_0$ y $p\omega'' = pG_1 = H_1 = p\omega'$. Entonces $\omega'' = \omega'$ y así obtenemos la homotopía buscada:

$$\begin{array}{ccc} & \omega' & \\ e_0 & \boxed{\;G\;} & e_1 \\ & \omega & \end{array}.$$ ■

Corolario 1. Sea $p : E \to B$ fibración con L.U.C., $b_0 \in B$, $e_0 \in E_{b_0}$. Entonces $p_* : \pi_1(E, e_0) \to \pi_1(B, b_0)$ es monomorfismo.

Demostración. Sean $[\omega], [\omega'] \in \pi_1(E, e_o)$ tales que $p_*[\omega] = p_*[\omega'] \Rightarrow p\omega \underset{p}{\simeq} p\omega'$. Como $\omega(0) = \omega'(0) = e_0$, por el teorema, $\omega \underset{p}{\simeq} \omega' \Rightarrow [\omega] = [\omega']$. ■

Corolario 2. Sea $p : E \to B$ fibración con L.U.C., $b_0 \in B$, $e_0 \in E_{b_0}$. Entonces existe una función bien definida $\varphi_{e_0} : \pi_1(B, b_0) \to E_{b_0}$ con $\varphi_{e_0}([\omega]) = \tilde{\omega}^{e_0}(1)$ donde $\tilde{\omega}^{e_0}$ es el único levantado de ω a partir de e_0.

Demostración. Supongamos $[\omega] = [\omega'] \Rightarrow \omega \underset{p}{\simeq} \omega'$. Sean $\tilde{\omega}^{e_0}$ y $\tilde{\omega'}^{e_0}$ los levantados. Tenemos que $p\tilde{\omega}^{e_0} \underset{p}{\simeq} p\tilde{\omega'}^{e_0}$ y $\tilde{\omega}^{e_0}(0) = \tilde{\omega'}^{e_0}(0)$. Entonces $\tilde{\omega}^{e_0} \underset{p}{\simeq} \tilde{\omega'}^{e_0}$, y por lo tanto $\tilde{\omega}^{e_0}(1) = \tilde{\omega'}^{e_0}(1)$. ■

Podemos probar ahora uno de los resultados más relevantes de esta sección sobre la acción a derecha del grupo fundamental de la base en la fibra.

Teorema. Sea $p : E \to B$ fibración con L.U.C.. Sea $b_0 \in B$ tal que $E_{b_0} \neq \varnothing$. Entonces $\pi_1(B, b_0)$ actúa a derecha sobre E_{b_0} vía $e_o[\omega] := \tilde{\omega}^{e_0}(1)$. Más aún, si E es arco conexo, la acción es transitiva y se tiene:

$$\frac{\pi_1(B,b_0)}{p_*\pi_1(E,e_0)} \xrightarrow[\equiv]{\varphi_{e_0}} E_{b_0} \quad \forall e_0 \in E_{b_0}.$$

En particular, si E es simplemente conexo, $\forall e_0 \in E_{b_0}$ se tiene una biyección

$$\pi_1(B, b_0) \xrightarrow{\equiv} E_{b_0} \ .$$

Demostración. La buena definición de la acción es el corolario 2. Veamos que es una acción a derecha:

- Si $[\omega] = 1$, elegimos como representante a $\omega = cte_{b_0}$. Entonces $e_0[cte_{b_0}] = \tilde{cte}_{b_0}^{e_0}(1) = cte_{e_0}(1) = e_0$.
- Queremos ver que $e_0([\omega] * [\omega']) = (e_0[\omega])[\omega']$. Tenemos que $\widetilde{\omega * \omega'}^{e_0} = \tilde{\omega}^{e_0} * \tilde{\omega'}^{e_1}$ con $e_1 = e_0[\omega]$. Entonces $e_0([\omega] * [\omega']) = \widetilde{\omega * \omega'}^{e_0}(1) = (\tilde{\omega}^{e_0} * \tilde{\omega'}^{e_1})(1) = \tilde{\omega'}^{e_1}(1) = e_1[\omega'] = (e_0[\omega])[\omega']$.

Dados $e_0, e_1 \in E_{b_0}$, si E es arco conexo, existe $e_0 \xrightarrow{\gamma} e_1$ camino. Entonces $[p\gamma] \in \pi_1(B, b_0)$. Como $\gamma = \tilde{p\gamma}^{e_0}$, $e_0[p\gamma] = \gamma(1) = e_1$, por lo que la acción es transitiva.

Sea $e_0 \in E_{b_0}$. Tenemos el grupo de isotropía de e_0,

$$(\pi_1(B, b_0))_{e_0} = \{[\omega] \in \pi_1(B, b_0) \mid e_0[\omega] = \tilde{\omega}^{e_0}(1) = e_0\} =$$

$$\{\text{lazos en } B \text{ que levantan (a partir de } e_0) \text{ a lazos}\} = p_*(\pi_1(E, e_0)).$$

Entonces

$$\frac{\pi_1(B,b_0)}{p_*\pi_1(E,e_0)} \xrightarrow[\equiv]{\varphi_{e_0}} E_{b_0} \quad \forall e_0 \in E_{b_0} \ ■$$

Definición. Sean $b_0 \in B$, $e_0 \in E_{b_0}$. Denotamos $Fix(e_0) = p_*\pi_1(E, e_0)$ (el grupo de isotropía de e_0 de la acción del grupo fundamental en la fibra: las clases de lazos que se levantan a lazos a partir de e_0). Notar que, como p_* es monomorfismo, $Fix(e_0)$ es isomorfo a $\pi_1(E, e_0)$.

10.2. Revestimientos

Comenzaremos ahora nuestro estudio de los revestimientos. La definición tiene naturaleza local, pero veremos luego que cumplen la propiedad (global) de ser fibraciones con L.U.C. y esto permitirá utilizar los resultados obtenidos en la sección anterior.

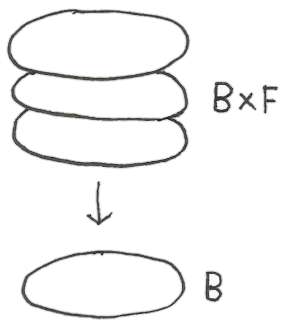
Definición. sea $p : E \to B$ continua, un abierto $U \subseteq B$ se dice parejamente cubierto si $p^{-1}(U) = \coprod_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha$ $(\Lambda \neq \varnothing)$ con V_α abiertos de E y $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \to U$ un homeomorfismo para todo α.

Definición. $p : E \to B$ se dice revestimiento si $\forall b \in B$, $\exists U \subseteq B$ abierto parejamente cubierto por p con $b \in U$.

Ejemplos.

1. Todo homeomorfismo es trivialmente un revestimiento.

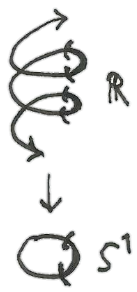
2. Si consideramos F un espacio topológico discreto, entonces dado un espacio cualquiera B, $E = B \times F \xrightarrow{p_B} B$ es un revestimiento.



3. Girar en S^1 es un revestimiento. Más explícitamente, $p : S^1 \to S^1$, $p(x) = x^n$, es un revestimiento de n hojas. Es decir que la preimagen de cada abierto parejamente cubierto tiene n componentes.

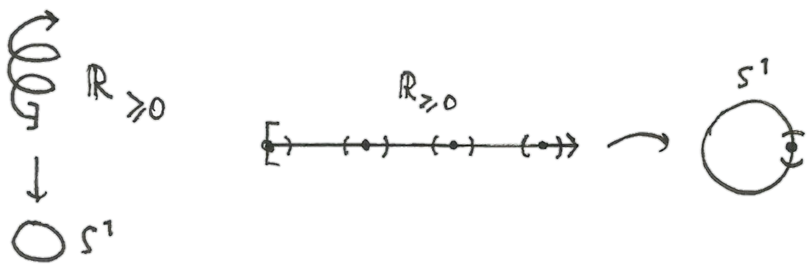
4. El cociente al espacio proyectivo, $p : S^n \to \mathbb{R}P^n = S^n/(x \sim -x)$, es un revestimiento.

5. "Enroscar" a $\mathbb{R}$ sobre S^1 mediante $p : \mathbb{R} \to S^1$ con $p(t) = e^{2\pi i t}$, es un revestimiento que va a ser de mucho interés en lo que sigue.



Definición. Una función continua $p : E \to B$ es un homeomorfismo local si $\forall e \in E$, $\exists U \subseteq E$ abierto, $e \in U$, $\exists V \subseteq B$ abierto, $p(e) \in V$ tal que $p|U : U \to V$ es un homeomorfismo.

Observaciones. Lo primero que notamos es que un homeomorfismo local es una función abierta. Además es fácil ver que un revestimiento es homeomorfismo local. Sin embargo, un homeomorfismo local no tiene por qué ser un revestimiento. Por ejemplo, podemos tomar $p : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to S^1$ con $p(t) = e^{2\pi i t}$. En este caso $1 \in S^1 \subseteq \mathbb{C}$ no va a tener un entorno parejamente cubierto.



Proposición.

1. Los revestimientos son sobreyectivos.
2. Los revestimiento son funciones abiertas.
3. Los revestimientos son cocientes.
4. Dado $p : E \to B$ un revestimiento, $b \in B$, entonces E_b es discreto.

Demostración. Ejercicio.

Teorema 1. Sea $p : E \to B$ revestimiento, X conexo, $f, g : X \to E$ continuas tales que $pf = pg$. Si $\exists x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = g(x_0)$, entonces $f = g$.

Demostración. Sea $U = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$, $U \neq \emptyset$ ya que $x_0 \in U$. Como X es conexo, basta ver que U es abierto y cerrado.

Veamos primero que es abierto. Sea $x \in U$, vamos a encontrar W abierto de X tal que $x \in W \subseteq U$. Sea $b = pf(x) = pg(x) \in B$, $\exists V \subseteq B$ abierto parejamente cubierto por p, con $b \in V$. Tenemos $p^{-1}(V) = \coprod_\alpha V_\alpha$, con $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \to V$ homeomorfismos. Existe un único α tal que $f(x) = g(x) \in V_\alpha$. Sea $W = f^{-1}(V_\alpha) \cap g^{-1}(V_\alpha)$. Es claro que $x \in W$ y W abierto de X. Sea $y \in W$, debemos ver que $y \in U$. Sabemos que $f(y), g(y) \in V_\alpha$. Como $p|_{V_\alpha}$ es homeomorfismo (en particular inyectiva) y $pf(y) = pg(y)$, entonces $f(y) = g(y)$. Por lo tanto $W \subseteq U$ y U resulta abierto.

Para ver que U es cerrado, probaremos que U^c es abierto. Sea $x \in U^c$, veamos que existe W abierto de X tal que $x \in W \subseteq U^c$. Sea V un abierto parejamente cubierto por p con $b = pf(x) = pg(x) \in V$, $p^{-1}(V) = \coprod_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha$, $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \to V$ homeomorfismos. Como $f(x) \neq g(x)$ y $p|_{v_\alpha}$ es homeomorfismo $\forall\alpha$ (en particular inyectiva) y $pf(x) = pg(x)$, entonces existen $\alpha_1 \neq \alpha_2 \in \Lambda$ tales que $f(x) \in V_{\alpha_1}$ y $g(x) \in V_{\alpha_2}$. Sea $W = f^{-1}(V_{\alpha_1}) \cap g^{-1}(V_{\alpha_2})$. Entonces $x \in W$ y W es abierto en X. Por último, sea $y \in W$, tenemos que $f(y) \in V_{\alpha_1}$ y $g(y) \in V_{\alpha_2}$. Entonces $f(y) \neq g(y)$, y por lo tanto $y \in U^c$.

Luego como U es abierto, cerrado y no vacío en X, se tiene $U = X$. ■

Teorema 2. Sea $p : E \to B$ un revestimiento. Entonces p es una fibración.

Demostración. Dado el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "G"] & B \end{tikzcd},$$

debemos encontrar $G : X \times I \to E$ tal que el diagrama conmute. Primero, para cada $x \in X$, vamos a construir un entorno abierto $x \in N_x \subset X$ y un levantamiento (local) $G_x : N_x \times I \to E$ tal que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd} N_x \arrow[r, "f|"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ N_x \times I \arrow[r, "H|"'] \arrow[ur, dashed, "G_x"] & B \end{tikzcd}$$

Fijado x, para cada par (x, t) existe un abierto parejamente cubierto $H(x, t) \in U_t \subset B$ de manera que $p^{-1}(U_t) = \coprod_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha$. Para cada t, obtenemos un abierto de la forma $(x, t) \in N_{x,t} \times (a_t, b_t) \subset H^{-1}(U_t)$ (a_t puede ser 0 y b_t puede ser 1, en cuyo caso los intervalos tienen extremos cerrados). Entonces $\{x\} \times I \subset \bigcup_{t\in I} N_{x,t} \times (a_t, b_t)$. Como $\{x\} \times I$ es compacto, $\{x\} \times I \subset \bigcup_{i=1}^n N_{x,t_i} \times (a_{t_i}, b_{t_i})$. Luego considerando $N_x = \bigcap_{i=1}^n N_{x,t_i}$, podemos conseguir $0 = s_0 < s_1 < ... < s_m = 1$ tales que $H(N_x \times [s_{i-1}, s_i]) \subset U_i$, donde U_i es uno de los U_t mencionados previamente.

Ahora definimos $G_x : N_x \times I \to E$ recursivamente en cada $N_x \times [s_{i-1}, s_i]$. Necesitamos $G_i : N_x \times [s_{i-1}, s_i] \to E$ tal que:

(1) $pG_i = H|_{N_x \times [s_{i-1}, s_i]}$.

(2) $G_1(y,0) = f(y)$.

(3) $G_i(y,s_{i-1}) = G_{i-1}(y,s_{i-1})$.

Comencemos con G_1. Veamos que $\{f^{-1}(V_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ es un cubrimiento por abiertos disjuntos de N_x. Sea $y \in N_x$, entonces $H(y,0) \in U_1$. Como $H(y,0) = pf(y)$, entonces $y \in f^{-1}(p^{-1}(U_1)) = f^{-1}(\bigsqcup V_\alpha)$. Es claro que son abiertos y disjuntos. Entonces podemos definir $G_1(y,t) = p_\alpha^{-1}(H(y,t))$ donde $y \in f^{-1}(V_\alpha)$ y $p_\alpha = p|_{V_\alpha} : V_\alpha \to U_1$ homeomorfismo. Resulta bien definida y continua por lo recién mencionado, y porque $p_\alpha : V_\alpha \to U_1$ es un homeomorfismo. Además es fácil ver que cumple las condiciones pedidas.

Inductivamente, supongamos definida G_{i-1} y definamos G_i. Nuevamente tenemos $H(N_x \times [s_{i-1},s_i]) \subset U_i$ parejamente cubierto con $p^{-1}(U_i) = \bigsqcup_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha$. Definimos $W_\alpha = \{y \in N_x \mid G_{i-1}(y,s_{i-1}) \in V_\alpha\}$. Veamos que $\{W_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es un cubrimiento por abiertos disjuntos de N_x. Sea $y \in N_x$, entonces $H(y,s_{i-1}) \in U_i$. Como $H(y,s_{i-1}) = pG_{i-1}(y,s_{i-1})$, entonces $G_{i-1}(y,s_{i-1}) \in V_\alpha$ para algún $\alpha \in \Lambda$. Como antes, es claro que son abiertos y disjuntos. De la misma manera definimos $G_i(y,t) = p_\alpha^{-1}(H(y,t))$ donde $y \in W_\alpha$, que cumple las condiciones.

Así obtuvimos los levantados locales G_x para cada $x \in X$. Con ellas vamos a construir $G : X \times I \to E$. Tenemos que $\{N_x \times I\}_{x\in X}$ es un cubrimiento por abiertos de $X \times I$. Luego si vemos que cuando $N_x \cap N_{x'} \neq \varnothing$, $G_x|_{N_x\cap N_{x'}} \equiv G_{x'}|_{N_x\cap N_{x'}}$, G queda bien definida por el lema de pagado para abiertos. Sea $y \in N_x \cap N_{x'}$, entonces:

$$H|_{\{y\}\times I} = pG_x|_{\{y\}\times I} = pG_{x'}|_{\{y\}\times I} \quad \text{y} \quad G_x(y,0) = G_{x'}(y,0) = f(y).$$

Por lo tanto, como $\{y\} \times I$ es conexo, por el teorema 1, $G_x|_{N_x\cap N_{x'}} \equiv G_{x'}|_{N_x\cap N_{x'}}$. ■

Corolario. Los revestimientos son fibraciones con L.U.C. Por lo tanto si $p : E \to B$ es un revestimiento, se tiene:

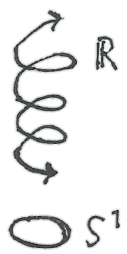
1. $p_* : \pi_1(E,e_0) \to \pi_1(B,b_0)$ es monomorfismo.

2. Si E es arco conexo, $e_0 \in E_{b_0} \Rightarrow \frac{\pi_1(B,b_0)}{Fix(e_0)} \xrightarrow[\equiv]{\varphi_{e_0}} E_{b_0}$. Además si E es simplemente conexo, $\pi_1(B,b_0) \xrightarrow[\equiv]{\varphi_{e_0}} E_{b_0}$.

Utilicemos este resultado para calcular el grupo fundamental del círculo.

Corolario. Sea $1 \in S^1 \subseteq \mathbb{C}$, entonces $\pi_1(S^1,1) \equiv \mathbb{Z}$.

Demostración. Consideramos el revestimiento $p : \mathbb{R} \to S^1$ con $p(t) = e^{2\pi i t}$.



Tenemos que $E_1 = \mathbb{Z}$. Como $\mathbb{R}$ es contráctil, es simplemente conexo. Tomando $b_0 = 1 \in S^1$, $e_0 = 0 \in E_1$, tenemos la biyección $\varphi_0 : \pi_1(S^1, 1) \to E_1 = \mathbb{Z}$ con $\varphi_0[\omega] = \tilde{\omega}^0(1)$.

Veamos que φ_0 es morfismo de grupos. Tenemos que ver que

$$\varphi_0([\omega * \omega']) = \varphi_0([\omega] * [\omega']) = \varphi_0[\omega] + \varphi_0[\omega'].$$

Supongamos que $\varphi_0[\omega] = \tilde{\omega}^0(1) = n \in \mathbb{Z}$ y $\varphi_0[\omega'] = \tilde{\omega'}^0(1) = m \in \mathbb{Z}$, debemos ver que $\widetilde{\omega * \omega'}^0(1) = n + m$.

Sea $\gamma : I \to \mathbb{R}$ con $\gamma(t) = \begin{cases} \tilde{\omega}^0(2t) & 0 \leqslant t \leqslant 1/2 \\ \tilde{\omega'}^0(2t-1) + n & 1/2 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$. Tenemos que $p\gamma = \omega * \omega'$ y $\gamma(0) = \widetilde{\omega * \omega'}^0(0) = 0$.. Entonces $\gamma = \widetilde{\omega * \omega'}^0$. Por lo tanto $\varphi_0([\omega * \omega']) = \widetilde{\omega * \omega'}^0(1) = \gamma(1) = n + m$. Es decir que φ_0 es morfismo de grupos y $\pi_1(S^1, 1) \equiv \mathbb{Z}$. $\blacksquare$

Observación. Los generadores de $\pi_1 S^1$ son $\gamma : I \to S^1$ con $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$ y $\bar{\gamma} : I \to S^1$ con $\gamma(t) = e^{-2\pi i t}$.

Ejercicio. Sea $f : S^1 \to S^1$ con $f(z) = z^n$. Entonces $f_* : \pi_1 S^1 \to \pi_1 S^1$ es tal que $f_*[\gamma] = [\gamma]^n$.

Ahora vamos a estudiar consecuencias de este hecho. Primero necesitamos las siguientes observaciones.

Observación 1. Recordamos que $i : S^1 \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ es una equivalencia homotópica. Entonces $i_* : \pi_1 S^1 \to \pi_1(\mathbb{C}\backslash\{0\})$ es un isomorfismo, en particular $i_* \neq 0$. También podemos considerar $\varphi : S^1 \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ con $\varphi(z) = z^n$. En este caso $\varphi_*[\gamma] = n[\gamma]$, que es un monomorfismo, en particular $\varphi_* \neq 0$.

Observación 2. Si $f : X \to Y$ es null homotópica, entonces $f_* = 0$.

Observación 3. Se deduce de las observaciones anteriores que la i y la φ no son null homotópicas.

Ahora ya podemos comenzar a probar algunas aplicaciones.

Proposición. Sea V un campo vectorial nunca nulo en D^2. Entonces existen $x_1 \in S^1 = \partial D^2$ tal que $V(x_1) = \lambda x_1$ para algún $\lambda > 0$ y $x_2 \in S^1 = \partial D^2$ tal que $V(x_2) = \lambda x_2$ para algún $\lambda < 0$.

Demostración. Tenemos que $V|_{S^1} : S^1 \to \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ es null homotópica, pues se extiende al disco. Veamos que existe $x \in S^1$ tal que $V(x) = \lambda x$ para algún $\lambda < 0$. Supongamos que no, vamos a construir $H : S^1 \times I \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Definimos $H(x, t) = tx + (1-t)V(x)$. Veamos que está bien definida:

- Si $t = 0$, $H(x, 0) = V(x) \neq 0$.

- Si $t = 1$, $H(x, 1) = x \neq 0$.
- Si $0 < t < 1$, $H(x,t) = tx + (1-t)V(x)$. Si $tx + (1-t)V(x) = 0$, entonces $V(x) = (t/t-1)x$, pero $t/(t-1) < 0$, contradiciendo la suposición.

