

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Engenharia Elétrica

ELETROMAGNETISMO

João Antônio de Vasconcelos, Dr.
Prof. Titular do Depto. de Engenharia Elétrica - UFMG
E-mail: vasconcelos.joao.antonio@gmail.com

1. Análise Vetorial

Muitas grandezas físicas, além da magnitude, para serem completamente identificadas, necessitam da direção e do sentido. Alguns exemplos destas grandezas são: velocidade, força, campo elétrico, campo magnético, etc. Estas grandezas são denominadas de **grandezas vetoriais**. Elas são representadas no espaço por segmentos de retas orientados.

Um **segmento orientado** possui um ponto inicial e um ponto final, representado pela ponta da seta. O ponto inicial é o outro ponto extremo.

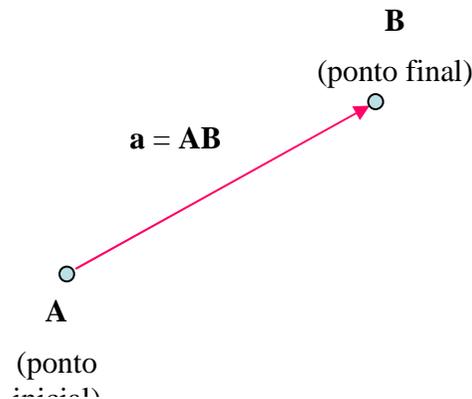


Fig. 1. Segmento orientado $a = AB$.

A direção e o sentido do segmento orientado identificam a direção e o sentido do vetor. O comprimento do segmento orientado representa a magnitude do vetor.

As grandezas escalares são por outro lado, grandezas que necessitam apenas da informação de sua magnitude. Por exemplo: massa, potencial, comprimento, etc.

Um **campo** é a denominação dada a toda distribuição de uma grandeza no espaço. Esta distribuição pode ser escalar ou vetorial, variável ou não com o tempo. O potencial eletrostático é um exemplo de campo escalar, enquanto o campo elétrico é um exemplo de um campo vetorial.

Notação: Neste documento, para distinguirmos a diferença entre uma grandeza escalar e uma vetorial, adotaremos o **negrito** para identificar as grandezas vetoriais. Assim, **a** é uma grandeza vetorial e a é uma grandeza escalar.

Um **vetor** é representado no espaço por todo segmento orientado, de mesma magnitude, direção e sentido.

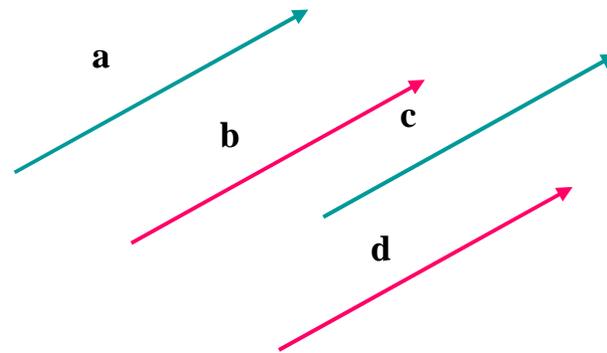
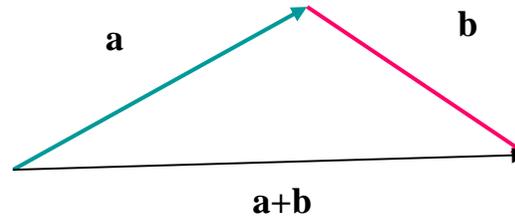


Fig. 2. Segmentos orientados representantes de um mesmo vetor ($\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c} = \mathbf{d}$).

Soma de Vetores e Multiplicação por Escalar

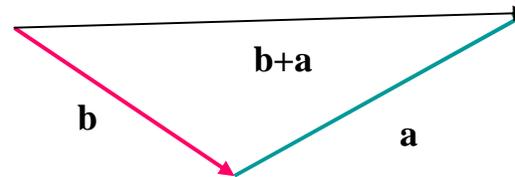
A soma $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, de dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} , é determinada da seguinte forma:

- considere um segmento orientado que represente \mathbf{a} ;
- considere um outro segmento orientado que represente \mathbf{b} , com origem na extremidade de \mathbf{a} ;
- o vetor resultante da soma de $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ é representado pelo segmento orientado que vai da origem de \mathbf{a} até a extremidade de \mathbf{b} .



*Fig. 3. Soma geométrica de dois vetores **a** e **b**.*

Da figura 3, é fácil observar que $\mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{b}+\mathbf{a}$.



*Fig. 4. Soma geométrica de dois vetores **b** e **a**.*

Observamos também que o vetor resultante da soma $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ está na diagonal do paralelogramo determinado por **a** e **b**, quando estes estão representados com a mesma origem.

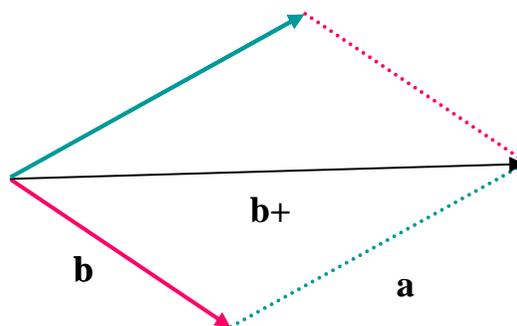


Fig. 5. Soma geométrica de dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} (regra de paralelogramo).

As propriedades mais importantes da adição entre vetores \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} são:

- Comutativa: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
- Associativa: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

Vetor nulo $\mathbf{0}$: é o vetor cujo ponto final coincide com o ponto inicial, isto é, sua amplitude é zero. A soma de um vetor nulo $\mathbf{0}$ a um vetor qualquer \mathbf{a} é igual ao próprio vetor \mathbf{a} , isto é $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$.

Diferença entre dois vetores: a diferença $a - b = a + (-b)$.

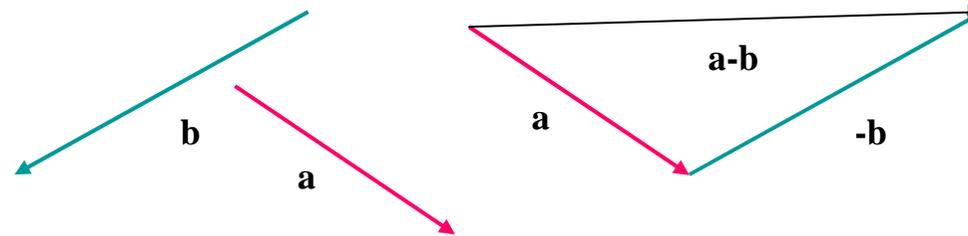


Fig. 6. Diferença entre dois vetores: $a - b$.

Multiplicação de um vetor a por um escalar α : é determinada pelo vetor que possui as seguintes características:

- (a) é o vetor nulo $\mathbf{0}$, se $\alpha = 0$ ou $\mathbf{a} = \mathbf{0}$;
- (b) caso contrário:
 - (i) tem comprimento $|\alpha|$ vezes o comprimento de $|\mathbf{a}|$,
 - (ii) a direção é a mesma de \mathbf{a} (eles são paralelos),
 - (iii) tem o mesmo sentido de \mathbf{a} , se $\alpha > 0$, e tem o sentido contrário ao de \mathbf{a} , se $\alpha < 0$.

Soma de vetores: A soma algébrica de vetores é feita naturalmente somando-se

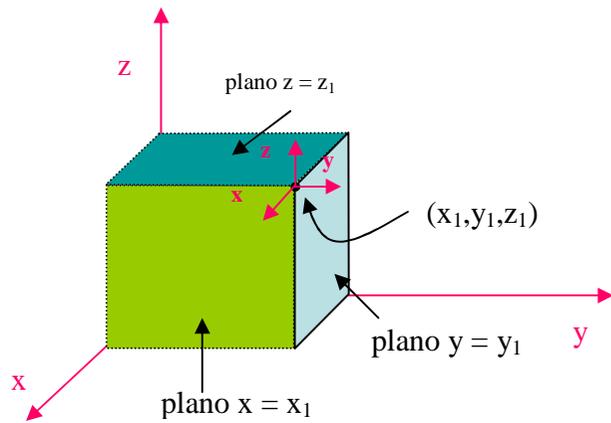
- a) os componentes ao longo de cada eixo coordenado,
- b) multiplicando o resultado ao longo de cada eixo pelo respectivo vetor unitário, e c) adicionando-se os resultados obtidos.

Exemplo:

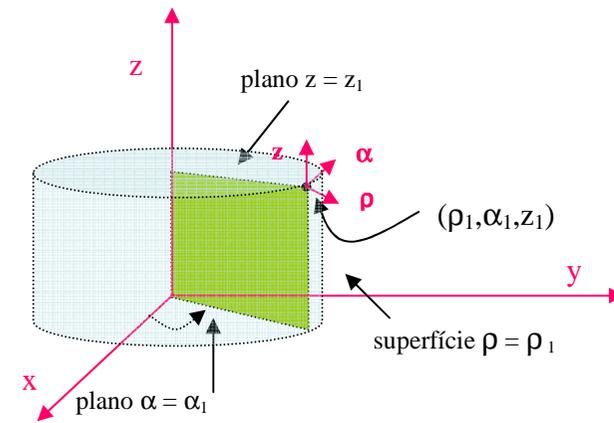
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x)\mathbf{x} + (a_y + b_y)\mathbf{y} + (a_z + b_z)\mathbf{z} \quad \{\text{coordenadas retangulares}\}$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_\rho + b_\rho)\boldsymbol{\rho} + (a_\alpha + b_\alpha)\boldsymbol{\alpha} + (a_z + b_z)\mathbf{z} \quad \{\text{coordenadas cilíndricas}\}$$

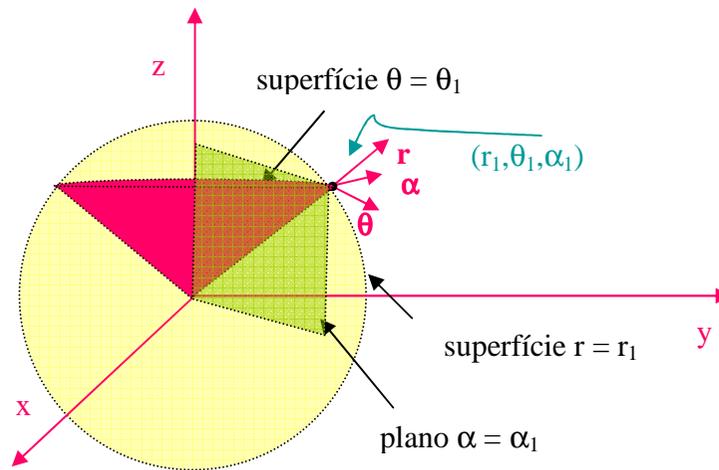
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_r + b_r)\mathbf{r} + (a_\theta + b_\theta)\boldsymbol{\theta} + (a_\alpha + b_\alpha)\boldsymbol{\alpha} \quad \{\text{coordenadas esféricas}\}$$



(a) Sistema de coordenadas retangulares (x, y, z)



(b) Sistema de coordenadas cilíndricas (ρ, α, z)



(c) Sistema de coordenadas esféricas (r, θ, α)

Fig. 7. Sistemas de coordenadas retangulares, cilíndricas e esféricas.

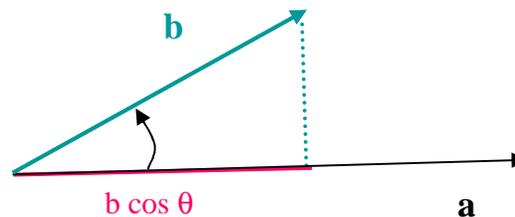
Produto escalar:

O produto escalar entre dois vetores **a** e **b** é definido pelo produto da amplitude de **a** pela magnitude da projeção de **b** sobre **a**.

Isto é,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \theta. \quad (1)$$

Obviamente, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$.



Produto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

Exercício:

Sendo $\mathbf{u} = (2, 3, 1)$ e $\mathbf{v} = (1, 4, 5)$. Calcular :

a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ b) $|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2$ c) $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2$ d) $|3\mathbf{u} - 2\mathbf{v}|^2$ e) $(2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + 2\mathbf{v})$

f) $(5\mathbf{u} + 3\mathbf{v}) \cdot (5\mathbf{u} - 3\mathbf{v})$.

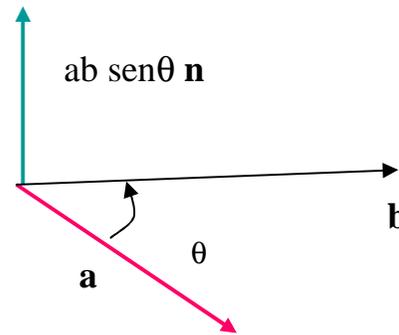
Resp: a) 19 b) 18 c) 94 d) 66 e) -205 f) -28

Produto vetorial:

O produto vetorial entre dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} é definido pelo seguinte produto:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = ab \sin \theta \mathbf{n}, \quad (2)$$

onde \mathbf{n} é o vetor unitário ao plano definido por \mathbf{a} e \mathbf{b} , orientado segundo a regra da mão direita.



Produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

O produto vetorial entre dois vetores pode também ser expresso na forma matricial. Isto é:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (3)$$

Exercício:

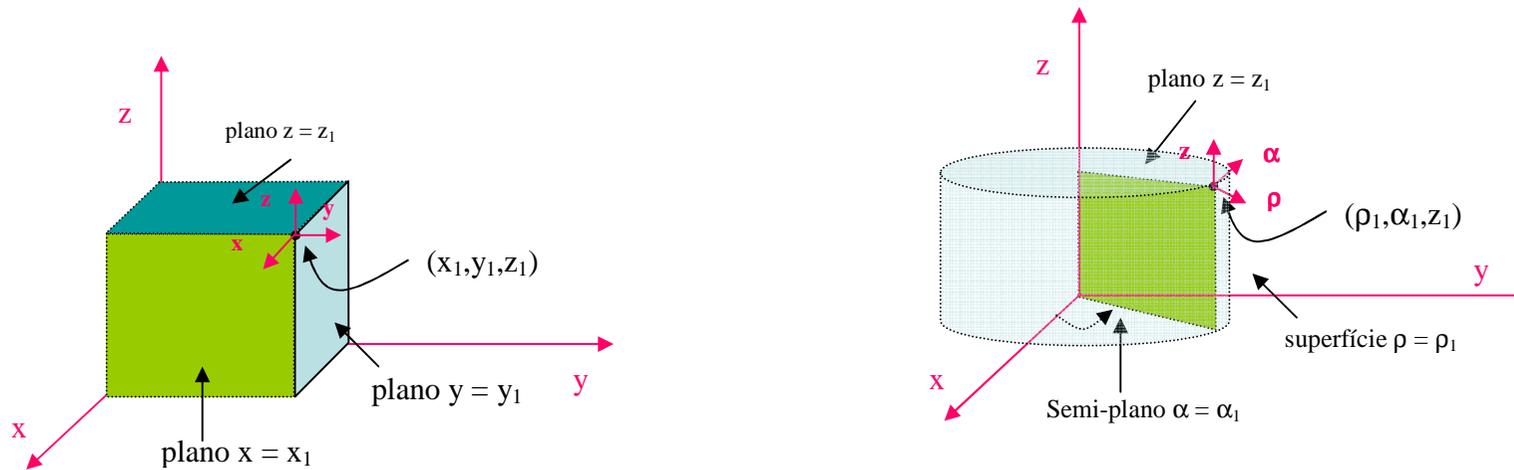
Dados os vetores $\mathbf{u} = (0, 1, -1)$, $\mathbf{v} = (2, 0, 0)$ e $\mathbf{w} = (0, 2, -3)$. Determine:

- a) $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ b) $\mathbf{u} \times \mathbf{w}$ c) $\mathbf{w} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{u})$

Transformação de sistemas de coordenadas

Em inúmeras situações, é necessário transformar uma determinada grandeza, seja ela escalar ou vetorial, de um dado sistema de referência para outro sistema de coordenadas.

