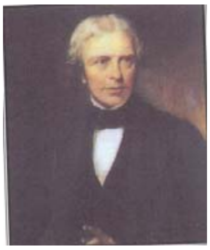
Unidad 5

INDUCCION ELECTROMAGNETICA

Introducción

- Para algunas leyes físicas es difícil encontrar experimentos que conduzcan de una manera directa y convincente a la formulación de la ley.
- La ley de inducción electromagnética de Faraday, que es una de las ecuaciones fundamentales del electromagnetismo, es diferente en cuanto a que hay un buen numero de experimentos sencillos de los cuales puede deducirse directamente.

Introducción



Michael Faraday (1791-1867)

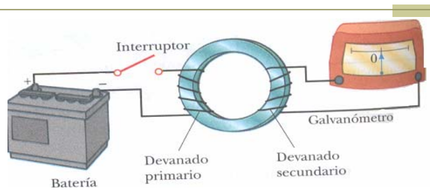
Físico y químico ingles se lo considera el mayor científico experimental del siglo XIX

Los experimentos de inducción fueron llevados a cabo por Faraday en Inglaterra en 1831 y por Joseph Henry en los Estados Unidos aproximadamente en la misma época.

Introducción

- Los experimentos de Faraday y Henry demostraron que un campo magnético variable produce una corriente eléctrica en un circuito.
- Los resultados de esos experimentos condujeron a una de las leyes fundamentales del electromagnetismo: la ley de Faraday

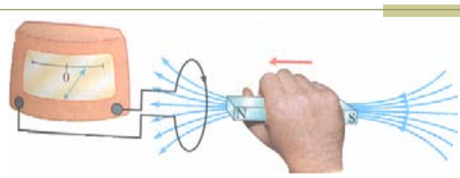
Experimentos de inducción



Aparece una corriente momentánea en el instante en que se cierra el interruptor de la bobina izquierda, cuando se abría de nuevo volvía a observarse una corriente inducida momentáneamente en la bobina derecha y esta tenia sentido contrario a la primera.

Por lo tanto únicamente existía corriente inducida cuando el campo magnético producido por la bobina *estaba cambiado*.

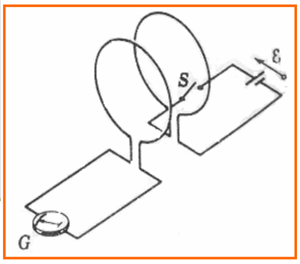
Experimentos de inducción



Una bobina conectada a un galvanómetro , si introducimos un imán recto en la bobina con su polo norte hacia la bobina ocurre que mientras el imán este en movimiento el galvanómetro se desvía, poniendo en manifiesto que esta pasado una corriente por la bobina

Si el imán se mueve alejándose de la bobina el galvanómetro se desvía nuevamente pero en sentido contrario, lo que quiere decir que la corriente en la bobina ahora esta en sentido contrario

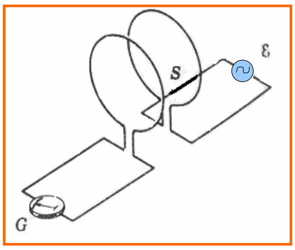
Experimentos de inducción



Las bobinas se colocan en reposo una con respecto a la otra, cuando se cierra el interruptor, se produce una corriente en la bobina de la derecha, el galvanómetro se desvía momentáneamente

Cuando se abre el interruptor, nuevamente el galvanómetro se desvía.

Experimentos de inducción



Una fuente electromotriz variable en el tiempo hace que tengamos permanentemente una corriente en la segunda bobina

Experimentos de inducción

- Los experimentos demuestran que habrá una *fuente electromotriz inducida* en la bobina de la izquierda siempre que cambia la corriente de la bobina de la derecha.
- Lo importante es la rapidez con la cual cambia la corriente y no la magnitud de la misma.