Luego, $H : i \simeq V|_{S^1}$. Entonces $i \simeq cte$, absurdo. Por lo tanto existen $x \in S^1$, $\lambda < 0$ tales que $V(x) = \lambda x$.

Para el otro caso consideramos $W(x) = -V(x)$. Por lo hecho antes, existen $x \in S^1$, $\lambda < 0$ tales que $W(x) = \lambda x$, Entonce $V(x) = -\lambda x$. ■

Corolario (teorema del punto fijo de Brower). Sea $f : D^2 \to D^2$ continua. Entonces existe $x \in D^2$ tal que $f(x) = x$.

Demostración. Supongamos que no. Entonces $\forall x \in D^2$, $f(x) \neq x$. Sea $V(x) = f(x) - x$. Por la proposición anterior, existen $x \in S^1$, $\lambda > 0$ tales que $V(x) = \lambda x$. Entonces $f(x) = (\lambda + 1)x$. Luego $1 \geqslant ||f(x)|| = |\lambda + 1| ||x|| > 1$, absurdo. ■

Corolario. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $a_{ij} > 0\ \forall i, j$. Entonces existe $\lambda > 0$ autovalor de A.

Demostración. Sea $B = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \mid x_i \geqslant 0\}$. Notamos que B es homeomorfo a D^2, por lo que tiene la propiedad del punto fijo. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con $T(x) = Ax$. Sea $x \in B$, $T(x) = Ax$ tiene las tres coordenadas $\geqslant 0$ y $T(x) \neq 0$. Consideremos $\varphi : B \to B$ con $\varphi(x) = \frac{T(x)}{||T(x)||}$. Entonces existe x_0 tal que $\varphi(x_0) = x_0$. Eso quiere decir que $T(x_0) = ||T(x_0)||x_0$ y $||T(x)|| > 0$. ■

Teorema fundamental del álgebra. $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado.

Demostración. Sea p un polinomio no constante de grado $\geqslant 1$ con coeficientes en $\mathbb{C}$. Debemos ver que $\exists z \in \mathbb{C}$ tal que $p(z) = 0$. Como $\mathbb{C}$ es un cuerpo, podemos suponer que p es mónico: $p = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$. Sea $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ y tomamos $x = cw$, $q(w) = p(cw) = c^n w^n + a_{n-1}c^{n-1}w^{n-1} + ... + a_0$. Entonces $\frac{q(w)}{c^n} = w^n + \frac{a_{n-1}}{c}w^{n-1} + ... + \frac{a_0}{c^n}$. Notamos que p tiene raíces si y sólo si q las tiene y tomamos $c >> 0$ tal que $|\frac{a_{n-1}}{c}| + ... + |\frac{a_0}{c^n}| < 1$. Podemos suponer entonces que $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$ con $|a_{n-1}| + ... + |a_0| < 1$.

Supongamos que p no tiene raíces en $\mathbb{C}$, entonces $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Como $p|_{S^1}$ se extiende a $p|_{D^2}$, entonces $p|_{S^1} \simeq cte$. Si vemos que $p|_{S^1} \simeq \varphi$ con $\varphi : S^1 \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $\varphi(x) = x^n$, entonces $\varphi \simeq cte$, lo cual es una contradicción.

Definimos $H : S^1 \times I \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ como $H(x,t) = x^n + t(a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0)$. Sólo debemos ver que $H(x,t) \neq 0\ \forall x \in S^1, t \in I$. Tenemos que $|H(x,t)| \geqslant |x^n| - |t||a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0| \geqslant 1 - |a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0| \geqslant 1 - (|a_{n-1}| + ... + |a_0|)$. Entonces $H(x,t) \neq 0$. ■

Definición. Decimos que una función $h : S^n \to S^m$ preserva antípodas si $h(-x) = -h(x)$.

Teorema. Si $h : S^1 \to S^1$ es una función continua que preserva antípodas, entonces $h \not\simeq cte$.

Demostración. Vamos a hacer la demostración por pasos:

1. Supongamos que $h(1) = b_0$. Sea $\rho : S^1 \to S^1$ la rotación antihoraria tal que $\rho(b_0) = 1$. Sea $\tilde{h} = \rho h$, $\tilde{h}(1) = 1$, $\tilde{h}$ preserva antípodas y si $h \simeq cte$, entonces $\tilde{h} \simeq cte$. Luego podemos suponer que $h(1) = 1$.

2. Sea $q : S^1 \to S^1$ con $q(z) = z^2$ en revestimiento de dos hojas de S^1. Tenemos que $qh(-z) = (h(-z))^2 = (-h(z))^2 = h(z)^2 = qh(z)$. Entonces, como q es cociente,

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "q"] & S^1 \arrow[r, "q"] & S^1 \\ S^1 \arrow[urr, dotted, "\exists ! f"] & & \end{tikzcd}$$

Si vemos que $f_* : \pi_1 S^1 \to \pi_1 S^1$ cumple que $f_* \neq 0 \Rightarrow f_*$ es monomorfismo porque $f_* : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Entonces, como q es revestimiento, q_* es monomorfismo y $f_* q_*$ también. Luego $q_* h_*$ es monomorfismo y por lo tanto h_* es monomorfismo, por lo que $h \not\simeq cte$. Veamos entonces que $f_* \neq 0$. Sea γ una curva en S^1, $\gamma(0) = 1, \gamma(1) = -1$. Entonces $q\gamma$ es un lazo que va de 1 a 1. Tenemos que $\widetilde{q\gamma}^1(1) = \gamma(1) = -1$, por lo que $[q\gamma] \notin Fix(1) = q_*\pi_1(S^1, 1)$. Luego $[q\gamma] \neq 0 \in \pi_1(S^1, 1)$. Ahora, $f_*[q\gamma] = [fq\gamma] = [qh\gamma] \neq 0 \in \pi_1(S^1, 1)$, pues $[qh\gamma] \notin Fix(1)$ porque $h\gamma(0) = h(1) = 1$ y $h\gamma(1) = h(-1) = -h(1) = -1$. Entonces $f_* \neq 0$ y $h \not\simeq cte$. ■

Corolario. No existe $g : S^2 \to S^1$ continua que preserve antípodas.

Demostración. Supongamos que existe dicha g. Entonces $g|_{S^1} : S^1 \to S^1$ preserva antípodas. Entonces $g|_{S^1} \not\simeq cte$, absurdo, ya que $g|_{S^1}$ se extiende a $g|_{D^2}$ (D^2 el hemisferio norte). ■

Corolario (Borsuk-Ulam para S^2). Sea $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ continua. Entonces existe $x \in S^2$ tal que $f(x) = f(-x)$.

Demostración. Supongamos que no existe tal x. Sea $g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{||f(x) - f(-x)||}$. Entonces $g : S^2 \to S^1$ continua y $g(-x) = -g(x)$, absurdo por el corolario anterior. ■

Teorema de la bisección. Sea B_1, B_2 dos regiones acotadas, medibles en $\mathbb{R}^2$. Entonces existe una recta L en $\mathbb{R}^2$ que las bisecciona. Es decir, L separa a B_1 y a B_2 en dos partes con la misma área.

Demostración. Pensamos a $\mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ como $\mathbb{R}^2 \times \{1\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Para cada $v \in S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, consideramos P_v el plano perpendicular a v que pasa por el 0 de $\mathbb{R}^3$. Observamos que P_v separa a $\mathbb{R}^3$ en dos semiespacios, H_v^+, que contiene a v, y H_v^-, que contiene a $-v$.

Sea $f_i(v)$ =área de B_i que cae en H_v^+. Notamos que si $v = (0, 0, 1)$, $f_i(v)$ =área(B_i) y si $v = (0, 0, -1)$, $f_i(v) = 0$. Si $v \neq (0, 0, \pm 1)$, $P_v \cap \mathbb{R}^2 \times \{1\} = L$ una recta. También vemos que $P_v = P_{-v}$, $H_v^+ = H_{-v}^-$ y $H_v^- = H_{-v}^+$. Entonces $f_i(v)$ =área de B_i de un lado de la recta y $f_i(-v)$ =área de B_i del otro lado de la recta. Luego $f_i(v) + f_i(-v)$ =área de B_i.

Sea $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ con $f(v) = (f_1(v), f_2(v))$ continua. Por Borsuk-Ulam, existe $v \in S^2$ tal que $f(v) = f(-v)$. Esto quiere decir que existe v tal que $f_i(v) = \frac{1}{2}$área(B_i). Entonces tomamos $L = P_v \cap \mathbb{R}^2 \times \{1\}$. ■

10.3. Ejercicios

Fibraciones

1. Sean X, Y espacios topológicos. Pruebe que la proyección $p_X : X \times Y \to X$ es una fibración con fibra Y. Si además Y es discreto, entonces p_X es un revestimiento.

2. Sea $p : E \to B$ una fibración. Sean α, β caminos en B con $\alpha(1) = \beta(0)$ de manera que existen levantados $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ que cumplen $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(0)$. Entonces $\tilde{\alpha} * \tilde{\beta}$ es un levantado de $\alpha * \beta$.

3. Sean $p : E \to B$ una fibración, X un espacio localmente compacto y T_2. Sea $p' : C(X, E) \to C(X, B)$ definida por $p'(f) = p \circ f$. Pruebe que p' es una fibración.

4. Sea $p : E \to B$ una fibración. Sean $f_0, f_1 : X \times I \to E$ funciones continuas. Pruebe que dadas homotopías $H : \ p \circ f_0 \simeq p \circ f_1$ y $G : \ f_0|_{X \times 0} \simeq f_1|_{X \times 0}$ tales que $H(x, 0, t) = p \circ G(x, 0, t)$, existe un levantamiento $\tilde{H} : X \times I \times I \to E$ de H que es una homotopía entre f_0 y f_1, y que es una extensión de G.

5. Sea $p : E \to B$ una fibración.

   a) Sea $\alpha : I \to B$ camino. Pruebe que existe $H : E_{\alpha(0)} \times I \to E$ tal que $p \circ H(x, t) = \alpha(t)$ y $H(x, 0) = x$, para todo $x \in E_{\alpha(0)}$, $t \in I$.

   b) Dado $\alpha : I \to B$ camino, consideramos $L_\alpha : E_{\alpha(0)} \to E_{\alpha(1)}$ definido por $L_\alpha(x) = H(x, 1)$. Pruebe que:

      - Si $\alpha \simeq_p \alpha'$, entonces $L_\alpha \simeq L_{\alpha'}$.
      - Si $\alpha \simeq_p cte_b$, entonces $L_\alpha \simeq \mathrm{id}_{E_b}$.
      - Dados $\alpha, \alpha' : I \to B$ tales que $\alpha(1) = \alpha'(0)$, entonces $L_{\alpha * \alpha'} \simeq L_{\alpha'} * L_\alpha$.

   c) Concluya que si B es arcoconexo, entonces todas las fibras son homotópicamente equivalentes. Si ademas p tiene la propiedad de L.U.C., entonces todas las fibras son homeomorfas.

6. Sea $p : E \to B$ una fibración. Sean $e \in E$, $b = p(e)$.

   a) Pruebe que que si B es simplemente conexo, entonces la inclusión de la fibra E_b en E induce un epimorfismo $i_* : \pi_1(E_b, e) \to \pi_1(E, e)$.

   b) Pruebe que si la fibra E_b es simplemente conexa, entonces $p_* : \pi_1(E, e) \to \pi_1(B, b)$ es un isomorfismo.

   c) Pruebe que si E es simplemente conexo, entonces hay una biyección entre $\pi_1(B, b)$ y $\pi_0(E_b)$.

7. Sea $p : E \to B$ una fibración con l.u.c, con E arcoconexo y fijemos $b_0 \in B$, $e_0 \in p^{-1}(b_0)$.

   a) Si $\pi_1(B, b_0) \cong \mathbb{Z}$, entonces o bien $\pi_1(E, e_0) \cong \mathbb{Z}$ o bien $\pi_1(E, e_0) = 0$.

b) Si $\pi_1(B, b_0)$ es finito, entonces también lo es $\pi_1(E, e_0)$ y

$$|\pi_1(B, b_0)| = |\pi_1(E, e_0)||p^{-1}(b_0)|.$$

c) Si B es simplemente conexo y p revestimiento, entonces p es un homeomorfismo.

Revestimientos

8. Pruebe que las siguientes funciones son revestimientos:

   a) $p : \mathbb{R} \to S^1$, $p(x) = (\cos(2\pi x), \mathrm{sen}(2\pi x))$.

   b) $f : S^1 \to S^1$, $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$ fijo.

   c) $p : S^n \to P^n$ la proyección al plano proyectivo.

   d) G grupo topológico, H subgrupo discreto de G y $p : G \to G/H$ la proyección al cociente.

   e) $p : E \to B$, $p(x, y) = (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$, donde $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Z} \text{ ó } y \in \mathbb{Z}\}$ y $B = \{(z, w) \in S^1 \times S^1 : z = 1 \text{ ó } w = 1\}$.

9. Pruebe que $p : \mathbb{R}_{>0} \to S^1$ definida por $p(x) = (\cos(2\pi x), \mathrm{sen}(2\pi x))$ es un homeomorfismo local pero no es un revestimiento.

10. Pruebe que si $p : E \to B$ es un revestimiento, entonces p es abierta y por lo tanto es cociente.

11. Pruebe que si $p : E \to B$ es un revestimiento, la fibra $E_b = p^{-1}(b)$ es un subespacio discreto de E para todo $b \in B$. Pruebe además que si B es conexo, todas las fibras tienen el mismo cardinal.

12. Pruebe que si $p : E \to B$ y $p' : E' \to B'$ son revestimientos, entonces $p \times p' : E \times E' \to B \times B'$ también lo es. Use este resultado para calcular el grupo fundamental del toro.

13. Sean $p : X \to Y$ y $q : Y \to Z$ revestimientos. Pruebe que si $q^{-1}(z)$ es finito para cada $z \in Z$, entonces $qp : X \to Z$ es un revestimiento.

14. Pruebe que los revestimientos son estables por cambio de base. En particular, si $p : E \to B$ es revestimiento y $A \subset B$, entonces $p|_{p^{-1}(A)} : p^{-1}(A) \to A$ es revestimiento.

15. Sea B un espacio conexo y localmente conexo, y sea $p : E \to B$ un revestimiento. Pruebe que si C es una componente conexa de E, entonces $p|_C : C \to B$ es un revestimiento.

16. Sea $p : \mathbb{R} \to S^1$ el revestimiento usual. Pruebe que $f : X \to S^1$ puede levantarse a una función continua $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ tal que $p\tilde{f} = f$ si y sólo si f es null homotópica.

17. Sea G un grupo topológico y X un G-espacio. Decimos que la acción es *libre* si $gx \neq x$ para todo $x \in X$ y todo $g \in G$, $g \neq e$. Decimos que la acción es *propiamente discontinua* si para todo $x \in X$ existe U entorno abierto de x tal que $gU \cap U = \varnothing$ para todo $g \in G$, $g \neq e$.

    a) Pruebe que si G es finito, X es Hausdorff y la acción es libre, entonces es propiamente discontinua.

b) Pruebe que si G actúa en X y la acción es propiamente discontinua, entonces la proyección $p : X \to X/G$ es un revestimiento.

c) Sea $X = \mathbb{R} \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Sea $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ el subgrupo generado por ϕ,donde $\phi(z) = \bar{z} + 1 + i$. Pruebe que la acción de G en X es propiamente discontinua, y que X/G es homemomorfo a la banda de Möbius.

d) Calcular el grupo fundamental de la banda de Möbius.

18. Sabiendo que $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, calcule el grupo fundamental de los siguientes espacios.

    a) $X = S^1 \times [0,1]$, un cilindro.

    b) $X = S^1 \times \mathbb{R}$, un cilindro infinito.

    c) $X = \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, el plano pinchado.

    d) $X = M$, la banda de Möbius.

    e) $X = T = S^1 \times S^1$, el toro usual.

    f) $X = \mathbb{R}^3 \backslash L$, donde L es una recta o un plano.

Aplicaciones del Teorema de Brouwer y Borsuk-Ulam

19. Demuestre que si A es un retracto del disco D^2, entonces toda función continua $f : A \to A$ tiene un punto fijo.

20. Demuestre que si $f : S^1 \to S^1$ es null-homotópica, entonces tiene un punto fijo y además existe $x \in S^1$ tal que $f(x) = -x$.

21. Teorema de Lusternik-Schnirelmann (para dimensión 2). Pruebe que si S^2 se cubre con tres abiertos, entonces uno de ellos contiene dos puntos antipodales.

22. Pruebe que si $f : S^2 \to S^2$ es continua y $f(x) \neq f(-x)$ para todo x, entonces f es sobreyectiva.

11

Teorema de van Kampen

11.1. Producto libre de grupos, presentaciones y productos amalgamados

En esta sección vamos a introducir el teorema de van Kampen, una herramienta esencial para el cálculo del grupo fundamental de un espacio. Para eso tenemos que familiarizarnos con algunas nociones algebraicas.

Repasamos primero la noción de producto libre de grupos. Este va a ser el coproducto en la categoría de grupos, es decir que va a cumplir su propiedad universal.

Sea $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de grupos. Definiremos $\underset{\alpha\in\Lambda}{*} G_\alpha$ el producto libre. Va a ser el conjunto de "palabras reducidas" de longitud finita $m \geqslant 0$ (el caso $m = 0$ corresponde a la palabra vacía). Una palabra $w \in \underset{\alpha\in\Lambda}{*} G_\alpha$ va a ser $w = g_1...g_m$ con $g_i \in G_{\alpha_i}$, $g_i \neq 1_{G_{\alpha_i}}$, $\alpha_i \neq \alpha_{i+1} \forall i$. Si $w = g_1...g_m$ es una palabra no reducida (es decir $\exists g_i, g_{i+1} \in G_\alpha$), entonces la podemos reducir a una de longitud menor a m agrupando g_i y g_{i+1} (reemplazándolos por su producto en G_α). En caso de que $g_i g_{i+1} = 1_{G_\alpha}$ directamente los "borramos".

Puede probarse que, a partir de cualquier palabra no reducida w, se puede obtener una palabra reducida, que notaremos $r(w)$, aplicando estas reducciones, y que $r(w)$ queda bien definida, independientemente del orden elegido para hacer las reducciones. Definimos un producto en $\underset{\alpha\in\Lambda}{*} G_\alpha$ por $w_1 w_2 = r(w_1 w_2)$ (la reducción de la yuxtaposición). Notamos que la palabra vacía va a ser el neutro de esta operación.

Observación. Para cada $\beta \in \Lambda$ tenemos la inclusión canónica $G_\beta \hookrightarrow \underset{\alpha\in\Lambda}{*} G_\alpha$ que le asigna a cada $g \in G_\beta$, $g \neq 1$, la palabra de una letra g y al neutro 1_{G_β}, la palabra vacía.

Proposición. $\underset{\alpha\in\Lambda}{*} G_\alpha$ tiene la siguiente propiedad universal: $\forall H$ grupo, $\forall$ familia de morfismos de grupos $\phi_\alpha : G_\alpha \to H$, $\exists! \phi : \underset{\alpha\in\Lambda}{*} G_\alpha \to H$ tal que $\phi \circ i_\alpha = \phi_\alpha$.

Demostración. Usar que $\phi(g_1...g_m) = \phi_{\alpha_1}(g_1)...\phi_{\alpha_m}(g_m)$.

Observación. Dados G y H grupos, el morfismo inducido $G * H \to G \times H$ es sobreyectivo.

Ejemplo. Caractericemos $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Si pensamos a la primera copia como el grupo libre generado por a, y a la segunda por b, tenemos que $w \in \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ se escribe como $w = a^{m_1} b^{m_2} a^{m_3}...$ o $w = b^{m_1} a^{m_2} b^{m_3}...$, con m_i enteros. Equivalentemente, los elementos de $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ son palabras en las letras a, b, a^{-1}, b^{-1}.

Definición. Un grupo libre es un producto libre de arbitrarias copias de $\mathbb{Z}$. Visto como en el ejemplo anterior, $\underset{\alpha \in \Lambda}{*} \mathbb{Z}_\alpha$ está formado por palabras en los símbolos $\{a_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ y $\{a_\alpha^{-1}\}_{\alpha \in \Lambda}$.

Dado un conjunto S, notamos $F(S)$ al grupo de palabras reducidas en símbolos $S \cup S^{-1}$; este es el grupo libre generado por S.

Definición alternativa. G es libre si $\exists S \subseteq G$ subconjunto con la siguiente propiedad universal: $\forall H$ grupo y $\forall \varphi : S \to H$ función, $\exists ! \bar{\varphi} : G \to H$ morfismo de grupos tal que $\bar{\varphi}|_S = \varphi$. Al conjunto S se lo llama base de G.

Definición. Sea G grupo libre, y S base de G. Definimos el rango de G, $\text{rg}(G) = \#S$. Afirmamos que el rango está bien definido, pues si consideramos $N =< g^2 | g \in G >$ se puede probar que $N \lhd G$ y que G/N es un $\mathbb{Z}_2$- espacio vectorial de dimensión $\#S$.

Observación. G y H son grupos libres si y sólo si $G * H$ lo es.

Observación. Todo grupo es cociente de un grupo libre. Dado un grupo G, tomamos un sistema de generadores $S \subseteq G$. Consideramos $F(S) \xrightarrow{\varphi} G \to 1$. Entonces $F(S)/\ker(\varphi) \equiv G$. Esto es, podemos pensar a todo grupo como el generado por un conjunto de elementos que deben cumplir ciertas relaciones, que generan el núcleo de φ. Formalizamos esta noción en la siguiente definición.