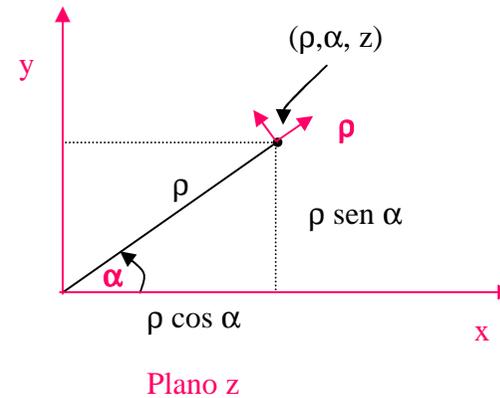
2.1. Coordenadas retangulares \leftrightarrow Coordenadas cilíndricas



A transformação de uma quantidade escalar é muito simples, pois basta fazer a substituição das coordenadas de um sistema para a do outro sistema, empregando as relações entre elas:

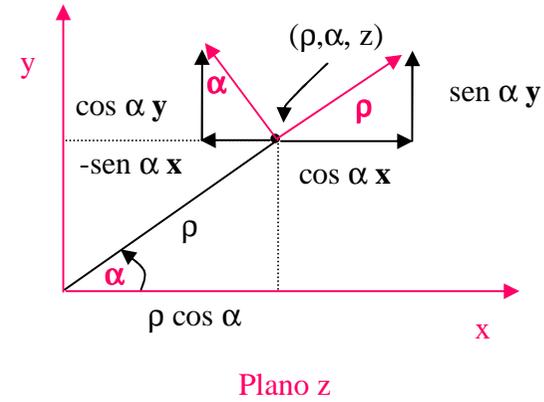
- $x = \rho \cos \alpha$
- $y = \rho \sin \alpha$
- $z = z$

- $\rho = [(x^2 + y^2)^{1/2}]$
- $\alpha = \text{tg}^{-1}[y/x]$
- $z = z$

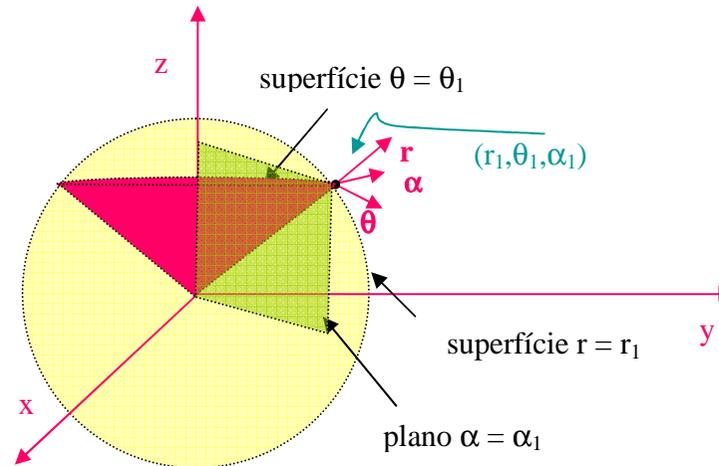
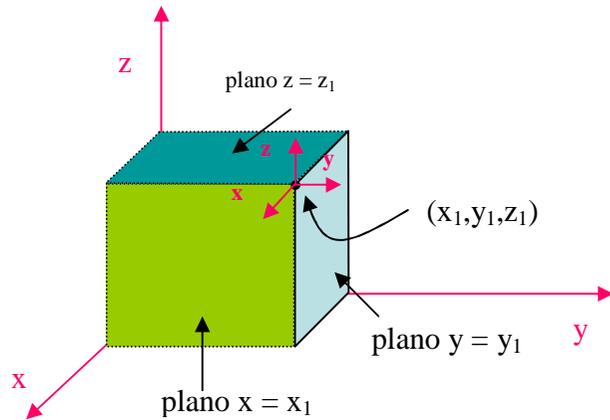


A transformação de uma quantidade vetorial é feita em duas etapas. Na primeira, idêntica à etapa anterior, fazemos a substituição das coordenadas de um sistema para a do outro sistema, empregando as relações já apresentadas. Na segunda etapa, fazemos a transformação dos vetores unitários. Isto pode ser feito empregando as operações a seguir:

\cdot	ρ	α	z
x	$\cos \alpha$	$-\text{sen } \alpha$	0
y	$\text{sen } \alpha$	$\cos \alpha$	0
z	0	0	1



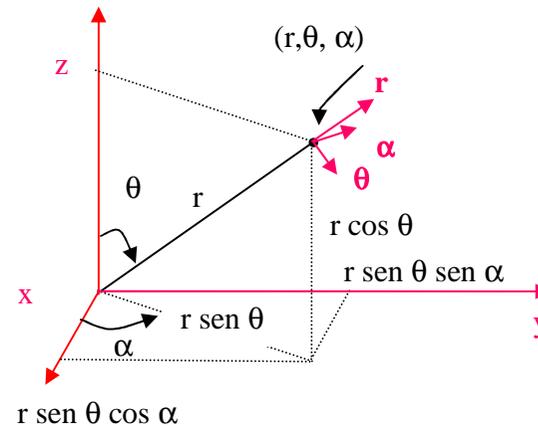
2.2. Coordenadas retangulares \leftrightarrow Coordenadas esféricas.



A transformação de uma quantidade escalar, de forma semelhante ao caso da transformação de coordenadas retangulares para coordenadas cilíndricas e vice e versa, pode ser feita substituindo as coordenadas de um sistema para a do outro sistema, empregando as relações entre elas:

- $x = r \text{ sen } \theta \cos \alpha$
- $y = r \text{ sen } \theta \text{ sen } \alpha$
- $z = r \cos \theta$

- $r = [x^2 + y^2 + z^2]^{1/2}$
- $\theta = \text{tg}^{-1}[(x^2 + y^2)^{1/2}/z]$
- $\alpha = \text{tg}^{-1}[y/x]$



A transformação dos vetores unitários do sistema de coordenadas retangulares e esféricas pode ser feita empregando as seguintes relações:

.	\mathbf{r}	θ	α
\mathbf{x}	$\text{sen } \theta \cos \alpha$	$\cos \theta \cos \alpha$	$-\text{sen } \alpha$
\mathbf{y}	$\text{sen } \theta \text{sen } \alpha$	$\cos \theta \text{sen } \alpha$	$\cos \alpha$
\mathbf{z}	$\cos \theta$	$-\text{sen } \theta$	0

Exercício:

- 1) Dado o campo vetorial $\mathbf{F} = 2x \mathbf{x} + z \mathbf{y}$ em coordenadas retangulares, encontre o vetor \mathbf{F} em coordenadas cilíndricas.
- 2) Dado o campo vetorial $\mathbf{F} = z \mathbf{x} + y \mathbf{y}$ em coordenadas retangulares, encontre o vetor \mathbf{F} em coordenadas esféricas.
- 3) Conhecido o campo vetorial $\mathbf{F} = z \boldsymbol{\rho} + \rho \mathbf{z}$ em coordenadas cilíndricas, encontre o vetor \mathbf{F} em coordenadas retangulares.
- 4) Conhecido o campo vetorial $\mathbf{F} = r \mathbf{r} + \cos \theta \boldsymbol{\theta}$ em coordenadas esféricas, encontre o vetor \mathbf{F} em coordenadas retangulares.

Integral de Linha

Considere o contorno C mostrado na figura a seguir, onde $\mathbf{t}(x,y,z)$ é o vetor unitário tangente à curva C no ponto (x,y,z) .

Seja $\mathbf{F}(x,y,z)$ um campo vetorial que é definido em todo ponto (x,y,z) do contorno C . Definimos integral de linha de $\mathbf{F}(x,y,z)$ ao longo do contorno C , à seguinte integral:

$$\int_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{t}(x, y, z) dl \quad (4)$$

Para avaliar esta integral, considere o vetor posição \mathbf{r} que localiza o ponto (x,y,z) , tendo como referência a origem de um sistema de referência genérico O . O vetor $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$ é por sua vez o vetor posição que localiza, sobre a curva C , um ponto próximo ao ponto (x,y,z) . Seja este o ponto (x',y',z') . Seja Δl o comprimento da curva C que vai do ponto (x,y,z) ao ponto próximo (x',y',z') . Assim, podemos definir o vetor unitário $\mathbf{t}(x,y,z)$ como sendo:

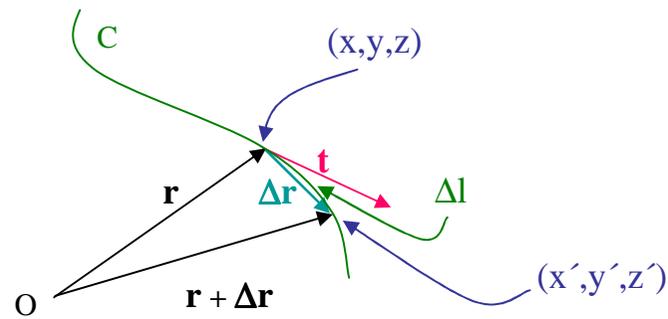


Fig. 8. Integral de linha.

$$\mathbf{t}(x, y, z) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta l} = \frac{d\mathbf{r}}{dl} \quad (5)$$

Substituindo na integral de linha o vetor tangente, temos:

$$\int_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \frac{d\mathbf{r}(x, y, z)}{dl} dl = \int_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{r}(x, y, z) \quad (6)$$

O vetor diferencial $d\mathbf{r}$, nos sistemas de coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas, possui a seguinte expressão:

a) Cartesianas

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{x} + dy\mathbf{y} + dz\mathbf{z} \quad (7)$$

b) Cilíndricas

$$d\mathbf{r} = d\rho\boldsymbol{\rho} + \rho d\alpha\boldsymbol{\alpha} + dz\mathbf{z} \quad (8)$$

c) Esféricas

$$d\mathbf{r} = dr\mathbf{r} + r d\theta\boldsymbol{\theta} + r \sin\theta d\alpha\boldsymbol{\alpha} \quad (9)$$

A substituição de $d\mathbf{r}$ dado nos sistemas de coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas em (6) conduz às seguintes expressões:

$$\int_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{r}(x, y, z) = \int_{x=x_i}^{x_f} F_x dx + \int_{y=y_i}^{y_f} F_y dy + \int_{z=z_i}^{z_f} F_z dz \quad (10)$$

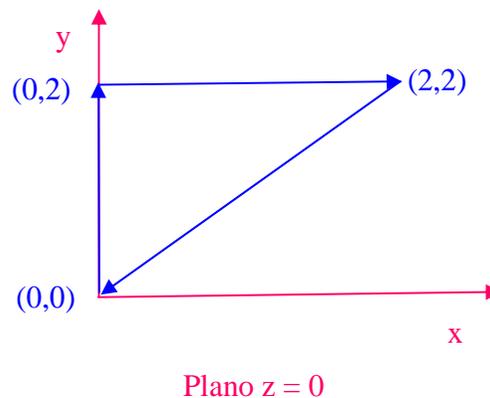
$$\int_C \mathbf{F}(\rho, \alpha, z) \cdot d\mathbf{r}(\rho, \alpha, z) = \int_{\rho=\rho_i}^{\rho_f} F_\rho d\rho + \int_{\alpha=\alpha_i}^{\alpha_f} F_\alpha \rho d\alpha + \int_{z=z_i}^{z_f} F_z dz \quad (11)$$

$$\int_C \mathbf{F}(r, \theta, \alpha) \cdot d\mathbf{r}(r, \theta, \alpha) = \int_{r=r_i}^{r_f} F_r dr + \int_{\theta=\theta_i}^{\theta_f} F_\theta r d\theta + \int_{\alpha=\alpha_i}^{\alpha_f} F_\alpha r \sin\theta d\alpha \quad (12)$$

A integral de linha, quando o percurso é fechado recebe o nome de circulação e ela é representada pela seguinte expressão:

$$\oint_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{r}(x, y, z) \quad (13)$$

Exemplo: Dado o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = xy \mathbf{x} + y^2 \mathbf{y}$, avalie a circulação deste campo ao longo do percurso fechado C mostrado na figura a seguir.



Solução: A integral de linha fechada pode ser escrita como a soma de três integrais, uma para cada segmento orientado. Assim,

$$\oint_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{r}(x, y, z) = \int_{C1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

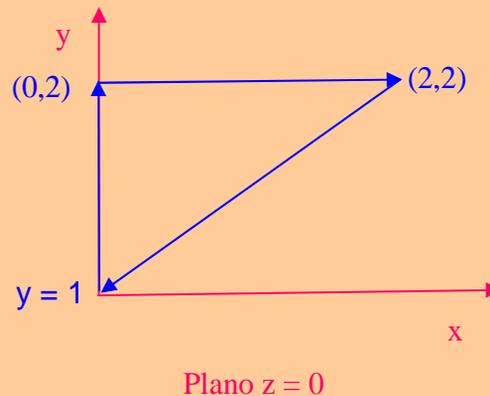
$$\oint_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{r}(x, y, z) = \int_{\substack{y=0 \\ x=0}}^{\substack{y=2 \\ x=0}} \mathbf{F} \cdot (dy\mathbf{y}) + \int_{\substack{x=0 \\ y=2}}^{\substack{x=2 \\ y=2}} \mathbf{F} \cdot (dx\mathbf{x}) + \int_{\substack{x=2 \\ y=0}}^{\substack{x=0 \\ y=0}} \mathbf{F} \cdot (dx\mathbf{x} + dy\mathbf{y})$$

$$\oint_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{r}(x, y, z) = \int_{\substack{y=0 \\ x=0}}^{\substack{y=2 \\ x=0}} F_y dy + \int_{\substack{x=0 \\ y=2}}^{\substack{x=2 \\ y=2}} F_x dx + \int_{\substack{x=2 \\ y=0}}^{\substack{x=0 \\ y=0}} F_x dx + \int_{\substack{y=0 \\ x=y}}^{\substack{y=2 \\ x=y}} F_y dy$$

$$\oint_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{r}(x, y, z) = \int_{y=0}^{y=2} y^2 dy + \int_{x=0}^{x=2} 2x dx + \int_{x=2}^{x=0} x^2 dx + \int_{y=2}^{y=0} y^2 dy$$

$$\oint_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{r}(x, y, z) = \left(\frac{y^3}{3}\right)_0^2 + (x^2)_0^2 + \left(\frac{x^3}{3}\right)_2^0 + \left(\frac{y^3}{3}\right)_2^0 = \frac{8}{3} + 4 - \frac{8}{3} - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

Exercício: Dado o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = xy \mathbf{x} + y^2 \mathbf{y}$, avalie em coordenadas cilíndricas a circulação deste campo ao longo do percurso fechado C mostrado na figura a seguir.



Integral de Superfície

Considere a superfície S mostrada na figura a seguir, onde $\mathbf{n}(x, y, z)$ é o vetor unitário normal à superfície S no ponto (x, y, z) .

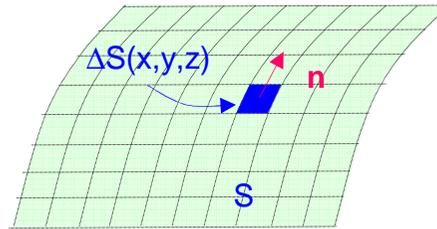


Fig. 8. Integral de superfície.

Seja $F(x,y,z)$ um campo escalar que é definido em todo ponto (x,y,z) da superfície S . Dividindo S em N elementos de superfície contíguos de área Δs_i , se o somatório do lado direito da equação (14) convergir quando N tende para infinito e a área do elemento tender a zero, a este resultado definimos como sendo integral de superfície de $F(x,y,z)$ sobre S , cuja notação é dada à esquerda da equação (14).

$$\iint_S F(x, y, z) ds(x, y, z) = \lim_{\substack{\Delta S \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^N F_i(x_i, y_i, z_i) \Delta_i(x_i, y_i, z_i) \quad (14)$$

Em muitas situações o campo escalar que desejamos integrar é o componente normal de um campo vetorial $\mathbf{F}(x,y,z)$. Neste caso, a integral de superfície é escrita conforme equação (15).

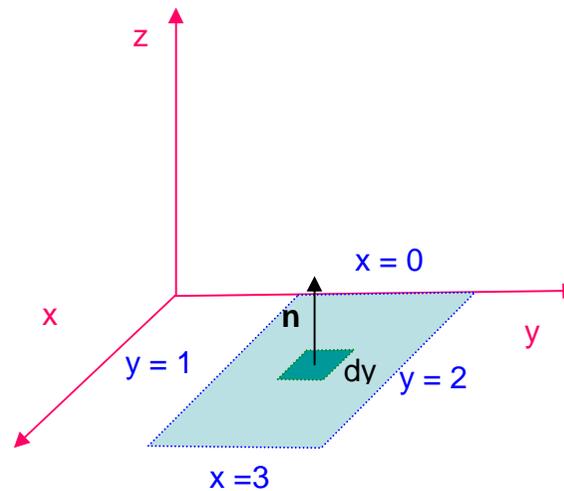
$$\iint_S F_n(x, y, z) ds(x, y, z) = \iint_S \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z) ds(x, y, z) = \iint_S \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{s}(x, y, z) \quad (15)$$

onde o elemento de área diferencial vetorial é $d\mathbf{s}(x, y, z) = \mathbf{n}(x, y, z) ds(x, y, z)$. Ao resultado da integração do componente normal de uma quantidade vetorial sobre uma superfície S denominamos de fluxo desta quantidade que atravessa a superfície.

Se a superfície é fechada, o resultado representa o fluxo líquido (o que sai menos o que entra) que deixa a superfície S . A integral neste caso é escrita com o sinal da dupla integral com um círculo no centro:

$$\oiint_S \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{s}(x, y, z) = \oiint_S \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z) ds(x, y, z) \quad (16)$$

Exemplo: Dado o campo vetorial $\mathbf{F}(x,y,z) = (y+z)\mathbf{y} + xyz$, avalie em coordenadas retangulares o fluxo que atravessa a superfície retangular no plano xy definida pelas retas $x = 0$, $x = 3$, $y = 1$, e $y = 2$.

