Teoria Aritmética dos Números
MA553
Monografia 1

Números inteiros via os Axiomas de Peano

Produzido por

Afonso Consoli RA: 193367
José Guilherme RA: 200047

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas
Campinas, São Paulo, Brasil - 13083-859
Segundo Semestre de 2017

Conteúdo

1 Resumo

O presente trabalho busca tratar dos Axiomas de Peano como ferramentas para a construção dos números naturais e de importantes propriedades do mesmo. Após explicação de alguns dos principais resultados provenientes do enunciado de tais axiomas, será descrito o conjunto dos números Inteiros, apontando algumas diferenças e semelhanças deste com os Naturais e de que forma os resultados obtidos a partir dos axiomas de Peano caracterizam também propriedades dos números inteiros.

Palavras-chave: *axiomas, construção, propriedades.*

2 Introdução

A necessidade do ser humano em contar objetos, bem como realizar operações entre os mesmos iniciou-se devido a preocupações de ordem prática e utilitária e teve impulso com o desenvolvimento civilizatório.

Com o avanço da civilização e o estabelecimento da Matemática como a ciência exata que busca fornecer bases consistentes para o estudo e manipulação de objetos de determinados conjuntos, o interesse em determinar os conjuntos numéricos em que determinadas representações numéricas "habitavam" tornou-se intensa. Desta maneira, um importante e "intuitivo" (pois se trata do lugar em que os números utilizados para contar se encontram) conjunto, denominado conjunto dos números Naturais (denotado por $\mathbb{N}$) surgiu e deu origem também às teorias e definições que o firmaram como um conjunto matematicamente consistente com operações bem definidas.

O objeto de estudo desta monografia serám os Axiomas de Peano, que são considerações fundamentais capazes de gerar e definir todo número Natural.

3 A origem dos números Naturais

Como mencionado anteriormente, a criação dos números Naturais teve como estímulo a necessidade da realização de um processo de contagem. No entanto, com o objetivo de definir precisamente o que é um número Natural, Giuseppe Peano (1858-1932) constatou de que era possível elaborar toda teoria a respeito dos Naturais partindo de quatro fatos básicos: os Axiomas de Peano. Após enunciar os quatro axiomas, será feita uma análise quanto ao seu significado e posteriormente aplicações decorrentes destes no conjunto dos Naturais.

3.1 Os Axiomas de Peano

As quatro considerações feitas por Peano são:

1. Existe uma função $s : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$, que associa a cada $n \in \mathbb{N}$ um elemento $s(n) \in \mathbb{N}$, chamado o sucessor de n.
2. A função $s : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ é injetiva.
3. Existe um único elemento, denotado por "1", no conjunto $\mathbb{N}$, tal que 1 $\neq s(n), \forall\, n \in \mathbb{N}$.
4. Se um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é tal que $1 \in X$ e $s(X) \in X \Rightarrow X = \mathbb{N}$.

O primeiro axioma nos garante a sucessão dos números Naturais. Em outras palavras, tomando $s(n) = n + 1$, garantimos que todo sucessor de um dado $n \in \mathbb{N}$, també está em $\mathbb{N}$.

O segundo axioma garante que todo número Natural é contemplado com a propriedade da função s. Desta forma, não há a possibilidade de um "buraco" no domínio, pois caso isto ocorresse, a integridade do conjunto dos Naturais seria comprometida.

O terceiro axioma afirma a existência de um elemento denominado "1" que não é sucessor de ninguém. Em outras palavras, a função s parte de 1.

O quarto e último axioma é, talvez, um dos mais importantes e utilizados em demonstrações de determinadas propriedades dos números Naturais, pois dá origem ao método de demonstração por *Indução*, que será formalmente apresentado no próximo tópico. Este último axioma afirma que se em um determinado conjunto X, dado um $n \in X$, se $n+1 \in X$, então X se identifica com os Naturais.

Veremos agora como o Princípio da Indução pode ser implementado nas demonstrações de determinadas propriedades dos números Naturais.

3.2 Princípio da Indução e operações nos Naturais

Como dito anteriormente, o último Axioma de Peano apresentado nos fornece uma importante ferramenta na demonstração de certas propriedades dos números Naturais. No entanto, antes da apresentação do Princípio da Indução e de algumas operações realizadas nos Naturais, é importante salientar a importância da função s a ser escolhida. Com o objetivo de gerar todo número Natural, podemos definir $s(n) = n + 1, n \in \mathbb{N}$. Essa função satisfaz todas as afirmações descritas nos Axiomas de Peano e portanto é capaz de gerar o conjunto de todos os números Naturais.

No entanto, uma pequena modificação na função s provoca uma disparidade no contra-domínio de tal função, podendo não identificar um dado conjunto X com os Naturais. Por exemplo, basta tomar $S(n) = n + 2$. Começando com $n = 1$ e aplicando sucessivamente S, teríamos a possibilidade de gerar todos os números ímpares, mas nunca um número par. Assim, S é uma função injetiva que não goza da propriedade de que todo número natural pode ser obtido a partir do número 1.