Definición. Sea G un grupo, una presentación de G es $\mathcal{P} =< X | R >$, donde X es un conjunto de generadores de G y $R \subseteq F(X)$ es tal que $G \equiv F(X)/ << R >>$, donde $<< R >>= \bigcap\limits_{\substack{N \lhd F(X) \\ R \subseteq N}} N$ es el subgrupo normal generado por R.

Ejemplos.

- $< a | > \rightsquigarrow \mathbb{Z}$.
- $< a | a^n > \rightsquigarrow \mathbb{Z}_n$.
- $< a | a > \rightsquigarrow 1$.
- $< a, b | > \rightsquigarrow \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = F(a, b)$.
- $< a, b | [a, b] > \rightsquigarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.
- $< a, b | a^2 > \rightsquigarrow \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}$.

- $< a, b | a^2, b^2 > \rightsquigarrow \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$.
- $< r, s | r^n, s^2, srsr > \rightsquigarrow D_n$.
- $< a, b | ba^2b^{-1} = a^3, ab^2a^{-1} = b^3 > \rightsquigarrow 1$.
- $< a, b | aba = bab, a^4 = b^3 > \rightsquigarrow 1$.
- $< a, b, c | c^{-1}bc = b^2, a^{-1}ca = c^2, b^{-1}ab = a^2 > \rightsquigarrow 1$.

Otro concepto que vamos a introducir antes de enunciar el teorema de van Kampen es el de producto amalgamado. Este va a ser el pushout en la categoría de grupos.

Dados T, G y H grupos con morfismos $\varphi : T \to H$ y $\psi : T \to G$, queremos un grupo $G \underset{T}{*} H$ con morfismos $\bar{\varphi} : G \to G \underset{T}{*} H$ y $\bar{\psi} : H \to G \underset{T}{*} H$, tal que para todo grupo S y funciones $f_H : H \to S$, $f_G : G \to S$ tales que $f_h \varphi = f_G \psi$, exista una única $f : G \underset{T}{*} H \to S$ tal que $f\bar{\psi} = f_H$ y $f\bar{\varphi} = f_G$. Esta propiedad puede expresarse en términos del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"] & H \arrow[d, "\bar{\psi}"] \arrow[ddr, bend left, "f_H"] & \\
G \arrow[r, "\bar{\varphi}"] \arrow[drr, bend right, "f_G"'] & G \underset{T}{*} H \arrow[dr, dotted, "\exists! f"] & \\
 & & S
\end{tikzcd} \quad .$$

Por cumplir una propiedad universal, es único salvo isomorfismos. Veamos más explícitamente quién es $G \underset{T}{*} H$. Si consideramos $N =<< \varphi(t)\psi(t)^{-1} >>_{t \in T}$, entonces resulta que $G \underset{T}{*} H = \frac{G*H}{N}$.

Observaciones.

- $G \underset{T}{*} H = G * H$ si $T = 1$.
- Si $G = H = 1$, $G \underset{T}{*} H = 1$.
- Si $G = 1$, $G \underset{T}{*} H = \frac{H}{<<\mathrm{im}\varphi>>}$.

11.2. Teorema de van Kampen

El teorema de van Kampen es una de las principales herramientas para calcular el grupo fundamental de un espacio. Es un resultado de naturaleza local-global: permite calcular el grupo fundamental de un espacio a partir de los grupos fundamentales de los abiertos de un cubrimiento (y de sus intersecciones). Vamos a exhibir la demostración para el caso de un cubrimiento por dos abiertos, luego enunciaremos la version general (para un cubrimiento por una cantidad arbitraria de abiertos). La idea de la demostración para el caso general es similar al caso que probamos aquí. La demostración del caso general puede consultarse en el libro de Hatcher.

Sea X espacio topológico, $U, V \subseteq X$ abiertos con $X = U \cup V$. Supongamos además que $U, V, U \cap V$ son arco conexos y sea $x_0 \in U \cap V$. Tenemos los siguientes diagramas de inclusiones de subespacios y de morfismos inducidos por esas inclusiones:

$$\begin{tikzcd} U \cap V \arrow[r, hook, "i_u"] \arrow[d, hook, "i_V"] & U \arrow[d, hook, "j_U"] \\ V \arrow[r, hook, "j_V"] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \pi_1(U \cap V, x_0) \arrow[r, "i_{U*}"] \arrow[d, "i_{V*}"] & \pi_1(U, x_0) \arrow[d, "j_{U*}"] \\ \pi_1(V, x_0) \arrow[r, "j_{V*}"] & \pi_1(X, x_0) \end{tikzcd}.$$

Entonces existe única $j : \pi_1(U, x_0) \underset{\pi_1(U \cap V, x_0)}{*} \pi_1(V, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ tal que $j|_{\pi_1(V,x_0)} = j_{V*}$ y $j|_{\pi_1(U,x_0)} = j_{U*}$.

Teorema de van Kampen (versión para dos abiertos). Bajo las condiciones anteriores, j es un isomorfismo de grupos. Es decir,

$$\pi_1(X, x_0) \equiv \pi_1(U, x_0) \underset{\pi_1(U \cap V, x_0)}{*} \pi_1(V, x_0) = \frac{\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)}{N},$$

donde $N = << i_{u*}(w) i_{v*}(w)^{-1} >>_{w \in \pi_1(U \cap V, x_0)}$.

Antes de demostrar el teorema vamos a ver un par de aplicaciones y observaciones.

Corolario. Sea X espacio topológico, $U, V \subseteq X$ abiertos simplemente conexos con $U \cap V$ arco conexo. Entonces $\pi_1(X) = 1$, por lo que X es simplemente conexo.

Demostración. $\pi_1(X) = \pi_1(U) * \pi_1(V)/N = 1 * 1/N = 1$. ■

Corolario. Si $n \geqslant 2$, S^n es simplemente conexo.

Demostración. Sean p el polo norte y q el polo sur. Tomamos $U = S^n \backslash \{p\}$ y $V = S^n \backslash \{q\}$, ambos homeomorfos a $\mathbb{R}^n$, que es contráctil. Entonces U y V son simplemente conexos. Además su intersección es $S^n \backslash p, q \simeq S^{n-1}$, $n \geqslant 2$, que es arco conexa. Entonces S^n es simplemente conexo. ■

Observación. Del hecho de que S^n es simplemente conexo para $n \geqslant 2$ y que el cociente al espacio proyectivo $q : S^n \to \mathbb{R}P^n$ es un revestimiento de 2 hojas (ejercicio para el lector), se desprende el siguiente resultado:

Corolario. $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2$ si $n \geqslant 2$.

Demostración. Como S^n es simplemente conexo, tenemos una biyección entre $\pi_1(\mathbb{R}P^n)$ y la fibra de algún elemento, que tiene dos elementos. Como hay un único grupo de dos elementos, es necesariamente $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2$ si $n \geqslant 2$. ■

Ahora vamos a enunciar el teorema de van Kampen en su versión más general.

Teorema de van Kampen. Sea X espacio topológico, $x_0 \in X$. Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de abiertos de X tal que $X = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$, $x_0 \in A_\alpha\ \forall\alpha$, A_α arco conexo $\forall\alpha$, $A_\alpha \cap A_\beta$ arco conexo $\forall\alpha,\beta$, $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma$ es arco conexo $\forall\alpha,\beta,\gamma$. Entonces

$$\pi_1(X,x_0) = \frac{\mathop{\ast}\limits_{\alpha\in\Lambda} \pi_1(A_\alpha,x_0)}{N},$$

donde $N =<< i_{\alpha *}(w) i_{\beta_*}(w)^{-1} >>_{\substack{w\in\pi_1(A_\alpha\cap A_\beta,x_0) \\ \alpha,\beta\in\Lambda}}$.

Previo a la demostración del teorema, vamos a hacer algunas observaciones:

1. Sea $\omega : I \to X$ un camino, $0 = t_0 < ... < t_n = 1$ partición de I. Definimos $\omega_i = \omega|_{[t_{i-1},t_i]} \circ \varphi_i$ con $\varphi_i : I \to [t_{i-1},t_i]$ el homeomorfismo lineal que manda el 0 a t_{i-1} y el 1 a t_i. Entonces $\omega \underset{p}{\simeq} \omega_1 * ... * \omega_n$.

2. Sea $F : I \times I \to X$, $F : \omega \simeq \omega'$ (como funciones, no necesariamente como caminos). Observando el siguiente diagrama,

$$\begin{array}{ccc} & \omega' & \\ \varphi_0 & \boxed{\;F\;} & \varphi_1 \\ & \omega & \end{array},$$

vemos que $\varphi_0 * \omega' \underset{p}{\simeq} \omega * \varphi_1$. Esto viene de que $I \times I$ es convexo y viendo el siguiente diagrama,

$$\begin{array}{ccc} & \gamma_2 & \\ \gamma_1 & \boxed{\quad} & \gamma_4 \\ & \gamma_3 & \end{array},$$

la situación que tenemos es $F(\gamma_1 * \gamma_2) \underset{p}{\simeq} F(\gamma_3 * \gamma_4)$.

Demostración del teorema de van Kampen. Observando los diagramas mencionados al enunciar el teorema por primera vez, vemos que $\exists! j : \pi_1(U,x_0) \underset{\pi_1(U\cap V,x_0)}{*} \pi_1(V,x_0) \to \pi_1(X,x_0)$ tal que $j|_{\pi_1(V,x_0)} = j_{V*}$ y $j|_{\pi_1(U,x_0)} = j_{U*}$. Debemos ver que j es un isomorfismo, y para ello basta ver que $\pi_1(X)$ tiene la propiedad universal del producto amalgamado. Es decir:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U\cap V) \arrow[r, "i_U"] \arrow[d, "i_V"] & \pi_1(U) \arrow[d, "j_U"] \arrow[ddr, bend left, "\phi_U"] & \\
\pi_1(V) \arrow[r, "j_V"] \arrow[drr, bend right, "\phi_V"'] & \pi_1(X) \arrow[dr, dotted, "\exists!\phi"] & \\
& & H
\end{tikzcd}.$$

De ahora en adelante, si ω es un camino o lazo en U, vamos a notar por $[\omega]$ a la clase homotópica de ω en X y por $[\omega]_U$ a la clase homotópica de ω en U. Lo mismo para V y $U \cap V$. Si ω es un lazo en x_0 en U, $j_U([\omega]_U) = [\omega]$. Si ahora está en $U \cap V$, $i_U([\omega]_{U\cap V}) = [\omega]_U$, y así para todas las posibles combinaciones. Vamos a dividir lo que resta de la demostración en dos pasos:

1. Primero veremos la unicidad de ϕ, si es que existe. Para eso basta ver que $j_U(\pi_1 U)$ y $j_V(\pi_1 V)$ generan $\pi_1 X$, o lo que es lo mismo: $j : \pi_1 U * \pi_1 V \to \pi_1 X$ es epimorfismo.

   Sea $[\omega] \in \pi_1 X$, $\omega : I \to X$, I compacto, $\{U, V\}$ cubrimiento por abiertos de X. Veamos que existen $t_0 = 0 < t_1 < ... < t_n = 1$ tales que $\omega|_{[t_{i-1},t_i]} \subseteq U$ o V $\forall i$, subdividido de tal forma que $\omega(t_i) \in U \cap V$ $\forall i$. Por el lema del número de Lebesgue existe una subdivisión $0 = s_0 < ... < s_m = 1$ de I tal que cada restricción está contenida en U o V. Si $\omega(s_i) \in U \cap V$ $\forall i$ ya estamos. Si no, sea i tal que $\omega(s_i) \notin U \cap V$. Cada conjunto de la forma $\omega([s_{i-1}, s_i])$ y $\omega([s_i, s_{i+1}])$ está en U o en V. Si $\omega(s_i) \in U$, entonces ambos conjuntos están en U, y lo mismo si $\omega(s_i) \in V$. En cualquier caso, podemos sacar a s_i de la subdivisión, así obteniendo la partición $t_0 = 0 < t_1 < ... < t_n = 1$ deseada.

   Por una observación previa, tenemos que $\omega \underset{p}{\simeq} \omega'_1 * ... * \omega'_n$, donde ω'_i es la restricción reescalada a $[t_{i-1}, t_i]$. Sea $x_0 \xrightarrow{\alpha_i} x_i = \omega(t_i)$ un camino en $U \cap V$. A α_0 y α_n los tomamos constantes. Sean $\omega_i = \alpha_{i-1} * \omega'_i * \bar{\alpha}_i$ lazos en x_0. Notamos que $\omega \underset{p}{\simeq} (\alpha_0 * \omega'_1 * \bar{\alpha_1}) * (\alpha_1 * \omega'_2 * \bar{\alpha_2}) * ... * \alpha_n \underset{p}{\simeq} \omega_1 * ... * \omega_n$. Entonces $[\omega] = [\omega_1]...[\omega_n] = j_U([\omega_1])j_V([\omega_2])...$

2. Ahora debemos construir $\phi : \pi_1 X \to H$ tal que $\phi j_U = \phi_U$, $\phi j_V = \phi_V$.

   a) Definiremos ρ en los lazos que caen en U o V. Sea ω lazo en U o V, $\rho(\omega) = \begin{cases} \phi_U([\omega]_U) & \omega \subseteq U \\ \phi_V([\omega]_V) & \omega \subseteq V \end{cases}$. Si ω cae en $U \cap V$, no hay problema porque

   $$\rho(\omega) = \phi_U([\omega]_U) = \phi_U(i_U([\omega]_{U\cap V})) =$$

   $$\phi_V(i_V([\omega]_{U\cap V})) = \phi_V([\omega]_V) = \rho(\omega).$$

   Si ω, ω' son lazos en U o V (ambos) y $[\omega]_U = [\omega']_U$, entonces $\rho(\omega) = \rho(\omega')$. Nuevamente si ω, ω' son lazos en U o V (ambos), entonces $\rho(\omega * \omega') = \rho(\omega)\rho(\omega')$.

   b) Vamos a extender ρ a una ρ' que estará definida en caminos que caen en U o V. Para cada $x \in X$ elegimos $x_0 \xrightarrow{\alpha_x} x$ con α_x camino en U si $x \in U$; camino en V si $x \in V$; camino en $U \cap V$ si $x \in U \cap V$; y e_{x_0} si $x = x_0$. Dado $x \xrightarrow{\omega} y$ camino en U o V, definimos $L(\omega) = \alpha_x * \omega * \bar{\alpha}_y$, lazo en x_0. Definimos $\rho'(\omega) = \rho(L(\omega))$. Esta ρ' extiende a ρ, pues si ω es un lazo en x_0, $\rho'(\omega) = \rho(L(\omega)) = \rho(\omega)$ porque $L(\omega) = e_{x_0} * \omega * e_{x_0} \underset{p}{\simeq} \omega$. También cumple que si ω, ω' caminos en U o V (ambos) y $\omega \underset{p}{\simeq} \omega'$, entonces $\rho'(\omega) = \rho'(\omega')$; y que si ω, ω' caminos en U o V (ambos), entonces $\rho'(\omega * \omega') = \rho'(\omega)\rho'(\omega')$.

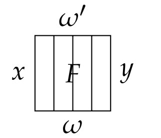
   c) Extendemos ahora ρ' a ρ'' que estará definida en caminos de X tal que ρ'' cumple:

      (1) $\omega \underset{p}{\simeq} \omega'$ en X, entonces $\rho''(\omega) = \rho''(\omega')$.

      (2) $\rho''(\omega * \omega') = \rho''(\omega)\rho''(\omega')$.

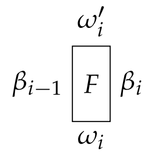
Sea ω camino en X, existe una partición de I $t_0 = 0 < ... < t_n = 1$ con $\omega([t_{i-1}, t_i])$ en U o V. Tenemos que $\omega \underset{p}{\simeq} \omega_1 * ... * \omega_n$ con $\omega_i = \omega|_{[t_{i-1},t_i]}$ reescalada. Definimos $\rho''(\omega) = \rho'(\omega_1)...\rho'(\omega_n)$. Veamos que ρ'' no depende de la partición. Como dos subdivisiones se pueden refinar en una subdivisión en común, basta ver que ρ'' permanece inalterable si agregamos un elemento p a la subdivisión $t_0 = 0 < ... < t_{i-1} < p < t_i < ... < t_n = 1$. Sean $\omega_i^1 = \omega|_{[t_{i-1},p]}, \omega_i^2 = \omega|_{[p,t_i]}$, entonces $\rho''(\omega) = \rho'(\omega_1)...\rho'(\omega_i^1)\rho'(\omega_i^2)...\rho'(\omega_n)$. Pero $\omega_i \underset{p}{\simeq} \omega_i^1 * \omega_i^2$, y ρ' se lleva bien con $*$ y $\underset{p}{\simeq}$, entonces ρ'' está bien definida.

Veamos que cumple (1). Sea $F : I \times I \to X$ tal que $F : \omega \underset{p}{\simeq} \omega'$. Supongamos que existe una subdivisión $s_0 = 0 < ... < s_n = 1$ de I tal que $F([s_{i-1}, s_i] \times I) \subseteq U$ o V,



.

Consideramos $\omega_i = \omega|_{[s_{i-1},s_i]}$ reescalada, y lo mismo para ω_i'. Sean $\beta_i(t) = F(s_i, t)$,



.

Entonces $\beta_{i-1} * \omega_i' \underset{p}{\simeq} \omega_i * \beta_i$ en U o V. Luego $\rho'(\beta_{i-1} * \omega_i') = \rho'(\omega_i * \beta_i) \Rightarrow \rho'(\beta_{i-1})\rho'(\omega_i') = \rho'(\omega_i)\rho'(\beta_i)$ en H. Así $\rho'(\omega_i) = \rho'(\beta_{i-1})\rho'(\omega_i')\rho'(\beta_i)^{-1}$, por lo que,

$$\rho''(\omega) = \rho'(\omega_1)...\rho'(\omega_n) = \rho'(\beta_0)\rho'(\omega_1')\rho'(\beta_1)^{-1}...\rho'(\beta_n)^{-1} =$$
$$\rho'(\omega_1')...\rho'(\omega_n') = \rho''(\omega').$$

En general, existen particiones de I $t_0 = 0 < ... < t_n = 1$ y $s_0 = 0 < ... < s_n = 1$ tales que $F([s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]) \subseteq U$ o V. Consideramos $\tilde{\omega}_j(s) = F(s, t_j)$. Tenemos que $\tilde{\omega}_0 = \omega$, $\tilde{\omega}_n = \omega'$, y por lo hecho recién, $\rho''(\tilde{\omega}_{j-1}) = \rho''(\tilde{\omega}_j)$. Entonces $\rho''(\omega) = \rho''(\omega')$.

Por último debemos ver que $\rho''(\omega * \omega') = \rho''(\omega)\rho''(\omega')$. Consideramos una subdivisión $t_0 = 0 < ... < t_n = 1$ de I tal que $t_m = 1/2$ para algún $0 < m < n$ y tal que $\omega * \omega'([t_{i-1}, t_i]) \subseteq U$ o V. Tomamos w_i y w_i' como antes y obtenemos:

$$\rho''(\omega * \omega') = \rho'(\omega_1)...\rho'(\omega_m)\rho(\omega_{m+1}')...\rho'(\omega_n') = \rho''(\omega)\rho''(\omega').$$

Definimos $\phi : \pi_1 X \to H$ con $\phi([\omega]) = \rho''(\omega)$. Está bien definida y es un morfismo de grupos por las condiciones (1) y (2) que le pedimos a ρ''. Sea ω un lazo en U, $\phi(j_U([\omega]_U)) = \phi([\omega]) = \rho''(\omega) = \rho(\omega) = \phi_U([\omega]_U)$. Lo mismo se hace si ω es un lazo en V. Entonces ϕ cumple $\phi j_U = \phi_U$ y $\phi j_V = \phi_V$. ■

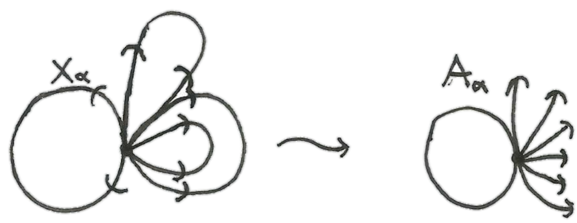
Observación. En el caso general de van Kampen, si $A_\alpha \cap A_\beta$ es simplemente conexo $\forall \alpha, \beta$, entonces $\pi_1 X = *_\alpha \pi_1 A_\alpha$.

Definición. (X, a) se dice bien punteado si $\exists U$ abierto en X, $x \in U$ tal que $\{x\} \subseteq U$ es rdf.

Observación. Los CW-complejos son bien punteados.

Proposición. Si $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una familia de espacios arco conexos bien punteados, entonces $\pi_1(\bigvee_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha) = *_\alpha \pi_1 X_\alpha$. En particular, $\pi(\bigvee_{\alpha\in\Lambda} S^1) = F(\Lambda)$ (el grupo libre generado por el conjunto Λ).

Demostración. Para cada $\alpha \in \Lambda$ existe U_α abierto tal que $x_\alpha \in U \subseteq X_\alpha$, con $\{x_\alpha\} \subseteq U$ rdf.



Sean $A_\alpha = X_\alpha \bigvee_{\beta\neq\alpha} U_\beta$, $X_\alpha \subseteq A_\alpha$ rdf. Si $\alpha \neq \beta$, entonces $A_\alpha \cap A_\beta = \bigvee_\alpha U_\alpha \simeq *$, que es simplemente conexo. Además si $\alpha \neq \beta \neq \gamma$, $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma = \bigvee_\alpha U_\alpha$, que es arco conexo. Entonces $\pi_1(\bigvee_\alpha X_\alpha) = *_\alpha \pi_1(A_\alpha) = *_\alpha \pi_1(X_\alpha)$. ■

11.3. Grupo fundamental de grafos

Un caso particular en el que podemos aplicar el teorema de van Kampen es en el cálculo del grupo fundamental de grafos. Primero vamos a definir algunos conceptos con más precisión.