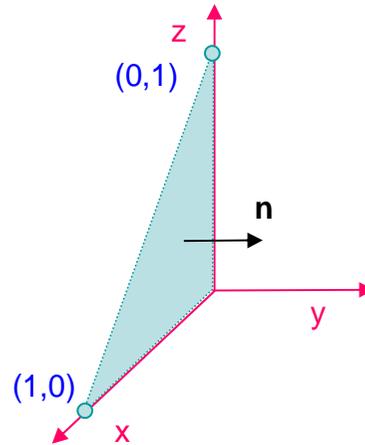


Solução:

$$\iint_S \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{s}(x, y, z) = \iint_S \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{z} dx dy = \iint_S xyz dx dy$$

$$\iint_S xyz dx dy = \int_1^2 y \left(\int_0^3 x dx \right) dy = \left(\frac{x^2}{2} \right)_0^3 \int_1^2 y dy = \left(\frac{x^2}{2} \right)_0^3 \left(\frac{y^2}{2} \right)_1^2 = \left(\frac{9}{2} \right) \left(\frac{4-1}{2} \right) = \frac{27}{4}$$

Exercício: Dado o campo vetorial $\mathbf{F}(x,y,z) = (y+z)\mathbf{y} + xyz\mathbf{z}$, avalie em coordenadas retangulares o fluxo que atravessa a superfície triangular no plano xz definida pelas retas $x = 0$, $z = 0$, $x = 1 - z$, mostrada na figura a seguir.



Operador nãbla; Gradiente; Divergência; Rotacional.

Operador nabla

O operador ∇ é um operador vetorial diferencial, denominado nabla ou del, o qual é definido no sistema de coordenadas cartesianas como:

$$\nabla = \mathbf{x} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{y} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{z} \frac{\partial}{\partial z} . \quad (17)$$

Este operador não tem significado físico nem geométrico. Por ser um operador, pode-se à esquerda aplica-lo a uma função à direita.

Exemplo: Escreva a expressão do operador diferencial $f\nabla$; $\mathbf{v} \cdot \nabla$ e $\mathbf{v} \times \nabla$.

Gradiente

Considere a função escalar f , contínua e com derivadas pelo menos até primeira ordem:

$$f = f(\mathbf{r}) = f(x, y, z) . \quad (18)$$

O gradiente da função f , $\text{grad } f$, é um vetor definido por:

$$\nabla f = \mathbf{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{y} \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{z} \frac{\partial f}{\partial z} . \quad (19)$$

O grad f é um vetor que dá como resultado a máxima variação da função e a direção em que esta máxima variação ocorre.

Verificação:

a) Qual o significado geométrico da direção fornecida pelo gradiente?

Considere o vetor posição $\mathbf{r} = x\mathbf{x} + y\mathbf{y} + z\mathbf{z}$. O deslocamento elementar $d\mathbf{l} = d\mathbf{r}$ é dado por:

$$d\mathbf{l} = d\mathbf{r} = xdx + ydy + zdz. \quad (20)$$

Realizando o produto escalar entre Eqs. (19) e (20) resulta em:

$$\nabla f \cdot d\mathbf{l} = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = df \quad (21)$$

Esse resultado nada mais é do que a diferencial df . Se $f(x,y,z) = C$, onde C é uma constante, o resultado obtido ao se substituir $f(x,y,z) = C$ em (21) é $df = 0$. Se $f(x,y,z)$ não é uma constante, a diferencial de f é nula ($df = 0$) somente se

$$\nabla f \perp d\mathbf{l}. \quad (22)$$

Como a diferencial df ao longo da superfície equipotencial é nula (qualquer deslocamento elementar $d\mathbf{l}$ deve ser tangente à superfície equipotencial) concluimos através de (21) que o gradiente de uma função $f(\mathbf{r})$ é perpendicular à superfície (equipotencial) $f = \text{constante}$.

$$\nabla f \perp f(\mathbf{r}) = C . \quad (23)$$

Da Eq. (21) vemos que a variação df é máxima quando o deslocamento $d\mathbf{l}$ for paralelo ao gradiente. Por outro lado, o gradiente é perpendicular à superfície $f = \text{constante}$, donde podemos concluir que a direção do gradiente dá a máxima variação df da função f .

$$\nabla f // \text{direção de } df_{\max} . \quad (24)$$

b) E o módulo do gradiente? O que ele fornece como informação?

Considere o elemento de arco em coordenadas cartesianas

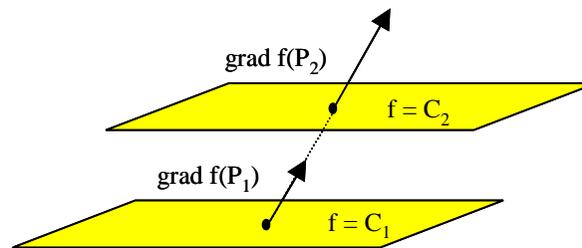
$$dl = |d\mathbf{l}| = [dx^2 + dy^2 + dz^2]^{1/2} . \quad (25)$$

Dividindo membro a membro a Eq. (21) pela (25), obtém-se:

$$\frac{\nabla f \cdot d\mathbf{l}}{|d\mathbf{l}|} = \nabla f \cdot \mathbf{u} = \frac{df}{dl} . \quad (26)$$

Se $d\mathbf{l}$ é paralelo ao gradiente de f , logo \mathbf{u} é um vetor unitário na direção do gradiente e o resultado $\nabla f \cdot \mathbf{u} = |\nabla f|$. Portanto, o módulo do gradiente de f dá como resultado a máxima taxa de variação da função, isto é:

$$|\nabla f| = \left(\frac{df}{d\mathbf{l}} \right)_{\max} \quad (27)$$



Assim, podemos repetir: O grad f é um vetor que dá como resultado a máxima variação da função e a direção e sentido em que esta máxima variação ocorre.

Expressões do Gradiente nos Sistemas de Coordenadas:

d) Cartesianas

$$\nabla f = \mathbf{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{y} \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{z} \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (28)$$

e) Cilíndricas

$$\nabla f = \boldsymbol{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \boldsymbol{\alpha} \frac{\partial f}{\rho \partial \alpha} + \mathbf{z} \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (29)$$

f) Esféricas

$$\nabla f = \mathbf{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \boldsymbol{\theta} \frac{\partial f}{r \partial \theta} + \boldsymbol{\alpha} \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \alpha}. \quad (30)$$

A Divergência

Seja $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}) = v_x(x,y,z)\mathbf{x} + v_y(x,y,z)\mathbf{y} + v_z(x,y,z)\mathbf{z}$ uma função vetorial contínua e com derivadas contínuas pelo menos até à primeira ordem. Por definição, o escalar

$$\nabla \cdot \mathbf{v} \equiv \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (31)$$

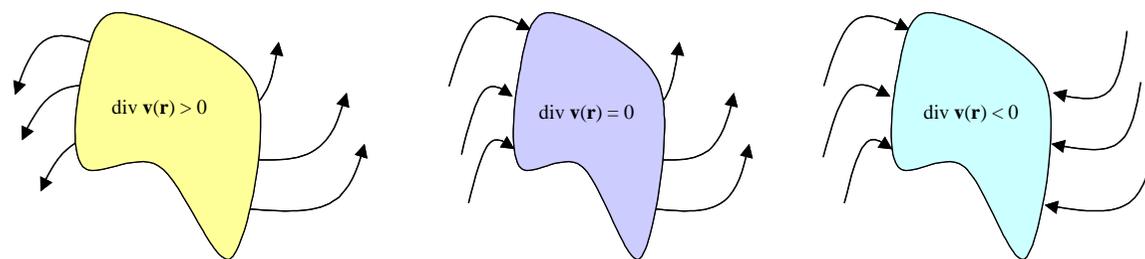
é a divergência do vetor \mathbf{v} (div \mathbf{v}).

Significado Físico:

A divergência de um campo vetorial $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, $\text{div } \mathbf{v}(\mathbf{r})$, dá como resultado o fluxo líquido (fluxo que sai – fluxo que entra) por unidade de volume.

Obs.: A divergência se aplica a um campo vetorial e dá como resultado um escalar.

Ilustração Geométrica:

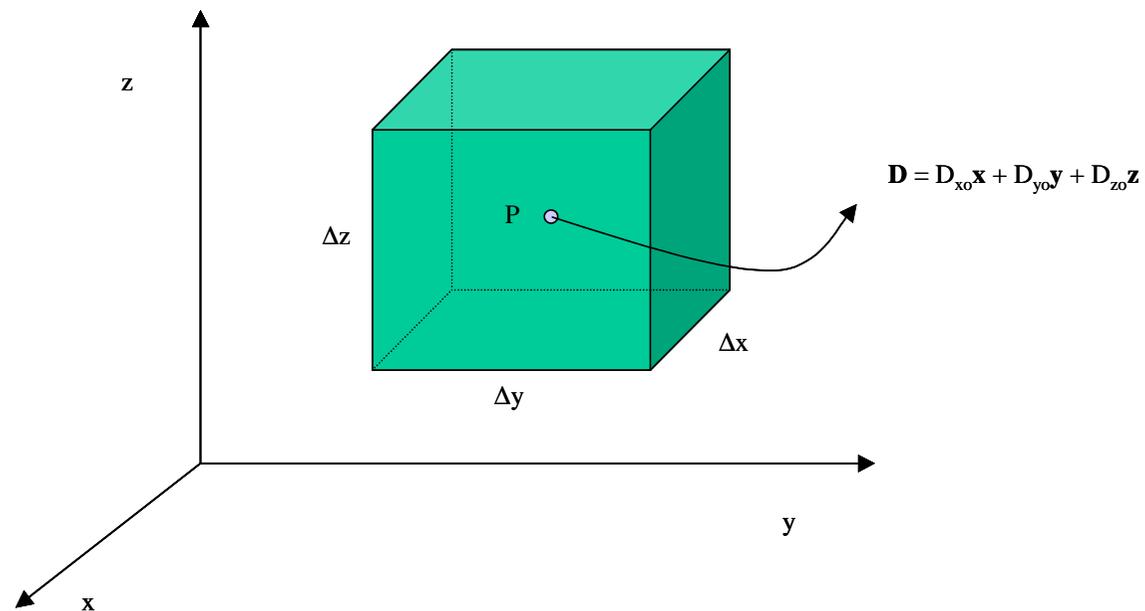


Dedução:

Considere a lei de Gauss:

$$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q \quad (32)$$

Vamos aplicá-la à superfície fechada que envolve o volume infinitesimal, com centro no ponto P, ilustrado a seguir:



A superfície que envolve o volume é o resultado da soma das superfícies laterais. Logo,

$$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_{frente} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} + \int_{atrás} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} + \int_{esq.} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} + \int_{dir.} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} + \int_{topo} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} + \int_{base} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} \quad (33)$$

Vamos considerar separadamente cada uma das integrais do lado direito de (33).

a) Face da Frente

$$\int_{frente} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} \approx D \cdot \Delta s_{frente} = D \cdot \Delta y \Delta z \mathbf{x} = D_{x, frente} \Delta y \Delta z \quad (34)$$

O valor de D_x na face frontal pode ser aproximado através da expansão de Taylor:

$$D_{x, frente} = D_{x0} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \quad (35)$$

onde D_{x0} é o valor de D_x no ponto central P. Substituindo este resultado em (18), tem-se:

$$\int_{frente} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} \approx \left(D_{x0} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z \quad (36)$$

b) Face de Trás

$$\int_{\text{atrás}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} \approx D \cdot \Delta s_{\text{atrás}} = -D \cdot \Delta y \Delta z \mathbf{x} = -D_{x,\text{atrás}} \Delta y \Delta z \quad (37)$$

O valor de D_x na face de trás, empregando a expansão de Taylor, é:

$$D_{x,\text{atrás}} = D_{x0} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \quad (38)$$

Substituindo este resultado em (37), tem-se:

$$\int_{\text{atrás}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} \approx - \left(D_{x0} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z \quad (39)$$

Somando as contribuições das duas faces (Eqs. (36) + (39)) temos:

$$\int_{\text{frente}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} + \int_{\text{atrás}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} \approx \frac{\partial D_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (40)$$

Esta equação dá como resultado o fluxo líquido que deixa a superfície na direção \mathbf{x} .

De modo análogo, as contribuições das faces da base + topo e esq.+dir. são:

$$\int_{esq.} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} + \int_{dir.} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} \approx \frac{\partial D_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (41)$$

$$\int_{base} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} + \int_{topo} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} \approx \frac{\partial D_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (42)$$

Estes três resultados somados (Eqs. (40) + (41) + (42)) permitem então avaliar o fluxo líquido que deixa a superfície fechada envolvendo o cubo, isto é:

$$\begin{aligned} \oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} &= \int_{frente} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} + \int_{atrás} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} + \int_{esq.} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} + \int_{dir.} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} + \int_{topo} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} + \int_{base} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} \\ &\approx \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned} \quad (43)$$

Dividindo ambos os lados de (43) por $\Delta x \Delta y \Delta z$ e tomando o limite de $\Delta v = \Delta x \Delta y \Delta z \rightarrow 0$, tem-se:

$$\lim_{\Delta x \Delta y \Delta z \rightarrow 0} \frac{\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) = \nabla \cdot \mathbf{D} \quad (44)$$

Este resultado é por definição a divergência do campo vetorial \mathbf{D} .

Da lei de Gaus (Eq. (32)), fica óbvio que

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho(x, y, z)$$

(45)

Expressão da Divergência de um Potencial Vetor A nos Sistemas de Coordenadas:

Cartesianas(x,y,z):	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$
Cilíndricas(ρ, α, z):	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial D_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$
Esféricas(r, θ, α):	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 D_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta D_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial D_\alpha}{\partial \alpha}$

Rotacional

Em coordenadas cartesianas, o produto vetorial entre o operador nabla e um campo vetorial \mathbf{v} pode ser escrito da seguinte forma:

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \quad (46)$$

ou

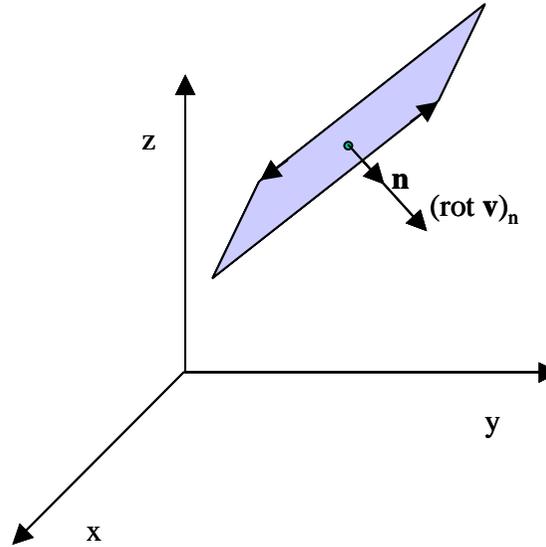
$$\nabla \times \mathbf{v} = (\partial v_z / \partial y - \partial v_y / \partial z) \mathbf{x} + (\partial v_x / \partial z - \partial v_z / \partial x) \mathbf{y} + (\partial v_y / \partial x - \partial v_x / \partial y) \mathbf{z} \quad (47)$$

Significado Físico:

O rotacional de um campo vetorial $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, $\text{rot } \mathbf{v}(\mathbf{r})$, dá como resultado um vetor cujos componentes x, y e z dão a circulação desse campo vetorial por unidade de área respectivamente nos planos normais a esses componentes.

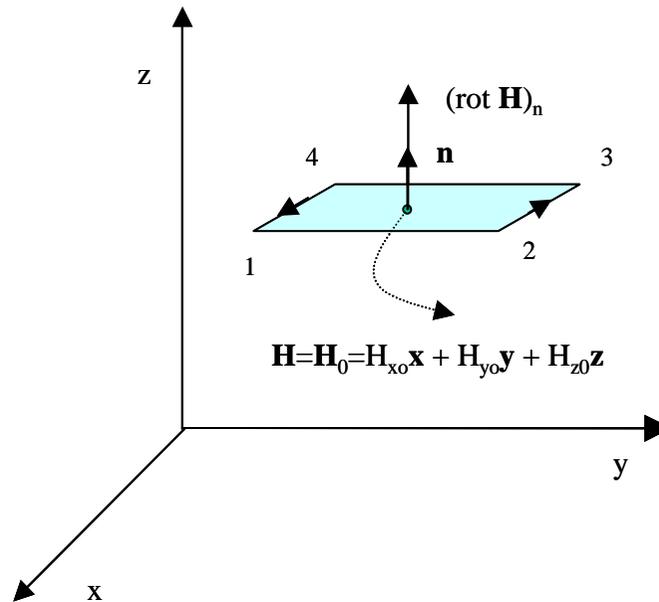
Obs.: O rotacional se aplica a um campo vetorial e dá como resultado um vetor.

Ilustração Geométrica:



Dedução:

Considere a figura abaixo, a qual será utilizada para aplicação da lei de Ampère ao percurso diferencial fechado.



A integral de linha fechada de $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$, Eq. (48), é conhecida como Lei de Ampère.

