

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/325405727>

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y sus Aplicaciones

Book · May 2011

CITATION

1

READS

38,024

3 authors, including:



David Macías Ferrer

Universidad Politécnica de Altamira

60 PUBLICATIONS 42 CITATIONS

SEE PROFILE



J.A. Melo-Banda

Instituto Tecnológico de Ciudad Madero, (ITCM)

95 PUBLICATIONS 463 CITATIONS

SEE PROFILE

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



Scanning Electron Microscopy [View project](#)



Mathematics: Important Tool in Science [View project](#)



Tecnológico Nacional de México/Instituto Tecnológico de Ciudad Madero
División de Estudios de Posgrado e Investigación

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y sus Aplicaciones

Dr. David Macias Ferrer

Dr. José Aarón Melo Banda

Dra. Mayda Lam Maldonado

Centro de Investigación en Petroquímica
Avenida de las bahías, prolongación bahía Aldahir
Parque Tecnia, Altamira, Tamaulipas, México



Objetivo Principal de la Obra

El objetivo principal de esta obra es el siguiente:

Proporcionar al estudiante los fundamentos teóricos necesarios para que éste pueda analizar y resolver problemas de *ecuaciones diferenciales ordinarias* y que tenga la posibilidad de aplicarlos en el estudio de los fenómenos físicos y sociales relacionados con la ingeniería.

¿A Quiénes va Dirigida la Obra?

La presente obra va dirigida a estudiantes de ingeniería y de licenciaturas afines y todo aquel que se interese por el desarrollo histórico de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Estructura de la Obra

Con base en la experiencia que he tenido como catedrático e investigador de la disciplina matemática denominada ecuaciones diferenciales, he decidido estructurar la presente obra acorde con los siguientes objetivos principales:

1. Que el contenido de la obra sea acorde con los programas académicos más comunes de la materia de ecuaciones diferenciales ordinarias que se imparte en los diversos planteles educativos de la República Mexicana
2. Que los contenidos expuestos le sirvan al estudiante como base matemática fundamental para una mejor comprensión de los conceptos manejados en materias posteriores.
3. Que fomente la lectura y la investigación teórica y práctica en el proceso de formación del estudiante.
4. Que muestre los aspectos históricos del desarrollo de las ecuaciones diferenciales ordinarias.
5. Que haga hincapié en la importancia que tienen las ecuaciones diferenciales en el desarrollo evolutivo de la ingeniería.
6. Que sea leída y utilizada en su totalidad
7. Que con el enfoque de procesos el estudiante tenga una visión diferente acerca de las ecuaciones diferenciales.

Y esto ha sido así, puesto que desde 1987 año en el que comencé a estudiar la teoría de las ecuaciones diferenciales, me he dado cuenta de que existe una enorme cantidad de temas que constituyen tal teoría, y que si se hiciera una obra que los contenga a todos sería de varios

volúmenes. Así que escogí solo aquellos temas que les son útiles al estudiante en su formación matemática y al mismo tiempo acorde con la mayoría de los programas sobre la materia de ecuaciones diferenciales, esto da la posibilidad de que la obra sea leída de principio a fin. Por otro lado considero que sería más eficiente el aprendizaje de las matemáticas si el estudiante lea mucho más de lo que actualmente lo hace. Esto definitivamente ayudaría en la formación académica del estudiante puesto que con ello logra tener una visión más amplia sobre los conceptos manejados en esta materia y en otras áreas afines; la Internet ofrece la gran posibilidad de ampliar esta visión. He decidido incluir en esta obra algunos aspectos históricos del desarrollo de las ecuaciones diferenciales ordinarias puesto que éstos han sido importantes en el proceso evolutivo de los sistemas que se manejan actualmente en el campo laboral de la ingeniería; por ejemplo: los modernos sistemas de control automático. Al final del Capítulo 4, muestro el enfoque de procesos, un punto de vista poco común en una obra de ecuaciones diferenciales ordinarias; con ello pretendo que el estudiante tenga una visión muy distinta de la que tiene actualmente, y esto lo he decidido así, por algunas entrevistas que he tenido con estudiantes de ingeniería acerca de este tipo de enfoques.

Características de la Obra

Fundamentos Teóricos Concretos

La obra muestra una serie de axiomas y definiciones concretas relacionados con los diferentes tópicos que conforman el estudio de las *ecuaciones diferenciales ordinarias* que le permiten al lector utilizarlos en la resolución de problemas. En estas nociones, se incluye en la muchos de los casos la raíz etimológica (*marcados en cursiva, entre paréntesis y en rojo*) del o de los términos involucrados en el establecimiento de un axioma, definición, principio o concepto. Los conceptos importantes mostrados dentro de un párrafo, se encuentran remarcados en negrita, cursiva y en *azul* para una rápida localización, mientras que la propia definición, en cursiva y en *azul*. Los títulos de las definiciones, teoremas, observaciones, comienzan remarcados en negrita cursiva y en *negro*.

Herramientas para la Resolución de los Problemas

Por otro lado existe un gran número de referencias dentro de los desarrollos de los ejemplos que le permite al estudiante encontrar herramientas para resolver con facilidad un problema dado. Por ejemplo, en la resolución de las ecuaciones diferenciales homogéneas, es necesario que el estudiante sepa utilizar la regla de Ruffini (división sintética) para encontrar las raíces del polinomio característico; en el desarrollo de un ejemplo de este tema, viene referenciado el apéndice C, en donde se encuentra una extensa explicación de la regla de Ruffini.

Reseñas Históricas

La obra incluye aspectos históricos del desarrollo de las ecuaciones diferenciales ordinarias hasta la primera mitad del siglo XX, éstos, dan la posibilidad de acrecentar la habilidad de síntesis y con ello, poder analizar comparativamente las fases del desarrollo evolutivo de una materia y visualizar los aspectos medulares de ésta. Por ejemplo, en la última década del siglo XIX, la teoría del análisis cualitativo de Poincaré junto con la teoría de los grupos de transformación de Lie, fueron fundamentales para el posterior desarrollo de la moderna teoría de

las ecuaciones diferenciales. Pero para que esto sucediera, estos matemáticos tuvieron que ver hacia atrás para analizar las grandes síntesis de Euler y sus contemporáneos. Hay una obra sobre la materia que me fue muy grato consultarla y es la obra del profesor George Simmons de *Colorado College* y cita atinadamente un proverbio armenio que reza así: “*Quien carece del sentido del pasado, está condenado a vivir en la estrecha oscuridad de su propia generación*” y después sigue el profesor Simmons diciendo “*Una matemática desprovista de su historia es una matemática desprovista de su grandeza.....*”

Desarrollo Lógico Secuencial de los Temas

A diferencia de otras, existe una fuerte dependencia de los temas que conforman el contenido de esta obra, es decir, que para poder comprender los fundamentos teóricos así como la metodología empleada en la resolución de los problemas es necesario atender el capítulo precedente. Y lo he decidido así, puesto que sigue la natural secuencia lógica de los temas de un programa académico común de la materia. En otras palabras, la presente obra puede ser un libro de texto en la enseñanza de la materia de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Delimitación de los Temas

Por razones que mencioné anteriormente, evidentemente hay temas que no incluí en los contenidos de la presente obra, como la ecuación de Riccati o el cálculo operacional de Heaviside (o sea el método del anulador) aplicado a ecuaciones diferenciales ordinarias. Pero eso no fue parte de mi preocupación ya que considero que los presupuestos teóricos y prácticos de la obra, le puede proporcionar al estudiante una formación matemática tal, que él mismo en forma autodidacta puede estudiar estos temas sin ningún problema.

Referencias Bibliográficas

Hay un número considerable de referencias bibliográficas al final de cada capítulo y de cada apéndice y la existencia de éstas en esa ubicación tiene un doble sentido: por un lado sirve para mostrar las obras en las que me apoyé para enriquecer la información de los contenidos teóricos y prácticos y, por otro lado, le sirven al estudiante para extender el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias e incluso temas afines como la teoría de control automático, por ejemplo.

Contenido

La obra consta de 5 capítulos y 4 apéndices, los primeros se encuentran en dependencia lógica secuencial mientras que los últimos se vinculan acorde con su necesidad. En el capítulo 1 abordo algunos temas filosóficos sobre las matemáticas (incluyendo su definición) y la terminología básica necesaria para poder comprender los fundamentos de las ecuaciones diferenciales ordinarias, e incluyo una breve reseña histórica sobre las mismas.

En el capítulo 2 muestro los cinco tipos de ecuaciones de primer orden más comúnmente estudiados como las ecuaciones de variables separables, homogéneas, en diferenciales totales, lineales, la de Bernoulli y algunos casos que se reducen a éstas. En la sección 2.8 se muestran aplicaciones de las ecuaciones de primer orden en algunos fenómenos físicos, tales como

crecimiento de la población, concentración en tanques agitados, caída libre de los cuerpos, etc., haciendo un riguroso análisis de las respuestas obtenidas.

En el capítulo 3 abordo las ecuaciones diferenciales de orden n , homogéneas y no homogéneas, la ecuación de Cauchy-Euler, así como el método de variación de parámetros. En la Sección 3.7 se muestran también aplicaciones de las ecuaciones de orden n en algunos fenómenos físicos, específicamente en el clásico sistema masa-resorte, haciendo un riguroso análisis de las respuestas obtenidas.

En el capítulo 4 muestro los fundamentos teóricos de la transformada de Laplace y su proceso de inversión, así como las aplicaciones de éstos en la resoluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias. En la sección 4.4 aparecen las aplicaciones de la transformada de Laplace en fenómenos físicos en donde introduzco el enfoque de procesos haciendo un interesante análisis de las entradas y salidas en un proceso visto desde la modelación matemática. Finalmente en el capítulo 5 muestro la teoría de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, algunos métodos de solución y un interesante estudio sobre el plano de fases y los puntos de reposo así como la aplicación del computador en la solución de cierto tipo de sistemas lineales y no lineales.

Como ya lo mencione anteriormente, al final de cada capítulo se encuentran referencias bibliográficas para que el estudiante pueda ampliar sus conocimientos con relación a los temas contenidos en los capítulos.

El apéndice A contiene las fórmulas más comunes que se emplean en la resolución de problemas sobre ecuaciones diferenciales ordinarias. Se incluyen fórmulas de derivadas, integrales indefinidas, identidades trigonométricas, hiperbólicas y logarítmicas, además de una corta descripción de las operaciones básicas sobre números complejos. En el apéndice B muestro el método de los mínimos cuadrados para una aproximación lineal, útil en el manejo de datos estadísticos masivos observados en un fenómeno natural o social. En el apéndice C trato algunos teoremas relacionados con los polinomios algebraicos y muestro una extensa explicación sobre la regla de Ruffini útil en el cálculo de las raíces de polinomios, así como también una interesante reseña histórica de las contribuciones de algunos matemáticos chinos de la antigüedad. En el apéndice D, muestro el tema de las funciones racionales y abordo los cuatro casos de descomposición de una fracción propia en sus fracciones simples. Finalmente en el apéndice E muestro fragmentos de algunas obras de *Leonhard Euler*, *Gustav Doetsch*, *Ruel Vance Churchill* y *Aleksandr Mikhailovich Liapunov*.

Mi Curriculum Vitae

Mi formación académica a nivel licenciatura la obtuve en el Instituto Tecnológico #7 de Cd. Madero donde estude la carrera de Ingeniería Química Industrial con especialización en Procesos y en el Instituto de Ciencias y Estudios Superiores de Tamaulipas, donde estude la Licenciatura en Pedagogía con especialización en Matemáticas Superiores. Posteriormente los estudios de postgrado los realicé en el Instituto de Estudios Superiores de Tamaulipas donde cursé la Maestría en Educación vinculando estos estudios con la Didáctica de las Matemáticas, la Psicología Matemática y la Educación Audiovisual.



Debo mi formación matemática principalmente a los estudios que realicé en el Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas auspiciado por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional y dirigido por el Dr. Arturo Hernández Ramírez; también, a las enseñanzas del Mto. Francisco Gerardo Benavides Bravo de la Universidad Autónoma de Nuevo León, del Mto. Jesús Garza Whittaker y del Mto. David Lerma Bonilla, ambos del Instituto Tecnológico de Cd. Madero y, en particular, al aprendizaje autodidacta de las obras de los académicos Nikolai Lobachevski, Valdimir Steklov, Alexandr Mikhailovich Lyapunov, Sergei Bershtein, Lev Elsgoltz, Iván Vinogradov, Andrei Nikolaevich Kolmogórov, Alexandr Mordkóvich, Sergei Vasiliévich Fomín, Segei Mikhailovich Nikolski, Yaglom Bugrov, Alexander Samarskii, Semión Targ, Lev Kudriávtssev, Valentín Voevodin, Nikolai Piskunov, Konstantín Ríbnikov, Alexei Ivánovich Kostrikin, Víctor Litvinenko, Alexandr Gennadievich Kurosh, Boris Zeldovich, David Lev Landau, Evgenii Lifshitz, y Andrei Tikhonov, todos distinguidos miembros de la Academia de Ciencias de Rusia.

Agradecimientos

Debo primeramente darle gracias a Dios, por haberme dado el privilegio de la vida, a mis padres, por mi formación y a mi familia que me ha apoyado en todo momento. Agradezco y reconozco infinitamente a todos aquellos matemáticos y hombres de ciencia que dieron su vida en aras del conocimiento. Les estoy muy agradecido a los Doctores John O'Connor y Edmund Robertson de la Universidad de San Andrews, Escocia, por haberme permitido disponer de su estupenda colección de imágenes y fotografías de científicos, algunas de las cuales, presento en esta obra. Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a Denisse del Carmen Valladares García, estudiante de Ingeniería en Sistemas Computacionales y Arturo Medina Cuautle, estudiante de Ingeniería en Electrónica, ambos del Instituto de Estudios Superiores de Tamaulipas, por su contribución en la revisión ortográfica de la obra y por haber participado en la construcción de algunos problemas aplicados.



Mtro. David Macias Ferrer



Capítulo 1	Conceptos Preliminares	
	1.1 <i>Aspectos Lógico y Epistemológico de las Matemáticas</i>	1
	1.1.1 Definición de Matemáticas	1
	1.1.2 La Matemática, Ciencia Formal (Eidética)	3
	1.1.3 Las Disciplinas Matemáticas	3
	1.1.4 Historia de las Matemáticas	5
	1.1.5 Investigación	7
	1.2 <i>Introducción a las Ecuaciones Diferenciales</i>	7
	1.2.1 Reseña Histórica	7
	1.3 <i>Modelos Matemáticos</i>	11
	1.3.1 El Nacimiento de la Ciencia	11
	1.3.2 La Naturaleza Física como Generadora del Conocimiento Matemático	12
	1.3.3 Modelación Matemática	13
	1.3.4 Aplicación de las Matemáticas al Mundo Real	13
	1.3.5 Algunos Tipos de Ecuaciones en las Matemáticas	16
	1.4 <i>Definiciones y Terminología Básicas</i>	18
	1.4.1 Clasificación de las Ecuaciones Diferenciales	19
	1.4.2 Solución de una Ecuación Diferencial Ordinaria	20
	1.4.3 Problema de Valores Iniciales o Problema de Cauchy	22
	1.4.4 Comprobación de una Solución	23
	1.4.5 Ejercicios Suplementarios	24
	1.5 <i>Referencias Bibliográficas del Capítulo 1</i>	25
Capítulo 2	Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden	
	2.1 <i>Ecuaciones de Primer Orden</i>	27
	2.1.1 Reseña Histórica	27
	2.1.2 Definiciones Básicas	28
	2.2 <i>Ecuaciones Diferenciales de Variables Separadas y Separables</i>	29
	2.2.1 Ecuaciones Diferenciales de Variables Separadas	29
	2.2.2 Ecuaciones Diferenciales de Variables Separables	29
	2.2.3 Resolución de Ecuaciones de Variables Separadas y Separables	30
	2.2.4 Ejercicios Suplementarios	33
	2.3 <i>Ecuaciones Diferenciales Homogéneas de Primer Orden</i>	33
	2.3.1 Definiciones Básicas	33
	2.3.2 Solución de una Ecuación Diferencial Homogénea de Primer Orden	34
	2.3.3 Ecuaciones Diferenciales que se Reducen a Ecuaciones Diferenciales Homogéneas de Primer Orden	35
	2.3.4 Resolución de Ecuaciones Diferenciales Homogéneas de Primer Orden	36
	2.3.5 Ejercicios Suplementarios	41
	2.4 <i>Ecuaciones Diferenciales en Diferenciales Totales</i>	42
	2.4.1 Definiciones Básicas	42
	2.4.2 Integración de las Ecuaciones Diferenciales Exactas	42
	2.4.3 Resolución de Ecuaciones Diferenciales Exactas	44

2.4.4	Ejercicios Suplementarios	47
2.5	<i>Ecuaciones que se Reducen a Ecuaciones en Diferenciales en Diferenciales Totales</i>	47
2.5.1	Factor Integrante	47
2.5.2	Resolución de Ecuaciones que se Reducen a Ecuaciones en Diferenciales en Diferenciales Totales	48
2.5.3	Ejercicios Suplementarios	52
2.6	<i>Ecuaciones Diferenciales Lineales de Primer Orden</i>	52
2.6.1	Definiciones Básicas	52
2.6.2	Integración de una Ecuación Diferencial Lineal de Primer Orden	53
2.6.3	Resolución de Ecuaciones Diferenciales Lineales de Primer Orden	54
2.6.4	Ejercicios Suplementarios	58
2.7	<i>Ecuaciones Diferenciales de Bernoulli</i>	59
2.7.1	Definiciones Básicas	59
2.7.2	Resolución de Ecuaciones Diferenciales de Bernoulli	60
2.7.3	Ejercicios Suplementarios	63
2.8	<i>Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden</i>	64
2.8.1	Introducción	64
2.8.2	¿Cómo se modela un fenómeno de la Naturaleza?	64
2.8.3	Enfriamiento de los Cuerpos	66
2.8.4	Concentración en Tanques Agitados	71
2.8.5	Vaciado de un Tanque	76
2.8.6	Caída Libre de los Cuerpos	81
2.8.7	Segunda Ley de Kirchhoff	87
2.8.8	Crecimiento Demográfico	91
2.8.9	Modificaciones de la Ecuación Logística	97
2.8.9	Ejercicios Suplementarios	98
2.9	<i>Referencias Bibliográficas del Capítulo 2</i>	101

Capítulo 3	<i>Ecuaciones Diferenciales de Orden n</i>	
3.1	<i>Ecuaciones Diferenciales de Orden n</i>	103
3.1.1	Reseña Histórica	103
3.1.2	Definiciones Básicas	105
3.2	<i>Dependencia e Independencia Lineal de Funciones</i>	105
3.2.1	Criterio del Cociente	106
3.2.2	Criterio de Wronski	106
3.2.3	Criterio de Gram	108
3.2.4	Ejercicios Suplementarios	109
3.3	<i>Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneas de Orden n</i>	110
3.3.1	Conjunto Fundamental de Soluciones de una Ecuación Diferencial Lineal Homogénea de Orden n	110
3.3.1.1	Principio de Superposición	110
3.3.2	Problema de Valores Iniciales o Problema de Cauchy	111
3.3.3	Interpretación Geométrica de las Soluciones Particulares de una Ecuación Diferencial Lineal Homogénea de Orden n	111
3.3.4	Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneas de Orden n con Coeficientes Constantes	112
3.3.4.1	Caso I. Raíces Reales y Distintas	112
3.3.4.2	Caso II. Raíces Reales Múltiples	112
3.3.4.3	Caso III. Raíces Complejas	113
3.3.4.4	Caso IV. Raíces Complejas Múltiples	113
3.3.5	Ejercicios Suplementarios	118
3.4	<i>Ecuaciones Diferenciales Lineales No Homogéneas de Orden n</i>	120
3.4.1	Ecuaciones Diferenciales Lineales No Homogéneas de Orden n con Coeficientes Constantes	120

3.4.2	Ejercicios Suplementarios	131
3.5	<i>Método de Variación de Parámetros para Ecuaciones Diferenciales Lineales No Homogéneas de Orden n con Coeficientes Constantes</i>	132
3.5.1	Método de Variación de Parámetros	132
3.5.2	Ecuación Diferencial Lineal No Homogénea de Orden n	132
3.5.3	Ecuación Diferencial Lineal No Homogénea de Segundo Orden	134
3.5.4	Ecuación Diferencial Lineal No Homogénea de Tercer Orden	134
3.5.5	Ejercicios Suplementarios	141
3.6	<i>Ecuaciones Diferenciales Lineales de Cauchy-Euler</i>	142
3.6.1	Ecuación de Cauchy-Euler Lineal Homogénea de Segundo Orden	142
3.6.1.1	Método de Solución	142
3.6.1.2	Caso I. Raíces Reales y Distintas	143
3.6.1.3	Caso II. Raíces Reales Múltiples	143
3.6.1.4	Caso III. Raíces Complejas	143
3.6.2	Ecuación de Cauchy-Euler Lineal No Homogénea de Segundo Orden	145
3.6.2.1	Método de Solución	145
3.6.3	Ejercicios Suplementarios	147
3.7	<i>Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales Lineales de Orden n</i>	148
3.7.1	Reseña Histórica	148
3.7.2	Sistema Masa-Resorte	149
3.7.2.1	Movimiento Armónico Libre No Amortiguado	152
3.7.2.2	Movimiento Armónico Libre Amortiguado	156
3.7.2.2.1	Caso I: Movimiento Sobreamortiguado	157
3.7.2.2.2	Caso II: Movimiento Críticamente Amortiguado	157
3.7.2.2.3	Caso III: Movimiento Subamortiguado	157
3.7.2.3	Movimiento Forzado	165
3.7.2.3.1	Movimiento Forzado sin Amortiguamiento	165
3.7.2.3.2	Movimiento Forzado Amortiguado	165
3.7.2.4	Resonancia Pura	166
3.7.2.5	Más Información Acerca de la Resonancia Pura	171
3.7.3	Ejercicios Suplementarios	173
3.8	<i>Referencias Bibliográficas del Capítulo 3</i>	175

Capítulo 4	<i>Transformadas de Laplace</i>	
4.1	<i>Transformadas de Laplace</i>	177
4.1.1	Orígenes de la Transformada de Laplace	177
4.1.2	Definiciones Básicas	179
4.1.3	Transformadas de Laplace de Algunas Funciones Elementales	180
4.1.4	Algunas Propiedades Importantes de la Transformada de Laplace	180
4.1.5	Métodos para Calcular la Transformada de Laplace	182
4.1.6	Cálculo de la Transformada de Laplace de Funciones	183
4.1.7	Función Escalón Unitario ó Función de Heaviside	187
4.1.8	Ejercicios Suplementarios	189
4.2	<i>Transformada Inversa de Laplace</i>	191
4.2.1	Reseña Histórica	191
4.2.2	Definición de la Transformada Inversa de Laplace	192
4.2.3	Algunas Transformadas Inversas de Laplace	192
4.2.4	Algunas Propiedades de la Transformada Inversa de Laplace	193
4.2.5	Métodos para Encontrar la Transformada Inversa de Laplace	194
4.2.6	Cálculo de la Transformada de Laplace de Funciones	195
4.2.7	Ejercicios Suplementarios	201
4.3	<i>Solución de Ecuaciones Diferenciales Lineales Mediante la Transformada de Laplace</i>	202
4.3.1	Ecuación Diferenciales Lineales con Coeficientes Constantes. Problema de Valores Iniciales	202

	4.3.2 Ejercicios Suplementarios	208
4.4	<i>Aplicación de la Transformada de Laplace en Fenómenos Físicos</i>	208
	4.4.1 El Enfoque de Procesos	208
	4.4.2 Aplicación de la Transformadas de Laplace en la Concentración de una Masa Disuelta en Tanques Agitados	212
	4.4.3 Aplicación de la Transformadas de Laplace en el Sistema Masa-Resorte. Movimiento Armónico Libre	213
	4.4.4 Aplicación de la Transformadas de Laplace en el Sistema Masa-Resorte. Movimiento Libre Críticamente Amortiguado	217
	4.4.5 Aplicación de la Transformadas de Laplace en el Sistema Masa-Resorte. Movimiento Forzado	219
	4.4.6 Ejercicios Suplementarios	222
4.5	<i>Referencias Bibliográficas del Capítulo 4</i>	223

Capítulo 5	<i>Sistemas de Ecuaciones Diferenciales</i>	
5.1	<i>Sistemas de Ecuaciones Diferenciales</i>	225
	5.1.1 Reseña Histórica	225
	5.1.2 Conceptos Preliminares	233
5.2	<i>Sistemas Autónomos</i>	235
	5.2.1 Sistemas Autónomos de 2 Ecuaciones Diferenciales Lineales con 2 Variables Dependientes. Método de Reducción	235
	5.2.2 Sistemas No-Autónomos de 2 Ecuaciones Diferenciales Lineales con 2 Variables Dependientes. Método de Reducción	239
	5.2.3 Algoritmo Matricial de Resolución de Sistemas de n Ecuaciones Diferenciales Lineales con Coeficientes Constantes	241
	5.2.3.1 Caso I. Raíces Reales y Distintas	243
	5.2.3.2 Caso II. Raíces Complejas	244
	5.2.3.3 Caso III. Raíces Reales Múltiples	244
	5.2.4	253
5.3	<i>El plano de Fases</i>	255
	5.3.1 Puntos de Reposo	255
	5.3.2 Clasificación de Los Puntos de Reposo en un Sistema de Ecuaciones Diferenciales Lineal Autónomo con 2 Variables Dependientes	257
	5.3.2.1 Caso I. Raíces Reales y Distintas	257
	5.3.2.2 Caso II. Raíces Complejas	260
	5.3.2.3 Caso III. Raíces Reales Múltiples	262
	5.3.2.4 Caso IV Raíz Real Nula	264
	5.3.3 Ejercicios Suplementarios	266
5.4	<i>El Uso del Computador en la Resolución de Sistemas No lineales</i>	267
	5.4.1 Ejercicios Suplementarios	272
5.5	<i>Teorías de la Estabilidad</i>	273
	5.5.1 Teoría de la Estabilidad de Liapunov	274
	5.5.1.1 Primer Método de Liapunov	274
	5.5.1.2 Segundo Método de Liapunov.	281
	5.5.1.3 Funciones de Liapunov	282
	5.5.1.4 Teorema de Chetáev Sobre la Inestabilidad	286
	5.5.1.5 Teorema de Liapunov-Malkin Sobre la Estabilidad en Primera Aproximación	289
	5.5.1.6 Teorema de Liapunov-Malkin Sobre la Inestabilidad en Primera Aproximación	289
	5.5.2 Criterio de Hurwitz	292
	5.5.3 Ejercicios Suplementarios	297
4.5	<i>Referencias Bibliográficas del Capítulo 5</i>	299

<i>Apéndice A</i>	<i>Tablas y Fórmulas Matemáticas</i>	
	La Derivada de una Función de una Variable	301
	La Integral Indefinida en \mathcal{R}^2	302
	Identidades Trigonométricas, Hiperbólicas y Logarítmicas	304
	Números Complejos	306
	Referencias Bibliográficas del Apéndice A	307
<i>Apéndice B</i>	<i>Regresión Lineal por Mínimos Cuadrados</i>	
	Aproximación Lineal. Aproximación Lineal por Mínimos Cuadrados	308
	Método de Mínimos Cuadrados	309
	Referencias Bibliográficas del Apéndice B	312
<i>Apéndice C</i>	<i>Polinomios Algebraicos</i>	
	Desarrollo de un Polinomio en Factores Lineales	313
	Cálculo de las Raíces de un Polinomio	315
	Regla de Ruffini	317
	Referencias Bibliográficas del Apéndice C	320
<i>Apéndice D</i>	<i>Funciones Racionales</i>	
	Fraciones Racionales	321
	Descomposición de una Fracción Propia en sus Fracciones Simples	322
	Referencias Bibliográficas del Apéndice D	327
<i>Apéndice E</i>	<i>Fragmentos</i>	
	Leonhard Euler	327
	Gustav Heinrich Adolf Doetsch	330
	Aleksandr Mikhailovich Liapunov	332





Conceptos Preliminares

Antes de comenzar cualquier estudio de alguna rama de las matemáticas, es pertinente estar seguros con qué se está trabajando, es decir estar plenamente conscientes del significado de las matemáticas y sus repercusiones en la vida cotidiana del hombre; por tal motivo, se hará un breve estudio filosófico de esta importante ciencia.

Sección

1.1

“Quien carece del sentido del pasado está condenado a vivir en la estrecha oscuridad de su propia generación”.
Proverbio Armenio



ASPECTOS LÓGICO Y EPISTEMOLÓGICO¹ DE LAS MATEMÁTICAS

DEFINICIÓN DE MATEMÁTICAS

No es fácil definir de manera clara y concisa cuanto hoy se entiende por matemáticas. La tradicional definición de ella es a título de “*ciencia de la cantidad*” o su caracterización escolástica (del latín: *scholasticus = relativo a la escuela*²) a manera de una disciplina de segundo grado de abstracción. La etimología del término matemáticas proviene del griego *μαθηματική (mathématiké) ó μάθημα (mathema) = estudio de un tema ó ciencia*, a su vez del verbo *matheteúoo*, que significa aprender; lo que denuncia la importancia concedida de la enseñanza del cálculo en la antigüedad. **Jean Tricot** en su “*Tratado de Lógica Formal*”, ha propuesto una conocida definición de matemáticas. “*El objeto de la lógica es la cualidad; el de la matemática es la cantidad*.”. Por su parte el profesor **Gabriele Lolli**³ (1942-), hace una estupenda recopilación de algunas definiciones del concepto de Matemáticas. Entre ellas se encuentran:



G. Lolli

1. **Bernard Bolzano** (1781-1848): “*La matemática es la ciencia que trata de las leyes generales a las que las cosas se ajustan de acuerdo con sus esencias*”.
2. **Hermann Hankel** (1839-1873): “*La lógica y la matemática tratan las relaciones que son ó que pueden ser, independientes del particular contenido ó sustancia de los objetos*”

¹ Proveniente del griego: *ἐπιστήμη (epistm(é)) = conocimiento* y de *λόγος (lógos) = discurso*

² Escuelas a las que asistían algunas personas en la época medieval.

³ Profesor de Lógica Matemática de la Universidad de Torino, Italia.

3. **Benjamín Pierce** (1809-1880): *“La matemática es la ciencia que establece conclusiones necesarias”*
4. **Charles Sanders Pierce** (1839-1914): *“Es el estudio de construcciones ideales”*
5. **James Joseph Sylvester** (1814-1897): *“La matemática pura tiene como objeto el establecimiento de las leyes de la inteligencia humana”*
6. **Grande Enciclopedia della Scienza e della Tecnologia. De Agostini** (1997): *“Es una disciplina que utiliza un elaborado lenguaje simbólico fundado en los conceptos de número y de figura geométrica, un método de investigación basado en el modelo hipotético-deductivo y la posibilidad de alcanzar un elevado grado de abstracción”*



B. Bolzano



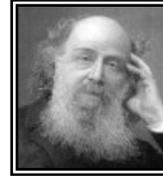
H. Hankel



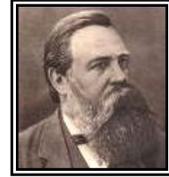
B. Peirce



Ch.S. Peirce



J.J. Sylvester



F. Engels

Existe un gran cúmulo de definiciones, diversas todas ellas, pero hay una que se destaca por su generalidad y simplicidad: **Friedrich Engels**, (1820-1895) filósofo alemán, define a la matemática como: *la ciencia que estudia las relaciones cuantitativas y las formas espaciales del mundo real.*

Entendiendo por ciencia (*del latín: scientia = conocimiento*) según el filósofo mexicano **Francisco Larroyo** (1912-1981), como: *el conjunto de conocimientos sistematizados de manera demostrativa*, como consecuencia de ello, el sistema que constituye las matemáticas es ordenado y secuencialmente lógico. El carácter creativo, constructor de las matemáticas es reconocido en la definición de los intuicionistas. **Gaston Bachelard** (1884-1962), lo expresa ingeniosamente. *“Es curioso, dice, que las herramientas matemáticas se forjen casi siempre antes de poder prever su empleo”*. Reconocen tal carácter aunque con modalidades distintas, **Félix Klein** (1849-1925), **Henri Poincaré** (1854-1912), **Emile Borel** (1871-1956), **Henri León Lebesgue** (1875-1941), **René Louis Baire** (1874-1932), **Federigo Enriques** (1871-1946), **Hermann Klaus Weyl**, (1885-1955), etc.



G. Bachelard



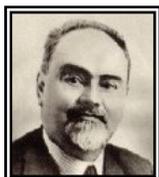
F. Larroyo



F. Klein



H. Poincaré



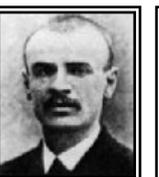
F. Enriques



E. Borel



H. Weyl



R. Baire



H. Lebesgue

Todos aceptan, conforme al principio intuicionista, que:

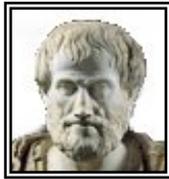
“la matemática es una creación del espíritu humano, negando toda existencia trascendente a los entes matemáticos.”

Para ellos:

“El hombre no es un descubridor, sino un creador de la matemática”

LA MATEMÁTICA, CIENCIA FORMAL (EIDÉTICA)

En la historia de la filosofía se han formulado muchos sistemas de clasificación de las ciencias (**Aristóteles** (384-322 a.C.), **Santo Tomás de Aquino** (1225-1274), **Francis Bacon** (1561-1628), **André Marie Ampère** (1775-1836), **August Comte** (1798-1857), **Herbert Spencer** (1820-1903),...). En la actualidad suelen agruparse las ciencias atendiendo a dos clases de objetos que éstas estudian: *objetos reales* y *objetos ideales*. Los primeros son aquellos que existen en el tiempo y el espacio (*como los cuerpos*), o simplemente en el tiempo (*como los hechos psíquicos*). Lo real en suma, puede ser psíquico, corporal a ambos a la vez, esto es psíco-físico, como en el caso de los animales superiores. De ahí que las ciencias que estudian estos objetos reciban el nombre de *ciencias reales* o *fácticas*. (*del latín: factum = hecho*). Ejemplo de tales ciencias son la física, la química, la psicología, etc.



Aristóteles



St T. Aquino



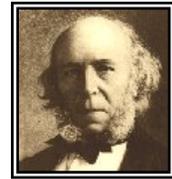
A. Ampère



A. Comte



F. Bacon



H. Spencer

Los objetos ideales (*del latín: ideālis = idea*) como lo son *las relaciones cuantitativas* y *las formas espaciales*, son portadores de una consistencia tal, que nadie puede dudar que existan, ya que son susceptibles de ser pensados por todo sujeto. No poseen ese carácter espacio-temporal o simplemente temporal que tienen los objetos reales, pero si poseen un carácter temporal en el sentido de su representación y registro, por ejemplo, la figura geométrica llamada hipérbola, existe idealmente, a pesar de que se la piense o no, y poco importa que se la presente aquí hoy o mañana, ya sea correcta o incorrectamente. El objeto geométrico existe junto con sus propiedades inherentes. Por otro lado, la existencia de un objeto ideal depende del registro que se ha establecido de él en la historia, así, aunque es producto del pensamiento humano exclusivamente, su existencia no depende de los fenómenos psíquicos, reales, gracias a los cuales son captados.

La expresión *existencia ideal* en sentido lógico no quiere indicar una existencia más alta o más perfecta que la real. Por ello, para evitar confusiones, suele designárseles *objetos eidéticos* (*del griego: εἰδητικός (eidetikós) = relativo al conocimiento ó de εἶδος (eidos) = forma*) las ciencias ideales como las matemáticas o *ciencias eidéticas*, estudian estos objetos.

LAS DISCIPLINAS MATEMÁTICAS

La matemática consta de variadas disciplinas. Estas han aparecido y desarrollando a lo largo de su historia. Como toda auténtica ciencia, la matemática ofrece así, un sistema abierto y revisible. Acorde con la *Mathematics Subject Classification*, desarrollada por la *American Society* y la *Zentralblatt für Mathematik*, existe una clasificación de las ramas que constituyen

las estructuras de las matemáticas. En primera instancia se presentan las principales agrupaciones como sigue:

1. Fundamentos de la matemática
2. Álgebra y teoría de números
3. Geometría y Topología
4. Análisis matemático, que incluye:
 - a. Cálculo y análisis real
 - b. Variable compleja
 - c. *Ecuaciones diferenciales y tópicos relacionados*
 - d. Análisis funcional y tópicos relacionados
 - e. Análisis numérico y optimización

A continuación se muestra una lista de las principales sub-ramas relacionadas a las ramas principales antes descritas:

- Matemáticas elementales
- Historia y biografías
- Lógica matemática y fundamentos de la matemática
- Combinatoria y teoría de grafos
- Estructuras algebraicas ordenadas
- Sistemas generales algebraicos
- Teoría de números
- Teoría de campos y polinomios
- Anillos conmutativos y álgebras
- Geometría algebraica
- Álgebra lineal y multilineal; teoría de matrices
- Anillos asociativos y álgebras
- Anillos no asociativos y álgebras
- Teoría de las categorías; álgebra homológica
- K-teorías
- Teoría de grupos y generalizaciones
- Grupos topológicos; grupos de Lie
- Funciones reales y cálculo elemental
- Teoría de la medida e integración
- Teoría del potencial
- Funciones de variable compleja
- Funciones de varias variables complejas y espacios analíticos
- Funciones especiales, incluyendo las funciones trigonométricas
- *Ecuaciones diferenciales ordinarias*
- Ecuaciones diferenciales parciales
- Sistemas dinámicos y teoría ergódica
- Ecuaciones en diferencias y funcionales
- Sucesiones y series; sumabilidad
- Aproximaciones y expansiones

- Análisis de Fourier
- Análisis armónico abstracto
- *Transformaciones integrales y cálculo operacional*
- Ecuaciones integrales
- Análisis funcional
- Teoría de los operadores
- Cálculo variacional y control óptimo; optimización
- Geometría; incluye la geometría euclidiana
- Geometría convexa y discreta
- Geometría diferencial
- Topología general
- Topología algebraica
- Espacios y celdas complejas
- Análisis global y análisis sobre espacios
- Teoría de probabilidades y procesos estocásticos
- Estadística
- Análisis numérico
- Ciencia de las computadoras
- Mecánica de partículas y sistemas
- Mecánica de los sólidos deformables
- Mecánica de fluidos
- Óptica y teoría electromagnética
- Termodinámica clásica y transferencia de calor
- Teoría cuántica
- Mecánica estadística; estructura de la materia
- Relatividad y teoría gravitacional
- Astronomía y astrofísica
- Geofísica
- Investigación de operaciones y programación matemática
- Teoría de juegos, economía y ciencias sociales y de la conducta
- Biología y otras ciencias naturales
- Teoría de sistemas; control
- Información y comunicaciones; circuitos
- Matemáticas educativas

HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS

Todas las ramas de las matemáticas por muy distintas que parezcan, están unidas por su objeto. Este objeto, lo conforman las relaciones cuantitativas y las formas espaciales del mundo real. Las diferentes ramas de la matemática tienen que ver con estas relaciones y formas o se distinguen por la singularidad de sus métodos. La composición de las matemáticas como toda ciencia, es la siguiente:

1. **HECHOS**, acumulados en el transcurso de su desarrollo

2. **HIPÓTESIS**, esto es, suposiciones científicas basadas en los hechos, que se someten posteriormente a una verificación experimental
3. **TEORÍAS Y LEYES MATEMÁTICAS**, cómo la generalización de los resultados del material real estudiado
4. **LA METODOLOGÍA DE LAS MATEMÁTICAS**, esto es, la interpretación teórica general de la leyes y teorías matemáticas, las que caracterizan el enfoque general en el estudio del objeto de las matemáticas.

Todos estos elementos están interrelacionados y se encuentran en constante desarrollo. La aclaración de cómo ocurre y a dónde conduce este desarrollo en un periodo histórico estudiado, constituye el objeto de la historia de las matemáticas. En otras palabras: “*La historia de las matemáticas es la ciencia acerca de las leyes objetivas del desarrollo de las matemáticas*”.

El desarrollo de las ramas de las matemáticas, ha evolucionado a través del tiempo como una actividad exclusiva del pensamiento humano, y como tal, éste ha sido influenciado por la propia actividad del hombre, esto es, el comercio, la agricultura, la agrimensura, la pesca, la caza, las guerras, etc. y por otras disciplinas como la astronomía, la mecánica, la biología, entre otras. La utilidad práctica ha sido un factor decisivo en este sentido. Existen varias maneras de visualizar en el tiempo este desarrollo. A este proceso se le llama periodización del desarrollo de la matemática y éste puede realizarse por países, por formaciones socio-económicas ó culturas, por descubrimientos relevantes o simplemente por intervalos estrictamente acotados que han caracterizado el desarrollo social y económico del hombre. (por ejemplo, los teoremas de **K. Gödel** de 1931 representa un parte aguas en la historia de las matemáticas). Atendiendo a intervalos acotados de tiempo, se puede dividir el desarrollo de las matemáticas en 11 periodos:

1. **Era Paleolítica (Edad de Piedra)** (2,500,000 A.C. hasta 10,000 A.C.):
2. **Era Neolítica (Nueva Edad de Piedra)** (10,000 A.C. hasta 2,000 A.C.):
3. **Periodo Pre-Helénico** (2,000 A.C. hasta 600 A.C.):
4. **Periodo Helénico** (600 A.C. hasta 300 A.C.):
5. **Periodo Helenístico** (300 A.C. hasta s.II):
6. **Periodo Grecorromano** (s.II hasta s.V)
7. **Época Medieval** (s.V hasta s.XIV)
8. **El Renacimiento y la Reforma** (s. XV y s XVI)
9. **Siglos XVII y XVIII**
10. **Siglo XIX**
11. **Siglo XX y XXI**

En resumen, los ejes rectores de la matemática son los conceptos de **cantidad** y **forma**; ellos están presentes en todo el conocimiento matemático. Perteneciente a diversas categorías, éstos conforman la gran estructura de esta importante ciencia. Independientemente si los entes matemáticos son creados o descubiertos, debe quedar claro los siguiente:

“La validez de los fundamentos de la matemática, no depende del indudable nexo que en algunos casos tiene ésta, con la naturaleza física”

A diferencia de las ciencias fácticas como la física ó la química, la matemática tiene sus propios métodos para demostrar la validez de sus fundamentos.



Investigación

Consulte el sitio *MacTutor History of Mathematics* (véase las referencias al final del capítulo) e introdúzcase en el apartado “*Chronology index*” y elabore una lista mostrando por lo menos 10 eventos (los que considere más importantes y que estén relacionados con las ecuaciones diferenciales) para cada uno de los periodos mostrados en el párrafo anterior.

Sección

1.2

“Los científicos estudian la naturaleza no porque sea útil, sino porque encuentran placer en ello y encuentran placer porque es hermosa”
Poincaré Henri

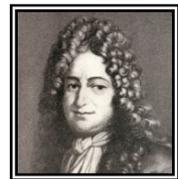


INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Las palabras ecuaciones (*que proviene del latín: **aequātiō = igualando***) y diferenciales (*del latín: **differentia = diferencia***) conlleva a pensar en la solución de ecuaciones en donde figuren diferenciales de alguna función; esto se concibe sobre la base de los conocimientos anteriores que se tienen sobre álgebra y cálculo diferencial. Así como en el álgebra, se invirtió tiempo en resolver ecuaciones como $x^2 - x - 6 = 0$, en este curso se van a poder resolver ecuaciones como: $y'' - 2y' + 1 = 0$; pero para ello son necesarios los presupuestos teóricos pertinentes que se desarrollaran a lo largo del curso. Como ya se pudo observar, las ecuaciones diferenciales son una rama del *análisis matemático* y se interrelaciona con otras ramas como el *cálculo diferencial*, el *cálculo integral* y con otras categorías como la *geometría analítica*, el *álgebra elemental*, la *geometría euclidiana*, la *trigonometría*, así como con otras ciencias como la física, química, sociología, biología, etc. Para un óptimo desarrollo del estudio de las ecuaciones diferenciales es necesario que el estudiante domine perfectamente el concepto de función y las *técnicas de integración* para éstas, vistas en los primeros cursos de matemáticas en el nivel licenciatura.

RESEÑA HISTÓRICA

La teoría de las ecuaciones diferenciales se origina en los principios del cálculo, con **Isaac Newton** (1642-1727) y **Gottfried Wilhelm Leibnitz** (1646-1716) en el siglo XVII. Es más, **Edward Lindsay Ince** (1891-1941) establece:

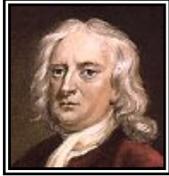


G.W. Leibnitz

“*Todos nuestros vagos conocimientos sobre el nacimiento y desarrollo de la ciencia de las ecuaciones diferenciales se resumen en una fecha importante, el 11 de noviembre de 1675, cuando por primera vez **Leibnitz** asentó en un papel la ecuación*

$$\int y dy = \frac{1}{2} y^2$$

no resolviendo con esto una simple ecuación diferencial, lo que era en sí trivial o secundario, sino que constituyó un acto de gran trascendencia, pues creó un símbolo muy útil: el signo de integración.”



I. Newton

Aún cuando **Newton**, realizó relativamente poco trabajo en la teoría de las ecuaciones diferenciales, su desarrollo del cálculo y la aclaración de los principios básicos de la mecánica proporcionaron una base para el desarrollo de sus aplicaciones, en el siglo XVIII. **Newton** clasificó las ecuaciones de primer orden de acuerdo con las formas:

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \quad \frac{dy}{dx} = f(y), \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y) .$$

Para la última, desarrollo un método de solución, usando series infinitas, cuando $f(x,y)$ es un polinomio en x e y . Era muy sensible a la crítica y, como consecuencia, tardó bastante en publicar muchos de sus descubrimientos.

Leibnitz llegó a resultados fundamentales del cálculo independientemente, aunque un poco más tarde, que Newton. Nuestra notación moderna para la derivada $\frac{dy}{dx}$ y el signo de integral $\int f(x)dx$ se deben a **Leibnitz**. Descubrió en forma independiente de los hermanos Bernoulli, *el método de separación de variables*, así como procedimientos para resolver las ecuaciones diferenciales homogéneas de primer orden. Sostuvo una prolífica correspondencia con otros matemáticos, especialmente con los hermanos **Bernoulli**. En el curso de esta correspondencia se resolvieron muchos problemas de ecuaciones diferenciales, durante las últimas décadas del siglo XVII.



Jakob Bernoulli



Johann Bernoulli

A **Newton** y **Leibnitz**, siguieron los hermanos **Bernoulli**, **Jakob** (1654-1705) y **Johann** (1667-1748) y, el hijo de **Johann**, **Daniel** (1700-1782). Justamente, éstos son tres de los ocho miembros de la familia **Bernoulli**, quienes, en su tiempo, fueron prominentes matemáticos y hombres de ciencia. Con ayuda del cálculo, formularon y resolvieron las ecuaciones diferenciales de muchos problemas de la mecánica. Un problema (1696-1697) al cual contribuyeron ambos hermanos, y el cual provocó problemas entre ellos, fue el de la *braquistócona*, la determinación de la curva de descenso rápido. Este problema conduce a la ecuación diferencial no lineal de primer orden

$$y[1 + (y')^2] = c$$

donde c es una constante. Newton también resolvió el problema antes, en 1697. Se dice, tal vez no sea cierto, que **Newton** supo del problema (*como un reto*) al final de la tarde de un fatigoso día en la *Casa de Moneda*, y lo resolvió en la noche, después de la cena. Publicó la solución en forma anónima, pero **Johann Bernoulli**, al verla, exclamó *“¡Ah!, conozco el león por su zarpa”*. Lo es **Daniel**, cuyo nombre está asociado con la famosa ecuación de **Bernoulli** de la mecánica



D. Bernoulli

de los fluidos. En 1690 **Jakob Bernoulli** publicó la solución de la ecuación diferencial, que en forma diferencial se escribe: $(b^2 y^2 - a^3)^{\frac{1}{2}} dy = a^{\frac{3}{2}} dx$. Actualmente esta ecuación se toma como

simple ejercicio, pero en aquel tiempo, pasar de la ecuación $y' = \left[\frac{a^3}{b^2 y^2 - a^3} \right]^{\frac{1}{2}}$ a la forma

diferencial y, entonces, afirmar que las integrales en ambos lados de la ecuación debían ser iguales, excepto por una constante, constituyó ciertamente un avance trascendental. Así por

ejemplo, mientras que **Johann Bernoulli** sabía que $ax^p dx = d \left[\frac{ax^{p+1}}{p+1} \right]$ no era valido para $p = -1$,

ya que no sabía que $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$. Sin embargo, pudo demostrar que la ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{ax}$, que

podemos resolver escribiéndola como $a \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$, tiene la solución $\frac{y^a}{x} = c$ donde c es una

constante de integración. En la última década del siglo XVII, los hermanos Jacob y Johann introducen términos como el de *integrar* una ecuación diferencial, así como el proceso de *separación de variables* (*separatio indeterminatarum*) de una ecuación diferencial.

A finales del siglo XVII, muchos de los métodos elementales de solución para ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden se conocían y, la atención se dirigió hacia las ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior y hacia las ecuaciones diferenciales parciales. **Jacobo Riccati** (1676-1754) matemático italiano, consideró ecuaciones de la forma $f(y, y', y'') = 0$. También consideró una importante ecuación no lineal, conocida como ecuación de **Riccati**,



J. Riccati

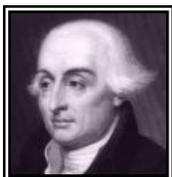
$\frac{dy}{dx} = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2$, aunque no en forma tan general.



L. Euler

Leonhard Euler, (1707-1783) matemático suizo y teniente de la Armada Rusa, uno de los más grandes matemáticos de todos los tiempos, vivió en el siglo XVIII. Fue un gran matemático; sus trabajos reunidos llenan mas de setenta volúmenes. Aunque quedó ciego, durante los últimos años de su vida su trabajo no disminuyó. De particular interés es su trabajo sobre el planteamiento de problemas de la mecánica y su desarrollo de métodos de solución para estos problemas matemáticos. Refiriéndose al trabajo de **Euler** en la mecánica, **Lagrange** dijo que era “*el primer trabajo en el que se aplica el análisis a la ciencia del movimiento*”. **Euler** también consideró la posibilidad de reducir *ecuaciones diferenciales de segundo orden a ecuaciones diferenciales de primer orden*, mediante un cambio adecuado de variables; creó el concepto de *factor integrante*; en 1739 dio un tratamiento general de las *ecuaciones diferenciales lineales ordinarias con coeficientes constantes*, contribuyó al *método de las soluciones en series de potencias* y dio un procedimiento numérico para resolver ecuaciones diferenciales. También hizo contribuciones importantes a la teoría de *las series de Fourier* y creó la primera discusión sistemática del cálculo de variaciones. A **Euler** se le debe la primera sistematización de los trabajos de sus predecesores, la que se le puede considerar *la primera teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias*; esto aparece en su obra “*De Integratione Aequationum Differentialium*” de 1755 que contiene lo que se podría encontrar actualmente en un libro de

texto actual, como el estudio de las *ecuaciones diferenciales de primer orden* y su respectiva clasificación en *separables*, *homogéneas*, *exactas*, *lineales*, etc., así como las *ecuaciones de segundo orden* y las susceptibles de reducción del orden.



J. J. Lagrange

Posteriormente, durante el siglo XVIII, el matemático italiano, astrónomo y profesor de artillería⁴ **Giuseppe Lodovico Lagrangia** o mejor conocido como **Joseph Louis Lagrange** (1736-1813) y el astrónomo, matemático, profesor de la Escuela Militar de París y marqués⁵ **Pierre Simón Laplace** (1749-1827) hicieron importantes aportaciones a la teoría de las ecuaciones diferenciales y, además, dieron por primera vez un tratamiento a las *ecuaciones diferenciales parciales*.

Posiblemente sea la ecuación de **Laplace**, la ecuación diferencial parcial más conocida en la física-matemática, la ecuación del potencial $u_{xx} + u_{yy} = 0$, donde los subíndices indican derivadas parciales. **Lagrange** demostró que la *solución general* de una *ecuación diferencial homogénea de orden n con coeficientes constantes* es de la forma: $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n$ donde y_1, y_2, \dots, y_n son un conjunto de *soluciones linealmente independiente* y c_1, c_2, \dots, c_n son constantes arbitrarias (lo que se conoce actualmente como *principio de superposición*). También descubrió en su forma general el *método de variación de parámetros*. El trabajo monumental de **Lagrange**, "*Mecanique Analytique*", contiene las ecuaciones generales del movimiento de un sistema dinámico, conocidas actualmente como *ecuaciones de Lagrange*. El trabajo de cinco volúmenes de **Laplace**, "*Traité de Mecanique Céleste*", le ganó el título de "*Newton de Francia*". Los últimos volúmenes se publicaron en el período de 1789-1825 e incluyeron toda la mecánica de esa época; también publicó "*Theorie Analytique des Probabilités*" en donde tuvo su origen su famosa *transformada de Laplace*. Las posturas de **Lagrange** y **Laplace** comprendieron dos filosofías de las matemáticas. Para **Laplace** la naturaleza era esencial y las matemáticas eran su herramienta en el aprendizaje de sus secretos. Para **Lagrange** las matemáticas eran un arte que justificaba su propio ser. Sin embargo, ambos hombres realizaron avances de gran alcance, tanto en la teoría como en las aplicaciones de las matemáticas.



P.S. Laplace



J. L. D'Alembert

Por su parte **Jean Le Rond D'Alembert** (1717-1783) en 1766 encontró que la solución de una *ecuación lineal no homogénea*, es igual a la suma de una cierta *solución particular* y la *solución general* de la correspondiente ecuación homogénea. A este importante matemático se le considera como uno de los pioneros en el estudio de las ecuaciones diferenciales y fue uno de los primeros en usarlas en física, particularmente en mecánica de fluidos. También **D'Alembert** estudió la ecuación de ondas unidimensional y en 1747 publica su solución independientemente de **Euler** quien también la publica en 1748.

El estudiante que se interese en la historia de las matemáticas (y de las *ecuaciones diferenciales*) puede consultar uno de los libros que tratan del desarrollo de las matemáticas y que se muestran al final de este capítulo.

⁴ A los 19 años fue nombrado en 1755, profesor de la *Real Escuela de Artillería de Turín*.

⁵ Oriundo de Francia, en 1806 fue nombrado Conde por Napoleón Bonaparte y en 1817 Marqués por Luis XVIII

En los últimos años, algunos matemáticos dedicados al estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales han tratado de elaborar una teoría sistemática (pero general) rigurosa. La finalidad no es tanto crear métodos de solución para ecuaciones diferenciales particulares, sino desarrollar técnicas apropiadas para el tratamiento de diferentes clases de ecuaciones. En los capítulos posteriores se mostrarán otros descubrimientos que algunos matemáticos eminentes han hecho a través de la historia del desarrollo de las ecuaciones diferenciales.

Se concluye este corto esquema histórico con una observación que posiblemente le proporcione cierto placer al estudiante que ha observado, con desaliento, la frecuencia con la que aparecen en los textos de matemáticas frases como “*Es obvio que.....*”, o bien, “*Fácilmente puede demostrarse que*”.

Nathaniel Bowditch (1773-1838), matemático y astrónomo americano, al traducir la *Mecanique Celeste* de Laplace, a principios del siglo XIX, afirmó:

“No puedo encontrar una afirmación de Laplace ‘Así, es evidente’, sin tener la seguridad de que deberé emplear horas de trabajo intenso, para cubrir el abismo y averiguar y demostrar lo evidente que es”



N. Bowditch

“Hay inherentemente en la naturaleza una armonía escondida que se refleja en nuestras mentes bajo la imagen de simples leyes matemáticas”
Weyl, Herrmann

Sección

1.3

MODELOS MATEMÁTICOS

EL NACIMIENTO DE LA CIENCIA

En la necesidad de poder comprender los fenómenos que ocurren en la naturaleza y del fenómeno humano, el hombre, a través de su historia, ha realizado estudios profundos de tales eventos; trata de explicarse el porqué de las cosas, cuales son las leyes que rigen estos cambios a veces impredecibles o a veces en el mejor de los casos predecibles. Desde la antigüedad se pensaba que la única razón por la que ocurrían las cosas era por los Dioses, hasta que nació la idea de que las cosas que ocurrían en la naturaleza no se debían a los caprichos de los Dioses, sino que había una razón más humana y mucho menos dogmática, que explicara con mayor claridad y aceptación dichos fenómenos.

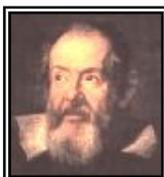
Este período importante en la historia del hombre comienza en la Grecia antigua, donde floreció la ciencia; Es la génesis de una época en donde germinarán sus principios básicos, como un conjunto de conocimientos sistematizados, ordenados y con carácter demostrativo.

En los siglos posteriores con **Nicolas Copérnico** (1473-1543), **Galileo Galilei** (1564-1642) y otros más, renace la ciencia, empero una vez más la avaricia del poder y la estupidez vuelve a enterrar estas ideas de conocer al mundo, mediante la ciencia. Pero el mérito de algunos

no queda olvidado a pesar de haber dado incluso la vida para que el logro de la ciencia fuera una



N. Copérnico



G. Galilei



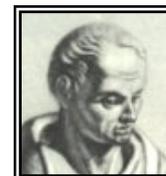
J. Kepler

realidad, gente como **Johanes Kepler** (1571-1630) en el siglo XVII que a pesar de haber sido perseguido por una turba religiosa, se apoya en la ciencia griega y logra hacer importantes contribuciones a la ciencia fundando una de las ramas de ésta como lo es la Astrofísica. “*Es innegable la repercusión y los alcances que este gran científico logra en el presente*”

LA NATURALEZA FÍSICA COMO GENERADORA DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

A pesar de que la matemática no es una ciencia fáctica, la observación de los fenómenos que ocurren en la naturaleza ha contribuido en su desarrollo. Los conocimientos matemáticos, fueron creados o descubiertos por el hombre bajo la influencia de la más rudimentaria e imperfecta actividad productiva. Conforme fue creciendo en complejidad esta actividad, fueron incrementándose también los factores que influyeron en el desarrollo de las matemáticas. Desde los tiempos del surgimiento de las matemáticas como ciencia particular incluyendo su propio objeto, la mayor influencia en la formación de nuevos conceptos y métodos matemáticos, la ejercieron las ciencias fácticas de carácter *determinístico* y algunas de carácter *estocástico*. Entendiéndose por ciencias determinísticas al complejo de ciencias sobre la naturaleza, tales como la astronomía, la *física*, y la *mecánica* y estocásticas aquellas que se caracterizan por su aleatoriedad como la *biología*, la *sociología*, la *sociometría*, entre otras.

La naturaleza directa de los problemas de las ciencias determinísticas en el desarrollo de las matemáticas puede ser observada a lo largo de toda su historia. Así por ejemplo el análisis que hace el jesuita italiano **Bonaventura Francesco Cavalieri** (1598-1647) de los *objetos reales* lo conlleva en 1635 a la *teoría de los indivisibles*, la cual le sirvió de base a muchos matemáticos para la creación del *análisis infinitesimal moderno*. De la observación de las *formas proyectadas en un plano de objetos tridimensionales*, nace en 1639 la *geometría proyectiva* en las



B. Cavalieri



G. Desargues

obras del francés **Girard Desargues** (1591-1661). El *cálculo diferencial e integral*, en su forma más primitiva del cálculo de flujos surgió como método de estudio formal de la *teoría de las ecuaciones diferenciales* comienza con los trabajos de *mecánica* de **Euler** de 1736. Las *ecuaciones diferenciales parciales* se comenzaron a estudiar con los trabajos de 1747 sobre *el viento y de las cuerdas vibrantes* de **D’Alembert**. En 1770 nace la *teoría de grupos* con los trabajos de *mecánica* de **Lagrange**. El *análisis de Fourier* nace en 1807 precisamente con los trabajos del oficial de la armada Napoleónica **Jean Baptiste Joseph Fourier** (1768-1830) sobre *transferencia de calor*. De la *dinámica* de **Hamilton** de 1834, surge el *análisis vectorial*. El *método de los mínimos cuadrados* (1809) y la *geometría diferencial* (1828) surgen de los trabajos *geodésicos* elaborados por el célebre matemático alemán **Johann Carl Friedrich Gauss** (1777-1855). La *teoría de los polinomios con desviación mínima del cero* fue elaborada en 1852 por el matemático y mecánico ruso **Pafnuty Lvovich Chebyshev** (1821-1894) en relación con las investigaciones en torno a las máquinas de vapor.

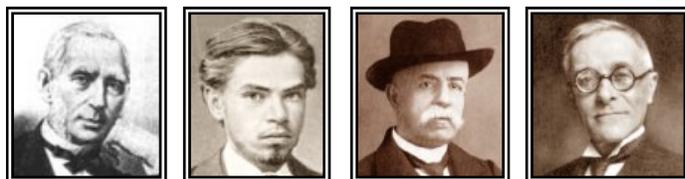


J.B.J. Fourier



C.F. Gauss

Con los trabajos en el *equilibrio de líquidos en rotación* en 1881 del matemático ruso **Aleksandr Mikhailovich Liapunov** (1857-1918), discípulo de **Chebyshev**, nace la importante *teoría de la estabilidad*⁶. Del fenómeno de la *relatividad* surge el *cálculo tensorial* con las contribuciones en 1884 de **Gregorio Ricci-Curbastro** (1853-1925) y de **Tullio Levi-Civita** (1873-1941) en 1887. El estudio de la *topología* nace en 1894 de los trabajos en *mecánica celeste* de **Poincaré**. Actualmente, por exigencia de las nuevas ramas de las ciencias en general, se ha



P. Chebyshev A.M. Liapunov G. Ricci-Curbastro T. Levi-Civita

generado un impetuoso desarrollo de muchas ramas de las matemáticas, tales como: la teoría combinatoria, la teoría del caos, las álgebras no conmutativas, los métodos aproximados de ecuaciones diferenciales e integrales, la teoría de los grupos finitos, etc. Ejemplos de este

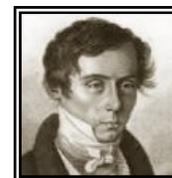
género se podrían prolongar ilimitadamente en relación con cualquier rama del saber técnico y científico. Todos ellos muestran que las matemáticas surgen de la actividad productiva de los hombres y que los nuevos conceptos y métodos, en lo fundamental se formulaban bajo la influencia de las ciencias fácticas.

MODELACIÓN MATEMÁTICA

En las fenomenologías de la naturaleza y la humana, las magnitudes que caracterizan tal o cual fenómeno, pueden vincularse mediante aparatos matemáticos originados por supuestos y restricciones tomados según la generalidad con la que se aborde el fenómeno en cuestión; tales aparatos son conocidos en el ambiente matemático como *modelos matemáticos* y al proceso que los genera *modelación matemática*. Semejantes modelos son representados según sea el caso, por ecuaciones o sistemas de ecuaciones en las que se involucran las magnitudes variables más significativas de dicho fenómeno, así como sus derivadas, diferenciales ó integrales. Para mayor comodidad matemática (*es decir el camino más corto y más sencillo*) se busca descartar el mayor número posible de magnitudes variables que no afecten significativamente al fenómeno y que al final quede la función desconocida y las demás variables independientes. Tal función será en términos matemáticos, la solución del modelo matemático y determina el comportamiento del fenómeno.

APLICACIÓN DE LAS MATEMÁTICAS AL MUNDO REAL

A lo largo de la historia han existido numerosas aplicaciones de las matemáticas al mundo real. La matemática ha estado presente en los grandes logros que ha obtenido el hombre en su desarrollo evolutivo. Desde las imponentes construcciones Egipcias hasta las modernas naves espaciales, todas ellas, producto del ingenio humano, de alguna manera han estado ligadas a las matemáticas. En este párrafo, solo se mencionarán algunas de las más importantes aplicaciones de la matemática en beneficio del hombre. En *ciencias navales*, **Euler** en 1749, fundamenta matemáticamente a través del *análisis infinitesimal*, las bases para el diseño y construcción de barcos. En *óptica*, el físico y matemático francés **Agustin Jean Fresnel** (1788-1827), obtuvo fórmulas para explicar la reflexión, refracción, doble refracción y polarización de



A.J. Fresnel

⁶ que posteriormente aplicó al estudio de los sistemas de ecuaciones diferenciales en 1899.

la luz reflejada desde una sustancia transparente. En 1818 aplica la *geometría* y la *trigonometría* para el diseño de los ahora llamados *lentes Fresnel* usados comúnmente en los faros de puertos y aeropuertos, además de encontrarse en los lentes de los retro-proyectores usados en las típicas aulas académicas. En *oftalmología*, **Henry Coddington** (1799 -1845), reputado matemático,



Ch. F. Sturm

tutor del Trinity College de Cambridge, inventor del microscopio manual, establece en 1829 *las primeras ecuaciones matemáticas* aplicadas al astigmatismo; posteriormente, la resolución del problema matemático del astigmatismo correspondió al suizo Jaques **Charles François Sturm** (1803-1855), profesor de matemáticas de la Escuela Politécnica de París, que en 1845 establece determinados aspectos teóricos de la refracción a través de superficies asimétricas pero, sobre todo, describe una figura geométrica, el *conoide*, que lleva su nombre. En *química*, el cristalógrafo y mineralogista ruso **Evgraf Stepanovic Fedorov** (1853-1919), se dedicó al estudio de la cristalografía geométrica y de la teoría estructural de los cristales. En 1889 dedujo los 230 *grupos de simetría espacial*, a partir de los cuales introdujo una nueva clasificación de los cristales; esto lo logra apoyándose en la *teoría de grupos*.



E.S. Fedorov

Ya e el siglo XX, en *aerodinámica*, el mecánico ruso **Nikolai Egorovich Zhukovsky**⁷ (1847-1921) establece en 1906, a través de la *variable compleja*, una expresión matemática para el perfil del ala de un aeroplano. En *aviación*, el ruso **Sergei Alekseevich Chaplygin** (1869-1942) desarrolló métodos de aproximación para resolver *ecuaciones diferenciales* y aplicó esto en 1910 en el estudio de las alas de aviones. En *electrodinámica*, el físico teórico suizo **Walter Ritz** (1878-1909) inventa en 1908 un método⁸ para calcular los *eigenvectores* y *eigenvalores* en un *sistema Hamiltoniano* de partículas. Dicho sea de paso, en la propia *matemática*, el ruso **Sergei Natanovich Bernstein** (1880-1968) introduce en 1911, unos peculiares *polinomios de aproximación*⁹ que posteriormente se aplicarán en la graficación por computadora. En *mecánica estructural*, el mecánico bielorruso **Boris Grigorievich Galerkin** (1871-1945) introduce en 1915 el método del elemento finito que a mediados del siglo XX se moderniza a través de las computadoras. En 1922 los matemáticos húngaros **Lipót Fejér** (1880-1959) y **Frigyes Riesz** (1880-1956) publican un importante trabajo sobre el *mapeo conforme*, que formaliza las investigaciones hechas por **Zhukovski** y **Chaplygin** años atrás y que actualmente se aplican con mayor fuerza en *aeronáutica e hidronáutica*.



S.A. Chaplygin



N. Zhukovsky



W. Ritz



S. Bernstein



B.G. Galerkin



L. Fejér



F. Riesz

En *biología*, en 1925, el matemático estadounidense, especializado en estadística, **Alfred James Lotka**¹⁰ (1880-1949) y en 1926 el matemático italiano **Vito Volterra** (1860-1940)

⁷ También conocido como **Nikolai Egorovich Joukowski**

⁸ Método que lleva su nombre y que en esencia es el mismo que **Galerkin** propone años más tarde en forma independiente

⁹ Ahora llamados *polinomios de Bernstein*.

¹⁰ Considerado como el fundador de la *demografía matemática*.

propusieron en forma independiente el modelo matemático a través de un *sistema no lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias*, que describe el comportamiento de los sistemas de competencia depredador-presa típicos en los ecosistemas biológicos. En *economía*, los estadounidenses **Paul Howard Douglas** (1892-1976) economista y **Charles Wiggins Cobb** (1875-1949) encontraron en 1928 una *fórmula empírica* de la forma $P = bL^\alpha K^\beta$ para determinar la producción en un sistema económico en función de la fuerza laboral y el capital de inversión. En *meteorología*, el británico **Lewis Fry Richardson** (1881-1953) establece en 1922 una predicción del clima mediante un *proceso numérico*. En su momento, el cálculo manual fue prohibitivo, pero en la actualidad es toda una realidad. En *diseño estructural*, el matemático polaco **Richard Courant** (1888-1972) utiliza en 1943, el *método de Ritz* para obtener soluciones de un sistema vibratorio creando de paso lo que se conoce actualmente como *análisis del elemento finito*. En *economía*, el matemático húngaro **John Von Neumann** (1903-1957) aplica en 1944, la *teoría de juegos* en el estudio del comportamiento de una determinada economía.



A.J. Lotka

V. Volterra

P.H. Douglas

L. Richardson

R. Courant

J. von Neumann

En *logística militar*, el matemático estadounidense **George Dantzig** (1914-2005) introduce en 1947 el *método simplex de optimización* y lo aplica en la planeación de actividades militares en la fuerza aérea de los estados unidos. En *informática y comunicaciones*, el matemático 1948 **Norbert Wiener** (1894-1964) aplica en 1948, la cibernética¹¹ en la teoría del control de la información, particularmente en las computadoras. En *meteorología*, el matemático y meteorólogo estadounidense **Edward Norton Lorenz** (1917-) descubre en 1961 un simple sistema matemático con comportamiento caótico. Esto lo llevó a desarrollar una nueva rama de la matemática: *la teoría del caos*, la cual aplicó en sistemas dinámicos que siguen este comportamiento. En *gráficas por computadora*, las *curvas Bézier*¹² fueron dadas a conocer en 1962 por el ingeniero francés **Pierre Étienne Bézier** (1910-1999), quien las usó ampliamente en el diseño de carrocerías de automóviles. Finalmente en *electrónica*, los matemáticos **John Wilder Tukey** (1915-2000) y **James William Cooley** (1926-) publican en 1965 un artículo introduciendo el algoritmo numérico de la famosa *transformada rápida de Fourier* ampliamente utilizada en el tratamiento de señales digitales.



G. Dantzig

N. Wiener

E.N. Lorenz

P.É. Bézier

J.W. Tukey

J. Cooley

¹¹ El término cibernética es dado por él en su obra “*Cybernetics: or, Control and Communication in the Animal and the Machina*”

¹² Aunque éstas, fueron desarrolladas antes en 1959, por el físico y matemático francés **Paul de Casteljaou** (1930-)

ALGUNOS TIPOS DE ECUACIONES EN LAS MATEMÁTICAS

En forma breve y sin pretender hacer un estudio extenso sobre las ecuaciones matemáticas y descartando aquellas de carácter *matricial*, *vectorial*, *tensorial* etc. Sólo se muestran aquellas ecuaciones de carácter escalar y se pueden clasificar en: *simples* y *de grado superior*.

ECUACIONES SIMPLES

En esta categoría aparecen según el caso la(s) variable(s), pero no se aclara la separación de las variables en independientes y dependiente; éstas se subdividen en: *ecuaciones individuales* y *sistemas de ecuaciones simultaneas*.

ECUACIONES INDIVIDUALES SIMPLES

Las ecuaciones individuales simples se caracterizan por contener una sola variable como incógnita y su naturaleza puede ser diversa como se muestra a continuación:

Algebraicas

Polinomiales

$$Ej.: \sum_{k=0}^n a_k x^k = 0$$

Trascendentes

Logarítmicas

$$Ej.: 2 \ln(x-4) - 7 = 0$$

Exponenciales

$$Ej.: e^{2x} + 3x = 0$$

Trigonométricas

$$Ej.: \operatorname{sen} x - \operatorname{cos} x = 0$$

SISTEMAS DE ECUACIONES SIMULTANEAS SIMPLES

Los sistemas de ecuaciones simultáneas simples se caracterizan por contener varias variables y pueden ser de diversos tipos:

Algebraicas

$$Ej.: \begin{aligned} 2x + 4y &= 0 \\ 5x - 6y &= -5 \end{aligned}$$

Trigonométricas

$$Ej.: \begin{aligned} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y &= \frac{3}{4} \\ \tan x \tan y &= 3 \end{aligned}$$

Exponenciales

$$Ej.: \begin{aligned} x^{y-2} &= 4 \\ x^{2y-3} &= 64 \end{aligned}$$

Logarítmicas

$$Ej.: \begin{aligned} \log x + \log y &= \log 2 \\ x^2 + y^2 &= 5 \end{aligned}$$

ECUACIONES DE GRADO SUPERIOR

En esta categoría las variables quedan perfectamente bien definidas como la variable dependiente (*función desconocida*) y la(s) variables independientes, bajo el signo del operador derivada o integral y en algunas ocasiones los diferenciales de estas variables. Se clasifican en: *ecuaciones individuales* y *sistemas de ecuaciones simultáneas*.

ECUACIONES INDIVIDUALES DE GRADO SUPERIOR

En esta categoría las ecuaciones pueden contener una o más variables, algunos tipos de ecuaciones son:

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Ej.: $xdy - ydx = 0$

Ej.: $\sum_{k=0}^n \frac{d^k y}{dx^k} f_k(x) = 0$

Ecuaciones Diferenciales Parciales

Ej.: $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$

Ecuaciones Integrales

Forma general: $Y(t) = F(t) + \int_a^b K(u,t)Y(u)du$

Ecuaciones Integrales de Tipo Convolutorio

Forma general: $Y(t) = F(t) + \int_0^t K(t-u)Y(u)du$

Ecuaciones Integro-Diferenciales

Ej.: $Y''(t) = Y(t) + \text{sen } t + \int_0^t \text{cos}(t-u)Y(u)du$

Ecuaciones en Diferencias

Ej.: $Y(t) - 4Y(t-1) + 3Y(t-2) = t$

Ecuaciones Diferenciales de Diferencias

Ej.: $Y'(t) = Y(t-1) + 2t$

Ecuaciones Integro-Diferenciales en Diferencias

Ej.: $Y'(t) = Y(t-2) + \int_0^t \text{sen}(t-u)Y(u)du$

SISTEMAS DE ECUACIONES SIMULTÁNEAS DE GRADO SUPERIOR

De entre los muchos tipos de sistemas simultáneos, son importantes para este curso, los sistemas de ecuaciones diferenciales, a modo de ejemplo se tienen:

Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales

Ej.: $\frac{dx}{dt} = \frac{\kappa}{V_A}(y-x)$

$\frac{dy}{dt} = \frac{\kappa}{V_B}(x-y)$

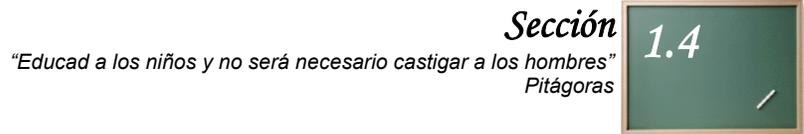
Sistemas de Ecuaciones Diferenciales No Lineales

Ej.: $\frac{dx}{dt} = 0.5x^2y - xy$

$\frac{dy}{dt} = -xy^2 + 0.3xy$

UBICACIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES EN EL CONTEXTO DE LAS ECUACIONES MATEMÁTICAS.

Según la clasificación que se hizo anteriormente, las ecuaciones diferenciales están en la categoría de las *ecuaciones de grado superior* tanto en su modalidad de *individuales* como de *sistemas simultáneos*. En la siguiente sección se estudiará la clasificación de éstas, así como el significado de sus soluciones.



DEFINICIONES Y TERMINOLOGÍA BÁSICAS

Como se ha visto en la reseña histórica y en los modelos matemáticos, las magnitudes variables pueden vincularse mediante ecuaciones de varios tipos, uno de éstos son las llamadas *ecuaciones diferenciales*.

Definición 1.- En general una *ecuación diferencial*, es aquella en la se involucran una variable dependiente y una o más variables independientes y sus diferenciales o sus derivadas hasta el orden n inclusive

Las ecuaciones diferenciales se clasifican en:

- *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.*
- *Ecuaciones Diferenciales Parciales.*

A continuación se darán las definiciones de los dos tipos de ecuaciones diferenciales, a saber:

Definición 2.- Se llama *ecuación diferencial ordinaria* aquella que vincula la variable independiente x , la función incógnita $y = y(x)$ y sus derivadas $y', y'', y''', \dots, y^{(n)}$ (hasta el orden n inclusive), es decir, una ecuación de la forma:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Definición 3.- Se llama *ecuación diferencial parcial*, aquella en la que aparece la función incógnita $y = y(x)$, dependiente de las variables independientes $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ y sus derivadas parciales hasta el orden n inclusive.

Por ejemplo, supóngase que u es la variable dependiente de las variables x e y , entonces la forma general de esta ecuación diferencial parcial sería:

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = 0$$

En lo sucesivo solamente se circunscribe a las *ecuaciones diferenciales ordinarias* hasta el orden n inclusive, ya que el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales se sale del contexto que la presente obra pretende.

CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Las ecuaciones diferenciales se clasifican de acuerdo a tres aspectos que las caracterizan, las cuales son: el *tipo*, el *orden* y su *linealidad*.

CLASIFICACIÓN SEGÚN EL TIPO

Si una ecuación sólo contiene derivadas ordinarias de una variable dependiente con respecto a una sola variable independiente, entonces se dice que es una *ecuación diferencial ordinaria*. Por ejemplo:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m) \quad (\text{Ley de enfriamiento de Newton})$$

Si una ecuación contiene las derivadas parciales de una o más variables dependientes respecto a una o más variables independientes, se llama *ecuación diferencial parcial* o *ecuaciones en derivadas parciales*. Por ejemplo:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad (\text{Vibraciones transversales de una viga})$$

CLASIFICACIÓN SEGÚN EL ORDEN

El *orden* de una ecuación diferencial (*ordinaria o en derivadas parciales*) es el de la derivada de mayor orden que aparece en dicha ecuación. Por ejemplo:

$$\overbrace{\frac{d^2 y}{dx^2}}^{\text{segundo orden}} - 3 \overbrace{\left(\frac{dy}{dx}\right)^4}^{\text{primer orden}} - 10y = 0$$

es una ecuación de segundo orden

CLASIFICACIÓN SEGÚN LA LINEALIDAD O NO-LINEALIDAD

Se dice que una ecuación diferencial es *lineal* cuando tiene la forma:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x)$$

o en forma condensada

$$\sum_{k=0}^n a_k(x) \frac{d^k y}{dx^k} = f(x) \quad \text{donde} \quad \frac{d^0 y}{dx^0} = y$$

en esta última ecuación, se ven las dos propiedades características de las ecuaciones diferenciales lineales:

- 1°. La variable dependiente y y todas sus derivadas son de primer grado; esto es, la potencia de todo término en donde aparece y es 1.
- 2°. Cada coeficiente sólo depende de x , que es la variable independiente.

Las funciones como $\tan(y)$ o las funciones de las derivadas de y como $e^{y'}$ no pueden aparecer en una ecuación lineal. Cuando una ecuación diferencial que no posee las características anteriores se dice que es **no-lineal**. Las ecuaciones

$$(2y - x)dx + 5xdy = 0, \quad y'' - 6y' + 3y = 0, \quad x^4 \frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{dy}{dx} - 5y = e^x$$

son lineales ordinarias de primero, segundo y cuarto orden, respectivamente. Por otro lado,

$$\overbrace{(1+y)}^{\text{El coeficiente depende de } y} y' - y = 3e^{2x}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - \overbrace{\cos y}^{\text{Función no lineal de } y} = \text{sen } x, \quad \frac{d^3 y}{dx^3} + \overbrace{y^4}^{\text{Potencia distinta de 1}} = 0$$

son ecuaciones diferenciales no-lineales de primero, segundo y tercer orden, respectivamente.

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA

Los objetivos principales en esta obra, es la de resolver ecuaciones diferenciales e interpretar geoméricamente los resultados, para ello es necesario analizar el comportamiento de dichas soluciones. Se definirá ahora el significado de la solución de una ecuación diferencial.

Definición 4.- Se llama ***solución de una ecuación diferencial ordinaria***, una función $y = \varphi(x)$ determinada en el intervalo (a, b) junto con sus derivadas sucesivas hasta el orden n inclusive, tal que al hacer la sustitución de esta función y sus derivadas en la ecuación diferencial, ésta se convierte en una identidad con respecto a x en el intervalo I .

En otras palabras, una solución de una ecuación diferencial de la forma:

$$F(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) = 0$$

es una función $y = \varphi(x)$ con al menos n derivadas y que cumple con la expresión:

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0 \quad \forall x \in I$$

Se dice entonces que $y = \varphi(x)$ ***satisface*** la ecuación diferencial. El intervalo I puede ser un ***intervalo abierto, cerrado, semicerrado*** o incluso todo \mathfrak{R} .

TIPOS DE SOLUCIONES

Al estudiar el curso relativo al *cálculo diferencial*, el estudiante se familiariza con los términos *funciones explícitas* e *implícitas*. En algunas simplificaciones que ocurren en el proceso de solucionar una ecuación diferencial, dichas soluciones pueden aparecer en estas dos formas.

Solución Explícita.- Es una solución en la que la *variable dependiente* se expresa tan solo en términos de la *variable independiente* y *constantes*; o sea una relación de la forma: $y = \varphi(x)$

Solución Trivial.- Es una solución explícita que es *idéntica a cero* en el intervalo I

Solución Implícita.- Es una relación de la forma $\Phi(x, y) = 0$ en el intervalo I , siempre y cuando exista al menos una función $y = \varphi(x)$ que satisfaga la relación anterior y a la ecuación diferencial, en I . En otras palabras, $\Phi(x, y) = 0$ define *implícitamente* a la función $y = \varphi(x)$.

Familias n -Paramétricas

Siguiendo con el tema sobre la solución de una ecuación diferencial, a veces, a una solución se le llama *integral de la ecuación* y a su gráfica, *curva integral* o *curva de solución*. En el curso de *cálculo integral*, al encontrar la *función primitiva* de una *integral indefinida*, se utiliza una sola constante de integración; la interpretación geométrica de tales integrales indefinidas es una familia infinita de curvas, cuya diferencia entre dos de ellas es una constante. En forma semejante, en el estudio por ejemplo de las ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma $F(x, y, y') = 0$, por lo general se obtiene *una solución con una sola constante arbitraria* o *parámetro*. Atendiendo a lo anterior, una relación de la forma $\Phi(x, y, c) = 0$, que define implícitamente este tipo de soluciones se llama *integral general* y geoméricamente representa en el plano cartesiano una *familia monoparamétrica de soluciones*.

Análogamente, al resolver una ecuación diferencial de la forma $F(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) = 0$, que es de orden n , se busca una familia *n -paramétrica* de soluciones de la forma

$$\Phi(x, y, c_1, c_2, c_3, \dots, c_n) = 0$$

esto quiere decir que una sola ecuación diferencial, puede tener una cantidad infinita de soluciones que corresponden a elecciones ilimitadas del parámetro o parámetros. De esto se desprende otro tipo de solución:

Solución Particular.- Es aquella integral general, en la cual se le ha asignado un valor o valores específicos al parámetro o parámetros.

Un aspecto importante de lo anterior es que, geoméricamente una solución particular es aquella curva integral que pasa por el punto específico (x_0, y_0) .

Observación.- Es importante aclarar que las integrales generales del tipo $\Phi(x, y, c_1, c_2, c_3, \dots, c_n) = 0$ no representan geoméricamente una curva de n dimensiones, por el contrario, sigue siendo una curva en el plano cartesiano con ciertas propiedades geométricas como su dirección, su concavidad, etc.

Soluciones Singulares

En ocasiones una ecuación diferencial posee una solución que no puede ser deducida mediante la integral general, es decir que no pertenece a la *familia n-paramétrica de soluciones*, a este tipo de soluciones se le conoce como solución singular y es deducida a través del análisis de la propia ecuación diferencial.

PROBLEMA DE VALORES INICIALES O PROBLEMA DE CAUCHY

Sea una ecuación diferencial de orden n :

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = \varphi(x)$$

donde $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ son funciones del argumento x , y $\varphi(x)$ es una función de x .

A las relaciones: $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, y''(x_0) = y_2, \dots, y^{(n)}(x_0) = y_n$

se les conoce como *condiciones iniciales* o *condiciones de Cauchy*; Al problema de la búsqueda de una solución de la ecuación diferencial de orden n , que satisface las condiciones iniciales anteriores, se le denomina *problema de Cauchy*¹³. A este tipo de soluciones se les ha denominado *integrales particulares*.

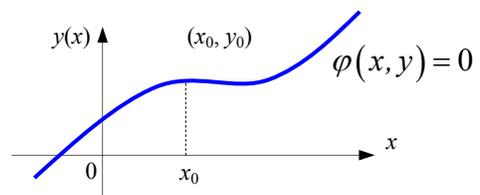
INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL PROBLEMA DE CAUCHY

Para el caso de una ecuación diferencial de primer orden $F(x, y, y') = 0$ sujeta a la *condición inicial* $y(x_0) = y_0$, la interpretación geométrica sería la siguiente:

La integral particular

$$\varphi(x, y) = 0$$

es una curva integral que pasa exactamente por el punto de coordenadas (x_0, y_0) . La figura de la derecha muestra precisamente esta curva.

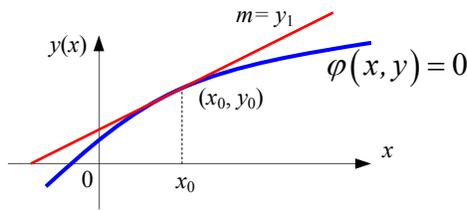


Para el caso de una ecuación diferencial de segundo orden:

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

¹³ En honor al ingeniero militar **Augustin Louis Cauchy** (1789-1857)

sujeta a las condiciones iniciales $y(x_0) = y_0$, e $y'(x_0) = y_1$, la interpretación geométrica sería la siguiente:



La integral particular

$$\varphi(x, y) = 0$$

es una curva integral que pasa exactamente por el punto de coordenadas (x_0, y_0) , y además posee en ese punto una derivada numéricamente igual a y_1 . Esto se muestra en la figura de la izquierda

La solución de una **ecuación diferencial de orden n** , sujeta a las correspondientes condiciones de Cauchy, es una **integral particular** de dicha ecuación y es una curva específica.

COMPROBACIÓN DE UNA SOLUCIÓN

Ejemplo 1.- Verificar que la función $y = Ce^x$ es solución de la ecuación diferencial $y' - y = 0$

Solución.- Es evidente que

$$y = Ce^x \quad \wedge \quad y' = Ce^x$$

sustituyendo éstas relaciones en la ecuación diferencial se tiene:

$$Ce^x - Ce^x = 0$$

de donde se obtiene la identidad $0 \equiv 0$, luego entonces, la función $y = Ce^x$ es solución de la ecuación diferencial dada.

Ejemplo 2.- Verificar que la función $y = e^x \int_0^x e^{t^2} dt + Ce^x$ es solución de la ecuación diferencial $y' - y = e^{x+x^2}$

Solución.- Derivando la función dada se tiene que:

$$y = e^x \int_0^x e^{t^2} dt + Ce^x \quad \wedge \quad y' = e^x \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x e^{t^2} dt + \left(\int_0^x e^{t^2} dt \right) e^x + Ce^x$$

sustituyendo éstas relaciones en la ecuación diferencial se tiene:

$$e^x e^{x^2} + \left(\int_0^x e^{t^2} dt \right) e^x + Ce^x - e^x \int_0^x e^{t^2} dt - Ce^x = e^x e^{x^2}$$

eliminando términos semejantes se obtiene:

$$e^x e^{x^2} \equiv e^x e^{x^2}$$

luego entonces, la función $y = e^x \int_0^x e^{t^2} dt + Ce^x$ si es solución de la ecuación diferencial dada.

Ejemplo 3.- Verificar que las ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \text{sen}(t) \end{cases}$ son solución de la ecuación diferencial $x + yy' = 0$

Solución.- Aplicando la derivada para funciones en forma paramétrica se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\cos(t)}{-\text{sen}(t)} = -\cot(t)$$

sustituyendo esta derivada y las ecuaciones paramétricas en la ecuación diferencial dada:

$$\cos(t) + \text{sen}(t)(-\cot(t)) = 0$$

aplicando identidades trigonométricas se tiene que $\cos(t) - \cos(t) = 0$, llegando a la identidad $0 \equiv 0$, luego entonces las ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \text{sen}(t) \end{cases}$ si son solución de la ecuación diferencial dada.



Ejercicios Suplementarios

Sección 1.4 Problemas 1.1

En los siguientes ejercicios verificar si las funciones dadas son solución de la ecuación diferencial indicada.

1. $y = \sqrt{x}$, $y - 2xy' = 0$
2. $y = e^{-2x}(A \cos \sqrt{2}x + B \text{sen} \sqrt{2}x)$, $y'' + 4y' - 4y = 0$
3. $x(2y - 3) = C$, $x(y' - 3) = y$
4. $\begin{cases} x = t \\ y = 2t^2 - 1 \end{cases}$, $y' - 4x = 0$
5. $\begin{cases} x = 3 \text{sen} t \\ y = 4 \cos t \end{cases}$, $16x + 9yy' = 0$
6. $y = 4e^{3x}$, $y'' - 9y = 0$

7. $y = x \operatorname{sen} x$, $y'' + y = \cos x$
8. $y = \tan x$, $y'' - 2yy' = 0$
9. $y = x \int_0^x \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} dt$, $xy' = y + x \operatorname{sen}(x)$
10. $y = \begin{cases} -x^3 & x < 0 \\ x^3 & x \geq 0 \end{cases}$, $xy' - 3y = 0$



Referencias Bibliográficas del Capítulo 1

Obras consultadas:

Bell, E.T., “*The Development of Mathematics*”, Fourth Edition, McGraw Hill Book Co. of New York, 1985

Boyce W.E., DiPrima R.C., “*Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera*”, 3ª Edición, Editorial Limusa, México, 1980

Elsgolts L., “*Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional*”, 3ª Edición, Editorial Mir Moscú, Rusia, 1983

Larroyo F., “*Filosofía de las Matemáticas*”, 1ª Edición, Editorial Porrúa, México, 1976

Makarenko G.I., Kiseliiov A.I., Krasnov M.I., “*Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*”, 1ª Edición, Editorial Mir Moscú, Rusia, 1972

Montes de Oca F. “*Historia de la Filosofía*”, 8ª Edición, Editorial Porrúa, México, 1997

Ríbnikov K. “*Historia de las Matemáticas*”, Academia de Ciencias de Rusia, 1ª Edición, Editorial Mir, Moscú, Rusia, 1987

Simmons G.F., “*Ecuaciones Diferenciales Con Aplicaciones y Notas Históricas*”, 2ª Edición, Editorial McGraw Hill Interamericana de España, España, 1993

Tsipkin A.G., “*Manual de Matemáticas para la Enseñanza Media*”, 1ª Edición en Español, Editorial Mir, Moscú, Rusia, 1985

Tijonov A., Samarskii A., “*Ecuaciones de la Física Matemática*”, Academia de Ciencias de Rusia, 3ª Edición, Editorial Mir, Moscú, Rusia, 1987

Zill D.G. “*Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado*”, 7ª Edición, Thomson International., México, 2002

Sitios web consultados en Internet:

Benson, T. “*Conformal Mapping Joukovski Transformation*”, Recuperado desde Glenn Resaearch Center, NASA, disponible en: <http://www.grc.nasa.gov/WWW/K-12/airplane/map.html>

Dictionary.com, Lexico Publishing Group LCC, 2007, disponible en: <http://dictionary.reference.com/>

Friedman, M, “*Ernst Cassirer*”, Archivo recuperado el 6 de junio del 2007 desde Stanford Encyclopedia of Phylosophy: <http://plato.stanford.edu/entries/cassirer/>

IEEE, “*James W. Cooley*”, Recuperado desde *The World's Leading Professional Association for the Advancement of Technology*, IEEE, 2007, Disponible en: <http://www.ieee.org/portal/pages/about/awards/bios/2002kilby.html>

Lolli, G., “*Breve Viaggio Intorno ai Significati e all' Insegnamento della Matematica*”, Consultado el 4 de Mayo del 2007 en: <http://www.tiziana1.it/ebooks/Risorse/Matematica.pdf>

Lolli, G., Pagina Personali, Università di Torino - Dipartimento di Matematica: <http://www2.dm.unito.it/paginepersonali/lolli/>

Lorenz, E. N., “*Deterministic Non-periodic Flows*,” J. Atmos. Sci., Vol. 20, citado en Knuth, K. H., et al, “*Revealing Relationships among Relevant Climate Variables with Information Theory*”, NASA Ames Research Center, Moffett Field CA, USA, Disponible en: <http://esto.gsfc.nasa.gov/conferences/estc2005/papers/a3p2.pdf>

Mathematics Subject Classification Scheme, Consultado el 6 de junio del 2007 desde Zentralblatt MATH - Database: <http://www.zblmath.fiz-karlsruhe.de/MATH/home>

O'Connor J.J., Robertson E.F., “*The MacTutor History of Mathematics Archive*”, Sitio web en Internet de la Escuela de Matemáticas y Estadística de la Universidad de San Andrews, Escocia, 2007 : <http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/>

OnLine Etymology Dictionary, *Douglas Harper*, Disponible en: <http://www.etymonline.com/>

Real Academia Española, Disponible en: <http://www.rae.es/>

Rusin D. “*Index Using Mathematics Subject Classification*”, The mathematical Atlas, 2006: <http://www.math.niu.edu/~rusin/known-math/index/index.html>

Stevanović, K. “*Nonlinear Dynamics and Aleksandr Mikhailovich Lyapunov*”, Faculty of Mechanical Engineering University of Niš, Mathematical Institute SANU, Aleksandra Medvedeva 14, 18000 Nis, SERBIA, 2007: <http://www.vti.mod.gov.yu/ntp/rad2007/1-07/kati/kati.pdf>



Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

Sección 2.1

“Es curioso, que las herramientas matemáticas se forjen casi siempre antes de poder prever su empleo”
Bachelard, Gaston



ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

RESEÑA HISTÓRICA

Las ecuaciones de primer orden que se mostrarán en este capítulo no difieren mucho en esencia como lo concibió el teniente **Leonhard Euler** en su obra “*De Integratione Aequationum Differentialium*” de 1755 pero publicada en *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae* por la Academia de St. Petersburgo hasta 1763. En esta obra se puede ver en el párrafo 3 el proceso de la separación de las variables partiendo de la expresión $Mdx + Ndy = 0$ que según **Euler** si admite la separación de variables (*separationem variabilium admittit*) entonces se llega a la expresión $Vdv + Zdz = 0$ que es actualmente una *ecuación de variables separadas*, para llegar posteriormente a la integral general (*generalem integrationem*) $\int Vdv + \int Zdz = Const.$ donde el segundo miembro es para **Euler** una constante arbitraria (*constantem arbitrariam*). En el párrafo 6 se puede observar nuevamente la ecuación $Mdx + Ndy = 0$ considerando que ésta satisface la relación $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, que actualmente se le conoce como la condición que debe satisfacer una *ecuación diferencial exacta*; después aparece su integral general como: $\int Mdx + Y = \int Ndy + X$. En el párrafo 16 establece un teorema para el caso de ecuaciones de la forma $Mdx + Ndy = 0$, que se pueden *reducir a exactas* mediante el factor L, esto es según **Euler**: si $LMdx + LNdy = 0$ entonces $\frac{\partial LM}{\partial y} = \frac{\partial LN}{\partial x}$, por lo tanto se puede aplicar el método del párrafo 6. Posteriormente **Euler** propone varias expresiones para L en diversos ejemplos, pero desafortunadamente no queda muy claro una expresión general para el factor integrante L.



L. Euler

En el párrafo 34 **Euler** aborda el problema general $Pdx + Qydx + Rdy = 0$ y utilizando un razonamiento similar al párrafo 16 llega a $\int \frac{Pdx}{R} \cdot e^{\int \frac{Qdx}{R}} + ye^{\int \frac{Qdx}{R}} = Const.$, que es su integral

general (*aequatio integralis*). Luego aborda el caso particular $Pdx + Qydx + dy = 0$, para el cual de manera similar, llega a la expresión $\int e^{\int Qdx} Pdx + e^{\int Qdx} y = Const.$, muy similar a la que actualmente se utiliza para las *ecuaciones lineales de primer orden*. Después en el párrafo 37, **Euler** estudia el caso de la ecuación $Py^n dx + Qydx + Rdy = 0$, que no es otra cosa que *la ecuación de Bernoulli* que actualmente se trabaja. Nuevamente utilizando el método del párrafo 16 y después de hacer ciertas sustituciones llega a $\frac{y^{1-n}}{1-n} e^{(1-n)\int \frac{Qdx}{R}} + \int \frac{Pdx}{R} \cdot e^{(1-n)\int \frac{Qdx}{R}} = Const.$, que es su integral general. Hasta el párrafo 41 aborda las funciones homogéneas (*functio homogenea*) y en el párrafo 47 reconoce la labor de **Johann Bernoulli** para reducir una *ecuación diferencial homogénea* (*aequationes differentiales homogeneas*) de la forma $Mdx + Ndy = 0$, a ecuaciones de variables separables (*ad separabilitatem variabilium perducere docuit*) donde M y N son funciones homogéneas, proponiendo ya el cambio de variable $y = ux$, llevando a la ecuación a la forma $Udx + Vudx + Vxdu = 0$ que es de variables separables. En el párrafo 52 aborda **Euler** la ecuación del tipo $(\alpha + \beta x + \gamma y)dx + (\delta + \varepsilon x + \zeta y)dy = 0$ que actualmente es un caso de *reducción de las ecuaciones homogéneas*, resolviéndolo mediante los cambios $x = t + f$ y $y = g + u$ conduciéndola a la expresión $(\beta t + \gamma u)dt + (\varepsilon t + \zeta u)du = 0$ que es una ecuación diferencial homogénea.

DEFINICIONES BÁSICAS

En la sección 1.4 se mostró la clasificación de las ecuaciones diferenciales acorde con el orden. Si en una ecuación diferencial aparece la *primera derivada* de la variable y , como la derivada de mayor orden, entonces se dice que dicha ecuación es una *ecuación diferencial de primer orden*. Esta puede tener la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

o su forma diferencial:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

donde $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son funciones de dos variables definidas en algún recinto Ω del plano xy .

El *problema de Cauchy* (véase Pág. 22) para ecuaciones de primer orden, tiene la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \text{ sujeta a } y(x_0) = y_0$$

Su representación geométrica, es una curva en el plano xy , que pasa por el punto de coordenadas (x_0, y_0) .





ECUACIONES DIFERENCIALES DE VARIABLES SEPARADAS Y DE VARIABLES SEPARABLES

ECUACIONES DIFERENCIALES DE VARIABLES SEPARADAS

Una ecuación diferencial de la forma

$$\varphi(y)dy = \psi(x)dx \quad (1)$$

se llama *ecuación diferencial con variables separadas*. La integral general de esta ecuación es:

$$\int \varphi(y)dy - \int \psi(x)dx = C \quad (2.2)$$

donde C es una constante.

ECUACIONES DIFERENCIALES DE VARIABLES SEPARABLES

Una ecuación diferencial de la forma

$$\varphi_1(x)\psi_1(y)dx = \varphi_2(x)\psi_2(y)dy \quad (2.3)$$

en la que los coeficientes de las diferenciales se descomponen en factores que dependen solamente de x o de y se llama *ecuación diferencial con variables separables*.

Dividiendo por el producto $\psi_1(y)\varphi_2(x)$ éstas se reducen a ecuaciones con variables separadas:

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}dx = \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}dy$$

La *integral general* de esta ecuación tiene la forma

$$\int \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}dx - \int \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}dy = C \quad (2.4)$$

Observación.- La división por $\psi_1(y)\varphi_2(x)$ puede dar lugar a que se pierdan las *soluciones particulares* que anulan al producto $\psi_1(y)\varphi_2(x)$. La ecuación diferencial de la forma $\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$. donde a , b y c son constantes, se reduce a una ecuación con variables separables mediante la sustitución $z = ax + by + c$.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CON VARIABLES SEPARADAS Y SEPARABLES

A continuación se mostrarán los desarrollos de problemas de ecuación diferencial de primer orden con variables separables y separadas

Ejemplo 1.- Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$(4 + x^2)dx = (1 - y^5)dy$$

Solución.- La ecuación diferencial dada, es una ecuación de la forma (2.1), es decir ya están separadas las variables, solo resta aplicar la relación (2.2) obteniéndose:

$$\int (4 + x^2)dx - \int (1 - y^5)dy = C$$

calculando las integrales se tiene

$$4x + \frac{x^3}{3} - y + \frac{y^6}{6} = C$$

simplificando la anterior expresión se obtiene:

$$2x^3 + 24x + y^6 - 6y = C$$

finalmente ésta, es la *integral general* de la ecuación diferencial dada.

Ejemplo 2.- Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$3(16 + y^2)dx + 2xy dy = 0$$

Solución.- La ecuación diferencial dada, tiene la forma (2.3), por lo que, si se divide entre el factor $x(16 + y^2)$ siendo $x \neq 0$, se tiene:

$$\frac{3}{x}dx + \frac{2y}{16 + y^2}dy = 0$$

aplicando la relación (2.4) a esta expresión

$$\int \frac{3}{x}dx + \int \frac{2y}{16 + y^2}dy = C_1$$

simplificando las integrales:

$$3 \ln x + \ln(16 + y^2) = \ln C_1$$

aplicando leyes de logaritmos:

$$\ln(x^3(16 + y^2)) = \ln C_1$$

aplicando antilogaritmos a ambos miembros de la expresión se tiene finalmente:

$$x^3(16 + y^2) = C$$

que representa en forma implícita la *integral general* de la ecuación diferencial dada.