Definiciones.

- Un grafo es un CW-complejo de dimensión menor o igual a 1.
- Un subgrafo Γ' de un grafo Γ es un subcomplejo.
- Un árbol es un grafo contráctil.
- Un árbol T en un grafo Γ es un árbol T que es subgrafo de Γ.
- Un árbol T es maximal en Γ si es un árbol en Γ que contiene a todos los vértices de Γ.

Proposición. Sea X un grafo conexo. Entonces $\exists T \subseteq X$ árbol maximal. Más aún, dado $X_0 \subseteq X$ subgrafo, $\exists Y \subseteq X$ grafo tal que $V_Y = V_X$, $X_0 \subseteq Y$ rdf.

Demostración. Sea $\varnothing \neq X_0 \subseteq X$ subgrafo. Construiremos $X_0 \subseteq X_1 \subseteq ... \subseteq X\ \forall n$. Supongamos construido X_{i-1}, X_i se obtiene de X_{i-1} adjuntándole las 1-celdas de $X\backslash X_{i-1}$ que tienen algún vértice final en X_{i-1}. Consideramos $\bigcup_{i\geqslant 0} X_i \subseteq X$. Es abierto en X porque si $x \in X_i$, entonces existe un abierto $x \in U \subseteq X_{i+1}$. También es cerrado, pues es la unión de aristas cerradas, y tiene la topología final respecto a las celdas. Entonces $\bigcup_{i\geqslant 0} X_i = X$.

Ahora construimos el Y deseado. Comenzamos por $Y_0 = X_0$ y construimos $Y_0 \subseteq Y_1 \subseteq ... \subseteq Y$. Supongamos tenemos $Y_{i-1} \subseteq X_{i-1}$, $V_{Y_{i-1}} = V_{X_{i-1}}$. Construimos Y_i a partir de Y_{i-1} adjuntando por cada vértice de X_i que no es vértice de X_{i-1} una única arista que lo una a X_{i-1}. Tenemos que $Y_{i-1} \subseteq Y_i$ es rdf. Tomamos $Y = \bigcup_{i\geqslant 1} Y_i$, con $V_Y = V_{\cup X_i} = V_X$.

Veamos que $X_0 \subseteq Y$ es rdf. Debemos armar una homotopía $H : Y \times I \to Y$ con $H : ir \simeq 1_Y$ rel X_0. Sean H_i las homotopías canónicas que sirven entre Y_{i+1} e Y_i reescaladas al intervalo $[1/2^{i+1}, 1/2^i]$. Definimos H como H_i en $Y \times [1/2^{i+1}, 1/2^i]$ y $H(x, 0) = x$. Notamos que no hay problema con el dominio de las H_i, porque H_{i+1} ya dejó a todos los elementos en Y_{i+1}.

Lo único que resta ver es que H es continua. Como Y tiene la topología final respecto de las aristas cerradas, basta ver que es continua en cada arista. Sea F un cerrado de una arista. Esa arista comienza a aparecer a partir de un cierto Y_j. Entonces $H^{-1}(F) = F \times [0, 1/2^j] \cup B$. Donde B es su preimagen por H_{j-1} reescalada, que es cerrada en $Y \times [1/2^j, 1/2^{j-1}]$. Luego H es continua. ■

Con este resultado podemos calcular el grupo fundamental de un grafo conexo X. Sea $T \subseteq X$ un árbol maximal. Se puede probar que si W es un CW-complejo y $Z \subseteq W$ un subcomplejo contráctil, entonces $q : W \to W/Z$ es una equivalencia homotópica (ver libro de Hatcher).

Notemos por E_X al conjunto de aristas de X, y por E_T al de T. Tenemos que $X \to X/T$ es una equivalencia homotópica, y es fácil ver que X/T es un wedge de S^1, $X/T = \bigvee_{E_X\backslash E_T} S^1$. Como corolario de van Kampen, vimos que $\pi_1 X = \pi_1(X/T) = \pi_1(\bigvee_{E_X\backslash E_T} S^1) = F(E_X\backslash E_T)$. Por lo tanto, $\pi_1(X) = F(E_X\backslash E_T)$. Es decir, *el grupo fundamental de un grafo conexo es el grupo libre en tantos generadores como aristas que no estén en un árbol maximal.*

11.4. Comportamiento del π_1 al adjuntar una 2-celda

Observación. Intuitivamente, al adjuntar una 2-celda no podemos crear agujeros nuevos de dimensión 1, pero podemos tapar total o parcialmente agujeros de dimensión 1. También podemos crear agujeros de dimensión 2, pero el π_1 no los mide.

Ejemplos.

1. Si a un S^1 le adjuntamos un disco pegándolo en su borde por la identidad, obtenemos otro disco. Antes teníamos que $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ y ahora $\pi_1(D^2) = 0$. Es decir que "tapamos el agujero".

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "1_{S^1}"] \arrow[d] & S^1 \arrow[d, hook, "i"] \\ D^2 \arrow[r] & Y \end{tikzcd} .$$

En términos de presentaciones lo que tenemos es $< a| > \xrightarrow{i_*} < a|a >$.

2. También podemos adjuntarle una 2-celda a S^1 para obtener el plano proyectivo:

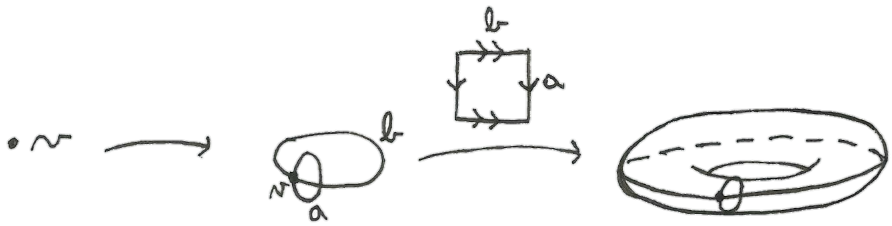
$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "z^2"] \arrow[d] & S^1 \arrow[d, hook, "i"] \\ D^2 \arrow[r, "\bar{\varphi}"] & \mathbb{R}P^2 \end{tikzcd} .$$

   En este caso $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ y $\pi_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}_2$. Puede pensarse que tampamos el agujero parcialmente. Nuevamente, viendo las presentaciones tenemos $< a| > \xrightarrow{i_*} < a|a^2 >$.

3. Dado $S^1 \vee S^1$, si identificamos cada lazo como en la imagen, podemos considerar la función de pegado que recorre $aba^{-1}b^{-1}$. En este caso vamos a obtener un toro.

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "aba^{-1}b^{-1}"] \arrow[d] & S^1 \vee S^1 \arrow[d, hook, "i"] \\ D^2 \arrow[r, "\bar{\varphi}"] & T \end{tikzcd} .$$

   La presentación del π_1 del toro es $< a, b|aba^{-1}b^{-1} >$.



Dado un espacio topológico X arco conexo, $\varphi : S^1 \to X$, $Y = X \bigcup_{\varphi} e^2$, $s_0 \in S^1$ con $x_0 = \varphi(s_0) \in X$. Tenemos el siguiente diagrama,

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & X \arrow[d, hook, "i"] \\ D^2 \arrow[r, "\bar{\varphi}"] & Y \end{tikzcd} .$$

Podemos ver a φ como un lazo en x_0. Veamos que $i_*[\varphi] = 0$. Sabemos que $i_*[\varphi] = [i\varphi]$, e $i\varphi$ se extiende al disco. Entonces $i\varphi \simeq cte \Rightarrow i\varphi \underset{\text{lazo}}{\simeq} cte \Rightarrow [i\varphi] = 0 \Rightarrow i_*[\varphi] = 0$. Como $[\varphi] \in \ker i_* \Rightarrow << [\varphi] >> \subseteq \ker i_*$.

Teorema. Sea X arco conexo, $\varphi : S^1 \to X$ continua, $s_0 \in S^1$, $x_0 = \varphi(s_0)$. Sea $Y = X \bigcup_{\varphi} e^2$. Entonces $i_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, x_0)$ es epimorfismo y $\ker i_* = << [\varphi] >>$. Es decir $\pi_1(Y, x_0) \equiv \pi_1(X, x_0) / << [\varphi] >>$.

Demostración. Tenemos

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, hook, "i"] \\ D^2 \arrow[r, "\bar{\varphi}"] & Y \end{tikzcd}$$

con $e^2 = \bar{\varphi}(D^2)$, $\dot{e}^2 = i\phi(S^1)$, $\mathring{e}^2 = e^2 \backslash \dot{e}^2$ abierto de Y. Tomamos $0 \in D^2$ el centro del disco, $y = \bar{\varphi}(0) \in \mathring{e}^2$. Si consideramos $A = Y \backslash \{y\}$ abierto de Y, tenemos el siguiente pushout,

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, hook, "i"] \arrow[ddr, bend left, "1_X"] & \\ D^2 \backslash \{0\} \arrow[r, "\bar{\varphi}"] \arrow[drr, bend right, "\varphi R"'] & A \arrow[dr, dotted, "\exists ! r"] & \\ & & X \end{tikzcd},$$

donde $R : D^2 \backslash \{0\} \to S^1$ con $R(x) = \frac{x}{||x||}$. Entonces $r : A \to X$ es una retracción, pues $r|_X = 1_X$. Intuitivamente, r va a ser la proyección radial de los radios de $D^2 \backslash \{0\}$. Además r es rdf con la siguiente homotopía $H : A \times I \to A$,

$$H(a,t) = \begin{cases} a & a \in i(X) \\ \bar{\varphi}|_A((1-t)\bar{\varphi}^{-1}(a) + t\frac{\bar{\varphi}^{-1}(a)}{||\bar{\varphi}^{-1}(a)||}) & a \in \bar{\varphi}|_A(\mathring{D}^2 \backslash \{0\}) \end{cases},$$

que va bajando el interior del disco la imagen de su borde. Otra forma de ver que es rdf es mirar el siguiente diagrama,

$$\begin{tikzcd} S^1 \times I \arrow[r, "\varphi \times id"] \arrow[d, hook] & X \times I \arrow[d, hook, "i \times id"] \\ (D^2 \backslash \{0\}) \times I \arrow[r, "\bar{\varphi} \times id"] & A \times I \end{tikzcd},$$

que es un pushout, pues I es localmente compacto y T_2. Entonces obtenemos

$$\begin{tikzcd} S^1 \times I \arrow[r, "\varphi \times id"] \arrow[d, hook] & X \times I \arrow[d, hook, "i \times id"] \arrow[ddr, bend left, "i"] & \\ (D^2 \backslash \{0\}) \times I \arrow[r, "\bar{\varphi} \times id"] \arrow[drr, bend right, "F"'] & A \times I \arrow[dr, dotted, "\exists ! H"] & \\ & & A \end{tikzcd},$$

donde F es la homotopía que comienza siendo la inclusión de la imagen del disco punteado y termina siendo φR (es la que se obtiene de notar que S^1 es rdf en $D^2 \backslash \{0\}$). Entonces H va a ser una homotopía entre ir y la identidad. En particular, va a ser estable en X, que es lo que queríamos.

Sea $B = \mathring{e}^2$ abierto de Y, $A \cup B = Y$, $A \cap B \simeq \mathring{D}^2 \backslash \{0\}$ mediante $\bar{\varphi}$. Sea $\bar{r} = r|_{e^2 \backslash \{y\}} : e^2 \backslash \{y\} \to e^2$. Sea $z \in B \backslash \{y\}$ tal que $\bar{r}(z) = r(z) = x_0$. Por van Kampen vale que $\pi_1(Y, z) =$

$\frac{\pi_1(A,z)*\pi_1(B,z)}{N} = \frac{\pi_1(A,z)}{N}$ donde $N =<< Im(j_*) >>$ con $j_* : \pi_1(A \cap B, z) \to \pi_1(A, z)$. Notamos que como $A \cap B \simeq \mathring{D}^2 \backslash \{0\}$ y $\pi_1(\mathring{D}^2 \backslash \{0\}) =< \gamma >$, entonces $\pi_1(A \cap B, z) =< \bar{\varphi}(\gamma) >$. Luego tenemos un isomorfismo

$$\frac{\pi_1(A,z)}{<< Im(j_*) >>} \xrightarrow{r_*} \frac{\pi_1(X,x_0)}{r_*(<< Im(j_*) >>)} =$$

$$\frac{\pi_1(X,x_0)}{<< Im(\varphi_*) >>} = \frac{\pi_1(X,x_0)}{<< [\varphi] >>}. \blacksquare$$

Teorema. Sea X arco conexo, $Y = X \bigcup_\varphi e^n$, $\varphi : S^{n-1} \to X$ (Y se obtiene adjuntándole una n-celda a X), $n \geqslant 3$. Entonces $i : X \to Y$ induce un isomorfismo $i_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, x_0)$. En particular, si K es un CW-complejo arco conexo, $i : K^{(2)} \to K$ induce un isomorfismo en π_1.

Demostración. La primera parte es exactamente la misma demostración que antes. Ahora veamos que el π_1 de un CW arco conexo sólo depende de su 2-esqueleto. Con una demostración similar a la anterior (o haciendo lo que vamos a hacer a continuación para cada esqueleto), puede generalizarse el resultado a adjuntar arbitrarias n-celdas (ver Hatcher). Entonces tenemos un isomorfismo entre el π_1 del 2-esqueleto, y los demás.

Veamos que el morfismo inducido por la inclusión $i : K^{(2)} \to K$ es un monomorfismo y un epimorfismo. Primero veamos que es un epimorfismo. Sea ω un camino en X. Como I es compacto, el camino cae en un subcomplejo finito, y en particular en algún n-esqueleto. Dentro de ese esqueleto, puede deformarse a un camino en el 2-esqueleto. Luego i_* es epimorfismo. Para ver que es un monomorfismo, sean ω, ω' dos caminos en el 2-esqueleto que son homotópicos en X. Sea H la homotopía que los conecta. Como $I \times I$ es compacto, la homotopía cae dentro de un n-esqueleto. Entonces puede llevarse al 2-esqueleto. Es decir que $\omega \underset{p}{\simeq} \omega'$ en el 2-esqueleto. Por lo tanto i_* también es monomorfismo. $\blacksquare$

Corolario. Para todo grupo G, $\exists K$ CW-complejo arco conexo de dimensión 2 tal que $\pi_1 K = G$.

Demostración. Vamos a probarlo para el caso en el que el grupo admite una presentación finita, pero el resultado puede generalizarse.

Sea $P =< s_i ... s_n | r_1 ... r_m >$ una presentación para G. Comenzamos por hacer un wedge X de S^1, con un S^1 por cada s_i. Ahora, para cada relación r_i adjuntamos una 2-celda $e^2_{r_i}$ vía $\phi_{r_i} : S^1 \to X$ viendo a S^1 como un polígono de long(r_i) lados. Sea $K_P = X \bigcup_{i=1}^m e^2_{r_i}$. Entonces por el teorema anterior $\pi_1(K_P) = \frac{F(s_1 ... s_n)}{<<r_1 ... r_n>>} = G$. $\blacksquare$

11.5. Ejercicios

1. Determine los grupos fundamentales de los siguientes espacios:

   a) $T^2 \backslash \{pt\}$, el toro perforado en un punto;

   b) $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \backslash \{pt\}$, el plano proyectivo real perforado en un punto;

c) $S^n \vee S^m$, la unión de dos esferas por un punto;

d) $S^1 \cup (\mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \{0\})$;

e) $S^1 \cup (\mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \mathbb{R})$;

f) $S^1 \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$;

g) $\mathbb{R}^2 \backslash (\mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \{0\})$.

2. Sean $n \geqslant 3$ y $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto finito. Pruebe que $\mathbb{R}^n \smallsetminus A$ es simplemente conexo.

3. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^m$ la unión de abiertos convexos $X_1 \cdots X_n$ tales que $X_i \cap X_j \cap X_k \neq \varnothing$ para todo i, j, k. Muestre que X es simplemente conexo.

4. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea C_i la circunferencia en $\mathbb{R}^2$ con centro en $(n, 0)$ y radio n. Sea $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \subseteq \mathbb{R}^2$ y sea $x_0 = (0, 0) \in X$. Pruebe que $\pi_1(X, x_0)$ es el grupo libre $*_{n \in N} \pi_1(C_n)$, el mismo que el grupo fundamental del wedge infinito $\bigvee_{n \in N} S^1$. Muestre que X y $\bigvee_{n \in N} S^1$ son homotópicamente equivalentes, pero no homeomorfos.

5. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea C_i la circunferencia en $\mathbb{R}^2$ con centro en $(1/n, 0)$ y radio $1/n$. Sea $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \subseteq \mathbb{R}^2$ y sea $x_0 = (0, 0) \in X$. Pruebe que $\pi_1(X, x_0)$ es un grupo no numerable.

6. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $Y_n = \{x \in \mathbb{R}^2 : \text{existe } j \in \{1, \ldots, n\} \text{ tal que } d(x, (j - \frac{1}{2}, 0)) = \frac{1}{2}\}$. Determine $\pi_1(Y_n, 0)$.

7. Sea $n \in \mathbb{N}$. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^3$ la unión de n rectas por el origen. Calcule $\pi_1(\mathbb{R}^3 \smallsetminus X)$.

8. Sea X el espacio cociente de S^2 que se obtiene de identificar el polo norte y el polo sur en un punto. Calcule $\pi_1(X)$.

9. a) Si $L \subseteq \mathbb{R}^n$ es una variedad lineal de dimensión k, con $0 \leqslant k \leqslant n-2$, determine el grupo $\pi_1(\mathbb{R}^n \backslash L)$.

   b) Si $C \subseteq \mathbb{R}^3$ es una circunferencia, entonces $\pi_1(\mathbb{R}^3 \backslash C) = \mathbb{Z}$.

10. Sea $K = I \times I / \sim$ donde $(x, y) \sim (x', y')$ si se satisface alguna de las siguientes condiciones:

$$(x = x' \text{ e } y = y') \text{ ó } (\{y, y'\} = \{0, 1\} \text{ y } x = x') \text{ ó } (\{x, x'\} = \{0, 1\} \text{ e } y + y' = 1)$$

El espacio K es la *Botella de Klein*. Calcule (una presentación d)el grupo fundamental de K.

12

Clasificación de revestimientos

12.1. Revestimientos y subgrupos conjugados

En este capítulo vamos a estudiar la relación entre los revestimientos de un espacio y los subgrupos de su grupo fundamental. Esto va a ser de gran utilidad ya que en algunos casos los revestimientos de un espacio son bien conocidos y nos van a permitir extraer información sobre su π_1. Del mismo modo vamos a poder sacar conclusiones en el otro sentido.

Definición. Dados dos subgrupos H_0 y H_1 de G, decimos que son conjugados si existe $a \in G$ tal que $H_0 = aH_1a^{-1}$. Observamos que ser conjugados es una relación de equivalencia en el conjunto de subgrupos de G.

Proposición. Sea $p : E \to B$ un revestimiento arco conexo, $b_0 \in B$.

1. Sean $e_0, e_1 \in E_{b_0} \Rightarrow Fix(e_0), Fix(e_1)$ son conjugados en $\pi_1(B, b_0)$.

2. Sea $e_0 \in E_{b_0}$, $H \subseteq \pi_1(B, b_0)$, H subgrupo conjugado a $Fix(e_0) \Rightarrow \exists e_1 \in E_{b_0}$ tal que $H = Fix(e_1)$.

Demostración.

1. Como E es arco conexo, existe un camino $e_0 \xrightarrow{\gamma} e_1$ en E. Tenemos que $p \circ \gamma$ es un lazo en b_0, entonces $[p \circ \gamma] \in \pi_1(B, b_0)$. Sea $[\omega] \in Fix(e_0) \Rightarrow \omega = p\tilde{\omega}^{e_0}$, $[\tilde{\omega}] \in \pi_1(E, e_0)$. Entonces $[\overline{p \circ \gamma}][\omega][p \circ \gamma] = [p\bar{\gamma}][p\tilde{\omega}][p\gamma] = p_*[\bar{\gamma}\tilde{\omega}\gamma]$. Entonces $[\overline{p\gamma}]Fix(e_0)[p\gamma] \subseteq Fix(e_1)$. Usando $e_1 \xrightarrow{\bar{\gamma}} e_0$ sale la otra inclusión.

2. Sea ω tal que $[\omega]H[\bar{\omega}] = Fix(e_0)$. Sea $e_1 = \tilde{\omega}(1) \Rightarrow H = Fix(e_1)$. ■

Definición. Sea B arco conexo, sean $p : E \to B$ y $p' : E' \to B$ dos revestimientos arco conexos sobre B. Decimos que son equivalentes si $\exists \varphi : E \to E'$ homeomorfismo tal que

$p'\varphi = p$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\ & B & \end{tikzcd}.$$

Esto define una relación de equivalencia en el conjunto de revestimientos arco conexos sobre B.

Proposición. Sea B espacio topológico arco conexo, $b_0 \in B$. Si $p : E \to B, p' : E' \to B$ son revestimientos arco conexos equivalentes, entonces definen la misma clase de conjugación de subgrupos de $\pi_1(B, b_0)$. Es decir, $\forall e_0 \in E_{b_0}$, $\forall e_1 \in E'_{b_0}$, $Fix(e_0)$ y $Fix(e_1)$ son conjugados. Equivalentemente, $\forall e_0 \in E_{b_0}$, $\exists e_1 \in E'_{b_0}$ tal que $Fix(e_0) = Fix(e_1)$.