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \tag{48}$$

É suposto que uma densidade de corrente, não especificada, produza no centro da face um campo de referência \mathbf{H}_0 . Aplicando a Eq. (48) ao percurso fechado 1-2-3-4-1 da figura anterior, obtem-se:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \int_2^3 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \int_3^4 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \int_4^1 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \quad (49)$$

A integral sobre o lado 1-2 pode ser aproximada por:

$$\int_1^2 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \approx H_{y,1-2} \Delta y \quad (50)$$

O valor de H_y sobre este lado pode ser aproximado por:

$$H_{y,1-2} = H_{y0} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial H_y}{\partial x} \quad (51)$$

Substituindo a Eq. (51) em (50) tem-se:

$$\int_1^2 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \approx \left(H_{y0} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) \Delta y \quad (52)$$

Se se considera agora o percurso 3-4, tem-se:

$$\int_3^4 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \approx - \left(H_{y0} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) \Delta y \quad (53)$$

Somando-se as contribuições dos percursos 1-2+3-4, Eqs. (52) + (53), tem-se:

$$\int_1^2 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \int_3^4 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \approx \frac{\partial H_y}{\partial x} \Delta x \Delta y . \quad (54)$$

De forma análoga, para a contribuição dos percursos 2-3+4-1, tem-se:

$$\int_2^3 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \int_4^1 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \approx -\frac{\partial H_x}{\partial y} \Delta x \Delta y . \quad (55)$$

Com estes resultados, a integral de linha fechada para o elemento de área diferencial se resume a:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \approx \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y . \quad (56)$$

O lado direito da Eq. (48) pode ser avaliado no elemento de área diferencial como:

$$\int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \approx J_z \Delta x \Delta y . \quad (57)$$

Assim, a Eq. (48), pode ser reescrita usando (56) e (57):

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \approx \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y \approx J_z \Delta x \Delta y. \quad (58)$$

ou

$$\frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta x \Delta y} \approx \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \approx J_z. \quad (59)$$

Tomando o limite de $\Delta x \Delta y$ tendendo a zero, obtem-se:

$$\lim_{\Delta x \Delta y \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta x \Delta y} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z \quad (60)$$

Se se escolhe percursos fechados orientados perpendicularmente a x e y , equações similares à Eq. (60) podem ser obtidas (veja Eqs. (61) e (62)).

$$\lim_{\Delta y \Delta z \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta y \Delta z} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x \quad (61)$$

$$\lim_{\Delta x \Delta z \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta x \Delta z} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y \quad (62)$$

As Eqs. (60) a (62) mostram que os componentes da densidade de corrente podem ser obtidos tomando-se o quociente entre a integral de linha fechada do campo magnético em um percurso infinitesimal no plano perpendicular a cada um desses componentes pela área envolvida quando esta tende a zero.

Este resultado recebe o nome de Rotacional.

De uma forma geral, o componente \underline{n} do rotacional de um campo vetorial \mathbf{A} qualquer, $(\text{rot } \mathbf{A})_n$, é dada por:

$$(\text{rot } \mathbf{A})_n = \lim_{\Delta s_n \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta s_n} \quad (63)$$

Expressão do Rotacional de um Campo Vetorial \mathbf{A} nos Sistemas de Coordenadas:

Cartesianas(x,y,z):	$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{z}$
Cilíndricas(ρ, α, z):	$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial z} \right) \boldsymbol{\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \boldsymbol{\alpha} + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\alpha)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \alpha} \right) \mathbf{z}$
Esféricas(r, θ, α):	$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta A_\alpha)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \alpha} \right) \mathbf{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} - \frac{\partial(r A_\alpha)}{\partial r} \right) \boldsymbol{\theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \boldsymbol{\alpha}$

Operadores e Operações de Segunda Ordem.

Pode-se formar com o operador diferencial nabla, dois operadores de segunda ordem:

$$\nabla \times \nabla \quad (64)$$

e

$$\nabla \cdot \nabla \tag{65}$$

As expressões em coordenadas cartesianas são respectivamente:

$$\nabla \times \nabla = \begin{vmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} = \mathbf{x} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} \right) + \mathbf{y} \left(\frac{\partial^2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \right) + \mathbf{z} \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \right) \tag{66}$$

e

$$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{67}$$

A operação dada em (64) não tem um nome específico, entretanto em (65) o operador é conhecido por Laplaciano.

Expressão do Laplaciano nos Sistemas de Coordenadas:	
Cartesianas(x,y,z):	$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$
Cilíndricas(ρ,α,z):	$\nabla^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Esféricas(r, θ, α):

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}$$

Sendo o operador Laplaciano um escalar, ele pode ser aplicado a uma função escalar ou vetorial.

$$\nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f \quad (68)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla^2 (A_x \mathbf{x} + A_y \mathbf{y} + A_z \mathbf{z}) = \nabla^2 A_x \mathbf{x} + \nabla^2 A_y \mathbf{y} + \nabla^2 A_z \mathbf{z} \quad (69)$$

Em (68), o Laplaciano pode ser interpretado como sendo a divergência do gradiente. Em (69) esta interpretação não é válida, pois o gradiente não se aplica a uma função vetorial. Em (69), quando é o sistema de coordenadas cartesianas, as componentes do Laplaciano de uma função vetorial são os Laplacianos das componentes cartesianas.

Em sistemas de coordenadas curvilíneas, em geral tem-se:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla^2 (A_1 \mathbf{u}_1 + A_2 \mathbf{u}_2 + A_3 \mathbf{u}_3) \neq \nabla^2 A_1 \mathbf{u}_1 + \nabla^2 A_2 \mathbf{u}_2 + \nabla^2 A_3 \mathbf{u}_3 \quad (70)$$

Isto se deve ao fato de que os unitários curvilíneos são função do ponto e não podem portanto serem extraídos da operação de diferenciação. As expressões em coordenadas curvilíneas podem ser encontradas na página 17 do livro Eletromagnetismo (Annita Macedo).

O operador $\nabla \times \nabla$, dado em (64), aplicado a uma função de ponto será sempre nulo se a função for contínua e tiver contínuas as derivadas segundas mistas. Isto só não ocorre com as grandezas do eletromagnetismo [AnnitaMacedo]. A Tabela a seguir mostra outras operações possíveis com este operador.

Operações com o Operador Nabla

$$(\nabla \times \nabla)f = \nabla \times (\nabla f) = 0 \tag{71}$$

$$(\nabla \times \nabla) \cdot \mathbf{A} = 0 \tag{72}$$

$$(\nabla \times \nabla) \times \mathbf{A} = 0 \tag{73}$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \nabla\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\right) + \nabla\left(\frac{\partial A_y}{\partial y}\right) + \nabla\left(\frac{\partial A_z}{\partial z}\right) \tag{74}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (75)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (76)$$

De (71), pode-se concluir que se o campo é irrotacional, então ele pode ser escrito como sendo o gradiente de um escalar:

$$\nabla \times \mathbf{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \nabla f . \quad (77)$$

Se além de ser irrotacional, o campo for solenoidal ($\text{div } \mathbf{A} = 0$), então:

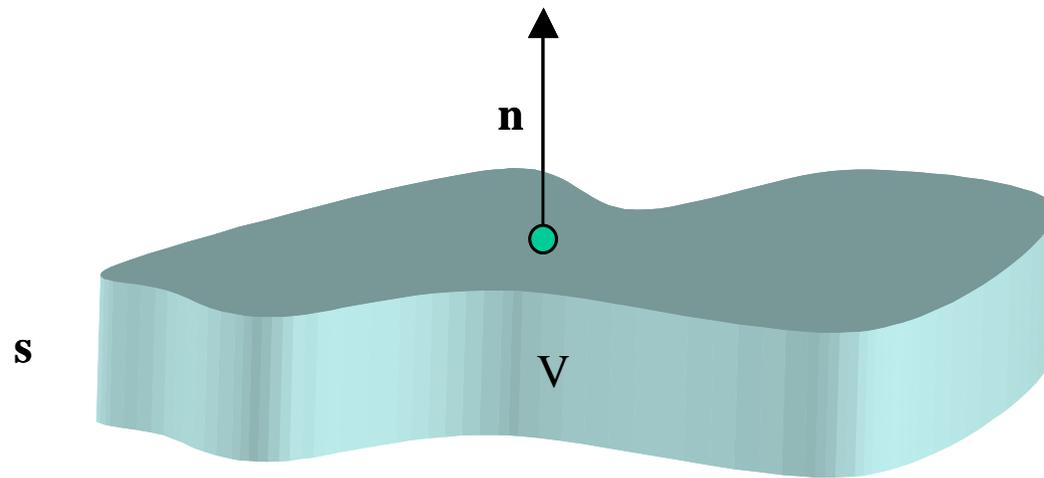
$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 f = 0 . \quad (78)$$

Se o gradiente de uma função for irrotacional e solenoidal, ela é dita ser harmônica.

Teoremas em Eletromagnetismo (Gauss e Stokes)

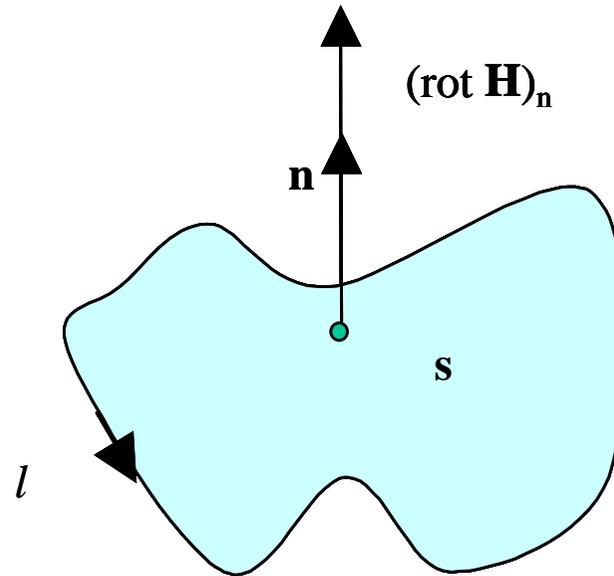
O teorema da divergência ou de Gauss estabelece que a integral de volume da divergência de qualquer campo vetorial é igual à integral de superfície fechada da componente normal desse campo à superfície S .

$$\iiint \nabla \cdot \mathbf{A} dv = \oiint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \quad (79)$$



O teorema de Stokes estabelece que a integral de superfície aberta da componente normal do rotacional de qualquer campo vetorial à superfície S é igual à integral desse campo ao longo do percurso fechado que limita S .

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\ell} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (80)$$



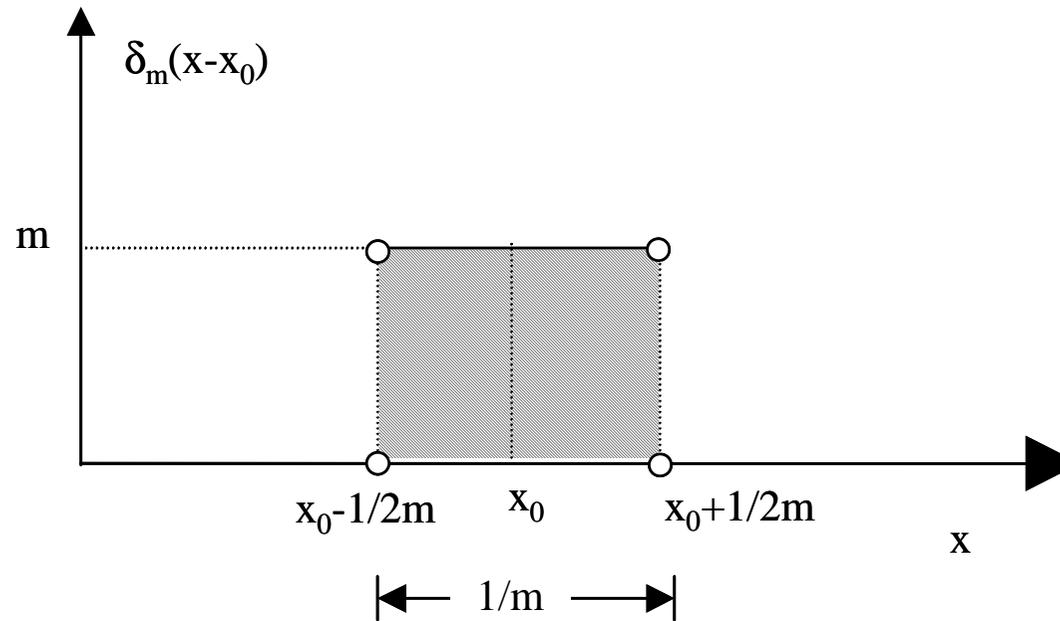
Função Delta de Dirac

Essa função embora possa parecer um pouco estranha, ela é muito útil em eletromagnetismo. Considere a função abaixo:

$$\delta_m(x - x_0) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x - x_0| > 1/2m \\ m & \text{se } |x - x_0| < 1/2m \end{cases} \quad (81)$$

onde m é um escalar positivo com dimensão m^{-1} . A figura abaixo ilustra esta função.

Considere agora uma região qualquer R sobre o eixo x . Se R conter o intervalo $x_0 - 1/2m < x < x_0 + 1/2m$, então a integral de $\delta_m(x - x_0)$ sobre esta região será sempre igual à unidade. Caso contrário será nula.



Isto é:

$$\int_R \delta_m(x - x_0) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } x_0 \pm 1/2m \notin R \\ 1 & \text{se } x_0 \pm 1/2m \in R \end{cases} \quad (82)$$

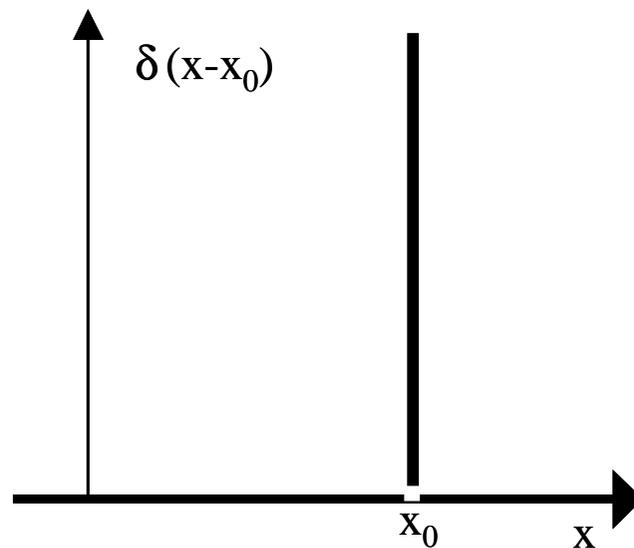
Numericamente, essa integral é a área hachurada da figura anterior, a qual tem valor unitário independente do valor de m .

A função delta de Dirac pode agora ser definida como:

$$\delta(x - x_0) \equiv \lim_{m \rightarrow \infty} \delta_m(x - x_0) \quad (83)$$

Com essa definição, verifica-se que $\delta(x - x_0) = 0$ se $x \neq x_0$, e

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } x_0 \notin \mathbb{R} \\ 1 & \text{se } x_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (84)$$



As propriedades desta distribuição que nos interessam são dadas a seguir. Ela é simétrica em relação a seu ponto singular e seu produto por uma função finita será sempre igual a zero, exceto para o ponto singular, o que mostra a equação.

$$\delta(x - x_0) = \delta(x_0 - x) \quad (85)$$

$$f(x)\delta(x - x_0) = f(x_0)\delta(x - x_0) \quad (86)$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\delta(x - x_0)dx = \begin{cases} 0 & \text{se } x_0 \notin \mathbb{R} \\ f(x_0) & \text{se } x_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (87)$$

De forma sucinta, essa última equação estabelece que a integral do produto de uma função pela delta de Dirac é igual ao valor da função no ponto que anula o argumento da delta.

Para duas e três dimensões, análises similares podem ser feitas. Em duas e três dimensões, a delta de Dirac é definida como:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0) \quad \rightarrow \quad \text{em 2D} \quad (88)$$

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0) \quad \rightarrow \quad \text{em 3D} \quad (89)$$

As propriedades da delta em 2D e 3D são similares àquelas em 1D. Finalmente, as expressões para a delta de Dirac em coordenadas cartesianas e esféricas são dadas na pág. 28 do livro Eletromagnetismo (Annita Macedo).

EXERCÍCIOS 01

1. Explique em poucas palavras o significado do gradiente, da divergência e do rotacional.
2. O que é um campo solenoidal? E irrotacional?
3. Explique o teorema de Stokes e da Divergência?

2. Equações de Maxwell

Nesse tópico, primeiramente serão vistas as grandezas fundamentais necessárias ao estabelecimento da teoria da *eletrodinâmica macroscópica*. Após, serão abordadas as equações de Maxwell (sua necessidade e suficiência), as condições de interface entre dois meios com características físicas diferentes e finalmente dois teoremas sobre a conservação de carga, de energia.

2.1 - Distribuições de Cargas

Hipótese: Os meios são contínuos, isto é, a matéria pode ser continuamente subdividida e conservar, desta maneira, as propriedades qualitativas do todo.

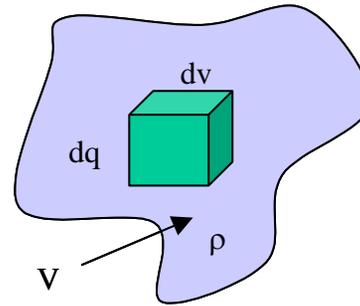
2.1.1 Densidade volumar de carga

É definida como:

$$\rho \equiv dq/dv \equiv \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta v} \quad (\text{C/m}^3) \quad (74)$$

onde $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$, isto é, a densidade volumar de carga elétrica é função do ponto e pode variar com o tempo. A densidade ρ tem como unidade C/m^3 .