Ley de inducción de Faraday

- Faraday tuvo la intuición de darse cuenta que el cambio en el flujo , Φ_B ,de inducción magnética era era el factor común importante en todos los experimentos.
- Este flujo puede ser producido por un imán recto o por una espira de corriente.
- La ley de la inducción de Faraday dice que la fuerza electromotriz inducida, ε , en un circuito es igual al valor negativo de la rapidez con la cual está cambiando el flujo que atraviesa el circuito.
- La ecuación que define la ley de inducción de Faraday la podemos expresar como

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Ley de inducción de Faraday

- El signo menos es una indicación del sentido de la fem inducida
- Si la bobina tiene N vueltas, aparece una fem en cada vuelta que se pueden sumar, es el caso de los toroides y solenoides, en estos casos la fem inducida será:

$$\varepsilon = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d\left(N\Phi_B\right)}{dt}$$

- Podemos resumir diciendo "*La fuerza electromotriz inducida en un circuito es proporcional a la rapidez con la que varía el flujo magnético que lo atraviesa, y directamente proporcional al número de espiras del inducido*

Ley de Lenz

- Se puede enunciar la ley de Lenz en términos de la contribución de la corriente inducida al campo magnético total es la siguiente*:*
- *"El sentido de la corriente inducida es tal que su contribución al campo magnético total se opone a la variación del flujo de campo magnético que produce la corriente inducida* "
- La ley de Lenz, que explica el sentido de las corrientes inducidas, puede ser a su vez explicada por un principio más general, el principio de la conservación de la energía.

Conclusión

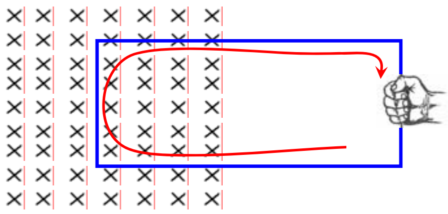
- Podemos decir que el fenómeno de inducción electromagnética se rige por dos leyes:

La ley de Faraday-Henry: cuantitativa, que nos da el valor de la corriente inducida

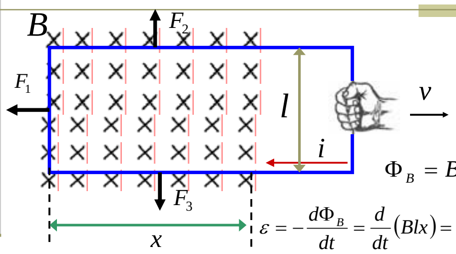
La ley de Lenz: cualitativa, que nos da el sentido de la corriente inducida

Ejemplo

- Una expira rectangular de ancho , l uno de cuyos extremos se encuentra en un campo de inducción magnético uniforme B, dirigido perpendicularmente al plano de la espira, movemos la espira a la derecha con una velocidad constante v



Ejemplo



$$\Phi_B = Blx$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d}{dt}(Blx) = -Bl\frac{dx}{dt} = Blv$$

$$\varepsilon = Blv$$

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{Blv}{R}$$

$$\vec{F} = i\vec{l}\,x\vec{B}$$

$$F_1 = ilBsen90^0 = \left(\frac{Blv}{R}\right)lB = \frac{B^2l^2v}{R}$$

Ejemplo

En consecuencia el trabajo necesario para mover la espira, por unidad de tiempo será:

$$P = F_1\frac{d}{t} = F_1 v = \frac{B^2l^2v^2}{R}$$

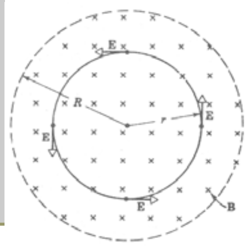
Este resultando es idéntico a considerar la potencia disipada por efecto Joule sobre la resistencia

$$P_j = Ri^2 = \left(\frac{Blv}{R}\right)^2 R = \frac{B^2l^2v^2}{R}$$

Campos magnéticos variables con el tiempo

- Consideremos ahora que no hay movimiento de objetos, sino que el campo magnético puede variar con el tiempo.
- Si una espira conductora se coloca en el campo magnético que varía con el tiempo, cambiará el flujo que pasa por la espira y en consecuencia aparecerá una fem inducida en la espira.
- *Un campo magnético que cambia produce un campo eléctrico*

Campos magnéticos variables con el tiempo



Tenemos un campo $\vec{B}$ que varía $\frac{dB}{dt}$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Consideramos una carga q_0 que se mueve alrededor

El trabajo W sobre la carga será

$$W = F_e d = q_0 E(2\pi r)$$

El trabajo de la fem será

$$W = \varepsilon q_0$$

Igualando

$$\varepsilon q_0 = q_0 E 2\pi r \Rightarrow \varepsilon = E 2\pi r$$

Campos magnéticos variables con el tiempo

$\varepsilon = E2\pi r$ Para el caso general será $\varepsilon = \oint \vec{E}d\vec{l}$