Demostración. Tenemos un homeomorfismo $\varphi : E \to E'$ tal que $p'\varphi = p$. Sea $e_0 \in E_{b_0}$, entonces, como φ es un homeomorfismo, $\varphi_*(\pi_1(E, e_0)) = \pi_1(E', e_1)$, donde $e_1 = \varphi(e_0)$. Entonces

$$Fix(e_0) = p_*(\pi_1(E, e_0)) = p'_*\varphi_*(\pi_1(E, e_0)) = p'_*(\pi_1(E', e_1)) = Fix(e_1). \blacksquare$$

Corolario. Sea B arco conexo, $b_0 \in B$. Se tiene una función bien definida

$$\begin{aligned} \psi : \{\text{cls equiv revs arco conexos } p : E \to B\} &\longrightarrow \{\text{cls conjug subgrp de } \pi_1(B, b_0)\} \\ p : E \to B &\longmapsto Fix(e_0) \text{ para cualquier } e_0 \in E_{b_0} \end{aligned}$$

En lo que sigue vamos a tener dos objetivos. Primero, probar que si B es arco conexo y localmente arco conexo, entonces ψ es inyectiva. Luego veremos que bajo ”buenas condiciones locales.[en] B, ψ es sobreyectiva, y por lo tanto una biyección.

Teorema (propiedad de levantamiento de funciones). Sean $p : E \to B$ un revestimiento arco conexo, $b_0 \in B$, $e_0 \in E_{b_0}$, Y arco conexo y localmente arco conexo, $f : Y \to B$ continua, $y_0 \in Y$, $f(y_0) = b_0$. Entonces $\exists \tilde{f} : Y \to E$ continua tal que $p\tilde{f} = f$, $\tilde{f}(y_0) = e_0$ si y sólo si $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq Fix(e_0)$. En este caso $\tilde{f}$ es única tal que $\tilde{f}(y_0) = e_0$.

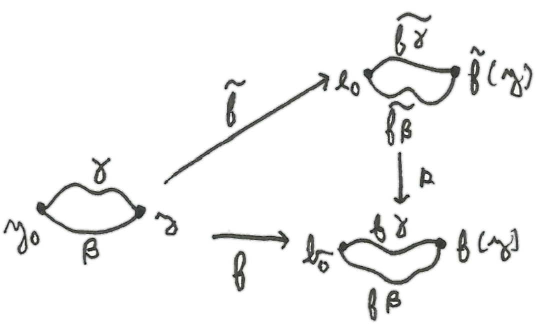
$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, dotted, "\exists \tilde{f}"] \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Demostración. Observamos que la unicidad de $\tilde{f}$, en caso de existir, ya la hemos probado (pues Y es, en particular, conexo).

$\Rightarrow$) Si existe $\tilde{f}$ como la del enunciado, $f_*(\pi_1(Y, y_0)) = p_*(\tilde{f}_*(\pi_1(Y, y_0))) \subseteq p_*(\pi_1(e, e_0)) = Fix(e_0)$.

$\Leftarrow$) Sea $y \in Y$, $y_0 \xrightarrow{\gamma} y$ un camino en Y. El camino $f\gamma$ va de b_0 a $f(y)$ en B, y tiene un único levantado $\widetilde{f\gamma}$ a partir de e_0. Definimos $\tilde{f}(y) = \widetilde{f\gamma}(1)$. Es claro que esta $\tilde{f}$ hace conmutar el diagrama.

Para ver que la definición no depende de la elección de γ: sea β otro camino entre y_0 e y, $[\gamma * \overline{\beta}] \in \pi_1(Y, y_0)$. Tenemos que $f_*([\gamma * \overline{\beta}]) \in f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq Fix(e_0)$. Entonces $e_0 = \widetilde{f(\gamma * \overline{\beta})}^{e_0}(1) = \widetilde{f\gamma * \overline{f\beta}}^{e_0}(1)$. Luego $\widetilde{f\gamma}^{e_0}(1) = \widetilde{f\beta}^{e_0}(1)$.



Resta ver que $\tilde{f}$ es continua. Dado $y \in Y$ y un abierto N de E alrededor de $\tilde{f}(y)$, debemos ver que existe un abierto W de Y con $y \in W$ y $\tilde{f}(W) \subseteq N$. Sea U un abierto parejamente cubierto alrededor de $f(y)$. Sea V_α homeomorfo a U vía $p_\alpha = p|_{V_\alpha}$, con $\tilde{f}(y) \in V_\alpha$. Tomamos $\tilde{U} = p_\alpha(N \cap V_\alpha)$. Sea $W' = f^{-1}(\tilde{U})$, abierto alrededor de y. Como Y el localmente arco conexo existe $W \subseteq W'$ entorno abierto arco conexo de y. Dado $y' \in W$, existen caminos $y_0 \xrightarrow{\gamma} y \xrightarrow{\delta} y'$. Entonces,

$$b_0 \xrightarrow{f\gamma} f(y) \xrightarrow{f\delta} f(y') \in \tilde{U} \Rightarrow e_0 \xrightarrow{\widetilde{f\gamma}} \tilde{f}(y) \xrightarrow{\tilde{f\delta} = p_\alpha^{-1} f\delta} \tilde{f}(y')$$

por la definición de $\tilde{f}$ (tenemos un único levantado, y por definición, $\tilde{f}(y')$ es donde termina ese levantado). Entonces $\tilde{f}(W) \subseteq N$. ■

Corolario. Sea B arco conexo y localmente arco conexo, $b_0 \in B$, $p : E \to B, p' : E' \to B$ revestimientos arco conexos, $e_0 \in E_{b_0}$, $e_1 \in E'_{b_0}$. Si $Fix(e_0)$ y $Fix(e_1)$ son conjugados en $\pi_1(B, b_0)$, entonces p y p' son revestimientos equivalentes.

Demostración. Sólo hay que notar que como B es localmente arco conexo, E y E' también lo son, y aplicar el teorema anterior. ■

Corolario. Sean $p : E \to B, p' : E' \to B$ revestimientos arco conexos y localmente arco conexos, $e_0 \in E_{b_0}, e_1 \in E'_{b_0}$ tales que $Fix(e_0) \subseteq Fix(e_1)$. Entonces existe una única $\varphi : E \to E'$ tal que $p'\varphi = p$ y $\varphi(e_0) = e_1$.

Definición. Un revestimiento $p : E \to B$ se dice universal si E es simplemente conexo. En este caso, $\forall p' : E' \to B$ revestimiento arco conexo existe una única $\varphi : E \to E'$ tal que $p'\varphi = p$ y $\varphi(e_0) = e_1$ (habiendo elegido b_0, e_0 y e_1).

Veamos ahora las condiciones locales "buenas" que tiene que cumplir B para que tenga revestimiento universal (o equivalentemente: que la función ψ definida anteriormente sea sobreyectiva).

Definición. B se dice semilocalmente simplemente conexo si $\forall b \in B\ \exists U$ abierto en B, $b \in U$ tal que $i_* : \pi_1(U, b) \to \pi_1(B, b)$ es trivial.

Observación 1. Si $U \subseteq B$ es abierto arco conexo y $\exists \tilde{b} \in U$ tal que $i_* : \pi_1(U, \tilde{b}) \to \pi_1(B, \tilde{b})$ es trivial, entonces $\forall b \in U$ $i_* : \pi_1(U, b) \to \pi_1(B, b)$ es trivial. En este caso escribimos $i_* : \pi_1 U \to \pi_1 B$.

Observación 2. Sea B localmente arco conexo y semilocalmente simplemente conexo. Entonces $\mathcal{U} = \{U \subseteq B \mid U \text{ abierto arco conexo}, i_* : \pi_1 U \to \pi_1 B \text{ trivial}\}$ es una base para al topología de B. Para ver que es una base, sea $b \in B$, V abierto de B con $b \in V$, debemos ver que $\exists U \in \mathcal{U}$ tal que $b \in U \subseteq V$. Como B es semilocalmente simplemente conexo, $\exists W$ abierto con $b \in W$ e $i_* : \pi_1(W, b) \to \pi_1(B, b)$ trivial. Sea U abierto arco conexo tal que $b \in U \subseteq V \cap W$. Como $U \subseteq W$, $i_* : \pi_1(U, b) \to \pi_1(B, b)$ es trivial.

Teorema 1. Sea B arco conexo, localmente arco conexo y semilocalmente simplemente conexo. Entonces existe $p : E \to B$ revestimiento universal.

Demostración. Sea $b_0 \in B$. Consideramos la base de la topología de B, $\mathcal{U} = \{U \subseteq B \mid U \text{ abierto arco conexo}, i_* : \pi_1 U \to \pi_1 B \text{ trivial}\}$. Vamos a construir el revestimiento universal en varios pasos.

1. Primero veamos quiénes van a ser E y $p : E \to B$. Definimos
$$E = \{[\gamma] \mid \gamma \text{ camino en } B, \gamma(0) = b_0\},$$
donde $[\gamma] = [\gamma']$ si $\gamma \underset{p}{\simeq} \gamma'$. Definimos $p : E \to B$ como $p([\gamma]) = \gamma(1)$. Como B es arco conexo, p resulta sobreyectiva.

2. Vamos a darle una topología a E. Dados $[\gamma] \in E$ y $U \in \mathcal{U}$ tal que $\gamma(1) \in U$, definimos $U_{[\gamma]} = \{[\gamma * \eta] \mid \eta \text{ camino en } U, \eta(0) = \gamma(1)\} \subseteq E$. La restricción $p|_{U_{[\gamma]}} : U_{[\gamma]} \to U$ es sobreyectiva porque U es arco conexo. Además es inyectiva: supongamos que $[\gamma * \eta], [\gamma * \eta'] \in U_{[\gamma]}$ tales que $\eta(1) = p[\gamma * \eta] = p[\gamma * \eta'] = \eta'(1)$ y $\eta(0) = \eta'(0) = \gamma(1)$. Consideramos $\eta * \bar{\eta}'$ un lazo en U. Como $i_* : \pi_1 U \to \pi_1 B$ es cero, $\eta * \bar{\eta}' \underset{p}{\simeq} cte_{\gamma(1)}$ en B. Entonces $\gamma * \eta \underset{p}{\simeq} \gamma * \eta'$ y $[\gamma * \eta] = [\gamma * \eta']$. Luego $p|_{U_{[\gamma]}}$ es una biyección.

   Veamos que si $[\gamma'] \in U_{[\gamma]} \Rightarrow U_{[\gamma]} = U_{[\gamma']}$. Como $[\gamma'] \in U_{[\gamma]}$, $[\gamma'] = [\gamma * \eta]$. Entonces los elementos de $U_{[\gamma']}$ son de la forma $[\gamma * \eta * \eta']$, por lo que $U_{[\gamma']} \subseteq U_{[\gamma]}$. De la misma manera, lo elementos de $U_{[\gamma]}$ son de la forma $[\gamma * \eta'] = [\gamma * \eta * \bar{\eta} * \eta'] = [\gamma' * \bar{\eta} * \eta'] \in U_{[\gamma']}$.

Sea $\mathcal{B} = \{U_{[\gamma]} \mid U \in \mathcal{U}, [\gamma] \in E \text{ tal que } \gamma(1) \in U\}$. Veamos que $\mathcal{B}$ es una base para una topología en E:

- Cubre a E, pues dado $[\gamma] \in E$, elegimos $U \in \mathcal{U}$ tal que $\gamma(1) \in U$. Entonces $[\gamma] \in U_{[\gamma]}$.
- Sean $U_{[\gamma_1]}, V_{[\gamma_2]} \in \mathcal{B}$, $[\gamma] \in U_{[\gamma_1]} \cap V_{[\gamma_2]}$. Por lo visto recién, $U_{[\gamma_1]} = U_{[\gamma]}$ y $V_{[\gamma_2]}, V_{[\gamma]}$. Como $\mathcal{U}$ es base de B, existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $\gamma(1) \in W \subseteq U \cap V$. Entonces $[\gamma] \in W_{[\gamma]} \subseteq U_{[\gamma]} \cap V_{[\gamma]} = U_{[\gamma_1]} \cap V_{[\gamma_2]}$.

Le damos a E la topología inducida por esta base.

3. Tenemos que probar que $p : E \to B$ es un revestimiento. La función es abierta, ya que en los abiertos de la base, $p(U_{[\gamma]}) = U$, que es abierto en B. Para ver que es continua, sean $[\gamma] \in E$ y $W \subseteq B$ abierto tal que $\gamma(1) = p[\gamma] \in W$. Sea $U \in \mathcal{U}$ tal que $\gamma(1) \in U \subseteq W \Rightarrow [\gamma] \in U_{[\gamma]}$ y $p(U_{[\gamma]}) \subseteq W$. Por último, como $p|_{U_{[\gamma]}} : U_{[\gamma]} \to U$ es biyectiva, resulta en este caso un homeomorfismo y $p^{-1}(U) = \coprod U_{[\gamma]}$.

4. Sólo resta ver que E es simplemente conexo. Primero veamos que es arco conexo. Sea $e_0 = [e_{b_0}] \in E$. Sea $[\gamma] \in E$, probaremos que existe un camino de e_0 a $[\gamma]$. Para cada $t \in I$ fijo, definimos $\gamma_t : I \to B$ como $\gamma_t(s) = \begin{cases} \gamma(s) & s \leqslant t \\ \gamma(t) & s \geqslant t \end{cases}$. Notamos que $\gamma_0 = e_{b_0}$ y $\gamma_1 = \gamma$. Definimos el camino $\tilde{\gamma} : I \to E$ como $\tilde{\gamma}(t) = [\gamma_t]$. Veamos que es continuo. Sea W abierto de E, con $[\gamma_s] \in W$. Basta ver que para cada elemento $a \in \tilde{\gamma}^{-1}([\gamma_s])$ existe un abierto $a \in V \subseteq I$ tal que $\tilde{\gamma}(V) \subseteq W$. Lo haremos para $a = s$. Sea $U_{[\gamma_s]} \subseteq W$ un abierto básico tal que $p|_{U_{[\gamma_s]}} : U_{[\gamma_s]} \to U$ es un homeomorfismo. Sea $V \subseteq I$ abierto tal que $s \in V$, $\gamma(V) \subseteq U$. Entonces $\tilde{\gamma}(V) \subseteq U_{[\gamma_s]}$, pues $\tilde{\gamma} = p|^{-1}_{U_{[\gamma_s]}}\gamma$ en $U_{[\gamma_s]}$.

   Para ver que $\pi_1(E, e_0) = 0$ basta ver que $Fix(e_0) = 0$, pues p_* es monomorfismo. Sea $[\omega] \in Fix(e_0) \subseteq \pi_1(B, b_0)$. Entonces $e_0 = \tilde{\omega}^{e_0}(1) = \tilde{\omega}(1) = [\omega] \Rightarrow \omega \underset{p}{\simeq} e_{b_0}$. Por lo tanto $Fix(e_0) = 0$. ■

Teorema 2. Sea B arco conexo, localmente arco conexo y semilocalmente simplemente conexo. Sea $H \leqslant \pi_1(B, b_0)$, $b_0 \in B$. Entonces existe $p_H : E_H \to B$ revestimiento arco conexo y $e_1 \in E_H$ tal que $Fix(e_1) = H$.

Demostración. Sea $p : E \to B$ el revestimiento universal construido en el teorema 1. Definiremos una relación de equivalencia en E: $[\gamma] \sim [\gamma']$ si $\gamma(1) = \gamma'(1)$ y $[\gamma * \bar{\gamma}'] \in H$. Sean $E_H = E/\sim$ y $q : E \to E_H$ la función cociente. Notamos que $[\gamma] \sim [\gamma'] \iff \forall \eta, [\gamma * \eta] \sim [\gamma' * \eta]$. Entonces si $[\gamma] \sim [\gamma']$, $q(U_{[\gamma]}) = q(U_{[\gamma']})$. Esto implica que la extensión al cociente $p_H : E_H \to B$ es un revestimiento (pegamos "panqueques", pero los "panqueques" en sí no cambian).

Elegimos $e_1 \in E_H$ la clase de equivalencia del camino constante e_{b_0}. Sea γ un lazo en b_0, su levantado a E empezando en $[e_{b_0}]$ termina en $[\gamma]$. Luego la imagen de este levantado en E_H es un lazo si y sólo si $[\gamma] \sim [e_{b_0}]$, o equivalentemente, $[\gamma] \in H$. ■

Corolario. Si B es lo sufucientemente "bueno" (arco conexo, localmente arco conexo, semilocalmente simplemente conexo) entonces ψ es una biyección, y los revestimientos arco conexos quedan clasificados por las clases de conjugación de subgrupos de $\pi_1(B, b_0)$.

12.2. Transformaciones deck y revestimientos normales

Definición. Sea $p : E \to B$ un revestimiento arco conexo. Una transformación deck es un homeomorfismo $\varphi : E \to E$ tal que $p\varphi = p$.

Observación 1. Si φ es una transformación deck y $e \in E_b$, entonces $\varphi(e) \in E_b$.

Observación 2. Como E es arco conexo, por el teorema de unicidad de levantados, una transformación deck φ queda determinada por lo que vale en algún (cualquier) punto de E. En particular, si $\varphi(x) = x$ para algún $x \in E$, entonces $\varphi = 1_E$.

Definición. Sea $p : E \to B$ revestimiento arco conexo. Definimos $G_E = \{\varphi : E \to E \mid \text{transformación deck}\}$ que es un grupo con la composición. Este grupo actúa sobre E a izquierda, con $\varphi x = \varphi(x)$, y la acción resulta libre, por la observación anterior.

Ejemplos.

1. Sea $p : \mathbb{R} \to S^1$ dada por $p(t) = e^{2\pi i t}$. Entonces las transformaciones deck van a ser $\varphi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $\varphi_k(x) = x + k,\ \forall k \in \mathbb{Z}$. Es decir que $G \equiv \mathbb{Z}$.
2. Si tenemos $p : S^1 \to S^1$ dada por $p(x) = x^n$, entonces sus transfomaciones deck van a ser las rotaciones por $\frac{2k\pi}{n}$ para $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Luego $G \equiv \mathbb{Z}_n$.

Definición. Un revestimiento arco conexo $p : E \to B$ se dice normal si $\forall b \in B$ y $\forall e, e' \in E_b$, $\exists \varphi$ deck tal que $\varphi(e) = e'$.

Teorema. Sea B localmente arco conexo, $p : E \to B$ revestimiento arco conexo. Sea $b_0 \in B$ y $e_0 \in E_{B_0}$. Entonces:

1. $p : E \to B$ es normal $\iff Fix(e_0) \lhd \pi_1(B, b_0)$.
2. $G_E \equiv N/Fix(e_0)$, donde N es el normalizador de $Fix(e_0)$ en $\pi_1(B, b_0)$, es decir $N = \{[\omega] \in \pi_1(B, b_0) \mid [\omega]Fix(e_0)[\bar{\omega}] = Fix(e_0)\}$. En particular, si $p : E \to B$ es normal, $G_E \equiv \pi_1(B, b_0)/Fix(e_0)$. Más en particular, si $p : E \to B$ es un revestimiento universal, $G_E \equiv \pi_1(B, b_0)$.

Demostración.

1. $Fix(e_0) \lhd \pi_1(B, b_0) \iff$ todo conjugado de $Fix(e_0)$ es $Fix(e_0) \iff \forall e, e' \in E_{b_0}, Fix(e) = Fix(e') \iff \forall e, e' \in E_{b_0}\ \exists \varphi : E \to E$ homeomorfismo con $\varphi(e) = e'$.
2. Sea $[\omega] \in N \Rightarrow Fix(e_0) = [\bar{\omega}]Fix(e_0)[\omega] = Fix(e_1)$ con $e_1 = \tilde{\omega}^{e_0}(1)$. Como $Fix(e_0) = Fix(e_1)$, $\exists! \varphi_{[\omega]} \in G_E$ tal que $\varphi_{[\omega]}(e_0) = e_1$. Sea $\psi : N \to G_E$ con $\psi[\omega] = \varphi_{[\omega]}$. Veamos que ψ es morfismo de grupos. Sean $[\omega], [\omega']$ tales que $\varphi_{[\omega]}(e_0) = e_1$ y $\varphi_{[\omega']}(e_0) = e_1'$, queremos ver que $\varphi_{[\omega * \omega']} = \varphi_{[\omega]} \circ \varphi_{[\omega']}$. Veamos que $\widetilde{\omega * \omega'}^{e_0} = \tilde{\omega}^{e_0} * (\varphi_{[\omega]} \circ \tilde{\omega'}^{e_0})$. Tenemos que
$$p(\tilde{\omega}^{e_0} * (\varphi_{[\omega]} \circ \tilde{\omega'}^{e_0})) = p(\tilde{\omega}^{e_0}) * p(\varphi_{[\omega]} \circ \tilde{\omega'}^{e_0}) = \omega * p(\tilde{\omega'}^{e_0}) = \omega * \omega'.$$

Entonces por L.U.C., son iguales.

Ahora veamos que ψ es un epimorfismo. Sea $\varphi \in G_E$ con $\varphi(e_0) = e_1$. Necesitamos $[\omega] \in N$ tal que $\tilde{\omega}^{e_0}(1) = e_1$. Como $Fix(e_0)$ y $Fix(e_1)$ son conjugados, existe ω tal que $[\bar{\omega}]Fix(e_0)[\omega] = Fix(e_1)$, en particular $\tilde{\omega}^{e_0}(1) = e_1$. Además, como φ es transformación deck, $Fix(e_0) = Fix(e_1)$. Entonces $[\omega] \in N$.