Integrando diretamente a densidade volumar de carga obtém-se a carga total em Coulomb.



$$q = \iiint_V \rho dv . \quad (75)$$

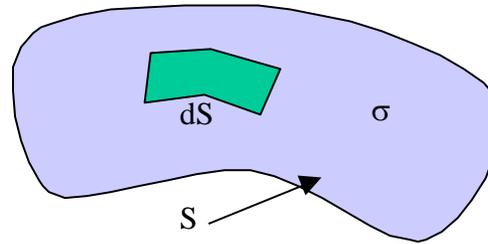
2.1.2 Densidade superficial de carga

É definida como:

$$\sigma \equiv dq/ds \equiv \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta s} \quad (76)$$

onde $\sigma = \sigma(\mathbf{r}, t)$, isto é, a densidade superficial de carga elétrica é função do ponto e pode variar com o tempo. A densidade σ tem como unidade C/m^2 .

Integrando a densidade superficial de carga obtém-se a carga total em Coulomb.



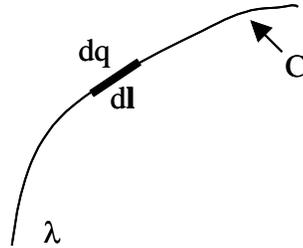
$$q = \iint_S \sigma ds . \quad (77)$$

2.1.3 Densidade linear de carga

É definida como:

$$\lambda \equiv dq/dl \equiv \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} \quad (78)$$

onde $\lambda = \lambda(\mathbf{r}, t)$, isto é, a densidade linear de carga elétrica é função do ponto e pode variar com o tempo. A densidade λ tem como unidade C/m.



Integrando a densidade linear de carga obtém-se a carga total em Coulomb.

$$q = \int_C \lambda dl. \quad (79)$$

2.1.4 Carga pontual

O limite é uma carga pontual, concentrada numa região suficientemente pequena para se confundir com um ponto, vista macroscopicamente.

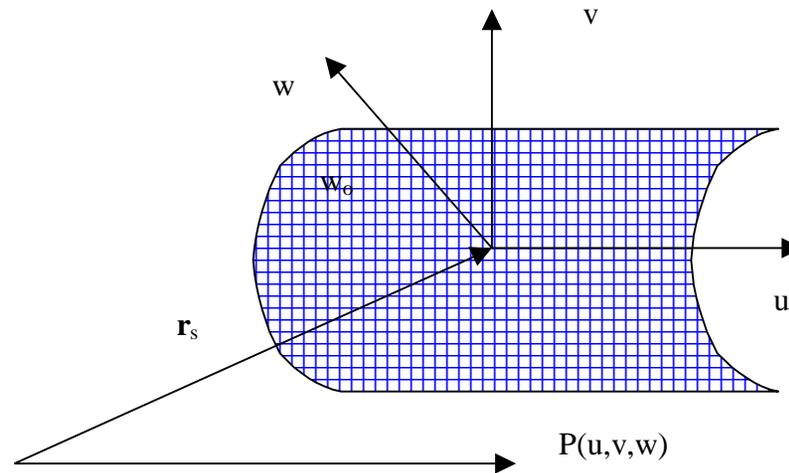


2.1.5 Distribuições de carga expressas como densidade volumar

Com o objetivo de limitar o número de fórmulas, é possível representar as diversas distribuições de carga como uma distribuição volumar com a ajuda da função delta de Dirac.

Densidade superficial:

$$\rho(\mathbf{r}) = \sigma(u, v)\delta(w - w_0) . \quad (80)$$



Densidade linear:

$$\rho(\mathbf{r}) = \lambda(w)\delta(u - u_0)\delta(v - v_0) . \quad (81)$$

Carga pontual:

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(u - u_0)\delta(v - v_0)\delta(w - w_0) . \quad (82)$$

Integrando a distribuição volumar dada em (80),(81) e (82) e considerando as propriedades da delta de Dirac teremos em todos os casos a carga total q .

Exercícios: Resolva o problema 2.1.2 e 2.1.3 do livro texto.

2.2 - Distribuições de Correntes

Em raríssimos casos, as cargas de uma distribuição se encontram em repouso com relação a um referencial. Em geral elas se encontram em movimento. As densidades de correntes são definidas como:

2.2.1 Densidade superficial de corrente

A densidade de corrente de convecção é definida como o produto da densidade volumar de carga pela velocidade \mathbf{v} . Pode-se facilmente verificar que sua unidade é o C/m²s que é o A/m².

$$\mathbf{j} = \rho\mathbf{v} \quad (\text{densidade de corrente de convecção}) \quad (83)$$

A integral de superfície da densidade de corrente \mathbf{j} fornece como resultado a corrente total que atravessa essa superfície.

$$I = \iint_s \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{A} = \text{C/s} = \text{Cs}^{-1}) \quad (84)$$

O **Ampère** é a **quarta unidade do SI fundamental** do eletromagnetismo. Juntamente com o metro, o quilograma e o segundo permitem que todas as outras unidades sejam daí derivadas. O **Coulomb** é simplesmente o **produto das unidades Ampère e segundo**.

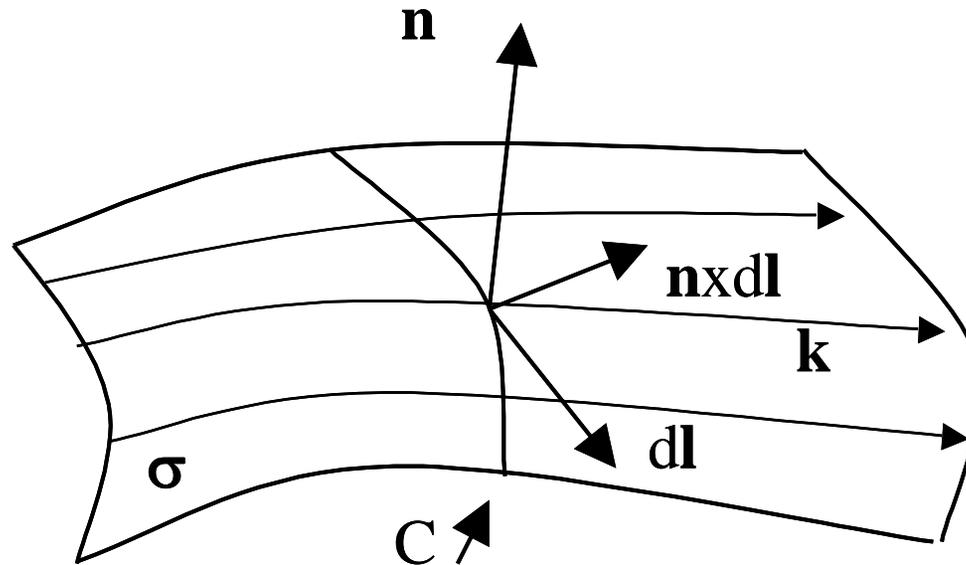
2.2.2 Densidade linear de corrente

A densidade linear de corrente de convecção é definida como o produto da densidade superficial de carga elétrica pela velocidade \mathbf{v} . Pode-se facilmente verificar que sua unidade é o C/ms que é o A/m.

$$\mathbf{k} = \sigma \mathbf{v} \quad (85)$$

Da mesma forma, a integral de linha da densidade de corrente \mathbf{k} fornece como resultado a corrente total que atravessa essa linha. Matematicamente, isto pode ser escrito como:

$$I = \int_C \mathbf{k} \cdot (\mathbf{n} \times d\mathbf{l}) \quad (86)$$



Em (86), o produto vetorial $\mathbf{n} \times d\mathbf{l}$ dá como resultado um vetor com magnitude $d\mathbf{l}$ na direção normal ao contorno C . O unitário \mathbf{n} é o vetor unitário normal à superfície S por onde flui a densidade de corrente \mathbf{k} .

2.2.3 Corrente linear ou filiforme

É definida como o produto da densidade linear de carga elétrica pela velocidade \mathbf{v} . Pode-se facilmente verificar que sua unidade é o C/s que é o A.

$$\mathbf{i} = \lambda \mathbf{v} \quad (87)$$



A corrente I é obviamente o módulo de \mathbf{i} ($I=|\mathbf{i}|$).

2.2.4 Distribuições de correntes expressas como densidade superficial de corrente

De forma análoga às distribuições de carga, as distribuições de corrente também podem ser expressas como uma distribuição superficial com a ajuda da função delta de Dirac.

Densidade linear:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sigma(u, v)\delta(w - w_0)\mathbf{v} . \quad (88)$$

ou

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{k}(u, v)\delta(w - w_0) . \quad (89)$$

Corrente linear:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \lambda(w)\delta(u - u_0)\delta(v - v_0)\mathbf{v} . \quad (90)$$

ou

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{i}(w)\delta(u - u_0)\delta(v - v_0) . \quad (91)$$

Corrente Total

A corrente total pode ser definida como a taxa de variação da carga elétrica em relação ao tempo. Para verificar esta afirmação, seja

$$dq = \rho dv = \rho dl \cdot ds$$

⇓

$$\frac{dq}{dt} = \rho \frac{dl}{dt} \cdot ds = \rho v \cdot ds = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s} \quad (92)$$

A integral de superfície de ambos os lados da equação anterior fornece como resultado para o segundo membro a corrente total I que atravessa essa superfície e para o primeiro membro a carga total que a atravessa por unidade de tempo.

$$\frac{dQ}{dt} = I \quad (93)$$

Exercícios sugeridos: 2.2.1, 2.2.3 e 2.2.5.

2.3 - Equações Constitutivas

O campo eletromagnético se caracteriza por quatro funções vetoriais, dependentes da posição e do tempo: o campo elétrico \mathbf{E} , a densidade de fluxo elétrico \mathbf{D} , o campo magnético \mathbf{H} , e a densidade de fluxo magnético \mathbf{B} . As leis

básicas do campo eletromagnético são as equações de Maxwell que relacionam esses quatro vetores.

$$\nabla \times \mathbf{E} + \partial \mathbf{B} / \partial t = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

\mathbf{E} é o campo elétrico (V/m)

\mathbf{B} é a densidade de fluxo magnético ($\text{Wb}/\text{m}^2 = \text{Vs}/\text{m}^2$) (94)

\mathbf{D} é a densidade de fluxo elétrico (C/m^2) (95)

\mathbf{H} é o campo magnético (A/m) (96)

\mathbf{J} é a densidade de corrente elétrica (A/m^2) (97)

ρ é densidade volumar de carga elétrica (C/m^3)

onde ρ e \mathbf{j} são as densidades de carga e corrente. Sob certas condições (que serão abordadas mais adiante), essas quatro equações são válidas para qualquer meio onde exista o campo eletromagnético. As unidades das quantidades acima no Sistema Internacional são: $\mathbf{E} \rightarrow \text{V}/\text{m}$; $\mathbf{B} \rightarrow \text{T} = \text{Wb}/\text{m}^2 = \text{Vs}/\text{m}^2$; $\mathbf{D} \rightarrow \text{C}/\text{m}^2$; $\mathbf{H} \rightarrow \text{A}/\text{m}$; $\mathbf{j} \rightarrow \text{A}/\text{m}^2$.

Existem outras relações entre os campos, denominadas de relações constitutivas, que variam de um meio a outro, conforme sua constituição.

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H}) \quad \text{e} \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{E}) \quad (98)$$

Os meios materiais podem ser divididos segundo suas características em condutores, dielétricos, magnéticos e semi-condutores de acordo com a importância dos fenômenos físicos da condução, polarização, magnetização ou se a condução e a polarização são da mesma ordem de grandeza.

Diz-se ainda que um meio é linear quando suas características físicas ($\vec{\epsilon}(\mathbf{r})$, $\vec{\mu}(\mathbf{r})$ e $\vec{\lambda}(\mathbf{r})$ ou $\vec{\sigma}(\mathbf{r})$) são independentes da intensidade do campo aplicado. Se essas características dependem da orientação dos campos, então o meio é dito ser anisotrópico, caso contrário ele é isotrópico. Se ainda essas características dependem da posição, o meio é dito ser não-homogêneo. Caso contrário ele é homogêneo. Embora essas características possam variar com o tempo em alguns casos, no decorrer deste curso essa variação não será considerada. Em geral pode-se escrever:

$$\mathbf{D} = \vec{\epsilon}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E} \quad (99)$$

$$\mathbf{B} = \vec{\mu}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H} \quad (100)$$

$$\mathbf{j} = \vec{\lambda}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E} \quad (101)$$

$$\Rightarrow \mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}$$

Se o meio é isotrópico, os parâmetros constitutivos são escalares e as relações acima reduzem a:

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E} \quad (102)$$

$$\mathbf{B} = \mu(\mathbf{r})\mathbf{H} \quad (103)$$

$$\mathbf{j} = \lambda(\mathbf{r})\mathbf{E} \quad (104)$$

Problemas sugeridos: 2.3.1 a 2.3.4 e 2.3.6

2.4 - A Lei de Gauss

A lei de Gauss estabelece que o fluxo líquido que deixa a superfície s é igual à carga total no interior de s .

$$\oiint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V \rho dv \quad (105)$$

Esta equação pode facilmente ser deduzida a partir da Eq. (95), $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$, empregando o teorema da divergência. A lei de Gauss pode também ser reescrita para as diversas distribuições de carga:

$$\oiint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{s'} \sigma ds' \quad (106)$$

$$\oiint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_C \lambda dl \quad (107)$$

$$\oiint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \sum_i q_i \quad (108)$$

Se se conhece a distribuição de carga, é possível determinar \mathbf{E} ou \mathbf{D} através da lei de Gauss?

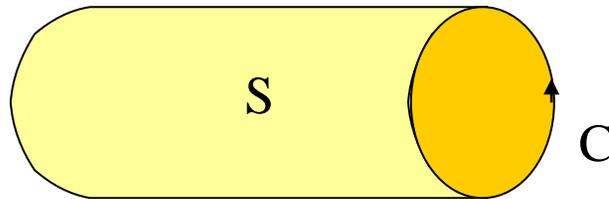
Exercício: Prove a lei de Gauss, considerando uma carga pontual Q centrada na origem do sistema de coordenadas. Sabemos que a densidade de fluxo $\mathbf{D} = [Q/4\pi r^2] \mathbf{r}$. Considere duas superfícies: a) $r_s = r_0$ e b) $r_s = r_1$.

Problemas sugeridos: 2.4.2 a 2.4.4 e 2.4.6

2.5 - A Lei de Ampère Generalizada

A lei de Ampère generalizada estabelece que a integral do campo magnético \mathbf{H} ao longo de um percurso fechado C dá como resultado a corrente total envolvida por C .

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s} + \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} \quad (109)$$



Esta equação pode facilmente ser deduzida a partir da Eq. (96), $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t$, empregando o teorema de Stokes. Pode-se também aplicar o princípio de superposição linear, isto é, se \mathbf{H}_i é o campo magnético devido a I_i , então para o campo magnético resultante, $\mathbf{H} = \sum_i \mathbf{H}_i$, devido a todas as correntes I_i , pode-se escrever:

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum_i I_i \quad (110)$$

Exercício: Prove a lei de Ampère considerando uma linha de corrente $\mathbf{i}=I\mathbf{z}$ centrada na origem do sistema de coordenadas. Sabemos que o campo magnético devido a este filamento é $\mathbf{H} = [I/2\pi\rho] \boldsymbol{\alpha}$. Considere dois percursos fechados: a) $\rho_s = \rho_0$ e b) $\rho_s = \rho_1$.

Problemas sugeridos: 2.4.6, 2.4.9, 2.5.2 e 2.5.12.

2.6 - A Lei de Gauss do Magnetismo

A forma integral da lei de Gauss do magnetismo,

$$\oiint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (111)$$

exprime matematicamente a verificação de que as linhas do vetor densidade de fluxo magnético \mathbf{B} são fechadas, ou seja, seu fluxo através de qualquer superfície fechada é nulo. Esta equação exprime desta forma a inexistência de um monopolo magnético, que seria o análogo da carga elétrica.

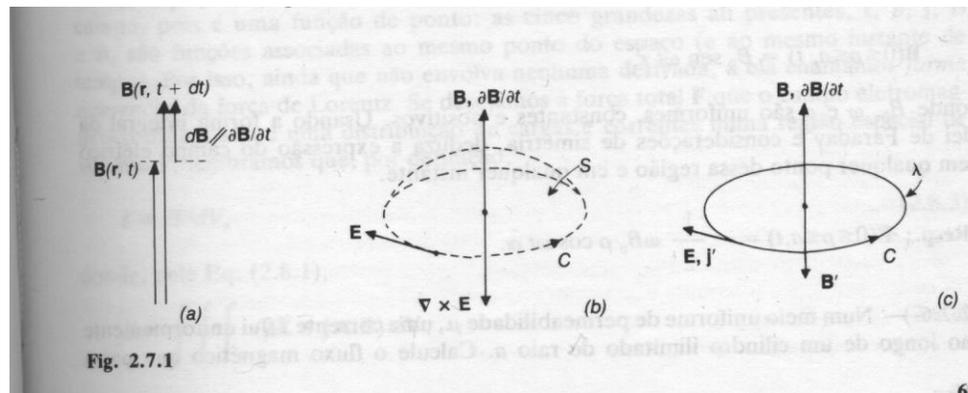
A Eq. (111) pode facilmente ser obtida através da Eq. (97) e o teorema da divergência.