Ejemplo 3.- Resuelva la siguiente ecuación diferencial sujeta a la condición inicial indicada

$$\cos^2 y dx - \csc x dy = 0 \quad \text{sujeta a } y(\pi) = 0$$

Solución.- La ecuación diferencial dada, tiene la forma (2.3), por lo que, si se divide entre el factor $\cos^2 y \csc x$, se tiene:

$$\frac{dx}{\csc x} - \frac{dy}{\cos^2 y} = 0$$

aplicando la relación (2.4) a la anterior expresión

$$\int \frac{dx}{\csc x} - \int \frac{dy}{\cos^2 y} = C$$

simplificando las integrales se obtiene:

$$\cos x + \tan y = C$$

aplicando las condiciones iniciales $y(\pi) = 0$, se tiene:

$$\cos(\pi) + \tan(0) = C$$

de donde $C = -1$, por lo que, la *integral particular* de la ecuación diferencial es:

$$\cos x + \tan y + 1 = 0$$

Ejemplo 4.- Resuelva la siguiente ecuación diferencial y utilice un software para graficar algunas curvas integrales de la dicha ecuación.

$$(y^2 - 9)dx - xy(4 - x^2)dy = 0$$

Solución.- La ecuación diferencial dada, tiene la forma (2.3), por lo que, si se divide entre el factor $x(4 - x^2)(y^2 - 9)$ siendo $x \neq \pm 2$, $x \neq \pm 3 \wedge x \neq 0$, se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{dx}{x(4 - x^2)} - \frac{y dy}{y^2 - 9} = 0$$

integrando esta expresión:

$$\int \frac{dx}{x(4-x^2)} - \int \frac{ydy}{y^2-9} = C_1$$

expandiendo el integrando de la primera integral y completando la segunda integral se tiene:

$$\int \left(\frac{1}{4x} + \frac{1}{8(2-x)} - \frac{1}{8(2+x)} \right) dx - \frac{1}{2} \int \frac{2ydy}{y^2-9} = C_1$$

integrando:

$$\frac{1}{4} \ln x - \frac{1}{8} \ln|2-x| - \frac{1}{8} \ln|2+x| - \frac{1}{2} \ln|y^2-9| = \ln C$$

donde $C_1 = \ln C$

multiplicando por 8 la ecuación anterior, aplicando leyes de logaritmos y simplificando se tiene:

$$\ln \left| \frac{x^2}{(4-x^2)(y^2-9)^4} \right| = \ln C$$

aplicando antilogaritmos finalmente se tiene la integral general en forma implícita de la ecuación diferencial indicada

$$\frac{x^2}{(4-x^2)(y^2-9)^4} = C$$

La figura 1 muestra algunas curvas integrales particulares en el plano xy . Esta gráfica se logró con el software *Graphic Calc*® elaborado por *David Tall* y *Piet Van Blockland* de la *Faculteit Wiskunde and Informatica, Amsterdam, Holland*.

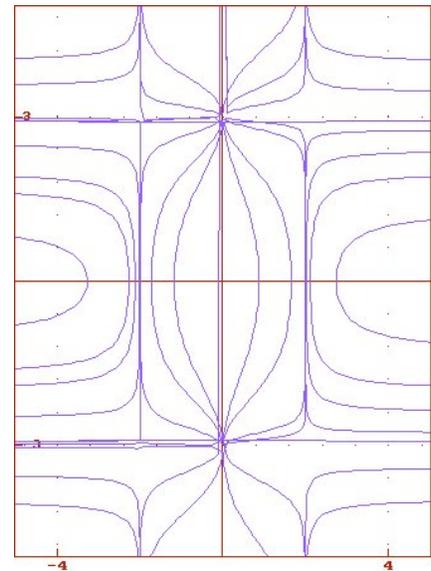


Fig.1 Gráficas de algunas curvas integrales de la ecuación diferencial dada, mediante *Graphic Calc*®

Como puede observarse en la gráfica existen comportamientos asintóticos en algunas curvas integrales, sobretudo en torno a las rectas verticales $x = 2$, $x = -2$, $x = 0$ y a las rectas horizontales $y = 3$ e $y = -3$.

La graficación de algunas curvas integrales de la ecuación diferencial dada es muy útil si se quiere hacer un análisis cualitativo de las curvas solución. Por ejemplo, obsérvese el comportamiento de la variable y cuando x se acerca a 2 por la derecha; es claro que y tiende a cero pero con mucha mayor rapidez (esto se debe a que la derivada se hace infinita) que cuando y tiende a 3 o a -3 al tender x a más infinito; lo mismo sucede cuando x tiende a -2 por la izquierda. Es fácil darse cuenta de que la velocidad con la que varía la variable y está dada por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-9}{xy(4-x^2)}$$

es fácil darse cuenta por la anterior relación, de que la derivada se anula para los valores de $x = 0$, $x = 2$, $x = -2$ e $y = 0$; esto es congruente con la gráfica, ya que las rectas tangentes en los puntos cuyas abscisas son las mencionadas, son paralelas al eje y , además, también lo son, para toda pareja de la forma $(x, 0)$. Es interesante observar el comportamiento alrededor la variable y que toma 4 cuatro valores distintos para todo valor de x , excepto $x = 2$, $x = -2$ y $x = 0$. Se deja al lector que investigue esto.



Ejercicios Suplementarios

Sección 2.2 Ejercicios 2.1

En los siguientes ejercicios resolver la ecuación diferencial indicada y utilice en cada caso una computadora o una calculadora graficadora para trazar algunas curvas integrales.

$$1.- \frac{dy}{dx} = \operatorname{sen}x \tan y$$

$$2.- \frac{dy}{dx} = e^{4x-2y}$$

$$3.- y^3(y^2 - 4)dx + (5x + 2)(3x - 4)dy = 0$$

$$4.- ydx + (x^2 + 3x + 4)dy = 0$$

$$5.- (1 - e^y)dx = (1 + e^x)dy$$

$$6.- y\sqrt{y^2 + 4}dx + \sqrt{x^2 + 9}dy = 0$$

$$7.- \sec^2 y dx + \csc x dy = 0$$

$$8.- \frac{dy}{dx} = \frac{xy + 4x - y - 4}{xy - 3x - 3y + 9}$$

$$9.- x^2 y dx + (x^2 + 2)\sqrt{(x^2 + 2)(y^2 - 1)}dy = 0$$

$$10.- e^{-y} \ln x dx + \operatorname{sen}2y dy = 0$$

$$11.- \frac{dT}{dt} = T - T^2$$

$$12.- \sqrt{(2x + 3)(3y - 1)}dx + xdy = 0, y(1) = 1$$

$$13.- \sec^2 2y \operatorname{sen}^2 x dx + ydy = 0, y(0) = \pi$$

$$14.- \frac{dy}{dx} = \left(\frac{1-x}{1-y}\right)^4, y(0) = 2$$

$$15.- x\sqrt{y^2 + 16}dx + y^2(4 - x^2)^2 dy = 0, y(1) = 1$$

"No es la ignorancia, sino la ignorancia de la ignorancia, la causa de la muerte del conocimiento"
Whitehead, Alfred North

Sección

2.3

ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGÉNEAS DE PRIMER ORDEN

DEFINICIONES BÁSICAS

Antes de abordar el presente tema es necesario la siguiente definición:

Definición 1.- La función $f(x, y)$ se llama **homogénea de grado n** respecto a las variables x e y , si para todo t se verifica la identidad:

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

A continuación se da una lista de ejemplos de funciones y su homogeneidad respecto a las variables x e y .

- $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ es homogénea de primer grado
- $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{xy}$ es homogénea de grado cero
- $f(x, y) = xy - y^2$ es homogénea de segundo grado

Definición 2.- La ecuación de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (2.5)$$

se llama **homogénea** respecto a x e y , si la función $f(x, y)$ es **homogénea de grado cero respecto a x e y** .

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL HOMOGÉNEA DE PRIMER ORDEN

Según la hipótesis de que la función $f(x, y)$ es homogénea de grado cero, entonces $f(tx, ty) = f(x, y)$. Haciendo la sustitución (o cambio de variable) $t = \frac{1}{x}$, se tiene:

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

es decir, la función homogénea de grado cero depende sólo de la razón de los argumentos x e y .

En este caso la ecuación (2.5) toma la forma

$$\frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right) \quad (2.6)$$

Efectuando la sustitución: $u = \frac{y}{x}$, es decir, $y = ux$. Luego entonces se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = u + \frac{du}{dx}x$$

sustituyendo este valor de la derivada en (2.6) se obtiene:

$$u + x \frac{du}{dx} = f(1, u)$$

que es una ecuación diferencial con variables separables:

$$x \frac{du}{dx} = f(1, u) - u \quad \text{ó} \quad \frac{du}{f(1, u) - u} = \frac{dx}{x}$$

integrando, se encuentra:

$$\int \frac{du}{f(1,u)-u} = \int \frac{dx}{x} + C$$

Sustituyendo ahora u por la razón $\frac{y}{x}$, después de integrar, se obtiene la integral de la ecuación (2.6).

Observación.- La ecuación de la forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

será homogénea sólo en aquel caso, en que $M(x, y)$ y $N(x, y)$ sean funciones homogéneas de un mismo grado. Esto se deduce del hecho de que la razón de dos funciones homogéneas de un mismo grado es una función homogénea de grado cero.

ECUACIONES DIFERENCIALES QUE SE REDUCEN A ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGÉNEAS DE PRIMER ORDEN

Se reducen a ecuaciones homogéneas las ecuaciones de la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1} \quad (2.7)$$

Si $c_1 = c = 0$, la ecuación (2.7) es, evidentemente, homogénea. Supóngase, ahora, que c y c_1 (o uno de ellos) son diferentes de cero. Si se realiza los cambios de variables

$$x = x_1 + h, \quad y = y_1 + k \quad (2.8)$$

entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1}$$

Introduciendo en la ecuación (2.7) las expresiones (2.8), y la derivada $\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1}$, tenemos:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + by_1 + ah + bk + c}{a_1x_1 + b_1y_1 + a_1h + b_1k + c_1} \quad (2.9)$$

Elijanse h y k de tal modo que se verifiquen las ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} ah + bk + c &= 0 \\ a_1h + b_1k + c_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

es decir, se determinarán h y k como soluciones del sistema de ecuaciones (2.10). Bajo esta condición la ecuación (2.9) es homogénea:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + by_1}{a_1x_1 + b_1y_1}$$

Al solucionar esta ecuación, y pasando de nuevo a x e y , según las fórmulas (2.8), obtenemos la solución de la ecuación (2.7)

El sistema (2.10) no tiene solución, si $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$, es decir, si $ab_1 = a_1b$. Pero en este caso

$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda$, es decir, $a_1 = \lambda a$, $b_1 = \lambda b$ y, por consiguiente, se puede transformar la ecuación (2.7) en la forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(ax + by) + c}{\lambda(ax + by) + c_1} \quad (2.11)$$

haciendo la sustitución

$$z = ax + by \quad (2.12)$$

la ecuación se reduce a una ecuación con variables separables.

En efecto,

$$\frac{dz}{dx} = a + b \frac{dy}{dx}$$

de donde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b} \frac{dz}{dx} - \frac{a}{b} \quad (2.13)$$

Poniendo las expresiones (2.12) y (2.13) en la ecuación (2.11) se obtiene:

$$\frac{1}{b} \frac{dz}{dx} - \frac{a}{b} = \frac{z + c}{\lambda z + c_1}$$

que es una ecuación con variables separables.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGÉNEAS DE PRIMER ORDEN

Ejemplo 1.- Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$(x^2 - y^2)dx + xy dy = 0$$

Solución.- Evidentemente las funciones $x^2 - y^2 \wedge xy$, son *funciones homogéneas* de grado 2. reacomodando los términos de la ecuación diferencial y despejando la derivada se obtiene la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{xy}$$

simplificando:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$$

haciendo la sustitución $u = \frac{y}{x}$, y reemplazando $\frac{dy}{dx}$ por su equivalente $u + \frac{du}{dx}x$, la ecuación anterior se transforma en:

$$u + \frac{du}{dx}x = u - \frac{1}{u}$$

que es una *ecuación de variables separables*; reduciendo términos semejantes y separando las variables se tiene:

$$udu + \frac{dx}{x} = 0$$

integrando esta ecuación:

$$\int udu + \int \frac{dx}{x} = C$$

calculando las integrales se tiene:

$$\frac{u^2}{2} + \ln x = C$$

Finalmente, reemplazando u por su equivalente $\frac{y}{x}$, se obtiene la *integral general* de la ecuación diferencial homogénea dada

$$\frac{y^2}{2x^2} + \ln x = C$$

Ejemplo 2.- Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$(x - y)dx + y dy = 0$$

Solución.- Evidentemente las funciones $(x - y) \wedge y$, son *funciones homogéneas* de grado 1. La resolución del problema se hará de otra manera; en la elección del cambio de variable, se pueden concebir dos posibilidades. La siguiente tabla muestra los dos posibles cambios de variable y sus respectivos diferenciales

$y = ux$	$dy = udx + xdu$
$x = uy$	$dx = udy + ydu$

Se sugiere observar detenidamente la ecuación y elegir el cambio de variable acorde con la función más simple guiándose por su diferencial, es decir, en este caso y , es la función más simple y el diferencial $dy = udx + xdu$ guiará hacia el cambio $y = ux$. Sustituyendo estas dos últimas expresiones se tiene la forma:

$$(x - ux)dx + ux(udx + xdu) = 0$$

reduciendo términos semejantes y factorizando se tiene:

$$(u^2 - u + 1)dx + xudu = 0$$

que es una *ecuación de variables separables*. Separando dichas variables se tiene:

$$\frac{dx}{x} + \frac{udu}{u^2 - u + 1} = 0$$

integrando esta ecuación:

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{udu}{u^2 - u + 1} = C$$

calculando las integrales se tiene:

$$\ln x + \ln \sqrt{u^2 - u + 1} + \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \left(\frac{\sqrt{3}(2u - 1)}{3} \right) = C$$

Finalmente, reemplazando u por su equivalente $\frac{y}{x}$, se obtiene la *integral general* de la ecuación diferencial homogénea dada

$$\ln x + \ln \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \left(\frac{y}{x}\right) + 1} + \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \left(\frac{\sqrt{3}\left(2\left(\frac{y}{x}\right) - 1\right)}{3} \right) = C$$

simplificando:

$$\ln \sqrt{y^2 - xy + x^2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \left[\frac{\sqrt{3}(2y - x)}{3x} \right] = C$$

que finalmente es la integral general de la ecuación diferencial dada.

Ejemplo 3.- Resolver la siguiente ecuación diferencial y utilice un programa de computadora para encontrar algunas curvas integrales.

$$(x - y - 3)dx + (x + y - 1)dy = 0$$

Solución.- Examinando el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} x - y - 3 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{array} \right\}$$

se llega a la conclusión de que tiene la solución única $x = 2$ e $y = -1$

por lo tanto se elegirán los siguientes cambios de variables: $x = \xi + 2 \wedge y = \eta - 1$ cuyos diferenciales están dados por: $dx = d\xi$ y $dy = d\eta$, con lo cual la ecuación diferencial indicada se transforma en:

$$(\xi - \eta)d\xi + (\xi + \eta)d\eta = 0$$

que es una ecuación homogénea de grado 1 en las variables ξ y η

Acomodando la ecuación resultante en la forma (2.7) se tiene:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\eta - \xi}{\xi + \eta}$$

reacomodando los términos:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\frac{\eta}{\xi} - 1}{1 + \frac{\eta}{\xi}}$$

haciendo los cambios $u = \frac{\eta}{\xi}$ y $\frac{d\eta}{d\xi} = u + \frac{du}{d\xi} \xi$

$$u + \frac{du}{d\xi} \xi = \frac{u-1}{u+1} \quad \text{o en forma equivalente} \quad \frac{du}{d\xi} \xi = -\frac{u^2+1}{u+1}$$

que es una ecuación de variables separables. Separando dichas variables y simplificando se tiene:

$$\frac{u+1}{u^2+1} du + \frac{d\xi}{\xi} = 0$$

integrando esta última expresión:

$$\int \frac{u+1}{u^2+1} du + \int \frac{d\xi}{\xi} = C_1$$

calculando las integrales se tiene:

$$\frac{1}{2} \ln|u^2+1| + \arctan(u) + \ln \xi = C$$

aplicando leyes de logaritmos y antilogaritmos y simplificando se obtiene:

$$\ln|\xi\sqrt{u^2+1}| + \arctan(u) = C$$

Finalmente, reemplazando u por su equivalente $\frac{\eta}{\xi}$, se obtiene:

$$\ln\sqrt{\eta^2 + \xi^2} + \arctan\left(\frac{\eta}{\xi}\right) = C$$

Ahora regresando a las variables originales se tiene:

$$\ln\sqrt{(y+1)^2 + (x-2)^2} + \arctan\left(\frac{y+1}{x-2}\right) = C$$

La siguiente gráfica muestra algunas curvas integrales particulares en el plano xy .

Como puede observarse en la Fig. 2, existe un punto especial: el punto de coordenadas (2,-1) que representa analíticamente la solución del sistema:

$$\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

en relación con la integral general, las coordenadas de dicho punto indefinen la expresión

$$\ln \sqrt{(y+1)^2 + (x-2)^2}$$

A simple vista la gráfica no proporciona más información, sin embargo en el programa graficador (en este caso se utilizó el software *Graphic Calc*®) muestra que no existe curva integral que pase por los puntos que pertenecen a la recta $x + y - 1 = 0$. De esta manera la integral general queda definida de la siguiente forma: Las curvas integrales que son solución de la ecuación diferencial dada son:

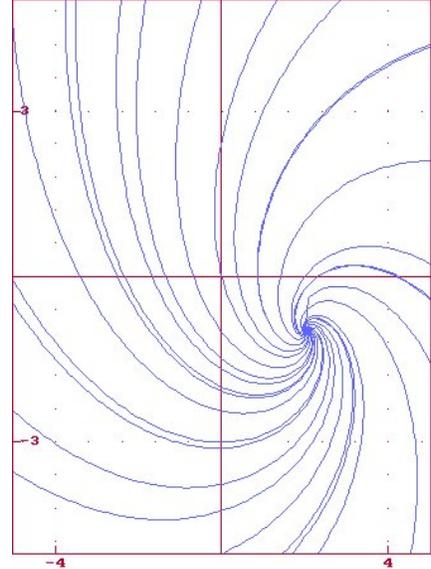


Fig.2 Gráficas de algunas curvas integrales de la ecuación diferencial dada, mediante *Graphic Calc*®

$$\ln \sqrt{(y+1)^2 + (x-2)^2} + \arctan\left(\frac{y+1}{x-2}\right) = C$$

definida para toda pareja (x,y) excepto en los puntos que pertenecen a la recta $x + y - 1 = 0$

Ejemplo 4.- Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$(x + y + 4)dx + (2x + 2y + 1)dy = 0$$

Solución.- Examinando el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - y + 4 = 0 \\ 2x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

se llega a la conclusión de que no tiene solución ya que su determinante es cero.

Reacomodando la ecuación diferencial dada a la forma (2.11) se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + y + 4}{2(x + y) + 1}$$

haciendo el cambio $z = x + y$ (fórmula 2.12). Su derivada respecto a x es: $\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$

sustituyendo estas expresiones en la ecuación diferencial anterior se tiene:

$$\frac{dz}{dx} - 1 = -\frac{z+4}{2z+1} \quad \text{o en forma más simplificada} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z-3}{2z+1}$$

esta última expresión es una ecuación diferencial de variables separables. Separando las variables e integrando se tiene:

$$\int \frac{2z+1}{z-3} dz - \int dx = C$$

calculando las integrales se obtiene:

$$2z + 7 \ln|z-3| - x = C$$

aplicando el cambio de variable $z = x + y$ se obtiene finalmente la integral general de la ecuación diferencial indicada.

$$x - 2y + 7 \ln(x + y - 3) = C$$

definida para toda pareja (x,y) tal que $x + y - 3 > 0$



Ejercicios Suplementarios

Sección 2.3 Ejercicios 2.2

En los siguientes ejercicios resolver la ecuación diferencial indicada y utilice en cada caso una computadora o una calculadora graficadora para trazar algunas curvas integrales.

1.- $(x^2 - y^2)dx + xydy = 0$

2.- $(x^3 + 2x^2y)dx - y^3dy = 0$

3.- $(x - 2y)dx + (x + y)dy = 0$

4.- $yy' = x + \sqrt{x^2 - y^2}$

5.- $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$

6.- $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y}$

7.- $(x^2 - xy + y^2)y' = x^2 + y^2$

8.- $ydx + (\sqrt{xy} + y)dy = 0$

9.- $(x + y + 2)dx + (x - y - 4)dy = 0$

10.- $(2x + y - 2)dx + (3x - 2y - 10)dy = 0$

11.- $(3x + y - 1)dx + (6x + 2y + 3)dy = 0$

12.- $(x - y + 5)dx + (4x - 4y - 2)dy = 0$

13.- $(x^2y^2 - 3)dx + 4xy^2dy = 0$

14.- $(xy - 3y^2)y' = x^2, y(1) = 1$

15.- $(y^3 - 2x^2)dx = -x^2ydy$

16.- $(x^4 - y^3)y' - (x^2y - 2x^3) = 0$

17.- $(4x^2y - 1)dx + y^3dy = 0$

Sugerencia: Haga la sustitución $y = z^\alpha$, calcule su diferencial e iguale los grados de las nuevas funciones para determinar α



ECUACIONES DIFERENCIALES EN DIFERENCIALES TOTALES

DEFINICIONES BÁSICAS

Definición 1.- La ecuación

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (2.14)$$

se llama **ecuación en diferenciales totales** ó **ecuación diferencial exacta**, si $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones continuas y derivables para las que se cumple la correlación:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (2.15)$$

siendo $\frac{\partial M}{\partial y}$ y $\frac{\partial N}{\partial x}$ continuas en un cierto dominio $\Omega \in \mathbb{R}^2$

INTEGRACIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS

Se demostrará que si el primer miembro de la ecuación (2.14) es una diferencial total, entonces se cumple la condición (2.15) y viceversa; por otro lado si se cumple la condición (2.15), entonces el primer miembro de la ecuación (2.14) es la diferencial total de cierta función $u(x, y)$, es decir, la ecuación (2.14) tiene la forma:

$$du(x, y) = 0 \quad (2.16)$$

y, por lo tanto, su integral general es $u(x, y) = C$

Supóngase, primeramente, que el primer miembro de la ecuación (2.14) sea la diferencial total de cierta función $u(x, y)$ es decir,

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

entonces:

$$M = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad N = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.17)$$

Derivando la primera relación respecto a y , y la segunda, respecto a x , se tiene:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

Suponiendo que las derivadas son continuas, se tiene:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

es decir, la igualdad (2.15) es condición necesaria para que el primer miembro de la ecuación (2.14) sea diferencial total de cierta función $u(x, y)$. Se mostrará que esta condición será también suficiente, es decir, si se cumple la igualdad (2.15), el primer miembro de la ecuación diferencial (2.14) es diferencial total de cierta función $u(x, y)$.

De la relación $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$ se tiene:

$$u = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \varphi(y)$$

donde x_0 es la abscisa de un punto arbitrario en el dominio de existencia de la solución.

Integrando respecto a x , suponiendo y constante. Por eso, la constante arbitraria de integración puede depender de y . Eligiendo la función $\varphi(y)$ de tal modo que se cumpla la segunda de las correlaciones (2.17). Para esto derivando, (*aplicando el teorema de Leibnitz sobre la derivación de una integral definida respecto a un parámetro*) ambos miembros de la última igualdad respecto a y e igualando el resultado a $N(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial M}{\partial y} dx + \varphi'(y) = N(x, y)$$

Pero, como $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, se puede escribir:

$$\int_{x_0}^x \frac{\partial N}{\partial x} dx + \varphi'(y) = N(x, y), \quad \text{es decir,} \quad N(x, y)|_{x_0}^x + \varphi'(y) = N(x, y)$$

Por lo tanto,

$$\varphi'(y) = N(x_0, y)$$

ó

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy + C_1$$

Así pues, la función $u(x, y)$ tomará la forma:

$$u = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy + C_1$$

Aquí, $P(x_0, y_0)$ es un punto en cuya vecindad existe la solución de la ecuación diferencial (2.14).

Igualando esta expresión a una constante arbitraria C , se obtiene la *integral general* de la ecuación (2.14)

$$\int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy = C \quad (2.18)$$

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS

Ejemplo 1.- Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$e^y dx + xe^y dy = 0$$

Método 1.- Aplicando la relación (2.14) se deduce que: $\frac{\partial(e^y)}{\partial y} = e^y$ y por otro lado $\frac{\partial(xe^y)}{\partial x} = e^y$; por lo tanto la ecuación diferencial dada es exacta o es el diferencial total de cierta función $u(x, y)$. De las relaciones (2.17), se deduce que si la ecuación diferencial dada es la diferencial total de una función $u(x, y)$, entonces:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^y$$

integrando esta expresión con respecto de x se tiene:

$$u(x, y) = \int e^y dx + \varphi(y)$$

o, en forma simplificada:

$$u(x, y) = xe^y + \varphi(y)$$

Ahora, derivando con respecto a y , se obtiene:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = xe^y + \varphi'(y)$$

pero como $\frac{\partial u}{\partial y} = xe^y$, se tiene:

$$xe^y = xe^y + \varphi'(y)$$

de aquí que:

$$\varphi'(y) = 0$$

luego entonces $\varphi(y) = c_1$; de este modo:

$$u(x, y) = xe^y + c_1$$

pero como $u(x, y) = c$, entonces:

$$xe^y = C$$

donde $C = c - c_1$

Método 2.- Aplicando directamente la relación (2.18) considerando que $M = e^y \wedge N = xe^y$, se tiene:

$$\int_{x_0}^x e^y dx + \int_{y_0}^y x_0 e^y dy = C$$

$$xe^y \Big|_{x_0}^x + x_0 e^y \Big|_{y_0}^y = C$$

evaluando los límites:

$$xe^y - x_0 e^y + x_0 e^y - x_0 e^{y_0} = C$$

considerando que $x_0 e^{y_0}$ es un término constante, se tiene finalmente la *integral general* de la ecuación diferencial dada.

$$xe^y = C$$

Es evidente que este método es mucho más simple que el anterior y es el que se usará en los próximos ejemplos.

Ejemplo 2.- Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$x^2 \operatorname{sen} y dy - 2x \cos y dx = 0 \quad \text{sujeta a: } y(1) = \pi$$

Solución.- Considerando que $M = -2x \cos y \wedge N = x^2 \operatorname{sen} y$, y aplicando la relación (2.15) se deduce que: $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x \operatorname{sen} y$ y por otro lado $\frac{\partial N}{\partial x} = 2x \operatorname{sen} y$; por lo tanto la ecuación diferencial dada es exacta o es el diferencial total de cierta función $u(x, y)$. Aplicando directamente la relación (2.18)

$$\int_{x_0}^x -2x \cos y dx + \int_{y_0}^y x_0^2 \operatorname{sen} y dy = C$$

calculando las integrales:

$$-x^2 \cos y \Big|_{x_0}^x - x_0^2 \cos y \Big|_{y_0}^y = C$$

evaluando, se tiene:

$$-x^2 \cos y + x_0^2 \cos y - x_0^2 \cos y + x_0^2 \cos y_0 = C$$

simplificando términos semejantes y considerando al término $x_0^2 \cos y_0$ como constante, se tiene finalmente la integral general de la ecuación diferencial dada.

$$x^2 \cos y = C$$

aplicando la condición inicial, se tiene:

$$(1)^2 \cos(\pi) = C$$

de donde $C = -1$, luego entonces, la *integral particular* de la ecuación diferencial es:

$$x^2 \cos y + 1 = 0$$

Ejemplo 3.- Utilizar un software de computadora para encontrar algunas integrales generales en forma gráfica incluyendo la que satisface la condición inicial, del ejemplo anterior. Analícese el comportamiento de las soluciones.

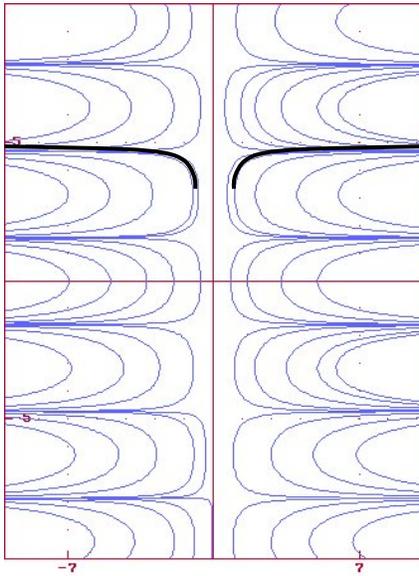


Fig. 3 Gráficas de algunas curvas integrales de la ecuación diferencial dada, mediante *Graphic Calc*®

Solución.- Utilizando el graficador (D. *Differential Equations*) del software *Graphic Calc*® se lleva la ecuación diferencial dada a la forma siguiente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x \cos y}{x^2 \operatorname{sen} y}$$

o en forma más simplificada:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 \operatorname{ctg}(y)}{x}$$

Como puede observarse en la Fig. 3, no existe curva integral que cruce el eje y . Existe un comportamiento asintótico para los valores de y , cuando x tiende a infinito; estos valores se pueden deducir a partir de la relación explícita y analizando detenidamente la gráfica. La forma explícita de la integral general es:

$$y = \arccos\left(\frac{C}{x^2}\right)$$

La función arccos tiende a los valores $\pm \frac{n\pi}{2}$ cuando $x \rightarrow \infty$. Esto es congruente con el hecho de que la expresión $\cot(y)$ se anula para estos valores, es decir la pendiente de las rectas tangentes son horizontales

La curva remarcada en negrita representa la *integral particular* encontrada para el ejemplo dado. Por otro lado, es interesante observar que aparentemente las *curvas integrales* que se encuentran cerca del eje x , tocan dicho eje; ¿realmente eso es así? La respuesta es afirmativa, las curvas integrales si tocan el eje x , a pesar de que la derivada se indefine para $y = 0$; y esto es congruente ya que las rectas tangentes a las curvas integrales para los puntos sobre el eje x son paralelas al eje y .



Ejercicios Suplementarios

Sección 2.4 Ejercicios 2.3

En los siguientes ejercicios resolver la ecuación diferencial indicada y utilice en cada caso una computadora o una calculadora graficadora para trazar algunas curvas integrales.

1.- $3xy^2 dx + 3x^2 y dy = 0$	9.- $(x \tan y + y \cos y) dy - \left(\ln \cos y + \frac{y^2 \operatorname{sen} x}{2} \right) dx = 0$
2.- $\ln \left(\frac{x+y}{x-y} \right) dx + \ln(x^2 - y^2) dy = 0$	10.- $(5x^2 - 4x + y) dx + (3y^2 - 2y + x) dy = 0$
3.- $\frac{y}{3} \sqrt{\frac{y}{x}} dx + \sqrt{xy} dy = 0$	11.- $(\tan x - \cos y) dx + (x \operatorname{sen} y) dy = 0$
4.- $\left(\frac{y \cos xy}{x} - \frac{\operatorname{sen} xy}{x^2} \right) dx + \cos xy dy = 0$	12.- $(3x^2 y^5 + 2x^2 y^2 + y) dx + (5x^3 y^4 + 2x^3 y + x) dy = 0$
5.- $x e^{x-y} dx - (x+1) e^{x-y} dy = 0$	13.- $(2x \operatorname{sen} y - y^3 \operatorname{sen} x) dx + (3y^2 \cos x + x^2 \cos y) dy = 0$
6.- $\frac{1}{2} y^2 \cot x dx + y \ln(\operatorname{sen} x) dy = 0$	14.- $(e^{x+y} (x^2 y + 2xy)) dx + (x^2 e^{x+y} (y+1)) dy = 0$
7.- $(2xy^2 + y^5) dx + (2x^2 y + 5y^4) dy = 0$	15.- $\left[\frac{y^2 \sqrt{x^2 - y} + x}{\sqrt{x^2 - y}} \right] dx + \left[\frac{4xy \sqrt{x^2 - y} - 1}{2\sqrt{x^2 - y}} \right] dy = 0$
8.- $\left(\frac{2y \sqrt{xy}}{3x} + xy^2 \right) dx + (2\sqrt{xy} + x^2 y) dy = 0$	

Sección

2.5

"Nunca me he encontrado con alguien tan ignorante de quien no pudiese aprender algo"
Galilei, Galileo



ECUACIONES DIFERENCIALES QUE SE REDUCEN A ECUACIONES EN DIFERENCIALES TOTALES

FACTOR INTEGRANTE

Supóngase que el primer miembro de la ecuación

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (2.19)$$

no es una diferencial total. En algunos casos la ecuación (2.19) puede convertirse en una ecuación en diferenciales totales si se elige una función $\mu(x, y)$ tal que, si se multiplican todos los miembros de la ecuación (2.19) por esta función, el primer miembro de la ecuación se convierte en una diferencial total.

La solución general de la ecuación obtenida, coincide con la solución de la ecuación inicial; la función $\mu(x, y)$ se llama **factor integrante** de la ecuación (2.19)

Para hallar un factor integrante μ se procede del modo siguiente: multiplicando los dos miembros de la ecuación dada por el factor integrante μ , por ahora desconocido se tiene:

$$\mu M dx + \mu N dy = 0$$

Para que la última ecuación esté dada en diferenciales totales es necesario y suficiente que se cumpla la relación:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \quad (2.20)$$

es decir,

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

o sea

$$M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$$

Al dividir por μ los dos miembros de la última ecuación, se obtiene:

$$M \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \quad (2.21)$$

Es evidente que toda función $\mu(x, y)$ que satisface la última ecuación es un factor integrante de la ecuación (2.19)

Ahora considérense los dos casos simples de factores integrantes:

Factor integrante $\mu = \mu(x)$

Es claro que si μ es un factor exclusivo de x , entonces el término $\frac{\partial \ln \mu}{\partial y}$ de la ecuación (2.21) se

anula, por lo que: $-N \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$. Integrando con respecto a x se tiene:

$$\ln \mu = \int \frac{\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}}{N} dx$$

Aplicando antilogaritmos se obtiene el **factor integrante en función de x** :

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx} \quad (2.22)$$

Factor integrante $\mu = \mu(y)$

Es claro que si μ es un factor exclusivo de y , entonces el término $\frac{\partial \ln \mu}{\partial x}$ de la ecuación (2.21) se

anula, por lo que: $M \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$. *Integrando con respecto a y se tiene:*

$$\ln \mu = \int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy$$

*Aplicando antilogaritmos se obtiene el **factor integrante en función de y** :*

$$\mu(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy} \quad (2.23)$$

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES QUE SE REDUCEN A ECUACIONES EN DIFERENCIALES TOTALES

Ejemplo 1.- Resolver la siguiente ecuación diferencial, encontrando un factor integrante del tipo $\mu(x)$.

$$(x^2 + 2y)dx - xdy = 0$$

Solución.- Primero se determina si la ecuación es exacta o no; para tal fin se calculan las derivadas parciales vistas en el tema de ecuaciones diferenciales en diferenciales totales.

Si $M = x^2 + 2y$ \wedge $N = -x$, entonces: $\frac{\partial M}{\partial y} = 2$ y $\frac{\partial N}{\partial x} = -1$, por lo tanto la ecuación diferencial

no es exacta. Ahora se procede a buscar un factor integrante que dependa solo de la variable x . Aplicando la relación (2.21) se tiene:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2-(-1)}{-x} dx} = e^{-3 \ln x} = e^{\ln \frac{1}{x^3}}$$

de este modo el **factor integrante** es:

$$\mu(x) = \frac{1}{x^3}$$

multiplicando la ecuación diferencial dada por este factor se obtiene:

$$\left(\frac{x^2 + 2y}{x^3} \right) dx - \frac{1}{x^2} dy = 0$$

Ahora $\mu M = \frac{x^2 + 2y}{x^3}$ y $\mu N = -\frac{1}{x^2}$; sus derivadas parciales son: $\frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{2}{x^3}$ y $\frac{\partial \mu N}{\partial x} = \frac{2}{x^3}$, por

lo tanto la ecuación diferencial transformada es exacta. Procediendo con los métodos vistos en la sección anterior:

$$\int_{x_0}^x \frac{x^2 + 2y}{x^3} dx + \int_{y_0}^y \left(-\frac{1}{x_0^2} \right) dy = C$$

calculando las integrales:

$$\left(\ln x - \frac{y}{x^2} \right)_{x_0}^x - \frac{y}{x_0^2} \Big|_{y_0}^y = C$$

evaluando:

$$\ln x - \frac{y}{x^2} - \ln x_0 + \frac{y}{x_0^2} - \frac{y}{x_0^2} + \frac{y_0}{x_0^2} = C$$

simplificando términos semejantes y constantes:

$$\ln x - \frac{y}{x^2} = C$$

que finalmente representa la *integral general* de la ecuación diferencial dada.

Ejemplo 2.- Resolver la siguiente ecuación diferencial, encontrando un factor integrante del tipo $\mu(y)$.

$$x dx + (x^2 y + y^3) dy = 0$$

Solución.- Procediendo de la misma forma que en el ejemplo anterior:

Si $M = x$ y $N = x^2 y + y^3$, entonces: $\frac{\partial M}{\partial y} = 0$ y $\frac{\partial N}{\partial x} = 2xy$, por lo tanto la ecuación diferencial

no es exacta. Ahora se procede a buscar un factor integrante que dependa solo de la variable y . Aplicando la relación (2.21) se tiene:

$$\mu(y) = e^{\int \frac{2xy-0}{x} dy} = e^{y^2}$$

de este modo el *factor integrante* es:

$$\mu(y) = e^{y^2}$$

multiplicando la ecuación diferencial dada por este factor se obtiene:

$$x e^{y^2} dx + e^{y^2} (x^2 y + y^3) dy = 0$$

Ahora $\mu M = xe^{y^2}$ y $\mu N = e^{y^2}(x^2y + y^3)$; sus derivadas parciales son: $\frac{\partial \mu M}{\partial y} = 2xye^{y^2}$ y

$\frac{\partial \mu N}{\partial x} = 2xye^{y^2}$, por lo tanto la ecuación diferencial transformada es exacta. Procediendo con los métodos vistos en la sección anterior:

$$\int_{x_0}^x xe^{y^2} dx + \int_{y_0}^y e^{y^2}(x_0^2y + y^3) dy = C$$

calculando las integrales:

$$\frac{1}{2}x^2e^{y^2}\Big|_{x_0}^x + \left(\frac{1}{2}x_0^2e^{y^2} + \frac{1}{2}e^{y^2}(y^2 - 1)\right)\Big|_{y_0}^y = C$$

evaluando:

$$\frac{1}{2}x^2e^{y^2} - \frac{1}{2}x_0^2e^{y^2} + \frac{1}{2}x_0^2e^{y^2} + \frac{1}{2}y^2e^{y^2} - \frac{1}{2}e^{y^2} - \frac{1}{2}x_0^2e^{y_0^2} - \frac{1}{2}y_0^2e^{y_0^2} + \frac{1}{2}e^{y_0^2} = C$$

simplificando términos semejantes y constantes:

$$\frac{1}{2}e^{y^2}(x^2 + y^2 - 1) = C$$

que finalmente representa la *integral general* de la ecuación diferencial dada.

Ejemplo 3.- Utilizar un software de computadora para encontrar gráficamente algunas curvas integrales generales de la siguiente ecuación diferencial:

$$xdx + (x^2y + y^3)dy = 0$$

Solución.- Utilizando el graficador (D. *Differential Equations*) del software *Graphic Calc*[®] se lleva la ecuación diferencial dada a la forma siguiente:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{x^2y + y^3}$$

Como puede observarse en la Fig. 4, aparentemente algunas *curvas integrales* son curvas cerradas, pero cuando se extiende el rango de definición de ambas variables, se puede observar que todas las curvas son cerradas y la razón de ello es la siguiente:

Se sabe por el problema del ejemplo anterior que la solución general de la ecuación diferencial dada es:

$$\frac{1}{2}e^{y^2}(x^2 + y^2 - 1) = C$$

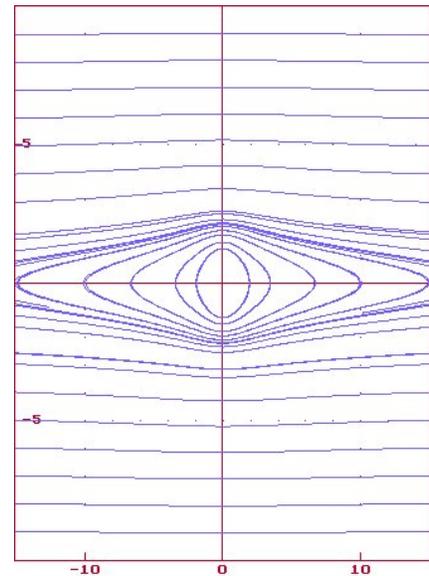


Fig. 4 Gráficas de algunas curvas integrales de la ecuación diferencial dada, mediante *Graphic Calc*[®]

así que si se considera al miembro izquierdo de la expresión anterior como una función de dos variables, entonces se deduce que tiene un comportamiento tipo paraboloidal, sus curvas de nivel son parecidas a la de un paraboloides con la característica de que la variable y decrece lentamente cuando x tiende al infinito. Esto es congruente con la expresión de la derivada; como puede observarse en dicha expresión, la razón de cambio de la variable y tiende a cero cuando x tiende al infinito y se hace infinita cuando x tiende a cero, pero no está definida en el origen $(0,0)$. La variable y crece cuando $x < 0$ e $y > 0$ y cuando $x > 0$ e $y < 0$, decrece cuando $x > 0$ e $y > 0$ y cuando $x < 0$ e $y < 0$.

Es interesante observar que a pesar de que la derivada se hace infinita para $y = 0$ todas las curvas integrales cruzan el eje x y es notorio observar que en los puntos sobre el eje x las rectas tangentes a las curvas integrales son paralelas al eje y . Es evidente que sin resolver la ecuación diferencial se puede analizar cualitativamente el comportamiento de la variable y tan solo con tener la expresión derivada y un buen graficador.



Ejercicios Suplementarios

Sección 2.5 Ejercicios 2.4

En los siguientes ejercicios resolver la ecuación diferencial indicada, encontrando el factor integrante sugerido y utilice en cada caso una computadora o una calculadora graficadora para trazar algunas curvas integrales.

1.- $(\sin x + \sin y)dx - \cos y dy = 0, \mu(x)$	8.- $3ydx + (x + y^2)dy = 0, \mu(y)$
2.- $(x + 2y^2)dx - 4xydy = 0, \mu(x)$	9.- $2ydx + (y^2 - x)dy = 0, \mu(y)$
3.- $(y + \ln x)dx + 2xdy = 0, \mu(x)$	10.- $x^2dx + xydy = 0, \mu(x)$
4.- $(2y - 3x)dx + 3xdy = 0, \mu(x)$	11.- $y^2dx + 3xydy = 0, \mu(y)$
5.- $(5y - 3x)dx + xdy = 0, \mu(x)$	12.- $xydx + 2x^2dy = 0, \mu(y)$
6.- $(2x + y^2)dx - 3xydy = 0, \mu(x)$	13.- $\sin y dx + x^2 \cos y dy = 0, \mu(x)$
7.- $ydx + (2x + y^2)dy = 0, \mu(y)$	

Sección

2.6

“Cuando puedes medir aquello de lo que hablas, y expresarlo con números, sabes algo acerca de ello; pero cuando no lo puedes medir, cuando no lo puedes expresar con números, tu conocimiento es pobre e insatisfactorio: puede ser el principio del conocimiento”
 Kelvin, William Thomson

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN

DEFINICIONES BÁSICAS

Definición 1.- La ecuación que es lineal respecto a la función desconocida y su derivada, se llama **ecuación lineal de primer orden**. La ecuación tiene la forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad (2.24)$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones continuas dadas de x (o constantes).

INTEGRACIÓN DE UNA ECUACIÓN LINEAL DE PRIMER ORDEN

Se busca la solución de la ecuación (2.24) en la forma de un producto de dos funciones de x :

$$y = u(x)v(x) \quad (2.25)$$

Se puede tomar arbitrariamente una de estas funciones, la otra se determinará entonces según la ecuación (2.24). Derivando los dos miembros de la igualdad (2.25) se encuentra que:

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

poniendo la expresión obtenida anteriormente en la ecuación (2.24), se tiene:

$$u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} + Puv = Q$$

ó

$$u \left(\frac{dv}{dx} + Pv \right) + v \frac{du}{dx} = Q \quad (2.26)$$

eligiendo la función v de tal manera que

$$\frac{dv}{dx} + Pv = 0$$

separando las variables en esta ecuación diferencial respecto a la función v , se encuentra que:

$$\frac{dv}{v} = -Pdx$$

integrando, se obtiene:

$$-\ln C_1 + \ln v = -\int Pdx$$

ó

$$v(x) = C_1 e^{-\int Pdx} \quad (2.27)$$

Puesto que es suficiente tener una solución cualquiera, distinta de cero, de la ecuación (2.27), tomando por la función $v(x)$: $v(x) = e^{-\int Pdx}$, donde $\int Pdx$ es una función primitiva cualquiera. Es evidente que $v(x) \neq 0$. Sustituyendo el valor encontrado de $v(x)$ en la ecuación (2.26), se obtiene (teniendo en cuenta que $\frac{dv}{dx} + Pv = 0$)

$$v(x) \frac{du}{dx} = Q(x)$$

o sea,

$$\frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v(x)}$$

de donde:

$$u(x) = \int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + C$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación (2.25) se obtiene en definitiva :

$$y = v(x) \left[\int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + C \right]$$

ó también se puede expresar como:

$$y = v(x) \int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + Cv(x)$$

$$y = e^{-\int P(x)dx} \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C e^{-\int P(x)dx} \quad (2.28)$$

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN

Ejemplo 1.- Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y = \text{sen}x$$

Solución.- Es claro que la ecuación diferencial dada tiene la forma (2.24); en este caso,

$P(x) = \frac{1}{x}$ y $Q(x) = \text{sen}x$, solo resta aplicar la relación (2.28) para obtener la integral general.

Aplicando dicha relación, se tiene:

$$y = e^{-\int \frac{dx}{x}} \int (\text{sen}x) e^{\int \frac{dx}{x}} dx + C e^{-\int \frac{dx}{x}}$$

simplificando las integrales (exponentes del exponencial), se encuentra que:

$$y = e^{-\ln x} \int (\text{sen}x) e^{\ln x} dx + C e^{-\ln x}$$

aplicando leyes de logaritmos:

$$y = e^{\frac{\ln^{\frac{1}{x}}}{x}} \int (\operatorname{sen} x) e^{\ln x} dx + C e^{\frac{\ln^{\frac{1}{x}}}{x}}$$

$$y = \frac{1}{x} \int x \operatorname{sen} x dx + \frac{C}{x}$$

calculando la integral, se obtiene finalmente la integral general de la ecuación diferencial dada.

$$y = \frac{1}{x} (\operatorname{sen} x - x \cos x) + \frac{C}{x}$$

En ocasiones la ecuación diferencial dada en un problema viene en forma de diferenciales o simplemente resuelta con respecto de la derivada; en esos casos basta con reacomodar los términos para llevar la ecuación diferencial a la forma (2.24) e identificando plenamente las funciones $P(x)$ y $Q(x)$.

Existen casos en los que la ecuación diferencial es lineal con respecto de x y no con respecto de y como en el ejemplo 1, e incluso la fórmula (2.28) parece estar atada a el hecho de que sólo funciona para funciones en las que la variable dependiente es y y la variable independiente es x ; esto es relativo, puesto que una simple sustitución de las variables x e y , puede transformar tanto la forma (2.24) como la expresión (2.28) con las nuevas variables. El siguiente ejemplo muestra este caso.

Ejemplo 2.- Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$dx + (3x - \cos y) dy = 0$$

Solución.- Supóngase que la variable dependiente es y , luego entonces es necesario llevar la ecuación diferencial a la forma (2.24), donde resulta que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y - 3x}$$

como se puede observar, es imposible llevar la ecuación diferencial a la forma (2.24). Ahora si se considera a x como la variable dependiente se obtiene:

$$\frac{dx}{dy} + 3x = \cos y$$

En este caso la forma (2.24) puede transformarse simplemente cambiando las variables, resultando:

$$\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y) \quad \text{y por ende} \quad x = e^{-\int P(y)dy} \int Q(y)e^{\int P(y)dy} dy + Ce^{-\int P(y)dy}$$

en este caso, $P(y) = 3$ y $Q(y) = \cos y$; por lo tanto la integral general viene dada por:

$$x = e^{-\int 3dy} \int (\cos y)e^{\int 3dy} dy + Ce^{-\int 3dy}$$

simplificando las integrales (exponentes del exponencial), se encuentra que:

$$x = e^{-3y} \int e^{3y} \cos y dy + Ce^{-3y}$$

calculando la integral, resulta:

$$x = e^{-3y} \left[\frac{1}{10} e^{3y} (\operatorname{sen} y - 3 \cos y) \right] + Ce^{-3y}$$

simplificando se finalmente la integral general de la ecuación diferencial dada.

$$x = \frac{1}{10} (\operatorname{sen} y - 3 \cos y) + Ce^{-3y}$$

Ejemplo 3.- Resuelva la siguiente ecuación diferencial, además, utilice un software de computadora para graficar algunas curvas integrales y analícese el comportamiento de dichas curvas solución.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{x^2 + 1} y = x \quad \text{sujeta a: } y(0) = \frac{1}{3}$$

Solución.- Es obvio que la ecuación diferencial cumple con la forma (2.24), en este caso $P(x) = \frac{x}{x^2+1}$ y $Q(x) = x$

Aplicando la relación (2.28) se obtiene:

$$y = e^{-\int \frac{x}{x^2+1} dx} \int x e^{\int \frac{x}{x^2+1} dx} dx + Ce^{-\int \frac{x}{x^2+1} dx}$$

simplificando las integrales (exponentes del exponencial), se encuentra que:

$$y = e^{-\frac{1}{2} \ln(x^2+1)} \int x e^{\frac{1}{2} \ln(x^2+1)} dx + Ce^{-\frac{1}{2} \ln(x^2+1)}$$

aplicando leyes de logaritmos:

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \int x\sqrt{x^2 + 1} dx + \frac{C}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

calculando la integral, resulta:

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \left[\frac{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}{3} \right] + \frac{C}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

simplificando los radicales se tiene finalmente la integral general de la ecuación diferencial

$$y = \frac{x^2 + 1}{3} + \frac{C}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Para encontrar la integral particular, se aplican las condiciones iniciales $y(0) = \frac{1}{3}$, resultando:

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{C}{1} \quad \text{de donde se deduce que } C = 0$$

Sustituyendo el valor de la constante en la integral general se obtiene, la integral particular de la ecuación diferencial dada

$$y = \frac{x^2 + 1}{3}$$

Como se puede observar en la Fig. 5, la derivada se anula para cualquier pareja de la forma $(0, y)$; pero también se anula para ciertos valores de x en donde $y > 0$ (obsérvense los mínimos de las curvas que se encuentran por encima del eje x). Además la derivada o velocidad de cambio de la variable dependiente y se hace infinita conforme $x \rightarrow \infty$.

La curva remarcada en negro representa la integral particular encontrada. Esta curva integral pasa por el punto $(0, \frac{1}{3})$. En la construcción de la gráfica se consideró un intervalo para x de $(-5, 5)$. Pero si se considera un intervalo más amplio se puede observar que las curvas integrales que pasan por puntos cuyos valores de x son grandes, se ven casi verticales. Lo cual confirma la tendencia hacia el infinito por parte de la derivada.

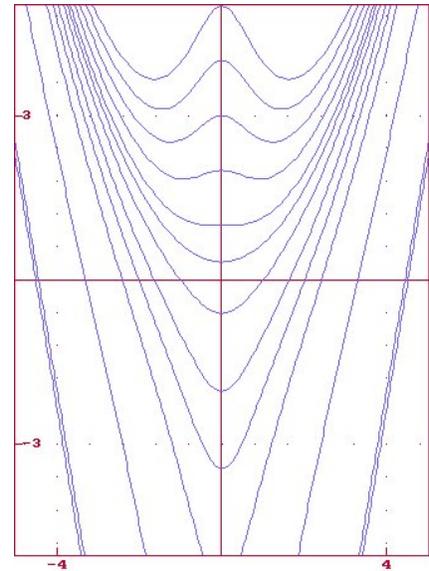


Fig. 5 Gráficas de algunas curvas integrales de la ecuación diferencial dada, mediante *Graphic Calc*®

Otra forma de encontrar gráficamente las curvas integrales es a través de las curvas de nivel para funciones de dos variables; para ello, es necesario que de la expresión:

$$y = \frac{x^2 + 1}{3} + \frac{C}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

se despeje C , llevándola a la forma

$$f(x, y) = \frac{1}{3} \sqrt{x^2 + 1} (3y - x^2 - 1)$$

Si $f(x, y) = C$, se encontrarán las curvas de nivel que representan las curvas integrales de la ecuación diferencial dada. Estas curvas se pueden observar en la Fig. 6. Tales curvas de nivel fueron construidas mediante el graficador del software *Graphic Calc*[®], en el apartado B “*Function of Two Variables*”

Es evidente la semejanza de ambas gráficas y este método para encontrar las curvas integrales gráficamente representa un camino más fácil para observar el comportamiento de la variable dependiente y

Claro está que se ha estudiado el comportamiento para funciones abstractas, es decir, en este caso y en los anteriores no se ha vinculado las variables x e y con magnitudes físicas. Cuando exista tal vinculación, se comprenderá aún más la enorme utilidad práctica que representa el análisis cualitativo de las ecuación diferenciales.

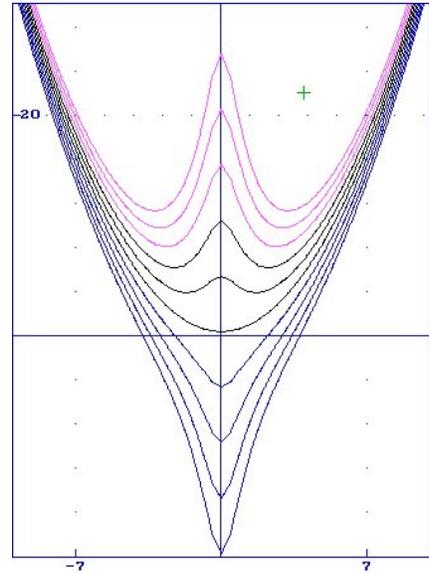


Fig. 6 Gráficas de algunas curvas de nivel para la función $f(x,y)$ deducida en el problema.



Ejercicios Suplementarios

Sección 2.6 Ejercicios 2.5

En los siguientes ejercicios resolver la ecuación diferencial indicada y utilice en cada caso una computadora o una calculadora graficadora para trazar algunas curvas integrales.

1.- $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x+1} = \frac{1}{x-1}$

2.- $\frac{dy}{dx} + (\cot x)y = \cos x$

3.- $\frac{dy}{dx} = x - \frac{y}{x \ln x}$

4.- $\frac{dx}{dy} + 4x = y^2$

5.- $\frac{dy}{dx} + \frac{x}{x^2 + 1} y = 3$

6.- $\frac{dy}{dx} + y \tan x = \cos x$

7.- $\frac{dy}{dx} + \frac{x}{4-x^2} y = 4$

10.- $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{2x \ln x + x - y}$

11.- $q' - q \tan t = \sec t$

12.- $\frac{dv}{dt} + 2v = t^2 + 3t$

13.- $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y \sin x + 2 \sin 2x}$

14.- $\frac{dB}{dx} = 2xB = 2xe^{x^2}$

15.- $(xy - b^2)dx + (b^2 - x^2)dy = 0$

16.- $\frac{dv}{dt} = 9.81 - v, v(0) = 0$

$$8.- \frac{dx}{dy} + \frac{x \sec^2 y}{\tan y} = \frac{1}{\sec y}$$

$$9.- y' + 4y = x^2$$

$$17.- \frac{dT}{dt} = k(T - 70), T(0) = 120$$

$$18.- q' + q \cos t = \sin t \cos t, q(0) = 1$$

Sección

2.7

“Se requiere una mente muy inusual para acometer el análisis de lo obvio”
 Withehead, Alfred North



ECUACIONES DIFERENCIAL DE BERNOULLI

DEFINICIONES BÁSICAS

Una ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \quad (2.29)$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones continuas de x (o constantes), y , $n \neq 0$, $n \neq 1$ (en el caso contrario resulta una ecuación lineal).

La ecuación (2.29), es conocida como la **ecuación de Bernoulli**; ésta, se reduce a una ecuación lineal mediante la siguiente transformación:

Dividiendo todos los términos de la ecuación por y^n , se obtiene:

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + P(x)y^{-n+1} = Q(x) \quad (2.30)$$

Efectuemos ahora la sustitución:

$$z = y^{-n+1} \quad (2.31)$$

Entonces,

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx}$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación (2.30), se obtiene una ecuación lineal:

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x) \quad (2.32)$$

Al encontrar su integral general, y sustituyendo z por su expresión y^{-n+1} , se obtiene la **integral general de la ecuación de Bernoulli**.

La ecuación (2.29) se deduce del problema sobre el movimiento de un cuerpo, si la resistencia F del medio depende de la velocidad: $F = \lambda_1 v + \lambda_2 v^n$. La ecuación del movimiento será $m \frac{dv}{dt} = -\lambda_1 v - \lambda_2 v^n$ ó también se puede expresar como:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\lambda_1}{m} v = -\frac{\lambda_2}{m} v^n$$

Además de los trabajos de **Euler**, históricamente, la *ecuación de Bernoulli*, que originalmente tenía la forma

$$ady = y^p dx + by^n q dx$$

fue transformada mediante la sustitución $y^{1-n} = v$ primeramente por **Leibniz** en el año 1693 y después por **Johann Bernoulli** en el año 1697, para reducirla a una ecuación diferencial lineal de primer orden. En esta resolución Bernoulli anticipó el método de variación de las constantes introducido por **Lagrange** en el año 1775.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE BERNOULLI

Ejemplo 1.- Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2 y^2 \quad \text{sujeta a. } y(1) = 1$$

Solución.- En este caso $P(x) = \frac{1}{x}$, $Q(x) = x^2$ y $n = 2$. Aplicando la relación (2.31), el cambio de variable es: $z = y^{-1}$. Por otro lado, aplicando la relación (2.32), la ecuación diferencial se convierte en:

$$\frac{dz}{dx} + (1-2)\frac{z}{x} = (1-2)x^2$$

en forma simplificada:

$$\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = -x^2$$

que es una ecuación diferencial lineal, la cual puede ser resuelta con la fórmula (2.28) vista en la sección anterior ; aplicando dicha fórmula directamente (ajustada a la nueva variable) se tiene:

$$z = e^{-\int \frac{dx}{x}} \int -x^2 e^{\int \frac{dx}{x}} dx + ce^{-\int \frac{dx}{x}}$$

simplificando las integrales (exponentes de los exponenciales), se obtiene:

$$z = -e^{\ln x} \int x^2 e^{-\ln x} dx + ce^{\ln x}$$

aplicando leyes de logaritmos y considerando que e^x y $\ln x$ son funciones inversas se tiene:

$$z = -x \int x dx + cx$$

calculando la integral restante:

$$z = cx - \frac{x^3}{2}$$

reemplazando la variable z se tiene finalmente la integral general:

$$\frac{1}{y} = cx - \frac{x^3}{2}$$

Ahora, aplicando las condiciones de Cauchy $y(1) = 1$, se tiene:

$$\frac{1}{1} = c - \frac{1}{2}$$

donde $c = \frac{3}{2}$. De este modo la integral particular de la ecuación diferencial dada es:

$$\frac{1}{y} = \frac{3}{2}x - \frac{x^3}{2}$$

Ejemplo 2.- Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$(y \cos x - y^5 \operatorname{sen} x) dx + dy = 0$$

Solución.- Reacomodando los términos de esta ecuación, se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} + (\cos x)y = (\operatorname{sen} x)y^5$$

En este caso $P(x) = \cos x$, $Q(x) = \operatorname{sen} x$ y $n = 5$. Aplicando la relación (2.31), el cambio de variable es: $z = y^{-4}$. Por otro lado, aplicando la relación (2.32), la ecuación diferencial se convierte en:

$$\frac{dz}{dx} + (1-5)z \cos x = (1-5)\operatorname{sen} x$$

en forma simplificada:

$$\frac{dz}{dx} - (4 \cos x)z = -4 \operatorname{sen} x$$

que es una ecuación diferencial lineal, la cual puede ser resuelta con la fórmula (2.28) vista en el sección anterior (véase la Pág. 53); aplicando dicha fórmula directamente (ajustada a la nueva variable) se tiene:

$$z = e^{-\int -4 \cos x dx} \int (-4 \operatorname{sen} x) e^{\int -4 \cos x dx} dx + ce^{-\int -4 \cos x dx}$$

simplificando las integrales (exponentes de los exponenciales), se obtiene:

$$z = -4e^{4 \operatorname{sen} x} \int e^{-4 \operatorname{sen} x} \operatorname{sen} x dx + ce^{4 \operatorname{sen} x}$$

como esta integral no se puede resolver por los métodos y técnicas de integración normales, tal integral tiene que ser expresada en forma indicada y reemplazando la variable z se tiene:

$$\frac{1}{y^4} = -4e^{4 \operatorname{sen} x} \int_0^x e^{-4 \operatorname{sen} t} \operatorname{sen} t dt + ce^{4 \operatorname{sen} x}$$

que representa la integral general de la ecuación diferencial dada

Ejemplo 3.- Utilice un software de computadora para graficar algunas curvas integrales y analícese el comportamiento de dichas curvas solución

$$(y \cos x - y^5 \operatorname{sen} x) dx + dy = 0$$

Solución.- Utilizando el graficador (D. *Differential Equations*) del software *Graphic Calc*[®] se lleva la ecuación diferencial dada a la forma siguiente:

$$\frac{dy}{dx} = (\operatorname{sen} x)y^5 - (\cos x)y$$

Este es un caso en extremo complejo, ya que no es posible determinar por métodos comúnmente usados los valores x e y para los cuales la derivada es nula y tampoco es posible graficar fácilmente la integral general

$$\frac{1}{y^4} = -4e^{4 \operatorname{sen} x} \int_0^x e^{-4 \operatorname{sen} t} \operatorname{sen} t dt + ce^{4 \operatorname{sen} x}$$

Pero gráficamente se pueden estimar tales valores si se toma en cuenta el significado geométrico de tal derivada. Como puede observarse en la Fig. 7, existen puntos en los que la recta tangente es horizontal, en dichos puntos la derivada es nula. Analíticamente se puede interpretar como sigue:

Para que la derivada se anule, el binomio $(\operatorname{sen} x)y^5 - (\cos x)y$ se anula para ciertas parejas de valores (x,y) ; esto debe ser así ya que, las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ no se anulan simultáneamente para un valor de x .

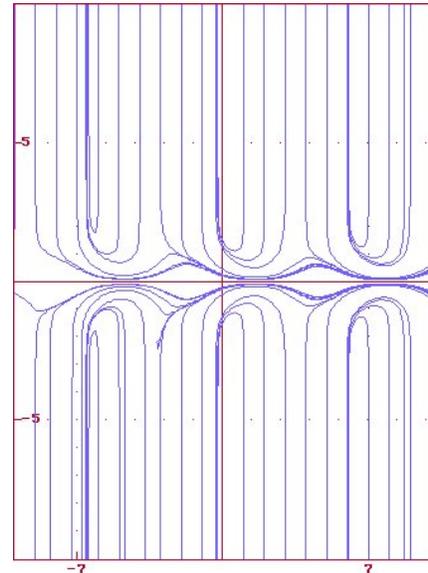


Fig. 7 Gráficas de algunas curvas integrales de la ecuación diferencial dada, mediante *Graphic Calc*[®]

Por otro lado, también existen puntos en los que la derivada es muy grande, en esos puntos la recta tangente tiende a ser paralela al eje y , para tales puntos la variable y crece rápidamente.

Es interesante observar la simetría que existe en las curvas integrales con respecto del eje x ; esto se debe a que si se despeja y de la integral general se obtiene una expresión con radicales de índice par, lo cual produce dos ramificaciones, una positiva y una negativa. Semejante expresión tendría la forma:

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{ce^{4senx} - 4e^{4senx} \int_0^x e^{-4sent} sent dt}}$$

Si existiera la necesidad de encontrar los valores para los cuales la derivada se anula o es muy grande, se utiliza la herramienta de **zoom** del graficador del software, para determinar en forma aproximada dichos valores.



Ejercicios Suplementarios

Sección 2.7 Ejercicios 2.6

En los siguientes ejercicios resolver la ecuación diferencial indicada y utilice en cada caso una computadora o una calculadora graficadora para trazar algunas curvas integrales.

1.- $y' + \frac{y}{x} = x^2 y^3$	7.- $4y' + y = (3 - 5x)y^2$
2.- $y' + y \tan x = y^3 \operatorname{sen} x$	8.- $y' + \frac{y}{x-1} = (x+1)^2 y^3$
3.- $y' + \frac{x}{x^2-1} y = x^3 y^2$	9.- $yx' - 2x = \frac{y^3}{x^2}$
4.- $y' + 4y = y^3 (\operatorname{sen} x - \operatorname{cos} x)$	10.- $(xy + y^2 x^3) \frac{dx}{dy} = 1$
5.- $y' + \frac{y}{\sqrt{x-1}} = y^2 \sqrt{x+1}$	11.- $y^2 dx + 2xy^3 dy = x^2 (1 + 2y^2) dy$
6.- $dy + (\sec^2 x) y dx = y^3 \tan x dx$	



"El científico encuentra su recompensa en lo que Henri Poincare llama el placer de la comprensión, y no en las posibilidades de aplicación que cualquier descubrimiento pueda conllevar"

Einstein, Albert

Sección

2.8



APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

INTRODUCCIÓN

Existe un gran número de aplicaciones de las ecuaciones diferenciales en diversas áreas del conocimiento, ya sea en las ciencias exactas, e incluso en las ciencias sociales, en donde lo *determinístico* pierde fuerza para dar paso a lo *probabilístico*; pero a pesar de ese aspecto, las ecuaciones diferenciales en su más reciente etapa de evolución, han tratado de resolver problemas de este tipo y con mucho éxito. El análisis cualitativo de las ecuaciones diferenciales ha sido desde la mitad del siglo XIX hasta la fecha, una poderosa herramienta para tratar de comprender como se comportan las variables en un proceso, ya sea *determinístico* o *estocástico*.

En la presente sección, se mostrarán algunas de las más comunes aplicaciones que se imparten en el desarrollo de los primeros semestres de ingeniería, en cuanto a matemática aplicada se refiere. Es claro que la mayoría de estas aplicaciones son modelos de baja resolución (más adelante se explicará con detalle este término) y solo representarán una aproximación ó idealización de un cierto proceso ya sea de la naturaleza física o humana.

Como fenómenos físicos se deben entender los procesos que ocurren en la naturaleza física que rodea al ser humano, como los huracanes, las mareas, la caída de los cuerpos, la fotosíntesis, el enfriamiento de los cuerpos, la difusividad, etc. Estos fenómenos pueden existir sin la intervención humana; por ejemplo la tormenta en espiral de la mancha roja del planeta Júpiter, o los feroces vientos de un valle en el planeta Marte. Por otro lado como fenómeno humano se debe entender como el proceso que ocurre con la intervención directa o indirecta del ser humano y la naturaleza física; es difícil concebir un fenómeno humano desligado totalmente de la naturaleza física; hasta los proceso neuronales que ocurren en el cerebro humano son afectados por el entorno físico. Otro ejemplo es el crecimiento demográfico que definitivamente esta ligado con el entorno físico, como el clima, la alimentación, etc. En adelante se considerará como fenómenos de la naturaleza, un fenómeno físico, un fenómeno humano o una combinación de ambos.

Ya en el apartado sobre los *modelos matemáticos* se trató la importancia que han tenido éstos a través de la historia del hombre. El estudio ahora se centra en la modelación de ciertos fenómenos que ocurren en la naturaleza física y en el fenómeno humano.

¿CÓMO SE MODELA UN FENÓMENO DE LA NATURALEZA?

La descripción matemática de un sistema o fenómeno, llamado modelo matemático, se forma con ciertos objetivos en mente; por ejemplo, tratar de comprender cómo varía la temperatura de una aleta de enfriamiento, intentar fechar fósiles analizando la desintegración de una sustancia radiactiva, ya sea en el fósil o en el estrato donde se encontraba.

La formulación de un modelo matemático de un fenómeno se inicia :

- a) *Mediante la identificación de las variables causantes de las variaciones que sufre el sistema. Podremos elegir no incorporar todas las variables en el modelo desde el comienzo. En ese paso especificamos **el nivel de resolución** del modelo.*

Cabe señalar que si se elige erróneamente a las variables que afectan significativamente el sistema, se logra un modelo de muy baja resolución y no serviría de nada obtenerlo.

- b) *Se establece un conjunto de hipótesis razonables acerca del sistema que se trata de describir. Esas hipótesis también incluyen todas las leyes empíricas aplicables al sistema.*

Y la obtención del modelo matemático final depende de cualquiera de las siguientes circunstancias

- c) Si la hipótesis del modelo se establece mediante ecuaciones matemáticas, éstas se resuelven cuantitativa o cualitativamente, junto con las condiciones necesarias para tal efecto. Por ejemplo una hipótesis puede ser una **ecuación diferencial** o un **sistema de ecuaciones diferenciales** y las condiciones necesarias serían las **condiciones iniciales** o **de Cauchy**
- d) Si la hipótesis del modelo es un **algoritmo numérico**, éste se aplica junto con las condiciones necesarias para la obtención del modelo matemático, tal es el caso de los fenómenos de propagación de ondas.

La presente obra, se circunscribe únicamente a la parte c), es decir, las hipótesis se establecen como ecuaciones diferenciales hasta el orden n inclusive o sistemas de ecuaciones diferenciales .

El siguiente esquema (Fig. 8) muestra la formulación de un modelo considerando como hipótesis una ecuación diferencial de primer orden:

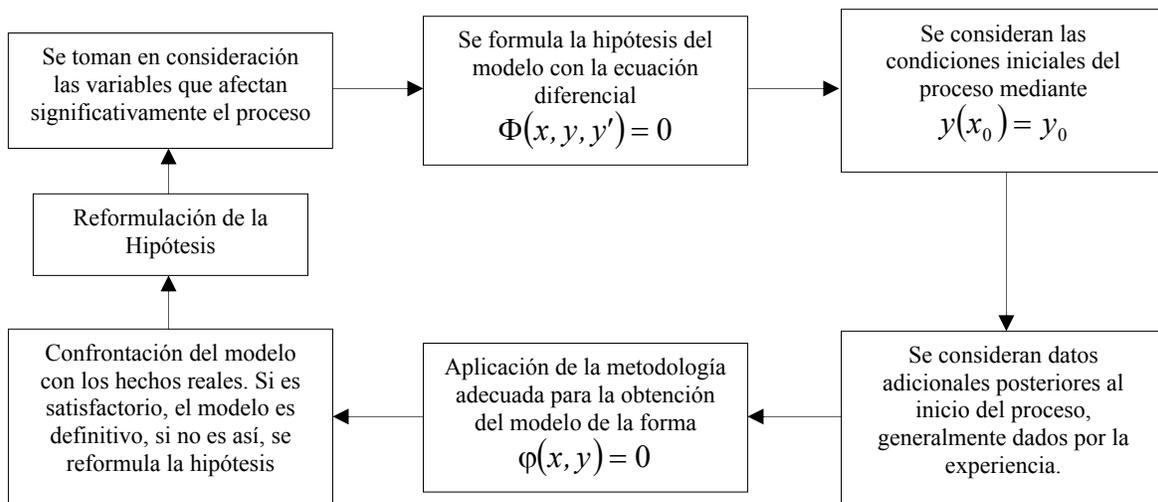


Fig. 8

Para algunos fines quizá baste contar con modelos de baja resolución; por ejemplo, en los cursos básicos de física el lector habrá advertido que al modelar el movimiento de un cuerpo que cae sobre la superficie de la Tierra, se hace caso omiso de la resistencia del aire y algunas otras influencias colaterales como vientos cruzados etc. Pero si usted es un científico cuyo objeto es predecir con exactitud la trayectoria de vuelo de un proyectil de largo alcance, deberá tener en cuenta la resistencia del aire, esos vientos cruzados además de la curvatura de la Tierra, etc.

En esta sección se mostrarán las siguientes aplicaciones en diversas áreas del saber:

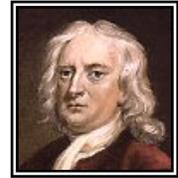
- **Enfriamiento de los cuerpos** (*Ley de enfriamiento de Newton*)
- **Concentración en tanques** (*Principio de la conservación de la materia*)
- **Vaciado de un tanque** (*Ley de Torricelli*)
- **Caída de los cuerpos** (*Segunda Ley de Newton*)
- **Crecimiento demográfico** (*Modelo de Malthus*)
- **Circuitos eléctricos** (*Segunda Ley de Kirchoff*)

ENFRIAMIENTO DE LOS CUERPOS



Según la *Ley empírica del enfriamiento de Newton* establece que:

“ *La velocidad o razón de cambio de la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia de la temperatura de dicho cuerpo y la temperatura del medio ambiente que lo rodea*”



I. Newton

matemáticamente esto puede representarse de la siguiente forma:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_0) \quad (2.33)$$

donde T es la temperatura del cuerpo, T_0 es la temperatura del medio que rodea al cuerpo, y k es una constante de proporcionalidad

Ejemplo 1.- Un cuerpo se saca de un reservorio donde la temperatura es de 37°C y se lleva al exterior donde la temperatura del ambiente es de 15°C . La temperatura de cuerpo es medida instantáneamente con un termopar y después de $\frac{1}{2}$ minuto la temperatura del cuerpo es de 25°C . ¿Cuál es la temperatura del cuerpo después de 1 minuto?; ¿Cuánto tiempo transcurrirá aproximadamente para que la lectura del termopar marque 15°C ?. Elabore una gráfica de este fenómeno.

Solución.- Si la temperatura del ambiente es de 15°C , entonces $T_0 = 15$, luego, la hipótesis del modelo es:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 15)$$

esta es una *ecuación diferencial de primer orden y de variables separables*.

Separando las variables e integrando se tiene:

$$\int \frac{dT}{T-15} = \int k dt$$

calculando las integrales se obtiene:

$$\ln(T-15) = kt + C_1$$

aplicando leyes de logaritmos:

$$T-15 = e^{kt+C_1}$$

si $e^{C_1} = C$ y despejando T se obtiene:

$$T(t) = 15 + Ce^{kt}$$

la cual representa el modelo general para el fenómeno citado, que determina la temperatura para cualquier tiempo t . Pero este modelo está incompleto; se tienen que calcular los parámetros C y k .

Para la determinación de C son necesarios los siguientes datos: $T(0) = 37$, que es la temperatura inicial del cuerpo antes de ser sacado del reservorio. Aplicando dichos datos al modelo general deducido se tiene:

$$T(0) = 37 = 15 + Ce^{k(0)}$$

de donde se deduce que $C = 22$. Sustituyendo este valor en el modelo general, se tiene:

$$T(t) = 15 + 22e^{kt}$$

Pero todavía falta determinar el valor de k , para obtener el modelo matemático definitivo. Para calcular el valor de k se necesitan datos adicionales. Según el problema, éstos son: $T(\frac{1}{2}) = 25$, lo cual significa que después de medio minuto la temperatura del cuerpo es de 25 °C. Aplicando estas condiciones en la última relación se tiene:

$$T(\frac{1}{2}) = 25 = 15 + 22e^{\frac{1}{2}k}$$

de donde se deduce que:

$$e^{\frac{1}{2}k} = \frac{10}{22}$$

despejando k se obtiene:

$$k = 2 \ln \frac{10}{22}$$

lo cual arroja un valor aproximado de $k = -1.577$. Sustituyendo este valor en la última expresión para T, se tiene:

$$T(t) = 15 + 22e^{-1.577t}$$

la cual representa el modelo matemático para la variación de la temperatura del cuerpo en cualquier momento t . Conociendo el modelo definitivo para este caso en particular, es posible ahora contestar las preguntas planteadas en el problema.

¿Cuál es la temperatura del cuerpo después de 1 minuto?

Si se sustituye $t = 1$ en el modelo definitivo, se tiene: $T(1) = 15 + 22e^{-1.577(1)}$

simplificando se tiene que: $T(1) = 19.54$, lo cual significa que pasado un minuto la temperatura del cuerpo es de $19.54\text{ }^{\circ}\text{C}$

t (min)	$T(t)$ ($^{\circ}\text{C}$)
0	37.0
0.5	24.9996
1.0	19.5451
1.5	17.0659
2.0	15.939
2.5	15.4268
3.0	15.194
3.5	15.0882
4.0	15.0401
4.5	15.0182
5.0	15.0083
5.5	15.0038
6.0	15.0017
6.5	15.0008
7.0	15.0004
7.5	15.0002
8.0	15.0001
8.5	15.0
9.0	15.0
9.5	15.0
10.0	15.0

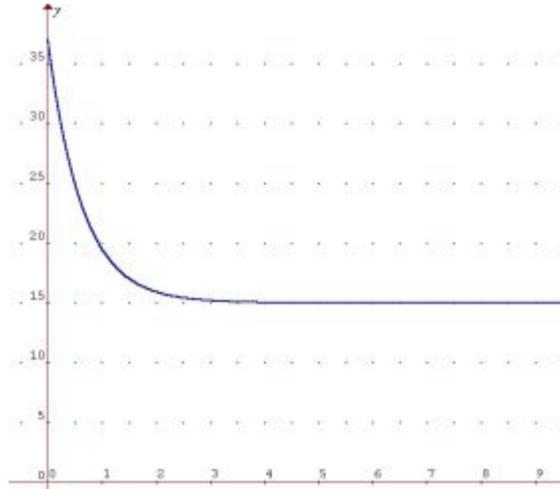


Fig. 9

Por otro lado ¿Cuánto tiempo transcurrirá aproximadamente para que la lectura del termopar marque $15\text{ }^{\circ}\text{C}$? Para contestar a la pregunta supóngase que $T(t) = 15$. Pero solo es posible calcular un tiempo aproximado a través de la gráfica.

La figura 9 muestra la gráfica de la variación de la temperatura en función del tiempo y una tabla de valores de T , en donde es posible visualizar el comportamiento

asintótico de $T(t)$, es decir la temperatura del cuerpo tiende a $15\text{ }^{\circ}\text{C}$ conforme aumenta el tiempo. Como puede observarse en la gráfica, aproximadamente para $t = 3$, la temperatura alcanza un valor muy próximo a 15 . esto es, pasados 3 minutos la temperatura del cuerpo habrá alcanzado un valor muy próximo a $15\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Ejemplo 2.- Unas pinzas metálicas que inicialmente están a $23\text{ }^{\circ}\text{C}$, se dejan caer en una cubeta con agua hirviendo(Fig. 10). Si se sabe que su temperatura aumentó $3\text{ }^{\circ}\text{C}$ en un segundo. ¿Cuánto tiempo tardarán las pinzas en alcanzar una temperatura de $80\text{ }^{\circ}\text{C}$?. ¿Cuánto tiempo tardarán en llegar a $90\text{ }^{\circ}\text{C}$?

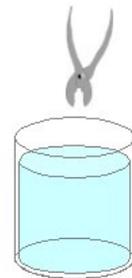


Fig. 10

Solución.- Si se considera que la temperatura del agua hirviendo es de $100\text{ }^{\circ}\text{C}$, entonces $T_0 = 100$, luego, la hipótesis del modelo es:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 100)$$

esta es una *ecuación diferencial de primer orden y de variables separables* y es además, similar al obtenido en el problema anterior. El procedimiento para solucionar esta ecuación es obviamente parecido al aplicado en el problema 1.

Resolviendo la ecuación diferencial anterior se obtiene:

$$T(t) = 100 + Ce^{kt}$$

la cual representa el modelo general para el fenómeno citado, que determina la temperatura para cualquier tiempo t . Pero este modelo está incompleto; se tienen que calcular los parámetros C y k .

Para la determinación de C son necesarios los siguientes datos: Si se sabe que las pinzas están inicialmente a 23°C , entonces, $T(0) = 23$. Aplicando dichos datos al modelo general deducido se tiene:

$$T(0) = 23 = 100 + Ce^{k(0)}$$

de donde se deduce que $C = -77$. Sustituyendo este valor en el modelo general, se tiene:

$$T(t) = 100 - 77e^{kt}$$

Para calcular el valor de k se necesitan datos adicionales. Acorde con el problema, si se sabe que la temperatura de las pinzas aumentó 3°C en un segundo, entonces $T(1) = 26$. Aplicando estas condiciones en la última relación se tiene:

$$T(1) = 26 = 100 - 77e^{k(1)}$$

de donde se deduce que:

$$e^k = \frac{-74}{-77}$$

despejando k se obtiene:

$$k = \ln \frac{74}{77}$$

lo cual arroja un valor aproximado de $k = -0.0397$. Sustituyendo este valor en la última expresión para la temperatura T , se tiene:

$$T(t) = 100 - 77e^{-0.0397t}$$

la cual representa el modelo matemático para la variación de la temperatura de las pinzas en cualquier momento t . Conociendo el modelo definitivo para este caso en particular, es posible ahora contestar las preguntas planteadas en el problema.

¿Cuánto tiempo tardarán las pinzas en alcanzar una temperatura de 80°C ?, es decir ¿Cuál es el tiempo t para el cual la temperatura T sea igual a 80°C ?. Matemáticamente esto se representa de la siguiente manera:

$$80 = 100 - 77e^{-0.0397t}$$

ahora se despeja el valor de t , el cual está dado por:

$$t = -\frac{1}{0.0397} \ln \frac{20}{77}$$

simplificando los cálculos se tiene $t = 33.9$, es decir que aproximadamente a los 34 segundos las pinzas habrán alcanzado la temperatura de 80°C

Por otro lado, ¿Cuánto tiempo tardarán en llegar a 90 °C? Matemáticamente esto se representa de la siguiente manera:

$$90 = 100 - 77e^{-0.0397t}$$

ahora se despeja el valor de t , el cual está dado por:

$$t = -\frac{1}{0.0397} \ln \frac{10}{77}$$

simplificando los cálculos se tiene $t = 51.41$, es decir que aproximadamente a los 51.4 segundos las pinzas habrán alcanzado la temperatura de 90 °C

La figura 11 muestra la gráfica de la variación de la temperatura en función del tiempo y una tabla de valores de T , en donde es posible visualizar el comportamiento asintótico creciente de $T(t)$, es decir la temperatura del cuerpo tiende a los 100 °C conforme aumenta el tiempo. También puede observarse en la tabla de valores, que pasados los 110 segundos las temperaturas son muy semejantes entre sí, esto es debido al comportamiento asintótico del modelo matemático que representa al fenómeno.

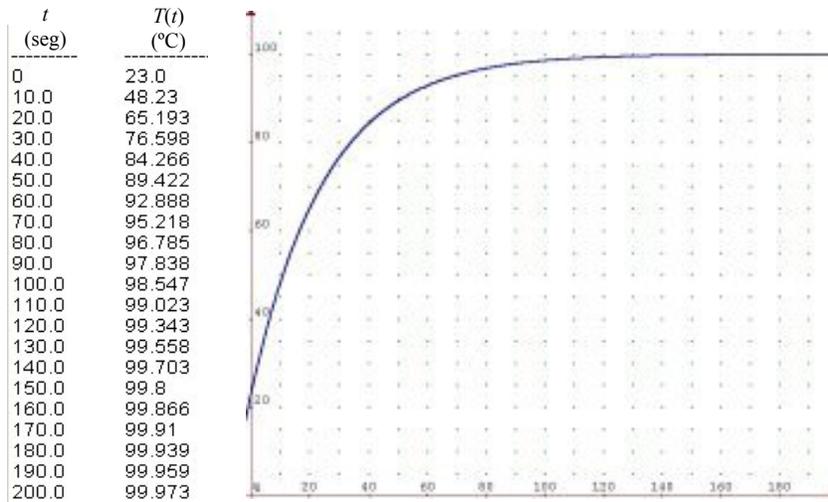
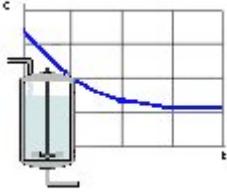


Fig. 11

Es claro que la hipótesis matemática (2.33), sirve como base tanto para fenómenos de enfriamiento como de calentamiento, como lo hace constar los dos ejemplos anteriores, claro está que los modelos encontrados son ideales, puesto que no considera la variación simultánea de la temperatura del medio ambiente que en la realidad física, son variables y no constantes como se supuso desde el principio. Empero si se toma ésta como constante, los modelos se pueden considerar como aceptables.

CONCENTRACIÓN EN TANQUES AGITADOS



Cuando dos soluciones con diferentes concentraciones se ponen en contacto, sucede el proceso de difusión o transferencia de masa y llega un momento en el que la mezcla al final, tiende a una concentración uniforme. La difusión puede ser *molecular*, es decir sin que intervengan agentes externos y la *difusión por remolino* o *difusión turbulenta* en donde existe la



M. Lomonosov



A. Lavoisier

intervención de un dispositivo externo tal como un agitador, por mencionar un ejemplo. En este apartado se tratará el fenómeno del mezclado de soluciones salinas o salmueras de diferente concentraciones, en tanques agitados. Pero antes se deben mostrar ciertos conceptos teóricos preliminares. El *flujo volumétrico* Q de una corriente de fluido que viaja a través de una tubería está dado por $Q = \frac{V}{t}$ donde V es el volumen de fluido que fluye en un tiempo t . La *concentración* C de una solución es la relación entre la masa del soluto y el volumen del disolvente, esto es $C = \frac{M}{V}$, donde en este caso M es la masa del soluto y V el volumen del disolvente. Por otro lado, el *flujo másico* o *flujo masivo* \dot{m} es la relación de la masa que fluye en un intervalo de tiempo determinado, esto es $\dot{m} = \frac{M}{t}$, donde M es la masa del fluido que fluye en el tiempo t . Es claro que existe una relación entre el *flujo volumétrico* y la *concentración* de una solución. Esta relación está dada por el *flujo másico*, esto es:

$$\dot{m} = \left(\frac{V}{t}\right)\left(\frac{M}{V}\right) = QC \quad (2.34)$$

Supóngase que se tiene un tanque agitado (Fig. 12) con un volumen de agua V_0 en donde se han disuelto M_0 unidades de masa de sal. Supóngase también que al tanque, entra una solución de una salmuera de concentración C_1 y flujo volumétrico Q_1 y sale la solución mezclada con una concentración C_2 y con un flujo volumétrico Q_2 . Si se aplica el *principio de la conservación de la materia*¹, es decir si se hace un balance de materia al sistema, se puede determinar la velocidad con la que varía la cantidad de sal $M(t)$ en cualquier momento t , en términos de los flujos másicos de entrada y de salida. El balance matemáticamente puede ser expresado de la siguiente forma:

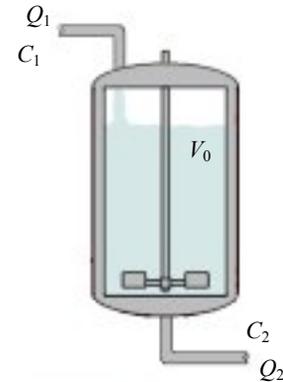


Fig. 12

$$\frac{dM}{dt} = \left(\begin{array}{c} \text{flujo masico de} \\ \text{entrada} \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c} \text{flujo masico de} \\ \text{salida} \end{array}\right) = \dot{m}_1 - \dot{m}_2 \quad (2.35)$$

¹ Establecida por **Mikhail Vasilievich Lomonósov** (1711-1765) en 1748 y posteriormente por **Antonie Laurent Lavoisier** (1743-1794) en 1782

y en términos de las concentraciones y de los flujos volumétricos:

$$\frac{dM}{dt} = C_1 Q_1 - C_2 Q_2 \quad (2.36)$$

donde C_2 es función de M .

Esta dependencia está dada por $C_2 = \frac{M(t)}{V_0}$, de tal manera que la ecuación (2.35) queda finalmente como:

$$\frac{dM}{dt} = C_1 Q_1 - \frac{M}{V_0} Q_2 \quad (2.37)$$

La ecuación (2.37) que es una *ecuación diferencial lineal de primer orden*, representa la hipótesis del fenómeno de la mezcla de dos soluciones en un tanque agitado, que al resolverla, se obtiene el modelo que determina la cantidad de sal M , que hay en el tanque en cualquier momento t . Esta ecuación diferencial puede estar sujeta a la condición inicial dada por: $M(0) = M_0$

Es interesante comprender que si $Q_1 = Q_2$, entonces, el nivel del líquido en el tanque permanece invariable, pero si $Q_1 > Q_2$, entonces el nivel del líquido aumenta; por otro lado si $Q_1 < Q_2$, entonces el nivel del líquido en el tanque disminuye.

Ejemplo 3.- En un tanque que contiene 200 litros de agua, se disuelven 100 gramos de sal y dicho tanque es agitado continuamente (Fig. 13). Al mismo tiempo, se introducen en el tanque 5 lts/min de una solución cuya concentración es de 2 gr/lto; del tanque se bombea la solución mezclada al mismo flujo volumétrico. Encuentre una expresión matemática que determine la cantidad de sal en el tanque en cualquier momento t . ¿Cuál es la cantidad de sal en el tanque pasado mucho tiempo?

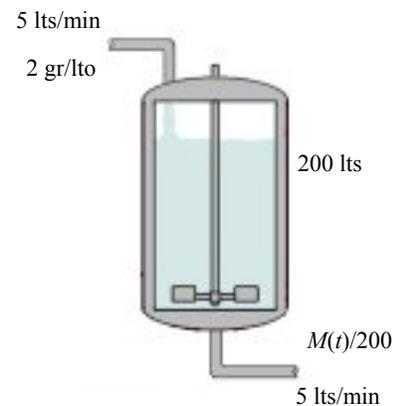


Fig. 13

Solución.- Se determinan los datos iniciales $V_0 = 200$ y $M_0 = 100$. Luego se determinan los flujos másicos de entrada y de salida. El flujo másico de entrada esta dado por:

$$\dot{m}_1 = \left(\frac{2 \text{ gr}}{\text{lto}} \right) \left(\frac{5 \text{ lto}}{\text{min}} \right) = 10 \frac{\text{gr}}{\text{min}}$$

El flujo másico de salida está dado por.

$$\dot{m}_2 = \left(\frac{M(t) \text{ gr}}{200 \text{ lto}} \right) \left(\frac{5 \text{ lto}}{\text{min}} \right) = \frac{M(t)}{40} \frac{\text{gr}}{\text{min}}$$

Aplicando la fórmula (2.35) se tiene:

$$\frac{dM}{dt} = 10 - \frac{M}{40}$$

reacomodando los términos: $\frac{dM}{dt} + \frac{M}{40} = 10$

esta es una *ecuación diferencial lineal de primer orden*, que representa la hipótesis del modelo matemático que determinará la cantidad de sal que hay en el tanque en cualquier momento t . Aplicando la metodología para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden se tiene:

$$M(t) = e^{-\frac{1}{40}\int dt} \int 10e^{\frac{1}{40}\int dt} dt + ce^{-\frac{1}{40}\int dt}$$

simplificando se tiene:

$$M(t) = 400 + ce^{-\frac{1}{40}t}$$

esta integral general, representa el modelo general para el caso dado; solo falta determinar la constante c , la cual se obtiene aplicando la condición de Cauchy $M(0) = M_0 = 100$. Aplicando esta condición a la integral general se obtiene: $M(0) = 100 = 400 + ce^{-\frac{1}{40}(0)}$

de donde se deduce que $c = -300$. Finalmente el modelo queda determinado por la ecuación:

$$M(t) = 400 - 300e^{-\frac{1}{40}t}$$

el cual representa la cantidad de sal que hay en el tanque en cualquier momento t .

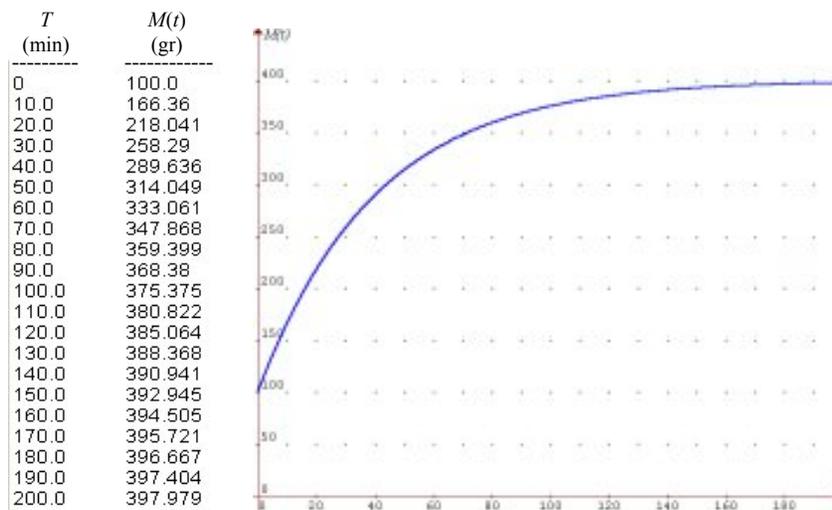


Fig. 14

La figura 14 muestra el comportamiento asintótico de la función que determina la cantidad de sal en el tanque en cualquier momento t .

Esta cantidad tiende a un valor de 400 gr y su explicación es muy simple. El flujo que entra en el tanque desplaza a la cantidad de sal que había inicialmente y después de mucho tiempo solo esta presente un flujo con una concentración de 2 gr/lto, que al multiplicarlo por 200 lts que es el volumen constante del líquido en el tanque, resultan los 400 gr de sal presentes en el tanque. La solución en ese instante tendría precisamente la concentración del flujo de entrada.

Ejemplo 4.- En un tanque que contiene 100 litros de agua, se disuelven 150 gramos de sal y dicho tanque es agitado continuamente (Fig. 15). Al mismo tiempo, se introducen en el tanque 4 lts/min de una solución cuya concentración es de 2 gr/lto; Del tanque se bombea la solución mezclada a una velocidad de 2 lts/min. Encuentre una expresión matemática que determine la cantidad de sal en el tanque en cualquier momento t . ¿Cuál es la cantidad de sal en el tanque pasado mucho tiempo?

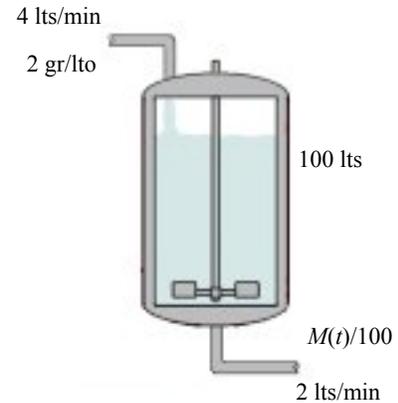


Fig. 15

Solución.- Se determinan los datos iniciales $V_0 = 100$ y $M_0 = 150$. Luego se determinan los flujos másicos de entrada y de salida. El flujo másico de entrada esta dado por:

$$\dot{m}_1 = \left(\frac{2 \text{ gr}}{\text{lto}} \right) \left(\frac{4 \text{ lto}}{\text{min}} \right) = 8 \frac{\text{gr}}{\text{min}}$$

El flujo másico de salida es diferente en este caso, puesto que los flujos volumétricos de entrada y de salida no son los mismos. El flujo volumétrico neto en el tanque es de $(4 - 2)$ lts/min, es decir 2 lts/min; en otras palabras el líquido dentro del tanque aumentará $2t$ litros cada minuto. El flujo másico ahora está dado por:

$$\dot{m}_2 = \left(\frac{M(t) \text{ gr}}{100 \text{ lto} + 2t} \right) \left(\frac{2 \text{ lto}}{\text{min}} \right) = \frac{M(t) \text{ gr}}{50 + t \text{ min}}$$

Aplicando la fórmula (2.35) se tiene:

$$\frac{dM}{dt} = 8 - \frac{M}{50 + t}$$

reacomodando los términos:

$$\frac{dM}{dt} + \frac{M}{50 + t} = 8$$

que nuevamente es una *ecuación diferencial lineal de primer orden*, que representa la hipótesis del modelo matemático que determinará la cantidad de sal que hay en el tanque en cualquier momento t .

Aplicando la metodología para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden se tiene:

$$M(t) = e^{-\int \frac{dt}{50+t}} \int 8e^{\int \frac{dt}{50+t}} dt + ce^{-\int \frac{dt}{50+t}}$$

ó

$$M(t) = \frac{8}{50+t} \int (50+t) dt + \frac{c}{50+t}$$

simplificando:

$$M(t) = 200 + 4t + \frac{c}{50+t}$$

esta integral general, representa el modelo general para el caso dado; solo falta determinar la constante c , la cual se obtiene aplicando la *condición de Cauchy* $M(0) = M_0 = 150$. Aplicando esta condición a la integral general se obtiene:

$$M(0) = 150 = 200 + 4(0) + \frac{c}{50+0}$$

de donde se deduce que $c = -2500$. Finalmente el modelo queda determinado por la ecuación:

$$M(t) = 200 + 4t - \frac{2500}{50+t}$$

el cual representa la cantidad de sal que hay en el tanque en cualquier momento t .

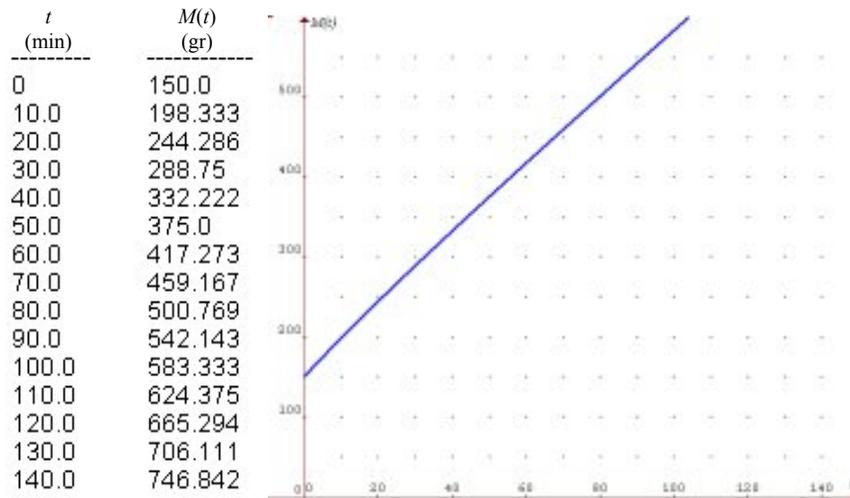


Fig. 16

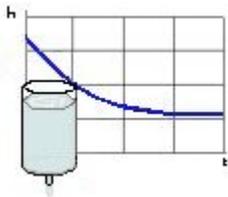
En la figura 16 se muestran los valores de la cantidad de sal $M(t)$ en cualquier momento t , dada por la integral particular que se dedujo anteriormente así como su gráfica. Como se puede observar en la tabla, los valores de $M(t)$ crecen monótonamente sin una tendencia asintótica. La

gráfica de la función $M(t)$ parece una línea recta y eso es debido al término $-\frac{2500}{50+t}$ que tiende a cero rápidamente cuando t crece monótonamente; así que para valores grandes de t , solo la expresión $200 + 4t$ es significativa.

Los modelos matemáticos que se encontraron en estos dos ejemplos, es decir, las expresiones matemáticas que determinan la cantidad de sal en cualquier instante en el tiempo, son de baja resolución, ya que no se tomaron en cuenta factores como: la presión en las tuberías de entrada y de salida, los factores de fricción en las orillas de los agujeros del tanque por donde están conectadas las tuberías de entrada y de salida, los efectos gravitacionales, los coeficientes de transferencia de masa de ambas soluciones, la viscosidad de ambas soluciones, la temperatura de operación, etc. Empero a pesar de estas omisiones, los modelos se aproximan a una realidad física salvo en el ejemplo 4.

La *respuesta* o *salida del sistema*, es decir el modelo matemático del ejemplo 4 fue producto de las condiciones iniciales y obedece a esta circunstancia, pero contrasta con lo que podría suceder en la realidad, ya que el tanque tiene una capacidad finita de almacenamiento y ésta sería rebasada por el volumen creciente del líquido que entra. En el caso de que el tanque esté abierto en la parte superior, el líquido se derramaría por esa parte, pero si el tanque solo tiene los agujeros de entrada y salida, la bomba que transporta el líquido hacia el tanque se quemaría.

VACIADO DE UN TANQUE



En 1644 el matemático italiano **Evangelista Torricelli** (1608-1647) publicó “*De Motum Gravium*”, artículo que contiene lo que se conoce como la *Ley o Teorema de Toricelli* la cual establece que:

“La velocidad con que el líquido sale o es drenado por un orificio practicado en pared plana y delgada en un tanque es igual a la que adquiriría un cuerpo cayendo libremente desde el nivel del líquido al centro del orificio”

Lo anterior quiere decir que la velocidad de salida del líquido mencionado a una profundidad h con relación al fondo del tanque, es $v = \sqrt{2gh}$, donde g es la aceleración debida a la gravedad. Supóngase que se tiene un tanque lleno de un líquido (Fig. 17) y éste se deja drenar a través de un agujero por la acción de la gravedad. Se desea encontrar la profundidad h del líquido en cualquier instante t .