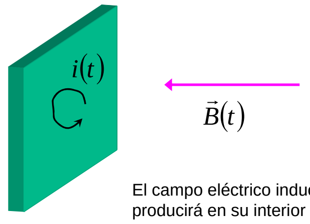
Como $\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ Igualando

$\boxed{\oint \vec{E}d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}}$ Ley de Faraday en su forma general

$\boxed{\oint \vec{E}d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}d\vec{S}}$ Expresión integral de la Ley de Faraday

Corrientes de Foucault

- Supongamos un campo magnético variable perpendicular a una cara de un conductor extenso, por ejemplo una placa



El campo eléctrico inducido en el conductor producirá en su interior corrientes eléctricas inducidas, conocidas como corrientes de Foucault o corrientes en remolino

Corrientes de Foucault

- Estas corrientes de Foucault se producen también cuando un conductor se mueve en el seno de un campo magnético.
- Su efecto es una disipación de energía por calentamiento Joule del conductor. $\boxed{(P = i^2R)}$
- Un material conductor puede ser calentado por las corrientes de Foucault inducidas en su interior por un campo eléctrico variable, proceso que se conoce como calentamiento por inducción.

Corrientes de Foucault

- El los casos en que no desee esta disipación de energía, por ejemplo el núcleo de hierro de un transformador, este núcleo se fabrica con láminas delgadas de hierro conductor separadas por capas aislantes.
- Las capas aislantes aumentan muy fuerte la resistencia en el camino de las cargas, de manera tal que reducen la corriente y en consecuencia el calentamiento

Aplicaciones de la Ley de Faraday.

- Generadores de fuerza electromotriz
  - **Producción de una corriente alterna**
    - **El alternador**
  - **Producción de una corriente continua**
    - **La dinamo**

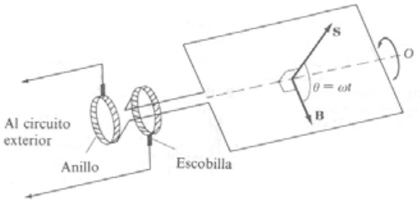
Producción de una corriente alterna

- La corriente alterna se caracteriza porque su sentido cambia alternativamente con el tiempo.
- Ello es debido a que el generador que la produce invierte periódicamente sus dos polos eléctricos, convirtiendo el positivo en negativo y viceversa, muchas veces por segundo.
- La ley de Faraday establece que se induce una fuerza electromotriz en un circuito eléctrico siempre que varíe el flujo magnético que lo atraviesa.
- Recordando con la definición de flujo magnético

$$\Phi_B = \int \vec{B}d\vec{S} = \int BdS\cos\theta$$

Producción de una corriente alterna

- Es posible provocar el fenómeno de la inducción sin desplazar el imán ni modificar la corriente que pasa por la bobina, haciendo girar ésta en torno a un eje dentro del campo magnético debido a un imán
- En tal caso el flujo magnético Φ_B varía porque varía el ángulo θ



Producción de una corriente alterna

- Como la espira esta girando, el ángulo θ varía continuamente, lo cual hace que el flujo este cambiando, y por lo tanto aparece una *fem* inducida
- Si se hace rotar la espira uniformemente, ese movimiento de rotación periódico da lugar a una variación también periódica del flujo magnético, supongamos que la espira gira con una velocidad angular ω

el ángulo en un instante será $\theta = \omega t$

y el flujo Φ_B que atraviesa la espira será: $\Phi_B = BS\cos\varpi t$

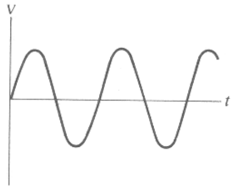
Producción de una corriente alterna

Como $\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ Siendo $\Phi_B = BS\cos\varpi t$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d\left(BS\cos\varpi t\right)}{dt} = BS\,\varpi sen\,\varpi t$$