Por último veamos que $\ker(\psi) = Fix(e_0)$. El núcleo de ψ son los $[\omega]$ tales que $\tilde{\omega}^{e_0}(1) = e_0$, es decir, tales que $\tilde{\omega}^{e_0}$ es lazo. Esto es justamente el $Fix(e_0)$. Entonces $G_E \equiv N/Fix(e_0)$. ■

12.3. Ejercicios

1. *a*) Pruebe que si $n > 1$, entonces toda función continua $S^n \to S^1$ es null-homotópica.
   b) Pruebe que toda función continua $P^2 \to S^1$ es null-homotópica.
   c) Exhiba una función $S^1 \times S^1 \to S^1$ que no sea null-homotópica.
2. Pruebe que si X es arcoconexo y localmente arcoconexo y $\pi_1(X)$ es finito, entonces toda función $X \to S^1$ es null-homotópica.
3. Sea $T = S^1 \times S^1$ el toro. Considerando el isomorfismo $\pi_1(T, (b_0, b_0)) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dado por las proyecciones, describa los revestimientos de T asociados a los subgrupos
   a) $\mathbb{Z} \times 0 \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;
   b) el subgrupo generado por $(1, 1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;
   c) $\{(2n, 2m) : n, m \in \mathbb{Z}\}$.
4. *a*) Pruebe que todo isomorfismo de $\pi_1(T, x_0)$ está inducido por algún homeomorfismo $T \to T$ que deja quieto a x_0.
   b) Pruebe que si E es un revestimiento conexo de T, entonces E es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$, $S^1 \times \mathbb{R}$ ó T.
   Sugerencia: si F es un grupo abeliano libre de rango 2 y N es un subgrupo no trivial, entonces existe una base $\{a_1, a_2\}$ de F tal que $\{na_1\}$ es base de N para algún n o bien $\{na_1, ma_2\}$ es base de N para ciertos n, m.
5. Sea G un grupo topológico arcoconexo y localmente arcoconexo con elemento neutro e, y sea $p : \tilde{G} \to G$ un revestimiento con $\tilde{G}$ arcoconexo y $\tilde{e} \in p^{-1}(e)$. Pruebe que la multiplicación $\mu : G \times G \to G$ y la función $\nu : G \to G$, $\nu(x) = x^{-1}$ se levantan a funciones $\tilde{\mu} : \tilde{G} \times \tilde{G} \to \tilde{G}$ y $\tilde{\nu} : \tilde{G} \to \tilde{G}$ que hacen de $\tilde{G}$ un grupo topológico con neutro $\tilde{e}$. Pruebe además que p es un morfismo.
6. Pruebe que si B admite un revestimiento universal, entonces B es semilocalmente simplemente conexo.
7. Sea $p : \tilde{X} \to X$ un revestimiento simplemente conexo de X, y sea $A \subseteq X$ un subespacio arcoconexo y localmente arcoconexo, con $\tilde{A} \subseteq \tilde{X}$ una componente arcoconexa de $p^{-1}(A)$. Muestre que $p : \tilde{A} \to A$ es el revestimiento correspondiente al núcleo del morfismo $i_* : \pi_1(A) \to \pi_1(X)$.

8. Sea $H = \bigcup_{n \geqslant 1} \partial B_{1/n}(1/n, 0) \subset \mathbb{R}^2$ el *arito Hawaiano*.

    a) Pruebe que H no es semilocalmente simplemente conexo.

    b) Sea $C(H)$ el *cono* de H, que consiste en el subespacio de $\mathbb{R}^3$ formado por la unión de todos los segmentos que unen un punto de $H \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ con el punto $(0, 0, 1)$. Pruebe que $C(H)$ es semilocalmente simplemente conexo pero no localmente simplemente conexo.

9. Sean X, Y, Z espacios arcoconexos y localmente arcoconexos y sean $q : X \to Y$, $r : Y \to Z$ funciones continuas. Sea $p = r \circ q$.

    a) Pruebe que si p y r son revestimientos, también lo es q. Pruebe que q es normal si p lo es.

    b) Pruebe que si p y q son revestimientos, también lo es r.

    c) Pruebe que si q y r son revestimientos y el espacio Z admite un revestimiento universal, entonces p también es un revestimiento.

10. Sea B arcoconexo, localmente arcoconexo y semilocalmente simplementeconexo. Sea $p : \tilde{E} \to B$ revestimiento universal. Dado un revestimiento arcoconexo $r : E \to B$, pruebe que existe un revestimiento $q : \tilde{E} \to E$ tal que $r \circ q = p$.

11. Sean E, B arcoconexos y localmente arcoconexos, y sea $p : E \to B$ un revestimiento, $b_0 \in B$, $e_0 \in p^{-1}(b_0)$. Una *transformación deck* es un homeomorfismo $h : E \to E$ tal que $ph = p$. El conjunto de transformaciones deck $\mathrm{Deck}(p)$ forman un grupo con la operación dada por la composición.

    a) Se dice que $p : E \to B$ es *normal* si para todo $b_0 \in B$ y $e_0, e_1 \in p^{-1}(b_0)$, existe una transformación deck tal que $h(e_0) = e_1$. Pruebe que p es normal si y sólo si $H = p_*(\pi_1(E, e_0))$ es un subgrupo normal de $\pi_1(B, b_0)$.

    b) Pruebe que si p es normal, $\mathrm{Deck}(p)$ es isomorfo a $\pi_1(B, b_0)/H$.

    c) Concluya que si $p : E \to B$ es un revestimiento universal de B, entonces $\pi_1(B, b_0)$ es isomorfo al grupo de transformaciones deck.

12. Describa el grupo de transformaciones deck del revestimiento usual $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1 \times S^1$.

13. Sea E un espacio topológico, y G un grupo que actúa en E de manera propiamente discontinua. Sea $p : E \to B$ es un revestimiento. Pruebe que:

    a) La proyección al cociente $q : E \to E/G$ es un revestimiento normal.

    b) Si E es arcoconexo, entonces G es el grupo de transformaciones deck de q.

    c) Existe un revestimiento $r : E/G \to B$ tal que $r \circ q = p$.

    d) Todo subgrupo H de $\mathrm{Deck}(p)$ actúa en E de manera propiamente discontinua, es decir, para todo $e \in E$, existe un abierto $U \ni e$ tal que $h(U) \cap U = \varnothing$ para todo $h \in H$.

13

Homología y aplicaciones

13.1. Conceptos generales

En lo que sigue A es un anillo.

Definición. Una sucesión de A-módulos es un diagrama de A-módulos y morfismos de A-módulos

$$\dots \longrightarrow C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \dots \xrightarrow{d_1} C_0 \longrightarrow 0$$

Decimos que la sucesión es exacta en el lugar k si $Im(d_{k+1}) = \ker(d_k)$. La sucesión es exacta si lo es en cada lugar.

Ejemplos.

1. $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ es exacta si y sólo si f es monomorfismo.

2. $M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ es exacta si y sólo si f es epimorfismo.

3. $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ es exacta si y sólo si f es isomorfismo.

Definición. Una sucesión exacta corta (s.e.c.) de módulos es una sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

Definición. Un complejo de cadenas (C_*, d) es una sucesión

$$... \longrightarrow C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} ... \xrightarrow{d_1} C_0 \longrightarrow 0$$

que cumple $d_k d_{k+1} = 0 \; \forall k$ (o equivalentemente $Im(d_{k+1}) \subseteq \ker(d_k) \forall k$).

Definiciones. Dado un complejo de cadenas (C_*, d) se definen:

- $Z_n = \ker(d_n) \subseteq C_n$ (n-ciclos).
- $B_n = Im(d_{n+1}) \subseteq C_n$ (n-bordes).
- $H_n(C_*) = Z_n/B_n = \ker(d_n)/Im(d_n + 1)$ (n-ésimo grupo de homología de (C_*, d)).

Definición. Si $H_n(C_*) = 0\ \forall n$, (C_*, d) se dice exacto o acíclico.

Definición. Un morfismo $\varphi : (C_*, d) \to (C'_*, d')$ es una familia de morfismos de A-módulos $\varphi_n : C_n \to C'_n$ tales que, para todo n, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "\varphi_n"] & C_{n-1} \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] \\ C'_n \arrow[r, "d'_n"] & C'_{n-1} \end{tikzcd} .$$

Proposición. Un morfismo $\varphi : (C_*, d) \to (C'_*, d')$ induce morfismos $(\varphi_*)_n : H_n(C_*) \to H_n(C'_*)$.

Demostración. Veamos que $\varphi_n(Z_n) \subseteq Z'_n$. Sea $x \in Z_n$, $d'_n\varphi_n(x) = \varphi_{n-1}d_n(x) = 0$. Entonces tenemos la siguiente sucesión:

$$Z_n \xrightarrow{\varphi_n} Z'_n \xrightarrow{q} H_n(C'_*)\ .$$

Queremos que pase al cociente para tener una flecha $H_n(C_*) \to H_n(C'_*)$. Para eso veamos que $\varphi_n(B_n) \subseteq B'_n$. Tenemos que

$$\varphi_n d_{n+1}(x) = d'_{n+1}\varphi_{n+1}(x) \in B'_n.$$

Entonces podemos definir $(\varphi_*)_n : H_n(C_*) \to H_n(C'_*)$ con $(\varphi_*)_n([x]) = [\varphi_n(x)]$. ■

Lema de la serpiente. Si se tiene un diagrama conmutativo de A-módulos

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, dotted] & \ker a \arrow[r] \arrow[d, hook] & \ker b \arrow[r] \arrow[d, hook] & \ker c \arrow[d, hook] & \\ 0 \arrow[r, dotted] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"] & P \arrow[r] \arrow[d, "c"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & N' \arrow[r, "g'"] \arrow[d] & P' \arrow[r, dotted] \arrow[d] & 0 \\ & \operatorname{coker} a \arrow[r] & \operatorname{coker} b \arrow[r] & \operatorname{coker} c \arrow[r, dotted] & 0 \end{tikzcd}$$

con filas exactas. Entonces existe una sucesión exacta larga

$$0 \dashrightarrow \ker a \xrightarrow{f} \ker b \xrightarrow{g} \ker c \xrightarrow{\partial} \operatorname{coker} a \longrightarrow \operatorname{coker} b \longrightarrow \operatorname{coker} c \dashrightarrow 0$$

Demostración. Definimos $\partial : \ker c \to \operatorname{coker} a$. Sea $x \in \ker c$. Como $g : N \to P$ es sobreyectiva, existe $y \in N$ tal que $x = gy$. Como $g'b(y) = cg(y) = 0 \Rightarrow b(y) \in \ker g' = Im(f')$. Luego $f'(z) = b(y)$ para cierto $z \in M'$. Definimos $\partial(x) = [z]$. ■

Definición. Una sucesión exacta corta (s.e.c) de complejos es un diagrama

$$0 \longrightarrow (C'_*, d') \xrightarrow{\alpha} (C_*, d) \xrightarrow{\beta} (C''_*, d'') \longrightarrow 0\ ,$$

donde α, β son morfismos de complejos y $\forall n$

$$0 \longrightarrow C'_n \xrightarrow{\alpha_n} C_n \xrightarrow{\beta_n} C''_n \longrightarrow 0$$

es s.e.c. de A-módulos.

Proposición. Una s.e.c. de complejos induce una sucesión exacta larga en las homologías:

$$\ldots \longrightarrow H_n(c') \longrightarrow H_n(C) \longrightarrow H_n(C'') \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(C') \longrightarrow \ldots$$

Demostración. Por el lema de la serpiente tenemos una sucesión exacta larga:

$$0 \longrightarrow Z'_n \longrightarrow Z_n \longrightarrow Z''_n \longrightarrow \frac{C'_{n-1}}{B'_{n-1}} \longrightarrow \frac{C_{n-1}}{B_{n-1}} \longrightarrow \frac{C''_{n-1}}{B''_{n-1}} \longrightarrow 0\ ,$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z'_n \arrow[r] & Z_n \arrow[r] & Z''_n \arrow[dddll] & \\
0 \arrow[r] & C'_n \arrow[r] \arrow[d] & C_n \arrow[r] \arrow[d] & C''_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_{n-1} \arrow[r] & C_{n-1} \arrow[r] & C''_{n-1} \arrow[r] & 0 \\
 & \frac{C'_{n-1}}{B'_{n-1}} \arrow[r] & \frac{C_{n-1}}{B_{n-1}} \arrow[r] & \frac{C''_{n-1}}{B''_{n-1}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} .$$

Entonces podemos aplicar nuevamente el lema de la serpiente para obtener

$$\begin{tikzcd}
 & H_n(C') \arrow[r] & H_n(C) \arrow[r] & H_n(C'') \arrow[dddll] & \\
 & \frac{C'_n}{B'_n} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{d}'_n"] & \frac{C_n}{B_n} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{d}_n"] & \frac{C''_n}{B''_n} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{d}''_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z'_{n-1} \arrow[r] & Z_{n-1} \arrow[r] & Z''_{n-1} & \\
 & H_{n-1}(C') \arrow[r] & H_{n-1}(C) \arrow[r] & H_{n-1}(C'') &
\end{tikzcd} ,$$

donde las flechas horizontales son derivadas de los morfismos de cadenas, y $\bar{d}_n(x_n + B_n) = d_n(x_n)$. Está bien definida, pues si $x_n - \tilde{x}_n \in B_n \Rightarrow d_n(x_n) - d_n(\tilde{x_n}) = d_n(x_n - \tilde{x_n}) = d_n(b_n) = 0$. ■

Definición. (D_*, d) es un subcomplejo de (C_*, d) si $\forall n\ D_n \subseteq C_n$ es submódulo e $i : (D_*, d) \to (C_*, d)$ es morfismo de complejos.

Entonces $0 \longrightarrow (D_*, d) \xrightarrow{\alpha} (C_*, d) \xrightarrow{\beta} (C/D_*, d) \longrightarrow 0$ es una s.e.c. de complejos. Luego, por la proposición anterior hay una sucesión exacta larga:

$$... \longrightarrow H_n(D_*) \longrightarrow H_n(C_*) \longrightarrow H_n(C/D_*) \longrightarrow H_{n-1}(D*) \longrightarrow H_{n-1}(C_*) \longrightarrow ...$$

Definición. Sean $f, g : (C_*, d) \to (D_*, d)$ morfismos de complejos. Una homotopía de complejos entre f y g consta de una familia de morfismos $h_n : C_n \to D_{n+1}$ tal que $f_n - g_n = d'_{n+1}h_n + h_{n-1}d_n$:

$$\begin{tikzcd}
... \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] \arrow[dl, "h_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] \arrow[dl, "h_{n-1}"] & ... \\
... \arrow[r] & D_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] & D_n \arrow[r, "d'_n"] & D_{n-1} \arrow[r] & ...
\end{tikzcd},$$

Proposición. Si $f, g : (C_*, d) \to (D_*, d')$ son homotópicos, entonces $f_* = g_* : H_*(C_*) \to H_*(D_*)$.

Demostración. Sea $x \in \ker d_n$,

$$(f_*)_n([x]) - (g_*)_n([x]) = [f_n x - g_n x] =$$

$$[d'_{n+1}h_n x + h_{n-1}d_n x] = [d'_{n+1}h_n x] = 0 \ ■$$

13.2. Homología simplicial

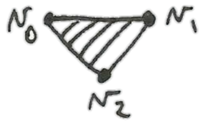
Definición. Sean $v_1, ..., v_r$ puntos en $\mathbb{R}^n$. Decimos que son afinmente independientes si cada vez que $\sum_{i=0}^{r} t_i v_i = 0$ y $\sum_{i=0}^{r} t_i = 0$, se tiene que $t_i = 0\ \forall i$.

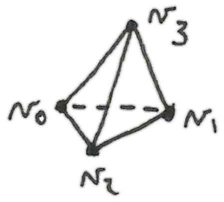
Puede verse que esto es equivalente a pedir que $\{v_1 - v_0, ..., v_r - v_0\}$ sean linealmente independientes. También es lo mismo decir que el conjunto $\{v_o, .., v_r\}$ genera una variedad lineal de dimensión r.

Ejemplos.

1. $\{v_0\}$ es afinmente independiente.
2. $\{v_0, v_1\}$ son afinmente independientes si y sólo si $v_0 \neq v_1$.
3. $\{v_0, v_1, v_2\}$ son afinemente independientes si to sólo si no están alineados.

Definición. Sean $\{v_0, ..., v_r\}$ afínmente independientes. La cápsula convexa se llama r-símplex. Es decir, $\sigma = \{\sum_{i=1}^{r} t_i v_i \mid t_i \geqslant 0, \sum t_i = 1\}$. Notar que σ queda determinada por sus vértices. Identificamos a σ con el conjunto de vértices $\{v_0, ..., v_r\}$ y decimos que la dimensión de σ es r.





Si σ es un r-símplex, una cara de σ es $\tau \leqslant \sigma$, un símplex generado por algunos de los vértices de σ. Decimos que τ es una cara inmediata de σ si $dim\tau = dim\sigma - 1$. Lo notamos $\tau \prec \sigma$.

Definición. Un complejo simplicial K es una colección de símplices en $\mathbb{R}^m$ (para algún m lo suficientemente grande) tal que:

1. $\sigma \in K$ y $\tau \leqslant \sigma \Rightarrow \tau \in K$.

2. $\sigma, \tau \in K$ tales que $\sigma \cap \tau \neq \varnothing \Rightarrow \sigma \cap \tau \leqslant \sigma, \tau$.

La dimensión de K es $\text{máx}_{\sigma \in K}\{dim\sigma\}$. Los vértices de un complejo van a ser sus 0-símplices.

La realización geométrica de K es $|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ (le damos a $|K|$ la topología final con respecto a la de cada σ, que resultan subespacios). Si $|K|$ es localmente finito (cada vértice está en finitos símplices), entonces la topología final coincide con la topología subespacio de $\mathbb{R}^m$.

Definición. Un poliedro es un espacio topológico X que es homeomorfo a la realización geométrica de un complejo simplicial. A K se lo llama triangulación de X.

Queremos poder determinar cuándo un complejo simplicial K es arco conexo.

Observación 1. Como todo $x \in |K|$ se puede conectar con un camino a un vértice de K, basta chequear si podemos conectar los vértices de K.

Observación 2. Sean v, w vértices de K, $v \xrightarrow{\gamma} w$ un camino continuo. Entonces γ se puede deformar a un camino de aristas de v a w.

Entonces para ver si $|K|$ es arco conexo, basta considerar los vértices y las aristas de K.

En lo que sigue, vamos a considerar las aristas orientadas: $[v_0, v_1]$ va a representar la arista que une a v_0 y v_1 saliendo de v_0 y llegando a v_1.

Definición. Definimos una función "borde"$d_1([v_0, v_1]) = v_1 - v_0$. Extendemos d_1 linealmente al grupo abeliano generado por las aristas orientadas. Se tiene entonces:

- $C_0(K)$ = grupo abeliano libre generado por los vértices de K.
- $C_1(K)$ = grupo abeliano libre generado por los 1-símplices orientados de K, donde identificamos $[v, w] = -[w, v]$.

Entonces $d_1 : C_1K \to C_0K$ y $\frac{C_0(K)}{Im(d_1)} \equiv \mathbb{Z}^{\#\text{comp. arco conexo de } K}$ (el grupo abeliano libre de rango igual a la cantidad de componentes arco conexas de K). Llamamos $H_0(K) = \frac{C_0(K)}{Im(d_1)}$.

Ahora queremos determinar los potenciales "agujeros"de dimensión 1 como los "1-ciclos", $c = \sum_{\text{finita}}[v_i, w_i]$ tal que $d_1(c) = 0$. Es decir, un conjunto finito de aristas orientadas que no tiene borde. Un potencial agujero no va a ser en realidad un agujero si está "lleno", es decir si es borde de alguien.

Definimos $C_2(K)$ = grupo abeliano libre generado por lo 2-símplices orientados: $[v_0, v_1, v_2]$. Sea $d_2 : C_2K \to C_1K$ el borde orientado $d_2([v_0, v_1, v_2]) = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]$. Definimos $H_1K = \frac{\ker d_1}{Im(d_2)}$. De esta forma estamos midiendo los agujeros de dimensión 1, ya que tomamos los potenciales agujeros y dividimos por los que son borde de algo de dimensión 2.

En general, dado un complejo simplicial K, tomamos C_nK = grupo libre generado por los n-símplices orientados $[v_0, ..., v_n]$ identificando $[v_{\varphi(0)}, ..., v_{\varphi(n)}] = sg\varphi[v_0, ..., v_n]$, para φ una permutación (de esta forma tenemos dos orientaciones posibles y una es inversa de la otra). Definimos $d_n : C_nK \to C_{n-1}K$ el "borde"

$$d_n([v_0, \ldots, v_n]) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i[v_0, ..., \hat{v}_i, ..., v_n],$$

donde $[v_0, ..., \hat{v}_i, ..., v_n]$ es el símplex generado por todos los vértices menos el i-ésimo. Así,

$$... \xrightarrow{d_3} C_2K \xrightarrow{d_2} C_1K \xrightarrow{d_1} C_0K \longrightarrow 0$$

es un complejo de cadenas ($d^2 = 0$). Tenemos

$$d_{n-1} \circ d_n(\sigma) = d_{n-1}(\sum(-1)^i[v_0, ..., \hat{v}_i, ..., v_n]) =$$

$$\sum_{\substack{j<i \\ i,j}}(-1)^{i+j}[v_0...\hat{v}_j...\hat{v}_i...v_n] + \sum_{\substack{j>i \\ i,j}}(-1)^{i+j+1}[v_0...\hat{v}_i...\hat{v}_j...v_n] = 0.$$

Entonces $(C_*(K), d)$ es un complejo de cadenas.