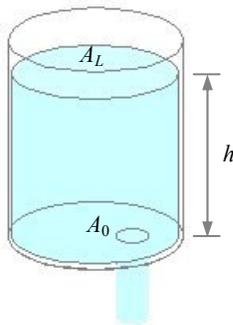


Fig. 17



E. Torricelli

Si el área de la sección transversal del orificio es A_0 y la velocidad de salida del líquido es $v = \sqrt{2gh}$, entonces el flujo volumétrico o el volumen del líquido por unidad de tiempo es $A_0\sqrt{2gh}$. Por lo tanto la

velocidad o razón de cambio del volumen del líquido que sale por el orificio esta dado por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dV}{dt} = -A_0\sqrt{2gh} \quad (2.38)$$

donde el signo menos indica que el volumen del líquido esta disminuyendo con el tiempo. Si el volumen del líquido en el tanque es $V(t) = A_L h$, donde A_L es el área del espejo del líquido (en este caso es constante) entonces $\frac{dV}{dt} = A_L \frac{dh}{dt}$. Sustituyendo esta última expresión en (2.38) y reacomodando los términos se tiene:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A_0}{A_L}\sqrt{2gh} \quad (2.39)$$

Esta hipótesis correspondiente al fenómeno del vaciado del tanque, está restringida a un área A_L constante del espejo del líquido y al hecho de que no se consideran factores de fricción en las orillas del orificio, los cuales pueden reducir el flujo volumétrico de salida.

La relación (2.39) es una ecuación *diferencial de variables separables* que puede estar sujeta a la condición de que $h(0) = h_0$, donde h_0 representa la altura inicial del líquido antes de comenzar el drenado.

Ejemplo 5.- Un tanque con forma de cilindro circular recto, de radio interior $r = 36$ cm y con una capacidad de 250 lts. contiene 200 lts. de alcohol etílico, el cual es drenado por un orificio de 2 cm de radio. Encuentre una expresión matemática que determine la altura del líquido drenado en cualquier instante t .

Solución.- Con los datos proporcionados se puede calcular la altura inicial h_0 del alcohol etílico en el tanque antes del drenado. Si el volumen del líquido forma un cilindro circular recto, su volumen está dado por $V = \pi r^2 h_0$,

Luego, la altura inicial del líquido es $h_0 = \frac{V}{\pi r^2}$. Si 200 lts. = 200,000 cm³, entonces,

$h_0 = \frac{200000\text{cm}^3}{\pi(36\text{cm})^2}$, lo cual da un valor de $h_0 = 49.12$ cm. Si el espejo del líquido forma un círculo

perfecto entonces el área de éste esta dada por $A_L = \pi r^2$; introduciendo los datos, el área del espejo está dada por $A_L = \pi(36\text{cm})^2$, lo cual arroja un valor de $A_L = 4,071.5$ cm². Por otro lado el área del orificio, considerándolo también como un círculo perfecto, está dada por $A_0 = \pi r_0^2$. Si el radio del agujero r_0 es de 2 cm, entonces $A_0 = \pi(2\text{cm})^2$, lo cual arroja un valor de $A_0 = 12.56$ cm².

Teniendo ya todos estos datos, es posible aplicar la ecuación (2.39). Considerando $g = 981$ cm/seg² se tiene:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{12.56}{4071.5} \sqrt{2(981)h}$$

la cual se reduce a:

$$\frac{dh}{dt} = -0.1366\sqrt{h}$$

esta es una *ecuación diferencial de variables separables* sujeta a la condición de que $h(0) = 49.12$ y representa la hipótesis del modelo matemático que determinará la altura h del alcohol etílico drenado en cualquier momento t . Separando las variables e integrando se tiene:

$$\int \frac{dh}{\sqrt{h}} = -0.1366 \int dt$$

simplificando:

$$2\sqrt{h} = -0.1366t + C$$

esta es la integral general o modelo general para el caso dado. Ahora, si se aplica la condición inicial $h(0) = 49.12$, se tiene: $2\sqrt{49.12} = -0.1366(0) + C$. De donde se deduce que $C = 14.017$, sustituyendo este valor en la integral general anteriormente deducida, entonces, el modelo matemático final que determina la profundidad del alcohol etílico en cualquier instante es:

$$2\sqrt{h} = 14.017 - 0.1366t$$

o en forma explícita:

$$h(t) = \frac{1}{4}(14.017 - 0.1366t)^2$$

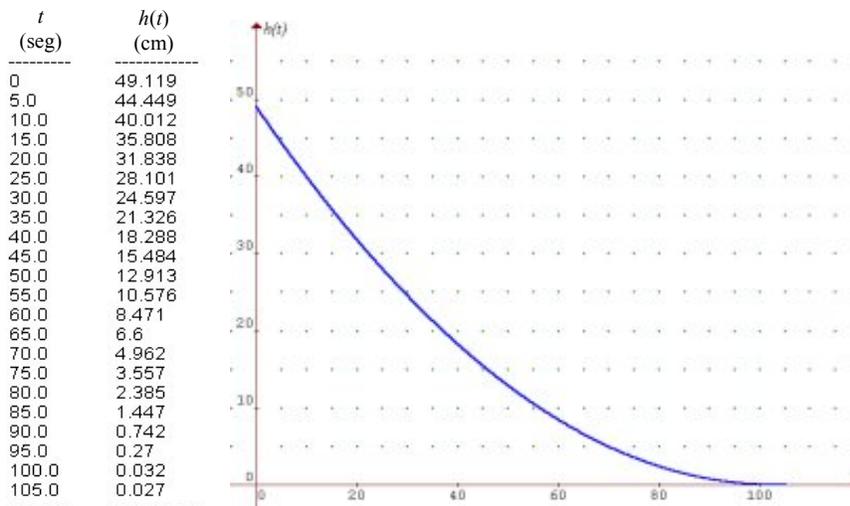


Fig. 18

Como una cuestión adicional, ¿Cuándo se vaciará totalmente el tanque?. Para responder esta cuestión basta con trabajar la integral particular, sustituir $h = 0$ y despejar el valor de t deseado.

Esto es:

$$t = \frac{2\sqrt{0} - 14.017}{-0.1366}$$

el cual arroja un valor de $t = 102.6$ seg ó 1.71 min, prácticamente, en menos de 2 minutos el tanque se habrá drenado totalmente.

La Fig. 18 muestra la gráfica y una tabla de valores de el modelo matemático anteriormente deducido, que determina la altura o profundidad del alcohol etílico, cuando éste es drenado en un tanque de almacenamiento. Como puede observarse en la tabla, los valores de h tienden a cero conforme pasa el tiempo y analíticamente se comprobó que exactamente a los 102.6 seg. el tanque se habrá vaciado en su totalidad.

Empero la expresión matemática del modelo si no es acotada, entonces podría arrojar valores mayores a cero después de los 102.6 seg. transcurridos; esto definitivamente no tendría sentido físico, ya que en esos momentos no habría líquido en el tanque. Esto deja patente la importancia del *acotamiento de una función* que representa un fenómeno en particular.

Ejemplo 6.- Un tanque con forma de cono circular recto, con radio de la base de 20 cm y altura de 60 cm, contiene agua hasta una altura de 55 cm con relación al vértice del cono, como lo muestra la figura 19. El cono tiene en su vértice un orificio de 1 cm de radio. Encuentre una expresión matemática que determine la altura del líquido drenado en cualquier instante t . ¿En cuanto tiempo se vaciará el tanque cónico?

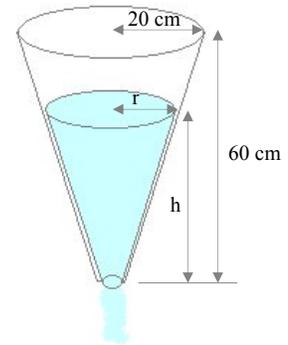


Fig. 19

Solución.- Para poder resolver el problema debe de considerarse que el área A_L del espejo del líquido no es constante sino variable. Ésta es calculada a partir de la relación proporcional entre los lados homólogos de los triángulos semejantes mostrados en la figura 20. Con los datos promocionados por dicha figura, se tiene:

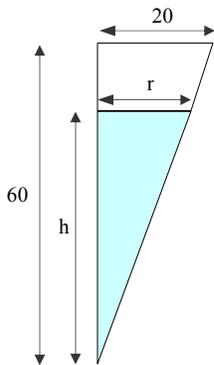


Fig. 20

$$\frac{h}{60} = \frac{r}{20}$$

la anterior relación pone a r en función de h de la siguiente manera:

$$r = \frac{1}{3}h$$

Luego entonces, el área del espejo en función de h viene dada por $A_L = \pi\left(\frac{1}{3}h\right)^2$ ó $A_L = \frac{1}{9}\pi h^2$. El área del orificio de salida del tanque cónico es $A_0 = \pi(1\text{cm})^2$ ó $A_0 = \pi$. Sustituyendo estos datos en la relación (2.39) considerando $g = 981$ cm/seg² se tiene:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\pi}{\frac{1}{9}\pi h^2} \sqrt{2(981)h}$$

simplificando:

$$\frac{dh}{dt} = -398.65h^{-\frac{3}{2}}$$

esta es una *ecuación diferencial de variables separables* sujeta a la condición de que $h(0) = 55$ y representa la hipótesis del modelo matemático que determinará la altura h del agua drenada en cualquier momento t . Separando las variables e integrando se tiene:

$$\int h^{\frac{3}{2}} dh = -398.65 \int dt$$

calculando las integrales se tiene:

$$\frac{2}{5} h^{\frac{5}{2}} = -398.65t + C$$

esta es la integral general o modelo general para el caso dado. Ahora, si se aplica la condición inicial $h(0) = 55$, se tiene:

$$\frac{2}{5}(55)^{\frac{5}{2}} = -398.65(0) + C$$

de donde se deduce que $C = 8973.6$. Sustituyendo este valor en la integral general anteriormente deducida, entonces, el modelo matemático final que determina la profundidad del agua en el tanque cónico en cualquier instante es:

$$\frac{2}{5} h^{\frac{5}{2}} = 8973.6 - 398.65t$$

o en forma explícita:

$$h(t) = \sqrt[5]{(22434 - 996.625t)^2}$$

Ahora, volviendo a la cuestión ¿En cuanto tiempo se vaciará el tanque cónico?. Para responder esta cuestión, basta con trabajar la integral particular, sustituir $h = 0$ y despejar el valor de t deseado. Esto es:

$$t = \frac{\frac{2}{5}(0)^{\frac{5}{2}} - 8973.6}{-398.65}$$

esto arroja un valor de $t = 22.5$ seg. Esto quiere decir que a los 22.5 seg se habrá vaciado el tanque cónico en su totalidad.

La figura 21 muestra la gráfica y una tabla de valores para el modelo matemático deducido anteriormente, que determina la altura del agua en el tanque cónico en función del tiempo.

Como puede observarse en la curva los valores de h , éstos comienzan en 55 y decrecen monótonamente hasta llegar a cero, aunque la tabla solo muestra valores de tiempo hasta 22, pero

como analíticamente se demostró, h llega a cero exactamente cuando $t = 22$. Es interesante observar como los valores de h parecen decrecer rápidamente cuando $t > 18$ seg.

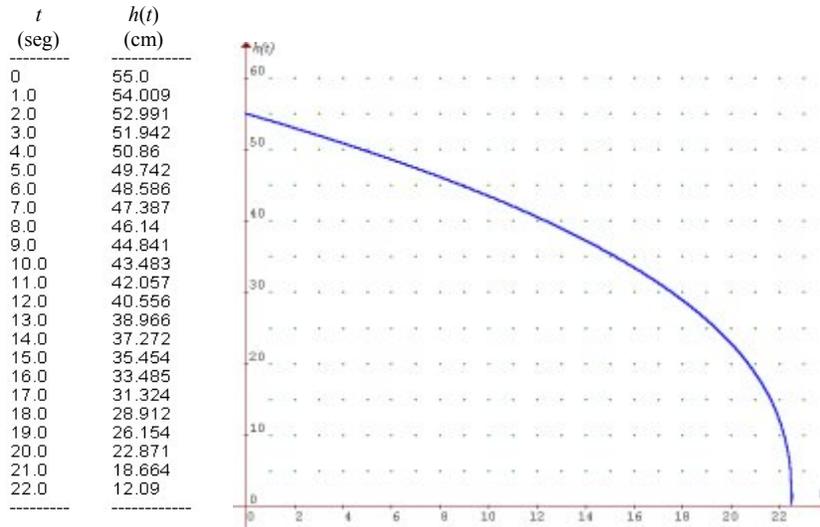
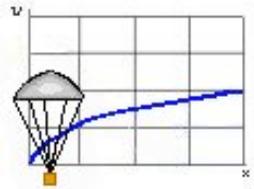


Fig. 21

Es claro que ambos modelos matemáticos correspondientes a los ejemplos 5 y 6 son de baja resolución, ya que no consideran los factores de fricción en las orillas del orificio, ni las presiones que se ejercen en el espejo del líquido y en el chorro del mismo en el orificio, no tampoco se considera la naturaleza geométrica de la superficie del espejo del líquido, ya que en la realidad física, la superficie del espejo tiene forma *paraboloïdal* y después se distorsiona gracias a los remolinos que se generan cuando decrece considerablemente el líquido en el tanque. Otro factor no considerado es la densidad del líquido. Pero a pesar de todas estas restricciones, los modelos se aproximan a una relativa realidad física.

CAÍDA LIBRE DE LOS CUERPOS



En la dinámica de los cuerpos rígidos se estudia el movimiento de un objeto que se encuentra dentro de un campo gravitacional, cuando es soltado o lanzado desde una altura determinada. Generalmente surge la necesidad de saber cuál es la velocidad de caída y cuanto tiempo tarda en caer el objeto al suelo.

Supóngase que se desea saber cuál es la velocidad de caída de un cuerpo en el aire en función de su altura referenciada a la posición inicial del cuerpo. Primeramente se consideran los siguientes supuestos:

- La causa del movimiento es el propio peso del cuerpo
- Se desprecia toda resistencia producida por el aire u otros objetos
- No se toma en cuenta la forma del cuerpo, es decir, se considera tal cuerpo como masa puntual.
- La velocidad inicial del cuerpo es cero, es decir el cuerpo cae libremente

e) La altura es referenciada a la posición inicial del cuerpo y no al nivel del suelo.

Bajo estas condiciones, puede suponerse que las fuerzas involucradas son proporcionales a la aceleración que sufre el cuerpo en su caída; luego entonces puede ser aplicada la *segunda ley de Newton* del movimiento de los cuerpos:

$$\sum F_x = ma_x \quad (2.40)$$

Aquí, x representará la distancia vertical entre la posición inicial (donde comienza el movimiento) y una posición final del mismo después de un tiempo t , tomando como referencia a la misma posición inicial; La hipótesis del modelo en forma diferencial adquiere la forma:

$$\sum F_x = ma_x = \frac{W}{g} v \frac{dv}{dx} = W \quad (2.41)$$

simplificando se obtiene:

$$v \frac{dv}{dx} = g \quad (2.42)$$

Donde g es la aceleración de la gravedad, W es el peso del cuerpo y v es la velocidad del mismo.

Aquí se toma la aceleración como $a = v \frac{dv}{dx}$.

La ecuación (2.41), representa la hipótesis del modelo matemático para la caída libre de un cuerpo bajo las condiciones antes descritas. Al resolver esta ecuación diferencial se encuentra el modelo matemático que mide la velocidad de cuerpo en caída libre en función de la altura referenciada a la posición inicial del mismo. Es interesante observar que la ecuación diferencial (2.42) es independiente del peso del cuerpo y en consecuencia, la velocidad de caída de un cuerpo es independiente del tamaño y forma del cuerpo. En otras palabras, la velocidad es la misma para dos cuerpos totalmente diferentes en tamaño y forma arrojados desde la misma altura. Claro está que esta conclusión está basada en los supuestos antes descritos.

A continuación se mostrará el caso en el que es importante considerar el factor de forma de los cuerpos así como la resistencia del aire; es decir, se tomarán en cuenta los siguientes supuestos:

- a) La causa del movimiento sigue siendo el peso del cuerpo
- b) Se tomará en cuenta la resistencia del aire de la siguiente manera: Se utilizará la relación empírica $R = \frac{1}{2} c_x \rho S v^2$ como la fuerza de resistencia al movimiento; donde c_x es un coeficiente adimensional de resistencia que depende de la forma del cuerpo. Por ejemplo para un paracaídas $c_x = 1.4$, para una esfera $c_x = 0.5$ etc., ρ es la densidad del medio ambiente (aire en este caso) y S es la superficie de la proyección del cuerpo sobre el plano perpendicular a la dirección del movimiento.
- c) Nuevamente, la velocidad inicial del cuerpo es cero, es decir el cuerpo cae libremente.

Aplicando nuevamente *la segunda ley de Newton* al sistema se tiene:

$$\sum F_x = W - R = W - \frac{1}{2}c_x \rho S v^2 \quad (2.43)$$

La nueva hipótesis del modelo en su forma diferencial adquiere la forma:

$$\frac{W}{g} v \frac{dv}{dx} = W - \frac{1}{2}c_x \rho S v^2 \quad (2.44)$$

donde g es la aceleración de la gravedad, c_x es el coeficiente de resistencia, ρ es la densidad del aire, S es la superficie de la proyección del cuerpo sobre el plano perpendicular a la dirección del movimiento, W es el peso del cuerpo y v es la velocidad del mismo. Aquí también, se toma la aceleración como $a = v \frac{dv}{dx}$.

Ejemplo 7.- Una tuerca de acero que se encontraba en una de las partes más altas de un evaporador (Fig. 22) de una refinería, accidentalmente cae desde una altura de 30 m. Encuentre una expresión matemática que determine la velocidad de la tuerca en función de la distancia entre el punto de partida hasta cualquier punto de la trayectoria de caída. ¿Cuál será la velocidad cuando la tuerca se encuentra a 2 metros por encima del suelo?

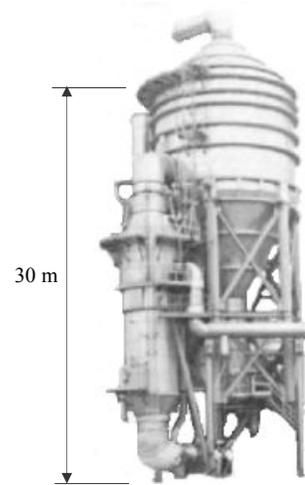


Fig. 22

Solución.- Aplicando directamente la relación (2.42) se tiene:

$$v \frac{dv}{dx} = 9.81$$

donde v es la velocidad de caída, g es la aceleración de la gravedad y x es la distancia medida desde el punto de partida. Esta es una

ecuación diferencial de variables separables sujeta a la condición de $v(0) = 0$, ya que el punto de partida o de referencia es el punto desde donde parte la tuerca. Separando las variables e integrando se obtiene:

$$\int v dv = \int g dx$$

calculando las integrales se tiene:

$$\frac{1}{2}v^2 = 9.81x + C$$

esta integral general corresponde al modelo general para el caso dado. Aplicando la condición $v(0) = 0$ se tiene:

$$\frac{1}{2}(0)^2 = 9.81(0) + C$$

de donde se deduce que $C = 0$. Sustituyendo este valor en la integral general anteriormente deducida, entonces, el modelo matemático final que determina la velocidad de caída para cualquier distancia x es:

$$\frac{1}{2}v^2 = 9.81x$$

o en forma explícita:

$$v(x) = 4.43\sqrt{x}$$

siempre y cuando la variable x se encuentre acotada dentro del intervalo de definición $0 \leq x < 30$. Este es el modelo que determina la velocidad de la tuerca en función de la distancia del punto de partida hacia un punto cualquiera de la trayectoria de caída.

Ahora la cuestión ¿Cuál será la velocidad cuando la tuerca se encuentra a 2 metros por encima del suelo? Debe contestarse tomando en cuenta que para $x = 28$ m la tuerca se encuentra a 2 m por encima del suelo. Sustituyendo este valor en el modelo matemático se tiene $v(28) = 4.43\sqrt{28}$ el cual arroja un valor de $v = 23.43$ m/seg ; convirtiendo esta velocidad a kilómetros por hora, la velocidad es de 84.37 km/h. Este resultado podría ser catastrófico para alguien que por descuido se haya quitado el casco de seguridad.

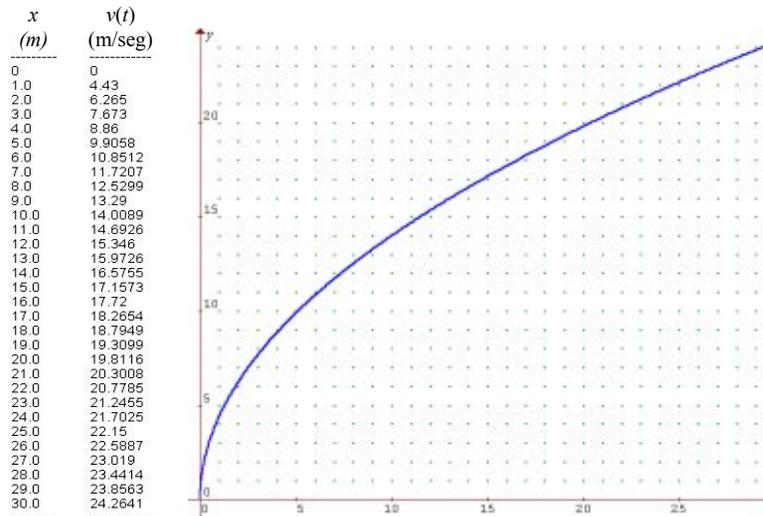


Fig. 23

En la figura 23 se muestran la gráfica y una tabla de valores correspondiente al modelo matemático que mide la velocidad de caída de la tuerca en función de la distancia referenciada al punto de partida. Como puede observarse en la gráfica, los valores de la velocidad crecen monótonamente hasta un valor aproximado de 24.26 m/seg, que representa la máxima velocidad que adquiere la tuerca

Este es un modelo de muy baja resolución, puesto que en la realidad física los cuerpos que se mueven a través del aire son sometidos a la resistencia que opone el mismo y, en altas velocidades, dicha resistencia es considerable. La importancia del factor de forma es verdaderamente relevante si se considera el diseño de los paracaídas o el diseño de aviones, más no es así para el diseño de sondas espaciales.

Ejemplo 8.- Un avión deja caer provisiones a un grupo de investigadores en el ártico desde una altura de 1000 m. Las provisiones de 100 Kg. son arrojadas con un paracaídas de 1.3 m de radio

cuya masa es de 10 Kg. Encuentre una expresión matemática que determine la velocidad de caída de las provisiones en función de la distancia desde sustituyendo punto de partida.

Solución.- Tomando a $g = 9.81 \text{ m/seg}^2$, el peso de las provisiones junto con el paracaídas es $W = (100+10)(9.81)$, el cual da como resultado $W = 1079.1 \text{ N}$. La densidad del aire es $\rho = 1.29 \text{ Kg/m}^3$; el coeficiente de resistencia del aire es $c_x = 1.4$; el área de la superficie de proyección del conjunto esta dado por $S = \pi(1.3)^2$ luego entonces dicha área es $S = 5.30 \text{ m}^2$.

Aplicando la relación (2.44) se tiene:

$$\frac{1079.1}{9.81} v \frac{dv}{dx} = 1079.1 - \frac{1}{2}(1.4)(1.29)(5.30)v^2$$

simplificando:

$$v \frac{dv}{dx} = 9.81 - 0.0435v^2$$



Fig. 24

donde v es la velocidad de caída y x es la distancia medida desde el punto de partida. Esta es una *ecuación diferencial de variables separables* sujeta a la condición de $v(0) = 0$, ya que el punto de partida o de referencia es el punto desde donde se dejaron caer las provisiones. Separando las variables e integrando se obtiene:

$$\int \frac{v dv}{9.81 - 0.0435v^2} = \int dx$$

calculando las integrales:

$$-11.4942 \ln(9.81 - 0.0435v^2) = x + C$$

esta integral general corresponde al modelo general para el caso dado. Aplicando la condición $v(0) = 0$ se tiene:

$$-11.4942 \ln(9.81 - 0.0435(0)^2) = 0 + C$$

de donde se deduce que $C = -26.2456$. sustituyendo este valor en la integral general se obtiene:

$$\ln(9.81 - 0.0435v^2) = 2.2834 - 0.087x$$

aplicando la función exponencial se tiene:

$$9.81 - 0.0435v^2 = e^{(2.2834 - 0.087x)}$$

despejando v se tiene:

$$v(t) = \sqrt{225.517(1 - e^{-0.087x})}$$

Este es el modelo que determina la velocidad de las provisiones en función de la distancia del punto de partida hacia un punto cualquiera de la trayectoria de caída. Es claro que el término $e^{-0.087x}$ tiende a cero cuando x es muy grande, luego entonces este término se puede a una determinada distancia, despreciarse. Esto es: $v(t) = \sqrt{225.517 \left(1 - \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-0.087x}\right)}$

ó

$$v(t) = \sqrt{225.517}$$

lo cual resulta en la llamada velocidad terminal o velocidad límite $v_{lim} = 15.017$ m/s, ó, 54.06 km/h.

x (m)	$h(t)$ (m/seg ²)
0	0
50	14.92
100	15.016
150	15.0172
200	15.0172
250	15.0172
300	15.0172
350	15.0172
400	15.0172
450	15.0172
500	15.0172
550	15.0172
600	15.0172
650	15.0172
700	15.0172
750	15.0172
800	15.0172
850	15.0172
900	15.0172
950	15.0172
1000	15.0172

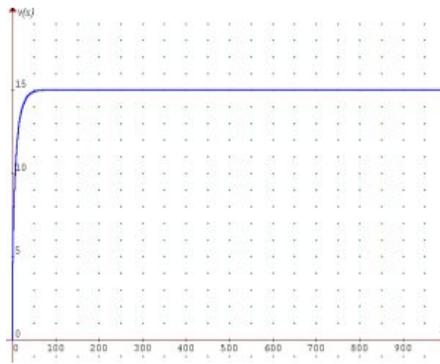


Fig. 25

En la figura 25 se muestran la gráfica y una tabla de valores correspondiente al modelo matemático que mide la velocidad de caída de las provisiones en función de la distancia referenciada al punto de partida. Como puede observarse en la gráfica, los valores de la velocidad tienden rápidamente a la velocidad límite que es de 15.017 m/s. A partir de este valor, las provisiones viajan a velocidad constante.

Si se gráfica el modelo matemático en un intervalo menor, se podría calcular en forma aproximada el valor de la distancia para el cual las provisiones llegan a su velocidad límite. Como puede observarse

en la figura 26, dicho valor de la distancia es aproximadamente 140 m, es decir a una altura de 860 m, las provisiones viajan a una velocidad constante de 15.017 m/s ó 54.06 km/h.

x (m)	$h(t)$ (m/seg ²)
0	0
10.0	11.4471
20.0	13.6358
30.0	14.4545
40.0	14.7841
50.0	14.92
60.0	14.9766
70.0	15.0002
80.0	15.0101
90.0	15.0142
100.0	15.016
110.0	15.0167
120.0	15.017
130.0	15.0171
140.0	15.0172
150.0	15.0172
160.0	15.0172

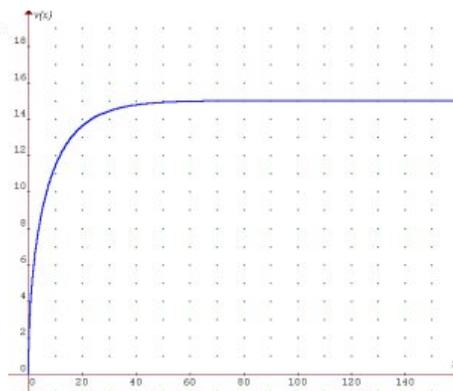
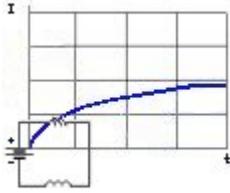


Fig. 26

Claro está que para un ser humano no sería seguro impactarse en el pavimento a esta velocidad. Los modernos diseños de los paracaídas son tales que su factor de forma favorece a que esta velocidad límite pueda ser mucho menor e incluso permita dirigirlo hacia un lugar seguro para el aterrizaje. Existen diseños que permiten controlar esta velocidad límite.

SEGUNDA LEY DE KIRCHHOFF



Circuito RL.- Supóngase que se tiene un *circuito en serie* que contiene solamente una *fuerza de voltaje* E (medida en volts), un *resistor* R (medido en ohms) y un *inductor* L (medido en henrys). El circuito se denomina *circuito RL* (Fig. 27). En 1854 **Gustav Robert Kirchhoff** (1824-1887) enunció lo que se conoce actualmente como, que la *segunda ley de Kirchhoff*, la cual establece para un circuito RL , que:



G. Kirchhoff

“las caídas de voltaje en el resistor R y en el inductor L debe ser igual al voltaje suministrado E ”

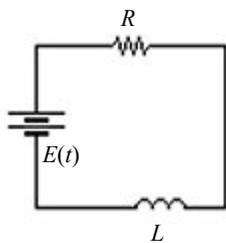


Fig. 27

Si la *caída de voltaje* del resistor es iR , donde i es la *intensidad de la corriente* (medida en Amperes), la caída de voltaje en el inductor se define como $L \frac{di}{dt}$, donde L es la *inductancia* (medida en henrys) y si la fuente de voltaje es una función del tiempo $E(t)$, entonces la *segunda ley de Kirchhoff* en forma diferencial está dada por:

$$L \frac{di}{dt} + iR = E(t) \quad (2.45)$$

Esta hipótesis determina el fenómeno de las caídas de voltaje en el circuito RL y es una ecuación diferencial lineal de primer orden, cuya solución determina la intensidad de la corriente $i(t)$ en el circuito.

Circuito RC.- Supóngase ahora que se tiene un *circuito en serie* que contiene solamente una fuente de voltaje E , un resistor R y un *capacitor* C ² (medido en farads). El circuito se denomina *circuito RC* (Fig. 28). La segunda ley de Kirchhoff establece que:

“las caídas de voltaje en el resistor R y en el capacitor C deben ser igual al voltaje suministrado E ”

Si la caída de voltaje del resistor es iR ; si la caída de voltaje en el capacitor se define como $\frac{q}{C}$ donde q es la carga en el capacitor (medida en Coulombs); si la fuente de suministro de voltaje es una función del tiempo $E(t)$ y finalmente, si la intensidad de la corriente esta dada por $i = \frac{dq}{dt}$, entonces la segunda ley de Kirchhoff aplicada al circuito RC , puede escribirse en forma diferencial como:

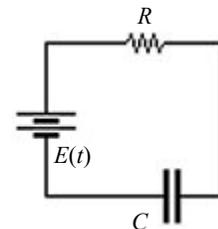


Fig. 28

² Esta variable, representará lo que se conoce como *capacitancia* del capacitor.

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E(t) \quad (2.46)$$

esta hipótesis determina el fenómeno de las caídas de voltaje en el circuito RC y es una ecuación diferencial lineal de primer orden, cuya solución determina la carga $q(t)$ en el capacitor.

Ejemplo 9.- Un circuito RL (Fig. 29) tiene un resistor de 10 ohms y un inductor cuya inductancia es de $\frac{3}{4}$ de henry. Una batería le suministra al circuito un voltaje de 9 volts. Encuentre una expresión matemática que determine la intensidad de la corriente i en cualquier momento t , si la intensidad de la corriente al inicio es cero.

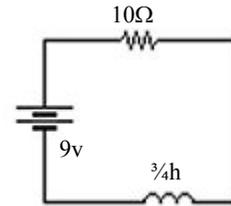


Fig. 29

Solución.- Si la inductancia L es de $\frac{3}{4}$ henrys, la resistencia R es de 10 ohms y la fuente de voltaje E es de 9 volts entonces, aplicando la relación (2.45) se obtiene:

$$\frac{3}{4} \frac{di}{dt} + 10i = 9$$

reacomodando los términos:

$$\frac{di}{dt} + \frac{40}{3}i = 12$$

donde i es la intensidad de la corriente en el circuito RL y t es el tiempo. La anterior expresión es una *ecuación diferencial lineal de primer orden* sujeta a la condición de que $i(0) = 0$

Aplicando la metodología para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden se tiene:

$$i(t) = e^{-\frac{40}{3} \int dt} \int 12e^{\frac{40}{3} \int dt} dt + Ce^{-\frac{40}{3} \int dt}$$

simplificando se tiene:

$$i(t) = \frac{9}{10} + Ce^{-\frac{40}{3}t}$$

esta integral general, representa el modelo general para el caso dado; solo falta determinar la constante C^3 , la cual se obtiene aplicando la *condición de Cauchy* $i(0) = 0$. Aplicando esta

condición a la integral general se obtiene: $i(0) = 0 = \frac{9}{10} + Ce^{-\frac{40}{3}(0)}$. De donde se deduce que $c = -\frac{9}{10}$. Finalmente el modelo queda determinado por la ecuación:

$$i(t) = \frac{9}{10} - \frac{9}{10} e^{-\frac{40}{3}t}$$

³ No hay que confundir esta constante de integración con la *capacitancia* definida anteriormente.

la cual representa el modelo matemático para la variación de la intensidad de la corriente del circuito en cualquier momento t . Como datos adicionales, ¿Cuál será la intensidad de la corriente $i(t)$ cuando ha pasado mucho tiempo?. La respuesta a esta cuestión la proporciona el siguiente límite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = \frac{9}{10} - \frac{9}{10} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{40}{3}t} = \frac{9}{10}$$

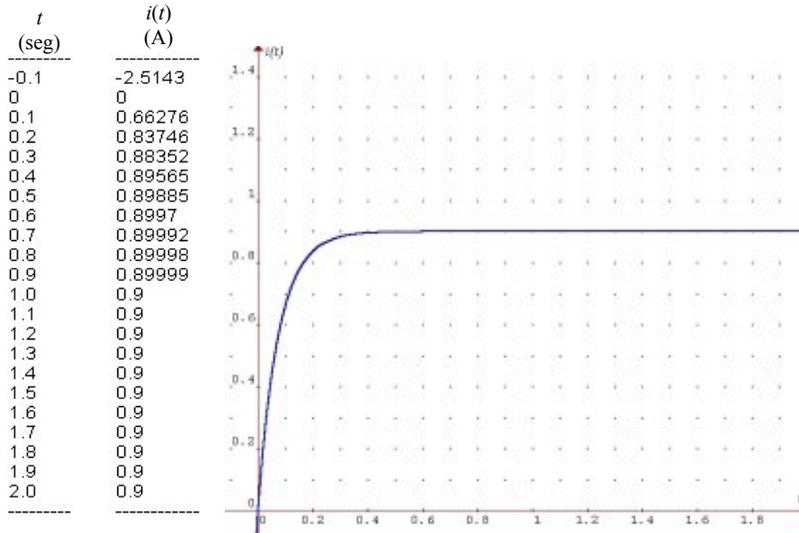


Fig. 30

A la cantidad $\frac{9}{10}$ se le conoce como la parte estable y al término $-\frac{9}{10}e^{-\frac{40}{3}t}$ se le conoce como la parte transitoria de la corriente; ésta tiende a cero cuando t tiende a infinito. Más aún, la cantidad $\frac{9}{10}$ corresponde a la aplicación directa de la *Ley de Ohm* al circuito RL . Se deja al lector que realice esa sencilla demostración.

En la figura 30 se muestran la gráfica y una tabla de valores correspondiente al modelo

matemático que mide la intensidad de la corriente $i(t)$ del circuito RL dado.

Como puede observarse en la gráfica, los valores de la corriente tienden al valor de $\frac{9}{10}$ conforme t crece; prácticamente pasado un segundo, el valor de la corriente se establece en esa cantidad.

Ejemplo 10.- A un circuito RC (Fig. 31) se le suministra un voltaje E de 110 volts, donde la resistencia R es de 180 ohms y la capacitancia C es de 2×10^{-4} farads. Encuentre una expresión matemática que determine la carga $q(t)$ en el capacitor en función del tiempo, si $q(0) = 0$. Halle también la intensidad de la corriente $i(t)$.

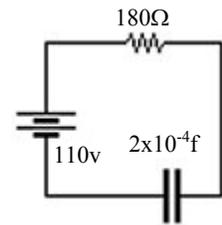


Fig. 31

Solución.- Si la capacitancia C es de 2×10^{-4} farads, la resistencia R es de 180 ohms y la fuente de voltaje E es de 110 volts entonces, aplicando la relación (2.46) se obtiene:

$$180 \frac{dq}{dt} + \frac{1}{2 \times 10^{-4}} q = 110$$

reacomodando los términos:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{250}{9} q = \frac{11}{18}$$

donde q es la es la carga del capacitor del circuito RC y t es el tiempo. La anterior expresión es una *ecuación diferencial lineal de primer orden* sujeta a la condición de que $q(0) = 0$.

Aplicando la metodología para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden se tiene:

$$q(t) = e^{-\frac{250}{9} \int dt} \int \frac{11}{18} e^{\frac{250}{9} \int dt} dt + ke^{-\frac{250}{9} \int dt}$$

simplificando se tiene:

$$q(t) = \frac{11}{500} + ke^{-\frac{250}{9}t}$$

esta integral general, representa el modelo general para el caso dado; solo falta determinar la constante k , la cual se obtiene aplicando la *condición de Cauchy* $q(0) = 0$. Aplicando esta condición a la integral general se obtiene:

$$q(0) = \frac{11}{500} + ke^{-\frac{250}{9}(0)}$$

de donde se deduce que $c = -\frac{11}{500}$. Finalmente el modelo queda determinado por la ecuación:

$$q(t) = \frac{11}{500} - \frac{11}{500} e^{-\frac{250}{9}t}$$

la cual representa el modelo matemático para la variación de la carga en el capacitor del circuito en cualquier momento t . A la cantidad $\frac{11}{500}$ se le conoce como la parte estable y al término $-\frac{11}{500} e^{-\frac{250}{9}t}$ se le conoce como la parte transitoria; ésta tiende a cero cuando t tiende a infinito. La carga $q(t)$ tiende a $\frac{11}{500}$ cuando ha pasado mucho tiempo.

Ahora, se determinará la intensidad de la corriente. De la relación $i = \frac{dq}{dt}$, se deduce que la intensidad de la corriente, esta dada por:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \left(-\frac{11}{500}\right) \left(-\frac{250}{9}\right) e^{-\frac{250}{9}t}$$

simplificando se encuentra que:

$$i(t) = \frac{11}{18} e^{-\frac{250}{9}t}$$

En la figura 32 se muestran la gráfica y una tabla de valores correspondiente al modelo matemático que mide la carga en el capacitor del circuito RC dado.

Es fácil observar que dicha carga tiene un comportamiento asintótico hacia el valor de $\frac{11}{500}$ conforme t crece. Prácticamente pasados 0.45 segundos se establece este valor límite.

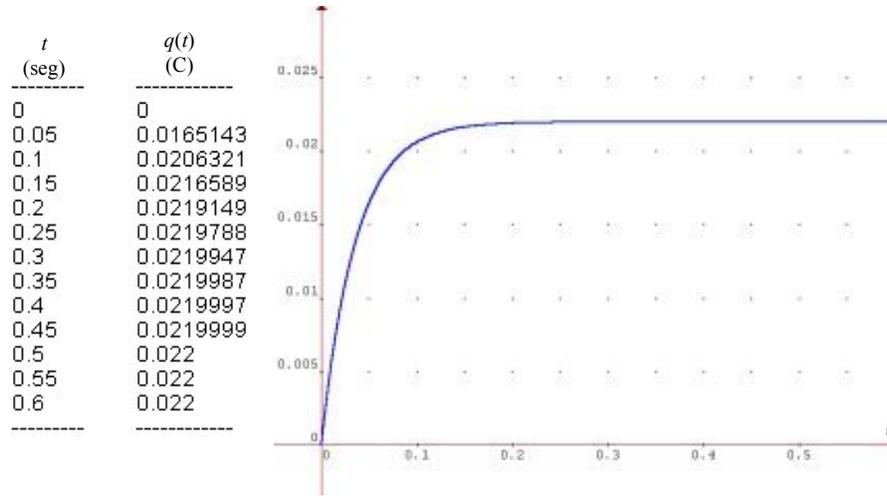
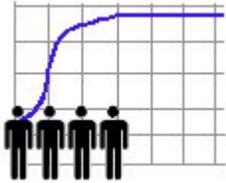


Fig. 32

CRECIMIENTO DEMOGRÁFICO



En 1798 el economista inglés **Thomas Robert Malthus** (1766-1834), hizo los primeros intentos para modelar el crecimiento demográfico. Él estableció que *“la velocidad de crecimiento de la población de un país es proporcional a la población $P(t)$ de ese país en cualquier instante t ”*. Matemáticamente esto se puede representar de la siguiente forma:

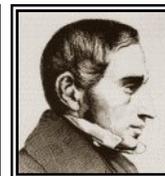
$$\frac{dP}{dt} = kP \quad (2.47)$$

Esta hipótesis es la base fundamental para lo que se conoce como *modelo de Malthus* para el crecimiento demográfico. Si la evolución de una población se ajusta a la hipótesis dada por la ecuación (2.47) se dice entonces que la población crece exponencialmente.

Aunque el *modelo de Malthus* parece razonable, es difícil encontrar en la práctica casos de crecimiento exponencial. Existen otros modelos como el propuesto por el matemático y biólogo belga **Pierre François Verhulst** (1804-1849), quien en 1838 investigó el crecimiento de la población humana de varios países con base en la suposición de que existen limitaciones de los recursos en el medio ambiente que restringen el crecimiento demográfico. Estas limitaciones determinan lo que se conoce como *capacidad de sustento* del medio ambiente. Posteriormente el genetista y ecologista **Raymond Pearl** (1879-1940) utilizó las suposiciones de



R. Malthus



P.F. Verhulst



R. Pearl

Verhulst alrededor de 1925, para determinar la población de Estados Unidos de América. La *ecuación de Verhulst-Pearl* tiene la forma:

$$\frac{dP}{dt} = P(\alpha - \beta P) \quad (2.48)$$

donde α y β son constantes que se determinan en función de datos experimentales (observaciones de la evolución de una población). Este modelo se ajusta, no solo a poblaciones humanas, sino a poblaciones animales, tales como algunos tipos de bacterias, virus, protozoarios, moscas, abejas, entre otras especies. La ecuación diferencial (2.48) se conoce como *ecuación logística* y las gráficas de las integrales generales, como *curvas logísticas*.

¿Cómo Deducir la Ecuación de Verhulst-Pearl para un Caso Particular?

Supóngase que se tiene una dispersión de datos históricos del crecimiento de población de un país o de una comunidad dados por las sucesiones $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ correspondientes a los valores $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$. Los coeficientes α y β de la ecuación diferencial $\frac{dP}{dt} = P(\alpha - \beta P)$ pueden ser calculados de la siguiente manera: Si se despeja el primer factor del miembro derecho de la ecuación diferencial dada se obtiene la siguiente expresión $\frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = \alpha - \beta P$. Ahora, el miembro izquierdo de esta relación puede aproximarse mediante el cociente de diferencias finitas:

$$D(t_i) = \frac{1}{P(t_i)} \frac{P(t_{i+1}) - P(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

se tiene ahora una nueva dispersión de datos dada por $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ y $D(t_1), D(t_2), D(t_3), \dots, D(t_n)$ las cuales se tabulan y se calcula mediante las relaciones (B-1) y (B-6) del Apéndice B, la *recta de regresión* que se ajuste a dichos datos. Esta recta de regresión debe ser algebraicamente equivalente al binomio $\alpha - \beta P$ de la *ecuación diferencial logística*, logrando con ello la hipótesis del fenómeno del crecimiento de una población que se comporta de acuerdo con el *modelo de Verhulst-Pearl*.

Ejemplo 11.- La población de los Estados Unidos Mexicanos en 1921 fue de 14.3 millones de personas; 49 años más tarde, es decir, en 1970, la población era de 48.2 millones de personas. Supóngase que la población crece exponencialmente, encuentrese una expresión matemática para determinar la cantidad de mexicanos en cualquier momento t , para estimar:

- a) La población que hubo en 1980
- b) La población que existió en 1995
- c) La población correspondiente al año 2010

Solución.- Suponiendo que la población crece exponencialmente, entonces dicha población se ajusta al *modelo de Malthus* (2.47), es decir

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

esta expresión es una *ecuación diferencial de variables separables*. Considerando al año 1921 donde había 14.3 millones de mexicanos, como $t = 0$, entonces, la ecuación diferencial anterior que representa la hipótesis del crecimiento de la población de los Estados Unidos Mexicanos, está sujeta a la *condición de Cauchy* $P(0) = 14.3$

Separando las variables de la ecuación diferencial deducida se tiene:

$$\frac{dP}{P} = k dt$$

integrando se obtiene:

$$\int \frac{dP}{P} = k \int dt$$

evaluando las integrales:

$$\ln P = kt + C_1$$

resolviendo la ecuación para la variable P se obtiene:

$$P(t) = e^{kt+C_1}$$

considerando que $e^{C_1} = C$ se deduce:

$$P(t) = Ce^{kt}$$

esta integral general, representa el modelo general para el caso dado; solo falta determinar las constantes C y k , la cual se obtiene aplicando la *condición de Cauchy* $P(0) = 14.3$. Aplicando esta condición a la integral general se obtiene:

$$P(0) = 14.3 = Ce^{k(0)} = C$$

de donde se deduce que $C = 14.3$, de aquí que:

$$P(t) = 14.3e^{kt}$$

solo falta determinar el valor de k . De la condición adicional de que en 1970 la población era de 48.2 millones de mexicanos, es decir $P(49) = 48.2$, se tiene:

$$P(49) = 48.2 = 14.3e^{k(49)}$$

simplificando:

$$3.3706 = e^{49k}$$

resolviendo para el parámetro k :

$$k = \frac{\ln(3.3706)}{49}$$

lo cual, arroja un valor de $k = 0.0248$. Finalmente el modelo de la población queda determinado por:

$$P(t) = 14.3e^{0.0248t}$$

La figura 33 muestra una tabla de los valores de la población real y de la población estimada mediante el modelo exponencial deducido. La línea roja continua en la gráfica, determina el comportamiento real del crecimiento de la población, mientras que la línea azul punteada, determina el crecimiento acorde con el modelo exponencial $P(t) = 14.3e^{0.0248t}$. Es claro que existen pequeñas diferencias entre el modelo matemático y el fenómeno real del crecimiento de dicha población; pero la aproximación, para fines prácticos, puede considerarse aceptable.

Año	t (años)	Población Real (millones)	P(t) (millones)
1921	0	14.3	14.3
1930	9	16.6	18.325
1940	19	19.7	23.483
1950	29	25.8	30.092
1960	39	34.9	38.562
1970	49	48.2	49.415
1980	59	66.8	63.324
1990	69	81.2	81.147
2000	79	---	101.44
2010	89	---	129.99

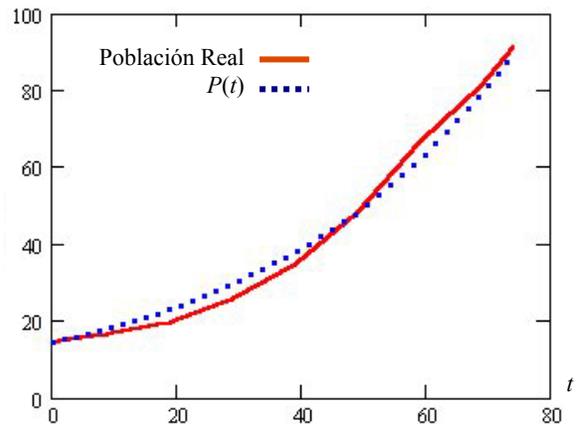


Fig. 33

En la tabla se muestra que en 1980 hubo realmente 66.8 millones de mexicanos, mientras que la estimación mediante el modelo exponencial arroja un valor de $P(59) = 14.3e^{0.0248(59)} = 63.324$ millones de personas; por otro lado en 1990 hubo realmente 81.2 millones de mexicanos, mientras que la estimación mediante el modelo exponencial arroja un valor de $P(69) = 14.3e^{0.0248(69)} = 81.147$ millones de personas; finalmente para el año 2010 se pronostica una población de $P(89) = 14.3e^{0.0248(89)} = 129.99$ millones de mexicanos.

Ejemplo 12.- Supóngase que la población del ejemplo 11 crece acorde con la ecuación logística de Verhulst-Pearl:

$$\frac{dP}{dt} = P(0.030431 - 0.000102P)$$

Encuéntrese una expresión matemática para determinar la cantidad de mexicanos en cualquier momento t , para estimar:

- d) La población que hubo en 1980
- e) La población que existió en 1995
- f) La población correspondiente al año 2010

Solución.- Nótese que la hipótesis del modelo ya está dada y es una *ecuación diferencial de variables separables* o bien es una *ecuación diferencial de Bernoulli*. Eligiendo el método de separación de variables se tiene:

$$\frac{dP}{P(0.030431 - 0.000102P)} = dt$$

integrando:

$$\int \frac{dP}{P(0.030431 - 0.000102P)} = \int dt$$

expandiendo la expresión racional en sus fracciones parciales se obtiene:

$$\int \left(\frac{1}{0.030431P} + \frac{0.00297}{0.03431 - 0.000102P} \right) dP = \int dt$$

evaluando las integrales:

$$\frac{1}{0.030431} \ln P - \frac{1}{0.030431} \ln(0.030431 - 0.000102P) = t + c_1$$

simplificando:

$$\ln \left(\frac{P}{0.030431 - 0.000102P} \right) = 0.030431t + 0.030431c_1$$

aplicando antilogaritmos:

$$\frac{P}{0.030431 - 0.000102P} = ce^{0.030431t}$$

despejando P de la expresión anterior se obtiene:

$$P(t) = \frac{0.030431c}{0.000102c + e^{-0.030431t}}$$

esta integral general, representa el modelo general para la *ecuación logística de Verhulst-Pearl*; solo falta determinar las constante c , la cual se obtiene aplicando la *condición de Cauchy* $P(0) = 14.3$ como en el problema del ejemplo 11. Aplicando esta condición a la integral general se obtiene:

$$P(0) = 14.3 = \frac{0.030431c}{0.000102c + e^{-0.030431(0)}}$$

de donde se deduce que $c = 493.5732$, de aquí que:

$$P(t) = \frac{15.02}{0.05034 + e^{-0.030431t}}$$

lo cual representa el modelo matemático que determina acorde con la ecuación logística, la cantidad de personas en cualquier momento t .

La figura 34 muestra una tabla de los valores de la población real y de la población estimada mediante el modelo logístico deducido. La línea roja continua en la gráfica, determina el comportamiento real del crecimiento de la población, mientras que la línea azul punteada, determina el crecimiento acorde con el modelo logístico $P(t) = \frac{15.02}{0.05034 + e^{-0.030431t}}$.

Año	t (años)	Población Real (millones)	P(t) (millones)
1921	0	14.3	14.3
1930	9	16.6	18.526
1940	19	19.7	24.572
1950	29	25.8	32.365
1960	39	34.9	42.246
1970	49	48.2	54.527
1980	59	66.8	69.409
1990	69	81.2	86.907
2000	79	---	106.76
2010	89	---	128.4

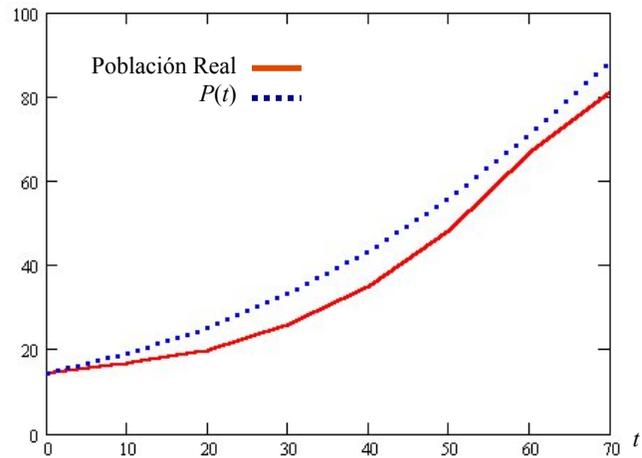


Fig. 34

En la tabla se muestra que en 1980 hubo realmente 66.8 millones de mexicanos, mientras que la estimación mediante el modelo logístico arroja un valor de

$$P(59) = \frac{15.02}{0.05034 + e^{-0.030431(59)}} = 69.409 \text{ millones de personas.}$$

Por otro lado en 1990 hubo realmente 81.2 millones de mexicanos, mientras que la estimación mediante dicho modelo arroja un valor de $P(69) = \frac{15.02}{0.05034 + e^{-0.030431(69)}} = 86.907$ millones de personas; finalmente para el año 2010 se pronostica una población de $P(89) = \frac{15.02}{0.05034 + e^{-0.030431(89)}} = 128.4$ millones de mexicanos.

Es claro que si existen diferencias considerables entre el modelo matemático logístico y el fenómeno real del crecimiento de la población, sobretodo entre 1940 y 1970, pero la aproximación, para fines de pronósticos, puede considerarse aceptable.

Obsérvese que las estimaciones para los años 2000 y 2010 en los modelos exponencial y logístico aquí deducidos, no son tan diferentes.

MODIFICACIONES DE LA ECUACIÓN LOGÍSTICA

Existen algunas variaciones de la ecuación logística (2.48). Por ejemplo las ecuaciones:

$$\frac{dP}{dt} = P(\alpha - \beta P) - k \quad \wedge \quad \frac{dP}{dt} = P(\alpha - \beta P) + k$$

se utilizan como modelos en una granja de cultivo de algunas especies (peces, por ejemplo), donde las especies se cosechan o se reabastecen con una velocidad k . Dichas ecuaciones pueden ser analizadas con facilidad tanto cualitativamente como analíticamente. Estos modelos pueden ser usados a su vez como modelos de crecimiento en poblaciones humanas en donde la población disminuye por el fenómeno de la emigración o puede aumentar debido a la inmigración.

La rapidez k puede ser una función del tiempo o de la población misma, es decir, la cosecha en el caso de la granja podría ser periódica o en forma proporcional a la población P en el momento t . en este caso el modelo tendría la forma:

$$\frac{dP}{dt} = P(\alpha - \beta P) - k_1 P$$

donde $k_1 > 0$. Pero las variación en las poblaciones humanas suele comportarse de manera muy diferente al crecimiento controlado de especies animales. La población humana en un país determinado podría cambiar por inmigración, de tal forma que ésta sería grande cuando P sea pequeña ó viceversa. Un modelo razonable sujeto a estas condiciones tendría la forma:

$$\frac{dP}{dt} = P(\alpha - \beta P) - m e^{-nP}$$

donde $m > 0$ y $n > 0$. Otra ecuación que resulta de una modificación de la ecuación (2.48) es la llamada *ecuación diferencial de Gompertz*⁴:

$$\frac{dP}{dt} = P(\alpha - \beta \ln P)$$

que además de utilizarse en poblaciones humanas, se usa para analizar el crecimiento de tumores y en predicciones actuariales.

⁴ En honor al matemático británico **Benjamin Gompertz** (1779-1865), quien realiza estudios sobre los fenómenos actuariales y demográficos.



Ejercicios Suplementarios

Sección 2.8 Ejercicios 2.7

1. Un cuerpo metálico que inicialmente se encuentra a una temperatura de 280°C se deja enfriar a la temperatura ambiente, la cual es de 23°C . Pasado dos minutos se detecta que el cuerpo tiene una temperatura de 256°C . Determine una expresión matemática que mida la temperatura del cuerpo metálico en cualquier instante. Aproximadamente, ¿En cuánto tiempo el cuerpo alcanza la temperatura ambiente?
2. Un dispositivo que mide la temperatura que inicialmente se encuentra una temperatura de 22°C , se introduce a un horno. Después de $\frac{1}{2}$ minuto se observa que el dispositivo marca 45°C , luego, pasado $\frac{1}{2}$ más, marca 63°C . ¿Cuál es la temperatura del horno?. ¿En que momento llegará a los 80°C ?
3. Un panque de naranja sale del horno a 400°C . Pasados 2 minutos se determina que la temperatura del panque es de 356°C . Si la cocina esta a 18°C , ¿en cuanto tiempo se habrá enfriado el panque hasta la temperatura ambiente?
4. Un tanque contiene 150 litros de agua, en él, se disuelven 30 gramos de sal y dicho tanque es agitado continuamente. Al mismo tiempo, se introducen en el tanque 4 lts/min de una solución cuya concentración es de 1 gr/lto; del tanque se bombea la solución mezclada al mismo flujo volumétrico. Encuentre una expresión matemática que determine la cantidad de sal en el tanque en cualquier momento t . ¿Cuál es la cantidad de sal en el tanque pasado mucho tiempo?
5. En un tanque que contiene 400 litros de agua, se disuelven 50 gramos de sal y dicho tanque es agitado continuamente. Al mismo tiempo, se introducen en el tanque 3 lts/min de una solución cuya concentración es de 2 gr/lto; Del tanque se bombea la solución mezclada a una velocidad de 2 lts/min. Encuentre una expresión matemática que determine la cantidad de sal en el tanque en cualquier momento t . ¿Cuál es la cantidad de sal en el tanque después de un minuto?
6. Un tanque que contiene 600 litros, le entra una salmuera con una concentración de 5 gramos por cada litro a una velocidad de 3 lts/min. El tanque que contiene inicialmente 75 grs. de sal, se mantiene bien agitado y se bombea la solución hacia fuera con la misma rapidez. ¿Cuál es la concentración de la solución salina después de 3 minutos?
7. Considérese el tanque del problema 4, pero ahora el liquido que entra a la velocidad de 4 lts/min es agua pura. ¿En que momento ya no habrá sal en el tanque?
8. Un tanque con forma de cilindro circular recto, de 35.36 cm de altura y con una capacidad de 25 lts. contiene 20 lts. de agua, la cual es drenada por un orificio de 1.5 cm de radio que se encuentra en el fondo del tanque. Encuentre una expresión matemática que determine la altura del líquido drenado en cualquier instante t . ¿En cuanto tiempo se habrá vaciado el tanque en su totalidad?

9. Un tanque con forma de cono circular recto, con radio de la base de 10 cm y altura de 40 cm , contiene agua hasta una altura de 35 cm con relación al vértice del cono. Dicho cono tiene en su vértice un orificio de 0.5 cm de diámetro. Encuentre una expresión matemática que determine la altura del líquido drenado en cualquier instante t . ¿En cuanto tiempo se vaciará el tanque cónico?
10. Cuando se consideran los factores de fricción en los bordes del orificio, la hipótesis de la *ley de Torricelli* puede tener la forma:

$$\frac{dh}{dt} = -c \frac{A_0}{A_L} \sqrt{2gh}$$

donde c es un parámetro cuyo valor se encuentra en el intervalo $0 < c < 1$. Considérense los mismos datos del problema 8, pero tomando en cuenta que $c = 0.62$

11. Un recipiente que contiene agua pura tiene forma de una semiesfera con radio de 20 cm ; la altura con relación al fondo del recipiente es de 15 cm y en el mismo hay un orificio de salida del líquido con un radio de 1 cm . Considerando que el área del espejo es variable, deduzca una expresión matemática que determine la altura h del líquido en cualquier momento t .

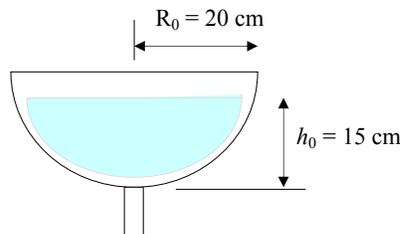


Fig. 35

12. Un objeto esférico se deja caer desde una altura de 200 m . Encuentre una expresión matemática que determine la velocidad del objeto en función de la distancia entre el punto de partida hasta cualquier punto de la trayectoria de caída. ¿Cuál será la velocidad cuando el objeto se encuentra a 1 metro por encima del suelo?. Despréciense la resistencia del aire.
13. Un paracaidista se deja caer desde un avión que se encuentra a una altura de 3000 m . Su paracaídas tiene un radio de 1 m cuya masa es de 10 Kg . Aplique la ecuación (2.44) y encuentre una expresión matemática que determine la velocidad de caída del paracaidista en función de la distancia desde sustituyendo punto de partida. ¿Cuál es la velocidad terminal?
14. Un circuito RL tiene un resistor de 12 ohms y un inductor cuya inductancia es de $\frac{1}{4}$ de *henry*. Una batería le suministra al circuito un voltaje de 9 volts . Encuentre una expresión matemática que determine la intensidad de la corriente i en cualquier momento t , si la intensidad de la corriente al inicio es cero.

15. A un circuito RC se le suministra un voltaje E de 110 *volts*, donde la resistencia R es de 100 *ohms* y la capacitancia C es de 5×10^{-4} *farads*. Encuentre una expresión matemática que determine la carga $q(t)$ en el capacitor en función del tiempo, si $q(0) = 0$. Halle también la intensidad de la corriente $i(t)$.
16. Se sabe que la población de cierta comunidad crece en forma proporcional a la cantidad de personas en cualquier momento t . Si la población se duplicó en 7 *años*. ¿en cuanto tiempo se triplicará?
17. La población de cierta comunidad crece en forma proporcional a la cantidad de *personas* en cualquier momento t . Si al principio había 1000 *personas* y aumento en un 20 % en 8 años. ¿Cuál es la población en 20 años?
18. Supóngase que las bacterias que causan el ántrax (*Bacillus Anthracis*) crece en forma proporcional a la cantidad de bacterias en cualquier momento t . Si en un cultivo se observa que hay 4000 bacterias y después de 3 *horas* hay 7000 *especímenes*. Encuentre una expresión matemática que determine la cantidad de bacterias en el cultivo en cualquier momento t . ¿En que momento la cantidad de bacterias se habrá duplicado?
19. Supóngase que la población de cierto país crece de acuerdo con la ecuación logística

$$\frac{dP}{dt} = P(0.02526 - 0.000427P)$$

Suponga también que la población inicial es de 12.5 *millones de personas*. Encuéntrese una expresión matemática para determinar la cantidad de individuos en cualquier momento t .

20. Es sabido que las sustancias radiactivas se desintegran a una velocidad que es proporcional a la cantidad de sustancia en cualquier momento t ; (en otras palabras la velocidad relativa de desintegración es constante y negativa). El radio 225 se desintegra de esta manera y su vida media es de 1590 *años*. Si al principio había 20 *gr.* de la sustancia radiactiva, ¿en que momento se desintegrará totalmente?
21. En el siglo XVIII el matemático y astrónomo alemán **Johann Henrich Lambert** (1728-1777) descubre que el porcentaje de luz incidente que es absorbida por un material traslúcido es proporcional a una lámina de ese material. Supóngase que si la luz solar que incide verticalmente sobre la superficie de un lago sigue este principio y si la luz incidente I_0 se reduce en un 50 % a 5 *metros* bajo la superficie, encuentre una expresión matemática que determine la intensidad de la luz en función de la intensidad inicial I_0 . ¿A que profundidad se habrá reducido la intensidad de la luz de los rayos solares al 90%?





Referencias Bibliográficas del Capítulo 2

Obras consultadas:

Bell, E.T., *“The Development of Mathematics”*, Fourth Edition, McGraw Hill Book Co. of New York, 1985

Bouge, D.J., *“The Population of the United States. Historical Trends and Future Projections”*, The Free Press, New York, USA, 1985

Boyce W.E., DiPrima R.C., *“Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems”*, 3ª Edición, Editorial Limusa, México, 1980

Cajori F., *“An Introduction to the Modern Theory of Equations”*, First Edition, Norwood Press J.S. Cushing Co.-Berwick & Smith Co., Norwood, Mass, U.S.A., 1919

Elsgolts L., *“Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional”*, 3ª Edición, Editorial Mir Moscú, Rusia, 1983

Euler L., *“De Integratione Aequationum Differentialium”* Artículo publicado en *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae* por St. Petersburg Academy, Rusia, 1763

Kapitza S., *“Nature and Human Society. The Quest for a Sustainable World”*, Global population growth and biodiversity. Editaorial P. Raven, Report of US National academy of sciences on biodiversity. National academy press, Washington D.C., USA, 2000

Kleiber J., Karsten B., *“Tratado Popular de Física”*, 12ª Edición, Editorial Gustavo Gil S.A. Barcelona, España, 1964

Lacroix S.F. *“Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral”*, Tomo II, Editado por J.B.M. Duprat, París, Francia, 1798

Makarenko G.I., Kiselev A.I., Krasnov M.I., *“Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias”*, 1ª Edición, Editorial Mir Moscú, Rusia, 1972

Piskunov N., *“Cálculo Diferencial e Integral”*, Tomo II, 1ª Edición en español, Editorial Mir, Moscú, Rusia, 1986

Ribnikov K., *“Historia de las Matemáticas”*, 1ª Edición en español, Editorial Mir Moscú, Rusia, 1986

Smith D.E., *“History of Modern Mathematics”*, Fourth Edition Enlarged, Chapman & Hall Ltd., London, England, 1906

Struik D.J., *“Historia Concisa de las Matemáticas”*, 2ª Edición en español, Editorial del Instituto Politécnico Nacional, 1986

Targ S.M., “*Curso Breve de Mecánica Teórica*”, Academia de Ciencias de Rusia, Editorial Mir, 5ª Edición, Moscú, Rusia, 1986

Todhunter I., “*An Elementary Treatise on the Theory of Equations with a Collections of Examples*”, Third Edition, Macmillan and Company, London, England, 1875

Treybal R., “*Operaciones de Transferencia de Masa*”, 2ª Edición, Editorial McGraw Hill, México, 1989

Verhulst, P.F., “*Notice Sur la loi que la Population Suit dans son Accroissement*”, Correspondence mathématique et physique publiée par A. Quételet, Bruselas, Bélgica, 1838

Verhulst, P.F., “*Recherches Mathématiques sur la loi d'Accroissement de la Population*”, Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres de Bruxelles, 18., 1845

Verhulst, P.F., “*Deuxième Mémoire sur la loi d'Accroissement de la Population*”, Nouveaux mémoires de l'Académie des Sciences et Belles Lettres de Bruxelles, 20., 1847

Yavorski B.M., Detlaf, A.A., “*Prontuario de Física*”, 1ª Edición en español, Editorial Mir, Moscú, Rusia, 1988

Zill D.G. “*Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado*”, 7ª Edición, Thomson International., México, 2002

Sitios web consultados en Internet:

INEGI, “*Estadísticas Sociodemográficas*”, Información recuperada desde el apartado “*series históricas en gráficas*” del Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática. Fuente: Sitio del INEGI en Internet: www.inegi.gob.mx

Lethbridge, T., “*Encontrado Gene que Aumenta Resistência Ao Antrax. Descoberta abre Caminho para Desenvolvimento de Remédios mais Eficaces*”, Archivo recuperado desde Ciencia Hoje, Brazil, 2001. Url: <http://www2.uol.com.br/cienciahoje/especial/armabio/armabio2.htm>

O'Connor J.J., Robertson E.F., “*MacTutor History of Mathematics*”, Sitio web en Internet de la Escuela de Matemáticas y Estadística de la Universidad de San Andrews, Escocia, 2003
<http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/>

Tissue, B.M., “*Beer-Lambert Law*”, Archivo recuperado desde Science Hypermedia Home Page, mantenido por el autor, 1996, Url: <http://elchem.kaist.ac.kr/vt/chem-ed/spec/beerslaw.htm>

Wilkins D.R., “*Mathematicians of the Seventeenth and Eighteenth Centuries*”, Sitio web en Internet de la Escuela de Matemáticas del Trinity College de Dublin, Irlanda.
<http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/RBallHist.html>





Ecuaciones Diferenciales Lineales de Orden n

Sección 3.1

“Creo que generalmente se puede decir, que no hay conocimiento alguno en el hombre, el cual no sea mediata o inmediatamente deducido de la Experiencia”
Feijoo, Benito Jerónimo



ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN n

RESEÑA HISTÓRICA

Ya en el Capítulo I se abordaron los aspectos históricos sobre el desarrollo de la teoría de las ecuaciones diferenciales, mostrando algunas contribuciones de los matemáticos y científicos que a través de la historia hicieron.

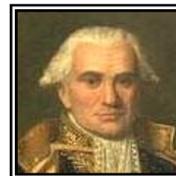
En esta sección se muestran específicamente algunas de estas contribuciones. Comenzando con los trabajos del matemático italiano **Jacobo Riccati**, quien consideró ecuaciones de la forma $f(y, y', y'') = 0$. También consideró una importante ecuación no lineal, conocida como *ecuación de Riccati*: $\frac{dy}{dx} = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2$, aunque no en forma tan general. Por otro lado hacia el año 1700, **Johann Bernoulli**, logró resolver la *ecuación diferencial homogénea de orden n* : $\sum_{k=n}^l A_k x^k \frac{d^k y}{dx^k} + y = 0$ introduciendo un factor integrante de la forma x^p y disminuyendo con su ayuda sucesivamente el orden de esta ecuación; pero su trabajo tenía ciertas limitaciones.

Leonhard Euler consideró la posibilidad de reducir *ecuaciones diferenciales de segundo orden a ecuaciones diferenciales de primer orden* también mediante un cambio adecuado de variables. Esto aparece en su obra “*Nova Methodus Innumerabiles Aequationes Differentiales Secundi Gradus Reducendi ad Aequationes Differentiales Primi Gradus*” de 1732, en ella también aparece el concepto de *factor integrante*; En 1739 dio un tratamiento general de *las ecuaciones diferenciales lineales ordinarias con coeficientes constantes* en su tratado “*Methodus Aequationes Differentiales Altiorum Graduum Integrandi Ulterius Promota*” que se publica hasta 1753. En este tratado introduce un procedimiento para encontrar la integral general una *ecuación diferencial lineal ordinaria con coeficientes constantes de orden n* . y el importante

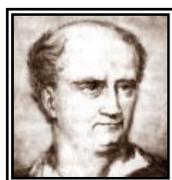
concepto que se conoce en la actualidad como *polinomio característico*, el cual fue considerado después por los matemáticos franceses **Gaspard Monge** (1746-1818) y **August Louis Cauchy** (1789-1857). También en el párrafo 61 de su obra “*De Integratione Aequationum Differentialium*” de 1755, aparece la expresión:

$$dy + Pydx + Qydx + Rdx = 0$$

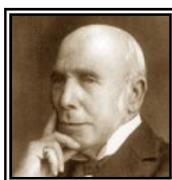
que es la conocida *ecuación de Ricatti*. (aunque esta ecuación es no lineal, trató de resolverse mediante factores integrantes) El matemático francés **Joseph Louis Lagrange**, demostró que la *solución general* de una *ecuación diferencial homogénea de orden n con coeficientes constantes* es de la forma: $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n$ donde y_1, y_2, \dots, y_n son un *conjunto de soluciones linealmente independiente* y c_1, c_2, \dots, c_n son constantes arbitrarias (lo que se conoce actualmente como *principio de superposición*). También descubrió en su forma general *el método de variación de parámetros*. Este método (aunque algo diferente al que se usa actualmente) lo introduce en su obra “*Sur le Mouvement des Noeuds des Orbites Planetaires*” de 1774 que trata sobre las orbitas planetarias influenciadas por atracción entre los planetas, pero en 1871 extiende la aplicación de su método en su obra “*Théorie des Variations Séculaires des Éléments des Planètes*”, en donde trata las pequeñas perturbaciones que sufren las orbitas elípticas de los planetas demostrada anteriormente la invariabilidad de éstas por **Kepler** y **Newton**. Años más tarde, en 1856, **Cauchy** en su obra “*Treatise on Infinitesimal Calculus*”, muestra algo similar a lo que **Lagrange** manejó anteriormente como una técnica de perturbación (véase mas adelante en el capítulo IV, el enfoque de procesos). Por su parte **Jean Le Rond D’Alembert** (1717-1783) en 1766 encontró que la solución de una *ecuación lineal no homogénea*, es igual a la suma de una cierta *solución particular* y *la solución general* de la correspondiente *ecuación homogénea*.



G. Monge



J. de Wronski



T. Muir

Josef Hoëné de Wronski (1778-1853) matemático polaco, fue quien descubre un determinante útil para la determinación de la independencia lineal de funciones; esto lo logró cuando trabajaba sobre la expansión de funciones en series infinitas, en donde los coeficientes de éstas, son precisamente estos determinantes. Él escribió su “*Introduction to a Course in Mathematics*” la cual fue publicada en 1821. Fue el matemático escocés **Thomas Muir** (1844-1934) quien en 1881 los llamó *Wronskianos*. Curiosamente **Muir**, necesitó cinco volúmenes y más de 2500 páginas para hacer una simple historia de los determinantes.

Otra de las importantes contribuciones en el tratamiento de funciones es la del matemático danés **Jorgen Pedersen Gram** (1850-1916) quien al trabajar sobre funciones ortogonales descubre un determinante útil también en el estudio de la independencia lineal de funciones. Escribió “*Sur quelques Théorèmes Fondamentaux de l’Algebre Moderne*” en 1874, “*On Series Expansions Determined by the Methods of Least Squares*” en 1879 y “*Investigations of The Number of Primes Less Than a Given Number*” en 1884.



J.P. Gram

DEFINICIONES BÁSICAS

En la sección 1.4 se mostró la clasificación de las ecuaciones diferenciales acorde con el orden. Si en una ecuación diferencial aparecen la primera, la segunda y hasta la n -ésima derivada de la variable y , como la derivada de mayor orden, entonces se dice que dicha ecuación es una **ecuación diferencial de orden n** . Ésta puede tener la forma:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x) \quad (3.1)$$

donde $a_1(x), a_2(x), a_3(x), \dots, a_{n-1}(x), a_n(x)$ son funciones del argumento x ; ó en forma condensada:

$$F(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (3.2)$$

cuya integral general tiene la forma:

$$\Phi(x, y, c_1, c_2, c_3, \dots, c_n) = 0 \quad (3.3)$$

es decir, una familia n -paramétrica. Los parámetros c_1, c_2, \dots, c_n ahora, se determinan a través de las *condiciones de Cauchy*

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, y''(x_0) = y_2, y'''(x_0) = y_3, \dots, y^{(n)}(x_0) = y_n \quad (3.4)$$

También acorde con la clasificación según la linealidad, la ecuación (3.1) será lineal siempre y cuando cumpla con las dos propiedades mostradas en la sección 1.4 (*véanse Págs. 19 y 20*)

Sección

3.2

"Las matemáticas son una gimnasia del espíritu y una preparación para la filosofía"
Isócrates



DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL DE FUNCIONES

GENERALIDADES

Sea dado un sistema finito de n funciones $y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots, y_n(x)$ definidas en el intervalo $I \in \mathbb{R}$. Se dice que éstas son **linealmente dependientes** en el intervalo I , si existen unas constantes c_1, c_2, \dots, c_n , no simultáneamente iguales a cero, tales que para todos los valores de x de este intervalo se cumple:

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x) + \dots + c_n y_n(x) \equiv 0 \quad (3.5)$$

Si esta identidad se cumple *solamente* para $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$, se dice que las funciones $y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots, y_n(x)$, son **linealmente independientes** para toda x en el intervalo I .

CRITERIO DEL COCIENTE

Se puede enunciar otro criterio de independencia lineal para el caso de dos funciones:

Las funciones $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ son *linealmente independientes* en el intervalo I si la razón $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}$ no es idénticamente una constante, es decir $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} \neq \text{constante}$ en este intervalo.

Si $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} \equiv \text{constante}$, entonces, las funciones son *linealmente dependientes*.

Ejemplo 1.- Aplique el criterio del cociente para determinar si las funciones

$$\varphi_1(x) = e^x \wedge \varphi_2(x) = xe^x$$

son linealmente dependientes o linealmente independientes.

Solución.- Las funciones $\varphi_1(x) = e^x \wedge \varphi_2(x) = xe^x$ son linealmente independientes puesto que el cociente $\frac{e^x}{xe^x} = \frac{1}{x} \neq \text{cte.}$

Ejemplo 2.- Aplique el criterio del cociente para determinar si las funciones

$$\varphi_1(x) = \text{sen}^2 x \wedge \varphi_2(x) = 1 - \cos 2x$$

son linealmente dependientes o linealmente independientes.

Solución.- Las funciones $\varphi_1(x) = \text{sen}^2 x \wedge \varphi_2(x) = 1 - \cos 2x$, son linealmente dependientes, puesto que el cociente $\frac{\text{sen}^2 x}{1 - \cos 2x} = \frac{\text{sen}^2 x}{2\text{sen}^2 x} = \frac{1}{2}$ es una constante.

Se puede señalar otro criterio de dependencia lineal de n funciones ($n \geq 1$):

Las funciones $y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots, y_n(x)$ son *linealmente dependientes* en $I \in \mathbb{R}$, si al menos una de ellas se puede expresarse en este intervalo como *combinación lineal* de las restantes. En caso contrario, el sistema de funciones es linealmente independiente.

CRITERIO DE WRONSKI

Supóngase que las n funciones $y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots, y_n(x)$, admiten derivadas hasta el orden $(n-1)$. El determinante:

$$W[y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots, y_n(x)] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \quad (3.6)$$

se llama **determinante de Wronski** o **Wronskiano** de estas funciones. Obsérvese que, por lo general, el wronskiano es una función de x definida en cierto intervalo I .

Teorema 1.- Si el sistema de funciones $y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots, y_n(x)$, es *linealmente dependiente* en el intervalo cerrado I su **wronskiano es idénticamente nulo** en I , es decir:

$$W[y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots, y_n(x)] \equiv 0$$

Observación.- Este teorema establece solamente la condición *necesaria más no suficiente* de la dependencia lineal de un sistema de funciones. El teorema recíproco no se cumple ya que existen sistemas de funciones linealmente independientes para el cual su **wronskiano** es idénticamente nulo.

En otras palabras, dado un sistema de funciones $y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots, y_n(x)$, *el criterio de Wronski* no puede determinar la dependencia lineal o la independencia lineal de dicho sistema de funciones, pero si puede verificarla, es decir, sabiendo de antemano que un sistema de funciones es linealmente dependiente, *el criterio de Wronski* verificará este hecho; esto se puede observar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.- Aplique el criterio de Wronski para verificar que el sistema de funciones $\varphi_1(x) = \text{sen}^2 x \wedge \varphi_2(x) = 1 - \cos 2x$, es linealmente dependiente.

Solución.- El wronskiano de las funciones está dado por:

$$\begin{aligned} W[\text{sen}^2(x), 1 - \cos 2x] &= \begin{vmatrix} \text{sen}^2 x & 1 - \cos 2x \\ 2\text{sen}x \cos x & 2\text{sen}2x \end{vmatrix} \\ &= 2(\text{sen}^2 x)\text{sen}2x - (\text{sen}2x)(1 - \cos 2x) \\ &= 2(\text{sen}^2 x)\text{sen}2x - (\text{sen}^2 x)(2\text{sen}2x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

de aquí que, el determinante $W[\text{sen}^2 x, 1 - \cos 2x] \equiv 0$, luego entonces las funciones si son linealmente dependientes.

Ejemplo 4.- Calcular el wronskiano para el siguiente sistema de funciones linealmente independiente

$$y_1(x) = \begin{cases} 2x^2 & -1 \leq x \leq 0 \\ 0 & 0 < x \leq 1 \end{cases} \wedge y_2(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x \leq 0 \\ 2x^2 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Solución.- Para el intervalo $[-1,0]$ se tiene:

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} 2x^2 & 0 \\ 4x & 0 \end{vmatrix} = 0$$

de aquí que $W[y_1, y_2] = 0$

ahora, para el intervalo $(0,1]$ se tiene:

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} 0 & 2x^2 \\ 0 & 4x \end{vmatrix} = 0$$

de aquí que $W[y_1, y_2] = 0$, esto quiere decir que *el wronskiano* para el sistema de funciones dado es nulo. Se deja como ejercicio al lector que demuestre que el sistema de funciones es linealmente independiente puesto que cumple con la relación (3.5) para todas $c_1 = c_2 = 0$

CRITERIO DE GRAM

Supóngase que se considera el sistema de n funciones $y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots, y_n(x)$, dadas en el intervalo cerrado $[a, b]$, haciendo

$$(y_i, y_j) = \int_a^b y_i(x) y_j(x) dx \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (3.7)$$

El determinante

$$\Gamma[y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots, y_n(x)] = \begin{vmatrix} (y_1, y_1) & (y_1, y_2) & \cdots & (y_1, y_n) \\ (y_2, y_1) & (y_2, y_2) & \cdots & (y_2, y_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (y_n, y_1) & (y_n, y_2) & \cdots & (y_n, y_n) \end{vmatrix} \quad (3.8)$$

es denominado *determinante de Gram* del sistema de funciones $\{y_k(x)\}$

Teorema 2.- Para que el sistema de funciones $y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots, y_n(x)$, sea *linealmente dependiente* es necesario y suficiente que su *determinante de Gram sea igual a cero*, de otra manera, el sistema es *linealmente independiente*.

Ejemplo 5.- Aplique el criterio de Gram para determinar si las funciones

$$y_1(x) = e^x \wedge y_2(x) = xe^x$$

definidas en el intervalo $[0,1]$ son linealmente dependientes o linealmente independientes.

Solución.- Aplicando la relación (3.7) se obtienen las siguientes datos:

$$\int_0^1 (y_1 \cdot y_1) dx = \int_0^1 (e^x)^2 dx = \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (e^2 - 1)$$

$$\int_0^1 (y_1 \cdot y_2) dx = \int_0^1 (y_2 \cdot y_1) dx = \int_0^1 x e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \left(x - \frac{1}{2}\right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} (e^2 + 1)$$

$$\int_0^1 (y_2 \cdot y_2) dx = \int_0^1 x^2 e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} (e^2 - 1)$$

aplicando el determinante de Gram se tiene:

$$\begin{aligned} \Gamma(y_1, y_2) &= \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(e^2 - 1) & \frac{1}{4}(e^2 + 1) \\ \frac{1}{4}(e^2 + 1) & \frac{1}{4}(e^2 - 1) \end{vmatrix} = \frac{1}{8}(e^4 - 2e^2 + 1) - \frac{1}{16}(e^4 + 2e^2 + 1) \\ &= \frac{1}{16}e^4 - \frac{3}{8}e^2 + \frac{1}{16} \end{aligned}$$

es evidente que *el determinante de Gram es distinto de cero*, por lo que el sistema de funciones dado es *linealmente independiente*.



Ejercicios Suplementarios

Sección 3.2 Ejercicios 3.1

I.- Aplique el *criterio del cociente* para averiguar si los siguientes conjuntos de funciones son linealmente dependientes o linealmente independientes.

1. $4, x$
2. $x, \frac{1}{x}$
3. $\text{sen}^3 x, 3\text{sen} x - \text{sen} 3x$

II.- Calcule el *Wronskiano* para los siguientes sistemas de funciones linealmente independientes.

- | | |
|---|--|
| 1.- $3\text{sen} 2x, \frac{1}{4} \cos 2x$ | 5.- x, x^2, x^3 |
| 2.- $e^{3x} \text{sen} x, 5e^{3x} \cos x$ | 6.- x^{-3}, x^2 |
| 3.- e^{2x}, e^{-2x}, e^{5x} | 7.- $x, x \ln x$ |
| 4.- $1, \text{sen} 2x, \cos 2x$ | 8.- $x^2 \cos(\ln x), x^2 \text{sen}(\ln x)$ |

III.- Aplique el criterio de Gram para averiguar si los siguientes conjuntos de funciones son linealmente dependientes o linealmente independientes.

1.- $3\text{sen}2x, \frac{1}{4}\text{cos}2x$

5.- $\text{sen}(x), \text{cos}(x), \text{cos}(2x)$

2.- $\text{sen}4x, \text{cos}5x$

6.- e^{2x}, e^{-2x}, e^{5x}

3.- $\text{sen}4x, \text{cos}4x$

7.- $x, 2x, x^2$

4.- $e^{-x}\text{sen}2x, e^x\text{cos}3x$

8.- $1, x, x^2, x^3$

Sección

3.3

"Debe haber un mundo ideal, una especie de paraíso matemático donde todo sucede como en los libros de texto"
Russell, Bertrand



ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES HOMOGÉNEAS DE ORDEN n

DEFINICIÓN

Una **ecuación diferencial lineal homogénea de orden n** tiene la forma:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (3.9)$$

donde $a_1(x), a_2(x), a_3(x), \dots, a_{n-1}(x), a_n(x)$ son funciones del argumento x . En esta sección, en algunos casos se utilizará la abreviatura **EDLH n** cuando se refiera a una **ecuación diferencial lineal homogénea de orden n** .

CONJUNTO FUNDAMENTAL DE SOLUCIONES

Todo conjunto $\{y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots, y_n(x)\}$, de n soluciones *linealmente independientes* de la **EDLH n** ,

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

en un intervalo I , se llama **conjunto fundamental de soluciones** en el intervalo. Aquí, cada una de las $y_i(x)$, satisface la ecuación diferencial anterior.

PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

Teorema 3.- Sea $\{y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots, y_n(x)\}$, un conjunto fundamental de soluciones de la **EDLH n** ,

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

en el intervalo I .

El principio de superposición, establece que la ***solución general*** de la ecuación (3.9) en dicho intervalo es:

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x) + \dots + c_n y_n(x) \quad .10)$$

donde $c_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$ son constantes arbitrarias.

PROBLEMA DE VALORES INICIALES O PROBLEMA DE CAUCHY

Sea una **EDLHn**:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

donde $a_1(x), a_2(x), a_3(x), \dots, a_{n-1}(x), a_n(x)$ son funciones del argumento x

A las relaciones:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, y''(x_0) = y_2, y'''(x_0) = y_3, \dots, y^{(n)}(x_0) = y_n$$

se les conoce como condiciones iniciales o ***condiciones de Cauchy***; Al problema de la búsqueda de una solución de la ecuación diferencial de orden n , que satisface las condiciones iniciales anteriores, se le denomina ***problema de Cauchy***. A este tipo de soluciones se les ha denominado ***integrales particulares***.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL PROBLEMA DE CAUCHY

Para el caso de una ecuación diferencial de primer orden

$$F(x, y, y') = 0$$

Sujeta a la condición inicial $y(x_0) = y_0$, la interpretación geométrica sería la siguiente:

La integral particular

$$\Phi(x, y) = 0$$

es una curva integral que pasa exactamente por el punto de coordenadas (x_0, y_0) .

Para el caso de una ecuación diferencial de segundo orden:

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

Sujeta a las condiciones iniciales $y(x_0) = y_0$, e $y'(x_0) = y_1$, la interpretación geométrica sería la siguiente:

La integral particular

$$\Phi(x, y) = 0$$

es una curva integral que pasa exactamente por el punto de coordenadas (x_0, y_0) , y además posee en ese punto una derivada numéricamente igual a y_1 .

EDLHn CON COEFICIENTES CONSTANTES

Sea una ecuación diferencial homogénea de orden n , de la forma:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

Supóngase que los coeficientes de esta ecuación son todos constantes reales, entonces dicha ecuación adquiere la forma:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (3.11)$$

Considérese la *ecuación característica*:

$$a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \dots + a_2 m^2 + a_1 m + a_0 = 0 \quad (3.12)$$

conocida también como *polinomio característico*. Supóngase ahora que $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$, son raíces de la ecuación (3.12) entre las cuales, puede haber raíces múltiples

Se pueden presentar los siguientes casos:

CASO I RAÍCES REALES Y DISTINTAS

Las raíces del *polinomio característico* $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$, son reales y distintas

En este caso, el *conjunto fundamental de soluciones* de la ecuación (3.11) tiene la forma:

$$\{e^{m_1 x}, e^{m_2 x}, e^{m_3 x}, \dots, e^{m_n x}\}$$

y acorde con el *principio de superposición*, la solución general de la ecuación (3.11) tendrá la forma:

$$y_g = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + C_3 e^{m_3 x} + \dots + C_n e^{m_n x} \quad (3.13)$$

CASO II RAÍCES REALES MÚLTIPLES

Las raíces del *polinomio característico* $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$, son reales, pero algunas de ellas son múltiples.

Sea por ejemplo, $m_1 = m_2 = m_3 = \dots = m_k = \tilde{m}$, de modo que \tilde{m} es una raíz k -múltiple de la ecuación (3.12), mientras que todas las demás raíces son distintas.

En este caso el *conjunto fundamental de soluciones* tiene la forma:

$$\left\{ e^{\tilde{m}x}, xe^{\tilde{m}x}, x^2 e^{\tilde{m}x}, \dots, x^{k-1} e^{\tilde{m}x}, e^{m_{k+1}x}, \dots, e^{m_nx} \right\}$$

y acorde con el *principio de superposición*, la solución general de la ecuación (3.11) tendrá la forma:

$$y_g = C_1 e^{\tilde{m}x} + C_2 x e^{\tilde{m}x} + C_3 x^2 e^{\tilde{m}x} + \dots + C_k x^{k-1} e^{\tilde{m}x} + C_{k+1} e^{m_{k+1}x} + \dots + C_n e^{m_nx} \quad (3.14)$$

CASO III RAÍCES COMPLEJAS

Algunas de las raíces del *polinomio característico* $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$, son reales, pero algunas de ellas complejas.

Supongamos que $m_1 = \alpha + \beta i$, $m_2 = \alpha - \beta i$, $m_3 = \gamma + \delta i$, $m_4 = \gamma - \delta i$, $\beta \neq 0, \delta \neq 0$, y las demás raíces son reales.

En este caso el *conjunto fundamental de soluciones* tiene la forma:

$$\left\{ e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x, e^{\gamma x} \cos \delta x, e^{\gamma x} \operatorname{sen} \delta x, e^{m_5 x}, e^{m_6 x}, \dots, e^{m_n x} \right\}$$

y la solución general tiene la forma:

$$y_g = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x + C_3 e^{\gamma x} \cos \delta x + C_4 e^{\gamma x} \operatorname{sen} \delta x + C_5 e^{m_5 x} + \dots + C_6 e^{m_6 x} + \dots + C_n e^{m_n x} \quad (3.15)$$

CASO IV RAÍCES COMPLEJAS MÚLTIPLES

Algunas de las raíces del *polinomio característico* $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$, son reales, pero algunas de ellas son complejas múltiples.

Si $m_1 = \alpha + \beta i$ es una raíz k -múltiple $\left(k \leq \frac{n}{2} \right)$ de la ecuación (3.12), entonces, $m_2 = \alpha - \beta i$, también será una raíz k -múltiple.

En este caso, el *conjunto fundamental de soluciones* tiene la forma:

$$\left\{ e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x, x e^{\alpha x} \cos \beta x, x e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x, \dots, x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, x^{k-1} e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x \right\} \\ \left\{ e^{m_{2k+1}x}, \dots, e^{m_nx} \right\}$$

y la integral general tiene la forma:

$$y_g = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x + C_3 x e^{\alpha x} \cos \beta x + C_4 x e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x + \dots + C_{2k-1} x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x + C_{2k} x^{k-1} e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x + C_{2k+1} e^{m_{2k+1} x} + \dots + C_n e^{m_n x} \quad (3.16)$$

Ejemplo 1.- Resolver la siguiente ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes

$$y'' + 2y' - 15y = 0$$

Solución.- El polinomio característico de la ecuación diferencial dada es:

$$m^2 + 2m - 15 = (m - 3)(m + 5) = 0$$

sus raíces son reales y distintas, las cuales son: $m_1 = -5$, $m_2 = 3$, por lo tanto el problema pertenece al *caso I*; luego entonces el conjunto fundamental de soluciones es $\{e^{-5x}, e^{3x}\}$. Aplicando la ecuación (3.13) la integral general está dada por:

$$y_g = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{3x}$$

Ejemplo 2.- Resolver la siguiente ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes sujeta a las *condiciones de Cauchy* indicadas.

$$y'' - y' = 0 \quad \text{sujeta a: } y(0) = 1, y'(0) = -1$$

Solución.- El polinomio característico de la ecuación diferencial dada es:

$$m^2 - m = m(m - 1) = 0$$

sus raíces son reales y distintas, las cuales son: $m_1 = 0$, $m_2 = 1$, por lo tanto el problema pertenece al *caso I*; luego entonces el conjunto fundamental de soluciones es $\{1, e^x\}$. Aplicando la ecuación (3.13) la integral general está dada por:

$$y_g = C_1 + C_2 e^x$$

Aplicando la primer condición de Cauchy se tiene

$$y_g(0) = 1 = C_1 + C_2 e^{(0)}, \text{ de aquí se deduce que:}$$

$$C_1 + C_2 = 1$$

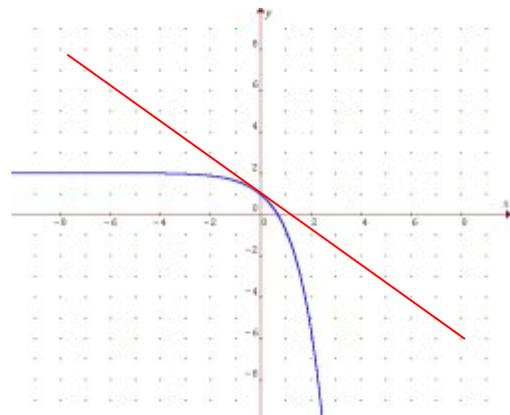


Fig. 36

La derivada de la integral general es $y_g' = C_2 e^x$ y aplicando la segunda condición de Cauchy se tiene $y_g'(0) = -1 = C_2 e^{(0)}$, de aquí se deduce que $C_2 = -1$, por lo tanto $C_1 = 2$; luego entonces la integral particular de la ecuación diferencial dada es:

$$y_p = 2 - e^x$$

En la figura 36 se puede observar que sobre el punto $(0,1)$ pasa una curva integral y que en ese punto la curva tiene una tangente cuya pendiente tiene un valor de -1

Ejemplo 3.- Resolver la siguiente ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes

$$y'' - 10y' + 25y = 0$$

Solución.- El polinomio característico de la ecuación diferencial dada es: $m^2 - 10m + 25 = (m - 5)^2 = 0$; sus raíces son reales y de multiplicidad 2, las cuales son $m_1 = m_2 = 5$, por lo tanto el problema pertenece al *caso II*; luego entonces el conjunto fundamental de soluciones es $\{e^{5x}, xe^{5x}\}$. Aplicando la ecuación (3.14) la integral general está dada por:

$$y_g = C_1 e^{5x} + C_2 x e^{5x}$$

Ejemplo 4.- Resolver la siguiente ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes

$$y^{IV} - 5y''' + 9y'' - 7y' + 2y = 0$$

Solución.- El polinomio característico de la ecuación diferencial dada es:

$$m^4 - 5m^3 + 9m^2 - 7m + 2 = 0$$

la factorización de este polinomio requiere de la división sintética (véase el Apéndice C); aplicándola se tiene:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 1 & -5 & 9 & -7 & 2 & 2 \\ & & & & & & \\ \hline & 1 & 2 & -6 & 6 & -2 & \\ \hline & 1 & -3 & 3 & -1 & 0 & \end{array}$$

De aquí que una de las raíces es $m_1 = 2$ y las restantes se obtienen del polinomio $m^3 - 3m^2 + 3m - 1 = 0$ el cual factorizado es $(m - 1)^3 = 0$. Por lo tanto la otra raíz es real y de multiplicidad 3, es decir $m_2 = m_3 = m_4 = 1$; luego entonces el problema es una combinación de los *casos I y II*; dadas las raíces encontradas, el conjunto fundamental de soluciones es $\{e^x, xe^x, x^2 e^x, e^{2x}\}$. Aplicando en forma combinada las ecuaciones (3.13) y (3.14) la integral general está dada por:

$$y_g = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x + C_4 e^{2x}$$

Ejemplo 5.- Resolver la siguiente ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes sujeta a las *condiciones de Cauchy* indicadas.

$$y'' + 9y = 0 \quad \text{sujeta a: } y(0) = 1, y'(0) = -2$$

Solución.- El polinomio característico de la ecuación diferencial dada es: $m^2 + 9 = 0$; sus raíces son imaginarias puras conjugadas, las cuales son $m_1 = 3i$, $m_2 = -3i$, por lo tanto el problema pertenece al *caso III*; luego entonces el conjunto fundamental de soluciones es $\{\sin 3x, \cos 3x\}$. Aplicando la ecuación (3.15) tomando $\alpha = 0$ y $\beta = 3$, la integral general está dada por:

$$y_g = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x$$

Aplicando la primer condición de Cauchy se tiene $y_g(0) = 1 = C_1 \sin 3(0) + C_2 \cos 3(0)$, de aquí se deduce que $C_2 = 1$. La derivada de la integral general es

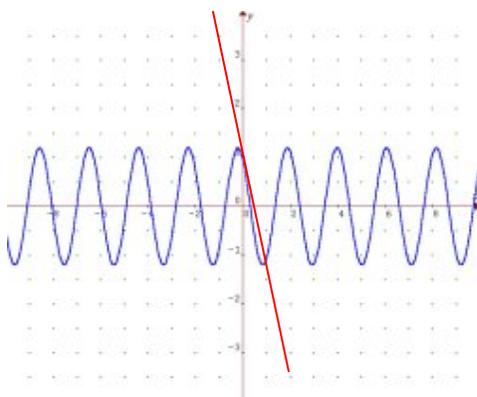


Fig. 37

$y_g' = 3C_1 \cos 3x - 3C_2 \sin 3x$ y aplicando la segunda condición de Cauchy, tomando en consideración que $C_2 = 1$, se obtiene: $y_g'(0) = -2 = 3C_1 \cos 3(0) - 3(1) \sin 3(0)$, por lo tanto $C_1 = -\frac{2}{3}$; luego entonces la integral particular de la ecuación diferencial dada es:

$$y_p = -\frac{2}{3} \sin 3x + \cos 3x$$

En la figura 37 se puede observar que en el punto $(0,1)$ pasa una curva integral y que en ese punto la curva tiene una tangente cuya pendiente tiene un valor de -2 .

Ejemplo 6.- Resolver la siguiente ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes

$$y'' - 4y' + 13y = 0$$

Solución.- El polinomio característico de la ecuación diferencial dada es:

$$m^2 - 4m + 13 = 0$$

Aplicando la fórmula general para las ecuaciones cuadráticas se obtiene:

$$m_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(13)}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i$$

por lo que sus raíces son complejas conjugadas, las cuales son $m_1 = 2 + 3i$, $m_2 = 2 - 3i$, por lo tanto el problema pertenece al *caso III*; luego entonces el conjunto fundamental de soluciones es $\{e^{2x} \operatorname{sen} 3x, e^{2x} \operatorname{cos} 3x\}$. Aplicando la ecuación (3.15) tomando $\alpha = 2$ y $\beta = 3$, la integral general está dada por:

$$y_g = C_1 e^{2x} \operatorname{sen} 3x + C_2 e^{2x} \operatorname{cos} 3x$$

Ejemplo 7.- Resolver la siguiente ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes

$$y^{IV} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0$$

Solución.- El polinomio característico de la ecuación diferencial dada es:

$$m^4 - 4m^3 + 8m^2 - 8m + 4 = 0$$

reacomodando los términos

$$m^4 + 4m^2 + 4 - 4m^3 + 4m^2 - 8m = (m^2 - 2m + 2)^2 = 0$$

es fácil verificar que las raíces del polinomio $(m^2 - 2m + 2)^2 = 0$ son $m_1 = m_3 = 1 + i$ y $m_2 = m_4 = 1 - i$, por lo tanto el problema pertenece al *caso IV*, luego entonces el conjunto fundamental de soluciones es $\{e^x \operatorname{sen} x, x e^x \operatorname{sen} x, e^x \operatorname{cos} x, x e^x \operatorname{cos} x\}$. Aplicando la ecuación (3.16) tomando $\alpha = 2$ y $\beta = 3$, la integral general está dada por:

$$y_g = (C_1 + C_2 x) e^x \operatorname{sen} x + (C_3 + C_4 x) e^x \operatorname{cos} x$$

Observación.- Es indistinto el orden en el que se toman las funciones $\operatorname{sen} \beta x$ y $\operatorname{cos} \beta x$, como se puede observar en los problemas 5, 6 y 7.

En el Apéndice C se muestran algunos conceptos matemáticos útiles para el desarrollo de los problemas de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de orden n con coeficientes constantes, como el *teorema de Bézout*, el *teorema fundamental del álgebra* y la *método de Ruffini*, mejor conocido como el *método de la división sintética*, para polinomios algebraicos. También se muestran algunos ejemplos de cómo de factoriza un polinomio para encontrar sus raíces.



Ejercicios Suplementarios

Sección 3.3 Ejercicios 3.2

En los siguientes problemas, encontrar la integral general o integral particular según sea el caso, de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de orden n .

1. $y'' - 4y' = 0$
2. $y'' - y' - 20y = 0$
3. $y'' - 6y' - 7y = 0$ sujeta a: $y(0) = 0, y'(0) = 1$
4. $y''' - 10y'' + 31y' - 30y = 0$
5. $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$ sujeta a: $y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = -1$
6. $y^{IV} + 2y''' - 7y'' - 8y' + 12y = 0$
7. $y'' - 8y' + 16y = 0$
8. $y''' - y'' - 21y' + 45y = 0$ sujeta a: $y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = -3$
9. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$
10. $y^{IV} - 10y''' + 36y'' - 56y' + 32y = 0$
11. $y^{IV} - 13y''' + 66y'' - 162y' + 189y - 81y = 0$ sujeta a:
 $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = y^{IV}(0) = 1$
12. $y''' - 8y = 0$
13. $y'' + 16y = 0$ sujeta a: $y(0) = 1, y'(0) = -2$
14. $y'' + 25y = 0$
15. $y'' + 3y = 0$
16. $y'' - 4y' + 5y = 0$
17. $y'' - 6y' + 10y = 0$ sujeta a $y(0) = 0, y'(0) = 1$
18. $y'' - 6y' + 34y = 0$
19. $y''' - 5y'' + 12y' - 8y = 0$
20. $y''' - 3y'' + 7y' - 5y = 0$
21. $y^{IV} + 8y''' + 42y'' + 104y' + 169y = 0$
22. $y^{IV} - 4y''' + 14y'' - 20y' + 25y = 0$

"Algo he aprendido en mi larga vida: que toda nuestra ciencia, contrastada con la realidad, es primitiva y pueril; y, sin embargo, es lo más valioso que tenemos"
Einstein, Albert



ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES NO HOMOGÉNEAS DE ORDEN n

Una *ecuación diferencial lineal no homogénea de orden n* tiene la forma:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = \varphi(x) \quad (3.17)$$

donde $a_1(x), a_2(x), a_3(x), \dots, a_{n-1}(x), a_n(x)$ son funciones del argumento x , y $\varphi(x)$ es una función de la variable independiente x . En algunos casos se utilizará la abreviatura **EDLNH n** cuando se refiera a una *ecuación diferencial lineal no homogénea de orden n* .