Problemas sugeridos: 2.6.3 e 2.6.5

2.7 - A Lei de Faraday da Indução

Essa lei pode facilmente ser obtida a partir da Eq. (94), $\nabla \times \mathbf{E} + \partial \mathbf{B} / \partial t = 0$, e do Teorema de Stokes. Ela estabelece que a força eletromotriz induzida ao longo de um percurso fechado é igual ao negativo da taxa de variação do fluxo magnético em relação ao tempo.

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (112)$$



Exercício: a) Qual o significado físico da Lei de Faraday? b) O que ocorre se o fluxo estiver aumentando com o tempo? E se ele estiver diminuindo com o tempo?

Problemas sugeridos: 2.7.1; 2.7.3; 2.7.4 e 2.7.6

Resumo:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \iint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (113)$$

$$\oiint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V \rho dv \quad (114)$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \frac{\partial}{\partial t} \iint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} \quad (115)$$

$$\oiint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (116)$$

onde: **E**- campo elétrico (V/m);
D - densidade de fluxo elétrico (C/m²);
H - campo magnético (A/m);
B- densidade de fluxo magnético (Tesla=Weber/m²);
j - densidade de corrente (A/m²);
ρ - densidade volumar de carga elétrica (C/m³)

Equações Constitutivas

$$\mathbf{D} = \overset{\Rightarrow}{\varepsilon}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E} \quad (117)$$

$$\mathbf{B} = \overset{\Rightarrow}{\mu}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H} \quad (118)$$

$$\mathbf{j} = \overset{\Rightarrow}{\lambda}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E} \quad (119)$$

onde $\overset{\Rightarrow}{\epsilon}(\mathbf{r})$ - tensor permissividade elétrica (F/m);

$\overset{\Rightarrow}{\mu}(\mathbf{r})$ - tensor permeabilidade magnética (H/m);

$\overset{\Rightarrow}{\lambda}(\mathbf{r})$ - tensor condutividade elétrica (S/m).

2.8 - Força de Lorentz

Como se comporta uma carga em repouso ou em movimento na presença de um campo eletromagnético? Com as equações vistas até agora não é possível responder essa pergunta. A resposta exige o conhecimento de uma lei de forças, a qual é independente das equações de Maxwell e equações constitutivas.

A lei da força de Lorentz afirma que a força por unidade de volume que o campo eletromagnético exerce sobre uma densidade volumar de carga $\rho(\mathbf{r},t)$ e uma densidade superficial de corrente $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ é:

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (\text{N/m}^3) \quad (120)$$

onde todas as grandezas são funções do ponto (x,y,z) e da variável tempo. O vetor \mathbf{f} é a densidade volumar da força de Lorentz, dada no SI em N/m^3 . As parcelas

$$\mathbf{f}_e = \rho \mathbf{E} \quad (121)$$

e

$$\mathbf{f}_m = \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (122)$$

recebem, respectivamente, os nomes de densidade volumar de força elétrica e densidade volumar de força magnética.

A força total \mathbf{F} que o campo eletromagnético exerce sobre uma distribuição de cargas ρ e correntes \mathbf{j} numa região espacial de volume V pode facilmente ser obtida integrando-se a Eq. (120):

$$\mathbf{F} = \iiint_V (\rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}) dv \quad (123)$$

Essa é a forma integral da força de Lorentz e suas parcelas, as integrais das densidades dadas pelas Eqs. (121) e (122), são respectivamente a parte elétrica e a parte magnética da força de Lorentz, \mathbf{F}_e e \mathbf{F}_m .

$$\mathbf{F}_e = \iiint_V \rho \mathbf{E} dv$$

$$\mathbf{F}_m = \iiint_V \mathbf{j} \times \mathbf{B} dv$$

Ex.: Considere uma carga puntiforme q , movendo-se com velocidade \mathbf{v} num certo referencial e submetida a um campo elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ e a uma indução magnética $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$. Se \mathbf{r}' é a posição instantânea da partícula, vêm:

$$\rho = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad \text{e} \quad \mathbf{j} = \rho\mathbf{v} = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\mathbf{v}(\mathbf{r}',t) \quad (124)$$

Logo, a força de Lorentz é:

$$\mathbf{F} = \iiint_V (q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r},t) + q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{v}(\mathbf{r}',t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t)) dv' \quad (125)$$

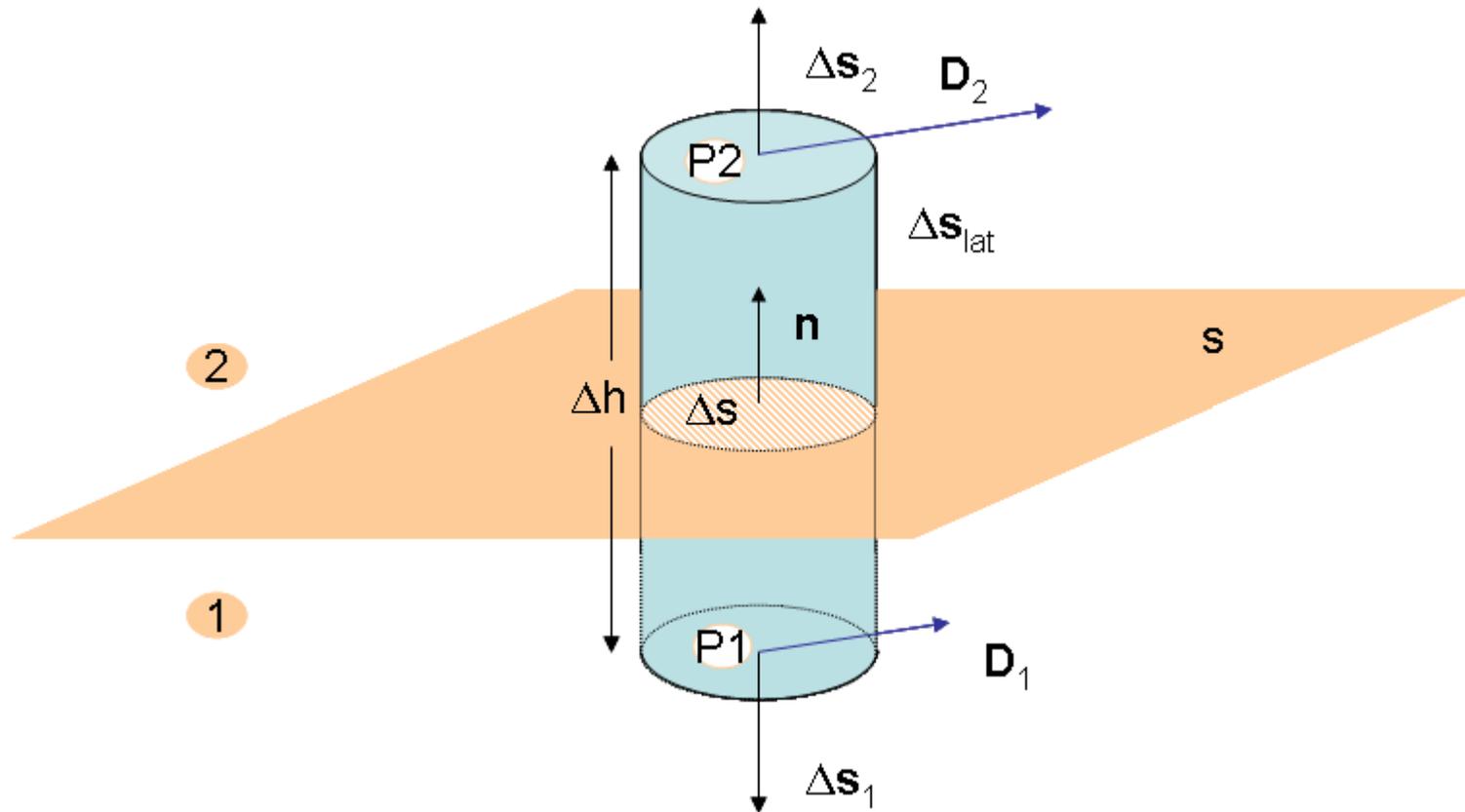
$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}(\mathbf{r}',t) + q\mathbf{v}(\mathbf{r}',t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}',t) \quad (126)$$

Problemas sugeridos: 2.8.3; 2.8.5; 2.8.7; 2.8.9 e 2.8.15.

2.9 - Condições de Interface (Passagem) entre dois Meios Diferentes

Aplicando a Lei de Gauss: Para determinar as condições de passagem do componente normal da densidade de fluxo elétrico sobre a interface de separação

entre dois meios, com características $(\lambda_1, \mu_1, \epsilon_1)$ e $(\lambda_2, \mu_2, \epsilon_2)$, onde λ_1 e λ_2 são finitos, considere a figura a seguir.



Nesta Figura, observe que a normal \mathbf{n} está dirigida do meio 1 para o meio 2. Aplicando a lei de Gauss, Eq. (127), ao elemento de cilindro da Figura,

$$\oiint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V \rho dv, \quad (127)$$

obtém-se:

$$\iint_{\Delta s_1} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} + \iint_{\Delta s_2} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} + \iint_{\Delta s_{lat}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \iiint_{\Delta v} \rho dv \quad (128)$$

No limite de $\Delta h \rightarrow 0$, onde $\bar{\mathbf{D}}$ é a densidade média na superfície lateral, isto é:

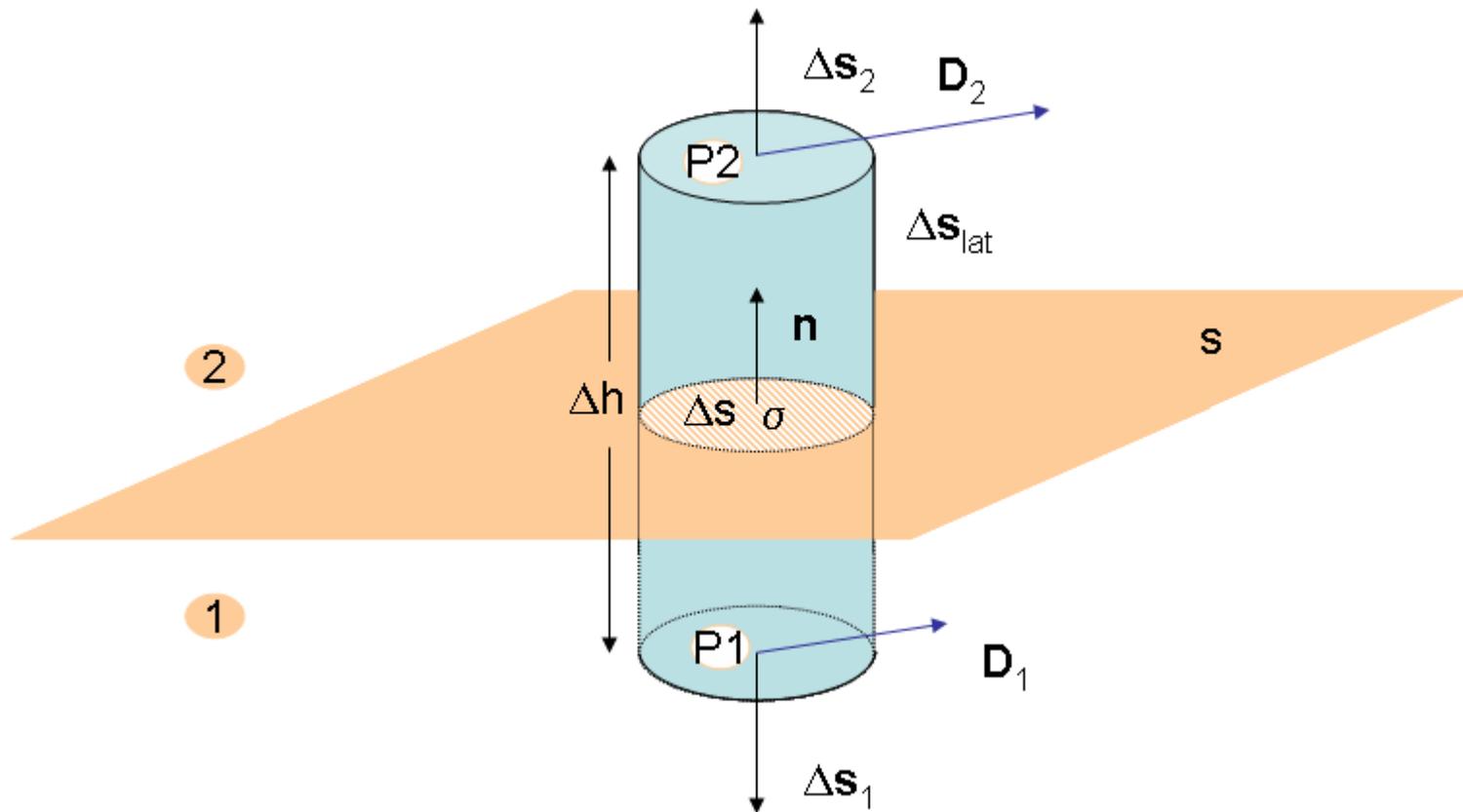
$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} (\mathbf{D} \cdot \Delta \mathbf{s}_1 + \mathbf{D} \cdot \Delta \mathbf{s}_2 + \bar{\mathbf{D}} \cdot \Delta \mathbf{s}_{lat}) = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} (\rho \Delta s \Delta h), \quad (129)$$

a terceira integral e Δq anulam-se. Observando que $\mathbf{n}_2 = \mathbf{n} = -\mathbf{n}_1$, obtém-se:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = 0 \quad (130)$$

Observe que a Eq. (130) estabelece que os componentes normais da densidade de fluxo elétrico são contínuos ao longo da interface de separação dos dois meios considerados, mesmo havendo uma distribuição volumar de carga elétrica.

No caso de haver uma distribuição superficial de carga,



a Eq. (129) pode ser reescrita como:

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} (\mathbf{D} \cdot \Delta \mathbf{s}_1 + \mathbf{D} \cdot \Delta \mathbf{s}_2 + \overline{\mathbf{D}} \cdot \Delta \mathbf{s}_{lat}) = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} (\sigma \Delta s), \quad (131)$$

ou simplesmente,

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma \quad (132)$$

A Eq. (132), por outro lado, estabelece que se há uma distribuição superficial de carga elétrica sobre a interface de separação entre os dois meios, então os componentes normais de \mathbf{D} , D_{n1} e D_{n2} , são descontínuos por uma quantidade igual a σ .

As Eqs. (130) e (132) mostram também que os componentes normais do campo elétrico são descontínuos ao longo da interface de dois meios com diferentes valores de permissividade elétrica.

As condições de passagem para a densidade de fluxo magnético \mathbf{B} , podem ser deduzidas de maneira análoga. Assim, a partir da lei de Gauss para o magnetismo, Eq. (133),

$$\oiint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (133)$$

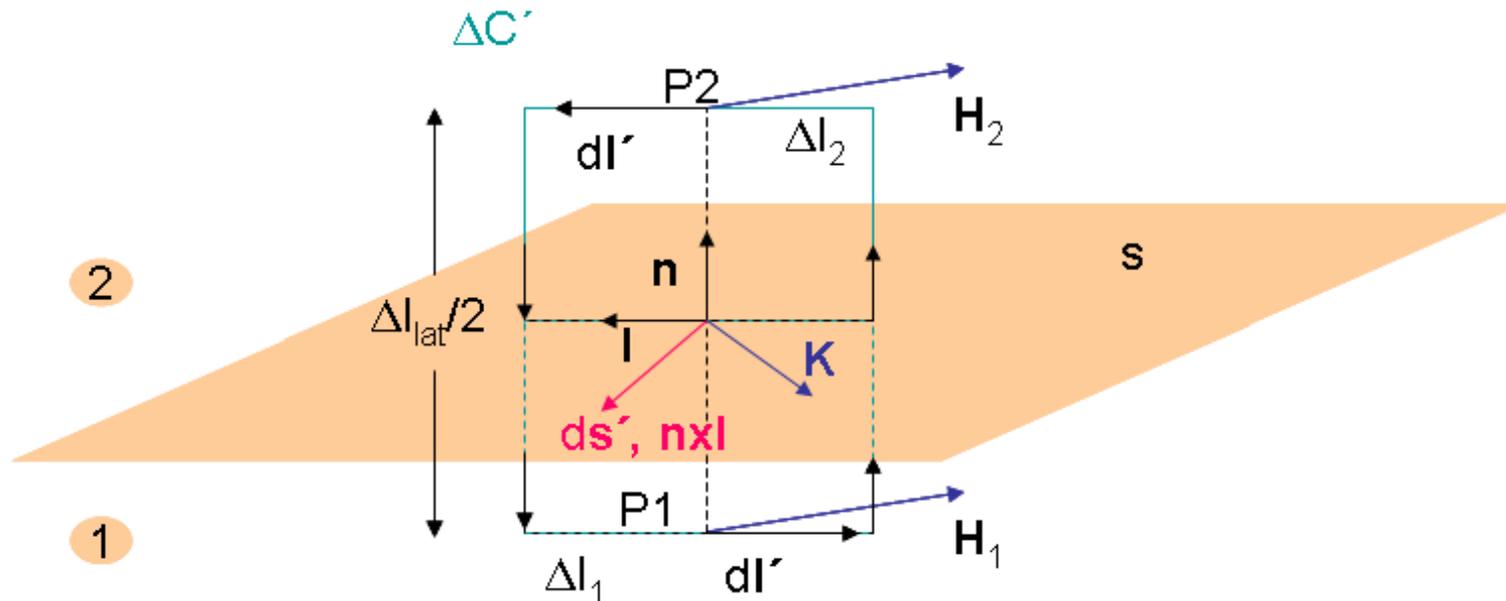
obtém-se facilmente que

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \quad (134)$$

A Eq. (134) estabelece que os componentes normais de \mathbf{B} são sempre contínuos na passagem de um meio 1 para outro meio 2 com condições $(\lambda_1, \mu_1, \varepsilon_1)$ e $(\lambda_2, \mu_2, \varepsilon_2)$, onde λ_1 e λ_2 são finitos.