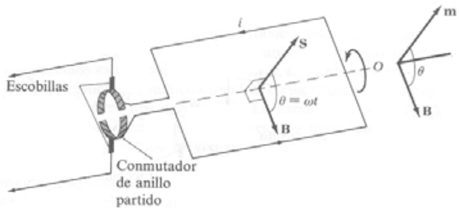
Para una bobina de N espiras o vueltas, se induce una fem en cada vuelta y como están conectadas en serie la fem total es

$$\varepsilon = NBS\,\varpi sen\,\varpi t$$



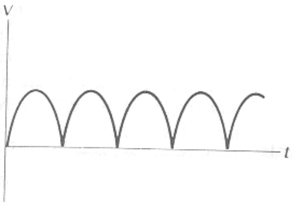
Producción de una corriente continua

- Vemos a continuación otro tipo de conexión distinta de la espira con el exterior, las escobillas hacen contacto con las mitades de un *conmutador de anillo partido*



Producción de una corriente continua

El generador que incorpora el conmutador para mantener el sentido de la corriente se llama generador de corriente continua



Inducción mutua

Joseph Henry (1797 – 1878)

Descubrió el fenómeno de la autoinducción. La unidad de inductancia se llama *henry* en su honor

Inducción mutua

- Si se colocan dos bobinas una cerca de la otra, una corriente en una bobina producirá un flujo en la otra bobina, si este flujo cambia porque cambia la corriente, aparecerá una fem inducida en la segunda bobina de acuerdo con la Ley de Faraday.
- Sin embargo no se necesitan dos bobinas para poner de manifiesto un efecto de inducción.
- Aparece una fem inducida en la bobina si cambia la corriente en la bobina misma.
- Este fenómeno se llama autoinducción y la fuerza electromotriz producida de esta manera se llama *fem* autoinducida.
- Obedece a la Ley de Faraday de la misma manera que la obedecen otras *fems* inducidas.

Inducción mutua

- Consideremos una bobina apretada (la parte central de un solenoide)

$$\varepsilon = -\frac{d(N\Phi_B)}{dt}$$

- El número de encadenamientos de flujo $N\Phi_B$ es la cantidad característica importante para la inducción, para una bobina dada, esta cantidad es proporcional a la corriente

$$i \approx N\Phi_B$$

- La constante de proporcionalidad recibe el nombre de *inductancia* L del aparato

Inducción mutua

$iL = N\Phi_B$ reemplazando en la Ley de Faraday será

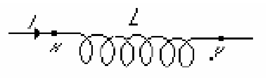
$$\varepsilon = -\frac{d(N\Phi_B)}{dt} = -\frac{d(Li)}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

$$L = -\frac{\varepsilon}{di/dt}$$

- Siendo esta la ecuación de definición de inductancia para bobinas de todas formas y tamaños, ya sea que estén apretadas o no, que haya hierro u otros materiales en su núcleo.

Inducción mutua

- Si no hay hierro u otros materiales similares, L, lo mismo que vimos en su momento para C, depende solo de la geometría del aparato.
- En un inductor la presencia de un campo magnético es la característica importante, que se corresponde a la presencia de un campo eléctrico en un condensador.
- El símbolo usado es para L



Inducción mutua

- La unidad de la inductancia la obtenemos de la definición:

$$L = -\frac{\varepsilon}{di/dt}$$

$$L = -\frac{\varepsilon}{di/dt} \quad [L] = \frac{[\varepsilon]}{[i]/[t]} = \frac{[volts][seg]}{[amp]} = henry$$

Son de uso frecuente los submúltiplos

- $milihenry = 1*10^{-3} henry$
- $microhenry = 1*10^{-6} henry$

Cálculo de la inductancia

- Vamos a calcular en forma sencilla la autoinducción para una bobina de apretada, sin hierro.

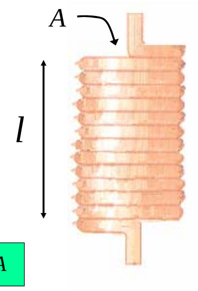
$$L = \frac{N\Phi_B}{i}$$

$$N\Phi_B = (nl)(BA)$$

$$B = \mu_0 ni$$

$$N\Phi_B = (nl)(BA) = \mu_0 n^2 liA$$

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} = \frac{\mu_0 n^2 liA}{i} = \mu_0 n^2 lA$$