EDLNH n CON COEFICIENTES CONSTANTES

Una *ecuación diferencial lineal no homogénea de orden n con coeficientes constantes* tiene la forma:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = \varphi(x) \quad (3.18)$$

En el año 1743 aparecen los conceptos de *integrales particular* y *general*, encontrados por **Leonhard Euler** en 1739 y posteriormente **Jean Le Rond D'Alembert** en 1766, encontró que la solución general de una ecuación diferencial lineal no homogénea, es igual a la suma de una cierta *solución particular* y la *solución general* de la correspondiente ecuación homogénea. Esta suma, en la actualidad se le conoce como *solución completa* y tiene la forma:

$$y_c(x) = y_g(x) + y_p(x) \quad (3.19)$$

La integral general de la *ecuación diferencial homogénea* asociada a la ecuación (3.18), (que, en lo sucesivo, se considerará solo esta ecuación) se halla con los procedimientos descritos en la sección anterior; luego entonces el problema de la resolución de la ecuación (3.18) se reduce a la búsqueda de la solución particular. De entre un gran número de tipos de funciones $\varphi(x)$ (ya que ésta es de naturaleza arbitraria), existe un grupo especial de funciones que tiene la forma general:

$$\varphi(x) = e^{\alpha x} [P_m(x) \cos \beta x + Q_n(x) (\sen \beta x)] \quad (3.20)$$

donde $P_m(x)$ y $Q_n(x)$ son polinomios de grados m y n respectivamente y $\alpha \wedge \beta$ son números enteros. El método que se empleará en esta sección se denomina *método de selección* y consiste en proponer una solución particular del tipo:

$$\varphi(x) = x^s e^{\alpha x} [\tilde{P}_k(x) \cos \beta x + \tilde{Q}_k(x) (\sen \beta x)] \quad (3.21)$$

donde $k = \max\{m, n\}$, $\tilde{P}_k(x)$ y $\tilde{Q}_k(x)$ son polinomios de grado k cuyos coeficientes son indeterminados y s es el orden de multiplicidad de la raíz $\alpha \pm \beta i$ del *polinomio característico* asociado al primer miembro de la ecuación (3.18). Si la función $\varphi(x)$ viene dada por la forma:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \varphi_i(x), \text{ entonces la solución particular } y_p(x) \text{ se propone de la forma}$$

$$y_p(x) = \sum_{i=1}^p \lambda_i y_{ip}(x) \tag{3.22}$$

Caso	Segundo Miembro de la Ecuación Diferencial No Homogénea	Raíces del Polinomio Característico	Forma de la Solución Particular, donde $k = \max(m, n)$
I	$P_m(x)$	1. El número 0 no es raíz del polinomio característico	$\tilde{P}_k(x)$
		2. El número 0 es raíz de orden s del polinomio característico	$x^s \tilde{P}_k(x)$
II	$P_m(x)e^{\alpha x}$	1. El número α no es raíz del polinomio característico	$\tilde{P}_k(x)e^{\alpha x}$
		2. El número α es raíz de orden s del polinomio característico	$x^s \tilde{P}_k(x)e^{\alpha x}$
III	$P_m(x)\cos \beta x + Q_n(x)\sen \beta x$	1. Los números $\pm \beta i$ no son raíces del polinomio característico	$\tilde{P}_k(x)\cos \beta x + \tilde{Q}_k(x)\sen \beta x$
		2. Los números $\pm \beta i$ son raíces de orden s del polinomio característico	$x^s [\tilde{P}_k(x)\cos \beta x + \tilde{Q}_k(x)\sen \beta x]$
IV	$e^{\alpha x} [P_m(x)\cos \beta x + Q_n(x)\sen \beta x]$	1. Los números $\alpha \pm \beta i$ no son raíces del polinomio característico	$e^{\alpha x} [\tilde{P}_k(x)\cos \beta x + \tilde{Q}_k(x)\sen \beta x]$
		2. Los números $\alpha \pm \beta i$ si son raíces de orden s del polinomio característico	$x^s e^{\alpha x} [\tilde{P}_k(x)\cos \beta x + \tilde{Q}_k(x)\sen \beta x]$

Tabla 1

Como puede observarse en la tabla 1, la determinación del tipo de *solución particular* a proponer, depende poderosamente de la naturaleza de la función $\varphi(x)$ y de las raíces del *polinomio característico*. También puede observarse que en los casos I, II y III los segundos miembros de la ecuación diferencial no homogénea son casos particulares de la ecuación (3.20)

En los siguientes ejemplos se mostrará la aplicación de esta tabla en la resolución de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas con coeficientes constantes. Antes de comenzar los ejemplos de este tipo de problemas, es necesario aclarar el significado de los polinomios $\tilde{P}_n(x)$ y $\tilde{Q}_n(x)$ y del orden s de la raíz $\alpha \pm \beta i$.

Si el segundo miembro de la ecuación (3.18) es la expresión x^2 , es decir $\varphi(x) = x^2$, entonces ésta es un polinomio cuadrático y por lo tanto la solución particular propuesta se encuentra en el caso I de la tabla 1; luego entonces la expresión que se propondrá es un polinomio general de segundo grado, es decir, $y_p = \tilde{P}_2(x) = Ax^2 + Bx + C$ siempre y cuando el número cero no sea raíz del polinomio característico de la ecuación diferencial homogénea asociada. Por otro lado, supóngase que el número cero si es una raíz de multiplicidad 2, entonces la solución particular tendría la forma $y_p = x^2 \tilde{P}_2(x) = x^2(Ax^2 + Bx + C)$

Supóngase ahora que $\varphi(x) = 3x^2 \text{sen}4x + 5x \text{cos}4x$; evidentemente la solución particular se encuentra en el caso III de la tabla 1 y suponiendo también que el número 4 no es raíz del polinomio característico de la ecuación diferencial homogénea asociada; entonces $\tilde{P}_2(x) = Ax^2 + Bx + C \wedge \tilde{Q}_2(x) = Dx^2 + Ex + F$; aquí $k = \text{máx}\{2,1\}$, es decir k es el grado mayor de los polinomios $3x^2 \wedge 5x$; de esta manera la solución particular tiene la forma $y_p = (Ax^2 + Bx + C)\text{sen}4x + (Dx^2 + Ex + F)\text{cos}4x$. Por otro lado, si el número 4 si es raíz de multiplicidad 3 por ejemplo, entonces $y_p = x^3 [(Ax^2 + Bx + C)\text{sen}4x + (Dx^2 + Ex + F)\text{cos}4x]$

Ejemplo 1.- Resolver la siguiente ecuación diferencial lineal no homogénea:

$$y'' - y = x + 4$$

Solución.- La ecuación homogénea asociada es $y'' - y = 0$; su polinomio característico tiene la forma:

$$m^2 - 1 = 0$$

cuyas raíces son $m_1 = 1$, $m_2 = -1$, luego entonces la solución general es:

$$y_g = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Como puede observarse, $\varphi(x) = x + 4$, es decir es un polinomio lineal.

La solución particular a proponer se encuentra en el caso I de la tabla 1. Ahora, como el número 0 no es raíz del polinomio característico entonces la solución particular tiene la forma:

$$y_p = Ax + B$$

donde A y B son coeficientes indeterminados que se calcularán de la siguiente manera: Si y_p es una solución de la ecuación diferencial dada, entonces ésta deberá satisfacerla (*véase Pág. 20*). Como $y_p = Ax + B$, entonces $y'_p = A$ y $y''_p = 0$; sustituyendo y_p e y''_p en la ecuación diferencial dada se tiene:

$$0 - (Ax + B) = x + 4$$

$$\underbrace{-Ax}_{\uparrow} - \underbrace{B}_{\uparrow} = \underbrace{1x}_{\uparrow} + \underbrace{4}_{\uparrow}$$

dado que si dos polinomios son iguales, entonces sus coeficientes homólogos también lo son; de esta manera se tiene $A = -1$ y $B = -4$. luego entonces la forma de la solución particular es:

$$y_p = -x - 4$$

finalmente la solución general ó completa, de la ecuación diferencial no homogénea dada, es:

$$y_c = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x - 4$$

ésta, representa geométricamente una familia bi-paramétrica de funciones en el plano cartesiano.

Ejemplo 2.- Resolver la siguiente ecuación diferencial lineal no homogénea:

$$y'' + 4y' = x^2 + 3x - 4$$

Solución.- La ecuación homogénea asociada es $y'' + 4y' = 0$; su polinomio característico tiene la forma:

$$m^2 + 4m = m(m + 4) = 0$$

cuyas raíces son $m_1 = 0$, $m_2 = -4$, luego entonces la solución general es:

$$y_g = C_1 + C_2 e^{-4x}$$

Como puede observarse, $\varphi(x) = x^2 + 3x - 4$, es decir es un polinomio cuadrático. La solución particular a proponer se encuentra en el caso I de la tabla 1. Como el número 0 ahora sí es raíz del polinomio característico entonces la solución particular tiene la forma:

$$y_p = x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

donde A , B y C son coeficientes indeterminados que se calcularán como en el problema anterior

Como $y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx$, entonces $y'_p = 3Ax^2 + 2Bx + C$ y $y''_p = 6Ax + 2B$; sustituyendo y'_p e y''_p en la ecuación diferencial dada se tiene:

$$6A + 2B + 4(3Ax^2 + 2Bx + C) = x^2 + 3x - 4$$

$$\underbrace{12A}_{\uparrow} x^2 + \underbrace{(6A + 8B)}_{\uparrow} x + \underbrace{(2B + 4C)}_{\uparrow} = \underbrace{1}_{\uparrow} x^2 + \underbrace{3}_{\uparrow} x - \underbrace{4}_{\uparrow}$$

igualando los coeficientes homólogos se tiene que, $12A = 1$, $6A + 8B = 3$, $2B + 4C = -4$, al resolver las anteriores ecuaciones se obtiene: $A = \frac{1}{12}$, $B = \frac{5}{16}$, y $C = -\frac{37}{32}$; luego entonces la forma de la solución particular es:

$$y_p = \frac{1}{12}x^3 + \frac{5}{16}x^2 - \frac{37}{32}x$$

finalmente la solución general ó completa, de la ecuación diferencial no homogénea dada, es:

$$y_c = C_1 + C_2 e^{-4x} + \frac{1}{12}x^3 + \frac{5}{16}x^2 - \frac{37}{32}x$$

Ejemplo 3.- Resolver la siguiente ecuación diferencial lineal no homogénea:

$$y'' - y' - 6y = xe^{4x}$$

Solución.- La ecuación homogénea asociada es $y'' - y' - 6y = 0$; su polinomio característico tiene la forma:

$$m^2 - m - 6 = (m - 3)(m + 2) = 0$$

cuyas raíces son $m_1 = 3$, $m_2 = -2$, luego entonces la solución general es:

$$y_g = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}$$

En este caso, $\varphi(x) = xe^{4x}$, es decir es un polinomio lineal y un exponencial con $\alpha = 4$. La solución particular a proponer se encuentra en el caso II de la tabla 1. Como el número 4 no es raíz del polinomio característico entonces la solución particular tiene la forma:

$$y_p = (Ax + B)e^{4x}$$

donde A , y B son coeficientes indeterminados que deberán de ser calculados.

Como $y_p = (Ax + B)e^{4x}$, entonces $y'_p = (4Ax + A + 4B)e^{4x}$ y $y''_p = (16Ax + 8A + 16B)e^{4x}$; sustituyendo y_p , y'_p e y''_p en la ecuación diferencial dada se tiene:

$$(16Ax + 8A + 16B)e^{4x} - (4Ax + A + 4B)e^{4x} - 6(Ax + B)e^{4x} = xe^{4x}$$

$$\left(\underbrace{6A}_{\uparrow} x + \underbrace{7A + 6B}_{\uparrow} \right) e^{4x} = \left(\underbrace{1}_{\uparrow} x + \underbrace{0}_{\uparrow} \right) e^{4x}$$

igualando los coeficientes homólogos se tiene que, $6A=1$, $7A+6B=0$, al resolver las anteriores ecuaciones se obtiene: $A=\frac{1}{6}$, y $B=-\frac{7}{36}$; luego entonces la forma de la solución particular es:

$$y_p = \left(\frac{1}{6}x - \frac{7}{36}\right)e^{4x}$$

finalmente la solución general ó completa, de la ecuación diferencial no homogénea dada, es:

$$y_c = C_1e^{-2x} + C_2e^{3x} + \left(\frac{1}{6}x - \frac{7}{36}\right)e^{4x}$$

Ejemplo 4 .- Resolver la siguiente ecuación diferencial lineal no homogénea:

$$y''' - 19y' + 30y = x^2e^{2x}$$

Solución.- La ecuación homogénea asociada es $y''' - 19y' + 30y = 0$; su polinomio característico tiene la forma:

$$m^3 - 19m + 30 = 0$$

las raíces de este polinomio han de determinarse mediante la *división sintética* o *regla de Ruffini*; (véase el Apéndice C) aplicando ésta se obtienen:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 0 & -19 & 30 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & -30 & \\ \hline 1 & 2 & -15 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 0 & -19 & 30 & 3 \\ 1 & 3 & 9 & -30 & \\ \hline 1 & 3 & -10 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 0 & -19 & 30 & -5 \\ 1 & -5 & 25 & -30 & \\ \hline 1 & -5 & 6 & 0 & \end{array}$$

Con estas operaciones se obtienen las raíces $m_1=2$, $m_2=3$, $m_3=-5$. Luego entonces la solución general es:

$$y_g = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + C_3e^{-5x}$$

En este caso, $\varphi(x) = x^2e^{2x}$, es decir es un polinomio cuadrático y un exponencial con $\alpha = 2$. La solución particular a proponer se encuentra también en el caso II de la tabla 1. Como el número 2 ahora sí es raíz del polinomio característico entonces la solución particular tiene la forma:

$$y_p = x(Ax^2 + Bx + C)e^{2x} = (Ax^3 + Bx^2 + Cx)e^{2x}$$

donde A, B y C son coeficientes indeterminados que deberán de ser calculados.

Como $y_p = (Ax^3 + Bx^2 + Cx)e^{2x}$, entonces $y'_p = [2Ax^3 + (3A + 2B)x^2 + (2B + 2C)x + C]e^{2x}$ y la segunda derivada $y''_p = [4Ax^3 + (12A + 4B)x^2 + (6A + 8B + 4C)x + (2B + 4C)]e^{2x}$ y finalmente la tercera derivada $y'''_p = [8Ax^3 + (36A + 8B)x^2 + (36A + 24B + 8C)x + (6A + 12B + 12C)]e^{2x}$; sustituyendo y_p, y'_p e y'''_p en la ecuación diferencial dada se tiene:

$$\begin{aligned} & [8Ax^3 + (36A + 8B)x^2 + (36A + 24B + 8C)x + (6A + 12B + 12C)]e^{2x} - \dots \\ & \dots - 19[2Ax^3 + (3A + 2B)x^2 + (2B + 2C)x + C]e^{2x} + \dots \\ & \dots + 30(Ax^3 + Bx^2 + Cx)e^{2x} = x^2e^{2x} \end{aligned}$$

simplicando y reduciendo términos semejantes:

$$\left[\underbrace{-21A}_{\uparrow} x^2 + \underbrace{(36A - 14B)}_{\uparrow} x + \underbrace{(6A + 12B - 7C)}_{\uparrow} \right] e^{2x} = \underbrace{(1)}_{\uparrow} x^2 + \underbrace{(0)}_{\uparrow} x + \underbrace{(0)}_{\uparrow} e^{2x}$$

igualando los coeficientes homólogos se tiene que, $-21A = 1$, $36A - 14B = 0$, $6A + 12B - 7C = 0$, al resolver las anteriores ecuaciones se obtiene: $A = -\frac{1}{21}$, $B = -\frac{6}{49}$, $C = -\frac{86}{343}$; luego entonces la forma de la solución particular es:

$$y_p = \left(-\frac{1}{21}x^3 - \frac{6}{49}x^2 - \frac{86}{343}x \right) e^{2x}$$

finalmente la solución general ó completa, de la ecuación diferencial no homogénea dada, es:

$$y_c = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + C_3 e^{-5x} + \left(-\frac{1}{21}x^3 - \frac{6}{49}x^2 - \frac{86}{343}x \right) e^{2x}$$

Ejemplo 5.- Resolver la siguiente ecuación diferencial lineal no homogénea:

$$y'' - y' - 12y = x \operatorname{sen} 2x - \cos 2x$$

Solución.- La ecuación homogénea asociada es $y'' - y' - 12y = 0$; su polinomio característico tiene la forma:

$$m^2 - m - 12 = (m - 4)(m + 3) = 0$$

cuyas raíces son $m_1 = 4$, $m_2 = -3$, luego entonces la solución general es:

$$y_g = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-3x}$$

De la ecuación diferencial se determina que, $\varphi(x) = -\cos 2x + x \operatorname{sen} 2x$; aquí $P_m(x) = -1$ y $Q_n(x) = x$ y $\beta = 2$. La solución particular a proponer se encuentra en el caso III de la tabla 1. Como el número imaginario $2i$ no es raíz del polinomio característico y también $\tilde{P}_k(x) = Ax + B$ y $\tilde{Q}_k(x) = Cx + D$, siendo éstos últimos, polinomios del mayor grado de $P_m(x) \wedge Q_n(x)$ (o sea, $k = 1$) entonces la solución particular tiene la forma:

$$y_p = (Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\operatorname{sen} 2x$$

donde A, B, C y D son coeficientes indeterminados que deberán de ser calculados.

Como:

$y_p = (Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\operatorname{sen} 2x$, $y'_p = (2Cx + 2D + A)\cos 2x + (C - 2Ax - 2B)\operatorname{sen} 2x$ y la segunda derivada es $y''_p = (4C - 4Ax - 4B)\cos 2x + (-4Cx - 4D - 4A)\operatorname{sen} 2x$; sustituyendo y_p, y'_p e y''_p en la ecuación diferencial dada se tiene:

$$\begin{aligned} & (4C - 4Ax - 4B)\cos 2x + (-4Cx - 4D - 4A)\operatorname{sen} 2x - \dots \\ & \dots - \{(A + 2Cx + 2D)\cos 2x + (C - 2Ax - 2B)\operatorname{sen} 2x\} - \dots \\ & \dots - 12[(Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\operatorname{sen} 2x] = -\cos 2x + x \operatorname{sen} 2x \end{aligned}$$

simplificando y reduciendo términos semejantes:

$$\left[\left(\frac{-16A - 2C}{x} + \frac{4C - A - 16B - 2D}{\cos 2x} \right) + \left[\left(\frac{2A - 16C}{x} + \frac{2B - 4A - C - 16D}{\operatorname{sen} 2x} \right) \right] = \left(\frac{0x - 1}{\cos 2x} + \frac{1x + 0}{\operatorname{sen} 2x} \right)$$

igualando los coeficientes homólogos se tiene que:

$$-16A - 2C = 0, \quad 4C - A - 16B - 2D = -1, \quad 2A - 16C = 1, \quad \text{y} \quad 2B - 4A - C - 16D = 0$$

al resolver el sistema de ecuaciones se obtiene: $A = \frac{1}{130}$, $B = \frac{193}{4225}$, $C = -\frac{4}{65}$, y $D = \frac{129}{16900}$; luego entonces la forma de la solución particular es:

$$y_p = \left(\frac{1}{130}x + \frac{193}{4225} \right) \cos 2x + \left(-\frac{4}{65}x + \frac{129}{16900} \right) \operatorname{sen} 2x$$

finalmente la solución general ó completa, de la ecuación diferencial no homogénea dada, es:

$$y_c = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-3x} + \left(\frac{1}{130}x + \frac{193}{4225} \right) \cos 2x + \left(-\frac{4}{65}x + \frac{129}{16900} \right) \operatorname{sen} 2x$$

Ejemplo 6.- Resolver la siguiente ecuación diferencial lineal no homogénea:

$$y'' + 16y = \operatorname{sen} 4x$$

Solución.- La ecuación homogénea asociada es $y'' + 16y = 0$; su polinomio característico tiene la forma:

$$m^2 + 16 = 0$$

cuyas raíces son $m_1 = 4i$, $m_2 = -4i$, luego entonces la solución general es:

$$y_g = C_1 \cos 4x + C_2 \operatorname{sen} 4x$$

De la ecuación diferencial se determina que, $\varphi(x) = 0 \cos 4x + 1 \operatorname{sen} 4x$; aquí $P_m(x) = 0$ y $Q_n(x) = 1$ y $\beta = 4$. La solución particular a proponer se encuentra en el caso III de la tabla 1. Como el número imaginario $4i$ ahora sí es raíz del polinomio característico (en este caso $s = 1$), también $\tilde{P}_k(x) = A$ y $\tilde{Q}_k(x) = B$, siendo éstos últimos, polinomios del mayor grado de $P_m(x) \wedge Q_n(x)$ (o sea, $k = 0$), entonces la solución particular tiene la forma:

$$y_p = x[A \cos 4x + B \operatorname{sen} 4x] = Ax \cos 4x + Bx \operatorname{sen} 4x$$

donde A , y B son coeficientes indeterminados que deberán de ser calculados.

Como, $y_p = Ax \cos 4x + Bx \operatorname{sen} 4x$, $y'_p = (A + 4Bx) \cos 4x + (B - 4Ax) \operatorname{sen} 4x$ y la segunda derivada es $y''_p = (8B - 16Ax) \cos 4x + (-16Bx - 8A) \operatorname{sen} 4x$; sustituyendo y_p e y''_p en la ecuación diferencial dada se tiene:

$$\underbrace{8B \cos 4x}_{\uparrow} - \underbrace{8A \operatorname{sen} 4x}_{\uparrow} = \underbrace{0 \cdot \cos 4x}_{\uparrow} + \underbrace{1 \cdot \operatorname{sen} 4x}_{\uparrow}$$

igualando los coeficientes homólogos se tiene que, $8B = 0$, $-8A = 1$, al resolver las anteriores ecuaciones se obtiene: $A = -\frac{1}{8}$ y $B = 0$; luego entonces la forma de la solución particular es:

$$y_p = -\frac{1}{8} x \cos 4x$$

finalmente la solución general ó completa, de la ecuación diferencial no homogénea dada, es:

$$y_c = C_1 \cos 4x + C_2 \operatorname{sen} 4x - \frac{1}{8} x \cos 4x$$

Ejemplo 7.- Resolver la siguiente ecuación diferencial lineal no homogénea:

$$y'' - 4y' + 5y = e^{3x} \operatorname{sen} 2x$$

Solución.- La ecuación homogénea asociada es $y'' - 4y' + 5y = 0$; su polinomio característico tiene la forma:

$$m^2 - 4m + 5 = 0$$

cuyas raíces son $m_1 = 2 + i$, $m_2 = 2 - i$, luego entonces la solución general es:

$$y_g = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \operatorname{sen} x$$

De la ecuación diferencial se determina que, $\varphi(x) = 0 \cdot e^{3x} \cos 2x + 1 \cdot e^{3x} \operatorname{sen} 2x$; aquí $P_m(x) = 0$ y $Q_n(x) = 1$, $\alpha = 3$ y $\beta = 2$. La solución particular a proponer se encuentra en el caso IV de la tabla 1. Como el número complejo $3 \pm 2i$ no es raíz del polinomio característico, también $\tilde{P}_k(x) = A$ y $\tilde{Q}_k(x) = B$, siendo éstos últimos, polinomios del mayor grado de $P_m(x) \wedge Q_n(x)$ (o sea, $k = 0$), entonces la solución particular tiene la forma:

$$y_p = e^{3x} [A \cos 2x + B \operatorname{sen} 2x]$$

donde A , y B son coeficientes indeterminados que deberán de ser calculados.

Como, $y_p = e^{3x} [A \cos 2x + B \operatorname{sen} 2x]$, $y'_p = e^{3x} [(3A + 2B) \cos 2x + (3B - 2A) \operatorname{sen} 2x]$ y la segunda derivada es $y''_p = e^{3x} [(5A + 12B) \cos 2x + (5B - 12A) \operatorname{sen} 2x]$; sustituyendo y_p , y'_p e y''_p en la ecuación diferencial dada se tiene:

$$e^{3x} \left[\left(\underbrace{4B - 2A}_{\uparrow} \right) \cos 2x + \left(\underbrace{-4A - 2B}_{\uparrow} \right) \operatorname{sen} 2x \right] = e^{3x} \left[\underbrace{0}_{\uparrow} \cdot \cos 2x + \underbrace{1}_{\uparrow} \cdot \operatorname{sen} 2x \right]$$

igualando los coeficientes homólogos se tiene que, $4B - 2A = 0$, $-4A - 2B = 1$, al resolver las anteriores ecuaciones se obtiene: $A = -\frac{1}{5}$ y $B = -\frac{1}{10}$; luego entonces la forma de la solución particular es:

$$y_p = e^{3x} \left[-\frac{1}{5} \cos 2x - \frac{1}{10} \operatorname{sen} 2x \right]$$

finalmente la solución general ó completa, de la ecuación diferencial no homogénea dada, es:

$$y_c = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \operatorname{sen} x + e^{3x} \left[-\frac{1}{5} \cos 2x - \frac{1}{10} \operatorname{sen} 2x \right]$$

Ejemplo 8.- Resolver la siguiente ecuación diferencial lineal no homogénea:

$$y'' + 8y' + 20y = 4e^{-4x} \cos 2x - 5e^{-4x} \operatorname{sen} 2x$$

Solución.- La ecuación homogénea asociada es $y'' + 8y' + 20y = 0$; su polinomio característico tiene la forma:

$$m^2 + 8m + 20 = 0$$

cuyas raíces son $m_1 = -4 + 2i$, $m_2 = -4 - 2i$, luego entonces la solución general es:

$$y_g = C_1 e^{-4x} \cos 2x + C_2 e^{-4x} \operatorname{sen} 2x = e^{-4x} [C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x]$$

De la ecuación diferencial se determina que, $\varphi(x) = 4e^{-4x} \cos 2x - 5e^{-4x} \operatorname{sen} 2x$; aquí $P_m(x) = 4$ y $Q_n(x) = -5$, $\alpha = -4$ y $\beta = 2$. La solución particular a proponer se encuentra en el caso IV de la tabla 1. Como el número complejo $-4 \pm 2i$ ahora sí es raíz del polinomio característico (en este caso $s = 1$), también $\tilde{P}_k(x) = A$ y $\tilde{Q}_k(x) = B$, siendo éstos últimos, polinomios del mayor grado de $P_m(x) \wedge Q_n(x)$ (o sea, $k = 0$), entonces la solución particular tiene la forma:

$$y_p = xe^{-4x} [A \cos 2x + B \operatorname{sen} 2x] = Axe^{-4x} \cos 2x + Bxe^{-4x} \operatorname{sen} 2x$$

donde A , y B son coeficientes indeterminados que deberán de ser calculados.

Como:

$y_p = Axe^{-4x} \cos 2x + Bxe^{-4x} \operatorname{sen} 2x$, $y'_p = e^{-4x} \{ [A + (2B - 4A)x] \cos 2x + [B - (2A + 4B)x] \operatorname{sen} 2x \}$ y $y''_p = e^{-4x} \{ [(12A - 16B)x + (4B - 8A)] \cos 2x + [(16A + 12B)x + (-4A - 8B)] \operatorname{sen} 2x \}$; sustituyendo y_p , y'_p e y''_p en la ecuación diferencial dada se tiene:

$$e^{-4x} \left[\underbrace{4B}_{\uparrow} \cos 2x - \underbrace{4A}_{\uparrow} \operatorname{sen} 2x \right] = e^{-4x} \left[\underbrace{4}_{\uparrow} \cos 2x - \underbrace{5}_{\uparrow} \operatorname{sen} 2x \right]$$

igualando los coeficientes homólogos se tiene que, $4B = 4$, $-4A = -5$, al resolver las anteriores ecuaciones se obtiene: $A = \frac{5}{4}$ y $B = 1$; luego entonces la forma de la solución particular es:

$$y_p = xe^{-4x} \left[\frac{5}{4} \cos 2x + \operatorname{sen} 2x \right]$$

finalmente la solución general ó completa, de la ecuación diferencial no homogénea dada, es:

$$y_c = e^{-4x} [C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x] + xe^{-4x} \left[\frac{5}{4} \cos 2x + \operatorname{sen} 2x \right]$$

Ejemplo 9.- Resolver la siguiente ecuación diferencial lineal no homogénea:

$$y'' + 2y' + y = xe^{-x} \quad \text{sujeta a } y(0) = \frac{1}{2}, y'(0) = 1$$

Solución.- La ecuación homogénea asociada es $y'' + 2y' + y = 0$; su polinomio característico tiene la forma:

$$m^2 + 2m + 1 = (m + 1)^2 = 0$$

cuyas raíces son $m_1 = m_2 = -1$, luego entonces la solución general es:

$$y_g = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$$

De la ecuación diferencial se determina que, $\varphi(x) = x e^{-x}$; aquí $P_m(x) = x$ y $\alpha = -1$. La solución particular a proponer se encuentra en el caso II de la tabla 1. Como el número -1 sí es raíz del polinomio característico de multiplicidad 2, es decir $s = 2$, también $\tilde{P}_k(x) = Ax + B$, entonces la solución particular tiene la forma:

$$y_p = x^2 (Ax + B) e^{-x} = (Ax^3 + Bx^2) e^{-x}$$

donde A , y B son coeficientes indeterminados que deberán de ser calculados.

Como, $y_p = (Ax^3 + Bx^2) e^{-x}$, $y'_p = [-Ax^3 + (3A - B)x^2 + 2Bx] e^{-x}$ y la segunda derivada $y''_p = [Ax^3 + (B - 6A)x^2 + (6A - 4B)x + 2B] e^{-x}$ entonces, sustituyendo y_p , y'_p e y''_p en la ecuación diferencial dada se tiene:

$$\begin{aligned} & [Ax^3 + (B - 6A)x^2 + (6A - 4B)x + 2B] e^{-x} + \dots \\ & \dots + 2[-Ax^3 + (3A - B)x^2 + 2Bx] e^{-x} + \dots \\ & \dots + (Ax^3 + Bx^2) e^{-x} = x e^{-x} \end{aligned}$$

simplificando y reduciendo términos semejantes:

$$\left(\underbrace{6A}_{\uparrow} x + \underbrace{2B}_{\uparrow} \right) e^{-x} = \left(\underbrace{1}_{\uparrow} \cdot x + \underbrace{0}_{\uparrow} \right) e^{-x}$$

igualando los coeficientes homólogos se tiene que, $6A = 1$, $2B = 0$, al resolver las anteriores ecuaciones se obtiene: $A = \frac{1}{6}$ y $B = 0$; luego entonces la forma de la solución particular es:

$$y_p = \frac{1}{6} x^3 e^{-x}$$

finalmente la solución general ó completa, de la ecuación diferencial no homogénea dada, es:

$$y_c = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + \frac{1}{6} x^3 e^{-x}$$

Se procede ahora a la determinación de los valores de las constantes arbitrarias C_1 y C_2 .

Aplicando la primer condición de Cauchy se tiene:

$$y_c(0) = \frac{1}{2} = C_1 e^{-0} + C_2 (0) e^{-0} + \frac{1}{6} (0)^3 e^{-0}, \text{ de aquí se deduce que } C_1 = \frac{1}{2}.$$

La derivada de la solución completa es $y_c = -C_1 e^{-x} + (1-x)C_2 e^{-x} + \frac{1}{6}(3-x)x^2 e^{-x}$ y aplicando la segunda condición de Cauchy, tomando en consideración que $C_1 + C_2 = \frac{1}{2}$, se obtiene:

$$y'_c(0) = 1 = -C_1 e^{-0} + (1-0)C_2 e^{-0} + \frac{1}{6}(3-0)(0)^2 e^{-0},$$

por lo tanto $C_1 = \frac{1}{2}$ y $C_2 = \frac{3}{2}$; luego entonces la integral particular de la ecuación diferencial dada es:

$$y_p = e^{-x} \left(\frac{1}{6} x^3 + \frac{3}{2} x + \frac{1}{2} \right)$$

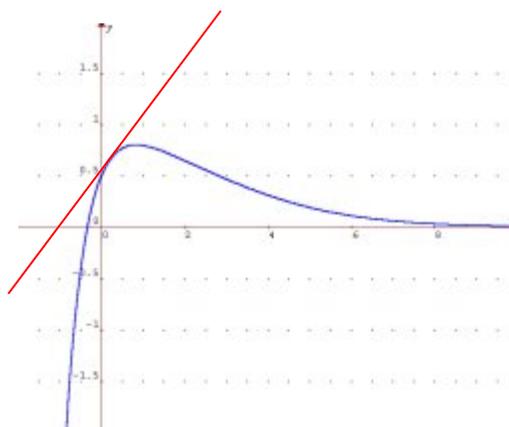


Fig. 38

En la figura 38 se puede observar que por el punto $(0, \frac{1}{2})$ pasa una curva integral y que en ese punto la curva tiene una recta tangente cuya pendiente tiene un valor de 1.

Observación.- Como se pudo observar, en todos los anteriores ejemplos $a_n = 1$. De no ser así, entonces se tiene que dividir la ecuación (3.18) por el factor a_n y lograr con ello que el coeficiente de la máxima derivada sea la unidad y aplicar la metodología expuesta en los anteriores párrafos.



Ejercicios Suplementarios

Sección 3.4 Ejercicios 3.3

En los siguientes problemas, encontrar la integral general o integral particular según sea el caso, de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas de orden n .

1. $y'' + 3y' - 10y = 3x^2 + 1$
2. $y'' - 9y' + 20y = 1 - x^3$
3. $y'' - 5y' = 2x^2 - x + 1$
4. $y''' - 4y'' = 2x - 1$
5. $y''' + 8y'' + 17y' + 10y = 3x^2$
6. $y'' - 6y' + 9y = 4e^{2x}$
7. $y'' - 12y' + 35y = 3xe^{-x}$
8. $y'' - 4y = xe^{2x}$
9. $y'' + 2y' + y = 5e^{-x}$

10. $y'' - 4y' + 4y = 2x^2 e^{2x}$
11. $y'' + 36y = 5\text{sen}4x$
12. $y''' - 2y'' + 25y' - 50y = -2\cos x$
13. $y'' + 81y = 7x^2 \cos 7x$
14. $y'' + 4y = 3x\text{sen}2x$
15. $y''' - 18y'' + 81y = \text{sen}3x$
16. $y'' - 10y' + 26y = e^{2x}\text{sen}x$
17. $y'' - 2y' + 10y = e^x\text{sen}3x$
18. $y'' - 10y' + 34y = 2e^{5x}\text{sen}3x - 3e^{5x}\text{sen}3x$
19. $y'' + 4y' + 53y = e^{-x}\text{sen}4x$
20. $y''' - 11y'' + 44y' - 60y = e^{3x}\text{sen}4x$

Sección

3.5

"Muchos matemáticos han intentado en vano en estos días, descubrir algún orden en la secuencia de los números primos, y, tenemos razón para creer que esto es un misterio en el cual la mente humana nunca penetrará"
Euler, Leonhard



MÉTODO DE VARIACIÓN DE PARAMETROS PARA EDLNHn CON COEFICIENTES CONSTANTES

Es evidente que el método de selección visto en la sección anterior, está limitado solo a funciones del tipo:

$$\varphi(x) = e^{\alpha x} [P_m(x) \cos \beta x + Q_n(x) (\text{sen} \beta x)]$$

es decir, la función $\varphi(x)$ puede contener únicamente polinomios algebraicos, senos y cosenos del argumento x ó exponenciales del mismo. En otras palabras si la ecuación diferencial (3.14) tiene como segundo miembro a una función del tipo $\varphi(x) = \tan x$, entonces *el método de selección* no aplica, estableciéndose así una seria limitante para funciones más generales. El método que se mostrará en esta sección contrarresta precisamente esta limitante.

MÉTODO DE VARIACIÓN DE PARÁMETROS

Históricamente el método de *variación de parámetros* fue introducido por **Leonhard Euler** (1707-1783) en 1739 y que posteriormente **Joseph Louis Lagrange** (1736-1813) en 1774, lo elevó a la categoría de procedimiento general. Este método se mostrará en esta sección y se aplicará en la resolución de *ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas con coeficientes constantes*.

ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL NO HOMOGÉNEA DE ORDEN n

Sea una ecuación diferencial lineal no homogénea de coeficientes constantes

ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL NO HOMOGÉNEA DE SEGUNDO ORDEN

Sea una ecuación diferencial lineal de orden n no homogénea con coeficientes constantes

$$y'' + b_1 y' + b_0 y = \psi(x) \quad (3.29)$$

Se propone una solución general de la ecuación (3.25) de la forma:

$$y_c(x) = y_g(x) + y_p(x)$$

donde $y_g(x)$ es la integral general de la ecuación diferencial lineal homogénea

$$y'' + b_1 y' + b_0 y = 0 \quad (3.30)$$

y la solución particular $y_p(x)$ es de la siguiente forma:

$$y_p(x) = d_1(x)y_1(x) + d_2(x)y_2(x) \quad (3.31)$$

donde $\{y_1, y_2\}$ es el conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (3.30). Aplicando la relación (3.28) para $n = 2$, los *parámetros variables* $d_1(x) \wedge d_2(x)$ se relacionan mediante las expresiones:

$$d_1(x) = \int \frac{W_1}{W} dx \quad y \quad d_2(x) = \int \frac{W_2}{W} dx \quad (3.32)$$

donde *los wronskianos* W , W_1 y W_2 están dados por las siguientes fórmulas:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \psi(x) & y_2' \end{vmatrix} \quad y \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \psi(x) \end{vmatrix} \quad (3.33)$$

de esta manera la integral general o solución completa de (3.29) viene dada por:

$$y_c = y_g + y_1 \int \frac{W_1}{W} dx + y_2 \int \frac{W_2}{W} dx \quad (3.34)$$

ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL NO HOMOGÉNEA DE TERCER ORDEN

Sea una ecuación diferencial lineal de orden n no homogénea con coeficientes constantes

$$y''' + b_2 y'' + b_1 y' + b_0 y = \psi(x) \quad (3.35)$$

Se propone también, una solución general de la ecuación (3.35) de la forma:

$$y_c(x) = y_g(x) + y_p(x)$$

donde $y_g(x)$ es la integral general de la ecuación diferencial lineal homogénea

$$y''' + b_2 y'' + b_1 y' + b_0 y = 0 \quad (3.36)$$

y la solución particular $y_p(x)$ es de la siguiente forma:

$$y_p(x) = d_1(x)y_1(x) + d_2(x)y_2(x) + d_3(x)y_3(x) \quad (3.37)$$

donde $\{y_1, y_2, y_3\}$ es el conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (3.36). Aplicando la relación (3.28) para $n = 3$, los *parámetros variables* $d_1(x), d_2(x) \wedge d_3(x)$ se relacionan mediante las expresiones:

$$d_1(x) = \int \frac{W_1}{W} dx, \quad d_2(x) = \int \frac{W_2}{W} dx \quad \text{y} \quad d_3(x) = \int \frac{W_3}{W} dx \quad (3.38)$$

donde *los wronskianos* W, W_1, W_2 y W_3 están dados por las siguientes fórmulas:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 & y_3 \\ 0 & y_2' & y_3' \\ \psi(x) & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}, \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 & y_3 \\ y_1' & 0 & y_3' \\ y_1'' & \psi(x) & y_3'' \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad W_3 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & 0 \\ y_1' & y_2' & 0 \\ y_1'' & y_2'' & \psi(x) \end{vmatrix} \quad (3.39)$$

de esta manera la integral general o solución completa de (3.35) viene dada por:

$$y_c = y_g + y_1 \int \frac{W_1}{W} dx + y_2 \int \frac{W_2}{W} dx + y_3 \int \frac{W_3}{W} dx \quad (3.40)$$

Ejemplo 1.- Resolver la siguiente ecuación diferencial lineal no homogénea:

$$3y'' + 75y = 6 \sec 5x$$

Solución.- Dividiendo la ecuación diferencial dada por 3, la ecuación homogénea asociada es $y'' + 25y = 0$; su polinomio característico tiene la forma:

$$m^2 + 25 = 0$$

cuyas raíces son $m_1 = 5i$, $m_2 = -5i$, luego entonces la solución general es:

$$y_g = C_1 \cos 5x + C_2 \sen 5x$$

de esta manera $y_1 = \cos 5x \wedge y_2 = \operatorname{sen} 5x$.

La ecuación diferencial reducida es $y'' + 25y = 2 \operatorname{sec} 5x$. Aplicando las relaciones (3.33) se tiene:

$$W = \begin{vmatrix} \cos 5x & \operatorname{sen} 5x \\ -5 \operatorname{sen} 5x & 5 \cos 5x \end{vmatrix} = 5(\operatorname{sen}^2 5x + \cos^2 5x), \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} 5x \\ 2 \operatorname{sec} 5x & 5 \cos 5x \end{vmatrix} = -2 \operatorname{sen} 5x \operatorname{sec} 5x$$

$$\text{y } W_2 = \begin{vmatrix} \cos 5x & 0 \\ -5 \operatorname{sen} 5x & 2 \operatorname{sec} 5x \end{vmatrix} = 2 \cos 5x \operatorname{sec} 5x$$

de esta manera $W = 5$, $W_1 = -2 \tan 5x$ y $W_2 = 2$. Aplicando ahora las relaciones (3.32) se obtiene:

$$d_1(x) = -\int \frac{2 \tan 5x}{5} dx = \frac{2}{25} \ln(\cos 5x) \quad \text{y} \quad d_2(x) = \int \frac{2}{5} dx = \frac{2}{5} x$$

empleando la relación (3.31) la solución particular propuesta tiene la forma:

$$y_p = \frac{2}{25} \ln(\cos 5x) \cdot \cos 5x + \frac{2}{5} x \operatorname{sen} 5x$$

finalmente la solución general de la ecuación diferencial dada es:

$$y_c = C_1 \cos 5x + C_2 \operatorname{sen} 5x + \frac{2}{25} \ln(\cos 5x) \cdot \cos 5x + \frac{2}{5} x \operatorname{sen} 5x$$

Ejemplo 2.- Resolver la siguiente ecuación diferencial lineal no homogénea:

$$y'' + 2y' + y = xe^{-x}$$

Solución.- La ecuación homogénea asociada es $y'' + 2y' + y = 0$; su polinomio característico tiene la forma:

$$m^2 + 2m + 1 = (m + 1)^2 = 0$$

cuyas raíces son $m_1 = m_2 = -1$, luego entonces la solución general es:

$$y_g = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$$

de esta manera $y_1 = e^{-x} \wedge y_2 = x e^{-x}$. Aplicando las relaciones (3.33) se tiene:

$$W = \begin{vmatrix} e^{-x} & x e^{-x} \\ -e^{-x} & (1-x)e^{-x} \end{vmatrix} = (1-x)e^{-2x} + x e^{-2x}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x e^{-x} \\ x e^{-x} & (1-x)e^{-x} \end{vmatrix} = -x^2 e^{-2x}$$

$$\text{y } W_2 = \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & x e^{-x} \end{vmatrix} = x e^{-2x}$$

de esta manera $W = e^{-2x}$, $W_1 = -x^2 e^{-2x}$ y $W_2 = x e^{-2x}$. Aplicando ahora las relaciones (3.32) se obtiene:

$$d_1(x) = -\int \frac{x^2 e^{-2x}}{e^{-2x}} dx = -\frac{x^3}{3} \quad \text{y} \quad d_2(x) = \int \frac{x e^{-2x}}{e^{-2x}} dx = \frac{x^2}{2}$$

empleando la relación (3.31) la solución particular propuesta tiene la forma: $y_p = -\frac{x^3}{3}(e^{-x}) + \frac{x^2}{2}(x e^{-x})$, de esta manera:

$$y_p = \frac{1}{6} x^3 e^{-x}$$

finalmente la solución general de la ecuación diferencial dada es:

$$y_c = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + \frac{1}{6} x^3 e^{-x}$$

Ejemplo 3.- Resolver la siguiente ecuación diferencial lineal no homogénea:

$$y'' - 9y' + 20y = \frac{1}{x}$$

Solución.- La ecuación homogénea asociada es $y'' - 9y' + 20y = 0$; su polinomio característico tiene la forma:

$$m^2 - 9m + 20 = (m - 4)(m - 5) = 0$$

cuyas raíces son $m_1 = 4$, $m_2 = 5$, luego entonces la solución general es:

$$y_g = C_1 e^{4x} + C_2 e^{5x}$$

de esta manera $y_1 = e^{4x} \wedge y_2 = e^{5x}$. Aplicando las relaciones (3.33) se tiene:

$$W = \begin{vmatrix} e^{4x} & e^{5x} \\ 4e^{4x} & 5e^{5x} \end{vmatrix} = 5e^{9x} - 4e^{9x}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{5x} \\ \frac{1}{x} & 5e^{5x} \end{vmatrix} = -\frac{e^{5x}}{x}$$

$$\text{y} \quad W_2 = \begin{vmatrix} e^{4x} & 0 \\ 4e^{4x} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{e^{4x}}{x}$$

de esta manera $W = e^{9x}$, $W_1 = -\frac{1}{x} e^{5x}$ y $W_2 = \frac{1}{x} e^{4x}$. Aplicando ahora las relaciones (3.32) se obtiene:

$$d_1(x) = \int \frac{-\frac{1}{x}e^{5x}}{e^{9x}} dx = -\int_0^x \frac{dt}{te^{4t}} \quad \text{y} \quad d_2(x) = \int \frac{\frac{1}{x}e^{4x}}{e^{9x}} dx = \int_0^x \frac{dt}{te^{5t}}$$

empleando la relación (3.31) la solución particular propuesta tiene la forma:

$$y_p = -e^{4x} \int_0^x \frac{dt}{te^{4t}} + e^{5x} \int_0^x \frac{dt}{te^{5t}}$$

finalmente la solución general de la ecuación diferencial dada es:

$$y_g = C_1 e^{4x} + C_2 e^{5x} - e^{4x} \int_0^x \frac{dt}{te^{4t}} + e^{5x} \int_0^x \frac{dt}{te^{5t}}$$

Ejemplo 4.- Resolver la siguiente ecuación diferencial lineal no homogénea:

$$y'' + y = x \quad \text{sujeta a} \quad y(0) = \frac{\pi}{2}, y'(0) = -1$$

Solución.- La ecuación homogénea asociada es $y'' + y = 0$; su polinomio característico tiene la forma: $m^2 + 1 = 0$, cuyas raíces son $m_1 = i$, $m_2 = -i$, luego entonces la solución general es:

$$y_g = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$$

de esta manera $y_1 = \cos x \wedge y_2 = \operatorname{sen} x$. Aplicando las relaciones (3.33) se tiene:

$$W = \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} x \\ x & \cos x \end{vmatrix} = -x \operatorname{sen} x$$

$$\text{y} \quad W_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\operatorname{sen} x & x \end{vmatrix} = x \cos x$$

de esta manera $W = 1$, $W_1 = -x \operatorname{sen} x$ y $W_2 = x \cos x$. Aplicando ahora las relaciones (3.32) se obtiene:

$$d_1(x) = \int \frac{-x \operatorname{sen} x}{1} dx = x \cos x - \operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad d_2(x) = \int \frac{x \cos x}{1} dx = \cos x + x \operatorname{sen} x$$

empleando la relación (3.31) la solución particular propuesta tiene la forma:

$$\begin{aligned} y_p &= (\cos x)(x \cos x - \operatorname{sen} x) + (\operatorname{sen} x)(\cos x + x \operatorname{sen} x) \\ &= x \cos^2 x - \operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen} x \cos x + x \operatorname{sen}^2 x \\ &= x(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x) \end{aligned}$$

finalmente:

$$y_p = x$$

finalmente la solución general de la ecuación diferencial dada es:

$$y_c = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + x$$

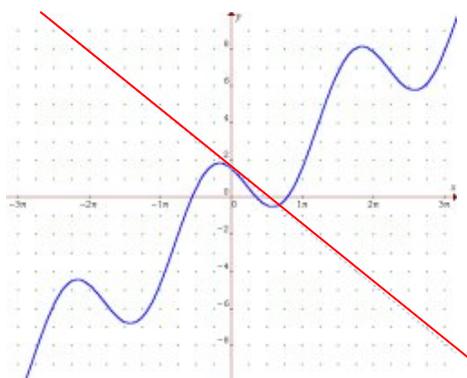


Fig. 39

Aplicando la primer condición de Cauchy se tiene, $y_c(0) = \frac{\pi}{2} = C_1 \cos(0) + C_2 \operatorname{sen}(0) + 0$ de donde se deduce que $C_1 = \frac{\pi}{2}$. Derivando la solución completa se obtiene, $y'_c = -C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x + 1$; aplicando la segunda condición de Cauchy se tiene, $y'_c(0) = -1 = -C_1 \operatorname{sen}(0) + C_2 \cos(0) + 1$, de donde se deduce que $C_2 = -2$, con lo cual la solución particular final que satisface las condiciones de Cauchy es:

$$y_p = \frac{\pi}{2} \cos x - 2 \operatorname{sen} x + x$$

En la figura 39 se puede observar que por el punto $(0, \frac{\pi}{2})$ pasa una curva integral y que en ese punto la curva tiene una recta tangente cuya pendiente tiene un valor de -1 .

Ejemplo 5.- Resolver la siguiente ecuación diferencial lineal no homogénea:

$$y''' - 19y' + 30y = x^2 e^{2x}$$

Solución.- La ecuación homogénea asociada es $y''' - 19y' + 30y = 0$; su polinomio característico tiene la forma:

$$m^3 - 19m + 30 = 0$$

por el problema del ejemplo 4 visto en la página 119, sus raíces son: $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $m_3 = -5$; por lo tanto la integral general tiene la forma:

$$y_g = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + C_3 e^{-5x}$$

de manera que $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{3x} \wedge y_3 = e^{-5x}$ Aplicando las relaciones (3.39) se obtiene:

$$W = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} & e^{-5x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} & -5e^{-5x} \\ 4e^{2x} & 9e^{3x} & 25e^{-5x} \end{vmatrix} = 75 - 20 + 18 - 12 - 50 + 45 = 56$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{3x} & e^{-5x} \\ 0 & 3e^{3x} & -5e^{-5x} \\ x^2 e^{2x} & 9e^{3x} & 25e^{-5x} \end{vmatrix} = x^2 e^{2x} (-5e^{-2x} - 3e^{-2x}) = -8x^2$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 & e^{-5x} \\ 2e^{2x} & 0 & -5e^{-5x} \\ 4e^{2x} & x^2 e^{2x} & 25e^{-5x} \end{vmatrix} = -x^2 e^{2x} (-5e^{-3x} - 2e^{-3x}) = 7x^2 e^{-x}$$

finalmente el último *wronskiano* tiene la forma:

$$W_3 = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} & 0 \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} & 0 \\ 4e^{2x} & 9e^{3x} & x^2 e^{2x} \end{vmatrix} = x^2 e^{2x} (3e^{5x} - 2e^{5x}) = x^2 e^{7x}$$

de esta manera $W = 56$, $W_1 = -8x^2$, $W_2 = 7x^2 e^{-x}$ y $W_3 = x^2 e^{7x}$. Ahora aplicando las relaciones (3.38) se tiene:

$$d_1(x) = \int \frac{-8x^2}{56} dx = -\frac{1}{7} \int x^2 dx = -\frac{1}{21} x^3$$

$$d_2(x) = \int \frac{7x^2 e^{-x}}{56} dx = \frac{1}{8} \int x^2 e^{-x} dx = -\frac{1}{8} e^{-x} (x^2 + 2x + 2)$$

$$d_3(x) = \int \frac{x^2 e^{7x}}{56} dx = \frac{1}{56} \int x^2 e^{7x} dx = \frac{1}{19208} e^{7x} (49x^2 - 14x + 2)$$

Aplicando la fórmula (3.37) se obtiene:

$$y_p = e^{2x} \left(-\frac{1}{21} x^3 \right) + e^{3x} \left[-\frac{1}{8} e^{-x} (x^2 + 2x + 2) \right] + e^{-5x} \left[\frac{1}{19208} e^{7x} (49x^2 - 14x + 2) \right]$$

simplificando:

$$y_p = \left(-\frac{1}{21} x^3 - \frac{6}{49} x^2 - \frac{86}{343} x - \frac{600}{2401} \right) e^{2x}$$

Nota. Si se compara este resultado con el obtenido en la página 119 se observará que hay una diferencia en el término $-\frac{600}{2401}$. Esta diferencia, es absorbida por el término $C_1 e^{2x}$ de la integral general de la ecuación diferencial homogénea asociada.

Finalmente la integral general de la ecuación diferencial dada en el presente ejemplo es:

$$y_c = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + C_3 e^{-5x} + \left(-\frac{1}{21}x^3 - \frac{6}{49}x^2 - \frac{86}{343}x - \frac{600}{2401}\right)e^{2x}$$



Ejercicios Suplementarios

Sección 3.5 Ejercicios 3.4

En los siguientes problemas, encontrar la integral general o integral particular según sea el caso, de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas de orden n aplicando el método de variación de parámetros.

1. $y'' + 4y = \sec(2x)$
2. $y'' + y = \tan(x)$
3. $y'' - y = \frac{e^x}{e^x - 1}$
4. $y'' + y' = \frac{1}{x}$
5. $y'' + 2y' = \frac{1}{x^2}$
6. $y'' + 3y' + 2y = \frac{x}{(x-1)^2}$
7. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \csc(x)$
8. $y'' + y = \sec(x)\tan(x)$
9. $y'' + y = \sec^2(x)$
10. $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}$
11. $y'' + 3y' - 10y = 3x^2 + 1$
12. $y'' - 9y' + 20y = 1 - x^3$
13. $y'' - 5y' = 2x^2 - x + 1$
14. $y'' - 4y = xe^{2x}$
15. $y'' + 2y' + y = 5e^{-x}$
16. $y'' - 4y' + 4y = 2x^2 e^{2x}$
17. $y'' + 36y = 5\operatorname{sen}4x$
18. $y''' - 2y'' + 25y' - 50y = -2\cos x$
19. $y''' - 11y'' + 44y' - 60y = e^{3x}\operatorname{sen}4x$
20. $y''' - 4y'' = 2x - 1$



ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE CAUCHY- EULER

DEFINICIÓN

Una ecuación diferencial lineal de orden n , de la forma:

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = \varphi(x) \quad (3.41)$$

donde los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$, son constantes, se conoce como la **ecuación diferencial lineal de Cauchy-Euler** o **ecuación equidimensional**. En algunos casos se utilizará la abreviatura **EDLNHn** cuando se refiera a una **ecuación diferencial lineal de Cauchy-Euler**.

ECUACIÓN DE CAUCHY-EULER LINEAL HOMOGÉNEA DE SEGUNDO ORDEN

La **ecuación de Cauchy-Euler homogénea de segundo orden**, adquiere la forma:

$$ax^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy = 0 \quad (3.42)$$

donde a, b y c son constantes.

MÉTODO DE SOLUCIÓN

Se propone una solución de la forma $y = x^m$, donde m es un parámetro a determinar.

La primera y segunda derivada de la solución propuesta serán:

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1} \quad \text{y} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}$$

Sustituyendo estas derivadas en la ecuación de Cauchy-Euler de segundo orden se obtiene:

$$ax^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy = x^m (am(m-1) + bm + c)$$

Así, $y = x^m$, es una solución de la ecuación diferencial dada, siempre que m sea solución de la **ecuación auxiliar característica**:

$$am(m-1) + bm + c = 0$$

ó de otra manera:

$$am^2 + (b-a)m + c = 0 \quad (3.43)$$

Existen tres casos distintos en la resolución de la *ecuación característica* o *polinomio característico*, dependiendo de la naturaleza de las raíces, las cuales pueden ser: reales distintas, reales múltiples o complejas.

CASO I RAÍCES REALES Y DISTINTAS

Sean $m_1 \wedge m_2$, raíces reales del *polinomio característico*, tales que $m_1 \neq m_2$. El conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial de Cauchy-Euler es:

$$\{x^{m_1}, x^{m_2}\}$$

La integral general tendrá la forma:

$$y_g = C_1 x^{m_1} + C_2 x^{m_2} \quad (3.44)$$

CASO II RAÍCES REALES MÚLTIPLES

Si las raíces del *polinomio característico* son iguales, es decir $m_1 = m_2$, entonces, el conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial de Cauchy-Euler es:

$$\{x^{m_1}, x^{m_1} \ln x\}$$

La integral general tendrá la forma:

$$y_g = C_1 x^{m_1} + C_2 x^{m_1} \ln x \quad (3.45)$$

CASO III RAÍCES COMPLEJAS CONJUGADAS

Si las raíces del *polinomio característico* son de la forma $m_1 = \alpha + \beta i \wedge m_2 = \alpha - \beta i$ donde $\alpha \wedge \beta > 0$ son reales, entonces el conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial de Cauchy-Euler es

$$\{x^\alpha \cos(\beta \ln x), x^\alpha \operatorname{sen}(\beta \ln x)\}$$

y finalmente la integral general tendrá la forma:

$$y_g = x^\alpha [C_1 \cos(\beta \ln x) + C_2 \operatorname{sen}(\beta \ln x)] \quad (3.46)$$

Ejemplo 1.- Resolver la siguiente ecuación diferencial homogénea de Cauchy-Euler

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$$

Solución.- Aplicando la relación (3.43) con $a = 1$, $b = -2$ y $c = 2$, el polinomio característico tiene la forma:

$$m^2 - 3m + 2 = 0$$

cuyas raíces son $m_1 = 1$, $m_2 = 2$; luego entonces el conjunto fundamental de soluciones es $\{x, x^2\}$ por lo tanto la integral general de la ecuación diferencial dada tiene la forma:

$$y_g = C_1 x + C_2 x^2$$

Ejemplo 2.- Resolver la siguiente ecuación diferencial homogénea de Cauchy-Euler

$$x^2 y'' + 11xy' + 25y = 0$$

Solución.- Aplicando la relación (3.43) con $a = 1$, $b = 11$ y $c = 25$, el polinomio característico tiene la forma:

$$m^2 + 10m + 25 = (m + 5)^2 = 0$$

cuyas raíces reales y repetidas, son $m_1 = m_2 = -5$; luego entonces el conjunto fundamental de soluciones es $\{x^{-5}, x^{-5} \ln x\}$ por lo tanto la integral general de la ecuación diferencial dada tiene la forma:

$$y_g = C_1 x^{-5} + C_2 x^{-5} \ln x$$

Ejemplo 3.- Resolver la siguiente ecuación diferencial homogénea de Cauchy-Euler

$$x^2 y'' - xy' + 2y = 0$$

Solución.- Aplicando la relación (3.43) con $a = 1$, $b = -1$ y $c = 2$, el polinomio característico tiene la forma:

$$m^2 - 2m + 2 = 0$$

cuyas raíces complejas, son $m_1 = 1 + i$, $m_2 = 1 - i$, con $\alpha = 1$ y $\beta = 1$; luego entonces el conjunto fundamental de soluciones es $\{x \cos(\ln x), x \operatorname{sen}(\ln x)\}$. Por lo tanto la integral general de la ecuación diferencial dada tiene la forma:

$$y_g = x [C_1 \cos(\ln x) + C_2 \operatorname{sen}(\ln x)]$$

Ejemplo 4.- Resolver la siguiente ecuación diferencial homogénea de Cauchy-Euler

$$x^2 y'' - 3xy' = 0 \quad \text{sujeta a} \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$$

Solución.- Aplicando la relación (3.43) con $a = 1$, $b = -1$ y $c = 2$, el polinomio característico tiene la forma: $m^2 - 4m = m(m - 4) = 0$ cuyas raíces reales son $m_1 = 0$, $m_2 = 4$; luego entonces el conjunto fundamental de soluciones es $\{1, x^4\}$. Por lo tanto la integral general de la ecuación diferencial dada tiene la forma:

$$y_g = C_1 + C_2 x^4$$

Aplicando la primera condición de Cauchy se tiene: $y_g(0) = 1 = C_1 + C_2(0)^4$, de donde $C_1 = 1$. Por otro lado $y'_g = 4C_2 x^3$, aplicando la segunda condición de Cauchy a esta expresión: $y'_g(0) = 0 = 4C_2(0)^3$ de donde se deduce que C_2 es indeterminado, esto quiere decir que en el punto $(0,1)$ pasa una infinidad de curvas que satisfacen las condiciones iniciales. Eligiendo $C_2 = 0$, una integral particular sería:

$$y_p = 1$$

ECUACIÓN DE CAUCHY-EULER LINEAL NO HOMOGÉNEA DE SEGUNDO ORDEN

La *ecuación diferencial de Cauchy-Euler lineal no homogénea de segundo orden* tiene la forma:

$$ax^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy = \varphi(x) \quad (3.47)$$

MÉTODO DE SOLUCIÓN

La integral general o solución completa de la ecuación (3.47) viene dada por:

$$y_c = y_g + y_p$$

donde y_g es la integral general de la ecuación diferencial de Cauchy-Euler homogénea asociada; esta integral general puede ser calculada a partir de las (3.31), (3.32) ó (3.33). Por otro lado la integral particular y_p se calcula mediante el *método de variación de parámetros* (visto en la sección anterior).

Ejemplo 5.- Resolver la siguiente ecuación diferencial no homogénea de Cauchy-Euler

$$x^2 y'' + xy' - y = x^2 e^{5x}$$

Solución.- Aplicando la relación (3.43) con $a = 1$, $b = 1$ y $c = -1$, el polinomio característico tiene la forma:

$$m^2 - 1 = (m+1)(m-1) = 0$$

cuyas raíces complejas, son $m_1 = 1$, $m_2 = -1$; luego entonces el conjunto fundamental de soluciones es $\{x, x^{-1}\}$. Por lo tanto la integral general de la ecuación diferencial dada tiene la forma:

$$y_g = C_1x + C_2x^{-1}$$

Dividiendo la ecuación diferencial dada por x^2 se tiene:

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = e^{5x}$$

Aplicando las relaciones (3.33) vistas en la sección 3.5 y tomando en cuenta que $y_1 = x \wedge y_2 = x^{-1}$, entonces

$$W = \begin{vmatrix} x & \frac{1}{x} \\ 1 & -\frac{1}{x^2} \end{vmatrix} = -\frac{x^2+1}{x^3}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{x} \\ e^{5x} & -\frac{1}{x^2} \end{vmatrix} = -\frac{e^{5x}}{x} \quad y \quad W_2 = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & e^{5x} \end{vmatrix} = xe^{5x}$$

Aplicando la relación (3.32) se obtiene:

$$d_1(x) = \int \frac{-\frac{e^{5x}}{x}}{-\frac{x^2+1}{x^3}} dx = \int \frac{x^2 e^{5x}}{x^2+1} dx = \frac{1}{5}e^{5x} - \int_0^x \frac{e^{5t}}{t^2+1} dt \quad y$$

$$d_2(x) = \int \frac{\frac{e^{5x}}{x}}{-\frac{x^2+1}{x^3}} dx = -\int \frac{x^2 e^{5x}}{x^2+1} dx = -\frac{1}{5}e^{5x} + \int_0^x \frac{e^{5t}}{t^2+1} dt$$

Ahora, aplicando la ecuación (3.31) se tiene:

$$y_p = \frac{1}{5}xe^{5x} - x \int_0^x \frac{e^{5t}}{t^2+1} dt - \frac{e^{5x}}{5x} + \frac{1}{x} \int_0^x \frac{e^{5t}}{t^2+1} dt$$

finalmente la solución general de la ecuación diferencial dada es:

$$y_c = C_1x + C_2x^{-1} + \frac{1}{5}xe^{5x} - x \int_0^x \frac{e^{5t}}{t^2+1} dt - \frac{1}{5}x^{-1}e^{5x} + x^{-1} \int_0^x \frac{e^{5t}}{t^2+1} dt$$



Ejercicios Suplementarios

Sección 3.6 Ejercicios 3.5

En los siguientes problemas, encontrar la integral general o integral particular según sea el caso, de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de Cauchy-Euler de segundo orden.

1. $x^2 y'' - 6y = 0$
2. $x^2 y'' - 12y = 0$
3. $x^2 y'' + 7xy' + 8y = 0$
4. $xy'' + y' = 0$
5. $x^2 y'' + 4xy' - 10y = 0$ sujeta a $y(1) = 1, y'(1) = -2$
6. $x^2 y'' + xy' - y = 0$
7. $x^2 y'' + 2xy' + 6y = 0$
8. $x^2 y'' + 7xy' + 9y = 0$
9. $x^2 y'' + 3xy' + y = 0$
10. $x^2 y'' + 5xy' + 4y = 0$ sujeta a $y(2) = 1, y'(2) = \frac{1}{2}$
11. $x^2 y'' - 7xy' + 16y = 0$
12. $4x^2 y'' + 8xy' + y = 0$
13. $x^2 y'' - 5xy' + 34y = 0$
14. $x^2 y'' - 3xy' + 5y = 0$ sujeta a $y(2) = 1, y'(2) = 3$
15. $x^2 y'' - 3xy' + 13y = 0$
16. $x^2 y'' - 7xy' + 41y = 0$
17. $x^2 y'' + 3xy' - 4y = x^2 e^x$
18. $3x^2 y'' + 6xy' + y = 4x \operatorname{sen} x$
19. $x^2 y'' + xy' + 4y = x^3 - 1$



Sección

“Aquí aparece un rompecabezas que ha perturbado a los científicos de todos los tiempos. ¿Cómo es posible que la matemática, un producto del pensamiento humano, que es independiente de la experiencia, se ajusta tan excelentemente a los objetos de la realidad física? ¿Puede la razón humana sin experiencia descubrir con su puro pensar propiedades de las cosas reales?”

Einstein, Albert



APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN n

RESEÑA HISTÓRICA

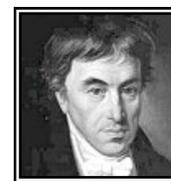
Ya en el Capítulo 2, en la sección 2.8, se abordó el tema de la modelación matemática y su relación con los fenómenos de la naturaleza. Sus implicaciones claro está, se reflejan en el progresivo avance de la ciencia en beneficio del propio ser humano. En los siglos XVII, XVIII y parte del siglo XIX en general las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales se concentraban principalmente en mecánica clásica, mecánica celeste, mecánica de fluidos y en la geodesia y fue hasta fines del siglo XIX y todo el siglo XX que tuvieron repercusión principalmente en geometría, mecánica cuántica, astrofísica, física relativista y en otras ramas como la logística entre otras. En forma breve se mencionarán algunas de las principales contribuciones a la extensa teoría de las ecuaciones diferenciales y sus relaciones con los fenómenos de la naturaleza.

El problema de los isoperímetros fue estudiado por **Jakob Bernoulli** (1654-1705) en 1696 y lo condujo a una ecuación diferencial de tercer orden así como también en un artículo publicado en el *Acta Eruditorum* de 1690 muestra que el problema de la *curva isócrona* era equivalente a resolver una *ecuación diferencial de primer orden no lineal*. Por su parte **Robert Hooke** (1635-1702) hizo investigaciones sobre la elasticidad de muelles que sugirieron hipótesis susceptibles de formulación matemática. En 1748 el germen de la amplia teoría de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales aparece en la obra de **Jean Le Rond D'Alembert**. Por otro lado **Leonhard Euler** desarrolla en 1750 su teoría lunar, que involucra a los *sistemas de ecuaciones diferenciales lineales simultáneas* y propuso una solución en *series de potencias* de sus coeficientes paramétricos; en 1744 estudió la elástica mediante el *cálculo de variaciones*; en 1771 estudió también las matemáticas de las cuerdas vibrantes y de las varillas elásticas y en su teoría de 1778 sobre la flexión de columnas verticales lo condujo en 1779 a la deducción de una *ecuación diferencial de cuarto orden* para las vibraciones transversales de una varilla elástica. En 1762 **Jospeh Louis Lagrange** (1736-1813) introduce el fértil concepto de ecuación adjunta y lo aplicó en sus problemas de mecánica. **Simeón Denis Poisson** (1781-1840) publica su “*Traité de Mécanique*” en 1811 en donde aplica las ecuaciones diferenciales en mecánica clásica, mecánica celeste, electricidad y magnetismo, así como en elasticidad y

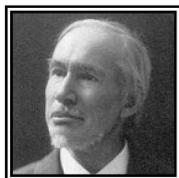


S.D. Poisson

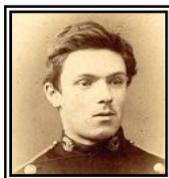
vibraciones mecánicas; muchos de sus trabajos (alrededor de 400) fueron hechos gracias a el análisis y solución de ciertos tipos de ecuaciones diferenciales. El problema de **Johann Friedrich Pfaff** (1765-1825) desarrollado en 1815, jugó un papel central en la teoría de la *transformaciones de contacto* (relacionadas con los *invariantes geométricos*), teoría que revolucionó el tratamiento de las ecuaciones diferenciales de la dinámica y alteró definitivamente el aspecto de la geometría. Este problema consistía en una *ecuación en diferenciales totales de mas de dos variables*.



J.F. Pfaff



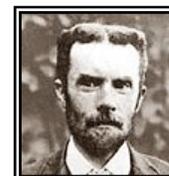
G.W. Hill



H. Poincaré

Por su parte **Goerge William Hill** (1838-1914) inventa nuevos métodos para analizar el perigeo de la Luna; en la obra que contienen estos métodos se encuentran los orígenes de la teoría moderna de las *ecuaciones diferenciales con coeficientes periódicos*; estos resultados aparecen en sus “*Researches in Lunar Theory*” publicados en 1878. En 1881 inicia **Henri Poincaré** (1854-1912) una filosofía radicalmente nueva para la teoría y la

práctica de las ecuaciones diferenciales: el estudio *cualitativo* y *topológico* de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales; partiendo de esto se desarrolla la vasta teoría de los movimientos recurrentes, las orbitas periódicas y la estabilidad dinámica. También introduce nuevos métodos en mecánica celeste en 1892 en donde el estudio de los *sistemas de n ecuaciones diferenciales simultáneos* se enriqueció enormemente. En 1887 **Oliver Heaviside** (1850-1925) el gran talento de este ingeniero inglés dio uno de los más importantes desarrollos en el siglo XIX, que solo el cálculo tensorial de **Ricci** se le podía comparar; era el conocido *cálculo operacional* que tanto benefició a los ingenieros electricistas en aquella época.



O. Heaviside

Pero ¿Qué tienen que ver las ecuaciones diferenciales lineales de orden n en estos importantes desarrollos?. La respuesta es muy simple; algunos de estos desarrollos se concibieron con la aplicación directa de las ecuaciones diferenciales lineales de orden superior y algunos otros se realizaron involucrando indirectamente a éstas. Cabe recordar que el gran cúmulo de nuevos conocimientos matemáticos se logra con una revisión de los conocimientos que le anteceden y que éstos sirven de base para el surgimiento de nuevos y productivos conceptos que van formando las ramas de la intrincada red que representan las matemáticas.

En la presente obra se mostrará una de las más comunes aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de orden superior que tienen y que tradicionalmente se imparte en la mayoría de los cursos básicos de ecuaciones diferenciales para ingeniería como es el caso del sistema dinámico masa-resorte. La intención de incluir solamente este caso es que sirva de base para un estudio autodidacta de otros sistemas similares como es el caso del sistemas eléctricos gobernados por las *leyes de Kirchhoff*. Esta analogía se puede encontrar en los tratados de *sistemas de control automático*. (véase la referencia bibliográfica de este capítulo)

SISTEMA MASA-RESORTE

ECUACIONES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN: CONDICIONES DE CAUCHY



R. Hooke

Históricamente debe a **Robert Hooke** (1635-1702), el estudio de este tipo de sistemas. En 1660 había descubierto la ley de la elasticidad que lleva su nombre; también trabajó en óptica y estudió en forma sistemática la compresión y elongación de resortes. En esta sección se estudiará la aplicación de las ecuaciones diferenciales en los *sistemas lineales masa-resorte* sujetas a condiciones de Cauchy, es decir como problemas de valor inicial.

El sistema *masa-resorte* es un *sistema dinámico* en donde la "*entrada*" es una función $\varphi(t)$ conocida como *función forzada* del sistema y la "*salida*" o respuesta del sistema es la integral

particular de una ecuación diferencial lineal de segundo orden sujeta a ciertas condiciones iniciales $y_0 = \varphi(t_0)$.

Se verán los posibles casos que surgen para diferentes situaciones físicas del sistema dinámico.

Obviamente las expectativas de esta obra son limitadas y sin pretender hacer un estudio extenso de los sistemas masa-resorte se omitirán las siguientes situaciones:

- *Constante de resorte variable*
- *Agotamiento del resorte con relación al tiempo*
- *Sistemas Acoplados*

Pero, antes se revisarán algunos conceptos importantes relativos al sistema dinámico masa-resorte. Estos conceptos son indispensables para lograr un balance adecuado de las fuerzas que intervienen en dicho sistema.

Por los estudios básicos de la física clásica se sabe que todo resorte al ser estirado mediante una fuerza externa tiende a regresar a su forma original, esto se debe a una fuerza llamada *fuerza de restitución del resorte* y esta fuerza existe mientras no se rompa el *límite de elasticidad* del material del cual está hecho dicho resorte. Se verá ahora una ley importante relativa a los resortes:

LEY DE HOOKE

“La fuerza de restitución del resorte es proporcional a la elongación o alargamiento que sufre el resorte al ser estirado mediante alguna fuerza externa”

Matemáticamente esto se podría expresar mediante la siguiente ecuación

$$F = -ky$$

donde k es la constante proporcionalidad; en términos mecánicos, esta constante se le conoce como *“la constante del resorte”* y ésta difiere de acuerdo con la naturaleza del material del resorte, es decir cada material del cual están elaborados los resortes posee diferente constante.

Por otro lado, de acuerdo con *la segunda ley de Newton*

La fuerza neta que actúa sobre un cuerpo es proporcional a la aceleración producida por dicha fuerza

En términos matemáticos:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = \sum_{j=1}^n F_j$$

aquí, se considera una sola dirección del movimiento, es decir a largo del eje y .

SISTEMA MASA-RESORTE

Considérese un resorte de longitud l unido a un soporte rígido, como el que se muestra en la figura 40

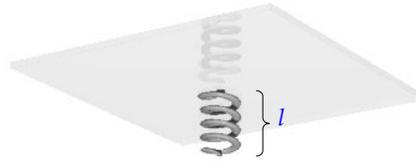


Fig. 40

Ahora, considérese que un cuerpo de masa m se une a este resorte como en la figura 41.

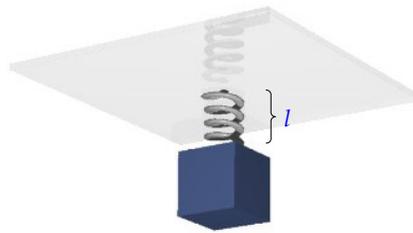


Fig. 41

Inmediatamente después de soltar la masa m , ésta estirará el resorte, debido a su propio peso hasta lograr una posición estacionaria de equilibrio estático o de reposo. Esto lo muestra la siguiente figura

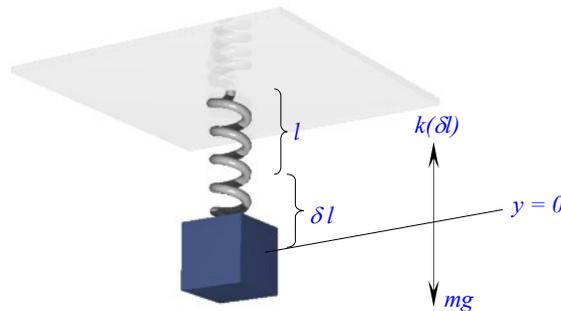


Fig. 42

En este momento, existen dos fuerzas equilibrándose: el *peso del cuerpo* y la *fuerza de restitución del resorte*.

Aquí y en lo sucesivo se considerará que las fuerzas y/o velocidades así como la aceleración serán positivas cuando se dirigen hacia abajo y negativas en caso contrario.

Siendo que existen solo fuerzas en la dirección vertical y ; Haciendo un balance de fuerzas en esa dirección y aplicando la *segunda ley de Newton*, se obtiene:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = mg - k\delta$$

pero como el cuerpo se encuentra en reposo, debido al equilibrio de fuerzas, la aceleración es cero, por lo tanto

$$mg - k\delta = 0$$

luego entonces

$$mg = k\delta$$

este equilibrio permanecerá aún cuando, exista una fuerza que rompa este equilibrio, suena contradictorio, pero se aclarará en el siguiente párrafo.

Hasta el momento se ha analizado, el equilibrio estático producido por dos fuerzas que se contraponen en el sistema *masa-resorte*. Es decir el estado de reposo alcanzado por el bloque debido a su propio peso.

MOVIMIENTO ARMÓNICO LIBRE NO AMORTIGUADO

Supóngase ahora que se estira aun más el resorte debido a una fuerza externa, por ejemplo, la acción de una mano; al halar el bloque hacia abajo se rompe momentáneamente el equilibrio que antes se describió, pero como no se ha soltado todavía, la fuerza que se ejerce para que el bloque no ascienda compensará una nueva fuerza de restitución debida a la *elongación* adicional producida cuando se hala el bloque hacia abajo. En la siguiente figura se muestra esta situación:

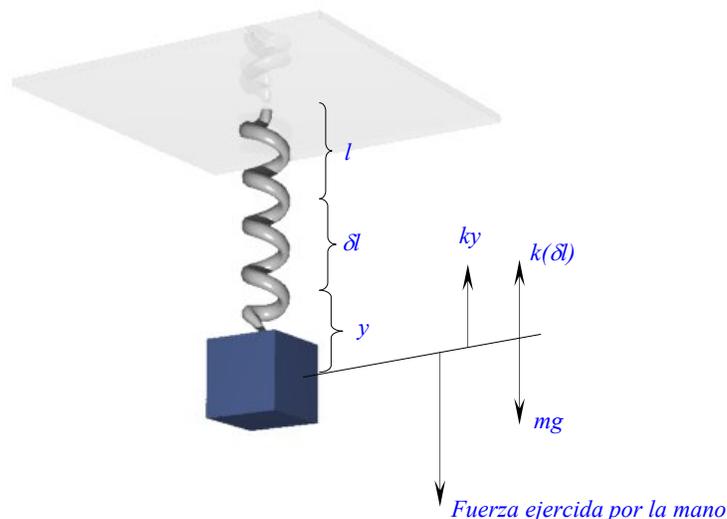


Fig. 43

Ahora bien, si se omite la fuerza ejercida por la mano que sostiene al bloque, éste, oscilará inevitablemente debido a la fuerza de restitución $-ky$.

Un balance de fuerzas aplicado al sistema muestra que:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -k(\delta l) + mg - ky \quad (3.48)$$

pero como los términos mg y $k(\delta l)$ se anulan en todo el movimiento, entonces

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky$$

donde el signo negativo del segundo miembro de la ecuación indica que la fuerza de restitución adicional actúa en contra del movimiento en cualquier momento.

Observación.- Cabe señalar que en esta situación *no existen fuerzas externas que se opongan al movimiento como resistencia del aire o efectos de campos vectoriales de fuerzas producidos por campos magnéticos o eléctricos.*

ECUACIÓN DIFERENCIAL DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO LIBRE NO AMORTIGUADO

Si se divide la ecuación (3.48) entre m se tendrá:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{k}{m} y$$

simplificando se tiene finalmente:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 \quad (3.49)$$

donde $\omega^2 = \frac{k}{m}$. Se dice que esta ecuación diferencial describe el movimiento oscilatorio del bloque sometido a la fuerza de restitución del resorte. Esta es una *ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes homogénea.*

El **periodo** de las vibraciones es $T = \frac{2\pi}{\omega}$ y la **frecuencia** es $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

La **solución general** para este tipo de movimiento esta dada por la siguiente expresión :

$$y(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t \quad (3.50)$$

donde las constantes c_1 y c_2 se determinan a partir de las condiciones iniciales $y(0) = a$ e $y'(0) = b$

FORMA ALTERNATIVA DE LA SOLUCIÓN GENERAL

Una forma alternativa para la integral general (3.50) es la siguiente relación

$$y(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \quad (3.51)$$

donde $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ y las constantes c_1 y c_2 se relacionan mediante $\tan \phi = \frac{c_1}{c_2}$. El ángulo ϕ es conocido como **ángulo de fase** y se calcula de la siguiente forma:

el ángulo de fase ϕ debe ser tal que, tanto el $\operatorname{sen}(\phi)$, el $\operatorname{cos}(\phi)$ y la $\tan(\phi)$ deben pertenecer al mismo cuadrante. Ya que A es siempre positiva y que

$$\operatorname{sen}(\phi) = \frac{c_1}{A}, \quad \operatorname{cos}(\phi) = \frac{c_2}{A} \quad \text{y} \quad \tan(\phi) = \frac{\operatorname{sen}(\phi)}{\operatorname{cos}(\phi)}$$

entonces si por ejemplo, $\operatorname{sen}(\phi) > 0$ y $\operatorname{cos}(\phi) < 0$, entonces $\tan(\phi) < 0$; esto quiere decir que el ángulo de fase ϕ debe estar en el segundo cuadrante.

Ejemplo 1.- Una masa que pesa 2 lb hace que un resorte se estire 6 in . Cuando $t = 0$, la masa se suelta desde un punto a 8 in debajo de la posición de equilibrio con una velocidad inicial, hacia arriba, de $\frac{4}{3} \text{ ft/seg}$. Deduzca la ecuación del movimiento libre y grafique dicha ecuación.

Solución.- Como se está manejando el sistema ingles de medidas, hay que convertir las pulgadas a pies, es decir:

$$6 \text{ in} = \frac{1}{2} \text{ ft} \quad \text{y} \quad 8 \text{ in} = \frac{2}{3} \text{ ft}$$

la masa se determina mediante la *segunda ley de Newton*:

$$m = \frac{2 \text{ lb}}{32 \frac{\text{ft}}{\text{seg}^2}} \quad \text{de donde} \quad m = \frac{1}{16} \text{ slug}$$

la constante del resorte se determina mediante la *ley de Hooke*:

$$k = \frac{2 \text{ lb}}{\frac{1}{2} \text{ ft}} \quad \text{de donde} \quad k = 4 \frac{\text{lb}}{\text{ft}}$$

la constante ω^2 se obtiene mediante:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{4}{\frac{1}{16}} \quad \text{de donde} \quad \omega^2 = 64$$

La ecuación diferencial o “*hipótesis*” del modelo matemático que describirá *el movimiento armónico libre* tiene la siguiente forma:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 64y = 0$$

o en forma compacta $y'' + 64y = 0$; las condiciones de Cauchy para este problema son:

$$y(0) = \frac{2}{3}, \wedge y'(0) = -\frac{4}{3}$$

o en otras palabras se desea resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$y'' + 64y = 0 \text{ sujeta a: } y(0) = \frac{2}{3}, \wedge y'(0) = -\frac{4}{3}$$

que es una *ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes* con la variable independiente t vista en la sección 3.3 de este capítulo.

El polinomio característico de la ecuación diferencial dada es: $m^2 + 64 = 0$; sus raíces son complejas conjugadas, las cuales son $m_1 = 8i$, $m_2 = -8i$, por lo tanto el problema pertenece al *caso III* (véase la sección 3.3); luego entonces el conjunto fundamental de soluciones es $\{\cos 8t, \sen 8t\}$. Aplicando la ecuación (3.15) con $\alpha = 0$, la integral general está dada por:

$$y_g(t) = c_1 \cos 8t + c_2 \sen 8t$$

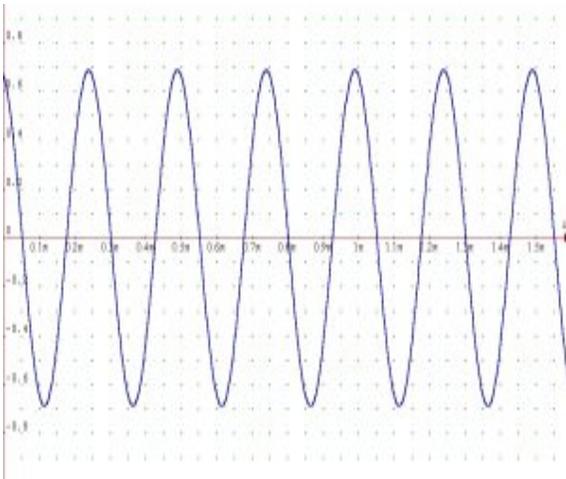


Fig. 44

donde las constantes c_1 y c_2 han de determinarse mediante las condiciones de Cauchy. Aplicando éstas se tiene:

$$y_g(0) = \frac{2}{3} = c_1 \cos 8(0) + c_2 \sen 8(0)$$

de donde se deduce que $c_1 = \frac{2}{3}$. Derivando la integral general se tiene que $y'_g(t) = -8c_1 \sen 8t + 8c_2 \cos 8t$ y aplicando la segunda condición de Cauchy se determina que $y'_g(0) = -\frac{4}{3} = -8c_1 \sen 8(0) + 8c_2 \cos 8(0)$, de

donde se deduce que $c_2 = -\frac{1}{6}$; por lo tanto la integral particular de la ecuación diferencial dada que a su vez representa matemáticamente las oscilaciones libres no amortiguadas de la masa esta dada por:

$$y(t) = \frac{2}{3} \cos 8t - \frac{1}{6} \sen 8t$$

La figura 44 muestra la gráfica de estas oscilaciones.

Para determinar la forma alternativa es necesario encontrar la amplitud A y el ángulo de fase ϕ . La amplitud se calcula mediante la relación $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$. Dado que $c_1 = \frac{2}{3}$ y $c_2 = -\frac{1}{6}$, entonces:

$$A = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{17}{36}}$$

de esta manera $A = 0.69 \text{ ft}$. Ya que A es siempre positiva y que

$$\text{sen}(\phi) = \frac{c_1}{A}, \quad \text{cos}(\phi) = \frac{c_2}{A} \quad \text{y} \quad \text{tan}(\phi) = \frac{\text{sen}(\phi)}{\text{cos}(\phi)}$$

entonces $\text{sen}(\phi) > 0$ y $\text{cos}(\phi) < 0$, esto quiere decir que el ángulo de fase ϕ debe estar en el segundo cuadrante. Haciendo un cálculo para la $\text{tan}(\phi)$, se obtiene:

$$\text{tan}(\phi) = \frac{\frac{2}{3}}{-\frac{1}{6}} = -4 \quad \text{de donde} \quad \phi = \text{arctan}(-4)$$

un simple cálculo para ϕ en la calculadora arroja el valor de -1.326 rad , lo cual es incongruente ya que este ángulo pertenece al cuarto cuadrante y se supone que este ángulo debe estar en el segundo cuadrante. Para encontrar el verdadero ángulo basta con hacer el siguiente cálculo:

$$\phi = -1.326 + \pi, \quad \text{el cual da como resultado correcto} \quad \phi = 1.816 \text{ rad.}$$

Finalmente la forma alternativa para la ecuación del movimiento armónico libre es:

$$y(t) = \frac{\sqrt{17}}{6} \text{sen}(8t + 1.816)$$

MOVIMIENTO ARMÓNICO LIBRE AMORTIGUADO

Supóngase ahora que la masa m , sujeta al resorte oscila periódicamente pero en este caso existe un medio amortiguador que afecta directamente el movimiento, este medio puede ser el aire que rodea al *sistema masa-resorte*, u otro medio de diferente viscosidad como el agua o algún aceite; esto denota que el movimiento armónico libre es ideal por principio, en otras palabras, para que se dé el movimiento oscilatorio libre, el sistema masa-resorte tendría que estar en un medio vacío. La siguiente figura muestra el sistema con el medio amortiguador. Este dispositivo se presenta comúnmente en los “amortiguadores” de los automóviles, camiones, motocicletas e incluso en algunas bicicletas y los medios amortiguadores son de diferente naturaleza, desde los que utilizan aceites hasta los que utilizan aire, como los modernos amortiguadores de algunos tractocamiones.

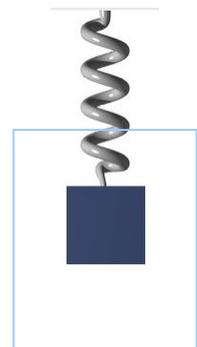


Fig. 45

ECUACIÓN DIFERENCIAL DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO LIBRE AMORTIGUADO

La ecuación diferencial del movimiento libre amortiguado es:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\lambda \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0 \quad (3.52)$$

donde

$$2\lambda = \frac{\beta}{m}, \quad \omega^2 = \frac{k}{m} \quad (3.53)$$

Aquí β es una constante que es proporcional a la velocidad de la masa y por supuesto del medio amortiguador.

El polinomio característico tiene la forma :

$$m^2 + 2\lambda m + \omega^2 = 0$$

sus raíces correspondientes son:

$$m_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}, \quad m_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$$

Según la naturaleza del factor $\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$ se distinguen tres casos :

CASO I: $\lambda^2 - \omega^2 > 0$. MOVIMIENTO SOBREAMORTIGUADO

El sistema está *sobreamortiguado* porque el coeficiente β es grande comparado con la constante k del resorte. La integral general de (3.52) tiene la forma:

$$y(t) = e^{-\lambda t} \left(c_1 e^{\sqrt{\lambda^2 - \omega^2} t} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda^2 - \omega^2} t} \right) \quad (3.54)$$

este movimiento es suave y no oscilatorio. En este caso se cumple que $\beta > 2\sqrt{km}$.

CASO II : $\lambda^2 - \omega^2 = 0$. MOVIMIENTO CRÍTICAMENTE AMORTIGUADO

El sistema es *críticamente amortiguado* puesto que cualquier disminución en la fuerza amortiguadora ocasionaría un movimiento oscilatorio. La integral general de (3.52) tiene la forma:

$$y(t) = e^{-\lambda t} (c_1 + c_2 t) \quad (3.55)$$

este movimiento es suave y no oscilatorio. En este caso se cumple que $\beta = 2\sqrt{km}$.

CASO III: $\lambda^2 - \omega^2 < 0$. MOVIMIENTO SUBAMORTIGUADO

El sistema es *subamortiguado* puesto que β es pequeño en comparación con la constante k del resorte. La integral general de (3.52) tiene la forma:

$$y(t) = e^{-\lambda t} \left(c_1 \cos \sqrt{\omega^2 - \lambda^2} t + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{\omega^2 - \lambda^2} t \right) \quad (3.56)$$

este movimiento es oscilatorio, pero la amplitud de las oscilaciones disminuye con el tiempo. Aquí se cumple la relación $\beta < 2\sqrt{km}$.

FORMA ALTERNATIVA PARA EL MOVIMIENTO SUBAMORTIGUADO.

Una forma alternativa de la integral general del movimiento *subamortiguado* tiene la forma:

$$y(t) = A e^{-\lambda t} \operatorname{sen} \left(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2} t + \phi \right) \quad (3.57)$$

donde nuevamente $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ y $\tan \phi = \frac{c_1}{c_2}$. Aquí $A e^{-\lambda t}$ se denomina **amplitud amortiguada**;

a la expresión $\frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}}$ se le llama **cuasiperiodo** y a $\frac{\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}}{2\pi}$ **cuasifrecuencia**.

Ejemplo 2.- Una masa que pesa 10 lb estira un resorte 2 ft. Dicha masa se encuentra en medio que ofrece una resistencia al movimiento numéricamente igual a 3 veces la velocidad instantánea. Si la masa parte del reposo desde un punto que se encuentra 1 ft por debajo de la posición de equilibrio, determine la ecuación del movimiento.

Solución.- Antes que todo, se requiere encontrar los datos necesarios para determinar la “hipótesis” del movimiento, es decir, se necesita saber los valores numéricos de 2λ y ω^2 . Para ello se realizarán los siguientes cálculos:

La masa se determina mediante la *segunda ley de Newton*:

$$m = \frac{10lb}{32 \frac{ft}{seg^2}} \text{ de donde } m = \frac{5}{16} slug$$

la constante k del resorte se determina mediante la *ley de Hooke*:

$$k = \frac{10lb}{2ft} \text{ de donde } k = 5 \frac{lb}{ft}$$

la constante ω^2 se obtiene mediante:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{5}{\frac{5}{16}} \text{ de donde } \omega^2 = 16$$

la constante de amortiguamiento $\beta = 3$ de donde $2\lambda = \frac{3}{\frac{5}{16}}$, de esta manera $2\lambda = \frac{48}{5}$. De lo anterior $\lambda = \frac{48}{10}$, de aquí, se deduce que $\lambda^2 - \omega^2 > 0$, entonces el movimiento es *sobreamortiguado*.

La ecuación diferencial o “hipótesis” del modelo matemático que describirá el movimiento *sobreamortiguado* tiene la siguiente forma:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{48}{5} \frac{dy}{dt} + 16y = 0$$

o en forma compacta $y'' + \frac{48}{5}y' + 16y = 0$ las condiciones de Cauchy para este problema son:

$$y(0) = 1, \wedge y'(0) = 0$$

o en otras palabras se desea resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$y'' + \frac{48}{5}y' + 16y = 0 \quad \text{sujeta a: } y(0) = 1, y'(0) = 0$$

que es una *ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes* vista en la sección 3.3 de este capítulo.

El polinomio característico de la ecuación diferencial dada es: $5m^2 + 48m + 80 = 0$; sus raíces son reales y distintas, las cuales son $m_1 = -\frac{24}{5} + \frac{4}{5}\sqrt{11}$, $m_2 = -\frac{24}{5} - \frac{4}{5}\sqrt{11}$, por lo tanto el problema pertenece al *caso I* (véase la sección 3.3); el conjunto fundamental de soluciones es $\left\{ e^{(-\frac{24}{5} + \frac{4}{5}\sqrt{11})t}, e^{(-\frac{24}{5} - \frac{4}{5}\sqrt{11})t} \right\}$. Aplicando la ecuación (3.13), la integral general está dada por:

$$y_g(t) = c_1 e^{(-\frac{24}{5} + \frac{4}{5}\sqrt{11})t} + c_2 e^{(-\frac{24}{5} - \frac{4}{5}\sqrt{11})t}$$

donde las constantes c_1 y c_2 han de determinarse mediante las condiciones de Cauchy. Aplicando éstas se tiene: $y_g(0) = 1 = c_1 e^{(-\frac{24}{5} + \frac{4}{5}\sqrt{11})(0)} + c_2 e^{(-\frac{24}{5} - \frac{4}{5}\sqrt{11})(0)}$, de donde se deduce que $c_1 + c_2 = 1$. Derivando la integral general se tiene:

$$y'_g(t) = \left(-\frac{24}{5} + \frac{4}{5}\sqrt{11}\right)c_1 e^{(-\frac{24}{5} + \frac{4}{5}\sqrt{11})t} + \left(-\frac{24}{5} - \frac{4}{5}\sqrt{11}\right)c_2 e^{(-\frac{24}{5} - \frac{4}{5}\sqrt{11})t}$$

Ahora, aplicando la segunda condición de Cauchy:

$$y'_g(0) = 0 = \left(-\frac{24}{5} + \frac{4}{5}\sqrt{11}\right)c_1 e^{(-\frac{24}{5} + \frac{4}{5}\sqrt{11})(0)} + \left(-\frac{24}{5} - \frac{4}{5}\sqrt{11}\right)c_2 e^{(-\frac{24}{5} - \frac{4}{5}\sqrt{11})(0)}$$

de aquí se deduce que $c_1 = -\frac{24+4\sqrt{11}}{24-4\sqrt{11}}c_2$ que, resolviendo con $c_1 + c_2 = 1$, se obtienen finalmente dichas constantes, las cuales son:

$$c_1 = \frac{\sqrt{11}+6}{2\sqrt{11}} \text{ y } c_2 = \frac{\sqrt{11}-6}{2\sqrt{11}}$$

por lo tanto la integral particular de la ecuación diferencial dada que representa el movimiento sobreamortiguado esta dado por:

$$y(t) = \left(\frac{\sqrt{11}+6}{2\sqrt{11}}\right)e^{\left(-\frac{24}{5}+\frac{4}{5}\sqrt{11}\right)t} + \left(\frac{\sqrt{11}-6}{2\sqrt{11}}\right)e^{\left(-\frac{24}{5}-\frac{4}{5}\sqrt{11}\right)t}$$

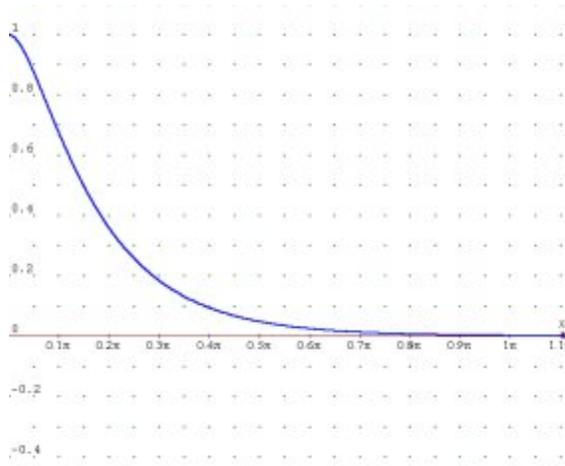


Fig. 46

En la figura 46 se muestra la gráfica del modelo obtenido anteriormente y que representa *el movimiento sobreamortiguado*. Como puede observarse se han respetado los signos que naturalmente se utilizan en la graficación de curvas en el plano cartesiano; se ve claramente que la masa parte de 1 ft por debajo de la posición de equilibrio y que conforme transcurre el tiempo esta distancia disminuye y tiende a cero, esto quiere decir que la masa nunca rebasa la línea de equilibrio físico y es claro también que el movimiento definitivamente no es oscilatorio. Es fácil demostrar mediante límites que cuando $t \rightarrow \infty$, entonces $y \rightarrow 0$.

Ejemplo 3.- Una masa que pesa 4 lb se une a un resorte cuya constante es de 2 lb/ft. El medio presenta una resistencia al movimiento numéricamente igual a la velocidad instantánea. Si la masa se suelta de un punto a 1 pie arriba de la posición de equilibrio con una velocidad de 8 ft/seg hacia abajo. Encuentre la ecuación que gobierna este movimiento amortiguado. Encuentre también el momento en el que la masa llega a su desplazamiento extremo respecto a la posición de equilibrio. ¿Cuál es su posición en ese instante?

Solución.- Antes que todo, se requiere encontrar los datos necesarios para determinar la “hipótesis” del movimiento, es decir, se necesita saber los valores numéricos de 2λ y ω^2 . Para ello se realizarán los siguientes cálculos:

La masa se determina mediante la segunda ley de Newton:

$$m = \frac{4lb}{32 \frac{ft}{seg^2}} \text{ de donde } m = \frac{1}{8} slug$$

la constante ω^2 se obtiene mediante:

$$\varpi^2 = \frac{k}{m} = \frac{2}{\frac{1}{8}} \quad \text{de donde} \quad \varpi^2 = 16$$

la constante de amortiguamiento $\beta = 1$ de donde $2\lambda = \frac{1}{\frac{1}{8}}$, de esta manera $2\lambda = 8$

De lo anterior $\lambda = 4$, de aquí que si $\lambda^2 - \varpi^2 = 0$, entonces el movimiento es *críticamente amortiguado*.

La ecuación diferencial o “hipótesis” del modelo matemático que describirá el movimiento críticamente amortiguado tiene la siguiente forma:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 8\frac{dy}{dt} + 16y = 0$$

o en forma compacta $y'' + 8y' + 16y = 0$; las condiciones de Cauchy para este problema son:

$$y(0) = -1, \quad \wedge \quad y'(0) = 8$$

o en otras palabras se desea resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$y'' + 8y' + 16y = 0 \quad \text{sujeta a:} \quad y(0) = -1, y'(0) = 8$$

que es una *ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes* vista en la sección 3.3 de este capítulo.

El polinomio característico de la ecuación diferencial dada es: $m^2 + 8m + 16 = (m + 4)^2 = 0$; sus raíces son reales y múltiples, las cuales son $m_1 = m_2 = -4$, por lo tanto el problema pertenece al *caso II* (véase la sección 3.3); luego entonces el conjunto fundamental de soluciones es $\{e^{-4t}, te^{-4t}\}$. Aplicando la ecuación (3.14) la integral general está dada por:

$$y_g(t) = C_1 e^{-4t} + C_2 t e^{-4t}$$

donde las constantes c_1 y c_2 han de determinarse mediante las condiciones de Cauchy. Aplicando éstas se tiene: $y_g(0) = -1 = c_1 e^{-4(0)} + c_2(0) e^{-4(0)}$, de donde se deduce que $c_1 = -1$; por otro lado la derivada de la integral general esta dada por: $y'_g(t) = -4c_1 e^{-4t} + c_2(1 - 4t) e^{-4t}$.

Aplicando la segunda condición de Cauchy se tiene: $y'_g(0) = 8 = -4c_1 e^{-4(0)} + c_2(1 - 4(0)) e^{-4(0)}$. Tomando en consideración que $c_1 = -1$ entonces se deduce que $c_2 = 4$.

Luego entonces la integral particular de la ecuación diferencial dada que representa el movimiento críticamente amortiguado esta dado por:

$$y(t) = 4te^{-4t} - e^{-4t}$$

Como se puede observar en ambas gráficas no existen oscilaciones completas, y la posición de la masa tiende a la posición de equilibrio conforme pasa el tiempo. Pero cualquier disminución en el valor de β , provocaría que λ^2 fuese menor que ω^2 , esto significa que el movimiento pasaría a ser *oscilatorio subamortiguado*.