Se define $H_n(K) := H_n(C_*(K))$. Concretamente $H_n(K) = \frac{\ker d_n}{Im(d_{n+1})}$, donde $\ker d_n$ son los "n-ciclos", e $Im(d_{n+1})$ son los "n-bordes".

Ejemplo. Calculemos $H_*(S^1)$. Le damos a S^1 un estructura con 3 vértices v, w y z, y 3 aristas. Obtenemos entonces el siguente complejo,

$$0 \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}_{[v,w]} \oplus \mathbb{Z}_{[w,z]} \oplus \mathbb{Z}_{[v,z]} \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}_v \oplus \mathbb{Z}_w \oplus \mathbb{Z}_z \longrightarrow 0$$

Primero notamos que $H_n(S^1) = 0 \; \forall n \geqslant 2$. Como ya habíamos visto, $H_0(S^1) = \mathbb{Z}$ porque S^1 es arco conexo. Por último, $H_1(S^1)$ va a ser el núcleo de d_1. Observamos que $\ker(d_1) = <[v,w] + [w,z] + [z,v] >= \mathbb{Z}$.

Más en general vale (ejercicio) que $H_k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0, n \\ 0 & k \neq 0, n \end{cases}$.

13.3. Homología singular

Definición. Sea $n \geqslant 0$, el n-símplex estándar es $\Delta^n = [v_0, ..., v_n] \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, $v_i = i$-ésimo de la base canónica de $\mathbb{R}^{n+1}$. La cara i-ésima de $\Delta^n = [v_0, ..., v_n]$ es $[v_0, ..., \hat{v}_i, ..., v_n]$ (es decir el $(n-1)$-simplex orientado que se obtiene al remover el vértice v_i), y la identificamos con Δ^{n-1}.

Definición. Sea X espacio topológico, $n \geqslant 0$. Un n-símplex singular en X es una función $\sigma : \Delta^n \to X$ continua. Definimos $C_n X$ como el $\mathbb{Z}$-módulo libre generado por los n-símplices singulares de X, $C_n X = \{\sum_{\text{finitos}} n_\sigma \sigma \mid n_\sigma \in \mathbb{Z}, \sigma : \Delta^n \to X \text{ continua}\}$. Definimos $d_n : C_n X \to C_{n-1} X$ con $d_n(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma^{(i)}$, donde $\sigma^{(i)} = \sigma|_{[v_0, ..., \hat{v}_i, ..., v_n]}$ y extendemos linealmente. Por la misma cuenta hecha en el caso simplicial, $d_{n-1} \circ d_n(\sigma) = 0 \; \forall \sigma$. Por lo tanto,

$$... \xrightarrow{d_3} C_2 X \xrightarrow{d_2} C_1 X \xrightarrow{d_1} C_0 X \longrightarrow 0$$

es un complejo de cadenas. Se lo llama el complejo singular de X. Se define la homología singular de X como

$$H_n X := H_n(C_* X) = \frac{\ker d_n}{Im(d_{n+1})}.$$

Proposición. Sea X espacio topológico, $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ componentes arco conexas de X. Entonces $\forall n \geqslant 0$, $H_n X = \oplus_{\alpha \in \Lambda} H_n(X_\alpha)$.

Demostración. Como los símplices son arco conexos y las funciones σ continuas, $C_n X = \oplus_\alpha C_n X_\alpha$. Además $d_n = \oplus_\alpha d_n|_{X_\alpha}$. Entonces $H_n X = \oplus_{\alpha \in \Lambda} H_n(X_\alpha)$. ∎

Proposición. Sea X arco conexo. Entonces $H_0 X = \mathbb{Z}$, y por la proposición anterior, para cualquier X, $H_0 X = \oplus_{\text{comp a.c.}} \mathbb{Z}$.

Demostración. Sabemos que $H_0 X = \frac{C_0 X}{Im(d_1)}$ con

$$C_0 X = \{ \sum_{\text{finitas}} n_x x \mid n_x \in \mathbb{Z}, x \in X \}.$$

Como $\Delta_1 = I$, $d_1(\sigma) = \sigma(1) - \sigma(0)$. Consideramos

$$... \longrightarrow C_1 X \xrightarrow{d_1} C_0 X \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \;,$$

donde $\epsilon : C_0 X \to \mathbb{Z}$ es el morfismo de aumentación definido por $\epsilon(x) = 1$ y extendiendo linealmente. Notamos que si $X \neq \varnothing \Rightarrow \epsilon$ es epimorfismo.

Veamos que $\ker \epsilon = Im(d_1)$:

$\supseteq$) $\epsilon(d_1(\sigma)) = \epsilon(\sigma(1) - \sigma(0)) = 1 - 1 = 0$. Como se extiende linealmente, todo elemento de $Im(d_1)$ está en el núcleo de ϵ.

$\subseteq$) Sea $\sum n_x x$ tal que $\sum n_x = 0$. Es una suma sobre finitos $\{x_0, ..., x_k\}$. Como $\sum n_x = 0 \Rightarrow -n_{x_0} = \sum_{i=1}^k n_{x_i}$. Sean $x_0 \xrightarrow{\sigma_i} x_i$, entonces

$$d_1(\sum_{i=1}^k n_{x_i}\sigma_i) = \sum_{i=1}^k n_{x_i}(x_i - x_0) = (-\sum_{i=1}^k n_{x_i})x_0 + \sum_{i=1}^k n_{x_i}x_i = \sum_{i=0}^k n_{x_i}x_i.$$

Entonces $H_0 X = \frac{C_0 X}{Im(d_1)} = \frac{C_0 X}{\ker \epsilon} \equiv Im(\epsilon) = \mathbb{Z}$. ■

Lo hecho en la demostración anterior puede hacerse más en general. Dado X un espacio topológico, el complejo aumentado de $X \neq \varnothing$ es $\tilde{C}_*(X)$:

$$... \longrightarrow C_1 X \longrightarrow C_0 X \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \ .$$

Definimos la homología reducida de X como la homología de este complejo, $\tilde{H}_n X := H_n(\tilde{C}_* X)$. Notar que $\tilde{H}_n(X) = H_n(X)$ si $n \neq 0$. Por otro lado, en grado 0, como $\epsilon \circ d_1 = 0$, ϵ induce un morfismo $H_0 X \to \mathbb{Z}$ con núcleo $\tilde{H}_0 X$, y se tiene entonces $H_0 X \equiv \tilde{H}_0 X \oplus \mathbb{Z}$.

Ejemplo. Vamos a calcular $H_*(X)$, con $X = *$. Cada $C_n(*)$ es el $\mathbb{Z}$-módulo libre generado por la función constante $c_n : \Delta^n \to *$. Entonces su complejo singular es

$$... \longrightarrow \mathbb{Z}_{c_n} \longrightarrow ... \xrightarrow{1_{\mathbb{Z}}} \mathbb{Z}_{c_1} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_{c_0} \longrightarrow 0 \ .$$

Ahora

$$d_n(c_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i c_n^{(i)} = \sum_{i=0}^n (-1)^i c_{n-1} = \begin{cases} 0 & n+1 \text{ par} \\ c_{n-1} & n+1 \text{ impar} \end{cases} .$$

Entonces $H_n(*) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ 0 & n > 0 \end{cases}$

Definición. Una función $f : X \to Y$ continua induce $f_* : C_* X \to C_* Y$ (análogamente $f_* : \tilde{C}_* X \to \tilde{C}_* Y$), con $f_*(\sigma) = f \circ \sigma$, y se extiende linealmente. Veamos que esta definición se lleva bien con d:

$$f_*(d\sigma) = f_*(\sum(-1)^i \sigma^{(i)}) = \sum(-1)^i f(\sigma^{(i)}) =$$

$$\sum(-1)^i (f \circ \sigma)^{(i)} = \sum(-1)^i (f_*(\sigma))^{(i)} = d(f_*(\sigma)).$$

Entonces también induce morfismos $f_* : H_n X \to H_n Y$ (respectivamente $f_* : \tilde{H}_n X \to \tilde{H}_n Y$)

El pase a complejos es funtorial, en el sentido de que:

1. $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$.
2. $(1_X)_* = 1_{C_* X}$.

Luego si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo, $f_* : C_*X \to C_*Y$ es un isomorfismo, y entonces $f_* : H_nX \to H_nY$ es un isomorfismo $\forall n \geqslant 0$.

Ahora veremos lo que sucede con las homotopías entre funciones continuas, a nivel de complejos. Recordamos que si existe una homotopía de complejos entre dos morfismos, entonces inducen el mismo morfismo a nivel homología.

Teorema 1. Sean $f, g : X \to Y$ continuas. Si $f \simeq g \Rightarrow f_* \simeq g_* : C_*X \to C_*Y$ y por lo tanto $f_* = g_* : H_*X \to H_*Y$ $\forall n \geqslant 0$. En particular, si $f : X \to Y$ es equivalencia homotópica, entonces $f_* : H_nX \to H_nY$ es isomorfismo $\forall n \geqslant 0$.

Demostración. (Para más detalles ver el libro de Hatcher). Subdividimos al prisma $\Delta^n \times I$ en $n+1$ $(n+1)$-símplices. Denotamos a la tapa de abajo del prisma como $\Delta^n \times \{0\} = [v_0, ..., v_n]$ y a la tapa de arriba como $\Delta^n \times \{1\} = [w_0, ..., w_n]$, donde para cada i, v_i está debajo de w_i. La región entre el n-símplex $[v_0, ..., v_{i-1}, w_i, ..., w_n]$ y el n-simplex $[v_0, ..., v_i, w_{i+1}, ..., w_n]$ es el $(n+1)$-símplex $[v_0, ..., v_i, w_i, ..., w_n]$. El prisma $\Delta^n \times I$ es la unión de los $(n+1)$-símplices $[v_0, ..., v_i, w_i, ..., w_n]$, cada uno intersecando al próximo en una cara (n-símplex).

Partimos de una homotopía $F : X \times I \to Y$ de f a g, y queremos una homotopía a nivel complejos. Definimos $P : C_nX \to C_{n+1}Y$ como

$$P(\sigma) = \sum_i (-1)^i F \circ (\sigma \times 1_I)|_{[v_0,...,v_i,w_i,...,w_n]}$$

para cada $\sigma : \Delta^n \to X$ de la base y extendemos linealmente.

Veamos que $dP + Pd = g_* - f_*$ (es decir, "en el borde del prisma se tiene la g en una tapa, la f en otra y verticalmente el prisma del borde").

Calculemos:

$$dP(\sigma) = \sum_{j \leqslant i} (-1)^i (-1)^j F \circ (\sigma \times 1_I)|_{[v_0,...,\hat{v}_j,...,v_i,w_i,...,w_n]} +$$

$$\sum_{j \geqslant i} (-1)^i (-1)^{j+1} F \circ (\sigma \times 1_I)|_{[v_0,...,v_i,w_i,...,\hat{w}_j,...,w_n]}.$$

Los términos con $i = j$ en las sumas se cancelan, salvo en $F \circ (\sigma \times 1_I)|_{[\hat{v}_0,w_0,...,w_n]}$, que es justamente $g \circ \sigma = g_*(\sigma)$, y en $-F \circ (\sigma \times 1_I)|_{[v_0,...,v_n,\hat{w}_n]}$, que es $-f \circ \sigma = -f_*(\sigma)$. Los términos con $i \neq j$ son exactamente $-Pd(\sigma)$, pues:

$$Pd(\sigma) = \sum_{j<i} (-1)^{i-1} (-1)^j F \circ (\sigma \times 1_I)|_{[v_0,...,\hat{v}_j,...,v_i,w_i,...,w_n]} +$$

$$\sum_{j>i} (-1)^i (-1)^j F \circ (\sigma \times 1_I)|_{[v_0,...,v_i,w_i,...,\hat{w}_j,...,w_n]}.$$

Por lo tanto P es una homotopía a nivel complejos, y $f_* = g_* : H_*X \to H_*Y$ $\forall n \geqslant 0$. ■

Corolario. Si X es contráctil, entonces $H_nX = H_n(*) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ 0 & n > 0 \end{cases}$.

Definición. Sea X un espacio topológico, $\mathcal{U}$ un cubrimiento por abiertos de X. Definimos $C_*^{\mathcal{U}}(X) \subseteq C_*(X)$ con $C_n^{\mathcal{U}}(X) = \mathbb{Z}$-módulo libre generado por los símplices singulares $\sigma : \Delta^n \to X$ tales que $\sigma(\Delta^n) \subseteq U$ para algún $U \in \mathcal{U}$. Los morfismos d se restringen bien, y $C_*^{\mathcal{U}}(X)$ es un subcomplejo.

El siguiente teorema permite pasar de lo local a lo global a nivel homología. Como consecuencia de este resultado, se obtienen métodos concretos que permiten el cálculo de la homología en forma sencilla. La demostración de este teorema se puede encontrar en el libro de Hatcher. Veremos acá las aplicaciones más relevantes del mismo.

Teorema 2. Sea X espacio topológico, $\mathcal{U}$ un cubrimiento por abiertos, $i : C_*^{\mathcal{U}}(X) \to C_*X$ es rdf de complejos ($\exists r : C_*X \to C_*^{\mathcal{U}}X$ tal que $ri = 1_{C_*^{\mathcal{U}}(X)}$ e $ir \simeq 1_{C_*X}$). En particular $i_* : H_n(C_*^{\mathcal{U}}(X)) \to H_n(C_*(X)) = H_nX$ es isomorfismo $\forall n$.

Aplicación (sucesión de Mayer-Vietoris). Sea X un espacio topológico. Sean $U, V \subseteq X$ abiertos tales que $X = U \cup V$. Notamos $\mathcal{U} = \{U, V\}$. Es inmediato ver que existe una s.e.c. de complejos

$$0 \longrightarrow C_*(U \cap V) \xrightarrow{\alpha} C_*(U) \oplus C_*(V) \xrightarrow{\beta} C_*^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow 0 \ ,$$

donde $\alpha(\sigma) = (\sigma, -\sigma)$ y $\beta(\sigma, \tau) = \sigma + \tau$.

Esta s.e.c. induce entonces una s.e.l. de las homologías (y aquí usamos el teorema anterior para reemplazar $H_n(X) = H_n(C_*^{\mathcal{U}}(X))$):

$$\begin{array}{l} \ldots \longrightarrow H_n(U \cap V) \xrightarrow{\alpha_*} H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{\tilde{\beta}_*} H_nX \longrightarrow H_{n-1}(U \cap V) \longrightarrow \ldots \\ \ldots \longrightarrow H_0(U \cap V) \longrightarrow H_0(U) \oplus H_0(V) \longrightarrow H_0X \longrightarrow 0 \end{array} .$$

De la misma manera, considerando la s.e.c. de complejos aumentados

$$0 \longrightarrow \tilde{C}_*(U \cap V) \xrightarrow{\alpha} \tilde{C}_*(U) \oplus \tilde{C}_*(V) \xrightarrow{\beta} \tilde{C}_*^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow 0 \ ,$$

se obtiene una sucesión exacta larga en $\tilde{H}_*$.

Corolario. $\tilde{H}_k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$.

Demostración. Vamos a hacer inducción en n la dimensión de S^n. En el caso $n = 0$, $S^0 = \{-1, 1\} \subseteq \mathbb{R}$, y $\tilde{H}_k(S^0) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$.

Ahora supongamos que tenemos el resultado para $n-1$, probémoslo para n. Sean $U = S^n \backslash \{p\}$ y $V = S^n \backslash \{q\}$, donde p y q son los polos. Tenemos que $\{U, V\}$ es un cubrimiento por abiertos de S^n, entonces podemos aplicar Mayer-Vietoris. Sabemos que $\tilde{H}_k(U) = 0\ \forall k$, pues U es contráctil. Lo mismo vale para V. Además, $U \cap V = S^n \backslash \{p, q\} \simeq S^{n-1}$. Por hipótesis inductiva $\tilde{H}_k(U \cap V) = \tilde{H}_k(S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = n-1 \\ 0 & k \neq n-1 \end{cases}$. Entonces tenemos la siguiente sucesión exacta,

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots \to & \tilde{H}_{k+1}U \oplus \tilde{H}_{k+1}V & \to & \tilde{H}_{k+1}S^n & \overset{\partial}{\to} & \tilde{H}_k(U \cap V) & \to & \tilde{H}_kU \oplus \tilde{H}_kV & \to \ldots \\ & \| & & & & & & \| & \\ & 0 & & & & & & 0 & \end{array}.$$

Luego ∂ es un isomorfismo y $\tilde{H}_{k+1}(S^n) \equiv \tilde{H}_k(S^{n-1})\ \forall k$. ■

Corolario. Si $n \neq m \Rightarrow S^n \not\simeq S^m$.

Demostración. Si fuesen homotópicamente equivalentes, tendrían la misma homología, pero no es así. ■

Corolario. Si $n \neq m$, $\mathbb{R}^n$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^m$.

Demostración. Sean $n \neq m$. Supongamos que $\exists \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ homeomorfismo. Sea $p = \varphi(0)$. Entonces $\varphi|_{\mathbb{R}^n \backslash \{0\}} : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^m \backslash \{p\}$ es un homeomorfismo. Pero $\mathbb{R}^n \backslash \{0\} \simeq S^{n-1}$ y $\mathbb{R}^m \backslash \{p\} \simeq S^{m-1}$, absurdo. ■

Corolario. Para cualquier $n \geqslant 1$, $\nexists r : D^n \to S^{n-1}$ retracción.

Demostración. Supongamos que existe $r : D^n \to S^{n-1}$ retracción. Entonces tenemos

$$\begin{tikzcd} \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, equal] & \tilde{H}_{n-1}(D^n) \arrow[r, "r_*"] \arrow[d, equal] & \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[d, equal] \\ \mathbb{Z} \arrow[rr, bend right, "1_{\mathbb{Z}}"] & 0 & \mathbb{Z} \end{tikzcd},$$

absurdo. ■

Corolario. Toda $f : D^n \to D^n$ continua tiene un punto fijo.

Demostración. Es análoga al caso $n = 2$ que hicimos anteriormente. Antes habíamos notado que $i : S^1 \to \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ no era null homotópica mirado su π_1. Ahora podemos hacer lo mismo para las inclusiones de cada S^n mirando su homología a nivel n. Entonces se puede probar de igual manera que si tenemos un campo vectorial V nunca nulo en D^n, existen $x_1 \in S^{n-1}$ tal que $V(x_1) = \lambda x_1$, $\lambda > 0$ y $x_2 \in S^{n-1}$ tal que $V(x_2) = \lambda x_2$, $\lambda < 0$.

Ahora sea $f : D^n \to D^n$ continua. Supongamos que no tiene un punto fijo. Entonces $\forall x \in D^n$, $f(x) \neq x$. Sea $V(x) = f(x) - x$. Por lo dicho en el párrafo anterior, existen $x_1 \in S^{n-1}$ y $\lambda > 0$ tales que $V(x_1) = \lambda x_1$. Entonces $f(x_1) = (\lambda + 1)x_1$. Luego $1 \geqslant ||f(x_1)|| = |\lambda + 1|||x_1|| > 1$, absurdo. ■

13.4. Homología relativa y teorema de escisión

Si tenemos $A \subseteq X$ un subespacio, podemos considerar el subcomplejo $C_*A \subseteq C_*X$. Así tenemos una s.e.c. de complejos

$$0 \longrightarrow C_*A \xrightarrow{i_*} C_*X \xrightarrow{q} \frac{C_*X}{C_*A} \longrightarrow 0 \ .$$

Definición. $H_n(X,A) := H_n(\frac{C_*X}{C_*A})\ \forall n \geqslant 0$

Sabemos que la s.e.c. $0 \longrightarrow C_*A \xrightarrow{i_*} C_*X \xrightarrow{q} \frac{C_*X}{C_*A} \longrightarrow 0$ induce una sucesión exacta larga:

$$... \to H_n(X,A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} ... \to H_0A \to H_0X \to H_0(X,A) \to 0 \ .$$

Observación. Se deduce de la s.e.l. que $i_* : H_nA \to H_nX$ es isomorfismo $\forall n \geqslant 0 \iff H_n(X,A) = 0\ \forall n \geqslant 0$.

Observación. Si X es contráctil, entonces $H_n(X,A) \simeq \tilde{H}_{n-1}(A)\ \forall n \geqslant 1$.

Calculemos ahora $H_n(X,x_0)$ con $x_0 \in X$. Tenemos la siguiente sucesión exacta,

$$H_n(*) \longrightarrow H_nX \longrightarrow H_n(X,x_0) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(*) \longrightarrow H_{n-1}X \longrightarrow ... \ ,$$

donde $H_n(*) = 0$ si $n \geqslant 1$. Entonces si $n \geqslant 2$, $H_n(X,x_0) \equiv H_nX = \tilde{H}_nX$. Si n es 1 o 0, tenemos

$$H_1(*) \longrightarrow H_1X \xrightarrow{q_*} H_1(X,x_0) \xrightarrow{\partial} H_0(*) \xrightarrow{i_*} H_0X \longrightarrow H_0(X,x_0) \longrightarrow 0 \ .$$

Como $H_1(*) = 0$, q_* es monomorfismo. Como i_* viene inducida por la inclusión de la componente arco conexa de x_0, es monomorfismo. Entonces $\partial = 0$, y luego q_* es epimorfismo. Por lo tanto q_* es un isomorfismo. Entonces $H_1(X,x_0) \equiv H_1X = \tilde{H}_1X$. Por último tenemos

$$0 \longrightarrow H_0(*) \xrightarrow{i_*} H_0X \longrightarrow H_0(X,x_0) \longrightarrow 0 \ ,$$

que se parte porque i_* admite una retracción (la que manda todos los generadores de las componentes arco conexas de X al generador de $H_0(*)$). Entonces $H_0(X,x_0) = \tilde{H}_0X$. En conclusión, $H_n(X,x_0) = \tilde{H}_nX\ \forall n \geqslant 0$.