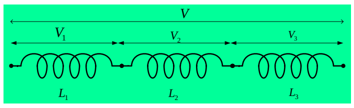


Inductancia en serie y paralelo

- Al igual que vimos para el caso de capacitores y resistencias, dado un circuito formado por varias bobinas es posible calcular el valor de una única inductancia que reemplace a todo el conjunto

inductancia equivalente

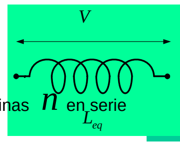
Inductancia en serie



$$V = L\frac{di}{dt}$$

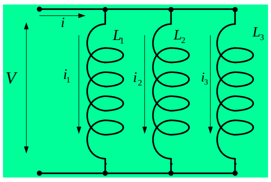
$$V = V_1 + V_2 + V_3 = L_1\frac{di}{dt} + L_2\frac{di}{dt} + L_3\frac{di}{dt} =$$

$$V = (L_1 + L_2 + L_3)\frac{di}{dt} = L_{eq}\frac{di}{dt}$$



$L_{eq} = (L_1 + L_2 + L_3)$ para bobinas n en serie $L_{eq} = \sum_{i=1}^{n} L_i$

Inductancia en paralelo



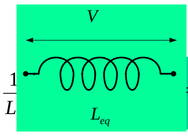
$$V = V_1 = V_2 = V_3$$

$$i = i_1 + i_2 + i_3$$

$$V = L\frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{V}{L}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} + \frac{di_3}{dt}$$

$$\frac{V}{L_{eq}} = \frac{V_1}{L_1} + \frac{V_2}{L_2} + \frac{V_3}{L_3} \Rightarrow \frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L}$$

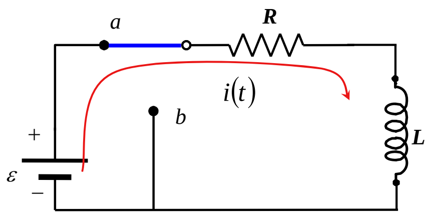


$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{L_i}$$

Circuito LR

- Cuando analizamos el circuito **RC** , vimos que al introducir el condensador la carga no toma inmediatamente su valor de equilibrio.
- Este retrazo en el aumento de la carga se designa constante de tiempo capacitiva.
- Un retrazo análogo en el aumento o disminución de la corriente eléctrica se presenta si se conecta o si se desconecta una fem en un circuito que tenga una resistencia y una inductancia.

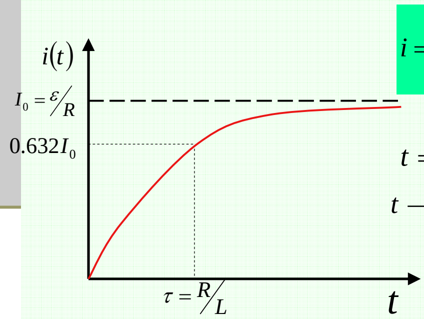
Circuito LR



$$-iR - L\frac{di}{dt} + \varepsilon = 0 \quad \Rightarrow \quad i = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

Circuito LR

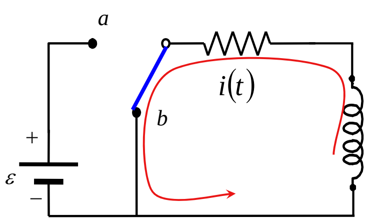
$$i = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$



$t = 0 \longrightarrow i(t) = 0$

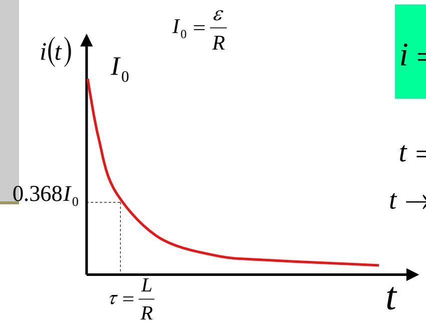
$t \to \infty \longrightarrow i(t) = \varepsilon/R$

Circuito LR



$$iR + L\frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{i = \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{R}{L}t}}$$

Circuito LR



$$\boxed{i = \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{R}{L}t}}$$

$t = 0 \longrightarrow I = \frac{\varepsilon}{R}$

$t \to \infty \longrightarrow i = 0$

Energía y el campo magnético

- El campo eléctrico podía considerarse como asiento de energía almacenada, y en el vacío la densidad de energía eléctrica vale:

$$\boxed{u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$$

- Siendo E la intensidad del campo eléctrico del punto analizado. Si bien el razonamiento se hizo para un capacitar de placas planas paralelas es valida para todas las configuraciones de campos eléctricos.