2.10 - Aplicando a Lei de Ampère

As condições de passagem do componente tangencial do campo magnético sobre a interface de separação entre dois meios com características $(\lambda_1, \mu_1, \varepsilon_1)$ e $(\lambda_2, \mu_2, \varepsilon_2)$, onde λ_1 e λ_2 são finitos,



podem ser determinadas considerando-se a figura anterior e aplicando a lei de Ampère ao circuito fechado $\Delta C'$.

Assim, aplicando a lei de Ampère,

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_s \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s} + \frac{\partial}{\partial t} \iint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \Delta i + \frac{\partial}{\partial t} \iint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} \quad (135)$$

ao percurso fechado $\Delta C'$, obtém-se:

$$\int_{\Delta l_1} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\Delta l_2} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\Delta l_{lat}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_{\Delta s'} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s}' + \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Delta s'} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}', \quad (136)$$

No limite de $\Delta l_{lat} \rightarrow 0$, isto é:

$$\lim_{\Delta l_{lat} \rightarrow 0} (\mathbf{H}_1 \cdot \Delta l_1 + \mathbf{H}_2 \cdot \Delta l_2 + \langle \mathbf{H}_{lat} \rangle \cdot \Delta l_{lat}) = \frac{1}{2} \lim_{\Delta l_{lat} \rightarrow 0} (\langle \mathbf{j} \rangle \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{l} \Delta l \Delta l_{lat} + \langle \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \rangle \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{l} \Delta l \Delta l_{lat}) \quad (137)$$

obtém-se:

$$\mathbf{l} \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0, \quad (138)$$

ou

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0, \quad (139)$$

A Eq. (138) (ou (139)) estabelece que os componentes tangenciais da intensidade de campo magnético são contínuos na interface de separação entre

os dois meios, mesmo na presença de uma densidade superficial de corrente elétrica \mathbf{j} .

Se há uma densidade linear \mathbf{k} fluindo sobre a interface, então a quantidade $\Delta i = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{l}) \Delta l = \mathbf{l} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{n}) \Delta l$ e as Eqs. (138) e (139) são respectivamente transformadas em:

$$\mathbf{l} \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{l} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{n}) \quad (140)$$

e

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{k} . \quad (141)$$

Ambas equações acima, estabelecem que *na presença de uma densidade linear de corrente \mathbf{k} sobre a interface de separação entre os dois meios, os componentes tangenciais de \mathbf{H} são descontínuos por essa mesma quantidade.*

A Tabela abaixo, resume as condições de interface entre os dois meios com características $(\lambda_1, \mu_1, \varepsilon_1)$ e $(\lambda_2, \mu_2, \varepsilon_2)$, onde λ_1 e λ_2 são finitos.

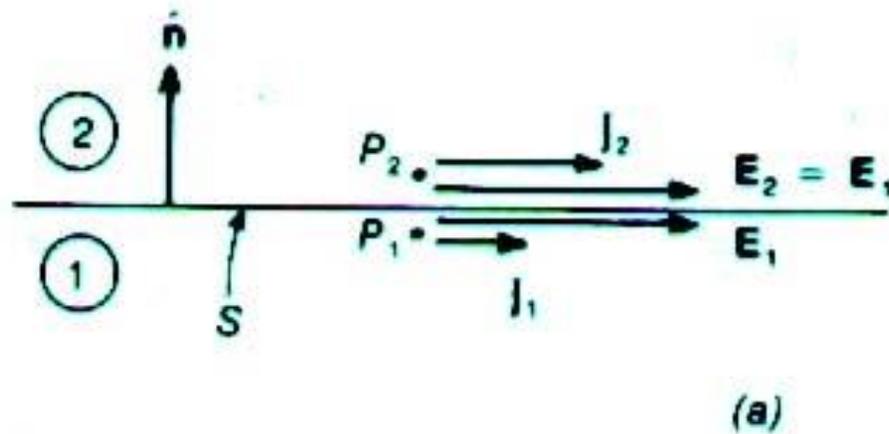
Equações de Maxwell	Condições de Interface
$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma$ (142)
$\nabla \times \mathbf{E} + \partial \mathbf{B} / \partial t = 0$	$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{0}$ (143)
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0$ (144)
$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t$	$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{k}$ (145)
$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\partial \rho / \partial t$	$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{j}_2 - \mathbf{j}_1) = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}$ (146)

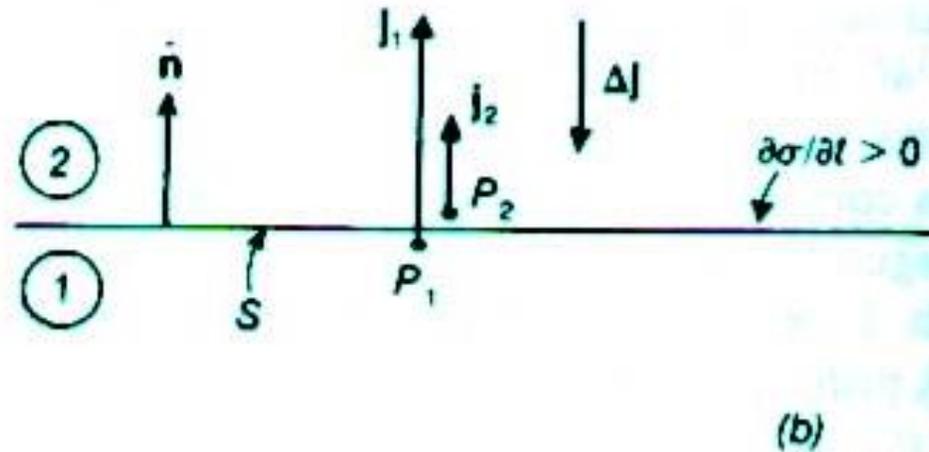
A Eq. da continuidade, $\nabla \cdot \mathbf{j} = -\partial \rho / \partial t$, conduz à condição de interface:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{j}_2 - \mathbf{j}_1) = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}, \quad (147)$$

de uma forma similar à condição obtida com a lei de Gauss. Essa equação diz que se $|\mathbf{j}_1| > |\mathbf{j}_2|$, então a quantidade de carga por unidade de área e por unidade de tempo que chega à interface proveniente do meio 1 é maior do que àquela que

sai através do meio 2. Como a carga não desaparece, lei da conservação de carga, então deve haver um acúmulo de carga por unidade de tempo que deve ser positiva (Fig. b abaixo).





Problemas sugeridos: 2.10.1 a 2.10.3, 2.10.7 e 2.10.8.

2.11 - A Conservação de Carga

Aplicando a operação divergência a ambos os lados da equação de Maxwell,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t, \quad (148)$$

obtém-se:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \mathbf{j} + \partial \nabla \cdot \mathbf{D} / \partial t = 0, \quad (149)$$

ou simplesmente,

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\partial \rho / \partial t. \quad (150)$$

A Eq. (150) é a *forma diferencial da equação da continuidade*. A forma integral pode ser obtida integrando ambos os lados por uma integral de volume e aplicando o teorema da divergência. Ou alternativamente, podemos considerar a Eq. (148) e integrá-la através de uma superfície fechada:

$$\oiint_s \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \oiint_s \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s} + \frac{\partial(\oiint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s})}{\partial t} = 0 \quad (151)$$

ou

$$I = \oiint_s \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial q}{\partial t} \quad (152)$$

A equação (152) mostra que para a corrente estar fluindo de dentro para fora da superfície ($I > 0$), a carga no interior da mesma deve estar diminuindo com o tempo ($dq/dt < 0$), e vice-versa.

A equação da continuidade exprime um dos princípios básicos da física, que é o da conservação da carga elétrica: *a carga elétrica não pode ser criada nem destruída.*

2.12 - A Conservação de Energia

A segunda equação de conservação pode ser obtida através dos seguintes desenvolvimentos:

$$\mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{H} \cdot (\partial \mathbf{B} / \partial t) \quad (153)$$

$$\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{E} \cdot (\mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t) \quad (154)$$

Subtraindo (154) de (153), obtém-se:

$$\mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} = -\mathbf{H} \cdot (\partial \mathbf{B} / \partial t) - \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} - \mathbf{E} \cdot (\partial \mathbf{D} / \partial t). \quad (155)$$

O lado esquerdo de (155) pode ser reescrito se se usa a identidade vetorial,

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H}, \quad (156)$$

forneendo:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{H} \cdot (\partial \mathbf{B} / \partial t) - \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} - \mathbf{E} \cdot (\partial \mathbf{D} / \partial t). \quad (157)$$

Uma vez que as propriedades constitutivas não dependem do tempo, pode-se escrever

$$\mathbf{E} \cdot (\partial \mathbf{D} / \partial t) = \epsilon \mathbf{E} \cdot (\partial \mathbf{E} / \partial t) = \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}). \quad (158)$$

O mesmo pode ser feito para $\mathbf{H} \cdot (\partial \mathbf{B} / \partial t)$. Assim, a Eq.(157) pode ser reescrita como:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} . \quad (159)$$

ou

$$\nabla \cdot \mathbf{P} + \frac{\partial w}{\partial t} + u = 0 , \quad (160)$$

onde $\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ é o vetor de Poynting, $w = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B})/2$ é a densidade de energia armazenada nos campos elétrico e magnético e $u = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$ representa as perdas por unidade de volume por efeito Joule. A equação (160) é conhecida como a *forma diferencial do teorema de Poynting ou de Poynting-Heaviside*.

A forma integral pode ser facilmente obtida, integrando ambos os lados num volume V e aplicando o teorema da divergência ao primeiro membro:

$$\oiint_s \mathbf{P} \cdot d\mathbf{s} + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_v w dv + \iiint_v u dv = 0 , \quad (161)$$

ou simplesmente,

$$\Phi_P + \frac{\partial}{\partial t} W + U = 0 \quad (162)$$

Se o meio é não dissipativo, isto é, com condutividade nula, então $u = 0$ e a equação (160) reduz a:

$$\nabla \cdot \mathbf{P} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0. \quad (163)$$

Essa equação é muito semelhante à equação da continuidade,

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (164)$$

a qual representa conservação de carga. Logo, pode-se inferir que a Eq. (163) representa a conservação da energia em meios não dissipativos e na ausência de fontes. O fluxo de potência que deixa o ponto é igual à taxa de diminuição da energia em relação ao tempo.

3. Eletrostática

3.1 As Equações Fundamentais da Eletrostática

As equações fundamentais da eletrodinâmica são:

$$\nabla \times \mathbf{E} + \partial \mathbf{B} / \partial t = 0 \quad (164)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \partial \mathbf{D} / \partial t = \mathbf{j} \quad (165)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (166)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (167)$$

$$\mathbf{D} = \overset{\Rightarrow}{\varepsilon}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E} \quad (168)$$

$$\mathbf{B} = \overset{\Rightarrow}{\mu}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H} \quad (169)$$

$$\mathbf{j} = \overset{\Rightarrow}{\lambda}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E} \quad (170)$$

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (171)$$

Se em todo o espaço, consideramos a completa inexistência de fontes e constância no tempo de todas as grandezas, isto é $\partial/\partial t = \mathbf{0}$, isto nos conduzirá à solução trivial (todos os campos serão nulos).

Se em todo o espaço, considerarmos as seguintes condições:

i) *Todas as grandezas eletromagnéticas são constantes no tempo;* (172)

ii) *Não existem correntes elétricas, $\mathbf{j} = \mathbf{0}$.* (173)

temos:

$\nabla \times \mathbf{E} = 0$	(174)	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}$	(175)
$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	(176)	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	(177)

$\mathbf{D} = \overset{\Rightarrow}{\varepsilon}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}$	(178)	$\mathbf{B} = \overset{\Rightarrow}{\mu}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}$	(179)
--	-------	--	-------

$\mathbf{f}_e = \rho \mathbf{E}$	(180)	$\mathbf{f}_m = \mathbf{0}$	(181)
----------------------------------	-------	-----------------------------	-------

As condições (172) – (173) separam completamente as equações fundamentais (165-171) em dois grupos distintos, o da esquerda, que só contém os vetores elétricos, e o da direita, que só envolve os magnéticos. A solução das equações à direita, uma vez que inexiste \mathbf{j} em todo o espaço e os campos são invariantes com o tempo, é trivial e, portanto não nos interessa. O conjunto de equações à esquerda apresenta solução não trivial. As equações deste conjunto são as equações fundamentais da eletrostática, as quais são rerepresentadas abaixo juntamente com as condições de interface, onde o meio é considerado homogêneo.

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (182)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \varepsilon \quad (183)$$

$$\mathbf{f}_e = \rho \mathbf{E} \quad (184)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad (185)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\varepsilon_2 \mathbf{E}_2 - \varepsilon_1 \mathbf{E}_1) = \sigma \quad (186)$$

Observe que nestas condições, o problema fica inteiramente determinado pelo campo elétrico \mathbf{E} , chamada campo eletrostático.

3.2 O Potencial Escalar Elétrico

A equação (182) mostra que o campo eletrostático é irrotacional. Essa equação, com a ajuda da identidade vetorial

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0 \quad (187)$$

permite-nos introduzir uma função escalar de ponto $\phi(\mathbf{r})$, definida implicitamente por meio de

$$\mathbf{E} \equiv -\nabla \phi. \quad (188)$$

A função $\phi(\mathbf{r})$ é o potencial escalar eletrostático. Observe que o potencial é determinado a menos de uma constante aditiva. Realmente, se

$$\phi' = \phi + C, \quad (189)$$

onde C é uma constante, ϕ' deve estar relacionada ao campo eletrostático para fazer jus ao nome de potencial eletrostático. Assim,

$$\mathbf{E}' = -\nabla \phi'. \quad (190)$$

Isto nos dá, imediatamente,

$$\mathbf{E}' = -\nabla \phi' = -\nabla(\phi + C) = -\nabla \phi = \mathbf{E}. \quad (191)$$

Como sabemos, são as equações de Maxwell que são os postulados da teoria eletromagnética, só nos é proibido alterar as grandezas que nelas aparecem. Logo, os dois potenciais dão origem ao mesmo campo eletrostático e portanto são ambos válidos. A constante C é irrelevante, ela é denominada de *calibre* e ϕ' é obtido através de ϕ por uma *transformação de calibre*.

Ainda assim, é interessante ter o potencial no ponto. Isto é possível se especificamos qual é a constante C , isto é, especificamos um referencial.

Normalmente, há duas definições:

$$\begin{array}{ll} \phi(\infty) = 0 & \longrightarrow \text{Física} \\ \phi(\text{terra}) = 0 & \longrightarrow \text{Eng. Elétrica} \end{array}$$

Diferença de Potencial

Dado o potencial num ponto, o campo eletrostático está univocamente determinado. O problema inverso, isto é, a determinação do potencial se se conhece o campo eletrostático, pode ser resolvido fazendo uma integração

curvilínea da equação (188) ao longo de uma curva C que ligue dois pontos P_1 e P_2 ,

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{P_1}^{P_2} \nabla\phi \cdot d\mathbf{l} = - \int_{P_1}^{P_2} d\phi . \quad (192)$$

ou

$$\phi(P_2) - \phi(P_1) = - \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} . \quad (193)$$

Observe que o membro da esquerda dá a *diferença de potencial* entre os dois pontos. O fato de ser impossível determinar o potencial num ponto a partir da expressão do campo eletrostático, mas sim a diferença de potenciais entre dois pontos, é a consequência óbvia da arbitrariedade da constante aditiva na transformação de calibre (189). Isto é

$$\phi(P_2) = - \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \phi(P_1) \quad (194)$$

dá o potencial no ponto P_2 a menos do potencial em P_1 . Se o ponto P_1 é deslocado para o infinito, e o potencial no infinito seja nulo, então

$$\phi(\mathbf{r}) = -\int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (195)$$

A expressão (195) é particular, enquanto (193) é geral!

Significado Físico do Potencial Eletrostático

A força que o campo eletrostático exerce sobre uma carga pontual é

$$\mathbf{F}_e = q\mathbf{E} . \quad (196)$$

Logo, o trabalho elementar realizado por um agente externo contra o campo eletrostático, para deslocar a partícula com velocidade constante ao longo de um elemento de arco $d\mathbf{l}$, é

$$dW = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} . \quad (197)$$

Logo, para deslocá-la entre dois pontos P_1 e P_2 , o trabalho é

$$W = -q \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} . \quad (198)$$

ou

$$W = q[\phi(P_2) - \phi(P_1)]. \quad (199)$$

Essa equação nos mostra que a diferença de potencial dá o trabalho que um agente externo deve realizar sobre uma partícula puntiforme de carga unitária para levá-la, com velocidade constante, contra o campo eletrostático, do ponto P_1 ao ponto P_2 .