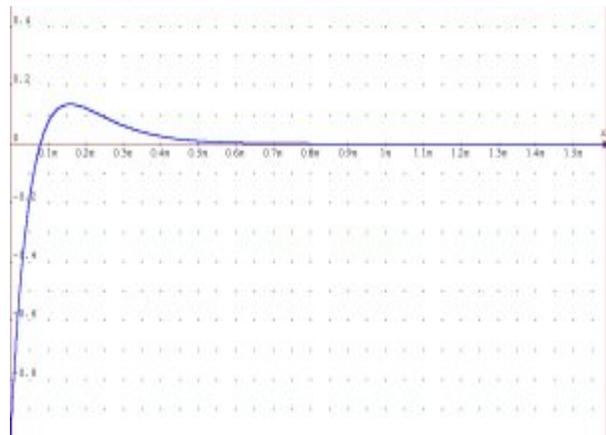


Fig. 47

También se observa que la masa parte de un valor de $y = -1$ (o sea a un ft por encima de la posición de equilibrio), después alcanza su posición extrema, para posteriormente tender hacia la posición de equilibrio $y = 0$.

Para calcular la posición extrema de la masa respecto de la posición de equilibrio, se deriva el modelo matemático obtenido anteriormente obteniéndose la siguiente expresión

$$y'(t) = (4t - 1)(-4)e^{-4t} + e^{-4t}(4)$$

o en forma simplificada

$$y'(t) = 4(2 - 4t)e^{-4t}$$

igualando a cero la anterior expresión se tiene:

$$4(2 - 4t)e^{-4t} = 0$$

o sea que, el valor de t para el cual la masa alcanza su posición extrema es $t = \frac{1}{2}$; La posición de

la masa en ese instante es $y(\frac{1}{2}) = (4(\frac{1}{2}) - 1)e^{-4(\frac{1}{2})}$ ó $y(\frac{1}{2}) = 0.1353 \text{ ft}$ En otras palabras la masa alcanza a lo más esta distancia por debajo de la posición del equilibrio físico.

Ejemplo 4.- Una masa que pesa 16 lb se une a un resorte de 5 ft de longitud. En la posición de equilibrio el resorte mide 8.2 ft . Si la masa se suelta del reposo de un punto a 2 ft arriba de la posición de equilibrio, determine los desplazamientos $y(t)$. Considere que el medio presenta una resistencia al movimiento numéricamente igual a la velocidad instantánea. Encuentre una forma alternativa para la ecuación de dichos desplazamientos.

Solución.- Antes que todo, se requiere encontrar los datos necesarios para determinar la hipótesis del movimiento, es decir, se necesita saber los valores numéricos de 2λ y ω^2 . Para ello se realizarán los siguientes cálculos:

La masa se determina mediante la *segunda ley de Newton*:

$$m = \frac{16lb}{32 \frac{ft}{seg^2}} \text{ de donde } m = \frac{1}{2} slug$$

la constante del resorte se calcula mediante la *ley de Hooke*:

$$k = \frac{16lb}{(8.2 - 5)ft} = \frac{16lb}{3.2ft} \text{ de donde } k = 5 \frac{lb}{ft}$$

la constante ω^2 se obtiene mediante:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{5}{\frac{1}{2}} \text{ de donde } \omega^2 = 10$$

la constante de amortiguamiento $\beta = 1$ de donde $2\lambda = \frac{1}{\frac{1}{2}}$, de esta manera $2\lambda = 2$

De lo anterior $\lambda = 1$, de aquí se deduce que $\lambda^2 - \omega^2 < 0$, por lo tanto el movimiento es *subamortiguado*.

La ecuación diferencial o “*hipótesis*” del modelo matemático que describirá el movimiento críticamente amortiguado tiene la siguiente forma:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 10y = 0$$

o en forma compacta $y'' + 2y' + 10y = 0$; las condiciones de Cauchy para este problema son:

$$y(0) = -2, \wedge y'(0) = 0$$

o en otras palabras se desea resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$y'' + 2y' + 10y = 0 \text{ sujeta a: } y(0) = -2, y'(0) = 0$$

que es una *ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes* vista en la sección 3.3 de este capítulo.

El polinomio característico de la ecuación diferencial dada es: $m^2 + 2m + 10 = 0$; sus raíces son complejas conjugadas, las cuales son $m_1 = -1 + 3i$, $m_2 = -1 - 3i$, por lo tanto el problema pertenece al *caso III* (véase la sección 3.3); luego entonces el conjunto fundamental de soluciones es $\{e^{-t} \cos 3t, e^{-t} \sin 3t\}$. Aplicando la ecuación (3.15) con $\alpha = -1$ y $\beta = 3$, la integral general está dada por:

$$y_g(t) = c_1 e^{-t} \cos 3t + c_2 e^{-t} \operatorname{sen} 3t$$

donde las constantes c_1 y c_2 han de determinarse mediante las condiciones de Cauchy. Aplicando éstas se tiene: $y_g(0) = -2 = c_1 e^{-0} \cos 3(0) + c_2 e^{-0} \operatorname{sen} 3(0)$, de donde se deduce que $c_1 = -2$; por otro lado la derivada de la integral general esta dada por: $y'_g(t) = -e^{-t} [(c_1 - 3c_2) \cos 3t + (3c_1 + c_2) \operatorname{sen} 3t]$. Aplicando la segunda condición de Cauchy se tiene: $y'_g(0) = 0 = -e^{-0} [(c_1 - 3c_2) \cos 3(0) + (3c_1 + c_2) \operatorname{sen} 3(0)]$. Simplificando se tiene que

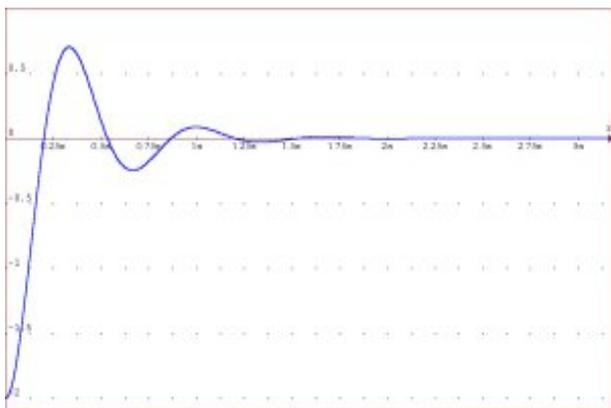


Fig. 48

$c_1 = 3c_2$; tomando en consideración que $c_1 = -2$ entonces se deduce que $c_2 = -\frac{2}{3}$. Luego entonces la integral particular de la ecuación diferencial dada que representa *el movimiento subamortiguado* esta dado por:

$$y(t) = -2e^{-t} \cos 3t - \frac{2}{3}e^{-t} \operatorname{sen} 3t$$

Como se puede observar en la figura 48 existen oscilaciones completas pero, sus amplitudes van disminuyendo conforme crece t y la posición de la masa tiende a la posición de equilibrio conforme pasa el tiempo. Este

fenómeno se presentaría si se tuviera un sistema masa-resorte oscilando “libremente” sin que aparentemente exista un medio de amortiguamiento; es claro que el aire aunque representa un medio con densidad baja, si ofrece una resistencia al movimiento oscilatorio del sistema logrando que las amplitudes de las oscilaciones disminuyan con el tiempo. Este es el caso real que se presenta comúnmente en los laboratorios de física en las universidades.

Para encontrar una forma alternativa del modelo matemático que describe las oscilaciones subamortiguadas de la masa, es necesario deducir las constantes c_1 y c_2 , para después determinar la amplitud amortiguada y el ángulo de fase. Las constantes son: $c_1 = -2 \wedge c_2 = -\frac{2}{3}$. La amplitud de

las oscilaciones esta dada por: $A = \sqrt{(-2)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2}$ de donde $A = \frac{2\sqrt{10}}{3}$. El coeficiente $Ae^{-\lambda t}$,

llamado *amplitud amortiguada*, tiende a cero cuando t tiende al infinito, esto es: $\lim_{t \rightarrow \infty} Ae^{-\lambda t} = 0$.

Tomando en cuenta que $\sqrt{\omega^2 - \lambda^2} = 3$, el *cuasiperiodo* es $\frac{2\pi}{3}$ y la *cuasifrecuencia* es por lo tanto

$\frac{3}{2\pi}$. El ángulo de fase esta dado por:

$$\phi = \operatorname{arctg}(3)$$

de donde $\phi = 4.391$ rad, puesto que el ángulo de fase se encuentra en el tercer cuadrante.

Por lo tanto la forma alternativa para *el movimiento subamortiguado* es:

$$y(t) = \frac{2\sqrt{10}}{3} e^{-t} \operatorname{sen}(3t + 4.391)$$

MOVIMIENTO FORZADO

Supóngase ahora que la masa m , sujeta al resorte, oscila periódicamente y además la superficie que sujeta al resorte oscila también (Fig. 49); a este efecto se le conoce como función de “*entrada*” $f(t)$ al sistema y la “*respuesta*” o “*salida*” del sistema es el comportamiento tanto de la posición de la masa como de su velocidad. A este tipo de movimiento se le conoce como *movimiento forzado*. Se distinguen varios tipos de movimientos forzados, algunos de los que se tratarán en esta obra son:

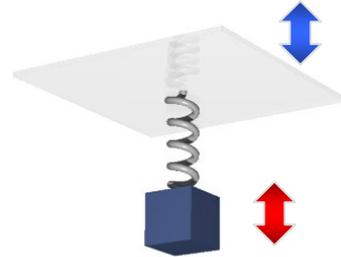


Fig. 49

- Movimiento Forzado Sin Amortiguamiento
- Movimiento Forzado Amortiguado
- Resonancia Pura

MOVIMIENTO FORZADO SIN AMORTIGUAMIENTO

En este movimiento una fuerza externa $f(t)$ actúa sobre la masa m unida al resorte. Esta fuerza puede ser constante, *variable monótona* u *oscilatoria*. La ecuación diferencial del movimiento tiene la forma:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = f(t) \quad (3.58)$$

donde $\omega^2 = \frac{k}{m}$

MOVIMIENTO FORZADO AMORTIGUADO

Este movimiento contiene ahora un *medio amortiguador* además de la fuerza $f(t)$. Su ecuación diferencial tiene la forma:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\lambda \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = f(t) \quad (3.59)$$

donde $2\lambda = \frac{\beta}{m}$ y $\omega^2 = \frac{k}{m}$.

Las anteriores son *ecuaciones diferenciales no homogéneas lineales con coeficientes constantes*, en ambos casos su solución tiene la forma:

$$y(t) = y_g(t) + y_p(t) \quad (3.60)$$

donde $y_g(t)$ es la parte de *estado estable* y $y_p(t)$ es la parte *transitoria*.

RESONANCIA PURA

Supóngase que se tiene el movimiento forzado sin amortiguamiento y la función $f(t)$ tiene la forma:

$$f(t) = f_0 \operatorname{sen} \gamma t$$

la ecuación diferencial toma la forma:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = f_0 \operatorname{sen} \gamma t \quad (3.61)$$

donde $\frac{\gamma}{2\pi}$ es la *frecuencia de la fuerza impulsora* y $\frac{\omega}{2\pi}$ es la *frecuencia de las oscilaciones libres*. La integral general de esta ecuación es:

$$y(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t + \frac{f_0}{(\omega^2 - \gamma^2)} \operatorname{sen} \gamma t \quad (3.62)$$

donde $\gamma \neq \omega$.

Si las condiciones iniciales son $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$, entonces la integral particular de (3.61) tiene la forma:

$$y(t) = \frac{f_0}{\omega(\omega^2 - \gamma^2)} (-\gamma \operatorname{sen}(\omega t) + \omega \operatorname{sen}(\gamma t)) \quad (3.63)$$

donde $\gamma \neq \omega$. Es notable observar que la función $y(t)$ obtenida no está definida para $\omega = \gamma$. Pero es posible obtener el valor límite mediante la regla de L'Hôpital cuando $\omega \rightarrow \gamma$, esto es:

$$\lim_{\omega \rightarrow \gamma} y(t) = \frac{f_0}{2\omega^2} \operatorname{sen}(\omega t) - \frac{f_0}{2\omega} t \cos(\omega t) \quad (3.64)$$

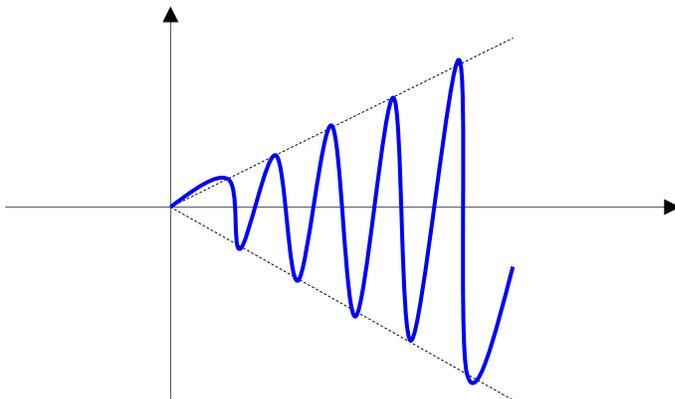


Fig. 48

esto se puede visualizar en la siguiente gráfica. En este proceso límite la frecuencia de las oscilaciones libres $\frac{\omega}{2\pi}$ se sintoniza con la frecuencia de las oscilaciones forzadas $\frac{\gamma}{2\pi}$. A este fenómeno se le conoce como *resonancia pura*, y, como se puede observar en la ecuación (6), la amplitud de las oscilaciones crece con el tiempo. Esto

físicamente significaría la destrucción del sistema masa-resorte.

Ejemplo 5.- Un objeto que tiene una masa es de $\frac{1}{2}$ slug se sujeta de un resorte cuya constante es de 6 lb/ft. Al inicio el objeto parte del reposo a 1.5 ft por debajo de la posición de equilibrio y el movimiento ocurre en un medio amortiguador numéricamente igual a la mitad de la velocidad instantánea. También el objeto es impulsado por una fuerza externa dada por $f(t) = 8 \cos 3t$. Aplique las fórmulas necesarias para deducir la ley de este tipo de movimiento.

Solución.- Como existe en este sistema masa-resorte un medio amortiguador y una fuerza externa, entonces el fenómeno físico es un *movimiento forzado amortiguado*.

Antes de aplicar la ecuación (3.59) es necesario calcular las magnitudes λ y ϖ . Se realizan las siguientes operaciones:

$$\varpi^2 = \frac{k}{m} = \frac{6}{\frac{1}{2}} \quad \text{de donde} \quad \varpi^2 = 12$$

como $\beta = \frac{1}{2}$ entonces

$$2\lambda = \frac{\beta}{m} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \quad \text{de donde} \quad 2\lambda = 1$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial o “hipótesis” del modelo matemático que describirá el movimiento forzado amortiguado tiene la siguiente forma:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 12y = 8 \cos 3t$$

cuyas condiciones iniciales son:

$$y(0) = \frac{3}{2}, y'(0) = 0$$

o en forma compacta, el problema a resolver es el siguiente:

$$y'' + y' + 12y = 8 \cos 3t \quad \text{sujeta a:} \quad y(0) = \frac{3}{2}, y'(0) = 0$$

que es una *ecuación diferencial no homogénea con coeficientes constantes* vista en la sección 3.4 de este capítulo.

El polinomio característico de la ecuación diferencial homogénea es: $m^2 + m + 12 = 0$; sus raíces son reales y distintas, las cuales son $m_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{47}}{2}i$, $m_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{47}}{2}i$, por lo tanto el problema pertenece al *caso III* (véase la sección 3.3); luego entonces el conjunto fundamental de soluciones es $\left\{ e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{47}}{2}t\right), e^{-\frac{1}{2}t} \text{sen}\left(\frac{\sqrt{47}}{2}t\right) \right\}$. Aplicando la ecuación (3.15), la integral general está dada por:

$$y_g(t) = c_1 e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{47}}{2}t\right) + c_2 e^{-\frac{1}{2}t} \text{sen}\left(\frac{\sqrt{47}}{2}t\right)$$

donde las constantes c_1 y c_2 han de determinarse mediante las condiciones de Cauchy. Pero antes se debe encontrar la solución particular. Acorde con los criterios del método de selección (véase Tabla 1 en la sección 3.4), la forma de la solución particular es: $y_p = A \cos 3t + B \operatorname{sen} 3t$. Donde A y B han de determinarse mediante la metodología expuesta en los desarrollos de los ejemplos de ecuaciones diferenciales no homogéneas con coeficientes constantes (véanse Págs. 116 a la 126); de esta manera la primera derivada de la solución particular es $y'_p = -3A \operatorname{sen} 3t + 3B \cos 3t$ y la segunda derivada $y''_p = -9A \cos 3t + 9B \operatorname{sen} 3t$, sustituyendo y_p , y'_p e y''_p en la ecuación diferencial dada se tiene:

$$-9A \cos 3t + 9B \operatorname{sen} 3t - 3A \operatorname{sen} 3t + 3B \cos 3t + 12A \cos 3t + 12B \operatorname{sen} 3t = 8 \cos 3t$$

simplificando

$$\left(\underbrace{3A + 3B}_{\uparrow} \right) \cos 3t + \left(\underbrace{21B - 3A}_{\uparrow} \right) \operatorname{sen} 3t = \underbrace{8}_{\uparrow} \cos 3t + \underbrace{0}_{\uparrow} \operatorname{sen} 3t$$

dado que si dos polinomios son iguales, entonces sus coeficientes homólogos también lo son; de esta manera se tiene $A = \frac{7}{3}$ y $B = \frac{1}{3}$, luego entonces la forma de la solución particular es:

$$y_p = \frac{7}{3} \cos 3t + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3t$$

por lo tanto la solución general ó completa de la ecuación diferencial dada es:

$$y_c(t) = c_1 e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{47}}{2} t\right) + c_2 e^{-\frac{t}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{47}}{2} t\right) + \frac{7}{3} \cos 3t + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3t$$

donde las constantes c_1 y c_2 han de determinarse mediante las condiciones de Cauchy. Aplicando la primera de éstas se tiene:

$$y_c(0) = \frac{3}{2} = c_1 e^{-\frac{(0)}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{47}}{2}(0)\right) + c_2 e^{-\frac{(0)}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{47}}{2}(0)\right) + \frac{7}{3} \cos 3(0) + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3(0)$$

de donde se deduce que $c_1 = -\frac{5}{6}$; la primera derivada de y_c es

$$y'_c(t) = c_1 e^{-\frac{t}{2}} \left[-\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{47}}{2} t\right) - \frac{\sqrt{47}}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{47}}{2} t\right) \right] + c_2 e^{-\frac{t}{2}} \left[\frac{\sqrt{47}}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{47}}{2} t\right) - \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{47}}{2} t\right) \right] - 7 \operatorname{sen} 3t + \cos 3t$$

y aplicando la segunda condición de Cauchy, se tiene:

$$\begin{aligned} y'_c(0) &= c_1 e^{-\frac{(0)}{2}} \left[-\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{47}}{2}(0)\right) - \frac{\sqrt{47}}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{47}}{2}(0)\right) \right] + c_2 e^{-\frac{(0)}{2}} \left[\frac{\sqrt{47}}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{47}}{2}(0)\right) - \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{47}}{2}(0)\right) \right] - \dots \\ &= \dots - 7 \operatorname{sen} 3(0) + \cos 3(0) = 0 \end{aligned}$$

de donde $-\frac{1}{2} c_1 + \frac{\sqrt{47}}{2} c_2 = -1$.

Al sustituir c_1 en la anterior expresión se obtiene $c_2 = -\frac{17\sqrt{47}}{282}$. Luego entonces la integral particular de la ecuación diferencial dada que representa el movimiento forzado amortiguado esta dado por:

$$y(t) = -\frac{5}{6}e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{47}}{2}t\right) - \frac{17\sqrt{47}}{282}e^{-\frac{t}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{47}}{2}t\right) + \frac{7}{3} \cos 3t + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3t$$

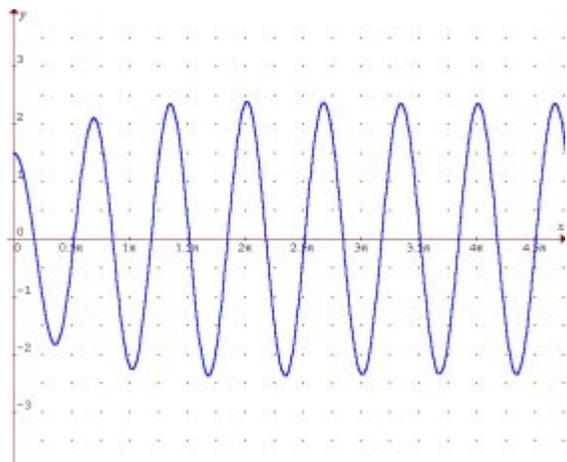


Fig. 49

La figura 49 muestra las oscilaciones del movimiento forzado amortiguado cuando esta presente la fuerza externa periódica dada por $f(t) = 8 \cos 3t$. Como se puede observar en la gráfica, la curva comienza en el valor de $y = 1.5$ (o sea 1.5 ft por debajo de la línea del equilibrio físico) para después oscilar debido a la fuerza externa que propicia el movimiento forzado manteniéndolo oscilatorio a pesar de la presencia del medio amortiguador.

A partir de cierto valor de t , las oscilaciones tienen una amplitud constante. Esto es debido a que los términos exponenciales del modelo final obtenido,

tienen a cero, conforme t tiende al infinito. Se hace hincapié sobre la naturaleza de las frecuencias de la fuerza impulsora y de las oscilaciones amortiguadas, las cuales respectivamente son $\frac{\gamma}{2\pi} = \frac{3}{2\pi}$ y $\frac{\varpi^2}{2\pi} = \frac{\sqrt{12}}{2\pi}$; esto indica que no existe resonancia pura.

Ejemplo 6.- Un objeto que tiene una masa es de $\frac{1}{4}$ slug se sujeta de un resorte cuya constante es de 4 lb/ft. Al inicio el objeto parte del reposo y desde la posición de equilibrio. También el objeto es impulsado por una fuerza externa dada por $f(t) = 4 \operatorname{sen} 4t$. Aplique las fórmulas necesarias para deducir la ley de este tipo de movimiento.

Solución.- Como no existe en este sistema masa-resorte un medio amortiguador pero sí, una fuerza externa, entonces el fenómeno físico es un *movimiento forzado sin amortiguamiento*.

Antes de aplicar la ecuación (3.61) es necesario calcular las magnitudes γ y ϖ , para determinar las frecuencias de la fuerza impulsora y de las oscilaciones libres. En este caso, como

$$f(t) = 4 \operatorname{sen} 4t, \text{ entonces } \gamma = 4. \text{ Por otro lado, si } m = \frac{1}{2} \text{ slug y } k = 8, \text{ entonces } \varpi^2 = \frac{k}{m} = \frac{8}{\frac{1}{2}} = 16,$$

es decir $\varpi = 4$; las frecuencias de la fuerza impulsora y de las oscilaciones libres respectivamente son $\frac{\gamma}{2\pi} = \frac{4}{2\pi} = \frac{2}{\pi}$ y $\frac{\varpi}{2\pi} = \frac{4}{2\pi} = \frac{2}{\pi}$ de esta manera en este movimiento existe el fenómeno de la resonancia pura. Al aplicar la ecuación (3.61) se obtiene:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 16y = 4 \operatorname{sen} 4t$$

cuyas condiciones iniciales son:

$$y(0) = 0, y'(0) = 0$$

o en forma compacta, el problema a resolver es el siguiente:

$$y'' + 16y = 4\text{sen}4t \quad \text{sujeta a: } y(0) = 0, y'(0) = 0$$

que es una *ecuación diferencial no homogénea con coeficientes constantes* vista en la sección 3.4 de este capítulo.

El polinomio característico de la ecuación diferencial homogénea es $m^2 + 16 = 0$; sus raíces son imaginarias puras, las cuales son $m_1 = 4i$, $m_2 = -4i$; por lo tanto el problema pertenece al *caso III* (véase la sección 3.3); luego entonces el conjunto fundamental de soluciones es $\{\cos 4t, \text{sen}4t\}$. Aplicando la ecuación (3.15), la integral general está dada por:

$$y_g = c_1 \cos 4t + c_2 \text{sen}4t$$

donde las constantes c_1 y c_2 han de determinarse mediante las condiciones de Cauchy. Pero antes se debe encontrar la solución particular. Acorde con los criterios del método de selección (véase la *Tabla 1, Pág. 120*) y como los números $\pm 4i$ son raíces del polinomio característico de la ecuación diferencial homogénea asociada, entonces, la forma de la solución particular es: $y_p = t(A \cos 4t + B \text{sen}4t)$.

Donde A y B han de determinarse mediante la metodología expuesta en los desarrollos de los ejemplos de *ecuaciones diferenciales no homogéneas con coeficientes constantes* (véase la sección 3.4); de esta manera la primera derivada de la solución particular es

$$y'_p = (B - 4At) \text{sen}4t + (A + 4Bt) \cos 4t$$

y la segunda derivada

$$y''_p = 8B \cos 4t - 16At \cos 4t - 8A \text{sen}4t - 16Bt \text{sen}4t$$

sustituyendo y_p , e y''_p en la ecuación diferencial dada se tiene:

$$\underbrace{8B}_{\uparrow} \cos 4t - \underbrace{8A}_{\uparrow} \text{sen}4t - \underbrace{15A}_{\uparrow} t \cos 4t - \underbrace{15B}_{\uparrow} t \text{sen}4t = \underbrace{0}_{\uparrow} \cos 4t + \underbrace{4}_{\uparrow} \text{sen}4t + \underbrace{0}_{\uparrow} t \cos 4t + \underbrace{0}_{\uparrow} t \text{sen}4t$$

de aquí que se obtienen las siguientes ecuaciones: $8B = 0, -15B = 0$ y $-8A = 4, -15A = 0$; de las primeras ecuaciones es claro que $B = 0$ y de las últimas ecuaciones, como A no puede ser distinta de cero, entonces $A = -\frac{1}{2}$, por lo tanto la solución particular tiene la forma:

$$y_p = -\frac{1}{2}t \cos 4t$$

por lo tanto la solución general ó completa de la ecuación diferencial dada es:

$$y_c(t) = c_1 \cos 4t + c_2 \operatorname{sen} 4t - \frac{1}{2} t \cos 4t$$

donde las constantes c_1 y c_2 han de determinarse mediante las condiciones de Cauchy. Aplicando la primera de éstas se tiene: $y_c(t) = 0 = c_1 \cos 4(0) + c_2 \operatorname{sen} 4(0) - \frac{1}{2}(0) \cos 4(0)$, de donde se deduce que $c_1 = 0$; por otro lado

$$y'_c(t) = -4c_1 \operatorname{sen} 4t + 4c_2 \cos 4t - \frac{1}{2}(\cos 4t - 4t \operatorname{sen} 4t)$$

y aplicando la segunda condición de Cauchy se obtiene:

$y'_c(0) = 0 = -4c_1 \operatorname{sen} 4(0) + 4c_2 \cos 4(0) - \frac{1}{2}(\cos 4(0) - 4(0) \operatorname{sen} 4(0))$ de donde se deduce que $c_2 = \frac{1}{8}$; finalmente la integral particular de la ecuación diferencial o modelo matemático representa el movimiento forzado no amortiguado esta dado por:

$$y(t) = \frac{1}{8} \operatorname{sen} 4t - \frac{1}{2} t \cos 4t$$

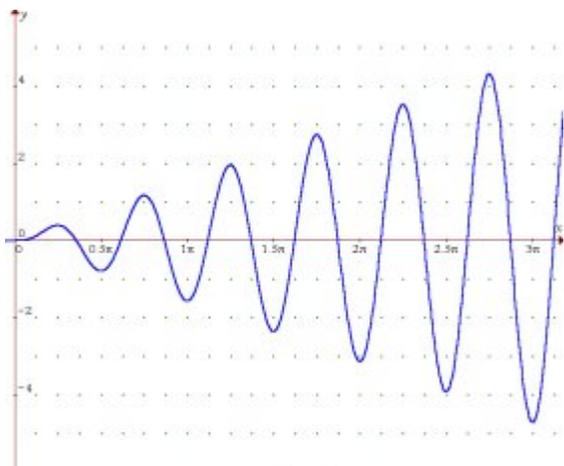


Fig. 50

En la figura 50 se muestran las oscilaciones del movimiento forzado con resonancia pura; se puede observar claramente que la masa parte del origen de coordenadas, es decir de la posición del equilibrio físico y la fuerza impulsora obliga a ésta a oscilar, pero como las frecuencias de la fuerza impulsora coincide con la frecuencia de las oscilaciones libres entonces la amplitud de las oscilaciones del movimiento crecen conforme transcurre el tiempo. De esta manera las oscilaciones irán creciendo hasta que el sistema masa-resorte se colapse y se destruya.

MÁS INFORMACIÓN ACERCA DE LA RESONANCIA PURA

El gran tenor **Enrico Caruso** (1873-1921), rompió una copa de vidrio cuando cantaba una nota alta. El 7 de noviembre de 1940 el puente **Tacoma Narrows** se desplomó debido a los vientos de apenas 40 mph. ¿cómo sucedieron estos eventos?

Aunque se pueden observar materiales como el concreto, vidrio y madera como materiales inelásticos, en realidad no son tan rígidos como parece; éstos son elásticos, semejante al caucho, pero no tanto. Todo los cuerpos elásticos tienden a vibrar u oscilar cuando se les golpea; cuando sucede esto, las vibraciones tienen forma de ondas y éstas adquieren cierta amplitud, entendiendo por ésta al tamaño de la onda. Cada objeto tiene una frecuencia natural o frecuencia resonante (recuérdese que la frecuencia es el número de ciclos por segundo). Acorde

con la física, la energía transferida a través de las ondas es proporcional al cuadrado de su amplitud; cuando una fuerza externa golpea a un objeto, ésta lo puede hacer oscilar hasta alcanzar la máxima amplitud, es decir, puede coincidir esta amplitud con la frecuencia resonante del objeto, entonces la máxima energía transferida hará que el objeto se colapse

Así que lo que pasó cuando **Caruso** cantó, fue que el efecto de su voz igualó la frecuencia resonante del vidrio de la copa, forzándola a oscilar a su máxima amplitud, luego entonces, la energía transferida de las ondas logró que la copa se reventara. El caso del puente Tacoma es similar; el constante golpeteo de las partículas del viento forzaron al puente a oscilar a su máxima amplitud y la energía transferida logró que el puente se colapsara hasta destruirse. Investigaciones recientes han demostrado que los remolinos ó *vórtices de Von*



E. Caruso

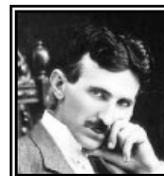


T. von Kármán

Kármán (en honor a **Theodore Von Kármán** (1881-1963) matemático húngaro) fueron la principal causa de las oscilaciones del puente, pero sea cual fuere el caso, las oscilaciones fueron inminentes y determinantes para provocar la resonancia pura y como consecuencia de ello, la inevitable catástrofe. Una cuestión interesante: ¿Siempre sucederá este fenómeno?. La respuesta claro está, es negativa; solo depende de la estructura física o configuración geométrica de los artefactos y también de los materiales; por eso es tan importante el diseño ingenieril de los artefactos que son utilizados en el quehacer del hombre como los vehículos, aviones, herramientas, naves espaciales, aparatos domésticos, entre otros; hasta un bat de béisbol requiere ser diseñado adecuadamente.

Claro está que estos fenómenos destructivos representan el lado oscuro de la resonancia haciéndola parecer como algo no deseable. Sin embargo también tiene su lado amable, su utilidad es tal que sin ella, no se tendría la posibilidad de tener los radios, antenas receptoras de ondas, televisiones y la música reproducida en diferentes medios, como los discos compactos, cintas magnéticas etc.

Nikola Tesla (1856-1943), en el año 1898 realizó un inocente experimento con un pequeño vibrador que unió a una columna de acero dentro de su laboratorio que se encontraba en un edificio localizado en la ciudad de Nueva York. Activó el vibrador y comenzaron las vibraciones. Él había notado que a ciertas frecuencias específicas las piezas del equipo de su laboratorio comenzaron a zangolotearse. Cambiando las frecuencias el zangoloteo se movió hacia otras partes del laboratorio. Desafortunadamente él no se daba cuenta de que las vibraciones corrían a través de la columna descendiendo hasta los cimientos del edificio. Sus vibraciones comenzaron a transmitirse por todo Manhattan. Pero afortunadamente Tesla apagó el pequeño vibrador antes de que la policía llegara a su laboratorio y el experimento no pasó más allá del pánico entre los vecinos. Aunque Tesla no fue quien descubrió el fenómeno de la resonancia pura, él se obsesio con éste fenómeno creando algunos de los más increíbles demostraciones nunca antes vistas. Fue Tesla quien demostró que los principios de la resonancia podrían servir para transmitir y recibir mensajes de radio.



N. Tesla





Ejercicios Suplementarios

Sección 3.7 Ejercicios 3.6

Resolver los siguientes problemas relacionados con el *sistema masa-resorte*.

Movimiento Armónico Libre No Amortiguado

1. Se fija una masa de 2 lb a un resorte cuya constante es de 8 lb/ft . ¿Cuál es el periodo del movimiento armónico libre?
2. Al fijar una masa de 20 lb al extremo de un resorte, lo estira 5 in . Encuentre la ecuación del movimiento cuando la masa se suelta y parte del reposo desde un punto que está a 2 in por encima de la posición de equilibrio.
3. Una fuerza de 400 N estira 2 m . Después, al extremo de ese resorte se fija una masa de 50 Kg y parte de la posición de equilibrio a una velocidad de 10 m/s hacia arriba. Deduzca la ecuación del movimiento.
4. Otro resorte cuya constante es 20 N/m , esta colgado del mismo soporte rígido, pero en posición paralela a la del sistema masa-resorte del problema anterior. Al segundo resorte se le fija una masa de 20 Kg , y ambas masas salen de su posición de equilibrio con una velocidad de 10 m/s hacia arriba. ¿Cuál masa la mayor amplitud de movimiento?, ¿En que momento las masas se encuentran en la misma posición?, y ¿En que dirección se mueven en ese momento?. (Sugerencia: Use un software para graficar las ecuaciones de los movimientos para observar este hecho)
5. Un contrapeso de 8 lb , fijo a un resorte, tiene un movimiento armónico libre. Deduzca la ecuación del movimiento si la constante del resorte es de 1 lb/ft y el contrapeso parte de 6 in abajo del punto de equilibrio, con una velocidad de 1.5 ft/seg^2 hacia abajo. Aplique la forma alternativa de la ecuación del movimiento para determinar la amplitud de las oscilaciones libres.

Movimiento Sobreamortiguado

6. Se une un contrapeso de 1 slug a un resorte cuya constante es de 1 lb/ft . Si una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a 3 veces la velocidad instantánea actúa sobre el sistema, deduzca la ecuación del movimiento si el contrapeso se suelta a $\frac{1}{2} \text{ ft}$ abajo de la posición de equilibrio y con una velocidad hacia arriba de 1 ft/seg .
7. Una fuerza de 2 lb estira 1 ft un resorte. El medio a través del cual se mueve ofrece una resistencia numéricamente igual a 1.5 veces la velocidad instantánea. Deduzca la ecuación del movimiento si la masa se suelta a 2 ft por encima de la posición de equilibrio partiendo del reposo.

Movimiento Críticamente Amortiguado

8. Un contrapeso de 8 lb estira 2 ft un resorte. Si una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a 2 veces la velocidad instantánea actúa sobre el sistema, deduzca la ecuación del movimiento si el contrapeso se suelta de la posición de equilibrio con una velocidad hacia arriba de 3 ft/seg .
9. Un resorte de 4 ft alcanza 8 ft al colgarle una masa de 8 lb . El medio a través del cual se mueve ofrece una resistencia numéricamente igual a $\sqrt{2}$ veces la velocidad instantánea. Deduzca la ecuación del movimiento si la masa se suelta de la posición de equilibrio con una velocidad de 5 ft/seg hacia abajo. Calcule el tiempo en que llega a su desplazamiento extremo respecto de la posición de equilibrio. ¿Cuál es su posición en ese instante?

Movimiento Subamortiguado

10. Una fuerza de 2 lb estira 1 ft un resorte. A este resorte se le une un contrapeso de 3.2 lb y el sistema se sumerge en un medio que imparte una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a 0.4 veces la velocidad instantánea.
 - a) Deduzca la ecuación del movimiento si el contrapeso parte del reposo 1 ft por encima de la posición de equilibrio.
 - b) Encuentre la ecuación del movimiento de acuerdo con la forma (3.57)
 - c) Calcule el primer momento en que la masa pasa por la posición de equilibrio dirigiéndose hacia arriba.
11. Después de unir una masa que pesa 10 lb a un resorte de 5 ft , éste mide 7 ft . Se quita la masa y se reemplaza por otra que pesa 8 lb , y el sistema se coloca en un medio que ofrece una resistencia al movimiento numéricamente igual a la velocidad instantánea
 - d) Deduzca la ecuación del movimiento, si se suelta la masa a $\frac{1}{2} \text{ ft}$ debajo de la posición de equilibrio a una velocidad de 1 ft/seg hacia abajo.
 - e) Expresé la ecuación del movimiento en la forma (3.57)
12. Al unir un contrapeso de 10 lb a un resorte, éste se estira 2 ft . El contrapeso también está unido a un amortiguador, que ofrece resistencia al movimiento numéricamente igual a β ($\beta > 0$) veces la velocidad instantánea. Calcule los valores de β para que el movimiento que se produce sea:
 - f) Sobreamortiguado
 - g) Críticamente amortiguado
 - h) Subamortiguado

Movimiento Forzado

13. Al unir un contrapeso de 1 slug a un resorte, éste se estira 4 ft . El contrapeso se mueve en un medio amortiguador que ofrece una resistencia al movimiento numéricamente igual a 8 veces la velocidad instantánea. En el instante $t = 0$ se aplica permanentemente una fuerza $f(t) = \cos 4t$. Deduzca la ecuación de este movimiento.
14. Se une un contrapeso de 1 slug a un resorte cuya constante es de 1 lb/ft . El contrapeso se mueve en un medio que ofrece una resistencia numéricamente igual a 3 veces la velocidad

instantánea. A partir de $t = 0$ se aplica una fuerza de $f(t) = 2 \cos 2t + 3 \operatorname{sen} 2t$. Calcule lo siguiente:

- La ecuación del movimiento oscilatorio
- Grafique en un mismo sistema de coordenadas las partes de estado estable y transitoria
- Grafique la ecuación del movimiento

15. Un contrapeso de 16 lb estira $\frac{8}{3} \text{ ft}$ un resorte y se encuentra en su posición de equilibrio. A partir de $t = 0$ se aplica una fuerza de $f(t) = 3e^{-3t} \operatorname{sen} 5t$. Deduzca la ecuación del movimiento suponiendo que no existe amortiguamiento.



Referencias Bibliográficas del Capítulo 3

Obras consultadas:

Bell, E.T., “*The Development of Mathematics*”, Fourth Edition, McGraw Hill Book Co. of New York, 1985

Boole G., “*A Treatise on Differential Equations*”, Published by Macmillan and Co., Cambridge, England 1856

Boyce W.E., DiPrima R.C., “*Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*”, Third Edition, Published by John Wiley & Sons Inc., New York, 1966

Dorf R., “*Sistemas Modernos de Control*”, 2ª Edición, Editorial Addison Wesley Iberoamericana, 1989

Elsgolts L., “*Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional*”, 3ª Edición, Editorial Mir Moscú, Rusia, 1983

Euler L., “*Nova Methodus Innumerabiles Aequationes Differentiales Secundi Gradus Reducendi ad Aequationes Differentiales Primi Gradus*”, Artículo publicado en *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, por St. Petersburg Academy, Rusia, 1732

Euler L., “*Methodus Aequationes Differentiales Altiorum Graduum Integrandi Ulterius Promota*”, Artículo publicado en *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, por St. Petersburg Academy, Rusia, 1753

Euler L., “*De Integratione Aequationum Differentialium*”, Artículo publicado en *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, por St. Petersburg Academy, Rusia, 1763

Kleiber J., Karsten B., “*Tratado Popular de Física*”, 12ª Edición, Editorial Gustavo Gil S.A. Barcelona, España, 1964

Lagrange J.L., “*Sur le Mouvement des Noeuds des Orbites Planetéires*”, Artículo publicado por la Académie Royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin, 1774

Lagrange J.L., “*Théorie des Variations Séculaires des Éléments des Planètes*”, Artículo publicado por la Académie Royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin, 1781

Landau L., Ajeizer A., Lifshitz, E., “*Curso de Física General. Mecánica y Física Molecular*” 1ª Edición, Editorial Mir Moscú, Rusia, 1988

Piskunov N., “*Cálculo Diferencial e Integral*”, Tomo II, 1ª Edición en español, Editorial Mir, Moscú, Rusia, 1986

Ríbnikov K. “*Historia de las Matemáticas*”, Academia de Ciencias de Rusia, Editorial Mir, Moscú, Rusia, 1987

Rouse Ball W.W., “*A Short Account of the History of Mathematics*”, Stereotyped Edition, Macmillan and Co. Ltd., London, England, 1919

Simmons G.F., “*Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas*”, 2ª Edición, Editorial McGraw Hill Interamericana de España, España, 1993

Smith D.E., “*History of Modern Mathematics*”, Fourth Edition Enlarged, Chapman & Hall Ltd., London, England, 1906

Struik D.J., “*Historia Concisa de las Matemáticas*”, 2ª Edición en español, Editorial del Instituto Politécnico Nacional, 1986

Targ S.M., “*Curso Breve de Mecánica Teórica*”, Academia de Ciencias de Rusia, Editorial Mir, 5ª Edición, Moscú, Rusia, 1986

Yavorski B.M., Detlaf, A.A., “*Prontuario de Física*”, 1ª Edición en español, Editorial Mir, Moscú, Rusia, 1988

Zill D.G. “*Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado*”, 7ª Edición, Editorial Thomson International., México, 2002

Sitios web consultados en Internet

O'Connor J.J., Robertson E.F., “*MacTutor History of Mathematics*”, sitio web en Internet de la Escuela de Matemáticas y Estadística de la Universidad de San Andrews, Escocia, 2003
<http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/>

Nápoles J.E., Negron C., “*La Historia de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Contadas por sus Libros de Texto*”, Artículo publicado en la Internet en la “Revista Electrónica de Didáctica de las Matemáticas”, Universidad Autónoma de Querétaro, México, 2002
<http://www.uaq.mx/matematicas/redm/>



Transformadas de Laplace

Sección

4.1

“Todos los efectos de la Naturaleza son únicamente consecuencias matemáticas de un pequeño número de leyes inmutables”
Laplace Pierre Simón



TRANSFORMADA DE LAPLACE

ORÍGENES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

El origen de *la transformada de Laplace* tiene una larga historia y comienza con los trabajos del teniente **Leonhard Euler**; estas primeras ideas se encuentran en su obra “*De Constructione Aequationum*” creada en 1737 y posteriormente publicado en 1744. En el párrafo 6 aparece lo que él denominó como *aequationem specialem* : $z = \int e^{ax} X dx$ que utiliza para generar a partir de ella ecuaciones diferenciales.

Pierre Simón Laplace, publica en 1782 su “*Traité de Mécanique Analytique*”, y en 1812 su “*Théorie Analytique des Probabilités*”, en donde crea el cálculo de las *funciones generatrices* (que es el fundamento de su teoría), utiliza a los números complejos en el cálculo de integrales de funciones y desarrolla el método de resolución de *ecuaciones lineales en diferencias y en diferenciales*, conocido bajo la denominación de la *transformada de Laplace*: la función incógnita $y(s)$ se reemplaza por la integral $\int \varphi(x) x^s ds$ o por la expresión $\int \varphi(x) e^{-sx} dx$, en donde $\varphi(x)$ es una nueva función incógnita. Esta transformación “*transforma*”, como se dice actualmente, la función original $F(t)$, definida en $(0, \infty)$ en la función $f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt$ de la variable compleja $s = \alpha + it$. Las transformaciones necesarias (cambio de variable en la integración, integración según direcciones diferentes al del eje real) Laplace aún las considera como “*instrumento de descubrimiento*”.

Por su parte el matemático inglés **George Boole** (1815-1864), en su obra “*A Treatise on Differential Equations*” publicada en 1856 afirmó que **Euler** partía de las propiedades de las integrales definidas para deducir su correspondiente ecuación diferencial y que **Laplace** hacía el proceso contrario. Él llamó a este procedimiento como *el método de Laplace*. En el capítulo XVIII trata sobre *la solución de ecuaciones diferenciales lineales por integrales definidas* y aparece una expresión:



G. Boole

$u = \int e^{xt} T dt$ siendo T una función de t ; Esto es sin duda, similar a la de **Euler**.

El método de *la transformada de Laplace* originalmente es muy diferente al que actualmente se difunde en la mayoría de los textos de ecuaciones diferenciales o de control automático; tal método moderno fue desarrollado alrededor de 1920 por el Dr. **Gustav Heinrich Adolf Doetsch** (1892-1977), capitán de la fuerza aérea alemana. En 1937 publica “*Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*” en donde se muestran los fundamentos de la transformaciones de Laplace y en su “*Das Verhalten der Laplace-Transformierten in ihrer Beschränktheithalbebene*” donde aparece la expresión $f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt \equiv \mathcal{L}\{F\}$. También escribe su monumental obra en tres volúmenes “*Handbuch der Laplace-Transformation*” publicada en 1950, 1955 y 1956. En la sección 4.2 se mostrarán más contribuciones de este brillante matemático alemán. Existen en la actualidad un gran número de publicaciones relacionadas con este tipo de transformaciones ya modificadas por la teoría de grupos y el análisis funcional, éstas se las puede ver el artículo “*Laplace Transform Methods for Evolution Equations*” publicado por los Doctores **Boris Bäumer** y **Frank Neubrander** de Louisiana State University, USA.



G.H. Doetsch

Durante el siglo XX se perfeccionaron otro tipo de transformadas como *la transformada de Fourier* en donde los núcleos son funciones trigonométricas $\text{sen}(sx) \wedge \text{cos}(sx)$ (propuestos por **Doetsch** en 1935); *la transformada de Mellin* cuyo *kernel* es del tipo x^{s-1} ; *la transformada de Hankel* cuyo *kernel* es del tipo $xJ_n(sx)$ que involucra las *funciones de Bessel de primera especie de orden n*; *la transformada de Legendre* en donde utiliza como núcleo el *polinomio de Legendre* $P_n(\mu)$ de orden n, *la transformada z* cuyo *kernel* es la *variable compleja* z^{-n} ; este tipo de transformadas es muy útil en el tratamiento de señales discretas, funciones de transferencia en control automático, diseño de filtros digitales y en la resolución de ecuaciones en diferencias; también se tiene *la transformada H* que es un algoritmo útil en el manejo de imágenes astronómicas y existen otras en los dominios de diversos tipos de espacios abstractos.

En otra dirección, **Vito Volterra** (1860-1940) matemático italiano, en 1883 concibe la idea de la teoría de unas funciones las cuales dependen de un conjunto continuo de valores de otra función, es decir crea el concepto de una *funcional* y que de ahí se deriva un nuevo cálculo; con ello en 1890 muestra por medio de su cálculo funcional que las teorías de **Hamilton** y **Jacobi** para la integración de las *ecuaciones diferenciales* de la dinámica puede ser extendida hacia otros problemas de la física. En el periodo que comprende desde 1892 hasta 1894 **Volterra** publica artículos sobre *ecuaciones cilíndricas en derivadas parciales*. Pero sus más importantes trabajos se centran en las ecuaciones integrales. Comenzó este estudio en 1884 y en 1896 publica en 1913 la obra “*Leçons sur les Équations Intégrales et les Équations Integro-Différentielles*” en donde aparece lo que actualmente se conoce como *ecuación integral de tipo Volterra*. Él continuó con el estudio del análisis funcional y lo aplicó en sus ecuaciones integrales logrando con ello importantes logros sobre funciones compuestas y permutables.



V. Volterra



E.I. Fredholm

Erik Ivar Fredholm (1866-1927) matemático sueco; se distinguió por sus trabajos sobre ecuaciones integrales. En 1900 se publica el artículo “*Sur une Nouvelle Méthode Pour la Résolution du Problème de Dirichlet*”, en donde se

muestra su teoría sobre las ecuaciones integrales y en 1903 se publica una extensa teoría de tales ecuaciones en “*Sur une Classe d'équations Fonctionnelle*”. También se destacó en la teoría del potencial y el análisis espectral.

DEFINICIONES BÁSICAS

El significado de la *transformada de Laplace* se le puede asociar con las ecuaciones integrales, pero en sentido inverso. Una ecuación del tipo:

$$\int_a^b K(s,t)F(t)dt = f(s) \quad (4.1)$$

donde $f(s)$ y $K(s,t)$ son funciones conocidas y a y b son constantes, se denomina *ecuación integral de Fredholm* de primera clase y a $K(s,t)$ como el *núcleo* o *kernel* de dicha ecuación.

Si el límite superior de (4.1) fuera la variable s en lugar de b se tendría la ecuación integral:

$$\int_a^x K(s,t)F(t)dt = f(s) \quad (4.2)$$

A esta ecuación se le denomina *ecuación integral de Volterra* de primera clase. Si en particular $a=0$ y s tiende al infinito se tiene

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^x K(s,t)F(t)dt = f(s)$$

Ahora si $K(s,t) = e^{-st}$, y las funciones $K(s,t)$ y $F(t)$ son conocidas, la anterior ecuación se convierte en:

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt \quad (4.3)$$

que define la *Transformada de Laplace* de la función $F(t)$.

NOTACIÓN

La transformada de una función $F(t)$ se denota por $\mathcal{L}\{F(t)\}$ de tal forma que

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt = f(s) \quad (4.4)$$

TRANSFORMADAS DE LAPLACE DE ALGUNAS FUNCIONES ELEMENTALES

$F(t)$	$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$
1	$\frac{1}{s} \quad s > 0$
t	$\frac{1}{s^2} \quad s > 0$
t^n $n = 0, 1, 2, \dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}} \quad s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a} \quad s > a$
$\text{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2} \quad s > a$
$\text{cos}(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2} \quad s > 0$
$\text{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2} \quad s > a $
$\text{cosh}(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2} \quad s > a $

Tabla 1

A continuación se muestran algunas de las más importantes propiedades del operador transformada de Laplace, útiles en la resolución de ecuaciones diferenciales de orden n y sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

ALGUNAS PROPIEDADES IMPORTANTES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Propiedad de la linealidad

Teorema 4-1.- Si $c_1 \wedge c_2$ son constantes y $F_1(t) \wedge F_2(t)$ son funciones cuyas transformadas de Laplace son $f_1(s) \wedge f_2(s)$, entonces:

$$\mathcal{L}\{c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{F_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{F_2(t)\} = c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)$$

Primera Propiedad de Traslación

Teorema 4-2.- Si $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ entonces: $\mathcal{L}\{e^{at} F(t)\} = f(s-a)$

Segunda Propiedad de Traslación

Teorema 4-3.- Si $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ y $G(t) = \begin{cases} F(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$ entonces:

$$\mathcal{L}\{G(t)\} = e^{-as} f(s)$$

Transformadas de Laplace de las Derivadas

Teorema 4-4.- $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ entonces:

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = sf(s) - F(0)$$

Teorema 4-5.- $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ entonces:

$$\mathcal{L}\{F''(t)\} = s^2 f(s) - sF(0) - F'(0)$$

Teorema 4-6.- $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ entonces:

$$\mathcal{L}\{F^{(n)}(t)\} = s^n f(s) - s^{n-1}F(0) - s^{n-2}F'(0) - \dots - sF^{(n-2)}(0) - F^{(n-1)}(0)$$

Transformadas de Laplace de las Integrales

Teorema 4-7.- $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ entonces:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t F(u) du\right\} = \frac{f(s)}{s}$$

Multiplikaciones por t^n

Teorema 4-8.- $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ entonces:

$$\mathcal{L}\{t^n F(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} f(s)$$

Divisiones por t

Teorema 4-9.- $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ entonces:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(u) du$$

Funciones Periódicas

Teorema 4-10.- Sea $F(t)$ con periodo $T > 0$ tal que $F(t+T) = F(t)$, entonces:

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st} F(t) dt}{1 - e^{-sT}}$$

Función Escalón Unitario o Función Unitaria de Heaviside

Teorema 4-11.- Sea $\mathcal{U}(t-a)$ una función definida por

$$\mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t > a \end{cases}$$

entonces:

$$\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}$$

Forma Alternativa de la Segunda Propiedad de Traslación

Teorema 4-12.- Sea $\mathcal{U}(t-a)$ una función de Heaviside y $g(t)$ una función de la variable t , entonces:

$$\mathcal{L}\{g(t)\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as} \mathcal{L}\{g(t+a)\}$$

MÉTODOS PARA CALCULAR LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Existen varios métodos para calcular la Transformada de Laplace, a continuación se enuncian algunos de ellos.

Método Directo.- Haciendo uso de la definición (4).

Uso directo de Tablas.- En algunos casos simples puede ser aplicada la tabla 1 mostrada anteriormente.

Aplicación de las Propiedades de la Transformada de Laplace.- En algunos casos pueden ser aplicadas algunas propiedades enunciadas anteriormente junto con artificios algebraicos.

Método de las Series.- Si $F(t)$ admite un desarrollo en una serie de potencias infinita de la forma:

$$F(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

Por el **Teorema 1-1**, se puede calcular la transformada de Laplace a este desarrollo, obteniéndose:

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s^2} + \frac{2!a_2}{s^3} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!a_n}{s^{n+1}}$$

CÁLCULO DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE DE FUNCIONES

Los siguientes cálculos están basados en la tabla 1 y en las propiedades de la transformada de Laplace. Se mostrará la necesidad del uso de las propiedades en los casos en los que no es posible emplear la tabla directamente.

Ejemplo 1.- Encontrar la transformada de Laplace de las siguientes funciones:

- a) $F(t) = t^4$
- b) $F(t) = e^{-2t}$
- c) $F(t) = \cos 5t$

Solución a)- En este caso la función es potencial; aquí, $n = 4$ y aplicando la tercer fórmula de la tabla 1 se obtiene:

$$\mathcal{L}\{t^4\} = \frac{4!}{s^5} = \frac{24}{s^5}$$

Solución b)- En este caso la función es exponencial; aquí $a = -2$ y aplicando la cuarta fórmula de la tabla 1 se obtiene:

$$\mathcal{L}\{e^{-2t}\} = \frac{1}{s - (-2)} = \frac{1}{s + 2}$$

Solución c)- En este caso la función es trigonométrica; aquí $a = 5$ y aplicando la sexta fórmula de la tabla 1 se obtiene:

$$\mathcal{L}\{\cos 5t\} = \frac{s}{s^2 + 5^2} = \frac{s}{s^2 + 25}$$

Ejemplo 2.- Encontrar la transformada de Laplace de las siguientes funciones

- a) $F(t) = \frac{2}{3}t^2 - 5\sinh 3t$
- b) $F(t) = t^3 e^{4t}$
- c) $F(t) = e^{2t} \cos(t)$
- d) $F(t) = e^{-3t} \sinh(t)$

Solución a)- En este caso no es posible aplicar la tabla 1 directamente. Pero aplicando el **Teorema 4-1 (Propiedad de linealidad)** y aplicando la tabla 1 para cada función, se tiene:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{2}{3}t^2 - 5\operatorname{senh}3t\right\} = \frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\{t^2\} - 5\mathcal{L}^{-1}\{\operatorname{senh}3t\} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2!}{s^3} - 5 \cdot \frac{3}{s^2 - (3)^2} = \frac{4}{3s^3} - \frac{15}{s^2 - 9}$$

Solución b).- En este caso es posible aplicar el **Teorema 4-2** (Primera propiedad de traslación)

tomando $F(t) = t^3 \wedge a = 4$ además de que $\mathcal{L}\{t^3\} = \frac{3!}{s^4}$, por lo tanto:

$$\mathcal{L}\{t^3 e^{4t}\} = \frac{3!}{(s-4)^4} = \frac{6}{(s-4)^4}$$

Solución c).- En este también es posible aplicar el **Teorema 4-2** (Primera propiedad de

traslación) tomando $F(t) = \cos(t) \wedge a = 2$, además de que $\mathcal{L}\{\cos(t)\} = \frac{s}{s^2 + 1}$, por lo tanto:

$$\mathcal{L}\{e^{2t} \cos(t)\} = \frac{s-2}{(s-2)^2 + 1} = \frac{s-2}{s^2 - 2s + 5}$$

Solución d).- Nuevamente se aplica el **Teorema 4-2** (Primera propiedad de traslación) tomando

$F(t) = \operatorname{senh}(t) \wedge a = -3$, y sabiendo que $\mathcal{L}\{\operatorname{senh}(t)\} = \frac{1}{s^2 - 1}$, entonces:

$$\mathcal{L}\{e^{-3t} \operatorname{senh}(t)\} = \frac{1}{(s+3)^2 - 1} = \frac{1}{s^2 + 6s + 8}$$

Ejemplo 3.- Encontrar la transformada de Laplace de las siguiente función:

$$G(t) = \begin{cases} \cos(t-4) & t > 4 \\ 0 & t < 4 \end{cases}$$

Solución.- En este caso es posible aplicar el **Teorema 4-3** (Segunda propiedad de traslación);

aquí $F(t) = \cos t \wedge a = 4$ y como $\mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{s}{s^2 + 1}$, entonces:

$$\mathcal{L}\{G(t)\} = e^{-4s} \cdot \frac{s}{s^2 + 1} = \frac{se^{-4s}}{s^2 + 1}$$

Para ver más claramente la aplicación de los teoremas relativos a la transformada de Laplace de las derivadas de funciones, considérese que $Y = Y(t), Y' = Y'(t), Y'' = Y''(t), \dots, Y^{(n)} = Y^{(n)}(t)$, de aquí se establece que $\mathcal{L}\{Y(t)\} = y(s)$ y $Y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{y(s)\}$; luego entonces, por ejemplo, una ecuación diferencial como $y'' + 64y = 0$ puede ser rescrita como $Y'' + 64Y = 0$; además si ésta tiene las condiciones iniciales $y(0) = \frac{2}{3} \wedge y'(0) = -\frac{4}{3}$, también pueden ser rescritas como $Y(0) = \frac{2}{3} \wedge Y'(0) = -\frac{4}{3}$. De esta manera una ecuación diferencial, en general de orden n puede

transformarse del *dominio de t* (para los casos aplicados, generalmente se considera ésta como el tiempo) al *dominio del plano complejo s*; esto se ilustra con el siguiente ejemplo

Ejemplo 4.- Considérese la ecuación diferencial $y''+64y=0$ sujeta a las condiciones $y(0)=\frac{2}{3} \wedge y'(0)=-\frac{4}{3}$. Utilice la transformada de Laplace para transformar esta ecuación diferencial al dominio del plano complejo s .

Solución.- Primeramente se convierte la ecuación diferencial y sus condiciones iniciales a la variable Y , esto es:

$$Y''+64Y=0 \text{ sujeta a } Y(0)=\frac{2}{3} \wedge Y'(0)=-\frac{4}{3}$$

Aplicando los **Teoremas 4-4 y 4-5**, se tiene:

$$\mathcal{L}\{Y''(t)\}+64\mathcal{L}\{Y(t)\}=\mathcal{L}\{0\}$$

$$s^2y(s)-sY(0)-Y'(0)+64y(s)=0$$

Ahora, aplicando las condiciones iniciales dadas, se obtiene:

$$s^2y(s)-s\left(\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{4}{3}\right)+64y(s)=0$$

Simplificando y despejando $y(s)$:

$$y(s)=\frac{2s-4}{3(s^2+64s)}$$

Ejemplo 5.- Considérese la ecuación diferencial $y''+9y=6e^{3t}$ sujeta a las condiciones: $y(0)=y'(0)=0$. Utilice la transformada de Laplace para transformar esta ecuación diferencial al dominio del plano complejo s .

Solución.- Primeramente se convierte la ecuación diferencial y sus condiciones iniciales a la variable Y , esto es:

$$Y''+9Y=6e^{3t} \text{ sujeta a } Y(0)=Y'(0)=0$$

Aplicando los **Teoremas 4-4 y 4-5**, y la tabla 1 se tiene: $s^2y(s)-sY(0)-Y'(0)+9y(s)=\frac{6}{s-3}$

Ahora, aplicando las condiciones iniciales dadas, se obtiene:

$$s^2y(s)-s(0)-(0)+9y(s)=\frac{6}{s-3}$$

Simplificando y despejando $y(s)$:

$$y(s)=\frac{6}{(s-3)(s^2+9)}$$

Ejemplo 6.- Encontrar las siguientes transformada de Laplace:

- a) $\mathcal{L}\{t^2 e^{-5t}\}$
- b) $\mathcal{L}\{t \cos 4t\}$

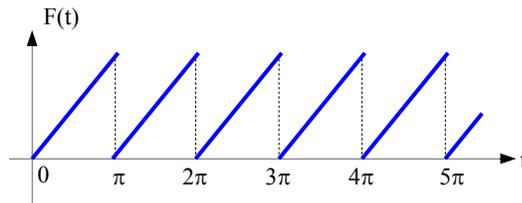
Solución a)- Es evidente que el cálculo de la transformada puede realizarse mediante la primera propiedad de traslación (**Teorema 4-2**), pero en este caso se ilustra la aplicación del **Teorema 4-8** (*multiplicación por t^n*); aquí, $F(t) = e^{-5t}$ y $f(s) = \frac{1}{s+5}$, por lo tanto:

$$\mathcal{L}\{t^2 e^{-5t}\} = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{1}{s+5} \right) = \frac{d}{ds} \left(-\frac{1}{(s+5)^2} \right) = \frac{2}{(s+5)^3}$$

Solución b)- Es evidente que el cálculo de la transformada no puede realizarse mediante el uso directo de la tabla 1. Pero es posible aplicar el **Teorema 4-8** (*multiplicación por t^n*); en este caso $F(t) = \cos 4t$ y $f(s) = \frac{s}{s^2+16}$, por lo tanto:

$$\mathcal{L}\{t \cos 4t\} = (-1) \frac{d}{ds} \left(\frac{s}{s^2+16} \right) = \frac{s^2-16}{(s^2+16)^2}$$

Ejemplo 7.- Encontrar la transformada de Laplace de la siguiente función periódica:



donde $F(t) = t$.

Solución.- Como se puede observar en la gráfica anterior, el periodo es $T = \pi$. Aplicando la fórmula del **Teorema 4-10**, se tiene:

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{\int_0^{\pi} t e^{-st} dt}{1 - e^{-\pi s}}$$

Integrando por partes:

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{\left(-\frac{t}{s} e^{-st} - \frac{1}{s^2} e^{-st} \right) \Big|_0^{\pi}}{1 - e^{-\pi s}}$$

Evaluando:

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{-\frac{\pi}{s}e^{-\pi s} - \frac{1}{s^2}e^{-\pi s} + \frac{(0)}{s}e^{-(0)s} + \frac{1}{s^2}e^{-(0)s}}{1 - e^{-\pi s}}$$

Finalmente:

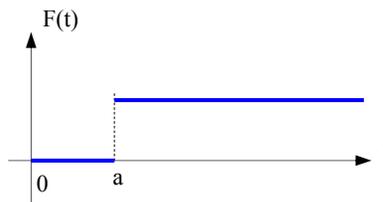
$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{1 + \pi s}{1 - e^{-\pi s}} + \frac{1}{s^2(1 - e^{-\pi s})}$$

FUNCIÓN ESCALÓN UNITARIO O FUNCIÓN DE HEAVISIDE

La función $\mathcal{U}(t-a)$ se define como:

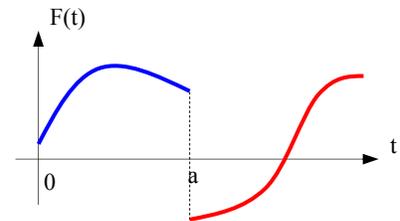
$$\mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < a \\ 1 & t \geq a \end{cases} \quad (4.5)$$

su gráfica es la siguiente:



Uno de los usos matemáticos más importantes de esta función, es la de representar en forma más compacta y fácil de manipular, *las funciones seccionalmente continuas*, es decir, aquellas que están definidas por tramos. Por ejemplo en el caso general

$$F(t) = \begin{cases} \varphi(t) & 0 \leq t < a \\ \psi(t) & t > a \end{cases}$$



su equivalente algebraico en función del *escalón unitario* sería:

$$F(t) = \varphi(t) - \varphi(t)\mathcal{U}(t-a) + \psi(t)\mathcal{U}(t-a) \quad (4.6)$$

Ejemplo 8.- Exprese en términos de la función escalón unitario y calcule la transformada de la siguiente función:

$$F(t) = \begin{cases} 10t & 0 \leq t < 2 \\ -t & t > 2 \end{cases}$$

Solución.- Aplicando la fórmula (4.6) se tiene inmediatamente:

$$F(t) = 10t - 10t\mathcal{U}(t-2) - t\mathcal{U}(t-2)$$

Para calcular la transformada de esta función, basta con aplicar el **Teorema 4-1** (*Propiedad de Linealidad*), el **Teorema 4-11** (*Transformada de la Función de Heaviside*) y el **Teorema 4-8** (*Multiplicaciones por t^n*), esto es:

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = 10\mathcal{L}\{t\} - 10\mathcal{L}\{t\mathcal{U}(t-2)\} - \mathcal{L}\{t\mathcal{U}(t-2)\} = 10\mathcal{L}\{t\} - 11\mathcal{L}\{t\mathcal{U}(t-2)\}$$

Aplicando los teoremas indicados, se tiene:

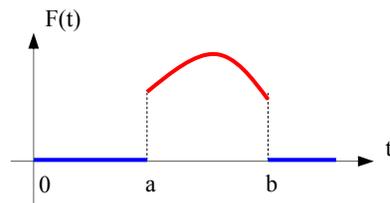
$$\mathcal{L}\{F(t)\} = 10\left(\frac{1}{s}\right) - 11(-1)\frac{d}{ds}\left(\frac{e^{-2s}}{s}\right) = \frac{10}{s} - \frac{11(2s+1)}{s^2e^{2s}}$$

Es interesante observar que el cálculo de $\mathcal{L}\{t\mathcal{U}(t-2)\}$ puede realizarse mediante el **Teorema 4-12** (*Forma Alternativa del la Segunda Propiedad de Traslación*), esto es:

$$\mathcal{L}\{t\mathcal{U}(t-2)\} = e^{-2s}\mathcal{L}\{t-2\} = e^{-2s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s}\right) = \frac{2s+1}{s^2e^{2s}}$$

Por otro lado, para funciones del tipo:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < a \\ \varphi(t) & a < t < b \\ 0 & t > b \end{cases}$$



su equivalente en términos de la función *escalón unitario* sería:

$$F(t) = \varphi(t)[\mathcal{U}(t-a) - \mathcal{U}(t-b)] \quad (4.7)$$

Ejemplo 9.- Exprese en términos de la función escalón unitario y calcule la transformada de la siguiente función:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 2 \\ 3t^2 & 2 < t < 3 \\ 0 & t > 3 \end{cases}$$

Solución.- Aplicando la fórmula (4.7) se tiene inmediatamente:

$$F(t) = 3t^2[\mathcal{U}(t-2) - \mathcal{U}(t-3)]$$

Para calcular la transformada de esta función, basta con aplicar el **Teorema 4-1** (*Propiedad de Linealidad*), el **Teorema 4-11** (*Transformada de la Función de Heaviside*) y el **Teorema 4-12** (*Forma Alternativa del la Segunda Propiedad de Traslación*), esto es:

Aplicando el **Teorema 4-1**:

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \mathcal{L}\{3t^2 [\mathcal{U}(t-2) - \mathcal{U}(t-3)]\} = 3\mathcal{L}\{t^2 \mathcal{U}(t-2)\} - 3\mathcal{L}\{t^2 \mathcal{U}(t-3)\}$$

ahora aplicando los **Teoremas 4-11, 4-12** y la **Tabla 1**, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{F(t)\} &= 3e^{-2s} \mathcal{L}\{(t+2)^2\} - 3e^{-3s} \mathcal{L}\{(t+3)^2\} \\ &= 3e^{-2s} \mathcal{L}\{t^2 + 4t + 4\} - 3e^{-3s} \mathcal{L}\{t^2 + 6t + 9\} \\ &= 3e^{-2s} \left(\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} + \frac{4}{s} \right) - 3e^{-3s} \left(\frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^2} + \frac{9}{s} \right) \\ &= \frac{3}{s^3} \left(\frac{2 + 4s + 4s^2}{e^{2s}} - \frac{2 + 6s + 9s^2}{e^{3s}} \right) \end{aligned}$$



Ejercicios Suplementarios

Sección 4.1 Ejercicios 4.1

En los problemas del 1 al 17, calcular la transformada de Laplace de las funciones indicadas aplicando según sea el caso, los teoremas vistos en esta sección.

1.- $F(t) = \frac{2}{3}e^{-4t}$

2.- $F(t) = -2\cos(3t)$

3.- $F(t) = 2t^4 - 5t^3 + 3t^2 + \text{sen}(3t)$

4.- $F(t) = 3 + \cos(5t) - 2\text{sen}(4t)$

5.- $F(t) = 2\text{senh}(4t) - 3\text{cosh}(4t)$

6.- $F(t) = (\cos t - 2\text{sent})^2$

7.- $F(t) = \text{cosh}^2(3t)$

8.- $F(t) = 3\cos^2(2t)$

9.- $F(t) = (t-2)^2$

10.- $F(t) = (2t^2 - 3)^2$

11.- $F(t) = t^2 e^{-2t}$

12.- $F(t) = e^{-3t} \cos(3t)$

13.- $G(t) = \begin{cases} \text{sen}(t-\pi) & t > \pi \\ 0 & t < \pi \end{cases}$

14.- $G(t) = \begin{cases} (t-1)^3 & t > 1 \\ 0 & t < 1 \end{cases}$

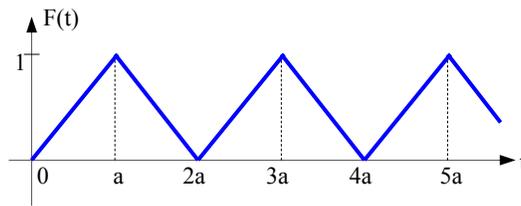
15.- $F(t) = t^2 \cos(2t)$

16.- $F(t) = t\text{senh}(4t)$

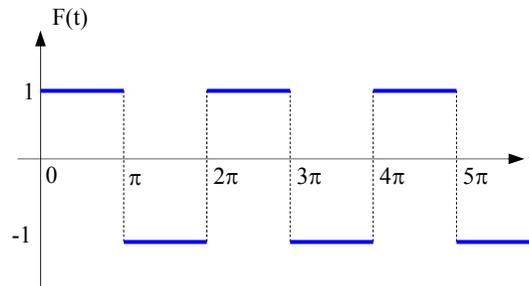
17.- $F(t) = t^4 e^{2t}$

En los problemas del 18 al 21, encontrar la transformada de Laplace de la función periódica que se indica.

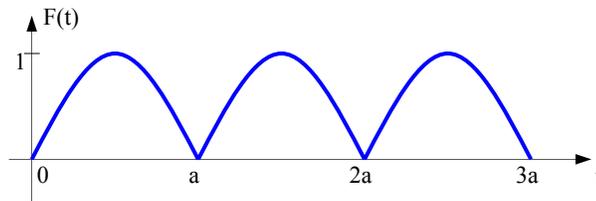
18. Función de onda triangular



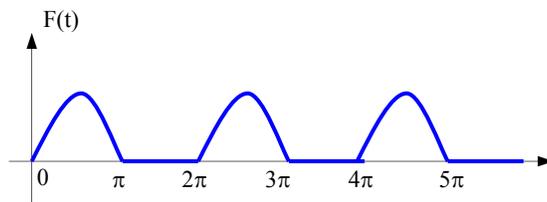
19. Función de onda cuadrada



20. Función de onda sinusoidal rectificada



21. Función de onda sinusoidal semi-rectificada



En los problemas del 22 al 25, utilice la transformada de Laplace para convertir la ecuación diferencial que se indica, al dominio del plano complejo s .

22. $y' + 2y = 0$ sujeta a $y(0) = 0$

23. $y' - 3y = 3t^2 - 1$ sujeta a $y(0) = 1$

24. $y'' - 4y' + 3y = 0$ sujeta a $y(0) = 6, y'(0) = 10$

25. $y'' + 6y' + 9y = 10\text{sen}(x)$ sujeta a $y(0) = y'(0) = 0$

En los problemas del 22 al 25, utilice las ecuaciones (4.6) ó (4.7), según sea el caso, para expresar la función indicada en términos de la función escalón unitario y calcule su transformada de Laplace.

$$26. F(t) = \begin{cases} t^2 & 0 \leq t < 3 \\ -t & t \geq 3 \end{cases}$$

$$27. F(t) = \begin{cases} 3 & 0 \leq t < \pi \\ \text{sent} & t \geq \pi \end{cases}$$

$$28. F(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 3 \\ e^t & t \geq 3 \end{cases}$$

$$29. F(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < \pi \\ \text{sent} & \pi \leq t < 2\pi \\ 0 & t > 2\pi \end{cases}$$

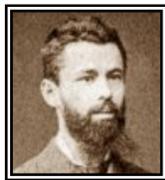
Sección

4.2

“No existe una escala absoluta de tamaño en el universo, pues es ilimitado lo muy grande así como es ilimitado lo muy pequeño”
Heaviside, Oliver

TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

RESEÑA HISTÓRICA

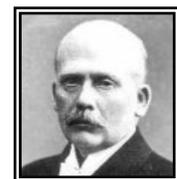


S. Pincherle

Las primeras contribuciones a *la fórmula del método Heaviside* sobre la inversión de la transformada de Laplace las ofrece el matemático italiano **Salvatore Pincherle** (1853-1936) en “*Sur les Fonctions Determinantes*” de 1905. Él trabajó sobre ecuaciones funcionales y se le considera junto con **Volterra** como el fundador del *Análisis Funcional*. Con relación a las condiciones bajo las cuales *la fórmula de expansión en serie de Heaviside* es válida, **Doetsch** lo analiza en “*Ein Allgemeines Prinzip der Asymptotischen Entwicklung*” cuando estudia las representaciones asintóticas de la transformada inversa de Laplace para valores grandes de t . Posteriormente lo hace en “*Die Anwendung Funktionaltransformationen in der Theorie der Differentialgleichungen und die Symbolische Methode*” de 1934. También lo analiza **Ruel Vance Churchill** (1899-?) en “*The inversion of the Laplace Transformation by a Direct Expansion in Series and its Applications to Boundary Value Problems*” de 1936. *La fórmula de expansión de Heaviside* con las condiciones en las que $F_2(t)$ tiene *raíces reales y distintas* lo muestra **Churchill** en “*Additional Notes on Inversion of the Laplace Transformation*” de 1937; En este artículo aparece la expresión

$$F(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{f_1}{f_2} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_1(s_n)}{f_2'(s_n)} e^{s_n t}$$

unicidad de la función $F(t)$ en el proceso de inversión lo analiza el matemático



M. Lerch

checo **Mathias Lerch** (1860-1922) en su obra “*Sur un Point de la Theorie des Fonctions Generatrices d’Abel*” de 1903 además de haber estudiado la convergencia de *las series infinitas, la función gamma, las funciones elípticas y las ecuaciones integrales*.

El teorema de convolución orientado hacia la transformada de Laplace aparece en la obras de **Doetsch** “*Die Integrodifferentialgleichungen vom Faltungstypus*”, de 1922 y posteriormente en “*Über eine Klasse von Integralgleichungen*”, de 1925. Las condiciones sobre $F_1(t)$ y $F_2(t)$ bajo las cuales *el teorema de convolución* es válido lo analiza el Dr. **Werner von Koppenfels** (1904-1945) en “*Der Faltungssatz und seine Anwendung bei der Integration Linearer Differentialgleichungen mit Konstanten Koeffizienten*”, de 1931.



W. Koppenfels

La fórmula de inversión compleja $\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{ts} \varphi(s) ds \equiv L^{-1}(\varphi)$ aparece en la obra de

Doetsch “*Über eine Klasse von Integralgleichungen*”, de 1925. Las condiciones suficientes para el proceso de inversión en la forma de una *integral compleja* fueron establecidas por el Dr. **Jacob David Tamarkin** (1888-1945) en su obra “*On Laplace’s Integral Equation*” de 1926. También aparece la expresión



J.D. Tamarkin

$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\gamma - \omega i}^{\gamma + \omega i} e^{tz} f(z) dz$ en la obra de **Churchill** “*Transformation by a Direct*

Expansion in Series and its Applications to Boundary Value Problems” de 1936. Sobre *la convergencia en media en el sentido de Lebesgue* de la función $F(t)$ expresada como una *integral compleja*, **Doetsch** lo analiza en “*Bedingungen für Darstellbarkeit einer Funktion als Laplace-Integral und eine Umkehrformel für die Laplace Transformation*” de 1936.

DEFINICIÓN DE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

El proceso de inversión del operador *transformada de Laplace* se define mediante:

$$\mathcal{L}^{-1} \{ f(s) \} = F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} f(s) e^{st} ds \quad (4.8)$$

que en la presente obra se denominará como *la fórmula de inversión de Doetsch-Bromwich*. Es evidente la complejidad de tal expresión pero es una poderosa herramienta para calcular la transformada inversa de funciones. Pero en esta sección se mostrarán algunas técnicas alternativas para el cálculo de la transformada inversa de una función $f(s)$.

ALGUNAS TRANSFORMADAS INVERSAS DE LAPLACE

$f(s)$	$F(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ f(s) \}$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{1}{s^{n+1}} \quad n = 0, 1, 2, \dots$	$\frac{t^n}{n!}$

$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{\text{sen}(at)}{a}$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\text{cos}(at)$
$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{\text{senh}(at)}{a}$
$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\text{cosh}(at)$

Tabla 2

ALGUNAS PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

Propiedad de la linealidad

Teorema 4-13.- Si $c_1 \wedge c_2$ son constantes y $f_1(s) \wedge f_2(s)$, son funciones cuyas transformadas inversas de Laplace son $F_1(t) \wedge F_2(t)$ entonces:

$$\mathcal{L}^{-1}\{c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)\} = c_1 \mathcal{L}^{-1}\{f_1(s)\} + c_2 \mathcal{L}^{-1}\{f_2(s)\} = c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t)$$

Este resultado se puede extender fácilmente al caso de más de dos funciones

Primera Propiedad de Traslación

Teorema 4-14.- Si $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ entonces:

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s-a)\} = e^{at} F(t)$$

Segunda Propiedad de Traslación

Teorema 4-15.- Si $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ entonces:

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as} f(s)\} = \begin{cases} F(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases} = F(t-a) \mathfrak{U}(t-a)$$

División por s

Teorema 4-16.- Si $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ entonces:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{f(s)}{s} \right\} = \int_0^t F(u) du$$

División por s^n

Teorema 4-17.- Si $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ entonces:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{f(s)}{s^n} \right\} = \int_0^t \int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t F(t) dt^n$$

Propiedad de Convolución

Teorema 4-18.- Si $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ y $\mathcal{L}^{-1}\{g(s)\} = G(t)$ entonces:

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)g(s)\} = \int_0^t F(u)G(t-u) du$$

Fórmula del Desarrollo de Heaviside

Teorema 4-19.- Sean $P_n(s) \wedge Q_m(s)$ polinomios en los cuales $P_n(s)$ es de grado menor que $Q_m(s)$ y $Q_m(s)$ tiene n raíces a_k , donde $k = 1, 2, 3, \dots, n$. Entonces:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{P_n(s)}{Q_m(s)} \right\} = \sum_{k=1}^m \frac{P_n(a_k)}{Q'_m(a_k)} e^{a_k t}$$

Esta fórmula es válida incluso en el caso de que a_k sea compleja de la forma $\alpha + \beta i$.

MÉTODOS PARA ENCONTRAR LA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

Existen varios métodos para encontrar *la transformada inversa de Laplace* para funciones reales continuas y seccionalmente continuas. A continuación se muestran los siguientes:

Método Directo. Haciendo uso de la definición (4.8).

Uso directo de Tablas.- En algunos casos simples puede ser aplicada la tabla 2 mostrada anteriormente.

Aplicación de las Propiedades de la Transformada Inversa de Laplace. En algunos casos pueden ser aplicadas algunas propiedades enunciadas anteriormente junto con artificios algebraicos.

Método de las Series. Si $f(s)$ admite un desarrollo en una serie de potencias infinita de la forma:

$$f(s) = \frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s^2} + \frac{2! a_2}{s^3} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! a_n}{s^{n+1}}$$

entonces, dentro de ciertas condiciones, se puede invertir término a término, esto es:

$$F(t) = a_0 + a_1 t + \frac{a_2 t^2}{2!} + \frac{a_3 t^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n t^n}{n!}$$

Método de las Fracciones Parciales (Método de Heaviside).- Como se pudo observar en la sección 4.1 de *la transformada de Laplace*, las funciones obtenidas generalmente son fracciones propias. Es evidente que para poder aplicar la tabla 2 y algunas propiedades de *la transformada inversa de Laplace*, es necesario modificar estas fracciones propias; para ello son muy útiles las herramientas que se encuentran en los Apéndices C y D de este libro. En el Apéndice C se muestra una extensa explicación de cómo calcular las raíces de polinomios y en el Apéndice D, se encuentran los presupuestos teóricos necesarios para poder desarrollar cualquier fracción propia en sus fracciones simples; esto ayudará mucho en la aplicación del *Método de Heaviside*.

CÁLCULO DE LA TRANSFORMADA INVERSA DE FUNCIONES

Los siguientes cálculos están basados en la tabla 2 y en las propiedades de *la transformada inversa de Laplace*. Se mostrará la necesidad del uso de las propiedades en los casos en los que no es posible emplear la tabla directamente

Ejemplo 1.- Encontrar la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones:

a) $f(s) = \frac{3}{s^4}$

b) $f(s) = \frac{6}{s-4}$

c) $f(s) = \frac{4s}{s^2+16}$

d) $f(s) = -\frac{3}{s^2-4}$

Solución a).- En este caso es posible aplicar la tercera fórmula de la tabla 2, donde $n+1=4$, por lo que $n=3$; luego entonces:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3}{s^4} \right\} = \frac{3t^3}{3!} = \frac{t^3}{2}$$

Solución b).- En este caso es posible aplicar la cuarta fórmula de la tabla 2, donde $a = 4$, luego:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s-4}\right\} = 6e^{4t}$$

Solución c).- En este caso es posible aplicar la sexta fórmula de la tabla 2, donde $a^2 = 16$, por lo que $a = 4$, luego entonces:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s}{s^2+16}\right\} = 4\cos(4t)$$

Solución d).- En este caso es posible aplicar la séptima fórmula de la tabla 2, donde $a^2 = 4$, de este modo $a = 2$, por lo que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{3}{s^2-4}\right\} = -3\left(\frac{\sinh(2t)}{2}\right) = -\frac{3}{2}\sinh(2t)$$

Ejemplo 2.- Encontrar la transformada inversa de Laplace de las siguiente función:

$$f(s) = \frac{2}{s} + \frac{5}{s+2} - \frac{1}{s^2+5}$$

Solución.- En este caso es posible aplicar el **Teorema 4-13** (*Propiedad de Linealidad*) y las fórmulas primera, cuarta y quinta de la tabla 2; de donde:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s} + \frac{5}{s+2} - \frac{1}{s^2+5}\right\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+5}\right\} = 2 + 5e^{-2t} - \frac{\sqrt{5}}{5}\sin(\sqrt{5}t)$$

Ejemplo 3.- Encontrar la transformada inversa de Laplace de las siguiente función:

$$f(s) = \frac{3}{s^2-2s+13}$$

Solución.- En este caso es posible aplicar el **Teorema 4-14** (*Primera Propiedad de Traslación*) pero, primero se tiene que modificar la fracción propia como:

$$f(s) = \frac{3}{s^2-2s+13} = \frac{3}{\underbrace{s^2-2s+4}_{TCP} + 9} = \frac{3}{(s-2)^2+9}$$

Aquí se descompuso el número 13 para formar *el trinomio cuadrado perfecto*, de donde se visualiza un $\sin(3t)$ “corrido”, es decir: $F(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\} = 3\left(\frac{\sin(3t)}{3}\right) = \sin(3t)$ de la traslación se deduce que $a = 2$, por lo que finalmente:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2-2s+13}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s-2)^2+9}\right\} = e^{2t}\text{sen}(3t)$$

Ejemplo 4.- Encontrar la transformada inversa de Laplace de las siguiente función:

$$f(s) = \frac{2s-1}{s^2+2s+5}$$

Solución.- Aquí también es posible aplicar el **Teorema 4-14** (*Primera Propiedad de Traslación*) pero, primero se tiene que modificar la fracción propia como:

$$f(s) = \frac{2s-1}{s^2+2s+5} = \frac{2s-1}{\underbrace{s^2+2s+1}_{TCP}+4} = \frac{2s-1}{(s+1)^2+4}$$

Aquí se descompuso el número 13 para formar *el trinomio cuadrado perfecto*. Ahora bien, manipulando el numerador y separando las fracciones se obtiene:

$$f(s) = \frac{2s+2-2-1}{(s+1)^2+4} = \frac{2(s+1)}{(s+1)^2+4} - \frac{3}{(s+1)^2+4}$$

de donde se visualiza un $\text{sen}(2t)$ y $\text{cos}(2t)$ “*corridos*”. Acorde con el procedimiento del problema anterior, se tiene finalmente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-1}{s^2+2s+5}\right\} &= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+1)}{(s+1)^2+4}\right\} - 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+4}\right\} \\ &= 2e^{-t}\text{cos}(2t) - 3e^{-t}\text{sen}(2t) \end{aligned}$$

Ejemplo 5.- Encontrar la transformada inversa de Laplace de las siguiente función:

$$f(s) = \frac{s-1}{s^2+4s+4}$$

Solución.- Nuevamente se aplica el **Teorema 4-14** (*Primera Propiedad de Traslación*) pero, primero se tiene que modificar la fracción propia como:

$$f(s) = \frac{s-1}{s^2+4s+4} = \frac{s-1}{(s+2)^2} = \frac{(s+2)-2-1}{(s+2)^2} = \frac{1}{s+2} - \frac{3}{(s+2)^2}$$

por lo que su transformada inversa es:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2} - \frac{3}{(s+2)^2}\right\} = e^{-2t} - 3te^{-2t}$$

Ejemplo 6.- Encontrar la transformada inversa de Laplace de las siguiente función:

$$f(s) = \frac{e^{-\frac{\pi}{4}s}}{s^2 + 4}$$

Solución.- En este caso es posible aplicar el **Teorema 4-15** (*Segunda Propiedad de Traslación*).

Aquí, $a = -\frac{\pi}{4} \wedge f(s) = \frac{1}{s^2 + 4}$, de donde se deduce que $F(t) = \frac{1}{2}\text{sen}(2t)$, luego entonces:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\frac{\pi}{4}s}}{s^2 + 4}\right\} = \begin{cases} \frac{1}{2}\text{sen}\left[2\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right] & t \geq \frac{\pi}{4} \\ 0 & 0 \leq t < \frac{\pi}{4} \end{cases} = \frac{1}{2}\text{sen}\left[2\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right]\mathcal{U}\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

Ejemplo 7.- Encontrar la transformada inversa de Laplace de las siguiente función:

$$f(s) = \frac{1}{s(s^2 + 1)}$$

Solución.- En este caso es posible aplicar el **Teorema 4-16** (*División por s*). Aquí,

$f(s) = \frac{1}{s(s^2 + 1)}$, de donde $F(t) = \text{sen}t$, por lo que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2 + 1)}\right\} = \int_0^t \text{sen}(u) du = -\cos(t)\Big|_0^t = 1 - \cos t$$

Ejemplo 8.- Encontrar la transformada inversa de Laplace de las siguiente función:

$$f(s) = \frac{2}{s^2(s^2 - 1)}$$

Solución.- En este caso es posible aplicar el **Teorema 4-17** (*División por sⁿ*). Aquí,

$f(s) = \frac{2}{s^2(s^2 - 1)}$, de donde $F(t) = 2\text{senh}(t)$, luego entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2(s^2 - 1)}\right\} &= \int_0^t \int_0^v 2\text{senh}(u) dudv = \int_0^t 2\cosh(u)\Big|_0^v dv \\ &= \int_0^t 2(\cosh(v) - 1) dv = 2(\text{sen}h(v) - v)\Big|_0^t \\ &= 2\text{senh}(t) - 2t = e^t - e^{-t} - 2t \end{aligned}$$

Ejemplo 9.- Encontrar la transformada inversa de Laplace de las siguiente función:

$$f(s) = \frac{s}{(s^2 + 4)^2}$$

Solución.- En este caso es posible aplicar el **Teorema 4-18 (Teorema de Convolución)**. Aquí, $f(s) = \frac{s}{s^2 + 4}$ y $g(s) = \frac{1}{s^2 + 4}$, de donde $F(t) = \cos(2t)$ y $G(t) = \frac{1}{2}\text{sen}(2t)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2 + 4)^2}\right\} &= \frac{1}{2} \int_0^t \cos(2t) \text{sen}(2(t-u)) du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \cos(2t) (\text{sen}2t \cos 2u - \cos 2t \text{sen}2u) du \\ &= \frac{1}{2} \text{sen}2t \int_0^t \cos^2(2u) du - \frac{1}{2} \cos 2t \int_0^t \text{sen}2u \cos 2u du \\ &= \frac{1}{2} \text{sen}2t \int_0^t \left(\frac{1 + \cos(4u)}{2}\right) du - \frac{1}{2} \cos 2t \int_0^t \frac{\text{sen}(2u)}{2} du \\ &= \frac{1}{2} \text{sen}2t \left(\frac{t}{2} + \frac{\text{sen}(4t)}{8}\right) - \frac{1}{2} \cos 2t \left(\frac{1 - \cos(4t)}{8}\right) \\ &= \frac{1}{4} t \text{sen}(2t) \end{aligned}$$

Aquí se aplicaron las identidades trigonométricas $\text{sen}(A - B) = \text{sen}A \cos B - \cos A \text{sen}B$ y para los ángulos dobles: $\cos^2 A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2A) \wedge \text{sen}^2 A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2A)$. Estas identidades y otras más se encuentran en el Apéndice A

Ejemplo 10.- Encontrar la transformada inversa de Laplace de la siguiente función:

$$f(s) = \frac{5s - 1}{s^2 + 2s - 3}$$

Solución.- En este caso el problema puede ser resuelto aplicando la expansión de una fracción propia en sus fracciones simples (véase el Apéndice D)

El desarrollo de la función dada en sus fracciones simples esta dada por:

$$f(s) = \frac{5s - 1}{s^2 + 2s - 3} = \frac{4}{s + 3} + \frac{1}{s - 1}$$

(*se deja al lector verificar este desarrollo*), por lo que su transformada inversa es:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s-1}{s^2+2s-3}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s+3}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} = 4e^{-3t} + e^t$$

Ejemplo 11.- Aplique el método de Heaviside para encontrar la transformada inversa de Laplace

de las siguiente función: $f(s) = \frac{5s-1}{s^2+2s-3}$

Solución.- Evidentemente esta función es la misma del ejemplo anterior. En este caso se aplicará el **Teorema 4-19** (Metodo del Desarrollo de Heaviside). Aquí, $P(s) = 5s - 1$, $Q(s) = s^2 + 2s - 3$ y su derivada $Q'(s) = 2s + 2$, las raíces de $Q(s)$ son $a_1 = -3 \wedge a_2 = 1$, por lo tanto:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P_n(s)}{Q_m(s)}\right\} = \sum_{k=1}^2 \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)} e^{a_k t} = \frac{5(-3)-1}{2(-3)+2} e^{-3t} + \frac{5(1)-1}{2(1)+2} e^t = 4e^{-3t} + e^t$$

Ejemplo 12.- Encontrar la transformada inversa de Laplace de las siguiente función:

$$f(s) = \frac{2s+3}{(s-2)(s^2+1)}$$

Solución.- En este caso el problema puede ser resuelto aplicando la expansión de una fracción propia en sus fracciones simples. El desarrollo de la función dada en sus fracciones simples esta dada por:

$$f(s) = \frac{2s+3}{(s-2)(s^2+1)} = \frac{7}{5(s-2)} - \frac{4}{5(s^2+1)} - \frac{7s}{5(s^2+1)}$$

luego entonces su transformada inversa es:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+3}{(s-2)(s^2+1)}\right\} &= \frac{7}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} - \frac{4}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} - \frac{7}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} \\ &= \frac{7}{5}e^{2t} - \frac{4}{5}\text{sen}(t) - \frac{7}{5}\text{cos}(t) \end{aligned}$$

Ejemplo 13.- Encontrar la transformada inversa de Laplace de las siguiente función:

$$f(s) = \frac{3s^2+4s-5}{(s-2)^2(s+4)}$$

Solución.- En este caso el problema también puede ser resuelto aplicando la expansión de una fracción propia en sus fracciones simples (véase caso II del Apéndice D). El desarrollo de la función dada en sus fracciones simples esta dada por:

$$f(s) = \frac{3s^2 + 4s - 5}{(s-2)^2(s+4)} = \frac{5}{2(s-2)^2} + \frac{9}{4(s-2)} + \frac{3}{4(s+4)}$$

luego entonces su transformada inversa es:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3s^2 + 4s - 5}{(s-2)^2(s+4)} \right\} &= \frac{5}{2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-2)^2} \right\} + \frac{9}{4} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-2)} \right\} + \frac{3}{4} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+4)} \right\} \\ &= \frac{5}{2} t e^{2t} + \frac{9}{4} e^{2t} + \frac{3}{4} e^{-4t} \end{aligned}$$



Ejercicios Suplementarios

Sección 4.2 Ejercicios 4.2

En los siguientes problemas calcular la transformada inversa de Laplace de las funciones indicadas aplicando según sea el caso, los teoremas vistos en esta sección.

1.- $f(s) = \frac{3}{s} + \frac{4}{s^4}$

2.- $f(s) = \frac{5}{s+3} + \frac{3}{s-1}$

3.- $f(s) = \frac{s-2}{s^2+9}$

4.- $f(s) = \frac{2}{s^2+9} - \frac{3s}{s^2+9}$

5.- $f(s) = \frac{s}{s^2-9} - \frac{2s}{s^2-16}$

6.- $f(s) = \frac{5}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)^3}$

7.- $f(s) = \frac{2-4s}{s^2+6s+13}$

8.- $f(s) = \frac{s-4}{s^2-4s-5}$

9.- $f(s) = \frac{5s-1}{s^2-4s+20}$

10.- $f(s) = \frac{3s-5}{s^2+6s+9}$

11.- $f(s) = \frac{s e^{-\pi s}}{s^2+1}$

12.- $f(s) = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+4}$

13.- $f(s) = \frac{4}{s(s^2+9)}$

14.- $f(s) = \frac{3}{s^2(s^2+1)}$

15.- $f(s) = \frac{2s}{(s^2+4)^2}$

16.- $f(s) = \frac{1}{s^3(s+3)^2}$

17.- $f(s) = \frac{5s+2}{s^2-4s-5}$

18.- $f(s) = \frac{s^2+3s-1}{s^3+3s^2-4s-12}$

19.- $f(s) = \frac{s^2+s+2}{s^3-5s^2+s-5}$

20.- $f(s) = \frac{3s^2+2s-5}{(s-1)(s-3)^2}$

21.- $f(s) = \frac{2s^2-2s-1}{(s-5)(s+2)^2}$

22.- $f(s) = \frac{s^2+2s}{(s+2)(s^2+2s+2)}$

Sección

4.3

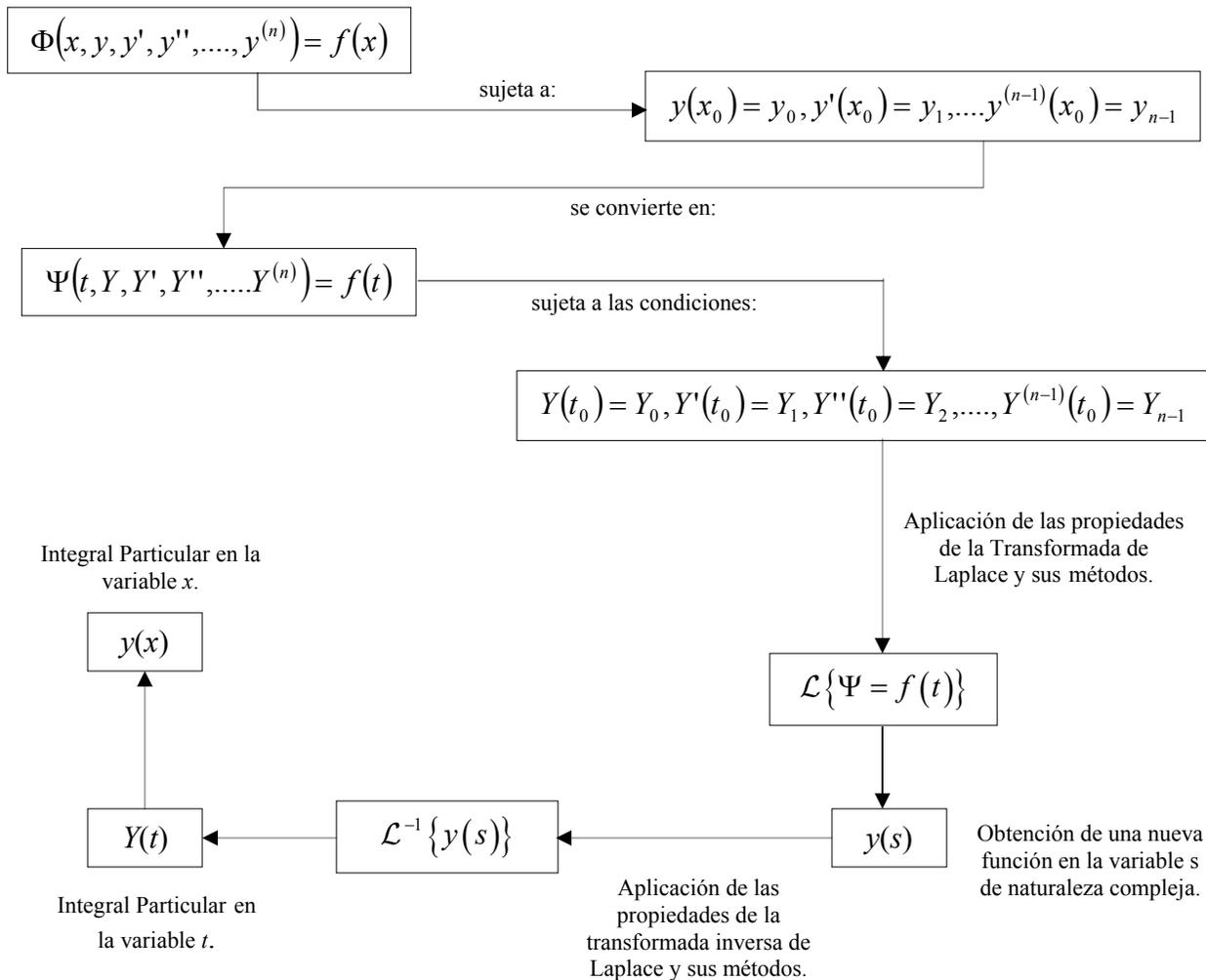
“Existe, si no me equivoco, todo un mundo que es el conjunto de las verdades matemáticas, al que no tenemos acceso más que por la inteligencia, al igual que existe el mundo de las realidades físicas; ambos son independientes de nosotros y de creación divina”
Hermite, Charles



SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES MEDIANTE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES. PROBLEMA CON VALORES INICIALES

Un gran número de ecuaciones diferenciales pueden ser resueltas mediante la transformada de Laplace, claro esta, siempre y cuando se cumplan las condiciones de existencia de la transformada inversa de Laplace. La siguiente figura muestra el esquema a seguir para resolver *ecuaciones diferenciales de orden n lineales con coeficientes constantes*.



A continuación se mostrarán algunos ejemplos de la resolución de *ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes*.