Energía y el campo magnético

- La energía también puede almacenarse en un campo magnético.
- Dos alambres que llevan corrientes en el mismo sentido se atraen entre si, y para separarlos algo más debemos realizar trabajo.
- Esta energía gastada se almacena en el campo magnético que existe entre los alambres.
- La energía puede recobrarse permitiendo que los alambres vuelvan a su posición original.

Energía y el campo magnético

- Consideremos el circuito anterior para derivar una expresión de la energía

$$-iR - L\frac{di}{dt} + \varepsilon = 0 \Rightarrow \varepsilon = iR + L\frac{di}{dt}$$

Multiplicamos ambos miembros por i

$$i\varepsilon = i^2R + Li\frac{di}{dt}$$

$i\varepsilon$ → velocidad con que la fuente entrega energía al circuito

i^2R → disipación de energía por efecto Joule en la resistencia

$Li\frac{di}{dt}$ → velocidad con que se almacena energía en el campo magnético

$$\frac{dU_B}{dt} = Li\frac{di}{dt}$$ simplificamos dt

$$dU_B = Li\,di$$

$$U_B = \int_0^{U_B} dU_B = \int_0^i Li\,di = \frac{1}{2}Li^2$$

$$\boxed{U_B = \frac{1}{2}Li^2}$$ la energía total almacenada en una inductancia L que lleva una corriente i

Densidad de energía

- Vemos ahora una expresión para la densidad de energía u en un campo magnético
- Consideremos un solenoide de longitud l y área A su volumen será Al
- La energía almacenada debe estar por completo dentro del volumen, porque el campo magnético fuera del solenoide es casi cero.
- Además la energía almacenada debe estar uniformemente distribuida porque el campo magnético es constante dentro del solenoide

$$u_B = \frac{U_B}{volumen} = \frac{U_B}{Al}$$

Densidad de energía

$$u_B = \frac{U_B}{volumen} = \frac{U_B}{Al} \qquad \text{como} \qquad U_B = \frac{1}{2}Li^2$$

$$u_B = \frac{1}{2}\frac{Li^2}{Al}$$

Para un solenoide vimos que: $L = \mu_0 n^2 lA$

Y la corriente es: $B = \mu_0 in \Rightarrow i = \dfrac{B}{\mu_0 n}$

$$u_B = \frac{1}{2}\frac{(\mu_0 n^2 lA)}{Al}\left(\frac{B}{\mu_0 n}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} \quad \Rightarrow \quad u_B = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$$

Densidad de energía

- Las siguientes ecuaciones dan la densidad de energía almacenada en cualquier punto en donde el campo de inducción magnética sea $\vec{B}$ y el campo eléctrico sea $\vec{E}$
- Las ecuaciones son válida para toda clase de configuraciones de campo magnético y eléctrico.

$$u_B = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} \qquad u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Oscilaciones eléctricas – Circuito LC

- Un sistema LC se asemeja a un sistema masa-resorte en que entre otras cosas ambos sistemas tienen una frecuencia característica de oscilación.
- Consideremos el estado inicial en que el condensador esta cargado con una carga q_m y que la corriente en la bobina es cero.
- En este momento la energía almacenada en el condensador será:

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{q_m^2}{C}$$

Oscilaciones eléctricas – Circuito LC

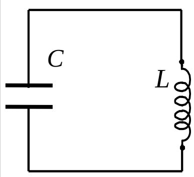
- A medida que q_m disminuye, también disminuye la energía almacenada en el condensador.
- Esta energía es transmitida al campo magnético que aparece alrededor del inductor debido a la corriente.
- El campo eléctrico disminuye, se forma un campo magnético y la energía se transmite del primero al segundo. Le energía en el campo magnético será

$$U_B = \frac{1}{2}Li^2$$

Oscilaciones eléctricas – Circuito LC

- En un determinado momento la carga del condensador será cero, le energía almacenada en el condensador habrá pasado por completo al campo magnético del inductor, en este momento fluye energía de regreso del inductor al condensador y el ciclo comienza nuevamente.
- En una situación ideal donde no haya pérdida de energía este proceso se mantendrá permanentemente