Com base na situação explicada acima, podemos então enunciar o Princípio da Indução e mostrar suas aplicações em algumas propriedades dos números naturais.

Definição 3.1 (Princípio da Indução)**.** Seja P uma propriedade referente a números naturais. Se 1 goza de P e se, além disso, o fato de o número natural n gozar de P implica que seu sucessor $s(n)$ também goza. Então, todos os números naturais gozam da propriedade P.

Ao observar o que foi descrito acima, em termos práticos, devemos observar se, em um dado conjunto S com uma propriedade P determinada, $S \neq \emptyset$ o número 1, ao ser testado nas condições de P, a satisfaz. Em seguida, é chamada de *Hipótese de Indução*, a suposição de que P é verdadeiro para um determinado $n \in S, n > 1$. Após esses dois passos, basta demonstrar que P também funciona para o sucessor de $n,$ ou seja, $(n + 1)$. Obtendo sucesso nessas três etapas, podemos afirmar então que P se verifica em S.

A partir de agora, sabendo como funciona o Princípio da Indução, uma das situações interessantes de se estudar dentro do conjunto dos Naturais é o fato deste poder ter operações a serem realizadas. Estuda-se portanto as operações de adição e multiplicação, como funções que decorrem de definições pré-estabelecidas nesse conjunto.

Para o caso da adição, tomamos duas definições importantes:

1. $s(k) = k + 1$
2. $s(k + n) = k + s(n)$

Logo, estas duas definições bases de operações implicam que, a partir da primeira definição, a função sucessora de k é $s(k) = k + 1$ e da segunda definição, é possível definir a soma $k + n$, pois sabemos qual o seu sucessor. Com efeito, escrevendo $k + s(n) = k + (n + 1)$, sabemos que esta relação é igual a $s(k + n) = (k + n) + 1$. Portanto, sabemos o valor de $k + n$.

Para a multiplicação, considerações análogas são feitas para definir a multiplicação entre dois números Naturais. São elas:

1. $1 \times k = k$

2. $(n + 1) \times k = n \times k + k$

O pensamento torna-se análogo ao caso da adição para estabelecer qual o valor de $n \times k$, visto que conhecendo os valores de n e de k, sabemos que $s(n) \times k = n \times k + k$.

Ao partir das definições acima mostradas com relação à multiplicação e adição de dois números naturais, podemos inferir uma série de propriedades úteis e interessantes, listadas a seguir:

	Adição	**Multiplicação**
Associatividade	$k + (n + p) = (k + n) + p$	$k \times (n \times p) = (k \times n) \times p$
Comutatividade	$k + n = n + k$	$k \times n = n \times k$
Distributividade		$k(n + p) = k \times n + k \times p$

4 Outros resultados importantes

As definições do que é o Princípio da Indução, bem como o que vem a ser as operações de adição e mulplicação possibilitam que sejam estabelecidos outros importantes conceitos que atuam nos números naturais. Neste tópico, trataremos de mencioná-los de maneira que se torne intuitivo para o leitor perceber sua importância e a forma como são definidos. Não serão tratados aqui, conceitos que exijam uma matemática mais rigorosa e portanto, este não será um tópico com demonstrações de todas as afirmações que fizermos.

Podemos começar enaltecendo que o conceito de adição nos possibilita estabelecer uma relação de ordem dentro dos números naturais. Assim, dizemos que um número m é menor que n, representando este fato por $m < n$, se $m = n + p$, com m, n e $p \in \mathbb{N}$.

A relação de ordem vista acima possibilita que se abra um leque de outros resultados importantes no conjunto dos números naturais. Dentre eles, está o conceito de transitividade, que afirma que dado $m < p$ e $p < n$, temos que $m < n$. A demonstração desta afirmação é simples:

$$m < p \Rightarrow 0 < p - m$$

$$p < n \Rightarrow 0 < n - p$$

Somando as desigualdades, temos:

$$0 < (p-m)+(n-p) \Rightarrow (n-m)+(p-p) \Rightarrow 0 < n-m+0 \Rightarrow 0 < n-m \Rightarrow m < n$$

Há também outras três implicações importantes que devem ser consideradas. A primeira refere-se ao conceito de Tricotomia, que afirma que dados dois números $m, n \in \mathbb{N}$, as únicas possibilidades ao compará-los são: $m < n$

ou $n < m$ ou $m = n$. Outros dois conceitos a serem mencionados tratam-se da não existência de um número natural entre n e $n+1$, e o Teorema da Monotonicidade, que afirma que se $m < n, \Rightarrow m+p < n+p$ e $m \times p < n \times p$.