Ejemplo 1.- Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$y' + 2y = x^2 + 2x \quad \text{sujeta a: } y(0) = 1$$

Solución.- Convirtiendo la ecuación junto con sus condiciones de Cauchy se tiene:

$$Y' + 2Y = t^2 + 2t \quad \text{sujeta a: } Y(0) = 1$$

aplicando la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{Y' + 2Y = t^2 + 2t\}$$

$$sY(s) - Y(0) + 2Y(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + 1$$

aplicando las condiciones de Cauchy, simplificando y despejando $y(s)$ se obtiene:

$$y(s) = \frac{s^3 + 2s + 2}{s^3(s+2)}$$

expandiendo en sus fracciones simples (véanse los casos I y II en el Apéndice D):

$$y(s) = \frac{1}{s^3} + \frac{1}{2s^2} - \frac{1}{4s} + \frac{5}{4(s+2)}$$

aplicando la transformada inversa de Laplace se tiene finalmente:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{y(s) = \frac{1}{s^3} + \frac{1}{2s^2} - \frac{1}{4s} + \frac{5}{4(s+2)}\right\} \quad \text{ó} \quad Y(t) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} + \frac{5}{4}e^{-2t}$$

regresando a las variables originales, *la integral particular* es:

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{5}{4}e^{-2x}$$

Ejemplo 2.- Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$y'' + y = x \quad \text{sujeta a } y(0) = 1, y'(0) = -2$$

Solución.- Convirtiendo la ecuación junto con sus condiciones de Cauchy se tiene:

$$Y''+Y = t \text{ sujeta a } Y(0) = 1, Y'(0) = -2$$

aplicando la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y''+Y = t\}$$

$$s^2y(s) - sY(0) - Y'(0) + y(s) = \frac{1}{s^2}$$

aplicando las condiciones de Cauchy y despejando $y(s)$ se obtiene:

$$y(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + 1)} + \frac{s - 2}{s^2 + 1}$$

expandiendo en sus fracciones simples (véase el caso III en el Apéndice D):

$$y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2 + 1} - \frac{3}{s^2 + 1}$$

aplicando la transformada inversa de Laplace se tiene finalmente:

$$\mathcal{L}^{-1}\{y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2 + 1} - \frac{3}{s^2 + 1}\right\}$$

$$Y(t) = t + \cos(t) - 3\sin(t)$$

regresando a las variables originales, *la integral particular* es:

$$y(x) = x + \cos(x) - 3\sin(x)$$

Ejemplo 3.- Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$y'' - 3y' + 2y = 4e^{2x} \text{ sujeta a: } y(0) = -3, y'(0) = 5$$

Solución.- Convirtiendo la ecuación junto con sus condiciones de Cauchy se tiene:

$$Y'' - 3Y' + 2Y = 4e^{2t} \text{ sujeta a: } Y(0) = -3, Y'(0) = 5$$

aplicando la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{Y'' - 3Y' + 2Y = 4e^{2t}\}$$

$$s^2 y(s) - sY(0) - Y'(0) - 3sy(s) + 3Y(0) + 2y(s) = \frac{4}{s-2}$$

aplicando las condiciones de Cauchy, simplificando y despejando $y(s)$ se obtiene:

$$y(s) = \frac{-3s^2 + 20s - 24}{(s-1)(s-2)^2}$$

expandiendo en sus fracciones simples (véanse los casos I y II en el Apéndice D):

$$y(s) = -\frac{7}{s-1} + \frac{4}{s-2} + \frac{4}{(s-2)^2}$$

aplicando la transformada inversa de Laplace se tiene finalmente:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ y(s) = -\frac{7}{s-1} + \frac{4}{s-2} + \frac{4}{(s-2)^2} \right\}$$

de manera que

$$Y(t) = -7e^t + 4e^{2t} + 4te^{2t}$$

regresando a las variables originales, *la integral particular* es:

$$y(x) = -7e^x + 4e^{2x} + 4xe^{2x}$$

Ejemplo 4.- Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \operatorname{sen}(x) \quad \text{sujeta a: } y(0) = 0, y'(0) = 1$$

Solución.- Convirtiendo la ecuación junto con sus condiciones de Cauchy se tiene:

$$Y'' + 2Y' + 5Y = e^{-t} \operatorname{sen}(t) \quad \text{sujeta a: } Y(0) = 0, Y'(0) = 1$$

aplicando la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1} \{ Y'' + 2Y' + 5Y = e^{-t} \operatorname{sen}(t) \}$$

$$s^2 y(s) - sY(0) - Y'(0) - 2sy(s) - 2Y(0) + 5y(s) = \frac{1}{(s+1)^2 + 1} = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

aplicando las condiciones de Cauchy, simplificando y despejando $y(s)$ se obtiene:

$$y(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 2s + 5)}$$

expandiendo en sus fracciones simples (véase el caso III en el Apéndice D):

$$y(s) = \frac{1}{3(s^2 + 2s + 2)} + \frac{2}{3(s^2 + 2s + 5)}$$

aplicando la transformada inversa de Laplace se tiene finalmente:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ y(s) = \frac{1}{3(s^2 + 2s + 2)} + \frac{2}{3(s^2 + 2s + 5)} \right\}$$

$$Y(t) = \frac{1}{3} e^{-t} \text{sen}(t) + \frac{1}{3} e^{-t} \text{sen}(2t)$$

regresando a las variables originales, *la integral particular* es:

$$y(x) = \frac{1}{3} e^{-x} \text{sen}(x) + \frac{1}{3} e^{-x} \text{sen}(2x)$$

Ejemplo 5.- Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$y' + 2y = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < \pi \\ \cos(x) & x > \pi \end{cases} \text{ sujeta a: } y(0) = 2$$

Solución.- Este es el caso cuando la función $f(x)$ viene *definida por trozos ó ramas*, además de que ésta se puede expresar en términos de *la función escalón unitario de Heaviside*.

Convirtiendo la ecuación junto con sus condiciones de Cauchy y expresando la función $f(t)$ en términos de *la función escalón unitario de Heaviside* se tiene:

$$Y' + 2Y = \cos(t) \mathfrak{U}(t - \pi) \text{ sujeta a: } Y(0) = 2$$

aplicando la transformada de Laplace se tiene: $\mathcal{L}\{Y' + 2Y = \cos(t) \mathfrak{U}(t - \pi)\}$. Antes de continuar con la aplicación de la transformada de Laplace, se aclarará el proceso de la transformada de la función escalón unitario. En este caso se aplica el **Teorema 4-12** de la sección 4.1 (*Forma Alternativa de la Segunda Propiedad de Traslación*), esto es:

$$\mathcal{L}\{\cos(t) \mathfrak{U}(t - \pi)\} = e^{-\pi s} \mathcal{L}\{\cos(t + \pi)\}$$

de donde $\cos(t+\pi) = -\cos(t)$, por lo tanto $\mathcal{L}\{\cos(t)\mathcal{U}(t-\pi)\} = e^{-\pi s}\mathcal{L}\{-\cos(t)\} = -\frac{se^{-\pi s}}{s^2+1}$, luego entonces la transformada de la ecuación diferencial es:

$$sy(s) - Y(0) + 2y(s) = -\frac{se^{-\pi s}}{s^2+1}$$

aplicando las condiciones de Cauchy, simplificando y despejando $y(s)$ se obtiene:

$$y(s) = \frac{2}{s+2} - \frac{se^{-\pi s}}{(s+2)(s^2+1)}$$

expandiendo en sus fracciones simples el segundo término (véanse los casos I y II en el Apéndice D):

$$y(s) = \frac{2}{s+2} + \frac{2e^{-\pi s}}{5(s+1)} - \frac{e^{-\pi s}}{5(s^2+1)} - \frac{2se^{-\pi s}}{5(s^2+1)}$$

aplicando la transformada inversa de Laplace se tiene finalmente:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{y(s) = \frac{2}{s+2} + \frac{2e^{-\pi s}}{5(s+1)} - \frac{e^{-\pi s}}{5(s^2+1)} - \frac{2se^{-\pi s}}{5(s^2+1)}\right\}$$

$$Y(t) = 2e^{-2t} + \frac{2}{5}e^{-2(t-\pi)}\mathcal{U}(t-\pi) - \frac{1}{5}\text{sen}(t-\pi)\mathcal{U}(t-\pi) - \frac{2}{5}\text{cos}(t-\pi)\mathcal{U}(t-\pi)$$

aplicando identidades trigonométricas de $\text{sen}(A-B) \wedge \text{cos}(A-B)$ se tiene:

$$Y(t) = 2e^{-2t} + \left[\frac{2}{5}e^{-2(t-\pi)} + \frac{1}{5}\text{sen}(t) + \frac{2}{5}\text{cos}(t)\right]\mathcal{U}(t-\pi)$$

expresando esta función como definida por ramas:

$$Y(t) = \begin{cases} 2e^{-2t} & 0 \leq t < \pi \\ \frac{2}{5}e^{-2(t-\pi)} + \frac{1}{5}\text{sen}(t) + \frac{2}{5}\text{cos}(t) & t \geq \pi \end{cases}$$

regresando a las variables originales, *la integral particular* es:

$$y(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & 0 \leq x < \pi \\ \frac{2}{5}e^{-2(x-\pi)} + \frac{1}{5}\text{sen}(x) + \frac{2}{5}\text{cos}(x) & x \geq \pi \end{cases}$$



Ejercicios Suplementarios

Sección 4.3 Ejercicios 4.3

Resolver mediante *la Transformada de Laplace* los siguientes problemas de valores iniciales.

1. $y'' - 64y = 16$ sujeta a: $y(0) = 1, y'(0) = 0$
2. $y'' + 5y' - 6y = 10e^{2x}$ sujeta a: $y(0) = 1, y'(0) = 1$
3. $y''' - 2y'' + y' = xe^x + 5$ sujeta a: $y(0) = 2, y'(0) = 2, y''(0) = -1$
4. $y'' - 4y' + 8y = x^3$ sujeta a: $y(0) = 2, y'(0) = 4$
5. $y'' + y = 8\cos(t)$ sujeta a: $y(0) = 1, y'(0) = -1$
6. $y' + 5y = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < \pi \\ \text{sen}(x) & x \geq \pi \end{cases}$ sujeta a: $y(0) = 0$
7. $y' + 3y = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < \pi \\ x & x \geq \pi \end{cases}$ sujeta a: $y(0) = -1$

"Mis métodos no consisten en construcciones geométricas o razonamientos mecánicos, sino solo de operaciones algebraicas supeditadas a una regla uniforme de procedimientos"
Lagrange, Joseph Louis

Sección

4.4



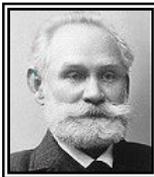
APLICACIÓN DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE EN FENÓMENOS FÍSICOS

EL ENFOQUE DE PROCESOS

En términos generales un *proceso* se puede definir como *aquel evento en el que ocurre un cambio* y es tan antiguo como la materia misma, por ejemplo el proceso de erosión de las rocas o el proceso del ciclo del agua. El hombre desde sus inicios, al observar a la naturaleza le ha inquietado la siguiente cuestión: *¿por qué ocurren las cosas?*; y esta cuestión lo ha acompañado hasta la actualidad. Al margen de los eventos de carácter divino o teológico, se debe entender por "cosas" (en el sentido anterior) a los eventos naturales y como producto del comportamiento humano. La ciencia con todo su poderío de presupuestos teóricos y su férreo carácter demostrativo ha tratado de responder con éxito y en otras no, semejante cuestión. En cualquier caso hombres estudiosos de la naturaleza física y humana, todos sin excepción, han llegado a la



R. Descartes



I.P. Pavlov



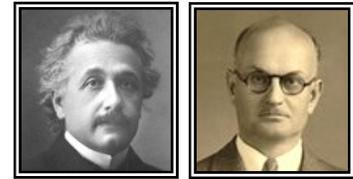
C. Hull

conclusión de que para que ocurran las cosas debe existir una causa. La dupla causa-efecto ha sido estudiada por muchos de estos hombres, desde filósofos como **Aristóteles de Estagira** (384-322 a.C.) **Rene Descartes** (1596-1650), **Charles Sanders Pierce** (1839-1914) entre otros, también psicólogos como **Ivan Petrovich Pavlov** (1849-1936), **Clark Hull** (1884-

1952), **Edward Chance Tolman** (1886-1959) entre otros, matemáticos como **Leonhard Euler**

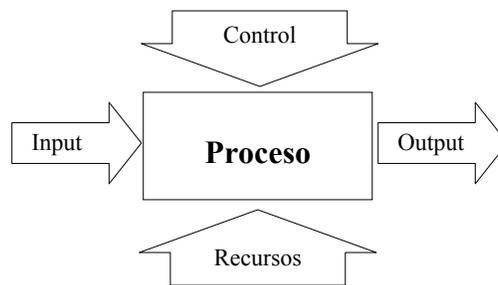
(1707-1783), **Louis August Cauchy** entre otros y hasta físicos de la talla de **Isaac Newton** (1641-1727), **Henri Poincaré** y **Albert Einstein** (1878-1955) entre otros.

En ocasiones, estos y otros científicos han establecido las causas que provocan cambios en algunos fenómenos que ocurren en la naturaleza, mediante *procedimientos matemáticos determinísticos* y en otras ocasiones la naturaleza ha puesto de cabeza hasta el más atrevido matemático, por lo que se recurre a los *procedimientos pobabilísticos*, por ejemplo, la mecánica estadística. También el hombre ha observado que la naturaleza misma se autorregula, es decir los procesos lo controla ella misma, por ejemplo, el ciclo del agua citado anteriormente. Con todas estas observaciones y el conocimiento de las causas que originan tal o cual fenómeno el hombre ha tratado de controlar su medio ambiente que lo rodea para beneficio del mismo; por ejemplo la invención del aire acondicionado ha servido para controlar la temperatura del medio ambiente que encierra una habitación. Esto conlleva a una definición de proceso mas específico: “*como el evento que transforma una entrada o input a través de recursos (controlados o no) en una salida o output*”. Y es que en resumen, el hombre ha tratado de imitar por diversos medios, los procesos naturales para poder controlar a su entorno físico y social.



A. Einstein

E.Ch. Tolman



La modelación matemática de la naturaleza física y humana ha sido desde la antigüedad, de suma importancia para el desarrollo científico, tecnológico y social. Así por ejemplo, sin la lógica matemática no sería posible tener las modernas computadoras y sin las ecuaciones de Maxwell no hubiese sido posible la electrotécnica o electrónica. Aunque proporcionalmente han sido y siguen siendo pocos los que modelan matemáticamente a la naturaleza, son muchos los que gozan de los beneficios de estos importantes logros.

Pero ¿qué tienen que ver los procesos, las causas y los efectos con las ecuaciones diferenciales?. La respuesta es muy simple: *un proceso natural o social puede ser representado mediante una ecuación diferencial*. Lo que no es tan simple es llegar a establecer dicha ecuación.

Históricamente, el uso de las *ecuaciones diferenciales* en el estudio de los *sistemas dinámicos* fue establecido por **Leonhard Euler** en su obra “*De Theoria Lunae ad Maiorem Perfectionis Gradum Evehenda*”, donde analiza a través de *sistemas de ecuaciones diferenciales* las alteraciones de la órbita de la Tierra; esta obra fue creada en 1750 aunque se publica hasta 1777 por la Academia de Ciencias de San Petersburgo. También se considera como fundador de esta práctica al matemático francés **Joseph Louis Lagrange**. Sus resultados se encuentran en los artículos publicados por la Real Sociedad de Ciencias de Turín editados a partir de 1756; uno de estos trabajos se publica en *Mélanges de Turín* en donde resuelve un sistema dinámico de n

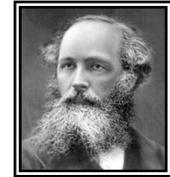
masas atadas a varios resortes vibrantes a través de *un sistema de $n + 1$ ecuaciones diferenciales*. También lo hace en su obra “*Sur le Mouvement des Noeuds des Orbites Planétaires*” de 1774 que trata sobre las orbitas planetarias influenciadas por la atracción entre los planetas, donde aplica su *método de variación de parámetros*. El manejo de los sistemas dinámicos a través de *sistemas de ecuaciones diferenciales* también se encuentra en su obra de 1771 “*Théorie des Variations Séculaires des Éléments des Planètes*”, en donde trata las pequeñas perturbaciones que sufren las orbitas elípticas de los planetas.



G.B. Airy

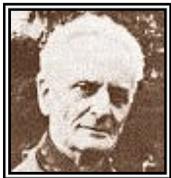
Ya en el siglo XIX fue el astrónomo inglés **George Biddell Airy** (1801-1892) quien diseñó un dispositivo de control de velocidad para hacer girar un telescopio y así compensar el movimiento de rotación de la Tierra. Desafortunadamente **Airy** descubrió que existían grandes oscilaciones en su sistema de control. Fue el primero en discutir acerca de la *inestabilidad* de los sistemas de circuito cerrado y fue el primer científico que utiliza las *ecuaciones diferenciales* para estos estudios. Esto se refleja en su obra “*On the Regulator of the Clock-Work for Effecting Uniform Movement of Equatorials*” publicado en 1840.

El primer trabajo de análisis matemático del control de sistemas en términos de *ecuaciones diferenciales* lo proporciona el matemático y físico escocés **James Clerk Maxwell** (1831-1879) cuando analiza el control de sistemas reguladores. En su obra “*On Governors*” de 1868 establece un criterio para la estabilidad de los sistemas reguladores con base en las raíces de *la ecuación característica* del *sistema de ecuaciones diferenciales* asociado. Se le considera a él como el fundador de la formalización del estudio de los sistemas de control en el periodo primitivo que abarca desde 1868 hasta principios del siglo XX.

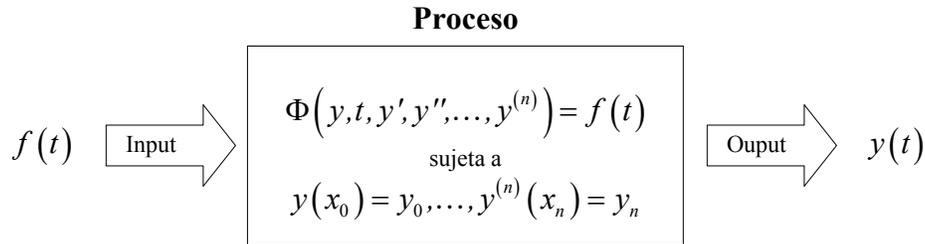


J.C. Maxwell

Otro gran logro en este sentido lo da el ruso **Iván Aleksandrovich Vyshnegradsky** (1893-1989) en su obra “*On Controllers of Direct Action*” editada en 1877. Él analiza también la estabilidad de los reguladores mediante las ecuaciones diferenciales. Otra de las grandes contribuciones aunque muy poco valorada en su tiempo fue sin duda la invención en el periodo 1892-1898 del *cálculo operacional* del ingeniero británico **Oliver Heaviside** (1850-1925) quien analiza el comportamiento transitorio de los sistemas y da la noción equivalente al concepto de *función de transferencia*, útil en control automático. Ellos y muchos otros científicos han llegado a la conclusión de que en un proceso natural o inducido por el hombre (máquinas por ejemplo) existe un fuerte vínculo entre los estímulos o perturbaciones que sufre el proceso y la respuesta de éste a dichas perturbaciones. Esta relación, ha sido modelada matemáticamente mediante *ecuaciones diferenciales* o *sistemas de ecuaciones diferenciales lineales o no lineales*. También se llega a la conclusión de la posibilidad de conocer cómo un proceso puede ser controlado o no. Al mismo tiempo se sigue estudiando cómo la naturaleza controla sus propios procesos. Es claro que el objetivo de las ecuaciones diferenciales no se limita nada más a *la descripción de un proceso* sino va más allá: Da la posibilidad de controlar dicho proceso. Con la definición de proceso establecida anteriormente y con el involucramiento de las ecuaciones diferenciales, un proceso se puede esquematar como sigue:

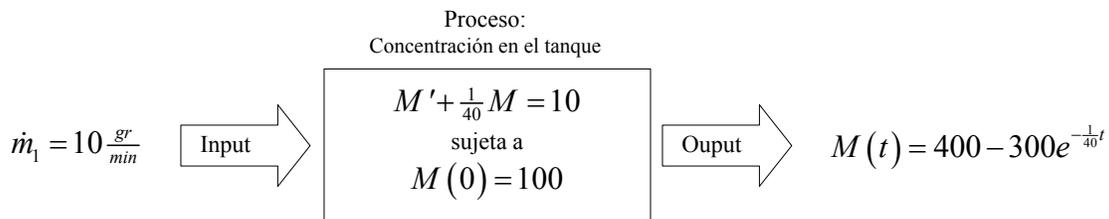


I. Vyshnegradsky

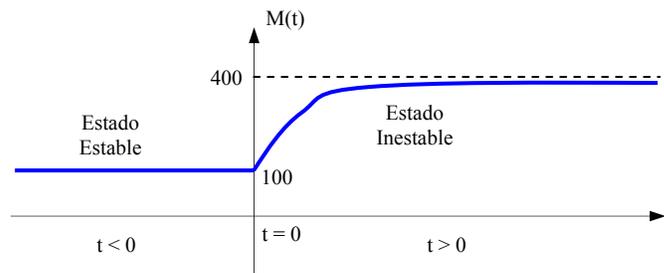


Esto quiere decir que si la concentración de una solución salina en un tanque agitado (véase el ejemplo 3 del tema *concentración en tanques agitados* de la sección 2.8) está gobernada por la ecuación $\frac{dM}{dt} = 10 - \frac{M}{40}$ ó en otra notación $M' + \frac{1}{40}M = 10$, entonces el flujo másico dado por $\dot{m}_1 = 10 \frac{gr}{min}$ representa la *entrada* o *input* al proceso y una vez resuelta la ecuación diferencial sujeta a la condición inicial $M(0) = 100gr$, la salida o output es $M(t) = 400 - 300e^{-\frac{1}{40}t}$ que proporciona la cantidad de sal que se encuentra en el tanque en cualquier momento.

Esquemáticamente se puede visualizar el proceso como sigue:



El proceso se considera estable (en $t < 0$) es decir con una concentración de $0.5 \frac{gr}{lto}$ hasta que la *perturbación* o *input* altera este estado (en $t > 0$) volviéndolo inestable hasta que se vuelve a estabilizar a la nueva situación. Esto lo muestra la siguiente figura:



Como se vio en la sección precedente, el uso de *la transformada de Laplace* y de *la transformada inversa de Laplace* permite resolver el problema de integrar o resolver *ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes*. Con un manejo adecuado en la notación de las variables involucradas, esta práctica se puede extender al estudio de problemas aplicados concretamente a fenómenos de la naturaleza física o del comportamiento humano. A continuación se muestran algunas aplicaciones de la transformada de Laplace en este sentido.

APLICACIÓN DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE EN LA CONCENTRACIÓN DE UNA MASA DISUELTA EN TANQUES AGITADOS

Ejemplo 1.- En un tanque que contiene 200 litros de agua, se disuelven 100 gramos de sal y dicho tanque es agitado continuamente. Al mismo tiempo, se introducen en el tanque 5 lts/min de una solución cuya concentración es de 2 gr/lto; del tanque se bombea la solución mezclada al mismo flujo volumétrico. Aplique la transformada de Laplace y su inversa, para encontrar una expresión matemática que determine la cantidad de sal en el tanque en cualquier momento t . ¿Cuál es la cantidad de sal en el tanque pasado mucho tiempo?

Solución.- Para encontrar una expresión matemática que determine la cantidad de sal en el tanque en cualquier momento t , se puede partir de la ecuación diferencial de primer orden deducida en el Ejemplo 3 de la sección 2.8 (que es la hipótesis del modelo), la cual está dada por:

$$M' + \frac{1}{40}M = 10 \quad \text{sujeta a: } M(0) = 100$$

Para aplicar la transformada de Laplace se necesita partir del supuesto de que $\mathcal{L}\{M(t)\} = m(s)$ y de que $\mathcal{L}^{-1}\{m(s)\} = M(t)$, luego entonces aplicando la transformada de Laplace se tiene:

$$sm(s) - M(0) + \frac{1}{40}m(s) = \frac{10}{s}$$

aplicando las condiciones de Cauchy, simplificando y despejando $m(s)$ se obtiene:

$$m(s) = \frac{10 + 100s}{s(s + \frac{1}{40})}$$

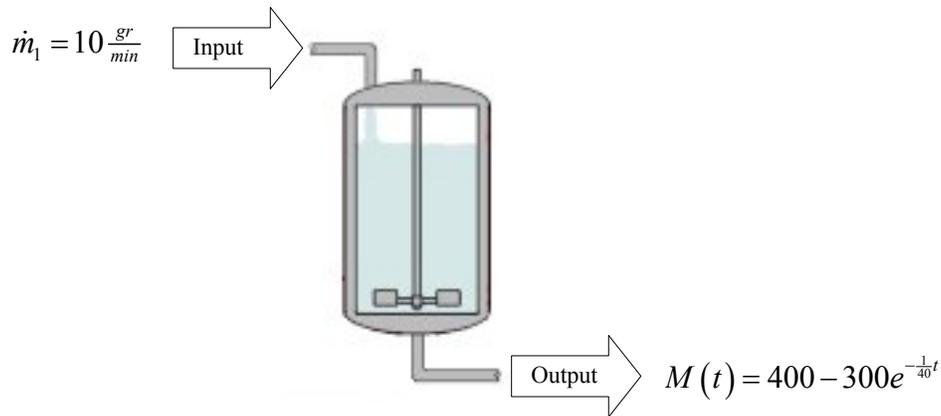
expandiendo en sus fracciones simples (véase el caso I en el Apéndice D):

$$m(s) = \frac{400}{s} - \frac{300}{s + \frac{1}{40}}$$

aplicando la transformada inversa de Laplace se tiene finalmente:

$$M(t) = 400 - 300e^{-\frac{1}{40}t}$$

Gráficamente se puede visualizar el proceso del cambio en la concentración de la masa disuelta en el tanque:



La cantidad de sal que habrá en el tanque pasado mucho tiempo, se puede calcular realizando el siguiente límite: $\lim_{t \rightarrow \infty} M(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (400 - 300e^{-\frac{1}{40}t}) = 400 \text{ gr}.$

A continuación se muestran más aplicaciones en otras áreas de la física.

APLICACIÓN DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE EN EL SISTEMA MASA-RESORTE. MOVIMIENTO ARMÓNICO LIBRE

Ejemplo 2.- Una masa que pesa 2 lb hace que un resorte se estire 6 in . Cuando $t = 0$, la masa se suelta desde un punto a 8 in debajo de la posición de equilibrio con una velocidad inicial, hacia arriba, de $\frac{4}{3} \frac{ft}{seg}$. Aplique la transformada de Laplace y su inversa, para deducir la ecuación del movimiento libre y grafique dicha ecuación. Aplique el enfoque de procesos para determinar la *entrada* o *input* así como la *respuesta* o *salida* (*output*) de el proceso del movimiento.

Solución.- Como se está manejando el sistema ingles de medidas, hay que convertir las pulgadas a pies, es decir:

$$6 \text{ in} = \frac{1}{2} \text{ ft} \quad \text{y} \quad 8 \text{ in} = \frac{2}{3} \text{ ft}$$

la masa se determina mediante la segunda ley de Newton:

$$m = \frac{2 \text{ lb}}{32 \frac{ft}{seg}} \quad \text{de donde} \quad m = \frac{1}{16} \text{ slug}$$

la constante del resorte se determina mediante la *ley de Hooke*:

$$k = \frac{2 \text{ lb}}{\frac{1}{2} \text{ ft}} \quad \text{de donde} \quad k = 4 \frac{\text{lb}}{\text{ft}}$$

la constante ω^2 se obtiene mediante:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{4}{\frac{1}{16}} \quad \text{de donde} \quad \omega^2 = 64$$

La ecuación diferencial o “hipótesis” del modelo matemático que describirá el movimiento armónico libre tiene la siguiente forma:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 64y = 0$$

o en forma compacta

$$y'' + 64y = 0$$

las condiciones de Cauchy para este problema son:

$$y(0) = \frac{2}{3}, \quad \wedge \quad y'(0) = -\frac{4}{3}$$

convirtiendo la ecuación junto con sus condiciones de Cauchy se tiene:

$$Y'' + 64Y = 0 \quad \text{sujeta a:} \quad Y(0) = \frac{2}{3}, \quad Y'(0) = -\frac{4}{3}$$

Aplicando la Transformada de Laplace se tiene:

$$\mathcal{L}\{Y'' + 64Y = 0\}$$

$$s^2 y(s) - sY(0) - Y'(0) + 64y(s) = 0$$

sustituyendo las condiciones de Cauchy, simplificando y despejando $y(s)$ se obtiene:

$$y(s) = \frac{\frac{2}{3}s - \frac{4}{3}}{s^2 + 64}$$

Separando las fracciones:

$$y(s) = \frac{2}{3} \frac{s}{s^2 + 64} - \frac{4}{3} \frac{1}{s^2 + 64}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{y(s) = \frac{2}{3} \frac{s}{s^2 + 64} - \frac{4}{3} \frac{1}{s^2 + 64}\right\}$$

de manera que la integral particular en la variable t es:

$$Y(t) = \frac{2}{3} \cos(8t) - \frac{1}{6} \text{sen}(8t)$$

cambiando únicamente Y por y se tiene finalmente la ley que gobierna el movimiento armónico libre sin amortiguamiento

$$y(t) = \frac{2}{3} \cos(8t) - \frac{1}{6} \operatorname{sen}(8t)$$

Como datos adicionales se puede deducir que la frecuencia de las oscilaciones libres es de:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{8}{2\pi} \quad \text{con lo cual} \quad f = \frac{4}{\pi} \text{ seg}$$

Utilizando la forma alternativa para la ecuación general del movimiento armónico libre (véase la ecuación 3.51 de la sección 3.7)

$$y(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

la amplitud viene dada por la siguiente relación:

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$

de aquí que si de (4), $c_1 = \frac{2}{3}$ y $c_2 = -\frac{1}{6}$, entonces:

$$A = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{17}{36}} \quad \text{por lo tanto} \quad A = 0.69 \text{ ft}$$

El ángulo de fase ϕ se calcula de la siguiente forma: El ángulo de fase ϕ debe ser tal que, tanto el $\operatorname{sen}(\phi)$, el $\operatorname{cos}(\phi)$ y la $\operatorname{tan}(\phi)$ deben pertenecer al mismo cuadrante. Ya que A es siempre positiva y que

$$\operatorname{sen}(\phi) = \frac{c_1}{A}, \quad \operatorname{cos}(\phi) = \frac{c_2}{A} \quad \text{y} \quad \operatorname{tan}(\phi) = \frac{\operatorname{sen}(\phi)}{\operatorname{cos}(\phi)}$$

entonces $\operatorname{sen}(\phi) > 0$ y $\operatorname{cos}(\phi) < 0$, esto quiere decir que el ángulo de fase ϕ debe estar en el segundo cuadrante. Haciendo un cálculo para la $\operatorname{tan}(\phi)$, se obtiene:

$$\operatorname{tan}(\phi) = \frac{\frac{2}{3}}{-\frac{1}{6}} = -4 \quad \text{de donde} \quad \phi = \operatorname{arctan}(-4)$$

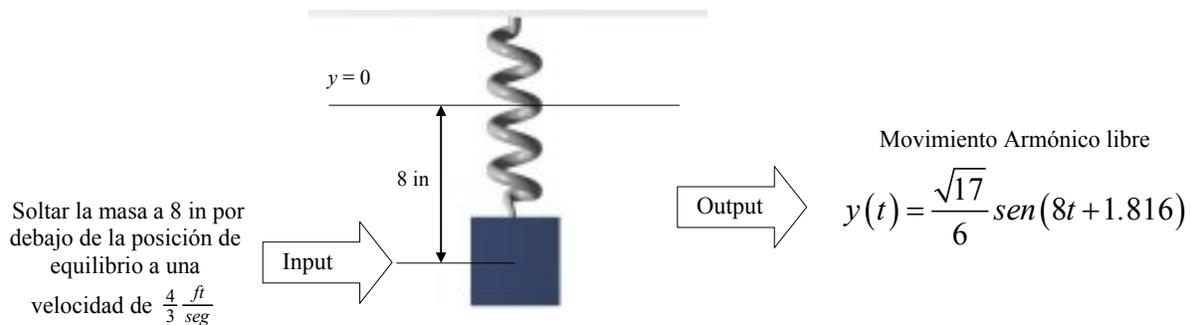
un simple cálculo para ϕ en la calculadora arroja el valor de -1.326 rad, lo cual es incongruente ya que este ángulo pertenece al cuarto cuadrante y se supone que este ángulo debe estar en el segundo cuadrante. Para encontrar el verdadero ángulo basta con hacer el siguiente cálculo:

$$\phi = -1.326 + \pi, \quad \text{el cual da como resultado correcto} \quad \phi = 1.816 \text{ rad}$$

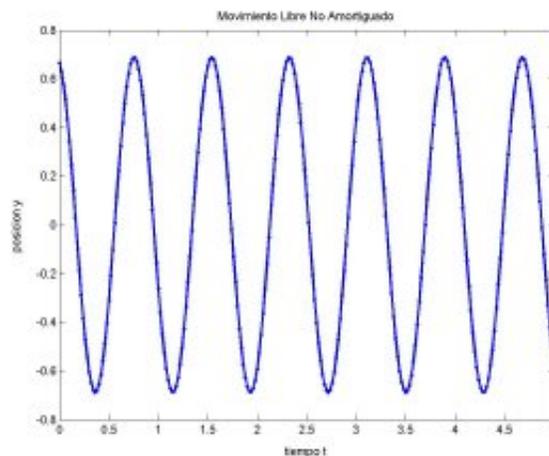
Finalmente la forma alternativa para la ecuación del movimiento armónico libre es:

$$y(t) = \frac{\sqrt{17}}{6} \text{sen}(8t + 1.816)$$

Para poder aplicar el enfoque de procesos, se tiene que razonar de la siguiente manera: Como la posición de equilibrio del sistema masa-resorte sucede cuando $y = 0$, esta posición corresponderá al estado estable de dicho sistema. El evento que corresponde a situar la masa a 8 in por debajo de esta posición de equilibrio junto con su velocidad inicial representará la *entrada* o *input*, aunque este evento no refleje una *función de entrada* $f(t)$ en la ecuación diferencial. Y la razón de esto es muy sencilla: El evento es instantáneo y aparece una sola vez en el proceso del movimiento del sistema masa-resorte; La *salida* o *output* del proceso, debida al evento antes descrito, será el modelo que se ha deducido anteriormente. El siguiente esquema aclarará esto.



La grafica de la respuesta o salida del proceso al evento de soltar la masa es la siguiente:



Es interesante observar en la gráfica que el sistema masa-resorte nunca regresa al estado inicial del movimiento, ni mucho tiende a la posición de equilibrio (que es estable), por el contrario la naturaleza del sistema (en particular la del resorte) tiende a estabilizar al sistema hacia un estado de movimiento oscilatorio libre armónico (que también es estable), en otras palabras, la entrada al proceso provoca que el sistema masa-resorte se ubique en otro estado de

equilibrio a menos que otra entrada perturbe este equilibrio y lo lleve hacia otro estado. Este fenómeno es análogo al visto en el *Ejemplo 1*.

APLICACIÓN DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE EN EL SISTEMA MASA-RESORTE. MOVIMIENTO LIBRE CRÍTICAMENTE AMORTIGUADO

Ejemplo 3.- Una masa que pesa 4 lb se une a un resorte cuya constante es de $2 \frac{\text{lb}}{\text{ft}}$. El medio presenta una resistencia al movimiento numéricamente igual a la velocidad instantánea. Si la masa se suelta de un punto a 1 ft arriba de la posición de equilibrio con una velocidad de $8 \frac{\text{ft}}{\text{seg}}$ hacia abajo. Aplique la transformada de Laplace y su inversa, para deducir la ecuación del movimiento y grafique dicha ecuación. Aplique el enfoque de procesos para determinar la *entrada* o *input* así como la *respuesta* o *salida (output)* de el proceso del movimiento.

Solución.- Antes que todo, se requiere encontrar los datos necesarios para determinar la hipótesis del movimiento, es decir, se necesita saber los valores numéricos de 2λ y ϖ^2 . Para ello se realizarán los siguientes cálculos:

La masa se determina mediante la segunda ley de Newton:

$$m = \frac{4\text{lb}}{32 \frac{\text{ft}}{\text{seg}^2}} \text{ de donde } m = \frac{1}{8} \text{ slug}$$

la constante ϖ^2 se obtiene mediante:

$$\varpi^2 = \frac{k}{m} = \frac{2}{\frac{1}{8}} \text{ de donde } \varpi^2 = 16$$

la constante de amortiguamiento $\beta = 1$ de donde $2\lambda = \frac{1}{\frac{1}{8}}$, de esta manera $2\lambda = 8$

De lo anterior $\lambda = 4$, de aquí que si $\lambda^2 - \varpi^2 = 0$, entonces el movimiento es *críticamente amortiguado*.

La ecuación diferencial o “hipótesis” del modelo matemático que describirá el movimiento críticamente amortiguado tiene la siguiente forma:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 8\frac{dy}{dt} + 16y = 0$$

o en forma compacta

$$y'' + 8y' + 16y = 0$$

las condiciones de Cauchy para este problema son:

$$y(0) = -1, \wedge y'(0) = 8$$

convirtiendo la ecuación junto con sus condiciones de Cauchy se tiene:

$$Y'' + 8Y' + 16Y = 0 \text{ sujeta a: } Y(0) = -1, \wedge Y'(0) = 8$$

$$\mathcal{L}\{Y'' + 8Y' + 16Y = 0\}$$

$$s^2 y(s) - sY(0) - Y'(0) + 8sy(s) - 8Y(0) + 16y(s) = 0$$

$$y(s) = -\frac{s}{(s+4)^2}$$

expandiendo en sus fracciones simples (véase el caso II en el Apéndice D):

$$y(s) = \frac{4}{(s+4)^2} - \frac{1}{s+4}$$

aplicando la transformada inversa de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{y(s) = \frac{4}{(s+4)^2} - \frac{1}{s+4}\right\}$$

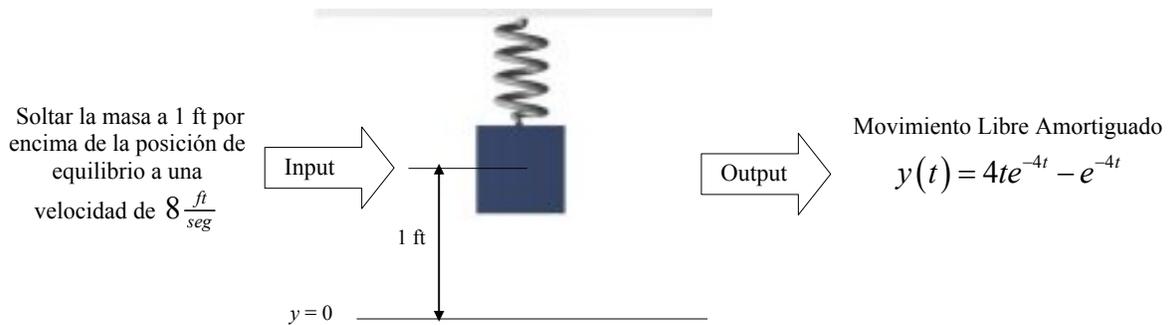
de manera que *la integral particular* en la variable t es:

$$Y(t) = 4te^{-4t} - e^{-4t}$$

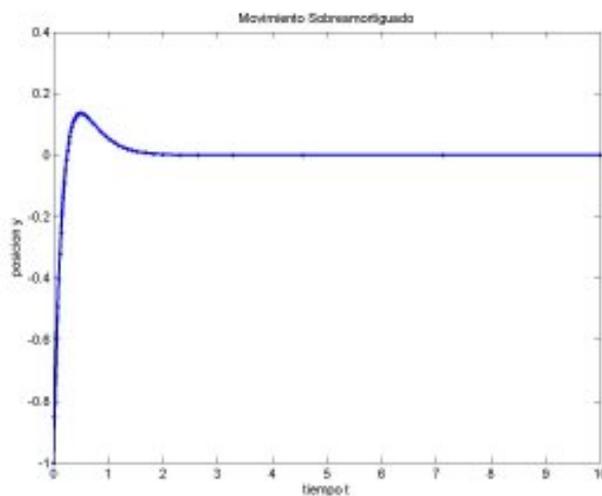
cambiando únicamente Y por y se tiene finalmente la ley que gobierna el movimiento armónico libre sin amortiguamiento

$$y(t) = 4te^{-4t} - e^{-4t}$$

Al igual que en el ejemplo anterior, El evento que corresponde a situar la masa a 1 *ft* por encima de esta posición de equilibrio junto con su velocidad inicial que es de 8 *ft/seg*, representará la *entrada* o *input*, y la *respuesta* o *output* es la integral particular que se acaba de deducir. El esquema de esto es el siguiente:



La gráfica de la respuesta es la siguiente:



Es interesante observar que a pesar de la naturaleza del evento de entrada, el sistema masa-resorte tiende a estabilizarse después de que se ha soltado la masa y esto es debido a que ningún otro evento posterior al inicio del movimiento logra contrarrestar el efecto del medio amortiguador que lo rodea. Pero si éste recibe una pequeña alteración, entonces el sistema tenderá a oscilar. Esto no quiere decir que esta alteración representaría otra entrada al sistema sino que se trataría de otro sistema diferente en cuanto al medio amortiguador.

APLICACIÓN DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE EN EL SISTEMA MASA-RESORTE. MOVIMIENTO FORZADO

Ejemplo 4.- Un objeto que tiene una masa es de $\frac{1}{4}$ slug se sujeta de un resorte cuya constante es de 4 lb/ft. Al inicio el objeto parte del reposo y desde la posición de equilibrio. También el objeto es impulsado por una fuerza externa dada por $f(t) = 4\text{sen}(4t)$. Aplique la transformada de Laplace y su inversa, para deducir la ecuación del movimiento forzado y grafique dicha ecuación. Aplique el enfoque de procesos para determinar la *entrada* o *input* así como la *respuesta* o *salida* (*output*) de el proceso del movimiento.

Solución.- Como no existe en este sistema masa-resorte un medio amortiguador pero sí, una fuerza externa, entonces el fenómeno físico es un *movimiento forzado sin amortiguamiento*. (véase la ecuación 3.61 de la sección 3.7)

Antes de aplicar la ecuación (3.61) es necesario calcular las magnitudes γ y ϖ , para determinar las frecuencias de la fuerza impulsora y de las oscilaciones libres. En este caso, como $f(t) = 4\text{sen}4t$, entonces $\gamma = 4$. Por otro lado, si $m = \frac{1}{2}\text{slug}$ y $k = 8$, entonces $\varpi^2 = \frac{k}{m} = \frac{8}{\frac{1}{2}} = 16$, es decir $\varpi = 4$; las frecuencias de la fuerza impulsora y de las oscilaciones libres respectivamente son $\frac{\gamma}{2\pi} = \frac{4}{2\pi} = \frac{2}{\pi}$ y $\frac{\varpi}{2\pi} = \frac{4}{2\pi} = \frac{2}{\pi}$ de esta manera en este movimiento existe el fenómeno de la resonancia pura. Al aplicar la ecuación (3.61) se obtiene:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 16y = 4\text{sen}4t$$

cuyas condiciones iniciales son:

$$y(0) = 0, y'(0) = 0$$

o en forma compacta, el problema a resolver es el siguiente:

$$y'' + 16y = 4\text{sen}4t \quad \text{sujeta a: } y(0) = 0, y'(0) = 0$$

convirtiendo la ecuación junto con sus condiciones de Cauchy se tiene:

$$Y'' + 16Y = 4\text{sen}(4t) \quad \text{sujeta a: } Y(0) = 0, Y'(0) = 0$$

Aplicando la Transformada de Laplace se tiene:

$$\mathcal{L}\{Y'' + 16Y = 4\text{sen}(4t)\}$$

$$s^2y(s) - sY(0) - Y'(0) + 16y(s) = \frac{16}{s^2 + 16}$$

sustituyendo las condiciones de Cauchy, simplificando y despejando $y(s)$ se obtiene:

$$y(s) = \frac{16}{(s^2 + 16)^2}$$

En este caso se aplicará el **Teorema 4-18** (*Propiedad de Convolución*, vista en la sección 4.2) para encontrar la transformada inversa de la fracción propia anterior, pero para ello se acomodan los términos de la siguiente manera:

$$y(s) = \left(\frac{4}{s^2 + 16}\right)\left(\frac{4}{s^2 + 16}\right)$$



Ejercicios Suplementarios

Sección 4.4 Ejercicios 4.4

Aplique la Transformada de Laplace y su inversa para resolver los siguientes problemas relacionados aplicados. Analizando en cada caso las entradas y salidas del proceso.

1. Un tanque contiene 150 *litros* de agua, en él, se disuelven 30 *gramos* de sal y dicho tanque es agitado continuamente. Al mismo tiempo, se introducen en el tanque 4 *lts/min* de una solución cuya concentración es de 1 *gr/lto*; del tanque se bombea la solución mezclada al mismo flujo volumétrico. Encuentre una expresión matemática que determine la cantidad de sal en el tanque en cualquier momento t . ¿Cuál es la cantidad de sal en el tanque pasado mucho tiempo?
2. En un tanque que contiene 400 *litros* de agua, se disuelven 50 *gramos* de sal y dicho tanque es agitado continuamente. Al mismo tiempo, se introducen en el tanque 3 *lts/min* de una solución cuya concentración es de 2 *gr/lto*; Del tanque se bombea la solución mezclada a una velocidad de 2 *lts/min*. Encuentre una expresión matemática que determine la cantidad de sal en el tanque en cualquier momento t . ¿Cuál es la cantidad de sal en el tanque después de un minuto?
3. Un circuito RL tiene un resistor de 12 *ohms* y un inductor cuya inductancia es de $\frac{1}{4}$ de *henry*. Una batería le suministra al circuito un voltaje de 9 *volts*. Encuentre una expresión matemática que determine la intensidad de la corriente i en cualquier momento t , si la intensidad de la corriente al inicio es cero.
4. Se une un contrapeso de 1 *slug* a un resorte cuya constante es de 1 *lb/ft*. Si una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a 3 veces la velocidad instantánea actúa sobre el sistema, deduzca la ecuación del movimiento si el contrapeso se suelta a $\frac{1}{2}$ *ft* abajo de la posición de equilibrio y con una velocidad hacia arriba de 1 *ft/seg*.
5. Un resorte de 4 *ft* alcanza 8 *ft* al colgarle una masa de 8 *lb*. El medio a través del cual se mueve ofrece una resistencia numéricamente igual a $\sqrt{2}$ veces la velocidad instantánea. Deduzca la ecuación del movimiento si la masa se suelta de la posición de equilibrio con una velocidad de 5 *ft/seg* hacia abajo. Calcule el tiempo en que llega a su desplazamiento extremo respecto de la posición de equilibrio. ¿Cuál es su posición en ese instante?
6. Al unir un contrapeso de 1 *slug* a un resorte, éste se estira 4 *ft*. El contrapeso se mueve en un medio amortiguador que ofrece una resistencia al movimiento numéricamente igual a 8 veces la velocidad instantánea. En el instante $t = 0$ se aplica permanentemente una fuerza $f(t) = \cos 4t$. Deduzca la ecuación de este movimiento
7. Se une un contrapeso de 1 *slug* a un resorte cuya constante es de 1 *lb/ft*. El contrapeso se mueve en un medio que ofrece una resistencia numéricamente igual a 3 veces la velocidad instantánea. A partir de $t = 0$ se aplica una fuerza de $f(t) = 2\cos 2t + 3\sen 2t$. Encuentre la ecuación del movimiento forzado.
8. Un contrapeso de 16 *lb* estira $\frac{8}{3}$ *ft* un resorte y se encuentra en su posición de equilibrio. A partir de $t = 0$ se aplica una fuerza de $f(t) = 3e^{-3t}\sen 5t$. Deduzca la ecuación del movimiento suponiendo que no existe amortiguamiento



Referencias Bibliográficas del Capítulo 4

Obras consultadas:

Bäumer B., Neubrandner F., “*Laplace Transform Methods for Evolutions Equations*”, Paper published by Mathematics Department of Louisiana State University, Baton Rouge, USA

Boole G., “*A Treatise on Differential Equations*”, Published by Macmillan and Co., Cambridge, England 1856

Boyce W.E., DiPrima R.C., “*Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*”, Third Edition, Published by John Wiley & Sons Inc., New York, 1966

Chen C.B., Vargas, J.C., “*Introducción a la Teoría y Solución de Ecuaciones Integrales*”, V Coloquio del Departamento de Matemáticas, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México, 1987

Churchill R.V., “*The inversion of the Laplace Transformation by a Direct Expansion in Series and its Applications to Boundary Value Problems*”, Artículo publicado en *Mathematische Zeitschrift*, Berlin, Alemania, 1936

Churchill R.V., “*Additional Notes on Inversion of the Laplace Transformation*”, Artículo publicado en *Mathematische Zeitschrift*, Berlin, Alemania, 1937

D’Azzo J.J., Houpis C.H., “*Feedback Control System Analysis & Synthesis*”, Second Edition, McGraw-Hill Inc., USA, 1966

Doetsch G., “*Die Integrodifferentialgleichungen vom Faltungstypus*”, Artículo publicado en *Mathematische Annalen*, Berlin, Alemania, 1922

Doetsch G., “*Über eine Klasse von Integralgleichungen*”, Artículo publicado en *Mathematische Zeitschrift*, Berlin, Alemania, 1925

Doetsch G., “*Bedingungen für Darstellbarkeit einer Funktion als Laplace-Integral und eine Umkehrformel für die Laplace Transformation*”, Artículo publicado en *Mathematische Zeitschrift*, Berlin, Alemania, 1936

Doetsch G., “*Das Verhalten der Laplace-Transformierten in ihrer Beschränktheithalbebene*”, Artículo publicado en *Commentarii Mathematici Helvetici*, Basel, 1946

Dorf R.C., “*Sistemas Modernos de Control*”, 2ª Edición, Editorial Addison Wesley Iberoamericana, USA, 1989

Euler L., “*De Constructione Aequationum*” Artículo publicado en *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae* por St. Petersburg Academy, Rusia, 1744

Euler L., “*De Theoria Lunae ad Maiorem Perfectionis Gradum Evehenda*”, Artículo publicado en *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitinae* por St. Petersburg Academy, Rusia, 1777

Kimble G.A., “*Hilgard y Marquis, Condicionamiento y Aprendizaje*”, 8ª Edición, Editorial Trillas, México, 1982

Koppenfels W.V., “*Der Faltungssatz und seine Anwendung bei der Integration Linearer Differentialgleichungen mit Konstanten Koeffizienten*”, Artículo publicado en *Mathematische Annalen*, Berlin, Alemania, 1931

Lagrange J.L., “*Sur le Mouvement des Noeuds des Orbites Planetaires*”, Artículo publicado por la Académie Royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin, 1774

Lagrange J.L., “*Théorie des Variations Séculaires des Éléments des Planètes*”, Artículo publicado por la Académie Royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin, 1781

Laplace P.S., “*Théorie Analytique des Probabilités*”, M^{ME} V^E Courcier, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, Paris, France, 1820

Lewis F.L. “*Applied Optimal Control and Estimation*”, First Edition, Prentice-Hall, 1992

Maxwell, J.C., “*On Governors*”, From the Proceedings of the Royal Society, No.100, 1868.

Netushil A., “*Teoría del Mando Automático*”, Tomo I, 1ª Edición en español, Editorial Mir Moscú, Rusia, 1987

Simmons G.F., “*Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas*”, 2ª Edición, Editorial McGraw Hill Interamericana de España, España, 1993

Spiegel M.R., “*Matemáticas Superiores para Ingenieros y Científicos*”, Traducción de la 1ª Edición en inglés, Serie Schaum, Editorial McGraw Hill, 1975

Spiegel M.R., “*Transformadas de Laplace*”, Traducción de la 1ª Edición en inglés, Serie Schaum, Editorial McGraw Hill, 2001

Tranter C.J., “*Transformadas Integrales en la Física Matemática*”, 1ª Edición en español, Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana, 1964

Sitios web consultados en Internet

O'Connor J.J., Robertson E.F., “*MacTutor History of Mathematics*”, Sitio web en Internet de la Escuela de Matemáticas y Estadística de la Universidad de San Andrews, Escocia, 2007
<http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/>





Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

Sección 5.1

“El que busca métodos sin tener un problema definitivo en mente, la mayoría de las veces busca en vano”
Hilbert David



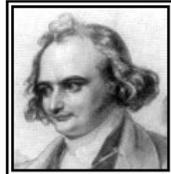
SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

RESEÑA HISTÓRICA

Los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias se presentaron pronto en la astronomía dinámica y concretamente en *el problema de los tres cuerpos* de **Newton**, el cual por años fue objeto de estudio de muchos matemáticos y físicos tratando de resolverlo a través de soluciones cuantitativas. Igualmente importante aunque más antiguo fue el problema del *isocronismo* de las oscilaciones de un péndulo descubierto por **Galileo** en 1584 y que desencadenó una serie de descubrimientos por parte de eminentes matemáticos como **Leonhard Euler** quien dio en 1736 en su “*Mechanica*” una solución cuantitativa a través de series infinitas;



A.M. Legendre



C.G. Jacobi

Siméon Denis Poisson hizo lo mismo en su “*Traite de Mechanique*” de 1811 en donde analiza el problema a través de un desarrollo en series de potencias de un parámetro pequeño. La relación para el periodo y la amplitud del péndulo fue formulada también por **Adrien Marie Legendre** (1752-1833) en su “*Traite des Fonctions Elliptiques et de Leurs Applications*” de 1891, en donde usa *funciones elípticas*; al igual que **Karl Gustav Jacobi**

(1804-1851) en su “*Fundamenta Nova Theorie Functionem Ellipticarum*” de 1829 donde utilizó *integrales y funciones elípticas*.

El análisis de un *sistema de n ecuaciones diferenciales lineales simultáneas con coeficientes analíticos* fue estudiado por **Euler** hacia 1750 cuando desarrollaba su teoría lunar “*De Theoria Lunae ad Maiorem Perfectionis Gradum Evehenda*”, donde analiza a través de sistemas de ecuaciones diferenciales las alteraciones de la órbita de la Tierra, pero fue **August Louis Cauchy** quien justificó el análisis. **Cauchy** también analiza la existencia y unicidad de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden por reducción de la ecuación



A.L. Cauchy

$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{n-1})$ dadas las condiciones iniciales. Otro de los eminentes científicos que trabajó con *los sistemas de ecuaciones diferenciales* fue el matemático francés **Joseph Louis Lagrange**. Sus resultados se encuentran en los artículos publicados por la Real Sociedad de

Ciencias de Turín editados a partir de 1756; uno de estos trabajos se publica en “*Mélanges de Turín*”, también lo hace en su obra “*Sur le Mouvement des Noeuds des Orbites Planetéires*” de 1774 donde aparece el sistema no lineal:

$$\begin{aligned} \frac{d \cos \xi}{dt} &= q \sin \omega \sin \psi \sin z, & \frac{d \cos \psi}{dt} &= -p \sin \omega \sin \xi \sin s \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{q \sin \omega \cos s}{\sin \xi}, & \frac{dy}{dt} &= -\frac{p \sin \omega \cos z}{\sin \psi} \end{aligned}$$

y en “*Théorie des Variations Séculaires des Éléments des Planètes*” de 1871, En la página 128, aparece el sistema de segundo orden:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{gx}{\rho^3} + X &= 0 \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{gy}{\rho^3} + Y &= 0 \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{gz}{\rho^3} + Z &= 0 \end{aligned}$$



A.R. Forsyth

donde X, Y, Z él las llamó, las fuerzas perturbatrices. La aplicación de los sistemas de ecuaciones diferenciales a problemas de la física de partículas en movimiento lo analiza también el matemático escocés **Andrew Russell Forsyth** (1858-1942) en su obra “*A Treatise on Differential Equations*” publicado en 1885. En este tratado ya se puede ver el método de reducción de un sistema lineal con dos variables dependientes a una ecuación diferencial de segundo orden (método que será utilizado en la sección 5.2). Pero todas estas aportaciones son meramente cuantitativas y su incursión a casos más generales dieron origen a la basta teoría de las ecuaciones diferenciales.

Fue **Jules Henri Poincaré** quien realiza una filosofía radicalmente nueva para el tratamiento de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales que representaba a fenómenos como los antes descritos, dando un tratamiento cualitativo a este tipo de problemas con base en una descripción topológica de las soluciones en diferentes estados (equilibrio estable, inestable, etc.). El Dr. **Poincaré** realizó en el periodo de 1878 hasta 1886 una serie de trabajos entre los que destaca “*Memorie sur les Courbes Définie par une Équation Differentielle*” de 1880, en donde investigó el problema si se puede o no y cómo caracterizar el comportamiento de la familia de curvas integrales de las ecuaciones $y' = f(x, y)$ o del sistema:



H. Poincaré

$$\frac{dx}{dt} = \varphi_1(x, y) \quad \wedge \quad \frac{dy}{dt} = \varphi_2(x, y)$$

en todo el plano partiendo de las funciones f ó la pareja $\varphi_1 \wedge \varphi_2$. En esa época, **Poincaré** estudió el desarrollo de las soluciones de las ecuaciones diferenciales según un parámetro pequeño; demostró el carácter asintótico de ciertas series e investigó los puntos singulares (*actualmente conocidos como puntos de reposo o puntos críticos*). Además de los problemas de la mecánica celeste, investigó el problema de las oscilaciones de continuos tridimensionales, estudió una serie

de problemas de la conducción del calor, la teoría del potencial, el electromagnetismo y muchos otros. Estas investigaciones lo estimularon para la elaboración de sus métodos cualitativos. Dichos métodos dan la posibilidad de aclarar las singularidades de la solución buscada del problema, la existencia y cantidad de soluciones y sus singularidades no resolviendo numéricamente ni analíticamente la ecuación diferencial dada. Considerando la familia de curvas integrales, **Poincaré** separó los casos de las *singularidades* y les dio una clasificación. Investigó especialmente el carácter del comportamiento de las curvas integrales en la vecindad de los *puntos singulares* (*puntos de reposo*). **Poincaré** dio las primeras aplicaciones de los métodos cualitativos al problema de los tres cuerpos y en 1881 analizó cualitativamente las oscilaciones del péndulo en lo que se conoce actualmente como el *plano de fases*.

Los métodos de **Poincaré** eran fundamentalmente geométricos, más estrictamente topológicos. Se puede decir que **Poincaré** es el fundador de la álgebra topológica publicando hasta 1895 su “*Analysis Situs*”; de hecho todos o casi todos sus trabajos están basados en la topología de espacios y la teoría de grupos desarrollados años atrás.. Entre 1892 y 1899 escribió sus “*Les Méthods Nouvelle de la Méchanique Celeste*” y “*Leçons de Mecanique Celeste*” en tres volúmenes publicados en 1905, 1907 y 1910 en donde se muestra la aplicación de sus métodos en los sistemas mecánicos dinámicos.

Casi simultáneamente con los trabajos de **Poincaré**, los métodos cualitativos fueron introducidos por el eminente matemático ruso **Alexandr Mikhailovich Liapunov** quien fue discípulo de **Pafnuti Lvovich Chebyshev**. Por consejo de su maestro, **Liapunov** aborda un problema astronómico concreto pero difícil: investigar la posibilidad de la existencia de figuras de equilibrio, de una masa de líquido que gira, diferentes a las elipsoidales. Esto desencadenó una serie de trabajos importantes como su tesis doctoral: “*Problème General de la Stabilité du Mouvement*”, traducción francesa (1907) del original en ruso (1892) y su obra en cuatro volúmenes “*Sur les Figures d’Équilibre peu Différentes del Ellipsoïds d’une Masse Liquide Homogène Douée d’un Mouvement de Rotation*” publicado en 1906, 1909, 1912 y 1914. En estos trabajos surge además el problema de la estabilidad del equilibrio y el movimiento de los sistemas mecánicos definidos por un número finito de parámetros, la teoría del potencial y otros. El problema general de la estabilidad, **Liapunov** lo redujo a la investigación, mediante métodos cualitativos, del comportamiento de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, t) \quad \forall (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

donde F_i para pequeños x_i es desarrollable en series convergentes según potencias enteras de x_k además de que $F_i(0, 0, 0, \dots, 0) = 0$. El Dr. **Liapunov** se negó a introducir la linealización de las ecuaciones, por medio de la eliminación de todos los términos no lineales, para aclarar la estabilidad del movimiento. **Liapunov** resolvió muchas cuestiones de la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias que antes no se habían contestado: sobre la existencia y construcción efectiva de *soluciones periódicas* de una clase de *ecuaciones diferenciales no lineales*, el comportamiento de las curvas integrales de las ecuaciones en la vecindad de la posición de equilibrio, etc. También desarrolló la construcción de una función $E(x, y) = ax^{2m} + by^{2n}$ tal que para ciertos valores de m y n , caracteriza la estabilidad de un sistema dinámico. Estos números

característicos se conocen actualmente como *exponentes de Liapunov*. Para ciertas condiciones de $E(x, y)$ el matemático ruso **Nikolai Gurievich Chétaev** (1902-1959) demostró la inestabilidad de los *puntos de reposo*.



N.G. Chetaev



A. Hurwitz

A finales del siglo XIX, el matemático alemán **Adolf Hurwitz** (1859-1919) resuelve la cuestión de que, cuál era la condición de que un polinomio de n -ésimo grado con coeficientes reales siendo el de mayor grado positivo, tenga sólo raíces con partes reales negativas. El Dr. **Hurwitz** llega a la conclusión de que la condición era la existencia de una serie de ciertos determinantes todos ellos positivos, cuyos elementos son los coeficientes del polinomio. Su resultado lo publica en 1895 en el artículo “*Über die Bedingungen, unter Welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit Negativen Reellen Theilen Besitzt*”. Este descubrimiento tuvo posteriormente un impacto significativo en la teoría de la estabilidad de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

En las matemáticas modernas, cualquier sistema físico cuyo comportamiento en las proximidades de cada estado se describe por un sistema de ecuaciones diferenciales $\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, t)$ donde t representa el tiempo



G.D. Birkhoff

recibe el nombre de *sistema dinámico*. La teoría general de los sistemas dinámicos comenzó a elaborarse con los trabajos de **George David Birkhoff** (1884-1944) con su tesis doctoral “*Asymptotic Properties of Certain Ordinary Differential Equations with Applications to Boundary Value and Expansion Problems*” hasta su “*Dynamical Systems*” de 1928.

En 1926 el matemático italiano **Vito Volterra** en su tratado “*Variazioni e Fluttuazioni del Numero d'Individui in Specie Animali Conviventi*”, establece un modelo de dinámica poblacional animal conocido como *modelo depredador-presa*, el cual en forma independiente fue propuesto por



A.J. Lotka



V. Volterra

el químico, ecologista y matemático austriaco **James Alfred Lotka** quien escribió el tratado “*Elements of Physical Biology*” publicado en Baltimore, USA en 1925. El sistema no lineal propuesto tiene la forma:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= rH - aHP \\ \frac{dP}{dt} &= bHP - mP \end{aligned}$$

donde H y P son las densidades de población de presas y depredadores respectivamente, r es la tasa variación del crecimiento de la población de las presas, a la tasa de depredación, b la tasa de reproducción de los depredadores y m es la tasa de mortalidad de los depredadores.

En los últimos 20 años, se modificó fuertemente el aspecto de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Uno de los progresos más importantes consistió en el

descubrimiento de regiones límite que conduce al concepto de *atractores*. En un sistema dinámico, paralelamente a los regímenes estacionarios y periódicos, son también posibles regímenes límite de una naturaleza completamente distinta, en las cuales cada trayectoria por separada es inestable, mientras que el mismo fenómeno es estructuralmente estable.



A. Andronov

Esto condujo al mecánico **Alexander Alexandrovich Andronov** (1901-1952) y al matemático **Lev Semionovich Pontriagin** (1908-1988), ambos destacados miembros de la Academia de Ciencias de Rusia, al desarrollo de sistemas gruesos o de estabilidad estructural. Este concepto resultó muy fructífero en el caso de espacios de dimensiones pequeñas (1 y 2) en donde los problemas de estabilidad fueron estudiados minuciosamente.



L.S. Pontriagin

Los descubrimientos anteriores se reflejaron en las investigaciones de **Andronov** y sus colegas en "*Zadacha Misesa v Teorii Pryamogo Regulirovaniya i Teoriya Tochechnykh Preobrazovanií Poverkhnosti*" publicada en 1944. Sus métodos gradualmente se fueron extendiendo a espacios de estado de dimensiones superiores. De esta manera, la teoría de las ecuaciones diferenciales en el presente, constituye una importante rama de la matemática que se desarrolla rápidamente, en estrecha relación con otras áreas de la ciencia.



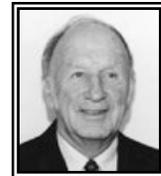
A. Eddington



J. Hopwood J.

Si en un sistema dinámico definido anteriormente, se conocen las posiciones y velocidades iniciales de 3 partículas por ejemplo, y si éstas no colisionan, sus posiciones y velocidades posteriores quedarían unívocamente determinadas. Esta idea subyace en la filosofía del determinismo mecanicista que afirma, que el universo es una gigantesca máquina cuyo futuro está inexorablemente fijado por su estado en un instante cualquiera. **Sir**

James Hopwood Jeans (1877-1946) matemático y astrónomo inglés, afirmó en una ocasión que el universo es "*un sistema autorresuelto de 6N ecuaciones diferenciales donde N es el número de Eddington*". El físico y matemático inglés **Arthur Stanley Eddington** (1882-1944) afirmó también que: $N = \frac{3}{2} \times 136 \times 2^{256}$ es el número de partículas en el universo.



E.N. Lorenz

Una de las aportaciones más importantes en la teoría de caos, la dio en 1961, el matemático y meteorólogo estadounidense **Edward Norton Lorenz** (1917-) cuya contribución a las ecuaciones diferenciales se encuentra en el escrito "*Deterministic Nonperiodic Flow*". En el, la variación del clima debido a un proceso convectivo cual se describe mediante un sistema relativamente simple de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= s(y - x) \\ \frac{dy}{dx} &= rx - y - xz \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz \end{aligned}$$

donde X es proporcional a la velocidad de circulación del flujo de calor, Y es proporcional a la diferencia de temperatura entre el ascenso y descenso de la corriente del flujo, Z es proporcional a

la distorsión del perfil de temperatura lineal vertical, s es el *número de Prandtl*, r es el *número de Rayleigh* relativo y b es la razón entre la altura de un “*rollo de convección*” y la longitud de dos “*rollos*” vecinos. Para ciertos valores de s, r y b , el régimen del flujo corresponde a un atractor extraño llamado “*Lorenz-Attractor*”.

Actualmente existen numerosos artículos referentes al desarrollo de la teoría de los sistemas de ecuaciones diferenciales en la variable continua del tiempo y de sistemas de ecuaciones en diferencias para la variable discreta de tiempo. *Electronics Journals Differential Equations* (EJDE), es un sitio web reconocido mundialmente en donde se publican algunos de estos importantes escritos.



E. Volokitin



L. Baráková

En Julio del 2005 se publica “*Bifurcation Diagram of a Cubic Three-Parameter Autonomous System*”, del Dr. **Evgenii Volokitin** del Instituto de Matemáticas Sobolev de Rusia y de la Dra. **Lenka Baráková** de la Universidad Mendel de la Republica Checa. En este escrito hay una serie de investigaciones relacionadas con sistemas dinámicos con tres parámetros así como de sus propiedades topológicas, tipos de bifurcaciones y su estabilidad, especialmente de la existencia de los ciclos límite, todo, encaminado a la elaboración de un diagrama de bifurcación que se logra con base en la subdivisión del espacio de parámetros en regiones tales que el sistema tenga topológicamente diagramas de fases equivalentes y establecer en las fronteras de la bifurcación, la existencia de los ciclos límite.

El sistema dinámico de estudio es el siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dx} &= k_1 + k_2 x_1 - x_1^3 - x_2 \\ \frac{dx_2}{dx} &= k_3 x_1 - x_2 \end{aligned}$$

donde $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ y $K = \{(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{R}^3 : k_2 > 0, k_3 > 0\}$ es el espacio de parámetros.

En el 2001 se publica el artículo “*Stabilization of Linear Continuous Time-Varying Systems with State Delays in Hilbert Spaces*” elaborado por el Dr. **Vu Ngoc Phat** del Centro Nacional para la Ciencia y Tecnología en Hanoi, Vietnam. En este escrito, el Dr. **Phat** muestra procedimientos paso a paso para encontrar controladores de retroalimentación y condiciones de estabilidad en las variables de estado para algunos sistemas lineales de control con retrasos y con perturbaciones no lineales. Considera un sistema lineal de control con retrasos de la forma:



V.N. Phat

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dx} &= A(t)x(t) + A_1(t)x(t-h) + B(t)u(t), \quad t \geq t_0 \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-h, t_0] \end{aligned}$$

donde $x \in X$ es la variable de estado, $u \in U$ es la variable de control y $h \geq 0$. La estabilidad consiste en encontrar para un sistema de circuito cerrado, una función de control $u(t) = K(t)x(t)$ tal que:

$$\frac{dx(t)}{dx} = [A(t) + B(t)K(t)]x(t) + A_1(t)x(t-h)$$

sea *asintóticamente estable* en el sentido de Liapunov. Aquí, las matrices $A(t) \wedge A_1(t)$ operan en el espacio de Hilbert X , mientras que $B(t) \wedge K(t)$ operan en los espacios de Banach $L(U, X)$ y $L(X, U)$ respectivamente.

En una conferencia sobre ecuaciones diferenciales dictada en el 2004 en la ciudad de Nanaimo, Canadá, la Dra. **María Clara Nucci** del Departamento de Matemática e Informática de la Universidad de Perugia, Italia, muestra su artículo “*Using Lie Symmetries in Epidemiology*”. En este escrito, publicado en el 2005 en *Electronics Journals Differential Equations* (EJDE), la Dra. Nucci, muestra la aplicación del método de las simetrías de Lie en sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales. En particular, ella lo aplica en *la ecuación de Derrick-van den Driessche* (que modela la transmisión de enfermedades debidas a la propagación de un virus), la cual tiene la forma:



M.C. Nucci

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= bN - dS + \rho R - I\Phi(S, I, N) \\ \frac{dI}{dt} &= I[\Phi(S, I, N) + \Psi(R, I, N) - (d + \varepsilon + \gamma)] \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - (d + \delta + \rho)R - I\Psi(R, I, N) \end{aligned}$$

donde N es una población variable, dividida en tres clases: I son los infectados, S los no infectados (pero susceptibles a la infección) y R son los pacientes recuperados. También, b es la variación per cápita de nacimientos, d la variación per cápita de muertes naturales, ε , el exceso de la variación per cápita de muertes por infección, δ , es el exceso de la variación per cápita de muertes de los pacientes recuperados, γ , es la variación per cápita de reincidencia de la infección y ρ es la variación per cápita de la pérdida de inmunidad en pacientes recuperados. La incidencia de la enfermedad en la clase susceptible esta dada por la función $I\Phi(S, I, N)$, mientras que $I\Psi(R, I, N)$ es la tasa de transferencia de la clase recuperada dentro de la clase infectada.

En el 2005 se publica en EDJE, el trabajo de investigación “*Numerical Stability Analysis in Respiratory Control System Models*” del Dr. **László Kollar** del



J. Turi



L. Kollar

Departamento de Ciencias Aplicadas de la Universidad de Québec, Canadá y del Dr. **János Turi** del Departamento de Ciencias Matemáticas de la Universidad de Texas, USA. El objetivo del artículo es mostrar el uso de herramientas numéricas para analizar la estabilidad de un modelo matemático del sistema respiratorio humano, que se logra a través de ecuaciones diferenciales con retrasos. Los investigadores,

emplearon en este caso, el software Matlab[®] para analizar la estabilidad de dicho modelo como sistema de control; éste tiene la forma:

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \alpha V(t)x(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = 1 - \beta V(t)y(t)$$

donde x e y son las variables de estado referidas a la concentración de CO_2 y O_2 respectivamente; α y β son constantes positivas referidas a la difusividad del CO_2 y O_2 respectivamente y $V(t)$ es la función de ventilación que depende tanto de las variables de estado, la presión arterial y el parámetro de retraso en el transporte de las sustancias referidas.

También se destacan los estudios del matemático nigeriano **Olusola Akinyele** (1944-) de la Universidad de Ibadan, Nigeria, sobre la estabilidad de sistemas híbridos, el análisis armónico, las funciones de Liapunov, la Ψ -estabilidad de sistemas lineales con retrasos en el tiempo, los comportamientos de las soluciones de ecuaciones integrales de tipo Volterra con retrasos en el tiempo, entre otros temas. De entre sus casi 50 obras se destacan: “*Integral Stability of Differential Systems and Perturbation of Lyapunov Functions*” de 1977, “*On the Ψ -stability of Comparison Differential Systems*”, publicada en 1992 y “*On the Monotone Iterative Technique for the Second Order Nonlinear Volterra Type Boundary Value Problem*” del 2000, entre otras.



O. Akinyele

Igualmente importantes son los estudios del matemático polaco **Jaroslav Morchalo** del Instituto de Matemáticas de la Universidad Tecnológica de Poznan, Polonia, los cuales tratan sobre la Ψ -estabilidad, la Ψ -estabilidad uniforme y la Ψ -estabilidad asintótica de la solución trivial de sistemas no lineales. Publica en 1990 el artículo “*On Ψ - L_p Stability of Nonlinear Systems of Differential Equations*”. Finalmente se destacan las obras del matemático rumano **Adrian Constantin** de la Facultad de Matemáticas de Analele Univesritatii Din Timisoara, Rumania, las cuales tratan sobre el grado de estabilidad y de acotamiento de la solución de una ecuación diferencial ordinario con respecto a una función Ψ positiva y creciente. En 1992 publica el artículo “*Asymptotic Properties of Solutions of Differential Equations*”.



CONCEPTOS PRELIMINARES

Uno de los temas principales del *análisis matemático* es el de los *sistemas de ecuaciones diferenciales* y la razón de ello estriba en que muchos fenómenos de la naturaleza pueden ser estudiados y analizados mediante estos modelos. Sin pretender hacer un estudio extenso de tales sistemas, el objetivo de este capítulo se limita solamente al estudio de los *sistemas de ecuaciones diferenciales lineales* y algunas de sus aplicaciones.

El conjunto de ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n \frac{d^m y_1}{dx^m} &= \Psi_1(t, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \\ \sum_{m=1}^n \frac{d^m y_2}{dx^m} &= \Psi_2(t, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \\ \sum_{m=1}^n \frac{d^m y_3}{dx^m} &= \Psi_3(t, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ \sum_{m=1}^n \frac{d^m y_n}{dx^m} &= \Psi_n(t, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \end{aligned}$$

donde $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ son variables que dependen de t , es llamado un *sistema de ecuaciones diferenciales de orden n , con n variables dependientes*.

Ahora bien, si m toma a lo más el valor de 1, entonces el conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \Psi_1(t, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dt} &= \Psi_2(t, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \\ \frac{dy_3}{dt} &= \Psi_3(t, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ \frac{dy_n}{dt} &= \Psi_n(t, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \end{aligned} \tag{5.1}$$

ó en forma compacta:

$$\frac{dy_i}{dt} = \Psi_i(t, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \quad \text{donde } i = 1, 2, 3, \dots, n$$

es llamado un *sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, con n variables dependientes*.

El sistema de ecuaciones $\frac{dy_i}{dt} = \Psi_i(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, t)$ donde $i = 0, 1, 2, \dots, n$, es considerado un *sistema de ecuaciones diferenciales no lineal*, siempre y cuando las funciones Ψ_i (al menos una de ellas) contengan expresiones que no sean únicamente *polinomios algebraicos lineales* (de exponente unitario) sino que incluyan *expresiones fraccionarias, trascendentes, polinómicas algebraicas de grado mayor o igual a dos*, etc. Los siguientes sistemas son no lineales:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2xe^x - 3y + \text{sen}(x^2) + t & \frac{dx}{dt} &= 7x - 5\text{sen}(y) + y^4 & \frac{dx}{dt} &= 2x^2 + xy^2 \\ \frac{dy}{dt} &= 2x + ye^{-y^2} + y^4 \cos x - t^2 & \frac{dy}{dt} &= e^{-x} - 4y - 1 + \frac{2}{5}x^3 & \frac{dy}{dt} &= y^3 + x^4y + \cos t \end{aligned}$$

donde x e y son las variables dependientes.

Por otro lado si el sistema (5.1) adquiere la forma

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n + f_1(t) \\ \frac{dy_2}{dt} &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n + f_2(t) \\ &\vdots \\ \frac{dy_n}{dt} &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n + f_n(t) \end{aligned} \tag{5.2}$$

éste, se denomina un *sistema de ecuaciones diferenciales lineales no autónomo de primer orden, con coeficientes constantes y n variables dependientes*.

Si en particular las funciones f_i son iguales a cero, el conjunto (5.2) adquiere la forma:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ \frac{dy_2}{dt} &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \\ &\vdots \\ \frac{dy_n}{dt} &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \end{aligned} \tag{5.3}$$

y se denomina un *sistema de ecuaciones diferenciales lineales autónomo de primer orden, con coeficientes constantes y n variables dependientes*.

"La mente sólo usa su facultad para la creatividad sólo cuando las fuerzas de la experiencia así lo determinan"
Poincaré, Henri



SISTEMAS AUTÓNOMOS

SISTEMAS AUTÓNOMOS DE 2 ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES CON 2 VARIABLES DEPENDIENTES. MÉTODO DE REDUCCIÓN

Considérese ahora solamente las variables $y_1 \wedge y_2$; el sistema (5.3) toma la forma:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2\end{aligned}$$

el cual puede ser escrito de la forma:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax + by \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy\end{aligned}\tag{5.4}$$

donde las variables x e y , dependen de la variable t y a, b, c y d son constantes. Desde luego, existen varias formas de resolver el sistema (5.4), pero en esta sección se muestra un algoritmo denominado **método de reducción** que es simple y efectivo para encontrar las integrales generales o particulares (según sea el caso).

Si se despeja la variable y del sistema (5.4) se obtiene:

$$y = \frac{1}{b} \frac{dx}{dt} - \frac{a}{b} x\tag{5.5}$$

Derivando esta expresión con respecto a la variable t , se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b} \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{a}{b} \frac{dx}{dt}\tag{5.6}$$

Ahora bien, si se sustituyen la ecuaciones (5.5) y (5.6) en la segunda expresión del sistema (5.4) se obtiene:

$$\frac{1}{b} \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{a}{b} \frac{dx}{dt} = cx + d \left(\frac{1}{b} \frac{dx}{dt} - \frac{a}{b} x \right)$$

Reacomodando los términos de la anterior expresión:

$$\frac{1}{b} \frac{d^2x}{dt^2} - \left(\frac{a+d}{b} \right) \frac{dx}{dt} + \left(\frac{bc-ad}{b} \right) x = 0$$

multiplicando por b , se tiene:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (a+d) \frac{dx}{dt} + (bc-ad)x = 0 \quad (5.7)$$

que puede ser escrita en forma más compacta como:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + B \frac{dx}{dt} + Cx = 0$$

donde $B = -(a+d)$ y $C = bc - ad$.

Es evidente que el sistema (5.4) ha sido reducido a una *ecuación diferencial homogénea lineal de segundo orden con coeficientes constantes*, la cual puede ser fácilmente resuelta (véase la sección 3.3)

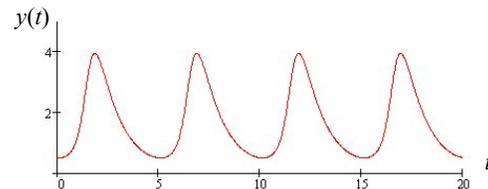
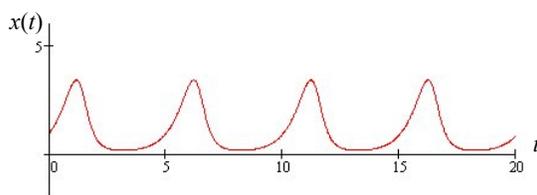
Una vez que se resuelve la ecuación (5.7) se obtiene una *ecuación paramétrica* con el parámetro t :

$$x(t) = \varphi(t, c_1, c_2) \quad (5.8)$$

al sustituir ésta y su derivada en la expresión (5.5), se obtiene finalmente la ecuación paramétrica correspondiente a la variable y :

$$y(t) = \psi(t, c_1, c_2) \quad (5.9)$$

Las *ecuaciones paramétricas* ó *curvas integrales generales* (5.8) y (5.9) representan la solución del sistema autónomo de ecuaciones diferenciales (5.4) y geoméricamente representan una *familia biparamétrica* de curvas en dos dimensiones. Dichas curvas pueden ser graficadas en dos planos por separado como lo muestra la siguientes gráficas.



Es importante aclarar que la elección de la variable a despejar es indistinta, es decir, se puede despejar la variable y para obtener una ecuación diferencial de segundo orden en la variable x ; análogamente si se despeja la variable x , entonces se obtendrá una ecuación diferencial de segundo orden en la variable y .

También es importante señalar que el *parámetro* t es en realidad la variable independiente del sistema y no hay que confundirlo con los *parámetros arbitrarios* $c_1 \wedge c_2$ (que están ligados a las condiciones iniciales), en otras palabras, las familias de curvas (5.8) y (5.9) siguen siendo

familias biparamétricas con los parámetros arbitrarios antes mencionados y la variable independiente t es la variable ó “parámetro” de las ecuaciones paramétricas $x(t) \wedge y(t)$.

El siguiente problema resuelto ilustra precisamente lo anterior.

Ejemplo 1.- Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x + y \\ \frac{dy}{dt} &= x + 2y \end{aligned}$$

Solución.- Despejando la variable y :

$$y = x' - x$$

derivando esta expresión con respecto a t :

$$y' = x'' - x'$$

sustituyendo y y su derivada en la segunda ecuación del sistema, se tiene:

$$x'' - x' = x + 2(x' - x)$$

reacomodando términos se obtiene:

$$x'' - 3x' + x = 0$$

Aplicando los métodos vistos en la sección 3.3 se encuentra que la integral general de esta ecuación diferencial de segundo orden es:

$$x(t) = c_1 e^{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)t} + c_2 e^{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)t}$$

para obtener $y(t)$, basta con sustituir esta última expresión en $y = x' - x$, obteniéndose:

$$y(t) = \underbrace{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)c_1 e^{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)t} + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)c_2 e^{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)t}}_{x'(t)} - \underbrace{\left(c_1 e^{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)t} + c_2 e^{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)t}\right)}_{x(t)}$$

simplificando, se obtiene finalmente:

$$y(t) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)c_1 e^{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)t} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)c_2 e^{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)t}$$

las ecuaciones paramétricas $x(t) \wedge y(t)$ antes deducidas, representan la solución general del sistema autónomo dado.

Ejemplo 2.-Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2x + 2y \\ \frac{dy}{dt} &= -4x - 2y\end{aligned}$$

sujeta a las condiciones iniciales: $x(0) = 1 \wedge y(0) = 1$

Solución.- Ahora despejando la variable y de la primera ecuación, se tiene:

$$y = \frac{1}{2}x' - x$$

derivando esta expresión con respecto a t :

$$y' = \frac{1}{2}x'' - x'$$

sustituyendo x y su derivada en la primera ecuación del sistema, se tiene:

$$\frac{1}{2}x'' - x = -4x - 2\left(\frac{1}{2}x' - x\right)$$

reacomodando términos resulta:

$$x'' + 4x = 0$$

cuya integral general esta dada por:

$$x(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t$$

sustituyendo esta última expresión en $y = \frac{1}{2}x' - x$, se obtiene:

$$y(t) = \frac{1}{2} \left(\underbrace{-2c_1 \operatorname{sen} 2t + 2c_2 \cos 2t}_{x'(t)} \right) - \left(\underbrace{c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t}_{x(t)} \right)$$

finalmente:

$$y(t) = -c_1 (\operatorname{sen} 2t + \cos 2t) + c_2 (\cos 2t - \operatorname{sen} 2t)$$

las ecuaciones paramétricas $x(t) \wedge y(t)$ antes deducidas, representan la solución general del sistema autónomo dado. Ahora bien, aplicando la condición inicial $x(0) = 1$ en $x(t)$:

$$x(0) = 1 = c_1 \cos(0) + c_2 \operatorname{sen}(0)$$

de lo anterior se deduce que: $c_1 = 1$. Aplicando ahora la condición $y(0) = 1$ en $y(t)$:

$$y(0) = 1 = -c_1 (\operatorname{sen}(0) + \cos(0)) + c_2 (\cos(0) - \operatorname{sen}(0))$$

cómo $c_1 = 1$, entonces $c_2 = 2$, por lo tanto, las integrales particulares están dadas por:

$$\begin{cases} x(t) = \operatorname{sen}2t + 2 \operatorname{cos} 2t \\ y(t) = \operatorname{cos} 2t - 3 \operatorname{sen}2t \end{cases}$$

SISTEMAS NO-AUTÓNOMOS DE 2 ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES CON 2 VARIABLES DEPENDIENTES. MÉTODO DE REDUCCIÓN

Ahora se resolverá un problema de un *sistema no autónomo* del tipo (5.2) para mostrar que el algoritmo anteriormente aplicado también es válido en estos casos.

Sea el sistema no autónomo

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + f_1(t) \\ \frac{dy_2}{dt} &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + f_2(t) \end{aligned}$$

que puede ser reescrito de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by + f_1(t) \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy + f_2(t) \end{aligned} \tag{5.10}$$

donde a, b, c, d son constantes y $f_1(t) \wedge f_2(t)$ son funciones de la variable t . Ahora, despejando la variable y de la primera ecuación se obtiene:

$$y = \frac{1}{b} \frac{dx}{dt} - \frac{a}{b} x - \frac{1}{b} f_1(t) \tag{5.11}$$

Derivando esta expresión con respecto a la variable t :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b} \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{a}{b} \frac{dx}{dt} - \frac{1}{b} \frac{df_1(t)}{dt} \tag{5.12}$$

Ahora bien, si se sustituyen la ecuaciones (5.11) y (5.12) en la segunda expresión del sistema (5.10) se obtiene:

$$\frac{1}{b} \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{a}{b} \frac{dx}{dt} - \frac{1}{b} \frac{df_1(t)}{dt} = cx + d \left(\frac{1}{b} \frac{dx}{dt} - \frac{a}{b} x - \frac{1}{b} f_1(t) \right)$$

Reacomodando los términos de la anterior expresión:

$$\frac{1}{b} \frac{d^2x}{dt^2} - \left(\frac{a+d}{b} \right) \frac{dx}{dt} + \left(\frac{ad-bc}{b} \right) x = \frac{1}{b} \left(\frac{df_1(t)}{dt} - df_1(t) \right)$$

Multiplicando por b se tiene:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (a+d) \frac{dx}{dt} + (ad-bc)x = \frac{df_1(t)}{dt} - df_1(t) \quad (5.13)$$

Si $B = -(a+d)$, $C = ad-bc$, y $\varphi(t) = \frac{df_1(t)}{dt} - df_1(t)$, entonces la ecuación (5.13) puede ser tratada como una *ecuación diferencial lineal no homogénea de segundo orden*, la cual puede resolverse con la metodología vista en la sección 3.4. Nuevamente al igual que en el caso del sistema autónomo (5.4), la solución del sistema (5.10) reducido a la expresión (5.13), es una pareja de ecuaciones biparamétricas $x(t) = \varphi(t, c_1, c_2)$ e $y(t) = \psi(t, c_1, c_2)$

En el siguiente ejemplo, se muestra la aplicación del algoritmo antes expuesto

Ejemplo 3.- Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y + t \\ \frac{dy}{dt} &= x - t \end{aligned}$$

Solución.- Despejando la variable y:

$$y = t - x'$$

derivando esta expresión con respecto a t:

$$y' = 1 - x''$$

sustituyendo y y su derivada en la segunda ecuación del sistema, se tiene:

$$1 - x'' = x - t$$

reacomodando términos se obtiene:

$$x'' + x = t + 1$$

Aplicando los métodos vistos en la sección 3.4 se encuentra que la integral general de esta *ecuación diferencial no-homogénea de segundo orden* es:

$$y(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t) + t + 1$$

para obtener $y(t)$, basta con sustituir esta última expresión en $x = y' + t$, obteniéndose:

$$x(t) = -c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t) + 2t + 1$$

las ecuaciones paramétricas $x(t) \wedge y(t)$ antes deducidas, representan la solución general del sistema autónomo dado.

ALGORITMO MATRICIAL DE RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE n ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

Un sistema de ecuaciones diferenciales lineal con coeficientes constantes de la forma:

$$\frac{dx_i}{dx} = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + f_i(t) \quad (i=1,2,3,\dots,n) \quad (5.14)$$

donde las x_i son las variables dependientes y las a_{ij} son constantes en \mathfrak{R} , puede representarse en forma matricial de la forma:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \Phi \quad (5.15)$$

donde

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad y \quad \frac{d\mathbf{X}}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix}$$

Aquí, \mathbf{X} , Φ y $\frac{d\mathbf{X}}{dt}$ son **vectores columna n -dimensionales** y \mathbf{A} un **matriz cuadrada** de $n \times n$, cuyos elementos $a_{ij} \in \mathfrak{R}$. Si en la ecuación (5.15) $f_1(t) = f_2(t) = \cdots = f_n(t) \equiv 0$, entonces Φ , es el vector cero $\mathbf{0}$, luego entonces el sistema (5.15) es denominado **sistema homogéneo (autónomo)** y se puede escribir de la forma:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} - \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (5.16)$$

Los siguientes teoremas relativos a la solución de *un sistema homogéneo* son válidos:

Teorema 5.1.- Si \mathbf{X} es solución del sistema lineal homogéneo (5.16), entonces $c\mathbf{X}$ donde c es una constante arbitraria, es también solución de dicho sistema.

Teorema 5.2.- La suma $\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2$ de dos soluciones \mathbf{X}_1 y \mathbf{X}_2 del sistema lineal homogéneo (5.16) es solución de dicho sistema.

Corolario de los Teoremas 5.1 y 5.2

La combinación lineal $\sum_{i=1}^n c_i \mathbf{X}_i$ de las soluciones $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \dots, \mathbf{X}_n$ del sistema lineal homogéneo con coeficientes constantes (5.16) es solución de dicho sistema.

El sistema de soluciones $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \dots, \mathbf{X}_n$ se considera *linealmente independiente* si existen unas constantes α_i (al menos una distinta de cero) tal que se cumple la identidad:

$$\alpha_1 \mathbf{X}_1 + \alpha_2 \mathbf{X}_2 + \alpha_3 \mathbf{X}_3 + \dots + \alpha_n \mathbf{X}_n \equiv \mathbf{0} \tag{5.17}$$

de aquí que, es válido el siguiente teorema:

Teorema 5.3.- Si $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \dots, \mathbf{X}_n$ son n soluciones linealmente independientes del sistema lineal homogéneo (5.16), entonces la combinación lineal $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{X}_i$ es *la solución general* de dicho sistema en el intervalo $a \leq t \leq b$. El conjunto \mathbf{X}_i es llamado *un conjunto fundamental de soluciones*.

Por ejemplo, un sistema $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + 2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = 4x_1 + 3x_2 \end{cases}$ que matricialmente esta dado $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{X}$, tiene

como soluciones a los vectores linealmente independientes $\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} e^{5t} \\ 2e^{5t} \end{bmatrix}$ y $\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$ ya que:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e^{5t} \\ 2e^{5t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5e^{5t} \\ 10e^{5t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{5t} \\ 2e^{5t} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$$

por lo tanto la combinación lineal $\mathbf{X} = c_1 \mathbf{X}_1 + c_2 \mathbf{X}_2$ también será solución del sistema. Por lo tanto la solución general está dada por:

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{bmatrix} e^{5t} \\ 2e^{5t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$$

Teorema 5.4.- Si el sistema lineal homogéneo de coeficientes constantes (5.16), tiene una solución compleja $\mathbf{X} = \mathbf{U} + \mathbf{V}i$, las partes real $Re\{\mathbf{X}\} = \mathbf{U} = [u_j]$ e imaginaria $Im\{\mathbf{X}\} = \mathbf{V} = [v_j]$ son por separado, soluciones de dicho sistema.

Estos fundamentos sirven de base para sustentar la aplicación del algoritmo que a continuación se expondrá.

La solución del sistema lineal homogéneo con coeficientes constantes $\frac{d\mathbf{X}}{dt} - \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{0}$ se propondrá

de la forma: $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \alpha_1 e^{\lambda t} \\ \vdots \\ \alpha_n e^{\lambda t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} e^{\lambda t}$, donde $x_1 = \alpha_1 e^{\lambda t}, x_2 = \alpha_2 e^{\lambda t}, \dots, x_n = \alpha_n e^{\lambda t}$ y $\alpha_j, \lambda \in \mathfrak{R}$.

Si $\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$, entonces $\mathbf{X} = \tilde{\mathbf{A}}e^{\lambda t}$ y su derivada es $\frac{d\mathbf{X}}{dx} = \tilde{\mathbf{A}}\lambda e^{\lambda t}$. Sustituyendo estas dos últimas

expresiones en el sistema lineal y dividiendo entre el factor $e^{\lambda t}$, se tiene la siguiente ecuación matricial:

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{0} \quad (5.18)$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad de $n \times n$. Para que la matriz no trivial $\tilde{\mathbf{A}}$ satisfaga la ecuación (5.18) es necesario y suficiente que la matriz $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ sea singular, es decir que:

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$$

o en forma escalar se tiene el siguiente polinomio en el parámetro variable λ :

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{nn} - \lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad (5.19)$$

esta ecuación recibe el nombre de **polinomio característico** o **ecuación característica**. Para cada raíz λ_i se determina la matriz diferente de cero $\tilde{\mathbf{A}}^{(i)}$. A estas raíces se les conoce como **valores propios**, **eigenvalores** ó **autovalores**. Son posibles los siguientes casos:

CASO I: RAÍCES REALES Y DISTINTAS

$$\mathbf{X}_1 = \tilde{\mathbf{A}}^{(1)} e^{\lambda_1 t}, \mathbf{X}_2 = \tilde{\mathbf{A}}^{(2)} e^{\lambda_2 t}, \mathbf{X}_3 = \tilde{\mathbf{A}}^{(3)} e^{\lambda_3 t}, \dots, \mathbf{X}_n = \tilde{\mathbf{A}}^{(n)} e^{\lambda_n t}$$

Estas soluciones son linealmente independientes, luego entonces, por el teorema 5.3, se tiene que la solución general del sistema lineal dado esta dada por:

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^n c_i \tilde{\mathbf{A}}^{(i)} e^{\lambda_i t} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (5.20)$$

donde c_i son constantes arbitrarias y:

$$\tilde{\mathbf{A}}^{(i)} = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(i)} \\ \alpha_2^{(i)} \\ \vdots \\ \alpha_n^{(i)} \end{bmatrix}$$

a estos vectores se les conoce como *vectores propios* o *eigenvectores*.

CASO II: RAÍCES COMPLEJAS

A la raíz compleja $\lambda_j = \alpha + \beta i$ de la ecuación característica (5.19) le corresponde la solución:

$$\mathbf{X}_j = \tilde{\mathbf{A}}^{(j)} e^{\lambda_j t} \quad (5.21)$$

la cual si todos los coeficientes a_{ij} son reales, puede ser sustituida por dos soluciones reales: por la parte real $Re[\mathbf{X}_j]$ y por la parte imaginaria $Im\{\mathbf{X}_j\}$ de la solución \mathbf{X}_j . La raíz compleja conjugada $\lambda_{j+1} = \alpha - \beta i$ no genera nuevas soluciones linealmente independientes.

CASO III: RAÍCES REALES MÚLTIPLES

Si la ecuación característica (5.19) tiene un valor propio λ_s de multiplicidad γ , se puede afirmar que la solución general del sistema lineal homogéneo con coeficientes constantes $\frac{d\mathbf{X}}{dt} - \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{0}$ tiene la forma:

$$\mathbf{X} = \left(c_1 \tilde{\mathbf{A}}_0^{(s)} + c_2 \tilde{\mathbf{A}}_1^{(s)} t + \dots + c_\gamma \tilde{\mathbf{A}}_{\gamma-1}^{(s)} t^{\gamma-1} \right) e^{\lambda_s t} \quad (5.22)$$

donde $\mathbf{A}_i^{(s)} = \begin{bmatrix} \alpha_{1i}^{(s)} \\ \vdots \\ \alpha_{ni}^{(s)} \end{bmatrix}$ y las $\alpha_{ij}^{(s)}$ son constantes.

Ejemplo 4.- Resuelva el siguiente sistema lineal homogéneo:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1 - 4x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= 2x_1 - 5x_2 \end{aligned}$$

Solución.- El sistema, en forma matricial tiene la forma:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} - \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \mathbf{0}$$

donde la solución propuesta viene dada por $\mathbf{X} = \tilde{\mathbf{A}}e^{\lambda t}$ y cuya derivada, por $\mathbf{X}' = \tilde{\mathbf{A}}\lambda e^{\lambda t}$. Ahora bien, la ecuación característica está dada por la expresión:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 2 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

que simplificada es el polinomio $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$, cuyos valores propios son $\lambda_1 = -3 \wedge \lambda_2 = -1$

Para el *eigenvalor* $\lambda_1 = -3$, $\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \end{bmatrix} e^{-3t}$ y $\mathbf{X}_1' = \begin{bmatrix} -3\alpha_1' \\ -3\alpha_2' \end{bmatrix} e^{-3t}$; Sustituyendo en la ecuación matricial lineal, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} -3\alpha_1' \\ -3\alpha_2' \end{bmatrix} e^{-3t} - \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \end{bmatrix} e^{-3t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

simplificando:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1' - \alpha_2' \\ \alpha_1' - \alpha_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

el cual es un sistema algebraico indeterminado de donde resulta que, $\alpha_1' = \alpha_2'$. Si arbitrariamente $\alpha_1' = 1$, entonces la solución para este *eigenvalor* esta dada por: $\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t}$. Por otro lado para

el *eigenvalor* $\lambda_2 = -1$ se tiene $\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1'' \\ \alpha_2'' \end{bmatrix} e^{-t}$ y $\mathbf{X}_1' = \begin{bmatrix} -\alpha_1'' \\ -\alpha_2'' \end{bmatrix} e^{-t}$; Sustituyendo en la ecuación matricial lineal, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} -\alpha_1'' \\ -\alpha_2'' \end{bmatrix} e^{-t} - \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1'' \\ \alpha_2'' \end{bmatrix} e^{-t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Simplificando:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1'' - 2\alpha_2'' \\ \alpha_1'' - 2\alpha_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de donde resulta que, $\alpha_1'' = 2\alpha_2''$. Si arbitrariamente $\alpha_1'' = 1$, entonces la solución para este *eigenvalor* esta dada por: $\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} e^{-t}$.

Finalmente por el teorema 5.3, se tiene que, la solución general del sistema lineal homogéneo dado es:

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} e^{-t}$$

en forma escalar las soluciones del sistema se pueden expresar como:

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-t} \\ x_2(t) = c_1 e^{-3t} + \frac{1}{2} c_2 e^{-t} \end{cases}$$

Ejemplo 5.- Resuelva el siguiente sistema lineal homogéneo:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= 2x_1 + 2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -4x_1 - 2x_2 \end{aligned}$$

Solución.- El sistema, en forma matricial tiene la forma:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \mathbf{0}$$

donde la solución propuesta viene dada por $\mathbf{X} = \tilde{\mathbf{A}}e^{\lambda t}$ y cuya derivada, por $\mathbf{X}' = \tilde{\mathbf{A}}\lambda e^{\lambda t}$. Ahora bien, la ecuación característica está dada por la expresión:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ -4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

que simplificada es el polinomio $\lambda^2 + 4 = 0$, cuyos valores propios son: $\lambda_{1,2} = \pm 2i$. Luego entonces, para el *eigenvalor imaginario* $\lambda_1 = 2i$ (que es el único que se va a manejar), se tienen:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} e^{2it} \quad \text{y} \quad \mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 2i\alpha_1 \\ 2i\alpha_2 \end{bmatrix} e^{2it}$$

Sustituyendo en la ecuación matricial lineal, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 2i\alpha_1 \\ 2i\alpha_2 \end{bmatrix} e^{2it} - \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} e^{2it} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

simplificando:

$$\begin{bmatrix} (1-i)\alpha_1 + \alpha_2 \\ 2\alpha_1 + (1+i)\alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A la ecuación $(1-i)\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ por ejemplo, le satisfacen los valores $\alpha_1 = -1 \wedge \alpha_2 = 1-i$, por lo que una solución del sistema matricial lineal es: $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1-i \end{bmatrix} e^{2it}$. De aquí en adelante se manejan

las ecuaciones escalares: $\begin{cases} x_1(t) = -e^{2it} \\ x_2(t) = (1-i)e^{2it} \end{cases}$. Aplicando la identidad de Euler $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$,

se tiene:

$$\begin{cases} x_1(t) = -\cos 2t - i \sin 2t \\ x_2(t) = (\cos 2t + \sin 2t) + i(\sin 2t - \cos 2t) \end{cases}$$

Tomando sólo las partes real e imaginaria con las constantes arbitrarias correspondientes, finalmente se obtiene la solución general del sistema lineal homogéneo:

$$\begin{cases} x_1(t) = -c_1 \cos 2t - c_2 \sin 2t \\ x_2(t) = c_1 (\cos 2t + \sin 2t) - c_2 (\cos 2t - \sin 2t) \end{cases}$$

Ejemplo 3.- Resuelva el siguiente sistema lineal homogéneo:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 3x_1 - 5x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = 5x_1 - 7x_2 \end{cases}$$

Solución.- El sistema, en forma matricial tiene la forma:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} - \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \mathbf{0}$$

donde la solución propuesta viene dada por $\mathbf{X} = (\tilde{\mathbf{A}}_0^{(s)} + \tilde{\mathbf{A}}_1^{(s)}t)e^{\lambda_s t}$ y cuya derivada está dada por: $\mathbf{X}' = (\lambda_s \tilde{\mathbf{A}}_0^{(s)} + \lambda_s \tilde{\mathbf{A}}_1^{(s)}t + \tilde{\mathbf{A}}_1^{(s)})e^{\lambda_s t}$. Ahora bien, la ecuación característica está dada por la expresión:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -5 \\ 5 & -7-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

que simplificada es el polinomio: $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$, cuyos *eigenvalores* son: $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$.