Definición. Un par topológico es (X,A), donde X es un espacio topológico y $A \subseteq X$ un subespacio. Un morfismo de pares es $f : (X,A) \to (Y,B)$ tal que f es continua y $f(A) \subseteq B$. Se dice homeomorfismo de pares si f es un homeomorfismo y $f(A) = B$.

Un morfismo de pares $f : (X,A) \to (Y,B)$ induce $f_* : \frac{C_*X}{C_*A} \to \frac{C_*Y}{C_*B}$ con $f_*(\bar{\sigma}) = \overline{f \circ \sigma}$. Esto a su vez induce $f_* : H_n(X,A) \to X_n(Y,B)\ \forall n$.

Teorema de escisión.

Versión 1. Sean $Z \subseteq A \subseteq X$ subespacios, Z cerrado en X, A abierto en X. Entonces la inclusión $i : (X \backslash Z, A \backslash Z) \hookrightarrow (X, A)$ induce isomorfismos $i_* : H_n(X \backslash Z, A \backslash Z) \equiv H_n(X, A)$ $\forall n \geqslant 0$.

Versión 2. Sean $A, B \subseteq X$ abiertos tales que $A \cup B = X$. Entonces la inclusión $i : (B, A \cap B) \to (X, A)$ induce isomorfismos $i_* : H_n(B, A \cap B) \equiv H(X, A)$ $\forall n \geqslant 0$.

Demostración (versión 2). Sea $\mathcal{U} = \{A, B\}$ cubrimiento por abiertos de X. La inclusión $i : C_*^{\mathcal{U}} X \to C_* X$ es un rdf de complejos. Tenemos que $C_* A \subseteq C_*^{\mathcal{U}} X \subseteq C_* X$. Entonces se tiene la siguiente equivalencia homotópica de complejos, $\frac{C_*^{\mathcal{U}} X}{C_* A} \to \frac{C_* X}{C_* A}$. Además tenemos un morfismo $\frac{C_* B}{C_*(A \cap B)} \to \frac{C_*^{\mathcal{U}} X}{C_* A}$ inducido por la inclusión, que es un isomorfismo, pues para cada n ambos grupos son libres con base en los n-símplices en B que no están en A.

Por lo tanto $\frac{C_* B}{C_*(A \cap B)} \xrightarrow{i} \frac{C_* X}{C_* A}$ es una equivalencia homotópica. Entonces $i_* : H_n(B, A \cap B) \to H_n(X, A)$ es un isomorfismo $\forall n$. ■

Teorema de invariancia de la dimensión. Dados $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ abiertos no vacíos homeomorfos. Entonces $n = m$.

Demostración. Sean $x \in U$, $Z = U^c$, $A = \mathbb{R}^n \backslash \{x\}$. Entonces $Z \subseteq A$ y $\forall k$ tenemos un isomorfismo

$$H_k(U, U \backslash \{x\}) \equiv H_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash \{x\}) \equiv \tilde{H}_{k-1}(\mathbb{R}^n \backslash \{x\}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}.$$

Análogamente, sea $y \in V$, entonces $H_k(V, V \backslash \{y\}) \equiv \begin{cases} \mathbb{Z} & k = m \\ 0 & k \neq m \end{cases}$.

Si $\varphi : U \to V$ es un homeomorfismo, elegimos $x \in U$ y tomamos $y = \varphi(x)$. Entonces $\varphi : (U, U \backslash \{x\}) \to (V, V \backslash \{y\})$ es un homeomorfismo de pares. Luego $\varphi_* : H_k(U, U \backslash \{x\}) \equiv H_k(V, V \backslash \{y\})$, es in isomorfismo $\forall k$. Por lo tanto $n = m$. ■

El siguiente resultado nos dice qué pasa a nivel homología cuando a una esfera le removemos un disco o una esfera. De este resultado se obtendrán importantes consecuencias geométricas.

Teorema.

1. Sea $h : D^k \to S^n$ subespacio. Entonces $\tilde{H}_i(S^n - h(D^k)) = 0$ $\forall i$.

2. Sea $k < n$, $h : S^k \to S^n$ subespacio. Entonces

$$\tilde{H}_k(S^n \backslash h(S^k)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = n - k - 1 \\ 0 & i \neq n - k - 1 \end{cases}.$$

Demostración.

1. Haremos inducción en k, donde k es la dimensión de D^k. Primero notamos que D^k es homeomorfo al cubo I^k. Trabajaremos con el cubo para facilitar las cuentas. En el caso $k = 0$, $D^0 = I^0 = \{*\}$. Entonces $S^n \backslash h(D^0) = S^n \backslash \{*\} \simeq \mathbb{R}^n$, que es contráctil. Entonces $\tilde{H}_i(S^n - h(D^0)) = 0 \; \forall i$

   Ahora supongamos que vale el resultado para $k-1$, y veamos que vale para k. Podemos dividir a $I^k = I^{k-1} \times [0, 1/2] \cup I^{k-1} \times [1/2, 1]$. Sean $A_1 = S^n \backslash h(I^{k-1} \times [0, 1/2])$, $B_1 = S^n \backslash h(I^{k-1} \times [1/2, 1])$ abiertos de S^n (pues $h(I^{k-1} \times [0, 1/2])$ es cerrado ya que $I^{k-1} \times [0, 1/2]$ es compacto en un T_2, ídem para B_1). Entonces son abiertos en $A_1 \cup B_1$ visto como subespacio de S^n. Tenemos que $A_1 \cup B_1 = S^n \backslash h(I^{k-1} \times \{1/2\})$ y $A_1 \cap B_1 = S^n \backslash h(I^k)$. Por Mayer-Vietoris aplicado al cubrimiento abierto $\{A_1, B_1\}$ del espacio $A_1 \cup B_1$, se tiene:

   $$... \longrightarrow 0 \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_i(A_1 \cap B_1) \xrightarrow{\varphi_i} \tilde{H}_i A_1 \oplus \tilde{H}_i B_1 \longrightarrow 0 \longrightarrow ... \; .$$

   Entonces φ_i es un isomorfismo. Supongamos que $\tilde{H}_i(S^n \backslash h(I^k)) \neq 0$. Entonces existe un ciclo α en $S^n \backslash h(I^k)$ que no es borde (i.e. $\alpha \neq d\beta$). Como el isomorfismo φ_i está inducido por la inclusión de $A_1 \cap B_1$ en A_1 y B_1, entonces α no es borde en A_1 o en B_1. Definimos $I_1 = [0, 1/2]$ o $[1/2, 1]$ dependiendo de dónde no sea borde α. Lo subdividimos en $I_1 = I_{11} \cup I_{12}$ igual que antes. Sean $A_2 = S^n \backslash h(I^{k-1} \times I_{11})$, $B_2 = S^n \backslash h(I^{k-1} \times I_{12})$. Ahora $A_2 \cup B_2 = S^n \backslash h(I^{k-1} \times \{p_2\})$ y $A_2 \cap B_2 = S^n \backslash h(I^{k-1} \times I_1)$. Por el mismo argumento, α no es borde en A_2 o en B_2. Análogamente elegimos $I_2 = I_{11}$ o I_{12}.

   Obtenemos inductivamente $I \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq ...$ con $\text{diam} I_m = \frac{\text{diam}\, I_{m-1}}{2}$, y α no es borde en $S^n \backslash h(I^{k-1} \times I_m)$ para ningún m. Como $I \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq ...$ y sus diámetros tienden a 0, $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} I_m = \{p\}$. Por hipótesis inductiva, como $\tilde{H}_i(S^n - h(I^k \times \{p\})) = 0$ $\forall i$, α es borde en $S^n \backslash h(I^{k-1} \times \{p\})$. Entonces existe $\beta = \sum_{j=1}^r n_j \sigma_j$, con $\sigma_j : \Delta^{i+1} \to S^n \backslash h(I^{k-1} \times \{p\}) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} S^n \backslash h(I^{k-1} \times I_m)$, tal que $d\beta = \alpha$. Como $\bigcup_{j=1}^r \sigma_j(\Delta^{i+1})$ es compacto, existen finitos $m_1, ..., m_s$ tales que $\bigcup_{j=1}^r \sigma_j(\Delta^{i+1}) \subseteq \bigcup_{j=1}^s S^n \backslash h(I^{k-1} \times I_{m_j})$. Pero $I \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq ...$, entonces $\bigcup_{j=1}^r \sigma(\Delta^{i+1}) \subseteq S^n \backslash h(I^{k-1} \times I_{\tilde{m}})$. Entonces $\alpha = d\beta$ en $S^n \backslash h(I^{k-1} \times I_{\tilde{m}})$, absurdo.

2. Vamos a proceder por inducción en k, donde k es la dimensión de S^k. Si $k = 0$, $S^0 = \{-1, 1\}$ y $S^n \backslash h(S^0) \simeq \mathbb{R}^n \backslash \{*\} \simeq S^{n-1}$. Ya sabemos que $\tilde{H}_i(S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = n-1 \\ 0 & i \neq n-1 \end{cases}$.

   Ahora supongamos que vale en el caso $k-1$ y probémoslo para k. Dividimos a $S^k = D^k_+ \cup D^k_-$ en hemisferios norte y sur. Sean $A = S^n \backslash h(D^k_+)$ y $B = S^n \backslash h(D^k_-)$. Notamos que $A \cap B = S^n \backslash h(S^k)$. Por la parte 1), $\tilde{H}_i A = \tilde{H}_i B = 0 \; \forall i$. Además, $A \cup B = S^n \backslash h(S^{k-1})$, entonces, por hipótesis inductiva, $\tilde{H}_i(A \cup B) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = n-k \\ 0 & i \neq n-k \end{cases}$. Usamos Mayer-Vietoris para el cubrimiento por abiertos $\{A, B\}$ de $A \cup B$:

   $$... \longrightarrow 0 \longrightarrow \tilde{H}_{i+1}(A \cup B) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_i(A \cap B) \longrightarrow 0 \longrightarrow ... \; .$$

Como los dos extremos son 0, ∂ es un isomorfismo. Entonces

$$\tilde{H}_i(S^n \backslash h(S^k)) = \tilde{H}_i(A \cap B) =$$

$$\tilde{H}_{i+1}(A \cup B) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i+1 = n-k \\ 0 & i+1 \neq n-k \end{cases} . \blacksquare$$

Veamos qué sucede si a S^n le sacamos un subespacio homeomorfo a S^n. Sea $h : S^n \to S^n$ subespacio. Dividimos a $S^n = D^n_+ \cup D^n_-$ en hemisferios. Sean $A = S^n \backslash h(D^n_+)$ y $B = S^n \backslash h(D^n_-)$. Tenemos que $A \cup B = S^n \backslash h(S^{n-1})$ y $A \cap B = S^n \backslash h(S^n)$. Si $h(S^n) \neq S^n$, entonces $S^n \backslash h(S^n) \neq \varnothing$ y observamos el final de la sucesión de Mayer-Vietoris en la homología reducida para el cubrimiento $\{A, B\}$ ($A \cap B \neq \varnothing$):

$$\begin{array}{ccccccc} \ldots & \longrightarrow & \tilde{H}_0 A \oplus \tilde{H}_0 B & \longrightarrow & \tilde{H}_0(A \cup B) & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \| & & \\ & & 0 & & \mathbb{Z} & & \end{array}$$

que resultaría un absurdo, entonces S^n no tiene subespacios propios homeomorfos a S^n.

Conclusiones geométricas importantes.

1. Vimos que "$S^n \not\subset S^n$", y sabemos que $S^0 \subseteq S^1 \subseteq S^2 \subseteq \ldots$ (cada esfera como ecuador de la esfera siguiente). Si $n < m$, como $S^n \subset S^m$, entonces $S^m \not\subset S^n \subset S^m$.
2. $S^n \nsubseteq \mathbb{R}^n$ porque $\mathbb{R}^n \subset S^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$.
3. $\nexists \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ subespacio si $m > n$. Supongamos que sí, entonces $S^n \subset S^{m-1} \subset \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, absurdo. Más aún, no existe $i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ continua e inyectiva si $m > n$. Si así fuese, existiría $i' : S^n \to \mathbb{R}^n$ continua e inyectiva, pero S^n es compacto y $\mathbb{R}^n$ es T_2, entonces i' es subespacio, absurdo.

Teorema de la curva de Jordan. Una curva simple y cerrada en S^2 (o $\mathbb{R}^2$) lo separa en dos componentes. Una curva simple no cerrada no los separa.

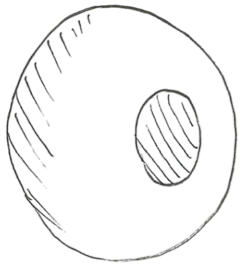
Demostración. Primero lo probamos para S^2. Sea $C \subseteq S^2$ una curva simple y cerrada. Entonces C es un subespacio homeomorfo a S^1, y la segunda parte del teorema anterior dice que $\tilde{H}_0(S^2 \backslash C) = \mathbb{Z}$. Entonces $S^2 \backslash C$ tiene dos componentes arco conexas. Las componentes arco conexas son las mismas que las componentes conexas, porque $S^2 \backslash C$ es localmente arco conexo al ser un abierto de S^2.

Si C' es una curva simple no cerrada, entonces $C' = D^1$. Por la primera parte del teorema anterior, $\tilde{H}_0(S^2 \backslash C') = 0$. Luego es arco conexo y en particular, conexo.

En $\mathbb{R}^2$ se deduce de S^2, porque $\mathbb{R}^2 = S^2 \backslash \{p\}$, y sacarle un punto a un abierto de S^2 no le cambia la conexión. $\blacksquare$

Observación. En realidad "$S^{n-1} \subset S^n$" lo separa en dos componentes, y además cada una de las componentes es acíclica.

Teorema de Schönflies. $S^1 \subseteq S^2$ lo separa en dos discos.



Sin embargo, para $S^{n-1} \subset S^n$ con $n \geqslant 3$, puede pasar que las componentes ni siquiera sean simplemente conexas. Si el embedding es C^∞ o lineal a trozos, entonces sí son discos.

Terminamos este curso con otra aplicación clásica e importante.

Teorema de invariancia de dominio. Sea $h : U \to \mathbb{R}^n$ subespacio con U abierto en $\mathbb{R}^n$. Entonces $V = h(U)$ también es abierto en $\mathbb{R}^n$.

Demostración. Podemos considerar $h : U \to S^n$, porque $\mathbb{R}^n$ es subespacio de S^n visto como su compactificación de Alexandroff. Sea $y \in V \subseteq S^n$, entonces $y = h(x)$, $x \in U$. Luego existe D^n disco cerrado tal que $x \in D^n \subseteq U$, con x el centro de D^n. Así, $y = h(x) \in h(D^n \backslash \partial D^n) \subseteq V$.

Veamos que $h(D^n \backslash \partial D^n)$ es abierto. Consideramos $S^n \backslash h(\partial D^n)$. Por la segunda parte del teorema anterior, $\tilde{H}_0(S^n \backslash h(\partial D^n)) = \mathbb{Z}$, por lo que tiene dos componentes arco conexas. Además tenemos:

$$S^n \backslash h(\partial D^n) = (S^n \backslash h(D^n)) \coprod h(D^n \backslash \partial D^n).$$

Como los dos términos de la derecha son arco conexos, son las componentes arco conexas. Observamos que $S^n \backslash h(\partial D^n)$ es localmente arco conexo (pues es un abierto en S^n), y en consecuencia las componentes arco conexas coinciden con las componentes conexas. Al ser sólo dos componentes conexas, ambas son abiertas y cerradas en $S^n \backslash h(\partial D^n)$, que es abierto en S^n. Entonces $h(D^n \backslash \partial D^n)$ es abierto en S^n. ■

13.5. Ejercicios

Preliminares Algebraicos: Sucesiones exactas y homología

1. (Lema de los 5) Dado el siguiente diagrama de filas exactas

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r] \arrow[d, "a"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "b"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "c"] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "d"] & M_5 \arrow[d, "e"] \\
N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & N_5
\end{tikzcd}$$

Pruebe que:

a) Si b y d son mono y a es epi, entonces c es mono.

b) Si b y d son epi y e es mono, entonces c es epi.

c) Concluya que si a, b, d y e son iso, entonces c es iso.

2. Sea $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$ una sucesión exacta corta. Pruebe que son equivalentes:

   a) Existe $B \xrightarrow{r} A$ tal que $ri = \mathrm{id}_A$.

   b) Existe $A \xrightarrow{s} B$ tal que $ps = \mathrm{id}_C$.

   c) La sucesión es isomorfa a $0 \to A \to A \oplus C \to C \to 0$, donde los morfismos están dados por la inclusión y la proyección canónica.

3. Halle todos los grupos abelianos posibles M en las siguientes sucesiones exactas cortas:

   a) $0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to M \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to 0$.

   b) $0 \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to M \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$.

4. Sean (C_*, d) y (D_*, d') complejos. Pruebe que $(C_* \oplus D_*, d \oplus d')$ es un complejo y que

$$H_*(C \oplus D) = H_*(C) \oplus H_*(D).$$

5. Sea $m \in \mathbb{N}$. Calcule la homología del siguiente complejo de cadenas:

$$\cdots \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \ldots \qquad d_{2n}(x) = 0 \quad d_{2n+1}(x) = mx$$

Homología Simplicial

6. Exhiba triangulaciones de la esfera S^n, el toro, el plano proyectivo y la botella de Klein. A partir de ellas, calcule su homología simplicial.

7. Pruebe que un grafo simple (es decir, un complejo simplicial de dimensión 1) y conexo K es un arbol si y sólo si $H_1(K) = 0$.

Homología Singular

8. Pruebe que si $i : A \to X$ es un retracto, entonces $i_* : H_n(A) \to H_n(X)$ es un monomorfismo para todo $n \geqslant 0$, y que si i es retracto por deformación débil, entonces i_* es isomorfismo.

9. Sea $A \subset X$. Pruebe que $H_0(X, A) = 0$ si y sólo si A interseca todas las componentes arco conexas de X.

10. Sea X espacio topológico, $x_0 \in X$. Pruebe que $H_n(X, x_0) \simeq \tilde{H}_n(X)$ para todo n.

11. Sea $A \subseteq X$ un retracto.

    a) Pruebe que $H_n(X) = H_n(A) \oplus H_n(X, A)$.

    b) Si además A es un retracto por deformación débil de X, entonces $H_n(X, A) = 0$ para todo $n \geqslant 0$.

12. Pruebe que si (X, A, B) es una terna con $B \subseteq A \subseteq X$, entonces existe una sucesión exacta larga

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A, B) \xrightarrow{i_*} H_n(X, B) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A, B) \xrightarrow{i_*} \ldots$$

13. Sea X un espacio contráctil y sea A un subespacio de X. Pruebe que $H_n(X, A)$ es isomorfo a $\tilde{H}_{n-1}(A)$.

14. Sea (X, A) un par bueno. Si CA es el *cono* $(A \times I)/(A \times \{0\})$ de A, considere $X \cup CA$ el espacio que se obtiene de identificar la base del cono $A \times \{1\}$ con $A \subseteq X$. Pruebe que $H_n(X, A) \simeq \tilde{H}_n(X \cup CA)$.

15. *a*) Sea $\{X_i\}$ una familia finita de espacios topológicos y sea $x_i \in X_i$ tal que (X_i, x_i) es un par bueno. Si $X = \bigvee_i X_i$ es la unión de los espacios, identificando todos los puntos base x_i, pruebe que $\tilde{H}_n(X) = \oplus_i \tilde{H}_n(X_i)$.

    b) Calcule $\tilde{H}_n(\bigvee_{i\in I} S^k)$.

16. Calcule los grupos de homología de $\mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \cdots, x_m\}$

17. Calcule la homología del cociente de S^2 que se obtiene de identificar el polo norte y el polo sur en un punto.

18. Pruebe que la función cociente $q : S^1 \times S^1 \to S^2$ que colapsa el subespacio $S^1 \vee S^1 \subset S^1 \times S^1$ en un punto no es null-homotópica mostrando que induce isomorfismo en H_2.

19. Sea X espacio topológico. Muestre que $\tilde{H}_n(X) \simeq \tilde{H}_{n+1}(\Sigma X)$ para todo $n \geqslant 0$, donde ΣX es la *suspensión* de X, que se define como sigue $\Sigma X = X \times I/\sim$, $(x, 0) \sim (x', 0)$, $(x, 1) \sim (x', 1)$ para todo $x, x' \in X$.

20. Sea X un espacio topológico tal que $X = \bigcup_{i=1}^n U_i$ con U_i abiertos tales que toda intersección $\bigcap_{i=1}^k U_{i_k}$ es vacía o tiene homología reducida trivial. Pruebe que $\tilde{H}_i(X) = 0$ para todo $i \geqslant n - 1$ y muestre con un ejemplo que la desigualdad es óptima.

21. Pruebe que S^n no es un retracto de D^{n+1} y que toda función continua $f : D^n \to D^n$ tiene algún punto fijo.

22. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Pruebe que toda función continua e inyectiva $f : X \to \mathbb{R}^n$ es abierta.

Bibliografía

[1] N. Bourbaki. General Topology. Springer.

[2] R. Brown. Topology and Groupoids. Booksurge LLC.

[3] A. Hatcher. Algebraic Topology. Cambridge University Press.

[4] J.L. Kelley. General Topology. Springer.

[5] J.R. Munkres. Topology: a first course. Prentice-Hall.

[6] E. Spanier. Algebraic Topology. McGraw-Hill.

[7] S. Willard. General Topology. Addison-Wesley.