Oscilaciones eléctricas – Circuito LC



$$U = U_B + U_E = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

Si suponemos que la resistencia del circuito LC es cero, no hay transformación de energía en calor por efecto Joule, no hay perdida de energía, será

$$\frac{dU}{dt} = 0 \qquad \frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right) = 0$$

Oscilaciones eléctricas – Circuito LC

$$\frac{dU}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2+\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right)=0$$

$$\frac{dU}{dt}=Li\frac{di}{dt}+\frac{q}{C}\frac{dq}{dt}=0$$ como $$i=\frac{dq}{dt}$$

$$\frac{di}{dt}=\frac{d^2q}{dt^2}$$

$$\frac{dU}{dt}=L\frac{dq}{dt}\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{q}{C}\frac{dq}{dt}=0\Rightarrow L\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{1}{c}q=0$$

Oscilaciones eléctricas – Circuito LC

- Esta es la ecuación diferencial que describe las oscilaciones de un circuito LC ideal

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{1}{c}q=0$$ que es de la forma $$\frac{d^2x}{dx^2}+K=0$$

Siendo la solución de la forma $x=A\cos(\omega t+\theta)$

Si q_m es la carga máxima del capacitor C la solución para el circuito LC ideal será

$$q=q_m\cos(\omega t+\theta)$$

ω es la frecuencia angular de las oscilaciones electromagnéticas.

Oscilaciones eléctricas – Circuito LC

$q=q_m\cos(\omega t+\theta)$ como $i=\dfrac{dq}{dt}$

$$i=\frac{dq}{dt}=\frac{d(q_m\cos(\omega t+\theta))}{dt}=-\omega q_m sen(\omega t+\theta)$$

$$i=-\omega q_m sen(\omega t+\theta)$$

El ángulo de fase θ depende de las condiciones iniciales $t=0$

Vemos la frecuencia angular ω

Oscilaciones eléctricas – Circuito LC

La frecuencia angular ω será

$i=-\omega q_m sen(\omega t+\theta)$ Volvemos a derivar

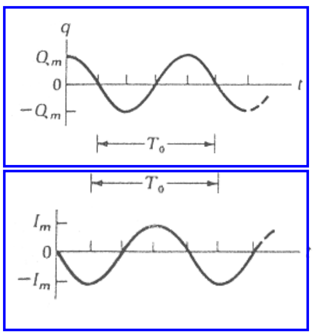
$$\frac{d^2q}{dt^2}=\frac{d(-\omega q_m sen(\omega t+\theta))}{dt}=-\omega^2 q_m\cos(\omega t+\theta)$$

Reemplazamos en nuestra ecuación diferencial

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{1}{c}q=-L\omega^2q_m\cos(\omega t+\theta)+\frac{1}{c}q_m\cos(\omega t+\theta)=0$$

$$\left(-L\omega^2+\frac{1}{C}\right)(q_m\cos(\omega t+\theta))=0 \Longrightarrow \left(-L\omega^2+\frac{1}{C}\right)=0\Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Oscilaciones eléctricas – Circuito LC



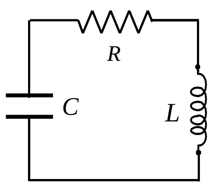
$$q=q_m\cos(\omega t+\theta)$$

$$i=-i_m sen(\omega t)$$

$$i_m=\omega q_m$$

Oscilaciones eléctricas – Circuito LCR

- A igual que el caso anterior realizamos el análisis considerando las energías que entran en juego. La mayor diferencia es que en este caso tenemos potencia disipada en la resistencia por efecto Joule



Le energía almacenada entre el inductor y el condensador será

$$U=U_B+U_E=\frac{1}{2}Li^2+\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

pero ahora $$\frac{dU}{dt}=-i^2R$$

Oscilaciones eléctricas – Circuito LCR

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right) = -i^2 R$$

$$Li\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} = -i^2 R$$

como $i = \dfrac{dq}{dt}$, $\dfrac{di}{dt} = \dfrac{d^2q}{dt^2}$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

cuya solución es:

$$q = q_m e^{-\frac{R}{2L}t}\cos(\omega t + \theta)$$

con

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

Oscilaciones eléctricas – Circuito LCR

$$q = q_m e^{-\frac{R}{2L}t}\cos(\omega t + \theta)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$