Luego entonces, para este *eigenvalor* múltiple, se tienen:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \alpha_1' + \alpha_1''t \\ \alpha_2' + \alpha_2''t \end{bmatrix} e^{-2t} \quad \text{y} \quad \mathbf{X}' = \begin{bmatrix} -2\alpha_1' + \alpha_1'' - 2\alpha_1''t \\ -2\alpha_2' + \alpha_2'' - 2\alpha_2''t \end{bmatrix} e^{-2t}$$

Sustituyendo en la ecuación matricial lineal, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} -2\alpha_1' + \alpha_1'' - 2\alpha_1''t \\ -2\alpha_2' + \alpha_2'' - 2\alpha_2''t \end{bmatrix} e^{-2t} - \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 5 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1' + \alpha_1''t \\ \alpha_2' + \alpha_2''t \end{bmatrix} e^{-2t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

simplificando:

$$\begin{bmatrix} -5\alpha_1' + \alpha_1'' + 5\alpha_2' - 5\alpha_1''t + 5\alpha_2''t \\ -5\alpha_1' + \alpha_2'' + 5\alpha_2' - 5\alpha_1''t + 5\alpha_2''t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De aquí se desprenden las siguientes ecuaciones: $-5\alpha_1'' + 5\alpha_2'' = 0$ y $5\alpha_2' - 5\alpha_1' + \alpha_1'' = 0$

de donde surgen las relaciones:

$$\begin{cases} \alpha_2'' = \alpha_1'' \\ \alpha_2' = \frac{1}{5}\alpha_1'' + \alpha_1' \end{cases}$$

permaneciendo $\alpha_1' \wedge \alpha_1''$, arbitrarios. Si $\alpha_1' = 1 \wedge \alpha_1'' = 1$, entonces $\alpha_2' = 1 \wedge \alpha_2'' = \frac{6}{5}$. Sustituyendo estos valores en la solución propuesta se tiene la solución general del sistema matricial:

$$\mathbf{X} = \left\{ c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{6}{5} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t \right\} e^{-2t}$$

que en forma escalar se obtiene la solución general del sistema lineal homogéneo:

$$\begin{cases} x_1(t) = (c_1 + c_2t)e^{-2t} \\ x_2(t) = \left(\frac{6}{5}c_1 + c_2t\right)e^{-2t} \end{cases}$$

Ejemplo 7.- Resuelva el siguiente sistema lineal homogéneo:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x + y \\ \frac{dy}{dt} &= x + 2y + z \\ \frac{dz}{dt} &= 3y - z \end{aligned}$$

Solución.- El sistema, en forma matricial tiene la forma:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} - \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \mathbf{0}$$

donde la solución propuesta viene dada por: $\mathbf{X} = \tilde{\mathbf{A}}e^{\lambda t}$ y su derivada por: $\mathbf{X}' = \tilde{\mathbf{A}}\lambda e^{\lambda t}$. Ahora bien, la ecuación característica está dada por la expresión:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

que simplificada es el polinomio $(\lambda+2)(\lambda+1)(\lambda-3)=0$, cuyos *eigenvalores* son $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = 3$. Luego entonces para el *eigenvalor* $\lambda_1 = -2$ se tienen:

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \alpha_3' \end{bmatrix} e^{-2t} \quad \text{y} \quad \mathbf{X}_1' = \begin{bmatrix} -2\alpha_1' \\ -2\alpha_2' \\ -2\alpha_3' \end{bmatrix} e^{-2t}$$

Sustituyendo en la ecuación matricial lineal, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} -2\alpha_1' \\ -2\alpha_2' \\ -2\alpha_3' \end{bmatrix} e^{-2t} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \alpha_3' \end{bmatrix} e^{-2t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Simplificando esta expresión:

$$\begin{bmatrix} -\alpha_1' - \alpha_2' \\ -\alpha_1' - 4\alpha_2' - \alpha_3' \\ -3\alpha_2' - \alpha_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aquí, puede ser utilizado *el método de Gauss* para resolver el sistema indeterminado resultante. Aplicando la matriz ampliada y simplificando se tiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

de donde es claro que $\alpha_2' = -\frac{1}{3}\alpha_3'$ y $\alpha_1' = \frac{1}{3}\alpha_3'$, permaneciendo α_3' arbitraria. Si $\alpha_3' = 3$ entonces

la solución para el eigenvalor en cuestión, es: $\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-2t}$. Procediendo de manera similar se

tienen para los eigenvalores $\lambda_2 = -1 \wedge \lambda_3 = 3$ las soluciones:

$$\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} \quad \text{y} \quad \mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} e^{3t}$$

Luego entonces la solución general del sistema matricial es:

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} e^{3t}$$

en forma escalar la solución general del sistema lineal homogéneo esta dada por:

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{-2t} - c_2 e^{-t} + c_3 e^{3t} \\ x_2(t) = -c_1 e^{-2t} + 4c_3 e^{3t} \\ x_3(t) = 3c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t} + 3c_3 e^{3t} \end{cases}$$

Por otro lado la resolución de un sistema lineal no homogéneo $\frac{d\mathbf{X}}{dt} - \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{\Phi}$, se deducirá a partir de ciertos fundamentos que a continuación se expondrán.

Sea el sistema lineal homogéneo $\frac{d\mathbf{X}}{dt} - \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{0}$. El conjunto fundamental de soluciones esta dado por: $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \dots, \mathbf{X}_n$. La solución general mediante una combinación de estas soluciones linealmente independientes es: $\mathbf{X} = c_1 \mathbf{X}_1 + c_2 \mathbf{X}_2 + c_3 \mathbf{X}_3 + \dots + c_n \mathbf{X}_n$, la cual puede escribirse como:

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} c_1 x_{11} & c_2 x_{12} & \dots & c_n x_{1n} \\ c_1 x_{21} & c_2 x_{22} & \dots & c_n x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 x_{n1} & c_2 x_{n2} & \dots & c_n x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \mathbf{\Psi}(t) \mathbf{C} \quad (5.23)$$

donde:

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ \vdots \\ x_{n3} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{X}_n = \begin{bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

A la matriz $\Psi(t)$ se le conoce como *matriz fundamental* del sistema homogéneo y tiene la propiedad de que es solución del mismo, esto es $\frac{d\Psi}{dt} - \mathbf{A}\Psi = \mathbf{0}$; además de que esta matriz es no singular, es decir que es *invertible* o que tiene *inversa*. Por otro lado es importante el siguiente teorema relativo a la solución de un sistema lineal no homogéneo con coeficientes constantes:

Teorema 5.5.- Si $\mathbf{X}_p(t)$ es una solución del sistema lineal no homogéneo de coeficientes constantes $\frac{d\mathbf{X}}{dt} - \mathbf{A}\mathbf{X} = \Phi$ en el intervalo $a \leq t \leq b$ y si $\Psi(t)$ es la solución del sistema lineal homogéneo asociado, entonces la suma $\Psi(t) + \mathbf{X}_p(t)$ es también solución del sistema lineal no homogéneo en dicho intervalo.

Ahora bien, esta solución particular $\mathbf{X}_p(t)$ puede ponerse en términos de la matriz fundamental $\Psi(t)$ de la siguiente forma:

$$\mathbf{X}_p(t) = \Psi(t) \int \Psi^{-1}(t) \Phi(t) dt \quad (5.25)$$

Teorema 5.6.- La solución general en el intervalo $a \leq t \leq b$ del sistema lineal no homogéneo $\frac{d\mathbf{X}}{dt} - \mathbf{A}\mathbf{X} = \Phi$ con coeficientes constantes a_{ij} y segundos miembros continuos $f_i(t)$ es igual a la suma de la solución general $\Psi(t)\mathbf{C}$ del sistema lineal homogéneo asociado y de la solución particular $\mathbf{X}_p(t)$ del sistema lineal no homogéneo considerado.

Esto es:

$$\mathbf{X}(t) = \Psi(t)\mathbf{C} + \Psi(t) \int \Psi^{-1}(t) \Phi(t) dt \quad (5.26)$$

Debido a la propiedad de linealidad del operador integral, este resultado puede ser extendido a el caso de que la función $\Phi(t)$ sea la suma algebraica de varias funciones continuas de t , es decir:

$$\Phi(t) = \Phi_1(t) + \Phi_2(t) + \Phi_3(t) + \dots + \Phi_m(t) \quad (5.27)$$

entonces la relación (5.26) toma la forma:

$$\mathbf{X}(t) = \Psi(t)\mathbf{C} + \Psi(t) \int \Psi^{-1}(t) \left\{ \sum_{j=1}^m \Phi_j(t) \right\} dt$$

ó de otra manera:

$$\mathbf{X}(t) = \Psi(t)\mathbf{C} + \sum_{j=1}^m \left\{ \Psi(t) \int \Psi^{-1}(t) \Phi_j(t) dt \right\} \quad (5.28)$$

Ejemplo 8.- Resuelva el siguiente sistema lineal no homogéneo:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_1 - 4x_2 + e^{-2t} \\ \frac{dx_2}{dt} &= 2x_1 - 5x_2 + 2e^{-t}\end{aligned}$$

Solución.- Primeramente se resolverá el sistema homogéneo asociado el cual esta dado por:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_1 - 4x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= 2x_1 - 5x_2\end{aligned}\quad \text{ó en forma matricial} \quad \frac{d\mathbf{X}}{dt} - \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \mathbf{0}$$

Es evidente que este problema ya fue resuelto anteriormente; la solución general de este sistema homogéneo es:

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} e^{-t}$$

Ahora bien, la matriz fundamental del sistema Ψ , esta dada por $\Psi(t) = \begin{bmatrix} e^{-3t} & e^{-t} \\ e^{-3t} & \frac{1}{2}e^{-t} \end{bmatrix}$. Para calcular la inversa de esta matriz, es necesario que se apliquen, la matriz ampliada, las operaciones de renglón necesarias y el método de Gauss-Jordan¹ Aplicando todas estas herramientas se tiene:

$$\Psi^{-1}(t) = \begin{bmatrix} -e^{-3t} & 2e^{3t} \\ 2e^t & -2e^t \end{bmatrix}$$

Por otro lado, la matriz de los segundos miembros, es decir Φ , esta dada por $\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ 2e^{-t} \end{bmatrix}$.

Ahora se calculará la integral de la ecuación (5.26); para ello, es necesario el siguiente producto:

$$\Psi^{-1}\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-3t} & e^{-t} \\ e^{-3t} & \frac{1}{2}e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ 2e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-5t} + 2e^{-2t} \\ e^{-5t} + e^{-2t} \end{bmatrix}$$

luego entonces:

$$\int \Psi^{-1}(t)\Phi(t) dt = \int \begin{bmatrix} e^{-5t} + 2e^{-2t} \\ e^{-5t} + e^{-2t} \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} \int e^{-5t} dt + \int 2e^{-2t} dt \\ \int e^{-5t} dt + \int e^{-2t} dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5}e^{-5t} - e^{-2t} \\ -\frac{1}{5}e^{-5t} - \frac{1}{2}e^{-2t} \end{bmatrix}$$

por lo que:

$$\Psi(t) \int \Psi^{-1}(t)\Phi(t) dt = \begin{bmatrix} e^{-3t} & e^{-t} \\ e^{-3t} & \frac{1}{2}e^{-t} \end{bmatrix}_{2 \times 2} \begin{bmatrix} -\frac{1}{5}e^{-5t} - e^{-2t} \\ -\frac{1}{5}e^{-5t} - \frac{1}{2}e^{-2t} \end{bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{-3t} - e^{-5t} - \frac{1}{5}e^{-6t} - \frac{1}{5}e^{-8t} \\ -\frac{1}{4}e^{-3t} - e^{-5t} - \frac{1}{10}e^{-6t} - \frac{1}{5}e^{-8t} \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

¹ El estudiante puede consultar estos procedimientos en la bibliografía recomendada al final del Capítulo.

donde los subíndices de las matrices indican su orden (para evitar confusiones). Por lo tanto la solución general del sistema lineal no homogéneo está dada por la siguiente expresión matricial:

$$\mathbf{X}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{-3t} - e^{-5t} - \frac{1}{5}e^{-6t} - \frac{1}{5}e^{-8t} \\ -\frac{1}{4}e^{-3t} - e^{-5t} - \frac{1}{10}e^{-6t} - \frac{1}{5}e^{-8t} \end{bmatrix}$$

o en forma escalar:

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} - e^{-5t} - \frac{1}{5}e^{-6t} - \frac{1}{5}e^{-8t} \\ x_2(t) = c_1 e^{-3t} + \frac{1}{2}c_2 e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-3t} - e^{-5t} - \frac{1}{10}e^{-6t} - \frac{1}{5}e^{-8t} \end{cases}$$



Ejercicios Suplementarios

Sección 5.2 Ejercicios 5.1

I

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones, aplicando *el método de reducción*.

1.- $\frac{dx}{dt} = 2x + 2y$
 $\frac{dy}{dt} = -4x - 2y$

2.- $\frac{dx}{dt} = 5x + 4y$
 $\frac{dy}{dt} = -3x - 2y$

3.- $\frac{dx}{dt} = 3x + 2y$
 $\frac{dy}{dt} = 4x + y$

4.- $\frac{dx}{dt} = x + 3y - t$
 $\frac{dy}{dt} = 2x - y + t^2$

5.- $\frac{dp}{dt} = p + q + s \operatorname{en}(t)$
 $\frac{dq}{dt} = 2p - q + \cos(t)$

6.- $\frac{dx}{dt} = 3x + 7y + e^{-2t}$
 $\frac{dy}{dt} = x - 3y - e^{-t}$

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones, aplicando *el algoritmo matricial*.

1.- $\frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + 2x_2$
 $\frac{dx_2}{dt} = x_1 + 3x_2$

7.- $\frac{dx_1}{dt} = x_1 - 3x_2 + \sec(t)$
 $\frac{dx_2}{dt} = 2x_1 + x_2$

$$2.- \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 4x_1 + 2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

$$3.- \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -3x_1 - 5x_2 \end{cases}$$

$$4.- \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_1 - 2x_2 + 1 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + 4x_2 - 1 \end{cases}$$

$$5.- \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 3x_1 - x_2 + e^{-3t} \\ \frac{dx_2}{dt} = 9x_1 - 3x_2 - 4e^{-3t} \end{cases}$$

$$6.- \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 + \text{sen}(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2 - \text{cos}(t) \end{cases}$$

$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_1 - x_2$$

$$8.- \frac{dx_2}{dt} = -2x_2 + 3x_3$$

$$\frac{dx_3}{dt} = -x_1 + 3x_2 - x_3$$

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 + 2x_3$$

$$9.- \frac{dx_2}{dt} = 3x_1 - 4x_2 + x_3$$

$$\frac{dx_3}{dt} = -2x_1 + 5x_2 + 6x_3$$

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2 - 2$$

$$10.- \frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2 + 3$$

$$\frac{dx_3}{dt} = 3x_3 + e^{2t}$$

$$\frac{dx_1}{dt} = 3x_1 - x_2 - x_3 + e^{2t}$$

$$11.- \frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2 - x_3 + 2e^t$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_1 - x_2 + x_3 - e^t$$

$$\frac{dx_1}{dt} = -4x_1 + 3x_2 + \text{cos}(2t)$$

$$12.- \frac{dx_2}{dt} = -x_2 + x_3 + \text{sen}(2t)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = -5x_1 + 5x_2$$



“Los matemáticos no estudian objetos, sino relaciones entre los objetos. Así, ellos son libres de reemplazar algunos objetos por otros siempre y cuando las relaciones permanezcan inalteradas. El contenido para ellos es irrelevante: ellos sólo están interesados en la forma”
Poincaré, Henri



EL PLANO DE FASES. PUNTOS DE REPOSO

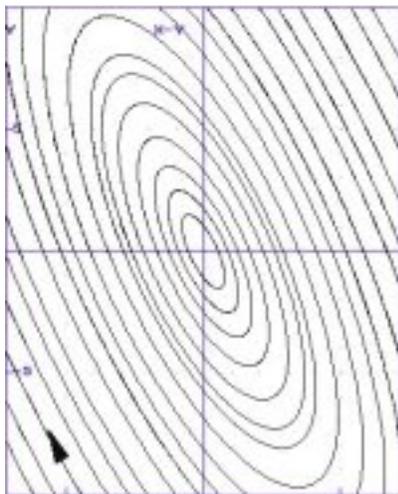
Supóngase que del sistema autónomo (5.4) se hace $f(x, y) = ax + by$ y $g(x, y) = cx + dy$, entonces se obtiene el sistema:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y)\end{aligned}$$

Si se aplica la *regla de la cadena* se obtiene el sistema equivalente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)} \quad (5.28)$$

Como se vio anteriormente, la solución general del sistema (5.4) es una pareja de funciones $x(t) \wedge y(t)$ que dependen del *parámetro* t y de las *constantes arbitrarias* $c_1 \wedge c_2$, lográndose en los planos xt y yt *familias de curvas* o *curvas integrales*. Ahora bien, es posible eliminar el parámetro t de las funciones $x(t) \wedge y(t)$ obteniéndose una familia de curvas en el plano xy ; a estas curvas se les conoce como *trayectorias* y al plano xy que las contiene se le denomina *plano de fases*, donde $x(t) \wedge y(t)$ son sus *fases*. A la ecuación (5.28) se le conoce también como *la ecuación del plano de fases*.



El plano de fases es muy útil en la interpretación del comportamiento de las variables involucradas en un fenómeno que puede ser modelado a través del sistema (5.4). En la figura de la izquierda, se muestran algunas trayectorias de un sistema en el plano de fases. Más adelante se verá que cuando las trayectorias son curvas cerradas, éstas se refieren a soluciones periódicas del sistema en cuestión.

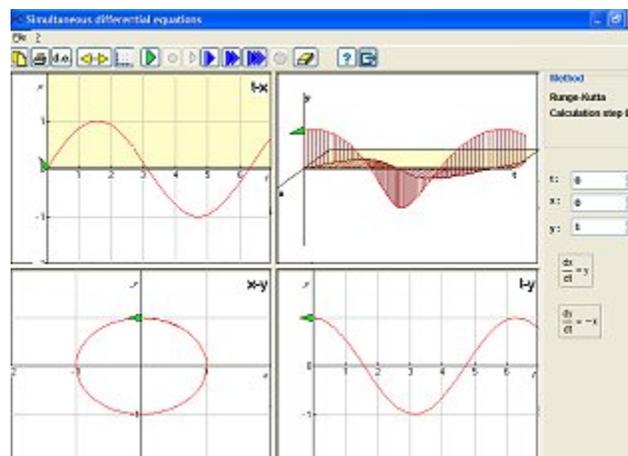
La importancia de los métodos cualitativos introducidos por Poincaré radica en que, a pesar de no tener la expresión analítica de las *trayectorias* en el plano de fases o incluso de las *curvas integrales*, sí es posible comprender el comportamiento de las fases $x(t) \wedge y(t)$ en las proximidades de los estados iniciales del fenómeno e incluso analizar su *estabilidad*.

Es evidente que el sistema autónomo (5.4) admite la *solución trivial* $x \equiv 0 \wedge y \equiv 0$; geoméricamente esta solución representa el origen de coordenadas en el plano de fases. A esta solución se le conoce también como *solución de equilibrio* y al punto $(0,0)$ como *punto singular, punto crítico* o simplemente *punto de reposo*. Aunque también pueden ser puntos de reposo aquellos valores x e y tales que $g(x,y) \equiv 0 \wedge f(x,y) \equiv 0$, siendo estas últimas, expresiones más generales que la forma lineal dada por el sistema (5.3). La solución de equilibrio *caracteriza la estabilidad del sistema en cuestión*.

Cabe señalar que, se han analizado las características analíticas y geométricas de sistemas lineales no autónomos y autónomos como los sistemas (5.2) y (5.3), pero es dable el análisis cualitativo de casos más generales como el dado por el sistema (5.1). Para estos casos también es aplicable el análisis de las trayectorias en el plano de fases. Por ejemplo, existen casos en los que hay más de un punto de reposo.

Actualmente existen muchos softwares en diversos lenguajes de programación como los Applets de Java, que fácilmente visualizan el plano de fases y sus trayectorias. Por ejemplo, si un sistema de ecuaciones diferenciales (5.4) representa el fenómeno de las oscilaciones de un sistema físico *masa-resorte*, las fases serían la posición $x(t)$ y la velocidad $y(t)$. En el plano de fases se vería con claridad, como se comportan estas magnitudes en torno a la posición de equilibrio, por ejemplo, cuándo la velocidad es máxima, etc.

El software Graphic Calculus de VUsoft[©], creado por **Piet van Blockland**, **Carel van de Giessen** y por **David Tall**, es una extraordinaria herramienta que permite visualizar el plano de fases para un sistema lineal de ecuaciones diferenciales y así poder hacer un análisis cualitativo de las soluciones del mismo. La versión más reciente es la 3.00 para Windows XP[©]. Es muy versátil y fácil de usar.



Graphic Calculus for Windows XP[©]

CLASIFICACIÓN DE LOS PUNTOS DE REPOSO EN UN SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEAL AUTÓNOMO CON DOS VARIABLES DEPENDIENTES

Analícese las trayectorias en un ε -entorno al punto de reposo $x \equiv 0 \wedge y \equiv 0$ del sistema lineal autónomo

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax + by \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy\end{aligned}$$

donde $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$. Como una solución de este sistema tiene la forma:

$$x(t) = \alpha_1 e^{k_1 t} \wedge y(t) = \alpha_2 e^{k_2 t}$$

entonces, *el polinomio característico* asociado a dicho sistema es:

$$\begin{vmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{vmatrix} = 0 \quad (5.29)$$

ó bien:

$$k^2 - (a+d)k + (ad - bc) = 0 \quad (5.30)$$

para ciertas constantes $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ que se determinan con el algoritmo antes expuesto.

La naturaleza geométrica de los puntos de reposo depende de las raíces del polinomio característico (5.30) en donde son posibles los siguientes casos:

CASO I RAÍCES REALES Y DISTINTAS

La solución general del sistema tiene la forma: $\begin{cases} x(t) = c_1 \alpha_1 e^{k_1 t} + c_2 \beta_1 e^{k_2 t} \\ y(t) = c_1 \alpha_2 e^{k_1 t} + c_2 \beta_2 e^{k_2 t} \end{cases}$, donde $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ y

$\beta_1 \wedge \beta_2$ se determinan por el algoritmo ya estudiado. Aquí, se presentan los siguientes casos:

a) $k_1 < 0$ y $k_2 < 0$. Las raíces son reales y *negativas*, el punto de reposo es un *nodo asintóticamente estable*.

Ejemplo 1

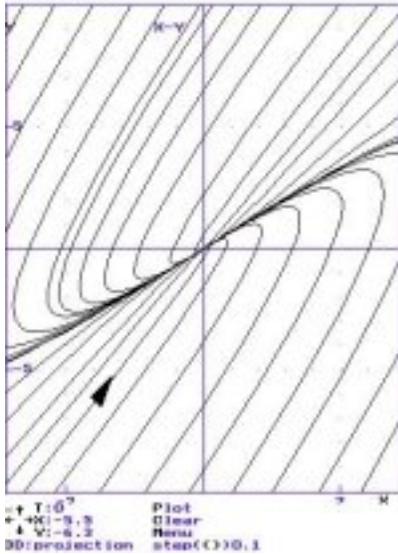
Analícese la naturaleza del punto de reposo del sistema:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x - 4y \\ \frac{dy}{dt} &= 2x - 5y\end{aligned}$$

Solución.- El polinomio característico asociado al sistema es $k^2 + 4k + 3 = 0$, sus raíces son $k_1 = -3$ y $k_2 = -1$, ambas negativas, por lo tanto el punto de reposo es un nodo estable.

La solución analítica, aplicando el algoritmo empleado en los ejemplos anteriores, es:

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-t} \\ y(t) = c_1 e^{-3t} + \frac{1}{2} c_2 e^{-t} \end{cases} \quad (5.31)$$



El punto de reposo es *asintóticamente estable* debido a los factores exponenciales $e^{-3t} \wedge e^{-t}$ que figuran en (5.31). Todos los puntos de todas las trayectorias que se encuentran inicialmente para $t = t_0$ en un ε -entorno se *aproximan* al punto de reposo $(0,0)$ para valores posteriores de t . Cuando $t \rightarrow \infty$ todos estos tienden también a dicho punto, es decir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad \wedge \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$$

Por esta razón, se dice que la solución general es también asintóticamente estable.

En la figura de la izquierda se pueden observar varias trayectorias y la punta de flecha indica la dirección de los puntos que se dirigen al punto de reposo, para valores crecientes del parámetro t

b) $k_1 > 0$ y $k_2 > 0$. Las raíces son reales y *positivas*, el punto de reposo es un *nodo inestable*.

Ejemplo 2

Analícese la naturaleza del punto de reposo del sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - 3y \\ \frac{dy}{dt} &= 2y \end{aligned}$$

Solución.- El polinomio característico asociado al sistema es $k^2 - 3k + 2 = 0$ cuyas raíces son $k_1 = 1$ y $k_2 = 2$. Como son ambas positivas, el punto de reposo es un nodo inestable.

La solución analítica está dada por las ecuaciones:

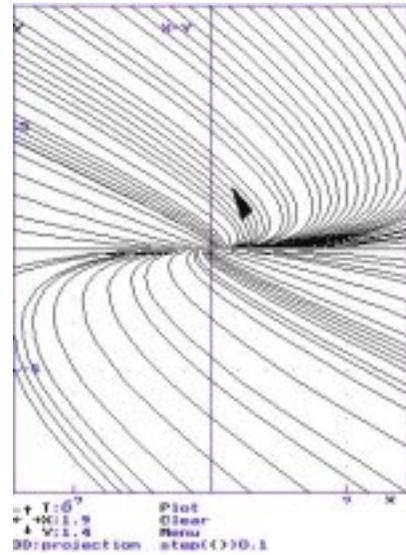
$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} \\ y(t) = -\frac{1}{3} c_2 e^{2t} \end{cases} \quad (5.32)$$

El punto de reposo es *nodo inestable* debido a los factores exponenciales $e^x \wedge e^{2x}$ que figuran en las ecuaciones (5.32). Todos los puntos de todas las trayectorias que se encuentran inicialmente para $t = t_0$ en un ε -entorno se *alejan* del punto de reposo $(0,0)$ para valores posteriores de t . Cuando $t \rightarrow \infty$ todas estas tienden también a *alejarse* dicho punto, es decir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty \wedge \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty$$

Por esta razón, se dice que la solución general es también *inestable*.

En la figura de la derecha se pueden observar varias trayectorias y la punta de flecha indica la dirección de los puntos que se *alejan* del punto de reposo, para valores crecientes del parámetro t

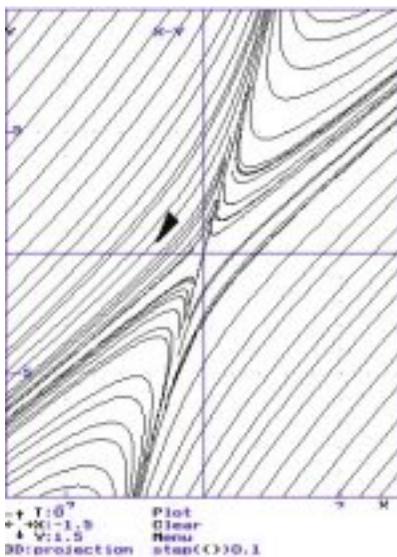


c) $k_1 < 0$ y $k_2 > 0$. Las raíces son reales y de *signos contrarios*; el punto de reposo es un *nodo inestable o punto silla*.

Ejemplo 3

Analícese la naturaleza del punto de reposo del sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 7x - 3y \\ \frac{dy}{dt} &= 6x - 4y \end{aligned}$$



Solución.- El polinomio característico asociado al sistema es $k^2 - 3k - 10 = 0$. Sus raíces reales son: $k_1 = -2$ y $k_2 = 5$. La solución analítica está dada por las ecuaciones:

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{5t} \\ y(t) = 3c_1 e^{-2t} + \frac{2}{3}c_2 e^{5t} \end{cases}$$

Es interesante observar en la gráfica de la izquierda, que hay puntos en las trayectorias que parecen aproximarse al punto de reposo $(0,0)$, pero al mismo tiempo se alejan de él. Esto es debido a que el factor e^{-2t} hace tender a los puntos de la trayectoria hacia el punto de reposo mientras que el factor e^{5t} hace que éstos se alejen de dicho punto crítico. Por esta razón, el punto de reposo se considera *inestable*. Se le ha denominado

punto de silla, puesto que las trayectorias se asemejan a las *curvas de nivel* de la famosa superficie cuadrática “*silla de montar*”. Todos los puntos de todas las trayectorias que se encuentran inicialmente para $t = t_0$ en un ε -entorno se *alejan* del mismo entorno y del punto de reposo $(0,0)$ para valores posteriores de t . Ahora bien, para valores muy grandes de t , es decir, cuando $t \rightarrow \infty$ ó $t \rightarrow -\infty$, sucede que: $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty$. Por esta razón, se dice que la solución general también es *inestable*.

CASO II RAÍCES COMPLEJAS

La solución general del sistema tiene la forma:
$$\begin{cases} x(t) = e^{pt} [c_1 \cos(qt) + c_2 \sin(qt)] \\ y(t) = e^{pt} [c_1^* \cos(qt) + c_2^* \sin(qt)] \end{cases}$$
 donde $c_1 \wedge c_2$

son constantes arbitrarias, $c_1^* \wedge c_2^*$ es cierta combinación lineal de las constantes anteriores y $p \pm qi$ son las raíces complejas conjugadas del polinomio característico. Aquí, se presentan los siguientes casos:

a) $k_{1,2} = p \pm qi$, $p < 0$, $q \neq 0$. Las raíces del polinomio característico son complejas, pero p es *negativa*. El punto de reposo es un *foco estable*.

Ejemplo 4

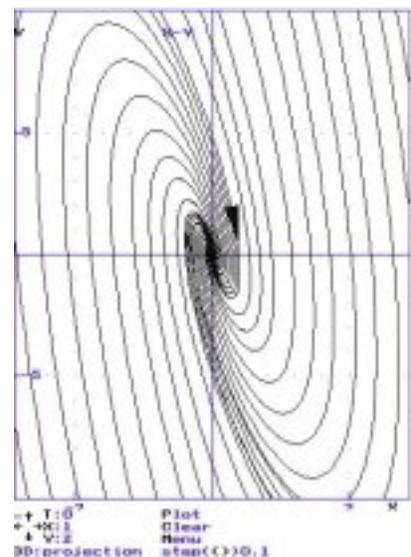
Analícese la naturaleza del punto de reposo del sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x + 2y \\ \frac{dy}{dt} &= -9x - 5y \end{aligned}$$

Solución.- El polinomio característico asociado al sistema es $k^2 + 4k + 13 = 0$ Sus raíces complejas son $k_1 = -2 + 3i$ y $k_2 = -2 - 3i$. Como p es *negativa*, el punto de reposo es un *foco estable*. La solución analítica está dada por las ecuaciones:

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{-2t} \cos 3t + c_2 e^{-2t} \sin 3t \\ y(t) = \frac{3}{2}(c_2 - c_1) e^{-2t} \cos 3t - \frac{3}{2}(c_2 + c_1) e^{-2t} \sin 3t \end{cases}$$

Como se puede observar en la figura de la derecha, las trayectorias son *espirales* cuyos puntos tienden al punto de reposo $(0,0)$. Todos los puntos de todas las trayectorias que se encuentran inicialmente para $t = t_0$ en un ε -entorno se *aproximan* a dicho punto, para valores posteriores de t . Esto es así, debido al factor e^{-2t} , que tiende a cero conforme crece t , a pesar de la *periodicidad* de las funciones $\cos 3t$ y $\sin 3t$. Se dice entonces que con este comportamiento, el punto de reposo es un *foco asintóticamente estable*. Cuando $t \rightarrow \infty$ todas estas trayectorias tienden también a “*acercarse*” a dicho punto, es



decir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad \wedge \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$$

Por esta razón, se dice que la solución general es *asintóticamente estable*.

b) $k_{1,2} = p \pm qi$, $p > 0$, $q \neq 0$. Las raíces del polinomio característico son complejas, pero p es *positiva*. El punto de reposo es un *foco inestable*.

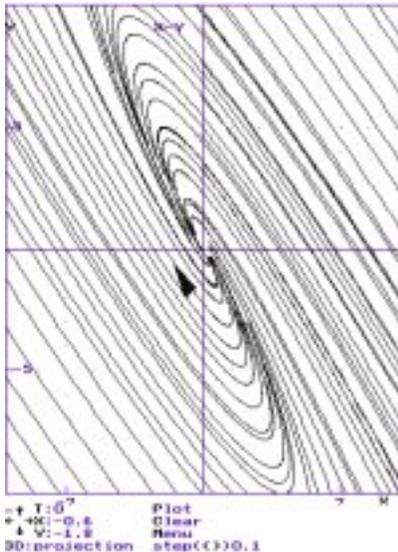
Ejemplo 5

Analícese la naturaleza del punto de reposo del sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 4x - 10y \\ \frac{dy}{dt} &= -5x - 2y \end{aligned}$$

Solución.- El polinomio característico asociado al sistema es $k^2 - 2k + 2 = 0$. Sus raíces complejas son $k_1 = 1 + i$ y $k_2 = 1 - i$. Como p es *positiva*, el punto de reposo es un *foco inestable*. La solución analítica está dada por las ecuaciones:

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^t \cos t + c_2 e^t \sin t \\ y(t) = \left(\frac{3}{10} c_1 - \frac{1}{10} c_2\right) e^t \cos t + \left(\frac{1}{10} c_1 + \frac{3}{10} c_2\right) e^t \sin t \end{cases}$$



Así como en el caso anterior, las trayectorias también son *espirales* pero ahora, todos los puntos que se encuentran inicialmente para $t = t_0$ en un ε -entorno tienden a *alejarse* del punto de reposo $(0,0)$ para valores posteriores de t . Esto es así, debido a que el factor e^t crece monótonamente al aumentar t , a pesar de la periodicidad acotada de las funciones $\sin t \wedge \cos t$. Por esta razón el punto de reposo se considera como un *foco inestable*. Cuando $t \rightarrow \infty$ todas estas trayectorias tienden también a *alejarse* de dicho punto, es decir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty \quad \wedge \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty$$

Por esta razón, se dice que la solución general es *inestable*.

c) $k_{1,2} = p \pm qi$, $p = 0$, $q \neq 0$. Las raíces del polinomio característico son complejas, pero p es igual a *ceros*. El punto de reposo es un *centro*.

Ejemplo 6

Analícese la naturaleza del punto de reposo del sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x + 2y \\ \frac{dy}{dt} &= -4x - 2y \end{aligned}$$

Solución.- El polinomio característico asociado al sistema es $k^2 + 4 = 0$. Sus raíces complejas son $k_1 = 2i$ y $k_2 = -2i$. Como p es *cero*, el punto de reposo es un *centro*. Por el resultado del **Ejemplo 2** de la sección 5.2, la solución analítica está dada por las ecuaciones:

$$\begin{cases} x(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t \\ y(t) = -c_1 (\sin 2t + \cos 2t) + c_2 (\cos 2t - \sin 2t) \end{cases}$$

Como se puede observar en la figura de la derecha, las trayectorias son *elipses* cuyos puntos giran entorno al punto de reposo $(0,0)$. Todos los puntos de todas las trayectorias *elípticas* que se encuentran inicialmente para $t = t_0$ en un ε -entorno se mantienen a cierta distancia dicho punto, para valores posteriores de t . Esto es así, debido a la *naturaleza periódica* de los factores $\sin 2t \wedge \cos 2t$. Se dice entonces que con este comportamiento, el punto de reposo es un *centro* y éste es *estable*. Cuando $t \rightarrow \infty$ todas estas trayectorias no tienden a ningún límite, es decir:



$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \cancel{\exists} \quad \wedge \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \cancel{\exists}$$

Por esta razón, se dice que la solución general es *estable* pero **no asintóticamente estable**.

CASO III RAÍCES MÚLTIPLES

La solución general del sistema tiene la forma: $\begin{cases} x(t) = (c_1 \alpha_1 + c_2 \beta_1 t) e^{\tilde{k}t} \\ y(t) = (c_1 \alpha_2 + c_2 \beta_2 t) e^{\tilde{k}t} \end{cases}$ donde $c_1 \wedge c_2$ son constantes arbitrarias, $c_1^* \wedge c_2^*$ es cierta combinación lineal de las constantes anteriores, $\tilde{k} = k_1 = k_2$ es la raíz múltiple del polinomio característico y donde $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ y $\beta_1 \wedge \beta_2$ se determinan por el algoritmo ya estudiado. Aquí, se presentan los siguientes casos:

a) $k_1 = k_2 < 0$ Las raíces del polinomio característico son *negativas*. El punto de reposo es un *nodo asintóticamente estable*.

Ejemplo 7

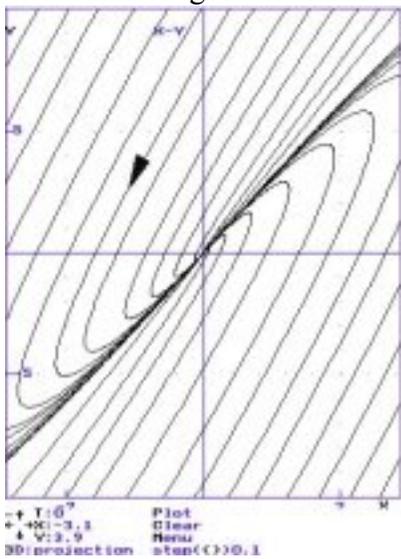
Analícese la naturaleza del punto de reposo del sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3x - 5y \\ \frac{dy}{dt} &= 5x - 7y \end{aligned}$$

Solución.- El polinomio característico asociado al sistema es $k^2 + 4k + 4 = 0$. Su raíz múltiple es $k_1 = k_2 = -2$. Como la única raíz es *negativa*, el punto de reposo es un *nodo asintóticamente estable*. La solución general del sistema tiene la forma:

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t} \\ y(t) = (c_1 - \frac{1}{5} c_2) e^{-2t} + c_2 t e^{-2t} \end{cases}$$

Este caso es geoméricamente



similar al caso I a); Aquí, el punto de reposo es también *asintóticamente estable* debido a los factores exponenciales $e^{-2t} \wedge t e^{-2t}$ en la solución analítica. Todos los puntos de todas las trayectorias que se encuentran inicialmente para $t = t_0$ en un ε -entorno se *aproximan* al punto de reposo $(0,0)$ para valores posteriores de t . Cuando $t \rightarrow \infty$ todos estos tienden también a dicho punto, es decir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad \wedge \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$$

Por esta razón, se dice que la solución general es también *asintóticamente estable*.

En la figura de la izquierda se pueden observar varias trayectorias y la punta de flecha indica la dirección de los puntos que se dirigen al punto de reposo, para valores crecientes del parámetro t

b) $k_1 = k_2 > 0$ Las raíces del polinomio característico son *positivas*. El punto de reposo es un *nodo inestable*.

Ejemplo 8

Analícese la naturaleza del punto de reposo del sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x \\ \frac{dy}{dt} &= 3x + y \end{aligned}$$

Solución.- El polinomio característico asociado al sistema es $k^2 - 2k + 1 = 0$. Su raíz múltiple es $k_1 = k_2 = 1$. Como la única raíz es *positiva*, el punto de reposo es un *nodo inestable*.

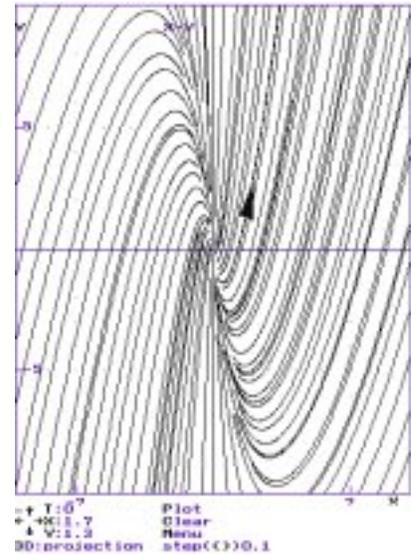
La solución general del sistema tiene la forma:
$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}c_2te^t \\ y(t) = c_1e^t + c_2te^t \end{cases}$$

El punto de reposo es *nodo inestable* debido a los factores exponenciales $e^t \wedge te^t$. Todos los puntos de todas las trayectorias que se encuentran inicialmente para $t = t_0$ en un ε -entorno se *alejan* del punto de reposo $(0,0)$ para valores posteriores de t . Cuando $t \rightarrow \infty$ todas estas tienden también a alejarse de dicho punto, es decir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty \wedge \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty$$

Por esta razón, se dice que la solución general es también *inestable*.

En la figura de la derecha se pueden observar varias trayectorias y la punta de flecha indica la dirección de los puntos que se alejan del punto de reposo, para valores crecientes del parámetro t



CASO IV RAÍZ REAL NULA

La solución general del sistema tiene la forma:
$$\begin{cases} x(t) = c_1\alpha_1 + c_2\beta_1e^{k_2t} \\ y(t) = c_1\alpha_2 + c_2\beta_2e^{k_2t} \end{cases}$$
, Aquí $k_1 = 0$ y $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ y $\beta_1 \wedge \beta_2$ se determinan por el algoritmo ya estudiado. En este caso los puntos de todas las trayectorias o se *aproximan* o se *alejan* de la recta $\alpha_1y = \alpha_2x$. Se presentan los siguientes casos:

a) $k_1 = 0, k_2 < 0$. La raíz no nula es *negativa*, el punto de reposo es un *nodo estable*.

Ejemplo 9

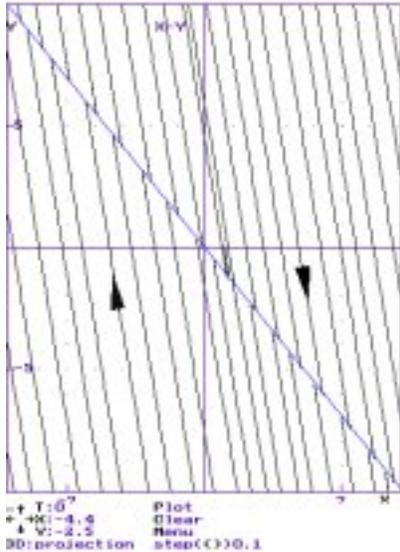
Analícese la naturaleza del punto de reposo del sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x + y \\ \frac{dy}{dt} &= -5x - 5y \end{aligned}$$

Solución.- El polinomio característico asociado al sistema es $k^2 + 4k = 0$. Sus raíces son $k_1 = 0$ y $k_2 = -4$. Cómo la raíz no nula es *negativa*, el punto de reposo es un *nodo estable*.

La solución general del sistema tiene la forma:

$$\begin{cases} x(t) = c_1 + c_2 e^{-4t} \\ y(t) = -c_1 - 5c_2 e^{-4t} \end{cases}$$



Como se puede observar en la figura de la izquierda, las trayectorias son *líneas rectas* cuyos puntos tienden al punto de reposo $(0,0)$. Todos los puntos de todas las trayectorias que se encuentran inicialmente para $t = t_0$ en un ε -entorno se *aproximan* a dicho punto, para valores posteriores de t . Cuando $t \rightarrow \infty$ todos los puntos de estas trayectorias rectilíneas se “*aproximan*” a la recta $y = -x$.

Esto es así, debido al factor e^{-4t} , que tiende a cero conforme crece t . Se dice entonces que con este comportamiento, el punto de reposo es un *nodo estable* pero no asintóticamente estable.

Por esta razón, se dice que la solución general es *estable*.

b) $k_1 = 0$ y $k_2 > 0$. La raíz no nula es *positiva*, el punto de reposo es un *nodo inestable*.

Ejemplo 10

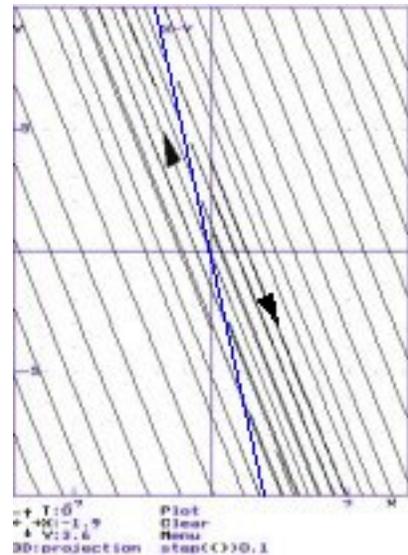
Analícese la naturaleza del punto de reposo del sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 4x + y \\ \frac{dy}{dt} &= -8x - 2y \end{aligned}$$

Solución.- El polinomio característico asociado al sistema es $k^2 - 2k = 0$. Sus raíces son $k_1 = 0$ y $k_2 = 2$. Como la raíz no nula es *positiva*, el punto de reposo es un *nodo inestable*. La solución general del sistema tiene la forma:

$$\begin{cases} x(t) = c_1 + c_2 e^{2t} \\ y(t) = -4c_1 - 2c_2 e^{2t} \end{cases}$$

Como se puede observar en la figura de la derecha, las trayectorias también son en este caso, *líneas rectas* cuyos puntos tienden al punto de reposo $(0,0)$. Ahora, todos los puntos de todas las trayectorias que se encuentran inicialmente para $t = t_0$ en un ε -entorno se *alejan* de dicho punto, para valores posteriores de t . Cuando $t \rightarrow \infty$ todos los puntos de estas trayectorias rectilíneas se



“*alejan*” de la recta $y = -4x$. Esto es así, debido al factor e^{2t} , que crece sin límite conforme crece t . Se dice entonces que con este comportamiento, el punto de reposo es un *nodo inestable*. Por esta razón, se dice que la solución general es *inestable*.



Ejercicios Suplementarios

Sección 5.3 Ejercicios 5.2

En los siguientes problemas, resuelva cada uno de los sistemas de ecuaciones, analícese sus puntos de reposo y determine si es estable, asintóticamente estable ó inestable, la solución de dichos sistemas.

1.- $\frac{dx}{dt} = -2x + 2y$

$\frac{dy}{dt} = -4y$

2.- $\frac{dx}{dt} = 5x + 4y$

$\frac{dy}{dt} = -3x - 2y$

3.- $\frac{dx}{dt} = x + 6y$

$\frac{dy}{dt} = 2x + 2y$

4.- $\frac{dx}{dt} = 2x + 5y$

$\frac{dy}{dt} = -5x - 6y$

5.- $\frac{dx}{dt} = 3x + 2y$

$\frac{dy}{dt} = 4x + y$

6.- $\frac{dx}{dt} = x + y$

$\frac{dy}{dt} = -4x - 3y$

7.- $\frac{dx}{dt} = 3x + 7y$

$\frac{dy}{dt} = x - 3y$

8.- $\frac{dx}{dt} = 3x$

$\frac{dy}{dt} = 2x + 3y$



Sección 5.4

“El progreso no solo impone nuevas posibilidades para el futuro,
sino también nuevas restricciones”
Wiener, Norbert



EL USO DEL COMPUTADOR EN LA RESOLUCIÓN DE SISTEMAS NO LINEALES

Existe un método de resolución para ecuaciones no lineales, denominado *método mediante combinaciones integrables*, que consiste en el uso de operaciones aritméticas convenientes (sumas, restas, etc.) para llegar a las llamadas combinaciones integrables del tipo $F(t, u, u') = 0$, donde u es una función que depende de las variables buscadas y_i . Por ejemplo, el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{y^2}{x} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{x^2}{y}\end{aligned}$$

mediante una combinación de operaciones adecuadas, conduce a la solución general:

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}} \\ y &= \sqrt{C_1 e^{2t} - C_2 e^{-2t}}\end{aligned}$$

Este método de integración desafortunadamente tiene una seria limitante; son pocos realmente los casos en los que es posible encontrar su solución. En la mayoría de los casos no es posible encontrar combinaciones integrables del tipo $F(t, u, u') = 0$ que sean fáciles de integrar.

En su tiempo, este método fue prometedor, pero la enorme frustración que generó al no encontrarse un método general que permitiera resolver todos los casos posibles, terminó por el abandono de la búsqueda de semejantes combinaciones integrables. Esta declinación afortunadamente condujo a que muchos matemáticos desarrollaran métodos alternativos como los métodos numéricos (basados en un esquema equivalente de diferencias finitas) y los métodos cualitativos (basado en el análisis del espacio de fases) que con la llegada de la tecnología del computador, han tenido hasta la fecha una enorme aplicación en el análisis del comportamiento de las variables involucradas en sistemas no lineales.

En los siguientes ejemplos, se muestran el algoritmo que se utiliza en el software Mathcad 2001 Profesional[®], que sirve para encontrar la solución en forma gráfica de ciertos sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales y, el plano de fases logrado mediante las herramientas del software Graphic Calculus[®].

Ejemplo 1.- Utilice un computador para resolver numéricamente el siguiente sistema no lineal

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x - 1.2xy \\ \frac{dy}{dt} &= -y + 0.93xy \end{aligned} \quad \text{sueto a } x(0) = 1, y(0) = 0.5$$

Solución.- Utilizando las herramientas del software Mathcad 2001 Professional[®], se adecuan las variables de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{dy0(t)}{dt} &= 2 \cdot y0(t) - 1.2 \cdot y0(t) \cdot y1(t) \\ \frac{dy1(t)}{dt} &= -y1(t) + 0.93 \cdot y0(t) \cdot y1(t) \end{aligned}$$

donde $x = y0(t) \wedge y = y1(t)$. Primeramente, se introducen las variables de entrada:

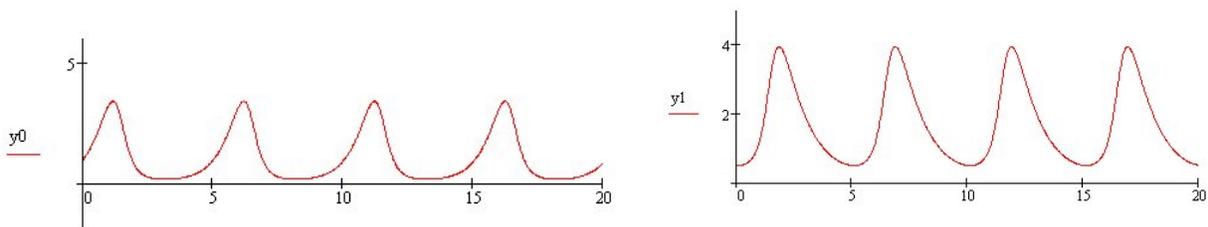
Se declara la matriz $D(t, Y) := \begin{pmatrix} 2 \cdot Y_0 - 1.2 \cdot Y_0 \cdot Y_1 \\ -Y_1 + 0.93 \cdot Y_0 \cdot Y_1 \end{pmatrix}$, las condiciones iniciales $Y0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$, los valores inicial y final del tiempo $t0 := 0 \wedge t1 := 20$ y el número de iteraciones $N := 1000$, necesarios para utilizar la función predeterminada:

$$S := \text{Rkadapt}(Y0, t0, t1, N, D)$$

la cual, emplea el **método de Runge-Kutta de cuarto orden**. Ahora se declaran las variables de salida:

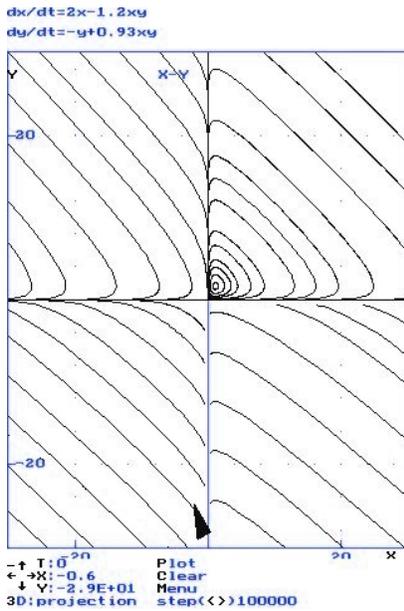
$$\begin{aligned} t &:= S^{(0)} && \text{Valores de la variable independiente } t \\ y0 &:= S^{(1)} && \text{Valores de } x(t) \\ y1 &:= S^{(2)} && \text{Valores de } y(t) \end{aligned}$$

Las gráficas de las variable de salida son las siguientes:



que representan las variables dependientes $x(t)$ y $y(t)$ respectivamente. Como se puede observar en las gráficas, las soluciones son periódicas con periodo aproximado de 5 unidades de tiempo.

La gráfica de la izquierda muestra las trayectorias de algunas curvas solución en el plano de fases, del sistema dado introducido en el software Graphic Calc[®], que usa para resolver gráficamente sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden lineales y no lineales con dos incógnitas. Para lograr dichas curvas, se eligió el método de Runge-Kutta de cuarto orden con un paso de 0.01 y rango de 30 unidades en cada una de las variables dependientes.



Un simple cálculo demuestra que los puntos de reposo son $(0,0) \wedge (1.07,1.66)$. Analizando las trayectorias por cuadrantes, se tiene que, en el segundo cuadrante las trayectorias tienden al punto de reposo $(0,0)$ pero al final se alejan de él, tal que, $y \rightarrow 0$ y $x \rightarrow -\infty$. En el tercer cuadrante las trayectorias tienden a alejarse de los puntos de reposo, tendiendo las variables de la misma manera $\forall t > t_0$ que en el segundo cuadrante. En el cuarto cuadrante las trayectorias tienden a alejarse de los puntos de reposo y $\forall t > t_0$, $x \rightarrow \infty$ e $y \rightarrow -\infty$.

En estos tres cuadrantes el sistema es *inestable*. En el primer cuadrante todas las trayectorias son periódicas, siendo éstas, curvas cerradas en torno al punto de reposo $(1.07,1.66)$. Sólo en este cuadrante el sistema es *estable*.

Ejemplo 2.- Utilice un computador para resolver numéricamente el siguiente sistema no lineal

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y - x^3 \\ \frac{dy}{dt} &= x - y^3 \end{aligned} \quad \text{sujeto a } x(0) = 0, y(0) = 1$$

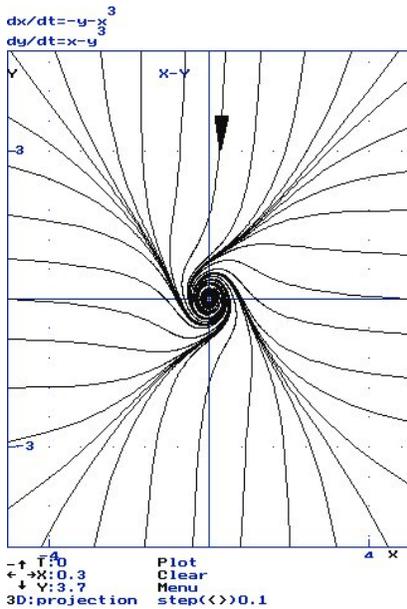
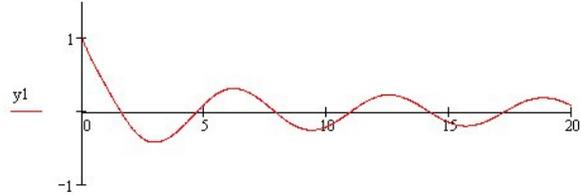
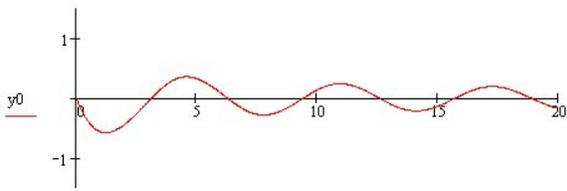
Solución.- Nuevamente, utilizando las herramientas del software Mathcad 2001 Professional, se adecuan las variables de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{dy_0(t)}{dt} &= -y_1(t) - (y_0(t))^3 \\ \frac{dy_1(t)}{dt} &= y_0(t) - (y_1(t))^3 \end{aligned}$$

donde $x = y_0(t) \wedge y = y_1(t)$. La matriz $D(t, Y) \wedge Y_0$ quedan de la siguiente forma:

$$D(t, Y) := \begin{pmatrix} -Y_1 - (Y_0)^3 \\ Y_0 - (Y_1)^3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Y_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

tomando los valores inicial y final del tiempo y el número de iteraciones utilizados en el problema anterior y, después de aplicar la función $S := \text{Rkadapt}(Y0, t0, t1, N, D)$, se tienen las siguientes gráficas:



que representan las variables dependientes $x(t)$ y $y(t)$ respectivamente. Como se puede observar en las gráficas, las soluciones son cuasi-periódicas y asintóticas con respecto al eje de la variable independiente t . Se puede afirmar que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$$

La gráfica de la izquierda muestra las trayectorias de algunas curvas solución en el plano de fases, del sistema dado introducido en el software Graphic Calc[®]. Para lograr dichas curvas, se eligió el método de Runge-Kutta de cuarto orden con un paso de 0.01 y rango de 5 unidades en cada una de las variables dependientes.

Como puede observarse en el diagrama de fases, las trayectorias, son curvas abiertas y los puntos de todas estas, se dirigen al punto de reposo $(0,0)$ para cualquier valor de $t > 0$. Esta es la razón por la que el sistema, en todos los cuadrantes del plano de fases, es *asintóticamente estable*.

El análisis cualitativo iniciado por **Poincaré**, es de suma importancia ya que permite, sin resolver analíticamente el sistema de ecuaciones diferenciales, conocer los comportamientos de las variables dependientes.

Ejemplo 3.- Utilice un computador para resolver numéricamente el siguiente sistema no lineal

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 5y - 10x \\ \frac{dy}{dt} &= x - y - xz \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \frac{8}{3}z \end{aligned} \quad \text{sujeto a} \quad x(0) = 1, y(0) = 1, z(0) = 1$$

Solución.- Utilizando las herramientas del software Mathcad 2001 Professional[®], se adecuan las variables de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= 5y(t) - 10x(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= x(t) - y(t) - x(t)z(t) \\ \frac{dz(t)}{dt} &= x(t)y(t) - \frac{8}{3}z(t)\end{aligned}$$

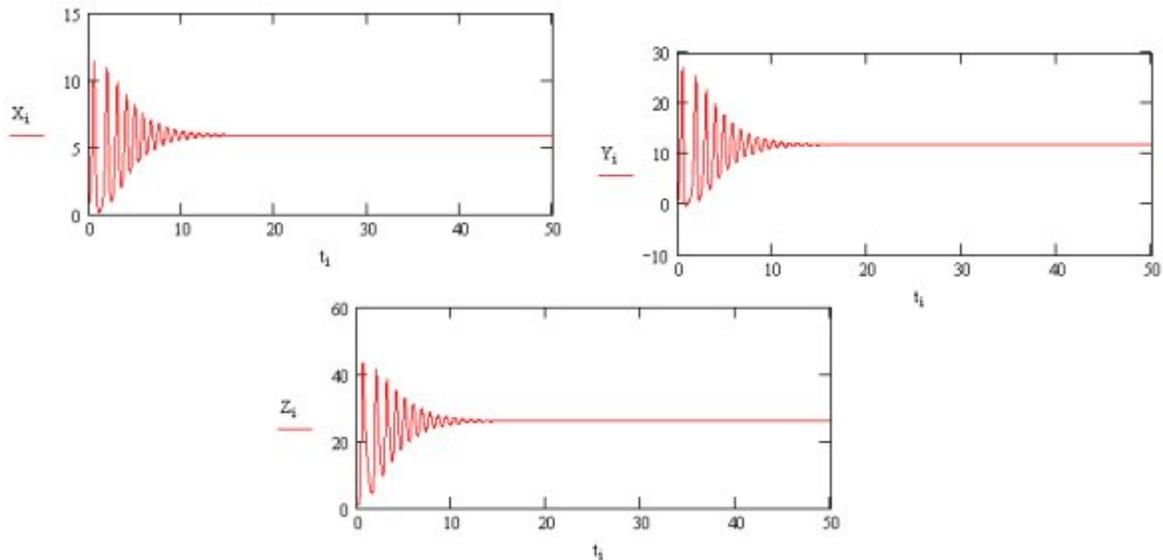
Introducción de las variables de entrada:

Se declara la matriz $D(t, Q) := \begin{pmatrix} 5 \cdot Q_1 - 10 \cdot Q_0 \\ 28 \cdot Q_0 - Q_1 - Q_0 \cdot Q_2 \\ Q_0 \cdot Q_1 - \frac{8}{3} Q_2 \end{pmatrix}$ y el numero de iteraciones $Npts := 3000$

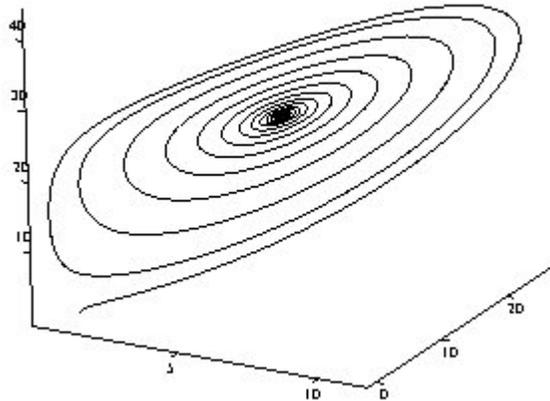
para utilizar la función:

$$L := \text{rkfixed} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, 0, 50, Npts, D \right]$$

las variables de salida son: $t := L^{(0)}$, $X := L^{(1)}$, $Y := L^{(2)}$, $Z := L^{(3)}$. Las gráficas son las siguientes:



Como puede observarse en las gráficas, las variables x, y y z , se comportan de manera *asintótica* en un *equilibrio estable*. Dichas variables en el espacio de fases, forman un *foco estable* (ver figura de abajo).



Un software como el Mathcad 2001 Professional[®], permite al estudiante o al investigador, manipular los coeficientes de los sistemas de ecuaciones diferenciales sean *lineales*, *cuasilineales* o *no lineales*, y así poder analizar cualitativamente los comportamientos de las variables en el plano o espacio de fases.



Ejercicios Suplementarios

Sección 5.4 Ejercicios 5.3

En los siguientes problemas, aplique un software especializado en matemáticas, para resolver numérica y gráficamente cada uno de los sistemas de ecuaciones y determine si es estable, asintóticamente estable ó inestable, la solución de dichos sistemas. Construya para cada caso, un diagrama de fases, observando los comportamientos de las fases, para diferentes valores iniciales.

1.- $\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - y \\ \frac{dy}{dt} &= x + 3y \end{aligned}, x(0)=1 \wedge y(0)=1$	8.- $\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 0.3x - 0.1xy \\ \frac{dy}{dt} &= -0.1x + 2xy \end{aligned}, x(0)=6 \wedge y(0)=2$
2.- $\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x + y^2 \\ \frac{dy}{dt} &= x^2 - 5y \end{aligned}, x(0)=1 \wedge y(0)=0$	9.- $\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y(x^2 + y^2 - 1) \\ \frac{dy}{dt} &= -x(x^2 + y^2 - 1) \end{aligned}, x(0)=-1 \wedge y(0)=0$
3.- $\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 4y \\ \frac{dy}{dt} &= -x \end{aligned}, x(0)=1 \wedge y(0)=\frac{1}{2}$	10.- $\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= 2P\left(1 - \frac{P}{2}\right) - 1.2PD \\ \frac{dD}{dt} &= -D + 0.9PD \end{aligned}, P(0)=2 \wedge D(0)=1$

4.- $\frac{dx}{dt} = x^2 - 2y^2$ $\frac{dy}{dt} = 2x^2 + 4xy$ $, x(0)=1 \wedge y(0)=-1$	11.- $\frac{dp}{dt} = q$ $\frac{dq}{dt} = -\cos p - q$ $, p(0)=0 \wedge q(0)=1$
5.- $\frac{dx}{dt} = y+1$ $\frac{dy}{dt} = -x + \frac{x}{\cos t}$ $, x(0)=2 \wedge y(0)=-1$	12.- $\frac{dx}{dt} = v$ $\frac{dv}{dt} = -0.25x - 0.2v$ $, x(0)=1 \wedge v(0)=-\frac{3}{4}$
6.- $\frac{dx}{dt} + x = \cos t$ $\frac{dy}{dt} + y = \sin t$ $, x(0)=0 \wedge y(0)=-1$	13.- $\frac{dx}{dt} = -0.08x + 0.02y$ $\frac{dy}{dt} = 0.08x - 0.08y$ $, x(0)=20 \wedge y(0)=0$
7.- $\frac{dx}{dt} = -x + y + e^{-2t}$ $\frac{dy}{dt} = x + 3y + e^{-t}$ $, x(0)=1 \wedge y(0)=1$	14.- $\frac{dx}{dt} = 10(y-x)$ $\frac{dy}{dt} = 28x - y - xz$ $\frac{dz}{dx} = -1.8x - y - xz$ $x(0)=9$ $y(0)=6$ $z(0)=6$

Sección 5.5

*“La ciencia es una ecuación diferencial. La religión es la condición de frontera”
Turing, Alan*



TEORÍAS DE LA ESTABILIDAD

Como ya se ha visto anteriormente, una de las más importantes tareas de un matemático aplicado o de un ingeniero es, el modelar un proceso en donde existe una(s) entrada(s) y una(s) salida(s). Dentro del ámbito de las ecuaciones diferenciales, esto se logra a través de una ecuación diferencial propiamente dicha ó de un sistema de ecuaciones diferenciales. Pero la tarea no termina en el modelado del proceso como un instrumento matemático que conlleva a la comprensión del mismo, ni en su aplicación futura ya sea para predecir el comportamiento del proceso o simplemente como punto de comparación con procesos similares.

En la actualidad, la mayoría de los procesos industriales son controlados mediante dispositivos electrónicos (o electro-mecánicos), llamados controladores; y esto es así ya que las variables de salida involucradas en los productos terminales de dichos procesos, sufren alteraciones inevitables debido a pequeños cambios en la(s) variable(s) de entrada. En este nivel de diseño, los modelos matemáticos que determinan la naturaleza de los controladores, son de alta resolución, ya que incluyen muchos de los parámetros significativos en dicho proceso. Aquí, la función de transferencia juega un papel se suma importancia en el diseño de estos controladores. Debido a esto, es importante saber que sucede con el proceso mismo, de aquí que surge una cuestión interesante: ¿Cómo saber si un proceso permanecerá inalterable ante pequeños (o incluso grandes) cambios en las condiciones iniciales del mismo?, en otras palabras ¿Cómo

saber si un sistema (proceso) es estable o inestable ante dichos cambios en las condiciones iniciales?.

Aunque la basta teoría de los sistemas de ecuaciones diferenciales continúa en desarrollo hasta la fecha, existen varias teorías sobre la estabilidad de las soluciones de tales sistemas, como es el *criterio de Routh-Hurwitz*, basado en el cálculo de determinantes cuyos elementos dispuestos en cierto arreglo, son los coeficientes del polinomio denominador de la función de transferencia; el *criterio de Malkin*, basado en la estabilidad por la primera aproximación y de las perturbaciones de acción constante; el *criterio de Mikhailov*, basado en la localización de las raíces del polinomio característico de una ecuación diferencial lineal de orden n , en el plano de Argand; los *criterios de Constantin y de Morchalo*, basados en la Ψ -estabilidad de Akinyele, que emplea un conjunto de funciones Ψ_i que tienen ciertas propiedades en \mathbb{R}_+ . Pero todas estas teorías tienen un antepasado común, cuyos presupuestos teóricos sirvieron de base fundamental para la formulación de muchas de ellas. Este origen común tuvo lugar en la Universidad de Moscú, Rusia, el 12 de Octubre de 1892, al presentar la tesis doctoral “*The General Problem of the Stability of Motion*”, el matemático y mecánico ruso **Alexandr Mikhailovich Liapunov**, que establece las condiciones bajo las cuales las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales son estables.

TEORÍA DE LA ESTABILIDAD DE LIAPUNOV

PRIMER MÉTODO DE LIAPUNOV

Sea un sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \Psi_1(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, t) \\ \frac{dy_2}{dt} &= \Psi_2(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, t) \\ \frac{dy_3}{dt} &= \Psi_3(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, t) \\ &\vdots \\ \frac{dy_n}{dt} &= \Psi_n(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, t) \end{aligned} \quad (5.33)$$

o más compactamente $\frac{dy_i}{dt} = \Psi_i(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, t)$ donde, $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Una solución $\varphi_i(x)$ del sistema (5.33), que satisface a las condiciones iniciales $\varphi_i(t_0) = \varphi_{i0}$, ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) se llama *estable según Liapunov*, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta(\varepsilon) > 0$, tal que, para cada solución $y_i(t)$, ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) del sistema (5.33) cuyos valores iniciales cumplan las condiciones

$$|y_i(t_0) - \varphi_{i0}| < \delta, \text{ donde } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (5.34)$$

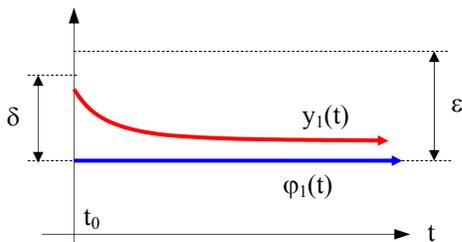
se verifica la desigualdad

$$|y_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon, \text{ donde } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (5.35)$$

para todos los valores $t \geq t_0$. Si para valores de $\delta > 0$ arbitrariamente pequeños no se cumple la desigualdad (5.35), al menos para una solución $y_i(t)$ donde $i = 1, 2, 3, \dots, n$, la solución $\varphi_i(t)$ se llama **inestable**. Si en las condiciones (5.34), además del cumplimiento de la desigualdad (5.35), se cumple también la condición $\lim_{t \rightarrow \infty} |y_i(t) - \varphi_i(t)| = 0$, donde $i = 1, 2, 3, \dots, n$ la solución $\varphi_i(t)$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) se denomina **asintóticamente estable**.

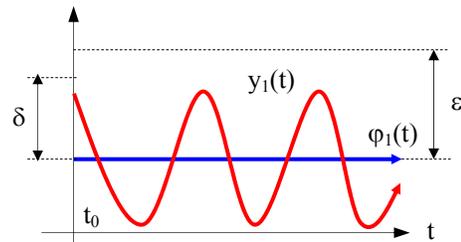
De lo anterior se deduce que la estabilidad según Liapunov, del sistema (x), se basa principalmente, en la comparación de dos soluciones $y_i(t) \wedge \varphi_i(t)$ con valores iniciales distintos para un mismo tiempo inicial t_0 . Dicha estabilidad se puede determinar analíticamente acorde con las desigualdades (5.34) y (5.35) *siempre y cuando se conozcan las soluciones analíticas del sistema*.

Por otro lado, para comprender la esencia de la definición de la estabilidad según Liapunov, es conveniente graficar cada pareja de soluciones contra la variable t , en planos separados y observar el comportamiento de $y_i(t)$ con relación a $\varphi_i(t)$. En aplicaciones prácticas, generalmente $\varphi_i(t)$ representa **la solución de equilibrio** e $y_i(t)$ cualquier solución “cercana” a ella.

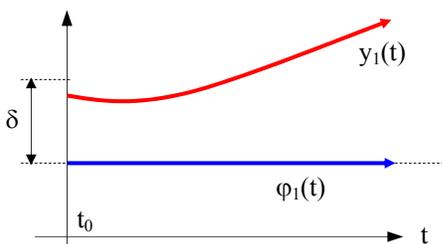


En la figura de la izquierda se muestra el caso de la estabilidad asintótica. Como puede observarse, para t_0 la diferencia $|y_1(t) - \varphi_1(t)|$ es menor en valor absoluto que δ . Para valores mayores que t_0 esta diferencia tiende a cero conforme t tiende al infinito, manteniéndose siempre menor en valor absoluto que la magnitud ε .

En la figura de la derecha se muestra la estabilidad, pero no asintótica. Aquí, la diferencia en valor absoluto de los valores iniciales de $y_1(t)$ y $\varphi_1(t)$ también es menor que δ , pero el límite de la diferencia $|y_1(t) - \varphi_1(t)|$ cuando t tiende al infinito, no existe. Es interesante observar que esta diferencia se mantiene



menor en valor absoluto que la magnitud ε .



Finalmente en la siguiente figura se muestra la inestabilidad de la solución $\varphi_1(t)$. Es claro que la desigualdad $|y_1(t_0) - \varphi_1(t_0)| < \delta$ se cumple, sin embargo no puede determinarse el valor de ε , ya que los valores

de la solución $y_1(t)$, que es suficientemente cercana, a $\varphi_1(t)$, tienden al infinito para valores mayores de t_0 ; en otras palabras, la diferencia $|y_1(t) - \varphi_1(t)|$ crece indefinidamente para $t > t_0$

Observación.- Es importante aclarar que la definición de la estabilidad según Liapunov, no impone restricciones en cuanto a las magnitudes δ y ε , sino sólo la relación entre ellas.

Ejemplo 1

Analizar si es estable o no la solución del sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - 4y \\ \frac{dy}{dt} &= 2x - 5y \end{aligned}$$

sujeta a las condiciones iniciales $x(0) = 0 \wedge y(0) = 0$

Solución.- La solución del sistema sujeto a las condiciones dadas es $x(t) \equiv 0 \wedge y(t) \equiv 0$. Cualquier solución del sistema que satisfaga cualquiera otras condiciones $x(0) = x_0 \wedge y(0) = y_0$ tendrá la forma:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}(x_0 + y_0)e^{-3t} + \frac{1}{2}(x_0 - y_0)e^{-t} \\ y(t) = \frac{1}{2}(x_0 + y_0)e^{-3t} + \frac{1}{4}(x_0 - y_0)e^{-t} \end{cases}$$

Ahora bien, según la definición de la estabilidad de Liapunov, si dado un $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, si se cumplen las desigualdades:

$$|x_0 - 0| < \delta \wedge |y_0 - 0| < \delta \text{ ó de otra manera } |x_0| + |y_0| < 2\delta$$

entonces se verificarán las desigualdades:

$$|x(t) - 0| = |x(t)| < \varepsilon \wedge |y(t) - 0| = |y(t)| < \varepsilon$$

ó de otra manera:

$$\begin{cases} \left| \frac{1}{2}(x_0 + y_0)e^{-3t} + \frac{1}{2}(x_0 - y_0)e^{-t} \right| < \varepsilon \\ \left| \frac{1}{2}(x_0 + y_0)e^{-3t} + \frac{1}{4}(x_0 - y_0)e^{-t} \right| < \varepsilon \end{cases}$$

En efecto:

$$\left| \frac{1}{2}(x_0 + y_0)e^{-3t} + \frac{1}{2}(x_0 - y_0)e^{-t} \right| \leq \frac{1}{2}(e^{-3t} + e^{-t})|x_0| + \frac{1}{2}(e^{-3t} - e^{-t})|y_0| \leq |x_0| + |y_0|$$

en virtud de que $\frac{1}{2}(e^{-3t} + e^{-t}) \leq 1 \wedge \frac{1}{2}(e^{-3t} - e^{-t}) \leq 1 \forall t \geq 0$. Por otro lado:

$$\left| \frac{1}{2}(x_0 + y_0)e^{-3t} + \frac{1}{4}(x_0 - y_0)e^{-t} \right| \leq \frac{1}{2}(e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-t})|x_0| + \frac{1}{2}(e^{-3t} - \frac{1}{2}e^{-t})|y_0| \leq |x_0| + |y_0|$$
 en virtud de que $\frac{1}{2}(e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-t}) \leq 1 \wedge \frac{1}{2}(e^{-3t} - \frac{1}{2}e^{-t}) \leq 1 \quad \forall t \geq 0$

en forma resumida:

$$\begin{cases} \left| \frac{1}{2}(x_0 + y_0)e^{-3t} + \frac{1}{2}(x_0 - y_0)e^{-t} \right| \leq |x_0| + |y_0| \\ \left| \frac{1}{2}(x_0 + y_0)e^{-3t} + \frac{1}{4}(x_0 - y_0)e^{-t} \right| \leq |x_0| + |y_0| \end{cases}$$

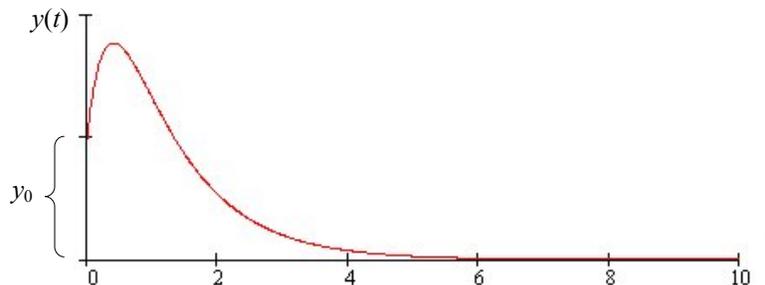
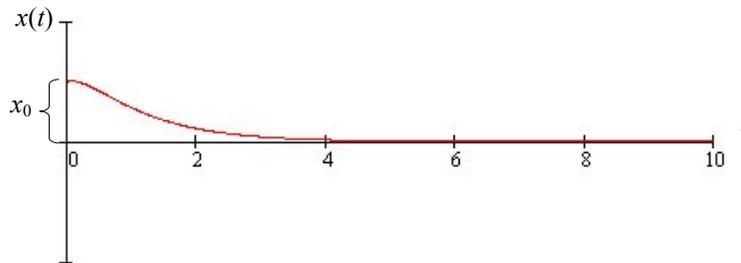
Supóngase que $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, entonces, de $|x_0| + |y_0| < 2\delta$ se deduce que, $|x_0| + |y_0| < \varepsilon$; y si esto es así, entonces se verificarán las desigualdades:

$$\begin{cases} \left| \frac{1}{2}(x_0 + y_0)e^{-3t} + \frac{1}{2}(x_0 - y_0)e^{-t} \right| < \varepsilon \\ \left| \frac{1}{2}(x_0 + y_0)e^{-3t} + \frac{1}{4}(x_0 - y_0)e^{-t} \right| < \varepsilon \end{cases}$$

de esta manera *el sistema es estable según Liapunov*: y aún más, éste es *asintóticamente estable*, ya que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2}(x_0 + y_0)e^{-3t} + \frac{1}{2}(x_0 - y_0)e^{-t} \right] = 0 \wedge \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2}(x_0 + y_0)e^{-3t} + \frac{1}{4}(x_0 - y_0)e^{-t} \right] = 0$$

Geoméricamente la estabilidad de la solución $x(t) \equiv 0 \wedge y(t) \equiv 0$ (exactamente el eje t), se puede visualizar si se grafican otras soluciones cercanas al punto de reposo $(0,0)$



En las figuras anteriores se muestran dos soluciones cercanas a la solución de equilibrio. Se puede ver claramente que los valores de estas soluciones tienden a la solución estable del sistema.

Ejemplo 2.- Analizar si es estable o no la solución del sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x - 3y \\ \frac{dy}{dt} &= 2y\end{aligned}$$

sujeto a las condiciones iniciales $x(0) = 0 \wedge y(0) = 0$

Solución.- Nuevamente la solución del sistema sujeto a las condiciones dadas es $x(t) \equiv 0 \wedge y(t) \equiv 0$. Cualquier solución del sistema que satisfaga cualquiera otras condiciones $x(0) = x_0 \wedge y(0) = y_0$ tendrá la forma:

$$\begin{cases} x(t) = (x_0 + 3y_0)e^t - 3y_0e^{2t} \\ y(t) = y_0e^{2t} \end{cases}$$

Acorde con la definición de la estabilidad de Liapunov, si dado un $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, si se cumplen las desigualdades:

$$|x_0 - 0| < \delta \wedge |y_0 - 0| < \delta \text{ ó de otra manera } |x_0| + |y_0| < 2\delta$$

entonces se verificarán las desigualdades:

$$|x(t) - 0| = |x(t)| < \varepsilon \wedge |y(t) - 0| = |y(t)| < \varepsilon$$

ó de otra manera:

$$\begin{cases} |(x_0 + 3y_0)e^t - 3y_0e^{2t}| < \varepsilon \\ |y_0e^{2t}| < \varepsilon \end{cases}$$

Ahora bien:

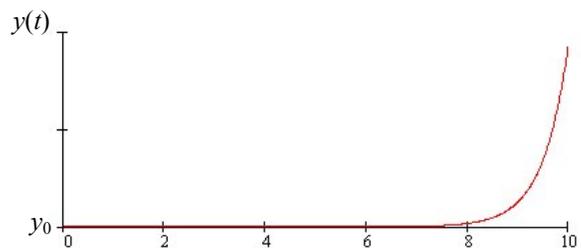
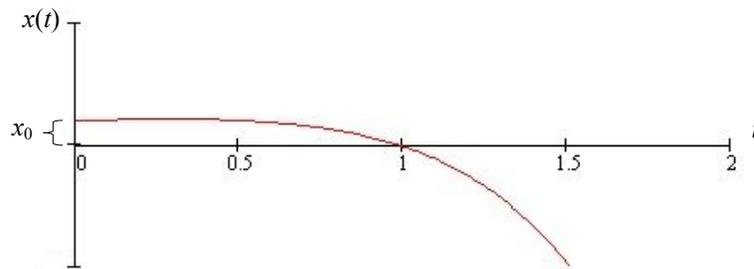
$$|(x_0 + 3y_0)e^t - 3y_0e^{2t}| \leq e^t|x_0| + 3(e^t - 3e^{2t})|y_0|$$

pero, es evidente que:

$$|x_0| + |y_0| < e^t|x_0| + 3(e^t - 3e^{2t})|y_0|$$

Si se toma $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, entonces $|x_0| + |y_0| < \varepsilon$, pero en virtud de la desigualdad antes deducida se tiene que: $e^t|x_0| + 3(e^t - 3e^{2t})|y_0| > \varepsilon$ para algún valor de $t > 0$. Luego entonces *el sistema es inestable*.

Geoméricamente la estabilidad de la solución $x(t) \equiv 0 \wedge y(t) \equiv 0$ (prácticamente el eje t), se puede visualizar si se grafican otras soluciones cercanas al punto de reposo $(0,0)$.



Como puede observarse en ambas gráficas, las curvas que satisfacen a las condiciones arbitrarias $x(0) = x_0 \wedge y(0) = y_0$, se alejan de la solución de equilibrio $x(t) \equiv 0 \wedge y(t) \equiv 0$ para algún valor de $t > 0$, no pudiendo establecer una magnitud ε que satisfaga a las desigualdades:

$$\begin{cases} |(x_0 + 3y_0)e^t - 3y_0e^{2t}| < \varepsilon \\ |y_0e^{2t}| < \varepsilon \end{cases}$$

Ejemplo 3.- Analizar si es estable o no la solución del sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x + 2y \\ \frac{dy}{dt} &= -4x - 2y \end{aligned}$$

sujeto a las condiciones iniciales $x(0) = 0 \wedge y(0) = 0$

Solución.- La solución del sistema sujeto a las condiciones dadas es $x(t) \equiv 0 \wedge y(t) \equiv 0$. Cualquier solución del sistema que satisfaga cualquiera otras condiciones $x(0) = x_0 \wedge y(0) = y_0$ tendrá la forma:

$$\begin{cases} x(t) = x_0(\operatorname{sen}2t + \operatorname{cos}2t) + y_0(\operatorname{sen}2t) \\ y(t) = -2x_0(\operatorname{sen}2t) + y_0(\operatorname{cos}2t - \operatorname{sen}2t) \end{cases}$$

Ahora bien, según la definición de la estabilidad de Liapunov, si dado un $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, si se cumplen las desigualdades:

$$|x_0 - 0| < \delta \wedge |y_0 - 0| < \delta \quad \text{ó de otra manera} \quad |x_0| + |y_0| < 2\delta$$

se verificarán las desigualdades:

$$|x(t) - 0| = |x(t)| < \varepsilon \quad \wedge \quad |y(t) - 0| = |y(t)| < \varepsilon$$

ó de otra manera:

$$\begin{cases} |x_0(\operatorname{sen}2t + \operatorname{cos}2t) + y_0(\operatorname{sen}2t)| < \varepsilon \\ |-2x_0(\operatorname{sen}2t) + y_0(\operatorname{cos}2t - \operatorname{sen}2t)| < \varepsilon \end{cases}$$

Ahora bien

$$|x_0(\operatorname{sen}2t + \operatorname{cos}2t) + y_0(\operatorname{sen}2t)| < |\operatorname{sen}2t + \operatorname{cos}2t||x_0| + |\operatorname{sen}2t||y_0| < 2|x_0| + 2|y_0| = 2(|x_0| + |y_0|)$$

en virtud de que $|\operatorname{sen}2t + \operatorname{cos}2t| < 2 \wedge |\operatorname{sen}2t| < 1$. Por otro lado

$$|-2x_0(\operatorname{sen}2t) + y_0(\operatorname{cos}2t - \operatorname{sen}2t)| < |-2\operatorname{sen}2t||x_0| + |\operatorname{cos}2t - \operatorname{sen}2t||y_0| < 2|x_0| + 2|y_0| = 2(|x_0| + |y_0|)$$

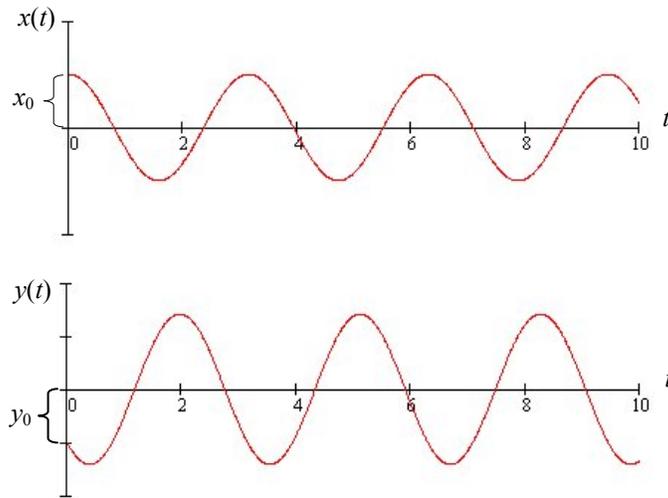
en virtud de que $|-2\operatorname{sen}2t| < 2 \wedge |\operatorname{cos}2t - \operatorname{sen}2t| < 1$. En forma resumida

$$\begin{cases} |x_0(\operatorname{sen}2t + \operatorname{cos}2t) + y_0(\operatorname{sen}2t)| < 2(|x_0| + |y_0|) \\ |-2x_0(\operatorname{sen}2t) + y_0(\operatorname{cos}2t - \operatorname{sen}2t)| < 2(|x_0| + |y_0|) \end{cases}$$

Si se toma $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$, entonces $|x_0| + |y_0| < \frac{\varepsilon}{2}$ ó de otra manera $2(|x_0| + |y_0|) < \varepsilon$, pero en virtud de las desigualdades anteriores, se deduce que:

$$\begin{cases} |x_0(\operatorname{sen}2t + \operatorname{cos}2t) + y_0(\operatorname{sen}2t)| < \varepsilon \\ |-2x_0(\operatorname{sen}2t) + y_0(\operatorname{cos}2t - \operatorname{sen}2t)| < \varepsilon \end{cases}$$

luego entonces, *el sistema es estable*, pero no asintóticamente estable. Las gráficas de soluciones cercanas al punto de reposo $(0,0)$, son:



Como se puede observar en las gráficas anteriores, las soluciones cercanas correspondientes a las condiciones iniciales $x(0) = x_0 \wedge y(0) = y_0$, se mantienen oscilantes en torno a la solución de equilibrio $x(t) \equiv 0 \wedge y(t) \equiv 0$, no tendiendo a ningún límite cuando t tiende al infinito, esta razón ratifica el hecho de que el sistema sí es estable, pero no asintóticamente estable.

Observación.- Este primer método, es la formalización de la teoría de la estabilidad de Liapunov, pero tiene una seria limitante: *para analizar la estabilidad del punto de reposo de un sistema, es necesario contar con su solución analítica.*

SEGUNDO MÉTODO DE LIAPUNOV

El Dr. **Liapunov**, desarrolló a finales del siglo XIX, un método más general que el anterior, para determinar la estabilidad de un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, pero antes, es necesario definir ciertos conceptos importantes:

Definición.- Sea $v(x, y)$ una función definida en \mathfrak{R}^2 , continua y que tiene derivadas parciales continuas en un entorno Ω , tal que $(0, 0) \in \Omega$. Si $v(0, 0) = 0$ y

1. Si $v(x, y) > 0 \quad \forall (x, y) \neq (0, 0)$, se dice que $v(x, y)$ es *definida positiva*.
2. Si $v(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \neq (0, 0)$, se dice que $v(x, y)$ es *semidefinida positiva*.
3. Si $v(x, y) < 0 \quad \forall (x, y) \neq (0, 0)$, se dice que $v(x, y)$ es *definida negativa*.
4. Si $v(x, y) \leq 0 \quad \forall (x, y) \neq (0, 0)$, se dice que $v(x, y)$ es *semidefinida negativa*.

Este resultado, puede generalizarse para funciones definidas incluso en espacios de n dimensiones, esto es, para funciones del tipo $v(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathfrak{R}^n$. Por otro lado, son importantes las siguientes observaciones:

1. $v(x, y) = ax^{2m} + by^{2n}$ con $a, b \in \mathfrak{R}^+ / \{0\}$ y $m, n \in \mathbb{Z}^+ / \{0\}$, es *definida positiva*.
2. $v(x, y)$ es *definida negativa* si y sólo si, $-v(x, y)$ es *definida positiva*.
3. $v(x, y) = ax^{2m} + by^{2n}$ con $a, b \in \mathfrak{R}^- / \{0\}$ y $m, n \in \mathbb{Z}^+ / \{0\}$, es *definida negativa*.
4. $v(x, y) = x^{2m}$ es *semidefinida positiva*, ya que $x^{2m} = 0 \quad \forall (0, y) \neq (0, 0)$ y $x^{2m} > 0$ para toda pareja $(x, y) \neq (0, 0)$. Similarmente se puede demostrar que $y^{2n} \wedge (x - y)^{2m}$ son *semidefinidas positivas*.

De los cursos de Física superior, se sabe que en un sistema físico, existe un punto del movimiento de una partícula, en donde la energía potencial tiene un mínimo local. Un entorno a este punto es llamado pozo potencial; y es importante ya que en este mínimo, la fuerza es igual a cero y eso implica que la partícula se encuentra en un estado de equilibrio y éste es estable. Este descubrimiento es la idea central en la que el Dr. **Liapunov** se basó para deducir un sencillo pero poderoso método para estudiar la estabilidad de un sistema físico en un contexto más amplio.

FUNCIONES DE LIAPUNOV

Sea un sistema de ecuaciones diferenciales autónomo de primer orden, de la forma:

$$\frac{dx_i}{dt} = \Psi_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \quad \text{donde } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (5.36)$$

Considérese ahora que el sistema está definido en \mathfrak{R}^2 , esto es, de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \Psi(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= \Phi(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (5.37)$$

cuya solución de equilibrio es el punto de reposo $x_1(t) \equiv 0 \wedge x_2(t) \equiv 0$. Sea C una trayectoria del sistema (5.37) dada por las ecuaciones paramétricas $x_1(t) \wedge x_2(t)$ y sea también una función $v(x_1, x_2)$ definida en \mathfrak{R}^2 , continua y que tiene derivadas parciales continuas en un entorno Ω , del origen $(0, 0)$, tal que $v(0, 0) = 0$. Como $x_1 \wedge x_2$ dependen del parámetro t , entonces $v(t)$, y su razón de cambio a lo largo de la trayectoria C , está dada por:

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x_1} \Psi + \frac{\partial v}{\partial x_2} \Phi$$

Una función $v(x_1, x_2)$ *definida positiva*, con la propiedad de que $\frac{dv}{dt} \leq 0$ (es decir, que sea *semidefinida negativa*), o bien que $\frac{dv}{dt} < 0$ (*definida negativa*) es llamada una **función de Liapunov**.

El siguiente teorema, establece la condiciones bajo las cuales un sistema de ecuaciones diferenciales dado por la expresión (5.36) es estable.

Teorema 5.7 (Teorema de Liapunov Sobre la Estabilidad).- Si existe una función derivable $v(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ que satisface en un entorno Ω del origen de coordenadas $(0, 0, 0, \dots, 0)$, las siguientes condiciones:

1. $v(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) > 0$ y $v(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \Leftrightarrow x_i \equiv 0 \forall i \in \mathbb{N}$, es decir, tiene un mínimo estricto en el origen de coordenadas.
2. $\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = 0$ cuando $t \geq t_0$, entonces el punto de reposo $x_i \equiv 0$ es *estable*.

El siguiente teorema, establece la condiciones bajo las cuales un sistema de ecuaciones diferenciales dado por la expresión (5.36) es *asintóticamente estable*.

Teorema 5.8 (Teorema de Liapunov Sobre la Estabilidad Asintótica).- Si existe una función derivable $v(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ que satisface en un entorno Ω del origen de coordenadas $(0, 0, 0, \dots, 0)$, las siguientes condiciones:

1. $v(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) > 0$ y $v(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \Leftrightarrow x_i \equiv 0 \forall i \in \mathbb{N}$
2. $\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \leq 0$ (*semidefinida negativa*) ó $\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} < 0$ (*definida negativa*) y fuera de un entorno pequeño del origen de coordenadas $\frac{dv}{dt} \leq \xi < 0$, donde ξ es una constante (es decir, que la derivada es monótona decreciente), cuando $t \geq T_0 \geq t_0$, entonces el punto de reposo $x_i \equiv 0$ es *asintóticamente estable*.

Observación.- El Dr. Liapunov, demostró el teorema en un sentido más general, considerando que la función v puede también depender de t , esto es, $v(t, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$; solo que en este caso, la primera condición se reemplaza por la siguiente:

$$v(t, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \geq \omega(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \geq 0$$

en un entorno Ω del origen de coordenadas, cuando $t \geq t_0$, donde la función continua ω , tiene un mínimo estricto en el origen. La segunda condición se sustituye por la expresión:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \leq 0$$

Por otro lado, es evidente que los *Teoremas 5.7 y 5.8*, carecen de *condiciones de existencia y unicidad* para las funciones de Liapunov; esto quiere decir que el proceso de la búsqueda de una función de Liapunov que satisfaga las condiciones del teorema y por ende que determine la estabilidad del sistema en cuestión, es un trabajo bastante complicado. Hasta la fecha el método de prueba y error ha sido el más adecuado y solo en casos muy específicos se tiene la certeza de establecer analíticamente tales funciones. Es importante aclarar que el fallo en la prueba de una función de Liapunov candidata, no implica la inestabilidad del sistema.

“Es claro que el tipo de estabilidad se determina siempre y cuando exista una función de Liapunov que satisfaga las condiciones de su teorema respectivo”

Ejemplo 3.- Analizar estabilidad de la *solución trivial* $x(t) \equiv 0 \wedge y(t) \equiv 0$ del sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= xy \\ \frac{dy}{dt} &= -x^2 \end{aligned}$$

Solución.- Una función de Liapunov candidata sería $v(x, y) = x^2 + y^2$, ya que:

1. $v(x, y) = x^2 + y^2 > 0 \quad \forall (x, y) \neq (0, 0) \wedge v(0, 0) = 0$
2. $\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dt} = (2x)(xy) + (2y)(-x^2) = 0$

por lo que el punto de reposo es *estable*.

Ejemplo 5.- Analizar estabilidad de la *solución trivial* $x(t) \equiv 0 \wedge y(t) \equiv 0$ del sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3y^3 \\ \frac{dy}{dt} &= -x \end{aligned}$$

Solución.- Una función de Liapunov candidata sería $v(x, y) = 2x^2 + 3y^4$, ya que:

1. $v(x, y) = 2x^2 + 3y^4 > 0 \quad \forall (x, y) \neq (0, 0) \wedge v(0, 0) = 0$
2. $\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dt} = (4x)(3y^3) + (12y^3)(-x) = 0$

por lo tanto la solución trivial es *estable*.

Ejemplo 6.- Analizar estabilidad de la *solución trivial* del sistema:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -5x^3 - 2y \\ \frac{dy}{dt} &= 2x - 4y^3\end{aligned}$$

Solución.- Una función de Liapunov candidata sería $v(x, y) = x^2 + y^2$, ya que:

1. $v(x, y) = x^2 + y^2 > 0 \quad \forall (x, y) \neq (0, 0) \quad \wedge \quad v(0, 0) = 0$
2. $\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dt} = (2x)(-5x^3 - 2y) + (2y)(2x - 4y^3) = -2(5x^4 + 4y^4) < 0$ la cual es *definida negativa*, además de que $-2(5x^4 + 4y^4)$ es monótona decreciente fuera de un entrono del origen, esto es $\frac{dv}{dt} \leq \xi < 0$, entonces, la solución trivial es *asintóticamente estable*.

Solo en casos muy especiales se puede proponer una función de Liapunov de la siguiente forma: $v(x, y) = ax^{2m} + by^{2n}$. El siguiente problema ilustra esto precisamente:

Ejemplo 7.- Analizar estabilidad de la *solución trivial* del sistema:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -3x^3 - y \\ \frac{dy}{dt} &= x^5 - y^3\end{aligned}$$

Solución.- Se propone una función de Liapunov de la forma: $v(x, y) = ax^{2m} + by^{2n}$. Luego entonces:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dt} = -6amx^{2m+2} + (2bnx^5y^{2n-1} - 2amx^{2m-1}y) - 4bny^{2n+2}$$

Ahora bien, para que $\frac{dv}{dt}$ sea semidefinida negativa, los términos dentro del parentesis se tienen que anular; para esto, basta con tomar $a=1, b=3, m=3$ y $n=1$, con lo cual la función de Liapunov adquiere la forma: $v(x, y) = x^6 + 3y^2$, que es *definida positiva*, la derivada de v es:

$\frac{dv}{dt} = -6(3x^8 + 2y^4) < 0$ que es *definida negativa*. Por lo tanto el punto de reposo es *asintóticamente estable*.

Ejemplo 8.- Analizar estabilidad de la *solución trivial* del sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -16x - 8y \end{aligned}$$

Solución.- Una función de Liapunov candidata sería, $v(x, y) = 2x^2 + \frac{1}{8}y^2$ ya que:

1. $v(x, y) = 2x^2 + \frac{1}{8}y^2 > 0 \quad \forall (x, y) \neq (0, 0) \wedge v(0, 0) = 0$
2. $\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dt} = (4x)(y) + (\frac{1}{4}y)(-16x - 8y) = -2y^2 \leq 0$, la cual es *semidefinida negativa*, además de que $-2y^2$ es monótona decreciente fuera de un entrono del origen, esto es $\frac{dv}{dt} \leq \xi < 0$, entonces, la solución trivial es *asintóticamente estable*.

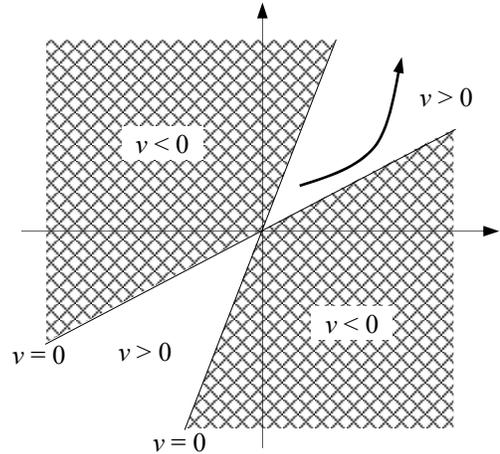
Es claro que la elección de una *función de Liapunov* adecuada es en muchos casos, muy complicada y hasta frustrante, y más aún para los sistemas lineales. Para estos sistemas, es recomendable la metodología aplicada en la sección 5.3 que se basa principalmente en la naturaleza de las raíces de la ecuación característica.

En 1959 se publica la obra “*Stability of Motion*” del mecánico ruso **Nikolai Gurievich Chetáev**, en donde aparecen las condiciones para la inestabilidad de la solución de equilibrio de un sistema del tipo (5.37). El siguiente teorema muestra esto precisamente:

Teorema 5.9 (*Teorema de Chetáev Sobre la Inestabilidad*).- Si existe una función derivable $v(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ que satisfaga en cierto ζ -entorno cerrado del origen de coordenadas $(0, 0, 0, \dots, 0)$, las condiciones:

1. En un entorno pequeño Θ del origen de coordenadas, existe una región $(v > 0)$, en la cual $v > 0$, y $v = 0$ en la parte de la frontera de la región $(v > 0)$ que se encuentra en Θ ;
2. En la región $(v > 0)$, la derivada $\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} > 0$, y en la región $(v \geq \kappa)$, $\kappa > 0$, la derivada $\frac{dv}{dt} \geq \xi > 0$, entonces el punto de reposo $x_i \equiv 0$, $(i = 1, 2, 3, \dots, n)$, del sistema (5.37), es *inestable*.

Como se puede ver en la figura de la derecha, la región no sombreada corresponde a los valores $x_1 \wedge x_2$, tales que $v > 0$, además de que en esa misma región la derivada $\frac{dv}{dt}$ es positiva.



La inestabilidad acorde con el criterio de Chetáev, tiene el mismo sentido que el del segundo método de Liapunov para la estabilidad, con relación a la búsqueda de una función $v(x,y)$ que satisfice ciertas condiciones analíticas. En este caso, la función candidata recibe el nombre de **función de Chetáev**.

Ejemplo 9.- Analizar estabilidad de la *solución trivial* del sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= xy + 3x^5 \\ \frac{dy}{dt} &= x^2 - 3y^5 \end{aligned}$$

Solución.- Una función de Chetáev candidata sería, $v(x,y) = x^2 - y^2$, ya que:

1. $v(x,y) = x^2 - y^2 > 0 \Leftrightarrow |x| > |y| \wedge v(0,0) \Leftrightarrow y = x$
2. $\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dt} = (2x)(xy + 3x^5) - (2y)(x^2 - 3y^5) = 6(x^6 - y^6) > 0, \Leftrightarrow |x| > |y|$ y como para $v \geq \kappa$, $\frac{dv}{dt} > \xi > 0$, entonces la solución trivial es *inestable*.

El siguiente ejemplo muestra que también existe la posibilidad de considerar la región $v > 0$, como todo el plano cartesiano.

Ejemplo 10.- Analizar estabilidad de la *solución trivial* del sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x^3 - y \\ \frac{dy}{dt} &= x + y^3 \end{aligned}$$

Solución.- Una función de Chetáev candidata sería, $v(x,y) = x^2 + y^2$, ya que:

1. $v(x,y) = x^2 + y^2 > 0 \quad \forall (x,y) \neq (0,0) \wedge v(0,0) = 0$

$$2. \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dt} = (2x)(x^3 - y) + (2y)(x + y^3) = 2(x^4 + y^4) > 0, \quad \forall (x, y) \neq (0, 0) \quad y$$

como para $v \geq \kappa$, la derivada es $\frac{dv}{dt} > \xi > 0$, entonces, la solución trivial es *inestable*.