Por fim, temos o Princípio da Boa Ordem e o Segundo Princípio da Indução. O Princípio da Boa Ordem afirma que todo subconjunto não vazio dos Naturais possui um menor elemento e podemos relacioná-lo como uma consequÃªncia do Princípio da Indução, e com isso, utilizá-lo em alguns casos como método de demonstração ao invés do Princípio da Indução. A demonstração deste fato baseia-se na criação de um subconjunto $A \subset \mathbb{N}$, tal que o $1 \notin A$,pois caso contrário, o 1 seria o menor elemento de A. Posteriormente, a ideia é mostrar que o menor elemento de A é da forma $n+1$, e para isso, cria-se uma sequência I_n de forma que $\forall a \in A, b \in I_n, a > b$. Assim, como não existe natural entre n e $n+1$, podemos afirmar que $n+1$ é o menor elemento de A. Embora hajam outros resultados ainda a serem considerados, terminamos este tópico falando um pouco sobre o Segundo Princípio da Indução, enunciando-o como teorema:

Teorema 4.1 (Segundo Princípio da Indução)**.** *Seja $X \subset \mathbb{N}$ um conjunto com a seguinte propriedade:*

- *Dado $n \in \mathbb{N}$, se todos os números naturais menores do que n pertencem a $X \Rightarrow n \in X$.*

Esta é portanto, uma segunda forma importante e útil de demonstrar alguns resultados dentro do conjunto dos números Naturais.

5 Os números Inteiros

Historicamente, a criação dos números inteiros foi motivada pelas relações de comércio, em que as trocas realizadas e o movimento econômico da época implicaram no surgimento de dívidas e perdas a serem consideradas. Com isso, antes de descrever o conjunto dos numeros inteiros, torna-se mais simples explicar primeiramente o conceito do número zero (0).

Filosoficamente, não havia sentido matemático a criação de uma representação numérica que simbolizasse o nada. Entretanto, as própias relações comercias, como mencionado, motivaram tal definição. Assim, podemos definir o inverso aditivo de um número $a \in \mathbb{N}$, simbolizado como $-a$, como sendo o número tal que $a + (-a) = 0$. Assim, é possível definir o conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$) como um conjunto que engloba os números naturais, o zero e os inversos aditivos de cada $a \in \mathbb{N}$. Assim, $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{b, a+b = 0, a \in \mathbb{N}\}$.

Desta forma, como o conjunto dos números Naturais é um subconjunto dos Inteiros. Podemos inferir que os Inteiros gozam das mesmas propriedades de operações antes vistas nos Naturais, tomando cuidado com algumas ressalvas importantes, tais como: $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n \Rightarrow m * p < n * p$. Tomemos $m = 1, n = 2$ e $p = -1$. É possível notar que se $p \in \mathbb{Z}^-$ (inteiros não positivos) e $p \neq 0$, temos que a desigualdade é, na realidade, invertida.

Ainda que pequenas observações tenham de ser feitas, é possível notar que há também uma relação de ordem no conjunto dos números Inteiros. Tal conjunto também pode ser descrito, no estudo de algebra abstrata, como um grupo abeliano, com relação à adição, pois cumpre com as seguintes propriedades:

1. Para quaisquer $m, n, p \in \mathbb{Z}$, tem-se que $(m + n) + p = m + (n + p)$
2. $\exists 0 \in \mathbb{Z}$ tal que $\forall m \in \mathbb{Z}$ tem-se que $0 + m = m + 0 = m$
3. Para cada $m \in \mathbb{Z}, \exists - m \in \mathbb{Z}$ tal que $m + (-m) = 0$
4. Para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$, tem-se que $m + n = n + m$

É possível notar, portanto, que os Inteiros gozam de propriedades semelhantes às dos Naturais, com a inclusão de um elemento neutro da adição. Não podemos afirmar que o mesmo ocorre com a multiplicação, pois não há inverso multiplicativo para todo número inteiro. Com efeito, somente 1 e -1 possuem tal propriedade.

6 Considerações finais

Foi possível perceber na realização deste trabalho a forma como a Matemática contribui para garantir estruturas firmes e consistentes, na construção de conjuntos usuais e úteis no cotidiano.

A rigorosa forma como o conjunto dos Naturais é construído, a partir de quatro axiomas, possibilita abranger resultados importantes para conjuntos distintos que os englobam. Assim, pudemos notar que os números Inteiros podem ser descritos também mediante uma consistência matemática proveniente já dos números Naturais. Dessa forma, este conjunto de propriedades faz com que possamos notar como relações simples e abstratas possibilitam que aplicações maiores sejam realizadas.

Toda teoria fortemente embasada para a construção de tais conjuntos e operações possibilita por exemplo o emprego dos números Inteiros inclusive em questões importantes do cotidiano, como a criptografia RSA. Assim, é possível destacar como o estudo das abstrações provenientes de situações simples e primitivas (contagem, dívidas) possibilitam um retorno usual e útil em outras questões que cercam as atividades práticas realizadas no mundo do trabalho.

Referências

[Grupos] Disponível em:
http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/algebra/grupos.htm
Acesso em: 21/09/2017

[Indução] Disponível em:
http://www.mat.uc.pt/ mat0829/A.Peano.htm
Acesso em: 21/09/2017

[Peano] Wikipédia."Axiomas de Peano". Disponível em:
https://pt.wikipedia.org/wiki/axiomas_de_peano
Acesso em: 21/09/2017

[Naturais] Disponível em:
http://www.sbmac.org.br/cmacs/cmac-n/2012/trabalhos/PDF/83.pdf
Acesso em: 21/09/2017