Así como en el caso del *segundo método de Liapunov*, el *criterio de Chetáev* no es muy práctico para los casos de sistemas lineales, por lo que se recomienda el uso de la herramientas vistas en la sección 5.3.

El Dr. **Liapunov** en sus obras, también trata la estabilidad de sistemas no lineales, basandose en la posibilidad de reducir semejante sistema a otro de naturaleza lineal (llamado comúnmente sistema asociado) y que si tal sistema asociado es estable, entonces el sistema no lineal original también lo es. La formalización de este hecho matemático se dará en los siguientes teoremas.

Sea el siguiente sistema autónomo (en general no lineal) de la forma:

$$\frac{dx_i}{dt} = \Psi_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \quad \text{donde } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (5.38)$$

donde las funciones Ψ_i son derivables en un entorno del origen de coordenadas. El sistema (5.38) puede expresarse de la forma:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \Xi_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \quad \text{donde } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (5.39)$$

donde Ξ_i son infinitésimos de orden mayor a 1 en relación a $\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$, luego entonces, la investigación de la estabilidad del punto de reposo $x_i \equiv 0$ del sistema (5.39) se limita a estudiar la estabilidad del mismo punto del sistema:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad \text{donde } i = 1, 2, 3, \dots, n, \text{ y } a_{ij} \in \mathfrak{R} \quad (5.40)$$

denominado *sistema lineal asociado de primera aproximación* con respecto al sistema (5.39).

Claro está que el estudio de la estabilidad del sistema (5.40) es mucho más fácil que el del sistema original (5.39) siempre y cuando las a_{ij} sean constantes independientes de t . Si esto es así, el sistema (5.40) se considera *estacionario en primera aproximación*.

Estos estudios también fueron considerados en 1938, por el académico soviético **I.G. Malkin** en su obra "*On the Stability of Motion in a Sense of Lyapunov*".

Teorema 5.10 (Teorema de Liapunov-Malkin Sobre la Estabilidad en Primera Aproximación)

Si el sistema (5.39) cumple con las siguientes condiciones:

1. Es estacionario en primera aproximación,
2. si todas las funciones Ξ_i en un entorno suficientemente pequeño del origen de coordenadas, cuando $t \geq T \geq t_0$ satisfacen las desigualdades $|\Xi_i| \leq N \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2} + \alpha}$, donde N y α son constantes ($\alpha > 0$) y,

3. si todas las raíces de la ecuación característica:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0$$
 tienen *partes reales negativas*,

entonces las soluciones triviales $x_i \equiv 0$, ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) del sistema de ecuaciones (5.39) y del sistema (5.40) son *asintóticamente estables*.

Teorema 5.11 (Teorema de Liapunov-Malkin Sobre la Inestabilidad en Primera Aproximación)

Si el sistema (5.39) es estacionario en primera aproximación, si todas las funciones Ξ_i cumplen con las condiciones del teorema anterior y si por lo menos una raíz de la ecuación característica tiene *parte real positiva*, entonces los puntos de reposo $x_i \equiv 0$ de los sistemas (5.39) y (5.40) son *inestables*.

Ahora bien, existen casos en los que el sistema lineal asociado, es estable o asintóticamente estable, pero la parte no lineal puede influir en esta estabilidad, haciendo imposible la determinación de la estabilidad en primera aproximación. Los siguientes ejemplos muestran la aplicación de los dos teoremas anteriores.

Ejemplo 11.- Analizar estabilidad en primera aproximación de la *solución trivial* del sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3y - \operatorname{sen}(x) + x^5 \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{1}{4}x - 2y - \frac{1}{6}y^3 \end{aligned}$$

Solución.- Primeramente se verificará si las funciones Ξ_i cumplen o no con la condición 2 del **Teorema 5.10**. Por un lado, si $\Xi_1 = -\operatorname{sen}(x) + x^5$ y tomando $N = \alpha = 1$, es evidente que:

$$|-\operatorname{sen}(x) + x^5| < |\operatorname{sen}(x)| + |x^5| < |x^{15}| + |y^3| < (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$$

ya que $|\operatorname{sen}(x)| < 1$; por el otro lado, $\Xi_2 = -\frac{1}{6}y^3$, es evidente que:

$$|-\frac{1}{6}y^3| = \frac{1}{6}|y^3| < |x^3| + |y^3| < (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$$

por lo tanto ambas funciones cumplen con dicha condición. Ahora bien el sistema lineal asociado puede ser:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3y \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{1}{4}x - 2y \end{aligned}$$

Es evidente que este sistema es estacionario en primera aproximación ya que los coeficientes son independientes de t . Por otro lado, la ecuación característica esta dada por la expresión:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ \frac{1}{4} & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 4\lambda^2 + 8\lambda + 3 = 0$$

cuyas raíces son: $\lambda_1 = -1 + \frac{\sqrt{7}}{2} \wedge \lambda_2 = -1 - \frac{\sqrt{7}}{2}$; como la primera raíz es positiva, entonces el sistema no lineal debería ser *inestable*, sin embargo, no lo es. Esto es debido a que el término $\operatorname{sen}(x)$ puede ser desarrollado en una *serie de Maclaurin* de la forma: $\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$, cuyo primer término provoca que el sistema lineal asociado sea ahora:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x + 3y \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{1}{4}x - 2y \end{aligned}$$

la ecuación característica para este sistema es:

$$\begin{vmatrix} -1 - \lambda & 3 \\ \frac{1}{4} & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 4\lambda^2 + 12\lambda + 5 = 0$$

cuyas raíces son: $\lambda_1 = -\frac{1}{2} \wedge \lambda_2 = -\frac{5}{2}$, las cuales tienen parte real negativa. Por lo tanto la solución trivial $x_i \equiv 0$ del sistema no lineal es *asintóticamente estable*.

Ejemplo 12.- Analizar estabilidad en primera aproximación de la *solución trivial* del sistema:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2x + 5y - 3x^2 \\ \frac{dy}{dt} &= -5x - 6y + 2x^2 + y^4\end{aligned}$$

Solución.- Es evidente que este sistema es estacionario en primera aproximación ya que los coeficientes de los términos lineales son independientes de t . Ahora se verificará si se cumple o

no la condición 3 del **Teorema 5.10**. El sistema lineal asociado está dado por:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2x + 5y \\ \frac{dy}{dt} &= -5x - 6y\end{aligned}$$

cuya ecuación característica viene dada por: $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 \\ -5 & -6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$

cuyas raíces son: $\lambda_1 = -2 + 3i \wedge \lambda_2 = -2 - 3i$; como las partes reales de estas raíces complejas son positivas, entonces la condición 3 se cumple. Si bien es cierto que el sistema es asintóticamente estable en un pequeño entorno Ω al origen de coordenadas, el cumplimiento de la condición 3, no garantiza la estabilidad del sistema en todo el plano de fases, ya que dicho sistema es inestable fuera del entorno Ω . Esto es debido a que las funciones Ξ_i comienzan a influir en la estabilidad del sistema lineal. Por un lado para la función $\Xi_1 = -3x^2$ para $N = \alpha = 1$, se verifica:

$$|-3x^2| = 3|x^2| < (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$$

pero la función $\Xi_2 = 2x^2 + y^4$, no cumple con la condición 2 del **Teorema 5.10** ya que:

$$|2x^2 + y^4| > (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$$

En este caso especial, se puede hablar de una estabilidad relativa, ya que el plano de fases se divide en regiones para las cuales en una el sistema es asintóticamente estable y para la otra, es inestable. Desde el punto de vista teórico matemático, la estabilidad del sistema resulta ser relativa; pero para efectos prácticos, el sistema no lineal se considera *inestable*.

Ejemplo 13.- Analizar estabilidad en primera aproximación de la *solución trivial* del sistema:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x - y + x^2 + y^2 \\ \frac{dy}{dt} &= x + y - y^2\end{aligned}$$

Solución.- Se verificará primeramente si se cumple o no la condición 2 del **Teorema 5.10**. Para la función $\Xi_1 = x^2 + y^2$, tomando nuevamente $N = \alpha = 1$, se verifica:

$$|x^2 + y^2| < |x^2| + |y^2| < |x^3| + |y^3| < (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$$

y para la función $\Xi_2 = -y^2$ se verifica también que:

$$|-y^2| < |y^2| < |x^3| + |y^3| < (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$$

por lo tanto, sí se cumple dicha condición.

Ahora bien, el sistema lineal asociado está dado por: $\frac{dx}{dt} = x - y$; Es evidente que este sistema es $\frac{dy}{dt} = x + y$

estacionario en primera aproximación ya que los coeficientes son independientes de t . Por otro lado, la ecuación característica esta dada por la expresión:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

la cual tiene las raíces $\lambda_1 = 1 + i \wedge \lambda_2 = 1 - i$, como la segunda raíz es positiva, entonces acorde con el **Teorema 5.11**, la solución trivial $x_i \equiv 0$ del sistema no lineal es *inestable*.

De lo anterior se deduce que las condiciones del **Teorema 5.10** son necesarias más no suficientes si se toman en forma individual. La suficiencia estriba en que sean cumplidas las tres condiciones en un mismo caso de estudio.

CRITERIO DE HURWITZ

Como se mencionó en la reseña histórica, el Dr. **Adolf Hurwitz**, estableció las condiciones necesarias y suficientes para que una ecuación polinómica de grado n de la forma:

$$p_n(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{5.41}$$

con coeficientes reales a_0, a_1, \dots, a_n , donde $a_0 > 0$, tengan en todas sus raíces, partes reales negativas. Este resultado tuvo su más importante aplicación en el estudio de la estabilidad de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales.

Considérese el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -ax - by\end{aligned}\tag{5.42}$$

Si se aplica el método de reducción visto en la sección 5.2, este sistema puede ser equivalente a la ecuación diferencial lineal de segundo orden: $\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + ax = 0$, cuyo polinomio característico está dado por:

$$m^2 + bm + a = 0\tag{5.43}$$

Por otro lado, la ecuación característica del sistema lineal (5.42) es: $\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -a & -b-\lambda \end{vmatrix} = 0$, la cual simplificada, es el polinomio:

$$\lambda^2 + b\lambda + a = 0\tag{5.44}$$

que evidentemente tiene la misma forma que la ecuación (5.43). Se puede demostrar que **un sistema lineal homogéneo con n ecuaciones diferenciales de primer orden, puede ser reducido a una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n , cuyo polinomio característico coincide en forma con la ecuación característica del sistema lineal original.**

Esto da lugar a que el estudio de la estabilidad de un sistema lineal homogéneo y/o de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n , pueda reducirse a la investigación de la naturaleza de las raíces de la ecuación característica y/o del polinomio característico. Los siguientes teoremas son importantes en este sentido:

Teorema 5.12 (Sobre la Condición de Hurwitz)

La condición necesaria y suficiente para que todas las raíces del polinomio de la forma (5.41) tengan partes reales negativas, es que sean positivos todos los menores diagonales de la matriz:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

Esta matriz se denomina **matriz de Hurwitz**. Realmente es muy fácil construir una matriz de Hurwitz a partir de los coeficientes del polinomio dado por la relación (5.41). Para ello se puede seguir el siguiente procedimiento:

1. Se propone una matriz cuadrada de orden numéricamente igual al grado del polinomio característico de la ecuación diferencial de orden n dada.

2. En la diagonal principal de esta matriz, se colocan de izquierda a derecha todos los coeficientes del polinomio a partir de a_1
3. Las columnas contendrán coeficientes sólo de índice par o impar, comenzando en la primera columna con coeficientes de índice impar y así sucesivamente en forma alternada.
4. En el arreglo triangular superior, es decir, por encima de la diagonal principal, se colocan los coeficientes de índice menor (par ó impar según sea el caso) al indicado en el elemento de la diagonal de la columna que se trate, hasta llegar al elemento a_0 (en el caso par) ó al elemento a_1 . De ahí hacia arriba se colocan ceros hasta agotar la columna.
5. En forma similar, en el arreglo triangular inferior, es decir, por debajo de la diagonal principal, se colocan los coeficientes de índice mayor (par ó impar según sea el caso) al indicado en el elemento de la diagonal de la columna que se trate, hasta llegar al elemento a_n ó a_{n-1} según sea el caso. De ahí hacia abajo, se colocan ceros hasta agotar la columna que se trate.

Por ejemplo, si se tiene la ecuación diferencial $x''' + 2x'' + 5x' + 3x = 0$, el polinomio característico sería $\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda + 3 = 0$. En este caso $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 3$ y la matriz de Hurwitz tiene la

forma: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ los menores diagonales de Hurwitz serían en este caso:

$$\Delta_1 = 2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \quad y \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Teorema 5.13.- El polinomio $p(\lambda)$ de potencia $n \geq 1$ se llama *polinomio estable*, si todas sus raíces λ_i tienen las partes reales negativas, es decir $Re\{\lambda_i\} < 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}$.

Geométricamente significa que dichas raíces se encuentran en el semiplano izquierdo del *plano de Argand*.

Teorema 5.14 (Sobre la Estabilidad según los Menores Diagonales de Hurwitz).- Sea $\frac{dx_i}{dt} = \Psi_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ un sistema lineal homogéneo de ecuaciones diferenciales y $p_n(\lambda) = 0$ su ecuación característica. La solución trivial $x_i \equiv 0$ del sistema es *asintóticamente estable* si y solo si, son todos positivos los menores diagonales de la *matriz de Hurwitz* asociada a dicho sistema.

Este teorema, si se cumple, garantiza que el polinomio característico tenga solamente partes reales negativas en sus raíces y por ende, que el sistema sea *asintóticamente estable*. Los siguientes ejemplos ilustran esto precisamente. Si no se cumple, el sistema en cuestión es *inestable*.

Ejemplo 14.- Analizar la estabilidad de la solución trivial del sistema:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -x + y \\ \frac{dy}{dt} &= x - 3y\end{aligned}$$

Solución.- La ecuación característica del sistema esta dada por:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 2 = 0$$

de donde $a_0 = 1$, $a_1 = 4$ y $a_2 = 2$; por lo tanto la matriz de Hurwitz asociada es: $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y los menores diagonales son:

$$\Delta_1 = 4 \quad \text{y} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

Como ambos determinantes son positivos, entonces acorde con el **Teorema 5.14**, el sistema lineal homogéneo es *asintóticamente estable*.

Ejemplo 15.- Analizar la estabilidad de la solución trivial del sistema:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 5x + 4y \\ \frac{dy}{dt} &= -3x - 2y\end{aligned}$$

Solución.- La ecuación característica del sistema esta dada por:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ -3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

de donde: $a_0 = 1$, $a_1 = -3$ y $a_2 = 2$; por lo tanto la matriz de Hurwitz asociada es: $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y los

menores diagonales son: $\Delta_1 = -3$ y $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6$

Como ambos determinantes son positivos, entonces el sistema lineal homogéneo es *inestable*.

Ejemplo 16.- Analizar la estabilidad de la solución trivial del sistema homogéneo:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} - \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \mathbf{0}$$

Solución.- La ecuación característica del sistema esta dada por:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 & 0 \\ 1 & 0-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 10\lambda^2 + 22\lambda = 0$$

de donde: $a_0 = 1$, $a_1 = -10$, $a_2 = 22$ y $a_3 = 0$; por lo tanto la matriz de Hurwitz asociada es:

$$\begin{pmatrix} -10 & 1 & 0 \\ 0 & 22 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y los menores diagonales son:

$$\Delta_1 = -10, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -10 & 1 \\ 0 & 22 \end{vmatrix} = -220 \quad \text{y} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -10 & 1 & 0 \\ 0 & 22 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

A pesar de que el tercer menor es igual a cero, los menores negativos indican que el sistema lineal homogéneo dado, es *inestable*. Si se utilizan herramientas computacionales para graficar las soluciones por separado, es fácil observar que aparentemente el sistema es asintóticamente estable para el intervalo finito $0 < t < 50$, pero para valores de $t > 50$ aproximadamente, las tres variables dependientes aumentan dramáticamente en valor absoluto.

Una clara ventaja de este criterio estriba en que puede determinar la estabilidad asintótica de sistemas lineales aún teniendo una gran cantidad de variables dependientes, ya que con otros criterios, la determinación de la estabilidad comienza a ser incierta a partir de 3 variables dependientes. Por otro lado, una seria desventaja del criterio de Hurwitz, está en la imposibilidad de determinar la estabilidad en los casos críticos, es decir, cuando el sistema presenta soluciones periódicas, ya que en estos casos uno de los menores diagonales puede ser cero, como lo demuestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 17.- Analizar la estabilidad de la solución trivial del sistema homogéneo:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3x + 7y \\ \frac{dy}{dt} &= x - 3y \end{aligned}$$

Solución.- La ecuación característica del sistema esta dada por:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 7 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 16 = 0$$

de donde: $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ y $a_2 = -16$; por lo tanto la matriz de Hurwitz asociada es: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -16 \end{pmatrix}$ y

los menores diagonales son:

$$\Delta_1 = 0 \quad \text{y} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -16 \end{vmatrix} = 0$$

Como estos determinantes son nulos, no se puede decir nada acerca de su signo, luego entonces no es posible aplicar en este caso el **Teorema 5.14** para determinar la estabilidad del sistema dado.



Ejercicios Suplementarios

Sección 5.5 Ejercicios 5.4

I.- Analice la estabilidad de la solución trivial $x_i \equiv 0$ de los siguientes sistemas aplicando la definición de estabilidad según Liapunov

$$1.- \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = -4x - 3y \end{cases}$$

$$2.- \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + y \end{cases}$$

$$3.- \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 5y \\ \frac{dy}{dt} = -5x - 6y \end{cases}$$

$$4.- \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = -4y \end{cases}$$

II.- Aplique el Segundo Método de Liapunov ó el Teorema de Chetáev para analizar la estabilidad de los siguientes sistemas:

$$1.- \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x^3 - 5y \\ \frac{dy}{dt} = 5x - 3y^3 \end{cases}$$

$$2.- \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -xy^4 \\ \frac{dy}{dt} = x^4 y \end{cases}$$

$$5.- \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^5 + y^3 \\ \frac{dy}{dt} = x^3 + y^5 \end{cases}$$

$$6.- \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2xy \\ \frac{dy}{dt} = x^2 - y^3 \end{cases}$$

$$3.- \frac{dx}{dt} = x^2 + y^2$$

$$\frac{dy}{dt} = x^2 - y^2$$

$$4.- \frac{dx}{dt} = -x^3 - 2y$$

$$\frac{dy}{dt} = 3x - 4y^3$$

$$7.- \frac{dx}{dt} = x - xy^4$$

$$\frac{dy}{dt} = -x^2y^3 + y$$

$$8.- \frac{dx}{dt} = -2x + xy^3$$

$$\frac{dy}{dt} = -x^2y^2 - y^3$$

III.- Analizar la estabilidad por la primera aproximación de la solución trivial de los siguientes sistemas:

$$1.- \frac{dx}{dt} = -x + y + 2x^4 - y^6$$

$$\frac{dy}{dt} = x - 3y + 11y^4$$

$$2.- \frac{dx}{dt} = 2x + y - 5y^2$$

$$\frac{dy}{dt} = 3x + y + \frac{1}{2}x^3$$

$$3.- \frac{dx}{dt} = -2x + 8\text{sen}^2(y)$$

$$\frac{dy}{dt} = x - 3y + 4x^3$$

$$4.- \frac{dx}{dt} = \frac{1}{4}(e^x - 1) - 9y + x^4$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{5}x - \text{sen}(y) + y^{14}$$

$$5.- \frac{dx}{dt} = x^3 - 4y$$

$$\frac{dy}{dt} = 3x - y^2$$

$$6.- \frac{dx}{dt} = 10\text{sen}(x) - 29y + 3y^3$$

$$\frac{dy}{dt} = 5x - 14\text{sen}(y) + y^2$$

IV.- Aplique el Criterio de Hurwitz para analizar la estabilidad de la solución trivial $x_i \equiv 0$ de los siguientes sistemas:

$$1.- \frac{dx}{dt} = x + y$$

$$\frac{dy}{dt} = -4x - 3y$$

$$2.- \frac{dx}{dt} = 4x - 3y$$

$$\frac{dy}{dt} = 8x - 6y$$

$$3.- \frac{dx}{dt} = x + 6y$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x + 2y$$

$$5.- \frac{d\mathbf{X}}{dt} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \mathbf{0}$$

$$6.- \frac{dx}{dt} = 3x - 5y$$

$$\frac{dy}{dt} = 5x - 7y$$

$$7.- \frac{d\mathbf{X}}{dt} - \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathbf{X} = \mathbf{0}$$

$$4.- \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + y \\ \frac{dy}{dt} = -8x - 2y \end{cases}$$

$$8.- \frac{d\mathbf{X}}{dt} - \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \mathbf{0}$$



Referencias Bibliográficas del Capítulo 5

Obras consultadas:

Bell, E. T., *“The Development of Mathematics”*, 4ª Edición, MacGraw Hill Book Co. of New York, 1985

Chetaev, N.G. *“The stability of Motion”*. Translate by M. Nadler, Pergamon, Press, New York, 1961

D’Azzo J.J., Houpis C.H., *“Feedback Control System Analysis & Synthesis”*, Second Edition, McGraw-Hill Inc., USA, 1966

Elgoltz L., *“Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional”*, 3ª Edición en español, Editorial Mir Moscú, Rusia, 1983

Euler L., *“De Theoria Lunae ad Maiorem Perfectionis Gradum Evehenda”*, Publicado en Acta Academiae Scientarum Imperialis Petropolitinae por St. Petersburg Academy, Rusia, 1777

Forsyth A.R., *“A Treatise on Differential Equations”*, First Edition, Published by Macmillan and Co., 1885

Lagrange J.L., *“Sur le Mouvement des Noeuds des Orbits Planetéires”* publicado en Nouveaux Mémoires de l’Académie Royale de Sciences et Belles Lettres de Berlin, 1774

Lagrange J.L., *“Théorie des Variations Séculaires des Éléments des Planètes”* publicado en Nouveaux Mémoires de l’Académie Royale de Sciences et Belles Lettres de Berlin, 1781

Legendre A.M., *“Traite des Fonctions Elliptiques et de Leurs Applications”*, editado por Gauthier Villards et Fils, Imprimeur Libraires, París, Francia, 1891

Liapunov A.M., *“Problème General de la Stabilité du Mouvement”*, Editado por Annales de la Faculté de Sciences de Toulouse, Deuxieme Série, Tome IX, 1907

Liapunov A.M., *“Sur les Figures d’Équilibre peu Différentes del Ellipsoïds d’une Masse Liquide Homogène Douée d’un Mouvement de Rotation”*, Publicdado por L’Académie Impériale des Sciences de St. Péterbourg, Tome I, 1906

Makarenko G., Kiseliov A., Krasnov M., *“Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias”*, 1ª Edición, Editorial Mir Moscú, Rusia, 1972

Netushil A., “*Teoría del Mando Automático*”, Tomo I, 1ª Edición en español, Editorial Mir Moscú, Rusia, 1987

Poincaré J.H., “*Leçons de Mécanique Céleste. Théorie Générale des Perturbations Planetaires*”, Tomo I, Editado por Gauthier Villards, Imprimeur Libraires, París, Francia, 1905

Poincaré J.H., “*Leçons de Mécanique Céleste. Développement de la Fonction Perturbatrice*”, Tomo II, Editado por Gauthier Villards, Imprimeur Libraires, París, Francia, 1907

Poincaré J.H., “*Leçons de Mécanique Céleste. Théorie des Marées*”, Tomo III, Editado por Gauthier Villards, Imprimeur Libraires, París, Francia, 1910

Poisson D.S., “*Traite de Mécanique*”, Primer Tomo, Editado por Chez Veuve M^{MR} Courcier, Imprimeur Libraire, París, Francia, 1811

Ribnikov K., “*Historia de las Matemáticas*”, 1ª Edición, Editorial Mir Moscú, Rusia, 1986

Simmons G.F., “*Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas*”, 2ª Edición, Editorial McGraw Hill Interamericana de España, España, 1993

Sitios web consultados en Internet

Baráková, L, Volokitin, E., “*Bifurcation Diagram of a Cubic Three-Parameter Autonomous System*”, Archivo recuperado desde Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2005(2005), No. 83, pp. 1–16, Url: <http://ejde.math.txstate.edu> or <http://ejde.math.unt.edu>

O'Connor J. J., Robertson E. F., “*MacTutor History of Mathematics*”, sitio web en internet de la Escuela de Matemáticas y Estadística de la Universidad de San Andrews, Escocia, 2007
<http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/>

Nápoles J.E., Negron C., “*La Historia de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Contadas por sus Libros de Texto*”, Artículo publicado en la Internet en la “Revista Electrónica de Didáctica de las Matemáticas”, Universidad Autónoma de Querétaro, México, 2002
<http://www.uaq.mx/matematicas/redm/>

Nucci, M.C., “Using Lie Symmetries in Epidemioeology”, 2004 Conference on Diff. Eqns. and Appl. in Math. Biology, Nanaimo, BC, Canada, Archivo resuperado desde Electronic Journal of Differential Equations, Conference 12, 2005, pp. 87–101., Url: <http://ejde.math.txstate.edu>

Phat, V.N., “Stabilization of Linear Continuous Time-Varying Systems with State Delays in Hilbert Spaces”, Archivo resuperado desde Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2001(2001), No. 67, pp. 1-13., Url: <http://ejde.math.txstate.edu>





Tablas y Fórmulas Matemáticas

"El arte de hacer matemáticas consiste en encontrar ese caso especial, el cual contiene todos los gérmenes de la generalidad"
Hilbert, David



LA DERIVADA DE LA FUNCIÓN DE UNA VARIABLE

Definición.- Sea $f(x)$ una función definida en algún intervalo (a,b) y x_0 un punto dentro de este intervalo. Si dicha función es continua en el punto x_0 , entonces la magnitud $\frac{df(x_0)}{dx}$ es la *derivada* de la función en ese punto. Geométricamente dicha magnitud representa *la pendiente de la recta tangente* a la curva de $f(x)$ en el punto x_0 . Analíticamente tal magnitud representa la *velocidad instantánea de cambio* de la función con respecto a x en ese mismo punto.

TABLA DE DERIVADAS DE ALGUNAS FUNCIONES ELEMENTALES

$\frac{d(c)}{dx} = 0$	$\frac{d(x)}{dx} = 1$	$\frac{d(cx)}{dx} = c$
$\frac{d(u+v+\dots+w)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \dots + \frac{dw}{dx}$	$\frac{d(cx^n)}{dx} = cnx^{n-1}$	$\frac{d(cv^n)}{dx} = cnv^{n-1} \frac{dv}{dx}$
$\frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$	$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$	$\frac{d(\ln v)}{dx} = \frac{1}{v} \frac{dv}{dx}$
$\frac{d(\log_a v)}{dx} = \frac{\log_a e}{v} \frac{dv}{dx}$	$\frac{d(a^v)}{dx} = a^v \ln a \frac{dv}{dx}$	$\frac{d(e^v)}{dx} = e^v \frac{dv}{dx}$
$\frac{d(u^v)}{dx} = vu^{v-1} \frac{du}{dx} + u^v \ln u \frac{dv}{dx}$	$\frac{d(\operatorname{sen} v)}{dx} = \cos v \frac{dv}{dx}$	$\frac{d(\operatorname{cos} v)}{dx} = -\operatorname{sen} v \frac{dv}{dx}$
$\frac{d(\tan v)}{dx} = \sec^2 v \frac{dv}{dx}$	$\frac{d(\operatorname{cot} v)}{dx} = -\operatorname{csc}^2 v \frac{dv}{dx}$	$\frac{d(\operatorname{sec} v)}{dx} = \operatorname{sec} v \tan v \frac{dv}{dx}$
$\frac{d(\operatorname{csc} v)}{dx} = -\operatorname{csc} v \cot v \frac{dv}{dx}$	$\frac{d(\operatorname{arcsen} v)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \frac{dv}{dx}$	$\frac{d(\operatorname{arccos} v)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \frac{dv}{dx}$

$\frac{d(\arctan v)}{dx} = \frac{1}{v^2 + 1} \frac{dv}{dx}$	$\frac{d(\operatorname{arc cot} v)}{dx} = -\frac{1}{v^2 + 1} \frac{dv}{dx}$	$\frac{d(\operatorname{arc sec} v)}{dx} = \frac{1}{v\sqrt{v^2 - 1}} \frac{dv}{dx}$
$\frac{d(\operatorname{senh} v)}{dx} = \operatorname{cosh} v \frac{dv}{dx}$	$\frac{d(\operatorname{cosh} v)}{dx} = \operatorname{senh} v \frac{dv}{dx}$	$\frac{d(\operatorname{tanh} v)}{dx} = \operatorname{sech}^2 v \frac{dv}{dx}$
$\frac{d(\operatorname{csc} h v)}{dx} = -\operatorname{csch} v \cot h v \frac{dv}{dx}$	$\frac{d(\operatorname{sec} h v)}{dx} = -\operatorname{sech} v \tanh v \frac{dv}{dx}$	$\frac{d(\operatorname{cot} h v)}{dx} = -\operatorname{csch}^2 v \frac{dv}{dx}$
$\frac{d(\operatorname{arcsen} h v)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{v^2 + 1}} \frac{dv}{dx}$	$\frac{d(\operatorname{arccos} h v)}{dx} = \frac{\pm 1}{\sqrt{v^2 - 1}} \frac{dv}{dx}$	$\frac{d(\operatorname{arctan} h v)}{dx} = \frac{1}{1 - v^2} \frac{dv}{dx}$
$\frac{d(\operatorname{arc cot} h v)}{dx} = \frac{1}{1 - v^2} \frac{dv}{dx}$	$\frac{d(\operatorname{arc sec} h v)}{dx} = \frac{\mp 1}{v\sqrt{1 - v^2}} \frac{dv}{dx}$	$\frac{d(\operatorname{arc csc} h v)}{dx} = \frac{\mp 1}{v\sqrt{1 + v^2}} \frac{dv}{dx}$

LA INTEGRAL INDEFINIDA EN \mathbb{R}^2

Definición.- Sea $f(x)$ una función definida $\forall x \in \mathbb{R}$, entonces la expresión $\int f(x) dx$ es una nueva función $F(x)$ llamada *primitiva* de $f(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$. Ahora bien a la expresión $\int f(x) dx + C$ se le conoce como la *integral indefinida* de $f(x)$ y geoméricamente representa una *familia monoparamétrica de curvas en el plano cartesiano*.

ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES INDEFINIDAS

Propiedad del Factor Constante

$$\int af(x) dx = a \int f(x) dx$$

Propiedad de Linealidad

$$\int \left(\sum_{k=1}^n f_k(x) \right) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx + \cdots + \int f_n(x) dx$$

Integración por Partes

$$\int u dv = uv - \int v du$$

A continuación se mostrará una serie de integrales indefinidas inmediatas de una función $u(x)$

ALGUNAS INTEGRALES INDEFINIDAS INMEDIATAS

1. $\int adx = ax$
2. $\int u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1}$
3. $\int \frac{du}{u} = \ln u$
4. $\int e^u du = e^u$
5. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a}$
6. $\int \operatorname{sen}(u) du = -\cos(u)$
7. $\int \cos(u) du = \operatorname{sen}(u)$
8. $\int \tan(u) du = \ln \sec(u) = -\ln \cos(u)$
9. $\int \cot(u) du = \ln \operatorname{sen}(u)$
10. $\int \sec(u) du = \ln |\sec(u) + \tan(u)|$
11. $\int \csc(u) du = \ln |\csc(u) - \cot(u)|$
12. $\int \operatorname{senh}(u) du = \operatorname{cosh}(u)$
13. $\int \operatorname{cosh}(u) du = \operatorname{senh}(u)$
14. $\int \tanh(u) du = \ln \operatorname{cosh}(u)$
15. $\int \operatorname{coth}(u) du = \ln \operatorname{sen} h(u)$
16. $\int \operatorname{sec} h(u) du = \operatorname{arcsen}(\tanh(u))$
17. $\int \operatorname{csc} h(u) du = \ln \tanh\left(\frac{u}{2}\right)$
18. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctan}\left(\frac{u}{a}\right)$
19. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{u-a}{u+a}\right) = -\frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{coth}\left(\frac{u}{a}\right)$
20. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{a+u}{a-u}\right) = \frac{1}{a} \operatorname{arctanh}\left(\frac{u}{a}\right)$
21. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arc} \operatorname{sen}\left(\frac{u}{a}\right)$
22. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right)$
23. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2 - a^2}\right)$
24. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{sec}\left|\frac{u}{a}\right|$
25. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 + a^2}} = -\frac{1}{a} \ln\left(\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u}\right)$
26. $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a} \ln\left(\frac{a + \sqrt{u^2 - a^2}}{u}\right)$

FÓRMULAS DE REDUCCIÓN

27. $\int \operatorname{sen}^n(au) du = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1}(au) \cos(au)}{an} + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2}(au) du$
28. $\int \cos^n(au) du = \frac{\operatorname{sen}(au) \cos^{n-1}(au)}{an} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2}(au) du$
29. $\int \tan^n(au) du = \frac{\tan^{n-1}(au)}{a(n-1)} - \int \tan^{n-2}(au) du$
30. $\int \cot^n(au) du = -\frac{\cot^{n-1}(au)}{a(n-1)} - \int \cot^{n-2}(au) du$
31. $\int \sec^n(au) du = \frac{\sec^{n-2}(au) \tan(au)}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2}(au) du$

$$32. \int \csc^n(au) du = -\frac{\csc^{n-2}(au) \cot(au)}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2}(au) du$$

ALGUNAS SUSTITUCIONES IMPORTANTES

$\int F(ax+b) dx = \frac{1}{a} \int F(u) du$	donde $u = ax+b$
$\int F(\sqrt{ax+b}) dx = \frac{2}{a} \int uF(u) du$	donde $u = \sqrt{ax+b}$
$\int F(\sqrt[n]{ax+b}) dx = \frac{n}{a} \int u^{n-1} F(u) du$	donde $u = \sqrt[n]{ax+b}$
$\int F(\sqrt{a^2-x^2}) dx = a \int F(a \cos u) \cos u du$	donde $x = a \operatorname{sen} u$
$\int F(\sqrt{a^2+x^2}) dx = a \int F(a \sec u) \sec^2 u du$	donde $x = a \tan u$
$\int F(\sqrt{x^2-a^2}) dx = a \int F(a \tan u) \sec u \tan u du$	donde $x = a \sec u$
$\int F(e^{ax}) dx = \frac{1}{a} \int \frac{F(u)}{u} du$	donde $u = e^{ax}$
$\int F(\ln x) dx = \int F(u) e^u du$	donde $u = \ln x$
$\int F\left(\operatorname{arsen}\left(\frac{x}{a}\right)\right) dx = a \int F(u) \cos u du$	donde $u = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right)$
$\int F(\operatorname{sen} x, \operatorname{cos} x) dx = 2 \int F\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right) du$	donde $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS, HIPERBÓLICAS Y LOGARÍTMICAS

Relaciones entre las Funciones Trigonómicas

$$1. \tan A = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{cos} A}$$

$$2. \cot A = \frac{\operatorname{cos} A}{\operatorname{sen} A}$$

$$3. \sec A = \frac{1}{\operatorname{cos} A}$$

$$4. \csc A = \frac{1}{\operatorname{sen} A}$$

$$5. \operatorname{sen}^2 A + \operatorname{cos}^2 A = 1$$

$$6. \sec^2 A - \tan^2 A = 1$$

$$7. \csc^2 A - \cot^2 A = 1$$

Funciones de Ángulos Negativos

$$8. \operatorname{sen}(-A) = -\operatorname{sen} A$$

$$9. \operatorname{cos}(-A) = \operatorname{cos} A$$

$$10. \tan(-A) = -\tan A$$

$$11. \csc(-A) = -\csc A$$

$$12. \sec(-A) = \sec A$$

$$13. \cot(-A) = -\cot A$$

Fórmulas de Adición, del Ángulo Doble y del Ángulo Mitad

$$14. \sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$

$$15. \cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

$$16. \tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$

$$17. \cot(A \pm B) = \frac{\cot A \cot B \mp 1}{\cot A \pm \cot B}$$

$$18. \sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

$$19. \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A$$

$$20. \tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

$$21. \sin\left(\frac{A}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$$

$$22. \cos\left(\frac{A}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$$

$$23. \tan\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{\sin A}{1 + \cos A} = \csc A - \cot A$$

Fórmulas de Suma, Diferencia y Producto de las Funciones Trigonómicas

$$24. \sin A + \sin B = 2 \sin \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B)$$

$$25. \sin A - \sin B = 2 \cos \frac{1}{2}(A+B) \sin \frac{1}{2}(A-B)$$

$$26. \cos A + \cos B = 2 \cos \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B)$$

$$27. \cos A - \cos B = 2 \sin \frac{1}{2}(A+B) \sin \frac{1}{2}(B-A)$$

$$28. \sin A \sin B = \frac{1}{2} \{ \cos(A-B) - \cos(A+B) \}$$

$$29. \cos A \cos B = \frac{1}{2} \{ \cos(A-B) + \cos(A+B) \}$$

$$30. \sin A \cos B = \frac{1}{2} \{ \sin(A-B) + \sin(A+B) \}$$

Fórmulas de las Potencias de las Funciones Trigonómicas

$$31. \sin^2 A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2A)$$

$$32. \cos^2 A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2A)$$

$$33. \sin^3 A = \frac{3}{4} \sin(A) - \frac{1}{4} \sin(3A)$$

$$34. \cos^3 A = \frac{3}{4} \cos(A) + \frac{1}{4} \cos(3A)$$

$$35. \sin^4 A = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos(2A) + \frac{1}{8} \cos(4A)$$

$$36. \cos^4 A = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos(2A) + \frac{1}{8} \cos(4A)$$

$$37. \sin^5 A = \frac{5}{8} \sin(A) - \frac{5}{16} \sin(3A) + \frac{1}{16} \sin(5A)$$

$$38. \cos^5 A = \frac{5}{8} \cos(A) + \frac{5}{16} \cos(3A) + \frac{1}{16} \cos(5A)$$

Relaciones entre las Funciones Trigonómicas Inversas

$$39. \arcsen x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$40. \arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$$

$$41. \operatorname{arc} \csc x + \operatorname{arc} \sec x = \frac{\pi}{2}$$

$$42. \operatorname{arc} \csc x = \operatorname{arc} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$43. \operatorname{arc} \sec x = \operatorname{arccos}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$44. \operatorname{arc} \cot x = \operatorname{arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$45. \operatorname{arcsen}(-x) = -\operatorname{arc} \sin(x)$$

$$46. \operatorname{arctan}(-x) = -\operatorname{arctan}(x)$$

$$47. \operatorname{arc} \csc(-x) = -\operatorname{arc} \csc(x)$$

$$48. \operatorname{arccos}(-x) = \pi - \operatorname{arccos}(x)$$

$$49. \operatorname{arc} \cot(-x) = \pi - \operatorname{arc} \cot(x)$$

$$50. \operatorname{arc sec}(-x) = \pi - \operatorname{arc sec}(x)$$

Definición de las Funciones Hiperbólicas

$$51. \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$54. \operatorname{cosh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$52. \operatorname{cosh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$55. \operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$53. \operatorname{tanh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$56. \operatorname{csch} x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

Relaciones entre las Funciones Hiperbólicas

$$57. \operatorname{tanh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\operatorname{cosh} x}$$

$$60. \operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}$$

$$58. \operatorname{coth} x = \frac{\operatorname{cosh} x}{\operatorname{senh} x}$$

$$61. \operatorname{cosh}^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$

$$62. \operatorname{sech}^2 x + \operatorname{tanh}^2 x = 1$$

$$59. \operatorname{sech} x = \frac{1}{\operatorname{cosh} x}$$

$$63. \operatorname{coth}^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1$$

Leyes de Logaritmos

$$64. \log_a AB = \log_a A + \log_a B$$

$$65. \log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$$

$$66. \log_a A^n = n \log_a A$$

NÚMEROS COMPLEJOS

Definición.- Sea a y b dos números reales cualesquiera, entonces a la expresión $a + bi$ se le conoce como el **número complejo** cuya parte real es a y la parte imaginaria es bi , donde i es la unidad imaginaria tal que $i^2 = -1$.

Al número complejo $a + bi$ se le denota por z y geoméricamente es un **vector** en el plano complejo denominado **plano de Wessel-Argand**. Son válidas las siguientes operaciones con los números complejos:

Adición y Sustracción de Números Complejos

$$1. (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$2. (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Multiplicación de Números Complejos

$$3. (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

División de Números Complejos

$$4. \frac{a + bi}{c + di} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \right) + \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right) i$$

Relación entre las Funciones Exponenciales y Logarítmicas

$$5. e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$6. e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

$$7. \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$8. \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$9. \tan x = -i \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}} \right)$$

$$10. \cot x = i \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}} \right)$$

$$11. \sec x = \frac{2}{e^{ix} + e^{-ix}}$$

$$12. \csc x = \frac{2i}{e^{ix} - e^{-ix}}$$



Referencias Bibliográficas del Apéndice A

Spiegel M., Abellanas L., “*Fórmulas y Tablas de la Matemática Aplicada*”, 1ª Edición, MacGraw-Hill Interamericana, México, 2000

Bronshtein I., Semendiaev K., “*Manual de Matemáticas para Ingenieros y Estudiantes*”, 1ª Edición, Ediciones Quinto Sol SA, México, 1986

Demidóvich B., “*Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático*”, 1ª Edición, Editorial Mir Moscú, Rusia, 1980



Regresión Lineal por Mínimos Cuadrados

“La matemática sólo se preocupa por la enumeración y comparación de relaciones”
Gauss, Karl Friedrich



REGRESIÓN LINEAL

APROXIMACIÓN LINEAL POR MÍNIMOS CUADRADOS



A.M. Legendre



C.F. Gauss

El desarrollo del método de aproximación por mínimos cuadrados, tuvo lugar en la astronomía matemática del siglo XVIII; Era la época del gran matemático alemán **Karl Friedrich Gauss**, quien desarrolló esta técnica en 1795, debido a la necesidad de encontrar la distribución de las medidas de un dato astronómico observado, cuando las medidas difieren a causa de errores de observación. El matemático francés **Adrien Marie Legendre** lo

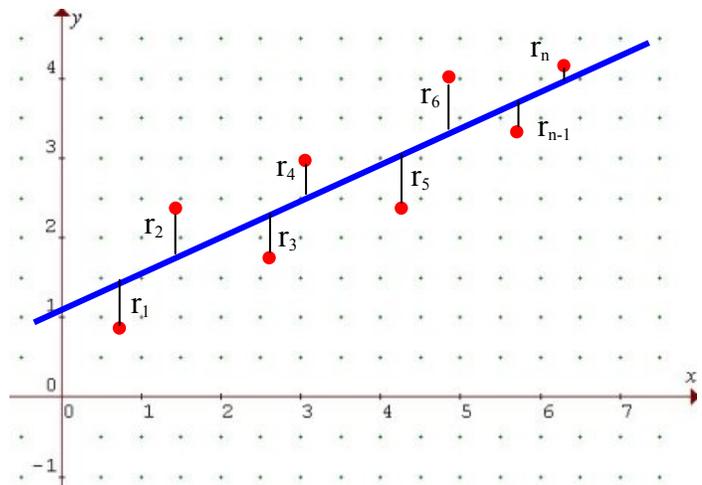
reinventó en 1806.

Una forma de aproximar el comportamiento lineal de una *dispersión de datos*, es mediante una *forma polinómica lineal*

$$y = c_1 + c_2x \quad (B-1)$$

Sean conocidos n valores de una variable experimental: y_1, y_2, \dots, y_n que corresponden a los n valores x_1, x_2, \dots, x_n del argumento x .

La siguiente gráfica muestra una dispersión de datos y una línea recta de aproximación, en donde los r_i representan las distancias entre las ordenadas de los puntos de la dispersión y las ordenadas de la recta de aproximación



$$r_i = y_i - y_i^*$$

o más específicamente:

$$r_i = y_i - (c_1 + c_2 x_i)$$

MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS

El método de los mínimos cuadrados, desarrollado por **Gauss** y reinventado por **Legendre** consiste en proponer una función de la forma:

$$S = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \dots + r_n^2 \quad (\text{B-2})$$

Poniendo a S en función de las constantes arbitrarias c_1 y c_2

$$S(c_1, c_2) = [y_1 - (c_1 + c_2 x_1)]^2 + [y_2 - (c_1 + c_2 x_2)]^2 + \dots + [y_n - (c_1 + c_2 x_n)]^2$$

Se elegirán las constantes arbitrarias c_1 y c_2 de tal manera que (B-2) tome un valor mínimo, para ello, deben de cumplirse las siguientes relaciones:

$$\frac{\partial S}{\partial c_1} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial S}{\partial c_2} = 0 \quad (\text{B-3})$$

calculando la primera de estas derivadas se tiene:

$$\frac{\partial S}{\partial c_1} = -2[y_1 - (c_1 + c_2 x_1)] - 2[y_2 - (c_1 + c_2 x_2)] - 2[y_3 - (c_1 + c_2 x_3)] - \dots - 2[y_n - (c_1 + c_2 x_n)] = 0$$

simplificando e introduciendo la notación sigma, se tiene:

$$n c_1 + \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) c_2 = \sum_{k=1}^n y_k \quad (\text{B-4})$$

ahora se calcula la segunda de las derivadas de la relación (B-3)

$$\frac{\partial S}{\partial c_2} = -2x_1 [y_1 - (c_1 + c_2 x_1)] - 2x_2 [y_2 - (c_1 + c_2 x_2)] - \dots - 2x_n [y_n - (c_1 + c_2 x_n)] = 0$$

simplificando e introduciendo la notación sigma, se tiene:

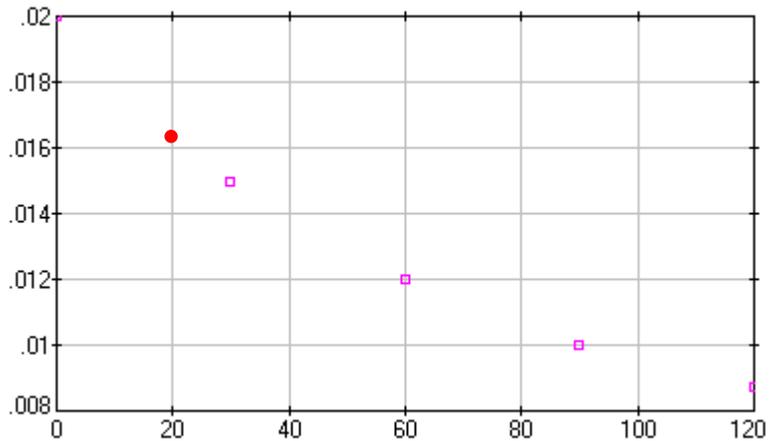
$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \right) c_1 + \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) c_2 = \sum_{k=1}^n x_k y_k \quad (\text{B-5})$$

Usando la *regla de Cramer* para resolver el sistema formado por las ecuaciones (B-4) y (B-5) se obtiene:

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{k=1}^n y_k & \sum_{k=1}^n x_k \\ \sum_{k=1}^n x_k y_k & \sum_{k=1}^n x_k^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum_{k=1}^n x_k \\ \sum_{k=1}^n x_k & \sum_{k=1}^n x_k^2 \end{vmatrix}}, \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum_{k=1}^n y_k \\ \sum_{k=1}^n x_k & \sum_{k=1}^n x_k y_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum_{k=1}^n x_k \\ \sum_{k=1}^n x_k & \sum_{k=1}^n x_k^2 \end{vmatrix}} \quad (\text{B-6})$$

Ejemplo.- La siguiente gráfica muestra los datos de la descomposición del Dióxido de Nitrógeno medido en moles por litro, en función del tiempo medido en minutos. Emplee todos los datos y use las fórmulas (B-6) para determinar los coeficientes c_1 y c_2 del modelo (B-1), luego hállese la ecuación de la línea recta de aproximación y utilícela para estimar la descomposición de dicha sustancia cuando $t = 20$ min.

t	%NO ₂ (y)
0	0.0200
30	0.0150
60	0.0120
90	0.0100
120	0.0087



Para estimar los coeficientes c_1 y c_2 es recomendable elaborar la siguiente tabla:

t	%NO ₂ (y)	t ²	ty
0	0.0200	0	0
30	0.0150	900	0.45
60	0.0120	3600	0.72
90	0.0100	81000	0.90
120	0.0087	14400	1.044
300	0.0657	27000	3.114

De la tabla se deduce:

$$\sum_{k=1}^5 t_k = 300, \quad \sum_{k=1}^5 y_k = 0.0657, \\ \sum_{k=1}^5 t_k y_k = 3.114, \quad \sum_{k=1}^5 t_k^2 = 27000, \quad n = 5$$

Aplicando las fórmulas (B-6) se obtiene:

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0.0657 & 300 \\ 3.114 & 27000 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 300 \\ 300 & 27000 \end{vmatrix}} \quad \wedge \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 0.0657 \\ 300 & 3.114 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 300 \\ 300 & 27000 \end{vmatrix}}$$

de donde:

$$c_1 = 0.01866 \quad y \quad c_2 = -0.000092$$

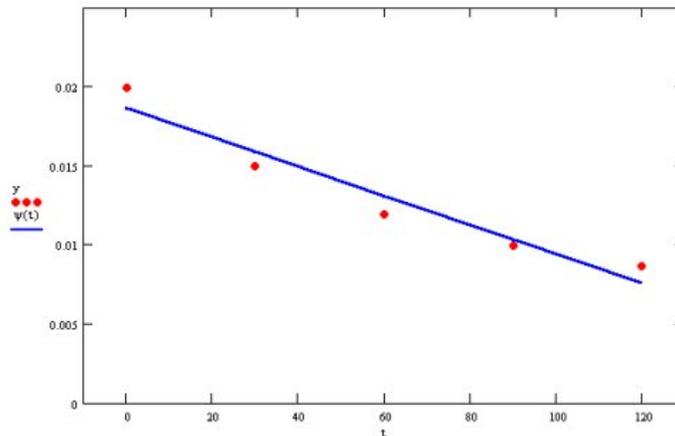
La ecuación de la recta de aproximación o recta de regresión es:

$$y = 0.01866 - 0.000092t$$

La siguiente gráfica, muestra la dispersión de puntos y la recta de aproximación

Finalmente, se evaluará la ecuación de recta encontrada en el valor $t = 20$

$$y(20) = 0.01866 - 0.000092(20) = 0.01682 \text{ moles por litro}$$



Referencias Bibliográficas del Apéndice B

Bell, E. T., *“The Development of Mathematics”*, Fourth Edition, McGraw Hill Book Co. of New York, 1985

James M. L., Smith, G. M., Wolford J. C., *“Applied Numerical Methods of Digital Computation”*, Third Edition, New York Harper and Row, USA, 1985



Polinomios Algebraicos

“No hay problema que no pueda ser resuelto”
Viète, François



POLINOMIOS ALGEBRAICOS

DESARROLLO DE UN POLINOMIO EN FACTORES LINEALES

En este apéndice, se muestran algunos conceptos importantes de la teoría de los polinomios, útiles en la búsqueda de las raíces del polinomio característico en las ecuaciones diferenciales homogéneas y no homogéneas, en la ecuación de Cauchy-Euler y en los sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales, en el desarrollo de fracciones propias en sus fracciones simples en el tema de la transformada inversa de Laplace.

Un polinomio racional entero en la variable x tiene la forma:

$$P_n(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + A_{n-2} x^{n-2} + \cdots + A_2 x^2 + A_1 x + A_0 \quad (\text{C-1})$$

donde los coeficientes $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ son números reales o complejos y n es el grado del polinomio. Aquí la variable independiente x puede tomar valores reales o complejos (un número complejo tiene la forma $\alpha + \beta i$ donde α es la parte real y βi es la parte imaginaria pura). El valor para el cual el polinomio $P_n(x)$ se anula, es llamada una **raíz del polinomio**.

Etienne Bézout (1730-1783), matemático francés; hizo importantes aportaciones al desarrollo del álgebra, especialmente en el uso de los determinantes en la resolución de sistemas de ecuaciones y en el campo de los polinomios algebraicos. Sus investigaciones aparecen en su tratado “*Théorie Générale des Equation Algébriques*” publicado en 1779. A él se le debe el siguiente teorema:



E. Bézout

Teorema C1.- El resto de la división del polinomio $P_n(x)$ por la diferencia $(x - a)$ es igual a $P_n(a)$

Demostración.- El cociente de la división de $P_n(x)$ por la diferencia $(x-a)$ es igual a otro polinomio $Q_{n-1}(x)$ de grado inferior en una unidad que el del polinomio $P_n(x)$.

El resto R es una constante; entonces se puede escribir:

$$P_n(x) = (x-a)Q_{n-1}(x) + R \quad (C-2)$$

si se aplica el límite cuando $x \rightarrow a$, entonces el miembro izquierdo de la igualdad (C-2) tiende a $P_n(a)$ y el miembro derecho tiende a R . Por lo que $P_n(a) = R$.

Si en particular $R = 0$, entonces $x = a$ es llamada una *raíz del polinomio* $P_n(x)$, luego entonces (C-2) se puede escribir como:

$$P_n(x) = (x-a)Q_m(x) \quad (C-3)$$

Otro de los más importantes avances en el desarrollo del álgebra lo hizo el gran matemático alemán **Karl Friedrich Gauss** en su disertación doctoral de 1799, (posteriormente se publica en su libro “*Disquisitiones Arithmeticae*” en el verano de 1801) en la cual establece lo que se conoce como teorema fundamental del álgebra que se enunciará sin demostración.

Teorema C2.- (*Teorema fundamental del álgebra*). Toda función racional entera $P_n(x)$ tiene por lo menos una raíz real o compleja.



F. Viète

Uno de los más destacados algebristas del siglo XVI fue sin duda el matemático francés **François Viète** (1540-1603) que en 1591 publica “*In Artem Analyticam Isagoge*” en donde utiliza los signos + y - como símbolos operativos y letras para representar las incógnitas. También presentó métodos para resolver ecuaciones de segundo, tercero y cuarto grados, aunque las raíces negativas eran inteligibles para él; pero no era su culpa, puesto que todavía él estaba en una época en donde todavía no quedaba muy claro el asunto de las raíces de una ecuación algebraica. A pesar de ello, fue el primero que en concebir la posibilidad de descomponer un polinomio $P_n(x)$ de la ecuación algebraica $P_n(x) = 0$ en factores lineales.

Teorema C3.- Todo polinomio de n -ésimo grado $P_n(x)$ puede ser desarrollado en n factores lineales de la forma $(x-a)$ y un factor igual al coeficiente de x^n , es decir:

$$P_n(x) = A_n(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\cdots(x-a_n) \quad C-4$$

donde $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, pueden ser reales o complejos.

A modo de ejemplo, el polinomio $P_3(x) = x^3 - 7x - 6$ puede ser desarrollado en sus factores lineales $(x+1)(x+2)(x-3)$, esto es $P_3(x) = x^3 - 7x - 6 = (x+1)(x+2)(x-3)$. Por otro lado el

polinomio $Q_3(x) = x^3 - x^2 + 4x - 4$ puede también ser desarrollado en sus factores lineales como:
 $Q_3(x) = x^3 - x^2 + 4x - 4 = (x-1)(x^2 + 4)$. Aunque el binomio $x^2 + 4$ parece contradecir el término “lineal”, esto no es así, ya que este binomio cuadrático puede ser factorizado como:
 $x^2 + 4 = (x + 2i)(x - 2i)$

Teorema C4.- Si los valores de dos polinomios $P_n(x) \wedge Q_n(x)$ de grado n , para $n + 1$ valores diferentes $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ del argumento x , los polinomios enunciados son idénticos

Teorema C5.- Si el polinomio

$$P_n(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + A_{n-2} x^{n-2} + \dots + A_2 x^2 + A_1 x + A_0$$

es idénticamente igual a cero, entonces, todos sus coeficientes son iguales a cero.

Teorema C6.- Los coeficientes correspondientes (homólogos) de dos polinomios idénticamente iguales, son iguales.

Observación.- Este teorema es muy útil en la determinación de las constantes arbitrarias relativas a la solución particular durante la aplicación del método de selección en las ecuaciones diferenciales no homogéneas con coeficientes constantes, así como en la determinación de las constantes arbitrarias del desarrollo en fracciones simples de una fracción racional propia.

Teorema C7.- Todo polinomio de grado n tiene exactamente n raíces (reales o complejas)

Teorema C8.- Si un polinomio $P_n(x)$ con coeficientes reales tiene una raíz compleja $\alpha + \beta i$, este polinomio tiene también una raíz conjugada $\alpha - \beta i$.

CÁLCULO DE LAS RAÍCES DE UN POLINOMIO

El estudio del cálculo de las raíces de un polinomio algebraico es muy extenso y basta con considerar desde los descubrimientos de los matemáticos de la antigua China hasta la teoría de grupos de **Evaristo Galois** (1811-1832) y de ahí, hasta la actualidad. Pero en este apéndice solo se muestra lo que vulgarmente se conoce como la **división sintética**, que es el método que comúnmente se aplica en los casos de raíces enteras y racionales ya sea simples o múltiples.



E. Galois

La primera obra de matemáticas de la antigua China se conoce como **Jiuzhang Suanshu** o “*La Matemática en Nueve Libros*” o a veces llamada “*La Matemática en Nueve Capítulos*”, esta importante obra (desde el punto de vista histórico) fue recopilada por el insigne hombre de estado y científico **Chuan Tsanom** (Siglo II a.C.) en el año 152 a.C. quien coleccionó y sistematizó todos los conocimientos matemáticos hasta su época. Posteriormente esta obra fue modificada en los siglos venideros.

Los comienzos del álgebra china se pueden ver en los trabajos del matemático **Wang Xiaotong** (580-640). Él escribió la “**Jigu Suanjing**” (*continuación de la Matemática Antigua*) en donde aparece la resolución de la ecuación cúbica $x^3 + \frac{q}{2}x^2 - \frac{p^2}{2q} = 0$ utilizando un algoritmo similar a lo que posteriormente se conocería como el *Tian Yuan* ó “*método del arreglo de coeficientes*” o también como “*método del elemento celestial*”. **Jia Xian** (1010-1070) famoso astrónomo y matemático, escribió “**Huangdi Jiuzhang Suanjing Xicao**” (*Una Solución Detallada de los Problemas de “La Matemática en Nueve Libros”*) y “**Suanfa Xuegu Ji**” (*Una Colección de Reglas de la Matemática Antigua*). En donde aparece la ecuación

$$811200c + 1560c^2 + c^3 = 5755183$$

en la cual, $c = 7$ es una solución de la misma. Él generaliza el método de la búsqueda de raíces cuadradas y cúbicas y cuando descubre que es aplicable para $n > 3$, lo extiende a la solución de ecuaciones algebraicas de grado arbitrario. **Jia Xian** llamó a este método como **Zeng chang kaifang** el cuál se basa en multiplicaciones y sustracciones de los coeficientes en un arreglo rectangular. Esencialmente este método es igual a que actualmente se conoce como el *método de Horner*, o *regla de Ruffini-Horner*.

El “*método del elemento celestial*” también fue aplicado por **Li Zhi** (1192-1279) en un problema del cálculo de distancias conduciéndolo a la ecuación:

$$-4x^4 - 600x^3 - 22500x^2 + 11681280x + 788486400 = 0$$

la que resolvió encontrando que $x = 120$ era la solución del problema. Él escribió el texto “**Yi Gu Yan Duan**” (*Nuevos algoritmos de cálculo*) en 1259. Por otro lado **Qin Jiushao** (1202-1261) quien escribió su famoso tratado matemático “**Shushu Jiuzhang**” (*Tratado matemático en Nueve Secciones*), el cual aparece en 1247 y en el que se muestra la aplicación del “*método del elemento celestial*” en problemas relacionados con dinero, impuestos, construcciones militares y manejo de granos. Él resolvió ecuaciones como: $-x^4 + 1534464x^2 - 526727577600 = 0$, la cual se satisface para $x = 720$ y $x^{10} + 15x^8 + 72x^6 - 864x^4 - 11664x^2 - 34992 = 0$ en donde una solución práctica es $x = 3$. Finalmente el matemático chino **Zhu Shijie** (1260-1320) también utilizó el “*método del elemento celestial*” en problemas prácticos. Él escribió “**Suanxue Qimeng**” (*Introducción a los Estudios sobre las Matemáticas*) y “**Siyuan Yujian**” (*Reflexiones Verdaderas sobre las Cuatro Incógnitas*). En estas obras aparece $t^4 - 34t^3 + 71t^2 + 3706t + 3600 = 0$, resuelta para $x = 18$.

Resumiendo los logros de los matemáticos de la antigua china en lo que se refiere a la extracción de raíces de ecuaciones algebraicas, el “*método del elemento celestial*” o “*método del arreglo de coeficientes*” es esencialmente el mismo que el de la famosa división sintética, cuyo nombre correcto (o por lo menos el que se ha registrado en la comunidad matemática mundial) es el de la *Regla de Ruffini-Horner* en honor a los matemáticos que lo redescubrieron casi 600 años después.

Fue el matemático inglés **William George Horner** (1786-1837) quien redescubre el “*método del arreglo de coeficientes*” en 1819 y posteriormente se publica en *Philosophical Transactions of the Royal Society*. Años antes el matemático, filósofo y médico cirujano italiano **Paolo Ruffini** (1765-1822) había trabajado con ecuaciones algebraicas y en 1814 descubre y

formula la regla del cálculo aproximado de las raíces de dichas ecuaciones. Curiosamente ya en 1799 publica su “**General Theory of Equations in which it is Shown that the Algebraic Solution of the General Equation of Degree Greater than Four is Impossible**”, en donde intenta demostrar sin éxito la imposibilidad de resolver una ecuación de quinto grado a través de radicales. El algoritmo que estos dos matemáticos descubrieron algunos le han llamado *división sintética*, que es el término que comúnmente se emplea para referenciarlo. Este término traducido al inglés como *synthetic division* fue encontrado en 1857 en *Mathematical Dictionary and Cyclopedia of Mathematical Science*.



P. Ruffini

Cualquier estudiante que consulte obras relacionadas a las ecuaciones algebraicas, por ejemplo, la obra “**Teoría de Ecuaciones**” de **James Victor Uspenski** (1883-1947), se dará cuenta de que la *regla de Ruffini* y el *método de Horner* son estructuralmente diferentes. Eso es así ya que la *regla de Ruffini* se basa en la división sucesiva del polinomio en cuestión por los factores lineales que contienen las raíces en un arreglo rectangular mientras que *el método de Horner* se basa principalmente en sustituciones o cambios de variable para reducir la ecuación algebraica a una que puede ser tratada por la *regla de Ruffini* resolviendo el problema de la búsqueda de raíces racionales.

Regla de Ruffini.- El cociente de la división del polinomio $P_n(x)$ por $(x-a)$ puede determinarse por un procedimiento muy sencillo conocido como la **Regla de Ruffini**.

Por el Teorema C-1 se tiene:

$$P_n(x) = (x-a)Q_{n-1}(x) + R$$

Si se sustituye el cociente

$$Q_{n-1}(x) = B_0x^{n-1} + B_1x^{n-2} + B_2x^{n-3} + \dots + B_{n-1}$$

donde $B_0, B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$ son coeficientes a determinar. Realizando las operaciones, se obtiene:

$$(x-a)Q_{n-1}(x) + R = B_0x^n + (B_1 - cB_0)x^{n-1} + (B_2 - cB_1)x^{n-2} + \dots + (B_{n-1} - cB_{n-2})x + R - cB_{n-1}$$

pero como:

$$P_n(x) = A_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + A_{n-2}x^{n-2} + \dots + A_2x^2 + A_1x + A_0$$

y por el Teorema C6 entonces, se desprende que:

$$B_0 = A_0; B_1 = A_1 + cB_0; B_2 = A_2 + cB_1; \dots; B_{n-1} = A_{n-1} + cB_{n-2}; r = A_n + cB_{n-1}$$

el cálculo es recurrente, así que es posible ordenarse de manera conveniente de la siguiente forma:

$$\begin{array}{cccccc|c}
 A_0 & A_1 & A_2 & \cdots & A_{n-1} & A_n & x = a \\
 A_0 & aB_0 & aB_1 & \cdots & aB_{n-2} & aB_{n-1} & \\
 \hline
 A_0 & B_1 & B_2 & \cdots & B_{n-1} & R & \text{(donde } A_0 = B_0) \\
 \hline
 \underbrace{\hspace{10em}} & & & & & & \\
 \text{coeficientes del cociente} & & & & & &
 \end{array}$$

C-5

Todos los coeficientes del polinomio $P_n(x)$ están escritos sin omisiones en la primera fila comenzando por A_0 .

La tercera fila comienza con $A_0 = B_0$ que se multiplica por a , el producto se escribe en la segunda fila y se suma a A_1 ; la suma B_1 se escribe en la tercera fila. Nuevamente B_1 se multiplica por a el producto se escribe en la segunda fila y se suma a A_2 ; la suma se coloca en la tercera fila, y el mismo algoritmo de repite hasta que, en la última columna se encuentra el resto R .

Si $R = 0$, entonces $x = a$ será una raíz del polinomio $P_n(x)$ y este procedimiento o algoritmo se emplea para las demás raíces enteras ya sea positivas o negativas. Un cuestión interesante es ¿cómo saber cuáles son las posibles raíces?; Un procedimiento conveniente para estimar cuáles son las posibles raíces es la de calcular los factores primos del término independiente A_0 y probar con cada uno de ellos para ver cuál produce el resto igual a cero durante la aplicación de la *regla de Ruffini*. Ahora bien, cuando el cociente $Q_{n-1}(x)$ es un polinomio cuadrático, es conveniente resolverlo con la acostumbrada fórmula general para una ecuación de segundo grado

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{C-6}$$

Ejemplo.- Aplicar la *regla de Ruffini* para calcular todas las raíces de la ecuación

$$x^3 - 13x - 12 = 0$$

Para estimar las posibles raíces basta con considerar los factores primos de 12 y sus combinaciones, los cuales son $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$

Para $x = -1$, se tiene el arreglo:

$$\begin{array}{cccc|c}
 1 & 0 & -13 & -12 & x = -1 \\
 1 & -1 & 1 & 12 & \\
 \hline
 1 & -1 & -12 & 0 &
 \end{array}$$

Para $x = -3$, se tiene el arreglo:

$$\begin{array}{cccc|c}
 1 & 0 & -13 & -12 & x = -3 \\
 1 & -3 & 9 & 12 & \\
 \hline
 1 & -3 & -4 & 0 &
 \end{array}$$

Finalmente para $x = 4$, se tiene el arreglo:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 0 & -13 & -12 & \\ 1 & 4 & 16 & 12 & \\ \hline 1 & 4 & 3 & 0 & \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} x = 4$$

Por lo que las raíces del polinomio dado son $x = -3$, $x = -1$ y $x = 4$.

Nótese que del primer arreglo se obtiene el cociente $Q_2(x) = x^2 - x - 12$ el cual puede ser resuelto fácilmente aplicando la fórmula C6, la que proporciona las raíces restantes.

Otra forma de aplicar la *regla de Ruffini* es hacer el arreglo en cascada, esto es:

Para $x = -3$, $x = -1$ y $x = 4$, se tiene:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 0 & -13 & -12 & \\ 1 & -1 & 1 & 12 & \\ \hline 1 & -1 & -12 & 0 & \\ 1 & -3 & 12 & & \\ \hline 1 & -4 & 0 & & \\ 1 & 4 & & & \\ \hline 1 & 0 & & & \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = -1 \\ x = -3 \\ x = 4 \end{array}$$

De donde se deducen las raíces anteriormente calculadas.

La *regla de Ruffini*, es una importante herramienta para determinar las raíces enteras de los polinomios algebraicos y en particular es muy útil en la determinación de las raíces del polinomio característico de las ecuaciones diferenciales homogéneas con coeficientes constantes.

Claro está que existen en la actualidad poderosos softwares como el Derive[®] desarrollado en la última década del siglo XX, por la compañía Soft Warehouse de Honolulu Hawai, el cual tiene comandos que pueden fácilmente calcular las raíces reales o complejas de cualquier polinomio algebraico. De hecho la calculadora científica TI-92[®] de la compañía Texas Instrument, posee dentro de sus programas precisamente este software. Lo interesante de estas herramientas de la alta tecnología es que son fácilmente transportables y son muy prácticas en el desarrollo técnico y científico de los estudiantes de ingeniería y otras áreas afines.





Referencias Bibliográficas del Apéndice C

Obras Consultadas

Cajori F., “*An Introduction to the Modern Theory of Equations*”, First Edition, Norwood Press J.S. Cushing Co.-Berwick & Smith Co., Norwood, Mass, U.S.A., 1919

Kurosch A.G., “*Curso de Álgebra Superior*”, 4ª Edición, Editorial Mir, Moscú, Rusia, 1977

Piskunov N., “*Cálculo Diferencial e Integral*”, Tomo I, 1ª Edición, Editorial Mir, Moscú, Rusia, 1986

Ríbnikov, K. “*Historia de las Matemáticas*”, 1ª Edición en español, Academia de Ciencias de Rusia, Editorial Mir, Moscú, Rusia, 1987

Rey Pastor J., Babini J., “*Historia de la Matemática*”, Vol. 1 De la Antigüedad a la Edad Media, 2ª Edición, Editorial Gedisa, Barcelona, España, 1986, p.164

Rouse Ball W. W., “*A Short Account of the History of Mathematics*”, Stereotyped Edition, Macmillan and Co. Ltd., London, England, 1919

Smith D. E., “*History of Modern Mathematics*”, Fourth Edition Enlarged, Chapman & Hall Ltd., London, England, 1906

Struik D. J., “*Historia Concisa de las Matemáticas*”, 2ª Edición en español, Editorial del Instituto Politécnico Nacional, 1986

Todhunter I., “*An Elementary Treatise on the Theory of Equations with a Collections of Examples*”, Third Edition, Macmillan and Company, London, England, 1875

Uspenski J. V., “*Teoría de Ecuaciones*”, 1ª Reimpresión, Editorial Limusa, México, 1988

Sitios web consultados en Internet

Joyce D. E., “*Mathematics in China*”, sitio web en Internet del Departamento de Matemáticas y Ciencias Computacionales de la Universidad de Clark, U.S.A., 1995.
<http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/mathhist/china.html>

O’Connor J. J., Robertson E. F., “*MacTutor History of Mathematics*”, Sitio web en Internet de la Escuela de Matemáticas y Estadística de la Universidad de San Andrews, Escocia, 2004
<http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/>





Funciones Racionales

“El que busca métodos sin tener un problema definitivo en mente,
la mayoría de las veces busca en vano”
Hilbert David



FRACCIONES RACIONALES

En cualquier curso de análisis matemático, además de las fracciones enteras (en ocasiones llamadas polinomios), se estudian también las fracciones racionales o funciones racionales fraccionarias; sin perder generalidad, éstas tienen la forma de cociente de dos funciones racionales enteras o polinomios, esto es, $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ representa una fracción racional, donde

$P_n(x) \wedge Q_m(x)$ son polinomios de grados n y m respectivamente. Históricamente las funciones racionales fueron estudiadas por el matemático suizo **Leonhard Euler** quien usó el término *functionum fractarum* en el capítulo XII (*De Reali Functionum Fractarum Evolutione*) de su “*Introductio in Analysisin Infinitorum*” de 1748. También lo hizo **Joseph Louis Lagrange** in sus “*Réflexions sur la Résolution Algébrique des Équations*”, alrededor de 1770.

Una fracción racional se dice que es una *fracción propia*, cuando el grado del polinomio del denominador es mayor que el grado del polinomio del numerador, es decir, cuando $n < m$; de otra manera si se cumple que $n \geq m$, entonces la fracción racional es una *fracción impropia*.

A modo de ejemplo:

$$\text{Fracción Propia} \rightarrow \frac{2x-1}{x^2-4}$$

$$\text{Fracción Impropia} \rightarrow \frac{4x^3+3x^2+x-5}{x-2}$$

La fracción propia $\frac{A(x)}{B(x)}$ se llama *simple*, si su denominador $B(x)$ es una potencia de un polinomio irreducible $p(x)$, tal que $B(x) = p^k(x)$, $k \geq 1$, y el grado del numerador $A(x)$ es menor que el grado de $p(x)$.

Subsiste el siguiente Teorema Fundamental:

Teorema D1.- Toda fracción racional propia se descompone en una suma de fracciones simples.

En la mayoría de los textos comunes de álgebra superior, es frecuente el uso del término *fracciones parciales* para denotar a estas *fracciones simples* definidas anteriormente. Históricamente fue **Leonhard Euler** quien en 1780 publica su “*Nova Methodus Fractiones Quasunque Rationales en Fractiones Simplicis*”, en donde aparecen los términos *fracciones parciales* y *fracciones simplices* y muestra tres casos de expansión de fracciones propias incluyendo el caso de raíces imaginarias. Más tarde, el matemático francés **Silvestre François Lacroix** (1765-1843) introduce el término *fractions partielles* en su “*Traité Élémentaire Calcul Différentiel et Intégral*”, publicado en dos volúmenes en los años 1797 y 1798. Incluso en estos tratados introduce por primera vez en la historia de la matemática el término *geometría analítica*. Otras obras importantes fueron “*Traité Élémentaire d'Arithmétique*” (1797), “*Traité Élémentaire de Trigonométrie*” (1798), “*Elémens de Géométrie*” (1799), y “*Complément des Elémens d'Algèbre*” (1800).



S.F. Lacroix

DESCOMPOSICIÓN DE UNA FRACCION PROPIA EN SUS FRACCIONES SIMPLES

La descomposición de una fracción propia $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ en fracciones simples, depende de las raíces del polinomio $Q_m(x)$. De esto, se desprenden los siguientes casos:

Caso I.- El polinomio $Q_m(x)$ tiene *raíces reales y distintas*.

Supóngase que r_1, r_2, \dots, r_m son las m raíces reales de $Q_m(x)$ y que éste puede ser descompuesto en sus factores lineales (véase el Teorema C3 del Apéndice C). En este caso la fracción propia se descompone de la siguiente forma:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x - r_1} + \frac{A_2}{x - r_2} + \frac{A_3}{x - r_3} + \dots + \frac{A_m}{x - r_m}$$

donde $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$, son constantes arbitrarias a determinar.

Ejemplo 1.- Descomponer en sus fracciones simples la siguiente fracción propia $\frac{x+1}{x^2-3x+2}$

Solución.- Una simple factorización del denominador demuestra que $x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$, luego entonces las raíces de este polinomio son reales y distintas. Por lo tanto la fracción puede ser descompuesta de la siguiente manera:

$$\frac{x+1}{x^2-3x+2} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{x-1}$$

Para determinar las constantes $A_1 \wedge A_2$, se procederá de la siguiente forma:

Si se multiplica la expresión anterior por el denominador $x^2 - 3x + 2$, se tiene:

$$x+1 = A_1(x-1) + A_2(x-2)$$

Ahora bien, si $x=1$, entonces: $2 = A_1(1-1) + A_2(1-2)$, de donde $A_2 = -2$, de la misma forma, si $x=2$, entonces: $3 = A_1(2-1) + A_2(2-2)$, de aquí que, $A_1 = 3$. Finalmente la descomposición de la fracción propia dada es:

$$\frac{x+1}{x^2-3x+2} = \frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-1}$$

Caso II.- El polinomio $Q_m(x)$ tiene la *raíz real r_1 de multiplicidad k* , y las $m-k$ raíces restantes son reales y distintas.

Sea r_1 una raíz real de multiplicidad k y, $r_{k+1}, r_{k+2}, \dots, r_m$ las demás raíces. En este caso la fracción propia se descompone de la siguiente forma:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{(x-r_1)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-r_1)^{k-1}} + \dots + \frac{A_k}{x-r_1} + \frac{A_{k+1}}{x-r_{k+1}} + \dots + \frac{A_{m-1}}{x-r_{m-1}} + \frac{A_m}{x-r_m}$$

donde las A_k son constantes a determinar.

Ejemplo 2.- Descomponer en sus fracciones simples la siguiente fracción propia

$$\frac{x^2+3x+4}{x^3-8x^2+21x-18}$$

Solución.- El desarrollo de $Q_m(x) = x^3 - 8x^2 + 21x - 18$ en sus “factores lineales”, se logra con la *regla de Ruffini* (véase el Apéndice C). Las posibles raíces son: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18$.

Para $x=2$, se tiene el siguiente arreglo:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -8 & 21 & -18 & 2 \\ 1 & 2 & -12 & 18 & \\ \hline 1 & -6 & 9 & 0 & \end{array}$$

El cociente $x^2 - 6x + 9$ se puede factorizar en $(x-3)^2$, de donde la raíz $x=3$ tiene una multiplicidad de 2, por lo tanto las raíces son $x_1 = x_2 = 3$ y $x_3 = 2$. (el orden de las raíces, realmente es indistinto, para la descomposición de la fracción dada). Luego entonces el desarrollo de $Q_m(x)$ es: $x^3 - 8x^2 + 21x - 18 = (x-2)(x-3)^2$ (véase el Teorema C3 del Apéndice C)

La descomposición en fracciones simples de la fracción propia dada, es la siguiente:

$$\frac{x^2 + 3x + 4}{x^3 - 8x^2 + 21x - 18} = \frac{A_1}{(x-3)^2} + \frac{A_2}{x-3} + \frac{A_3}{x-2}$$

Para determinar las constantes A_1, A_2 y A_3 , se procederá de la siguiente forma:

Si se multiplica la última expresión por el denominador, se tiene:

$$x^2 + 3x + 4 = A_1(x-2) + A_2(x-2)(x-3) + A_3(x-3)^2$$

Ahora bien, si $x=2$, entonces: $14 = A_1(2-2) + A_2(2-2)(2-3) + A_3(2-3)^2$, de donde $A_3 = 14$, por otro lado, si $x=3$, entonces: $22 = A_1(3-2) + A_2(3-2)(3-3) + A_3(3-3)^2$, de donde $A_1 = 22$, finalmente si se escoge un valor arbitrario de x , por ejemplo $x=1$ y sustituyendo éste y los valores ya encontrados, entonces: $8 = (22)(1-2) + A_2(1-2)(1-3) + (14)(1-3)^2$, de donde $A_2 = -13$. De esta manera la descomposición de la fracción dada en sus fracciones parciales simples es:

$$\frac{x^2 + 3x + 4}{x^3 - 8x^2 + 21x - 18} = \frac{22}{(x-3)^2} - \frac{13}{x-3} + \frac{14}{x-2}$$

Caso III.- El polinomio $Q_m(x)$ tiene al menos un par de *raíces complejas conjugadas* de la forma $\alpha \pm \beta i$ y las demás raíces restantes de naturaleza real.

Sea $r_1 = \alpha + \beta i$ y $r_2 = \alpha - \beta i$ las raíces complejas de $Q_m(x)$ y $r_3, r_4, r_5, \dots, r_m$, las demás raíces reales. En este caso la fracción propia se descompone de la siguiente forma:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1x + A_2}{x^2 + px + q} + \frac{A_3}{x-r_3} + \frac{A_4}{x-r_4} + \dots + \frac{A_m}{x-r_m}$$

donde $x^2 + px + q = (x-r_1)(x-r_2)$ y las A_k son constantes arbitrarias a determinar.

Ejemplo 3.- Descomponer en sus fracciones simples la siguiente fracción propia

$$\frac{3x^2 - 2x + 3}{x^3 - 1}$$

Solución.- El desarrollo de $Q_m(x) = x^3 - 1$ en sus “factores lineales”, se logra con una simple factorización, esto es: $Q_m(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1)$, de donde las raíces complejas son $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y la raíz real es $x = 1$.

La descomposición en fracciones simples de la fracción propia dada, es la siguiente:

$$\frac{3x^2 - 2x + 3}{(x^2 + x + 1)(x - 1)} = \frac{A_1x + A_2}{x^2 + x + 1} + \frac{A_3}{x - 1}$$

Para determinar las constantes A_1, A_2 y A_3 , se procederá de la siguiente forma:

Si se multiplica la última expresión por el denominador, se tiene:

$$3x^2 - 2x + 3 = (x - 1)(A_1x + A_2) + A_3(x^2 + x + 1)$$

simplificando el miembro derecho de la ecuación anterior:

$$3x^2 - 2x + 3 = (A_1 + A_3)x^2 + (-A_1 + A_2 + A_3)x + (-A_2 + A_3)$$

como estos polinomios son idénticos, entonces igualando los términos homólogos (véase el Teorema C6 del Apéndice C) se tienen las siguientes relaciones:

$$A_1 + A_3 = 3; \quad -A_1 + A_2 + A_3 = -2 \quad \text{y} \quad -A_2 + A_3 = 3$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se tiene: $A_1 = \frac{5}{3}$, $A_2 = -\frac{5}{3}$ y $A_3 = \frac{4}{3}$, por lo tanto, la descomposición de la fracción dada en sus fracciones parciales simples es:

$$\frac{3x^2 - 2x + 3}{(x^2 + x + 1)(x - 1)} = \frac{5(x - 1)}{3(x^2 + x + 1)} + \frac{4}{3(x - 1)}$$

Caso IV.- El polinomio $Q_m(x)$ tiene al menos un par de *raíces complejas conjugadas k-múltiples* de la forma $\alpha \pm \beta i$ y las demás raíces restantes son reales.

Sea $r_1 = \alpha + \beta i$ una raíz compleja k -múltiple ($k \leq \frac{m}{2}$), entonces $r_2 = \alpha - \beta i$ también será una raíz

k-múltiple del polinomio $Q_m(x)$ y $r_{2k+1}, r_{2k+2}, r_{2k+3}, \dots, r_m$ las demás raíces reales. En este caso la fracción propia se descompone de la siguiente forma:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1x + A_2}{(x^2 + px + q)^k} + \frac{A_3x + A_4}{(x^2 + px + q)^{k-1}} + \dots + \frac{A_{2k-1}x + A_{2k}}{x^2 + px + q} + \frac{A_{2k+1}}{x - r_{2k+1}} + \dots + \frac{A_{m-1}}{x - r_{m-1}} + \frac{A_m}{x - r_m}$$

donde $x^2 + px + q = (x - r_1)(x - r_2)$ y las A_k son constantes arbitrarias a determinar.

Ejemplo 4.- Descomponer en sus fracciones simples la siguiente fracción propia

$$\frac{x^2 - 2x - 5}{x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 6x^2 + x - 3}$$

Solución.- El desarrollo de $Q_m(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 6x^2 + x - 3$ en sus factores lineales se logra aplicando la *regla de Ruffini*. Las posibles raíces son: $\pm 1, \pm 3$.

Para $x = 3$ se tiene el siguiente arreglo:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & -3 & 2 & -6 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & 6 & 0 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \quad | \quad x = 3$$

Como se puede observar el cociente es $x^4 + 2x^2 + 1$ que es una ecuación bicuadrática, la cual puede ser factorizada como $(x^2 + 1)^2$; Al resolverla se obtienen: $x_{1,2} = i$ y $x_{3,4} = -i$. De este modo el polinomio queda factorizado como: $Q_5(x) = (x - 3)(x^2 + 1)^2$, por lo que la descomposición de la fracción propia en sus fracciones simples es:

$$\frac{x^2 - 2x - 5}{x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 6x^2 + x - 3} = \frac{A_1x + A_2}{(x^2 + 1)^2} + \frac{A_3x + A_4}{x^2 + 1} + \frac{A_5}{x - 3}$$

Multiplicando por el denominador se tiene:

$$x^2 - 2x - 5 = (A_1x + A_2)(x - 3) + (A_3x + A_4)(x - 3)(x^2 + 1) + A_5(x^2 + 1)^2$$

Desarrollado los productos indicados:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 5 &= (A_3 + A_5)x^4 + (-3A_3 + A_4)x^3 + (A_1 + A_3 - 3A_4 + 2A_5)x^2 + \dots \\ &= \dots + (-3A_1 + A_2 - 3A_3 + A_4)x + (-3A_2 - 3A_4 + A_5) \end{aligned}$$

Ahora, aplicando el Teorema C6 del Apéndice C, la igualación de los términos homólogos da como resultado las siguientes relaciones:

$$A_3 + A_5 = 0; -3A_3 + A_4 = 0; A_1 + A_3 - 3A_4 + 2A_5 = 1;$$

$$-3A_1 + A_2 - 3A_3 + A_4 = -2; \quad y \quad -3A_2 - 3A_4 + A_5 = -5$$

Las cuales forman un sistema de ecuaciones lineales con 5 incógnitas que puede ser resuelto por métodos matriciales. Resolviendo el sistema se obtienen:

$$A_1 = \frac{6}{5}; \quad A_2 = \frac{8}{5}; \quad A_3 = \frac{1}{50}; \quad A_4 = \frac{3}{50}; \quad A_5 = -\frac{1}{50}$$

Por lo tanto, la descomposición de la fracción dada en sus fracciones parciales simples es:

$$\frac{x^2 - 2x - 5}{x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 6x^2 + x - 3} = \frac{6x + 8}{5(x^2 + 1)^2} + \frac{x + 3}{50(x^2 + 1)} - \frac{1}{50(x - 3)}$$



Referencias Bibliográficas del Apéndice D

Cajori F., “*An Introduction to the Modern Theory of Equations*”, First Edition, Norwood Press J.S. Cushing Co.-Berwick & Smith Co., Norwood, Mass, U.S.A., 1919

Euler L., “*Nova Methodus Fractiones Quascunque Rationales in Fractiones Simplices*”, artículo publicado en Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitinae, por St. Petersburg Academy, Rusia, 1780

Euler L., “*Introductio in Analysin Infinitorum*” Tomo Primero, Publicado por St. Petersburg Academy, Rusia, 1748

Kurosch A.G., “*Curso de Álgebra Superior*”, 4ª Edición, Editorial Mir, Moscú, Rusia, 1977

O’Connor J. J., Robertson E. F., “*MacTutor History of Mathematics*”, sitio web en Internet de la Escuela de Matemáticas y Estadística de la Universidad de San Andrews, Escocia, 2004
<http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/>

Piskunov N., “*Cálculo Diferencial e Integral*”, Tomo I, 1ª Edición, Editorial Mir, Moscú, Rusia, 1986

Rouse Ball W. W., “*A Short Account of the History of Mathematics*”, Stereotyped Edition, Macmillan and Co. Ltd., London, England, 1919



Apéndice E



Fragmentos



Los siguientes fragmentos corresponden a las obras: “*De Constructione Aequationum*” de 1737, “*Methodus Aequationes Differentiales Altiorum Graduum Integrandi Ulterius Promota*” que se publica hasta 1753, “*De Integratione Aequationum Differentialium*” de 1755, “*De Theoria Lunae ad Maiorem Perfectionis Gradum Evehenda*” de 1775, del teniente **Leonhard Euler**, publicadas en *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*.

$Vdv + Zdz = 0$ transmutari queat, in qua V fit functio ipsius v tantum, et Z ipsius z tantum, totum negotium erit confectum, dum aequatio integralis completa erit:

$$\int Vdv + \int Zdz = \text{Const.}$$

EDO de Variables Separables, 1755

Considero hic aequationes differentiales primi gradus, quae duas tantum variables inuoluunt, quas propterea sub hac forma generali $Mdx + Ndy = 0$, repraesentare licet, si quidem M et N denotent functiones quascunque binarum variabilium x et y . De-

EDO Exacta, 1755

ubi valorem ipsius x pariter per $(\frac{dN}{dx})$ exprimo. Quodsi ergo formula $Mdx + Ndy$ ita fuerit comparata, ut fit $(\frac{dM}{dy}) = (\frac{dN}{dx})$, ea est integrabilis, eiusque integrale se-

Condición de Integrabilidad de una EDO Exacta, 1755

$$L\left(\frac{dM}{dy}\right) + MQ = L\left(\frac{dN}{dx}\right) + NP$$

vel huic:

$$\frac{NP - MQ}{L} = \left(\frac{dM}{dy}\right) - \left(\frac{dN}{dx}\right)$$

vnde manifestum est, si esset $\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right)$, pro L

Factor Integrante en una EDO Exacta, 1755

44. Proposita aequatione differentiali $M dx + N dy = 0$, in qua M et N sint functiones homogeneae ipsarum x et y eiusdem ambae dimensionum numeri, inuenire multiplicatorem, qui eam aequationem reddat integrabilem.

EDO Homogénea, 1755

Ponatur $y = xz$, et functio V induet huiusmodi formam $x^n Z$, existente Z quapiam functione ipsius z tantum. Hinc ergo erit $dV = nx^{n-1} Z dx + x^n dZ$. Ad has duas variables x et z etiam differentiale propositum $dV = P dx + Q dy$ reducatur, et cum sit $dy = z dx + x dz$, erit

Cambio de Variable en una EDO Homogénea, 1755

Reducatur haec aequatio ad homogeneitatem ponendo:

$x = t + f$ et $y = u + g$, vt prodeat

$$(\alpha + \beta f + \gamma g + \beta t + \gamma u) dt + (\delta + \epsilon f + \zeta g + \epsilon t + \zeta u) du = 0$$

quaeposito $\alpha + \beta f + \gamma g = 0$ et $\delta + \epsilon f + \zeta g = 0$, vnde quantitates f et g determinantur, vtique fit homogenea, scilicet

$$(\beta t + \gamma u) dt + (\epsilon t + \zeta u) du = 0;$$

Ecuaciones que se Reducen a una EDO Homogénea, 1755

$$L = \frac{1}{R} e^{\int \frac{Q dx}{R}}$$

Inuento autem hoc multiplicatore erit aequatio integralis:

$$\int \frac{P dx}{R} e^{\int \frac{Q dx}{R}} + y e^{\int \frac{Q dx}{R}} = \text{Const.}$$

EDO Lineal, 1755

37. Si proposita fit aequatio differentialis :
 $P y^n dx + Q y dx + R dy = 0$
 vbi P, Q et R denotent functiones, quascunque ipsius x ,
 inuenire multiplicatorem, qui eam reddat integrabilem.

EDO de Bernoulli, 1755

quationes in hac forma generali contentas :

$$0 = A y + \frac{B dy}{dx} + \frac{C d^2 y}{dx^2} + \frac{E d^3 y}{dx^3} + \frac{F d^4 y}{dx^4} + \frac{G d^5 y}{dx^5} + \text{etc.}$$

Vbi differentiale dx positum est constans. Ad huius ae-

EDO de Orden n Homogénea con Coeficientes Constantes, 1753

Apparet quidem huic aequationi fatisfieri, si sit $s = 0$ et u
 radix huius aequationis :

$$A + B u + C u^2 + D u^3 + E u^4 = 0.$$

Polinomio Característico de una EDO de Orden n Homogénea, 1753

lorem

$$y = \mathcal{A} e^{\alpha x} + \mathcal{B} e^{\epsilon x} + \mathcal{C} e^{\gamma x} + \mathcal{D} e^{\delta x}$$

qui est integrale completum, tamen hinc non facile patet,
 qualis futurus sit valor ipsius y , si radicem $\alpha, \epsilon, \gamma, \delta$

Principio de Superposición, 1753

Factores	Partes Integrales
$x - k$	$a e^{kx}$
$(x - k)^2$	$(\alpha + \beta x) e^{kx}$
$(x - k)^3$	$(\alpha + \beta x + \gamma x^2) e^{kx}$
$(x - k)^4$	$(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3) e^{kx}$
etc.	etc.
$xx - 2kx \text{ cof. } \Phi + kk$	$\alpha e^{kx \text{ cof. } \Phi} \sin. kx \sin. \Phi + \mathcal{A} e^{kx \text{ cof. } \Phi} \text{ cof. } kx \sin. \Phi$
$xx - 2kx \text{ cof. } \Phi + kk)^2$	$(\alpha + \beta x) e^{kx \text{ cof. } \Phi} \sin. kx \sin. \Phi +$ $(\mathcal{A} + \mathcal{B} x) e^{kx \text{ cof. } \Phi} \text{ cof. } kx \sin. \Phi$
$xx - 2kx \text{ cof. } \Phi + kk)^3$	$(\alpha + \beta x + \gamma x^2) e^{kx \text{ cof. } \Phi} \sin. kx \sin. \Phi +$ $(\mathcal{A} + \mathcal{B} x + \mathcal{C} x^2) e^{kx \text{ cof. } \Phi} \text{ cof. } kx \sin. \Phi$
$xx - 2kx \text{ cof. } \Phi + kk)^4$	$(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3) e^{kx \text{ cof. } \Phi} \sin. kx \sin. \Phi +$ $(\mathcal{A} + \mathcal{B} x + \mathcal{C} x^2 + \mathcal{D} x^3) e^{kx \text{ cof. } \Phi} \text{ cof. } kx \sin. \Phi$
etc.	etc.

Método de Selección, 1753

nem hic sum traditurus, denotante X functionem quamcunque ipsius x ita se habet :

$$X = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^2y}{dx^3} + \frac{Ed^3y}{dx^4} + \text{etc.}$$

in qua iterum differentiale dx constans est assumtum.

EDO no Homogénea con Coeficientes Constantes, 1753

deducuntur sequentes tres aequationes secundi gradus:

$$\begin{aligned} \text{I. } \frac{ddX}{\Delta d\tau^2} &= -\frac{(\delta + C)X}{w^2} + \frac{\odot(r-X)}{w^2} - \frac{\odot r}{u^2} \\ \text{II. } \frac{ddY}{\Delta d\tau^2} &= -\frac{(\delta + C)Y}{w^2} + \frac{\odot(y-Y)}{w^2} - \frac{\odot y}{u^2} \\ \text{III. } \frac{ddZ}{\Delta d\tau^2} &= -\frac{(\delta + C)Z}{w^2} - \frac{\odot Z}{w^2} \end{aligned}$$

Ante autem quam has aequationes ad nostrum institutum accommodare queamus, certam temporis mensuram...

Sistema de Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden, 1775

§. 6. His praemissis praeceptis considerabo hanc aequationem specialem $z = \int e^{ax} X dx$, ubi X functionem quamcunque ipsius x et constantium ab a non pendentem significet. Atque primo quidem inuestigabo, qualem valorem X habere debeat, vt aequatio modularis fiat tantum differentialis primi gradus; simulque cuiusmodi aequa-

Origen de la Transformada de Laplace, 1737



Los siguientes fragmentos corresponden a las obras: “Die Integrodifferentialgleichungen von Faltungstypus” de 1922, “Über eine Klasse von Integralgleichungen” de 1924, “Das Verhalten der Laplace-Transformierten in ihrer Beschränktheithalbebene” de 1946, “Über die Endliche Laplace-Transformation” de 1951, del capitán **Gustav Doetsch** y de las obras: “The inversion of the Laplace Transformation by a Direct Expansion in Series and its Applications to Boundary Value Problems” de 1936, “Additional Notes on Inversion of the Laplace Transformation” de 1937 del Dr. **Ruel Vance Churchill**.

1. Die Beschränktheitsordnung der Laplace-Transformierten

Die durch die Laplace-Transformation aus einer Funktion $F(t)$ erzeugte Funktion

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt \equiv \mathcal{L}\{F\}$$

Definición de Transformada de Laplace, (Doetsch, 1951)

transforms the operation of differentiation of $F(t)$ into an algebraic operation on $f(s)$ in the following way:

$$(2) \quad \mathcal{L}\{F^{(n)}(t)\} = s^n f(s) - s^{n-1} F(0) - s^{n-2} F'(0) - \dots - F^{(n-1)}(0),$$

where the indices in parentheses denote derivatives¹). This gave rise to

Transformada de la n -ésima derivada, (Churchill, 1936)

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{-st} F(t) dt &= \int_0^T e^{-st} dt \left\{ \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\gamma - \omega i}^{\gamma + \omega i} e^{tz} f(z) dz \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\gamma - \omega i}^{\gamma + \omega i} \frac{1 - e^{-(s-z)T}}{s-z} f(z) dz. \end{aligned}$$

Transformada de una Función Periódica, (Churchill, 1936)

II. Ist $F(t)$ eine Oberfunktion, so gilt dasselbe für $t^\nu F(t)$, wo ν positiv ganzzahlig ist, und es ist

$$L(t^\nu F) = (-1)^\nu \frac{d^\nu}{ds^\nu} L(F),$$

Transformada de las Potencias de t , (Doetsch, 1922)

Durch Anwendung der altbekannten Umkehr der Laplace-Transformation

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{ts} \varphi(s) ds \equiv L^{-1}(\varphi)$$

Transformada Inversa de Laplace, (Doetsch, 1925)

series inversion formula (2) is the condition that the complex integral inversion formula

$$(5) \quad \mathcal{L}^{-1}\{f\} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\gamma - \omega i}^{\gamma + \omega i} e^{tz} f(z) dz$$

Transformada Inversa de Laplace, (Churchill, 1937)

Transformation

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-st} \Phi(t) dt \equiv L(\Phi)$$

die Integralkopplung („Faltung“)

$$\Phi_1 * \Phi_2 = \int_0^t \Phi_1(\tau) \Phi_2(t - \tau) d\tau$$

Teorema de Convulsión, (Doetsch, 1924)

formel der Laplace-Transformation¹⁵):

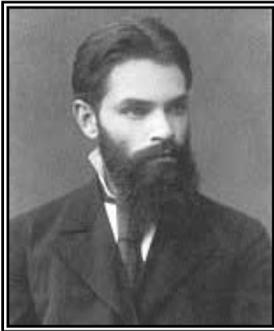
$$\int_0^t F(\tau) d\tau = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0 - i\omega}^{x_0 + i\omega} e^{ts} \frac{f(s)}{s} ds \quad (t > 0) .$$

Transformada Inversa de Laplace de la división por s , (Doetsch, 1946)

When $f(s) = f_1(s)/f_2(s)$ and the singularities of f in each finite region are simple poles coinciding with simple zeros of f_2 , (2) reduces to the formal infinite Heaviside expansion formula

$$(4) \quad F(t) = \mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{f_1}{f_2} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_1(s_n)}{f_2'(s_n)} e^{s_n t} \quad (t > 0),$$

Método de Heaviside, (Churchill, 1937)



Los siguientes fragmentos corresponden a la obra: “**Problème General de la Stabilité du Mouvement**” de 1907 (traducción al francés de la obra original en ruso “**Общая Задача Устойчивости Движения**” publicada en la Sociedad Matemática de Jarkov en 1892) del matemático y mecánico ruso **Aleksandr Mikhailovich Liapunov**.

7. Considérons le système d'équations différentielles linéaires

$$(15) \quad \frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \dots + p_{sn}x_n \quad (s = 1, 2, \dots, n),$$

en supposant que tous les coefficients $p_{s\tau}$ sont donnés d'une manière déterminée au moins pour toutes les valeurs de t non inférieures à une certaine limite t_0 , et qu'ils représentent des fonctions de t continues, réelles et limitées.

Sistema de Ecuaciones Diferenciales Lineales con Coeficientes Constantes

Tous les X_s dans les équations (1) sont des fonctions connues des quantités

$$x_1, x_2, \dots, x_n, t,$$

devenant nulles pour

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0.$$

Punto de Reposo

et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ celles de l'équation

$$\begin{vmatrix} q_{11} - \lambda & q_{12} & \dots & q_{1k} \\ q_{21} & q_{22} - \lambda & \dots & q_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{k1} & q_{k2} & \dots & q_{kk} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

Ecuación Característica

solutions dans le système (15).

Soit k le nombre de tous les nombres caractéristiques *distincts* qui peuvent convenir aux solutions des équations (15), et soient

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$$

ces nombres.

Désignons par n_s le nombre de solutions avec le nombre caractéristique λ_s dans

Eigenvalores

positifs

$$E_1, E_2, \dots, E_k, \quad E'_1, E'_2, \dots, E'_k,$$

tels que, les inégalités

$$|\varepsilon_j| < E_j, \quad |\varepsilon'_j| < E'_j \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

étant remplies, on ait

$$|Q_1 - F_1| < L_1, \quad |Q_2 - F_2| < L_2, \quad \dots, \quad |Q_n - F_n| < L_n,$$

pour toutes les valeurs de t qui dépassent t_0 , le mouvement non troublé sera dit *stable* PAR RAPPORT AUX QUANTITÉS Q_1, Q_2, \dots, Q_n ; dans le cas contraire, il sera dit, par rapport aux mêmes quantités, *instable*.

Teorema de la Estabilidad de Liapunov (Primer Método)

Si, de plus, la fonction V ne dépend pas de t , et si la constante H peut être choisie assez petite pour que, sous les conditions (40), l'égalité $V = 0$ ne puisse avoir lieu que si l'on a

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0,$$

nous appellerons la fonction V , comme s'il s'agissait d'une forme quadratique, *fonction définie*, ou bien, en voulant appeler l'attention sur son signe, *fonction définie positive* ou *définie négative*.

Función de Liapunov. Función Definida Positiva y Definida Negativa

THEOREME I. — Si les équations différentielles du mouvement troublé sont telles qu'il est possible de trouver une fonction définie V , dont la dérivée V' soit une fonction de signe fixe et contraire à celui de V , ou se réduise identiquement à zéro, le mouvement non troublé est stable.

Teorema de la Estabilidad de Liapounov (Segundo Método)

THEOREME II. — Soit V une fonction des variables x_1, t , possédant les propriétés suivantes :

- 1° Elle admet une limite supérieure infiniment petite;
- 2° Sa dérivée V' est une fonction définie;
- 3° Pour toute valeur de t supérieure à une certaine limite, la fonction V est susceptible de prendre le signe de V' , quelque petits que soient les x_i en valeurs absolues.

Si une pareille fonction V peut être formée à l'aide des équations différentielles du mouvement troublé, le mouvement non troublé est instable.

Teorema de la Inestabilidad de Liapounov



*Esta obra se terminó de editar
el 21 de Enero del 2008
Cd. Madero, Tamaulipas
México*