O trabalho será positivo se o potencial em P_2 for maior que em P_1 . Isto significa que o agente externo deve fornecer trabalho ao sistema carga-campo. Caso contrário, o agente externo receberá energia do campo eletrostático. Se o agente externo desloca a carga por um percurso fechado, $P_2 = P_1$, e da equação (199) concluímos que o trabalho é nulo, isto é:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (200)$$

ou seja, o campo eletrostático é conservativo.

Podemos resumir os resultados que acabamos de obter:

- i) O campo eletrostático é irrotacional;
- ii) O campo eletrostático é potencial;
- iii) O trabalho elementar do campo eletrostático é uma diferença exata;
- iv) O trabalho do campo eletrostático independe da trajetória.

Como ao campo elétrico em geral e ao eletrostático em particular se aplica o princípio da superposição linear, é fácil mostrar ao potencial eletrostático vale o mesmo princípio, isto é,

$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i = \sum_i (-\nabla\phi_i) = -\nabla \sum_i \phi_i = -\nabla\phi, \quad (201)$$

ou

$$\phi = \sum_i \phi_i. \quad (202)$$

3.3 O Potencial Eletrostático Devido a Distribuições de Carga

3.3.1 Carga Pontual

O campo eletrostático devido a uma carga pontual na origem do sistema de referências, num meio ilimitado de permissividade elétrica ϵ , pode ser facilmente calculado com o auxílio da lei de Gauss. Isto conduz à seguinte expressão:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (203)$$

Como não há cargas no infinito, podemos considerar aí o potencial nulo. Com essa condição,

$$\phi(\mathbf{r}) = -\int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_{\infty}^{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \right) \cdot d\mathbf{r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon} \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \frac{1}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon r} \quad (204)$$

Se a carga não está na origem do sistema de referência, então a distância entre a carga, posicionada em \mathbf{r}' e o ponto de observação ou de campo \mathbf{r} é $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, dado pela expressão:

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} = \sqrt{r^2 - 2rr' \cos(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + r'^2} . \quad (205)$$

Logo, substituindo r na equação (204) por R , obtemos:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon R} = \frac{q}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (206)$$

3.3.2 Densidade Volumétrica de Carga

Se a distribuição de cargas se estende continuamente a uma região do espaço de volume V , com densidade $\rho(\mathbf{r}')$, seja o elemento de volume dV' em torno do ponto, a carga $dq' = \rho(\mathbf{r}')dV'$. Assim, a equação (206) reduz-se a

$$d\phi(\mathbf{r}) = \frac{dq'}{4\pi\epsilon R} = \frac{\rho dV'}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (207)$$

Pelo princípio da superposição, o potencial num ponto P , devido a toda a distribuição de cargas no volume V é:

$$\phi(\mathbf{r}) = \iiint_V \frac{dq'}{4\pi\epsilon R} = \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}')dV'}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (208)$$

3.3.3 Densidade Superficial de Carga

De modo análogo ao caso anterior, para uma distribuição $\sigma(\mathbf{r}')$ distribuído uniformemente sobre uma superfície S , temos:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iint_S \frac{dq'}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iint_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (209)$$

3.3.4 Densidade Linear de Carga

De modo análogo aos dois casos anteriores, para uma distribuição linear $\lambda(\mathbf{r}')$ temos:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iint_S \frac{dq'}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_C \frac{\lambda(\mathbf{r}') dl'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (210)$$

Obviamente, se a distribuição for em parte volumar, superficial e linear e, mesmo em parte puntiforme, o potencial por ela criado é a soma das contribuições individuais:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \iint_S \frac{\sigma(\mathbf{r}') dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \int_C \frac{\lambda(\mathbf{r}') dl'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \sum_i \frac{q_i(\mathbf{r}'_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|} \right]. \quad (211)$$

Observe que nesta equação, $\rho(\mathbf{r}')$ é estritamente uma distribuição volumar. Obviamente, poderíamos dizer que esta equação é idêntica à equação (208) se considerarmos que qualquer distribuição pode ser escrita como sendo uma distribuição volumar com a ajuda das funções delta de Dirac.

Exercício: Mostre que distribuições finitas volumétricas e superficiais o observador medirá sempre um potencial finito e que por outro lado, o potencial

não será definido sobre distribuições de cargas, mesmo que finitas e limitadas, se concentradas em linhas ou pontos. (Páginas 131a 133).

3.4 O Campo Devido a Distribuições de Carga

De posse do potencial escalar eletrostático de uma distribuição genérica de cargas, podemos agora determinar a expressão equivalente do campo eletrostático aplicando a equação $\mathbf{E} = -\nabla\phi$. Assim, podemos escrever as seguintes expressões:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\begin{aligned} & \iiint_v \rho(\mathbf{r}') \left[\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] dV' + \iint_s \sigma(\mathbf{r}') \left[\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] dS' + \int_c \lambda(\mathbf{r}') \left[\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] dl' \\ & + \sum_i q_i(\mathbf{r}'_i) \left[\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \end{aligned} \right]. \quad (212)$$

Entretanto, o $\left[\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right]$ pode ser facilmente calculado. Essa expressão pode ser dada por:

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (213)$$

Substituindo-a em (212), temos

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\iiint_v \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' + \iint_S \sigma(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS' + \int_C \lambda(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dl' + \sum_i q_i(\mathbf{r}'_i) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|^3} \right]. \quad (214)$$

Na equação (214), os vetores unitários que aparecem devem permanecer dentro do integrando. Somente é possível retirá-los quando estes estão no sistema de coordenadas cartesianas.

Se a distribuição de cargas se reduzir a uma única carga pontual, então, na origem $\mathbf{r}'=0$, a lei de Coulomb se reduzirá a sua forma mais simples:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} q \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}. \quad (215)$$

3.5 O potencial e Campo de um Dipolo

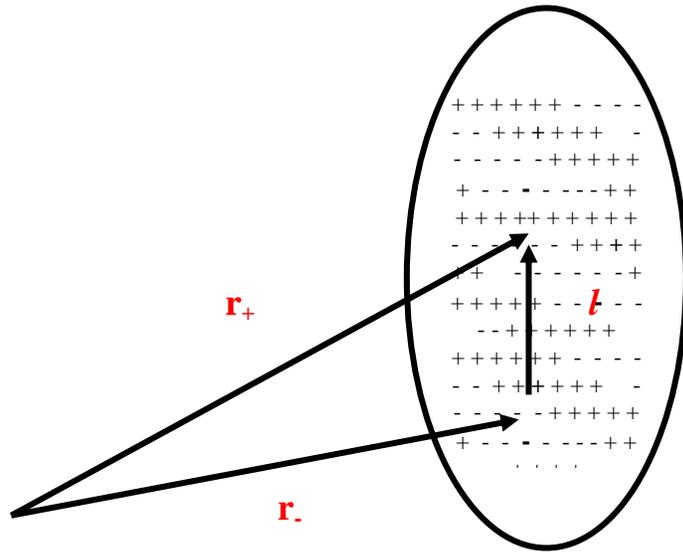


Fig. (a)

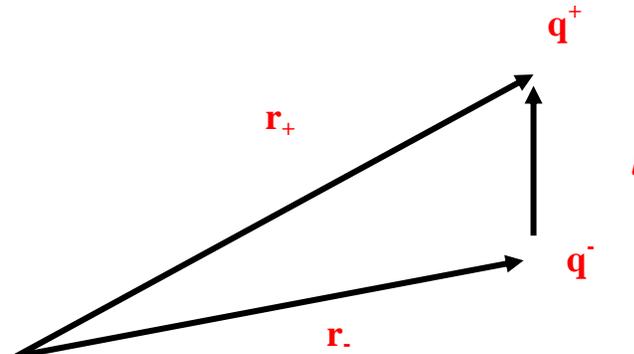
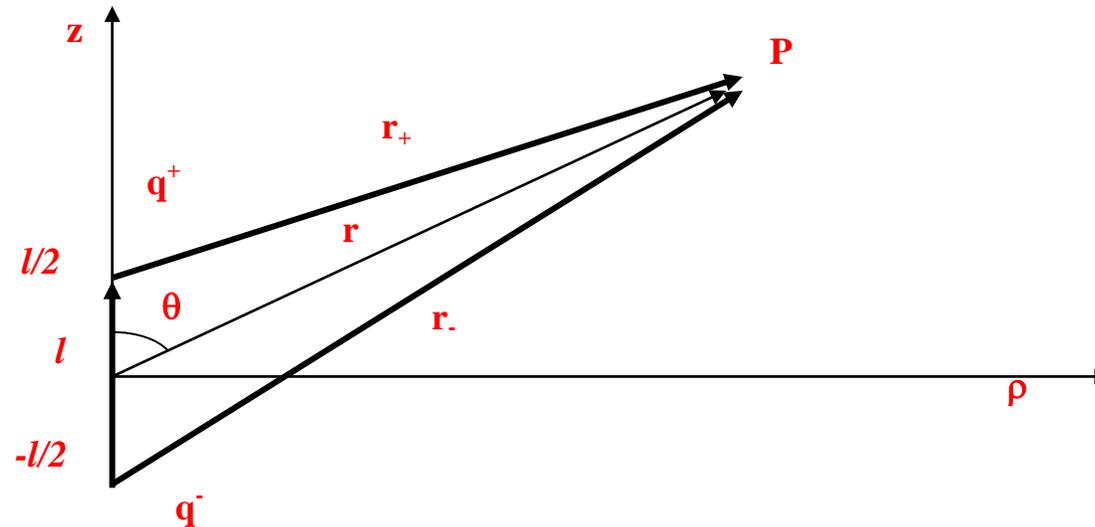


Fig. (b)

O potencial devido a um dipolo bipuntiforme, $q^- = -q^+$ e onde q é o módulo total de cada carga, Fig. (b), pode ser dado por:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) \tag{216}$$



Se considerarmos o dipolo sobre o eixo z, conforme figura acima, a expressão dada pela equação (216) torna-se:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - l/2|} - \frac{1}{|\mathbf{r} + l/2|} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon} q \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 - \mathbf{r} \cdot l + l^2/4}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + \mathbf{r} \cdot l + l^2/4}} \right) \quad (217)$$

ou

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 - rl \cos \theta + l^2/4}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + rl \cos \theta + l^2/4}} \right) \quad (218)$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \hat{\mathbf{r}} \cdot \ell / r + \ell^2 / 4r^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \hat{\mathbf{r}} \cdot \ell / r + \ell^2 / 4r^2}} \right) \quad (219)$$

Lembrando que o desenvolvimento em série de Taylor para pequenos argumentos é:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 - \dots \quad (220)$$

tem-se que:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \left\{ \begin{array}{l} \left[1 - \frac{1}{2}(-\hat{\mathbf{r}} \cdot \ell / r + \ell^2 / 4r^2) + \frac{3}{8}(-\hat{\mathbf{r}} \cdot \ell / r + \ell^2 / 4r^2)^2 - \dots \right] \\ - \left[1 - \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \ell / r + \ell^2 / 4r^2) + \frac{3}{8}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \ell / r + \ell^2 / 4r^2)^2 - \dots \right] \end{array} \right\} \quad (221)$$

Se considerarmos apenas a primeira ordem não-nula da aproximação acima,

$$\phi(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \ell = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (222)$$

onde $\mathbf{p}=q\ell$ é o momento de dipolo elétrico.

Se o observador está distante do dipolo, ele não pode saber se o potencial é devido a um dipolo bipuntiforme ou se consiste de uma distribuição mais complexa, com as mesmas características globais de carga total nula e momento elétrico \mathbf{p} (Fig. b, anterior).

O dipolo puntiforme ou dipolo elementar é aquele em que o seu momento é definido como sendo limite, quando o módulo das cargas do dipolo bipuntiforme tende a infinito e a distância entre elas tende a zero:

$$\mathbf{p} = \lim_{\substack{\ell \rightarrow 0 \\ q \rightarrow \infty}} q\ell \quad (223)$$

Esta definição permite-nos escrever a forma exata da Eq. (222), isto é:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (224)$$

Em coordenadas esféricas,

$$\phi(\mathbf{r}, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} p \frac{\cos \theta}{r^2} \quad (225)$$

Observe que o potencial é positivo no semi-espaço superior ($z > 0$) e negativo no semi-espaço inferior ($z < 0$), o que é natural, pois o observador está mais próximo da carga positiva do que da negativa.

Se o dipolo não está na origem do sistema de referência, então,

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}') = \lim_{\substack{\ell \rightarrow 0 \\ q \rightarrow \infty}} q(\mathbf{r}')\ell(\mathbf{r}') \quad (226)$$

e o potencial é então dado por:

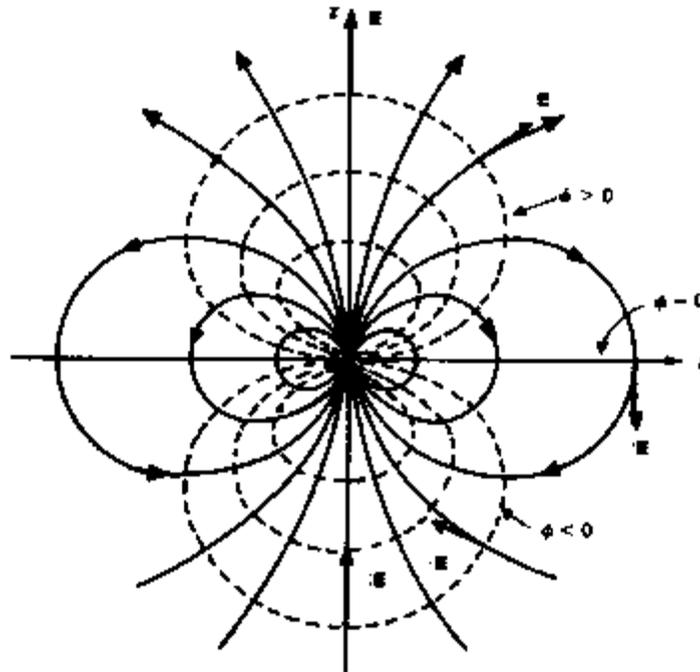
$$\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (227)$$

O campo elétrico devido a um dipolo pode ser calculado repetindo os mesmos passos na determinação do potencial. Esses cálculos são apresentados no livro texto, aqui nos contentamos com o resultado final. Assim, para um dipolo na origem do sistema de coordenadas,

$$E(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}}{|\mathbf{r}|^3} \quad (228)$$

Se o dipolo não está na origem do sistema, obtemos:

$$E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3\mathbf{p}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \frac{\mathbf{p}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] \quad (229)$$



O campo elétrico é máximo no eixo do dipolo e mínimo no plano equatorial.

3.6 Equação de Poisson para o Potencial Escalar

Para se obter a equação de Poisson, considere a equação de Maxwell da divergência da densidade de fluxo elétrico para meios homogêneos:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = \rho \quad (230)$$

Logo, podemos escrever:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon \quad (231)$$

Substituindo o campo eletrostático pelo negativo do gradiente do potencial escalar, temos:

$$\nabla \cdot (-\nabla \phi) = \rho / \epsilon \quad (232)$$

Como a divergência do gradiente de um escalar é o laplaciano desse escalar, então:

$$\nabla^2 \phi = -\rho / \epsilon \quad (233)$$

Esta equação é conhecida como equação de Poisson para o potencial eletrostático. Nos pontos onde a densidade volumétrica de carga é nula, $\rho = 0$, ela se transforma na equação de Laplace ou equação harmônica:

$$\nabla^2\phi = 0 \quad (234)$$

Quando $\rho = 0$, o campo eletrostático além de ser irrotacional, é também solenoidal, o que leva o potencial ser harmônico.

Exercício: Mostre que o potencial devido a uma distribuição volumétrica de carga é solução da equação de Poisson. (sugestão: vide pág. 159 e 160 do livro texto).

$$\phi(\mathbf{r}) = \iiint_v \frac{\rho(\mathbf{r}')dV'}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

3.7 Condutores em Condições Eletrostáticas

Em condições eletrostáticas, a densidade de corrente \mathbf{j} é nula em todo ponto. Logo, da lei de Ohm pontual,

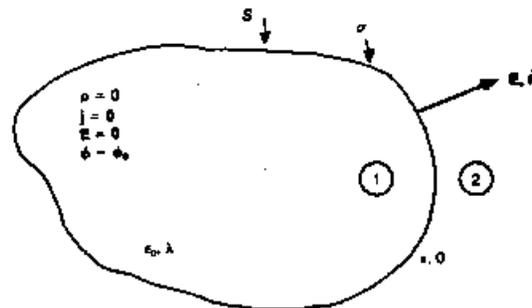
$$\mathbf{j} = \lambda\mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (235)$$

e portanto o campo elétrico no interior de um meio condutor é nulo. Assim, as cargas elétricas, não podendo se mover, são distribuídas de tal forma a anular o campo elétrico no interior do meio condutor.

Da equação,

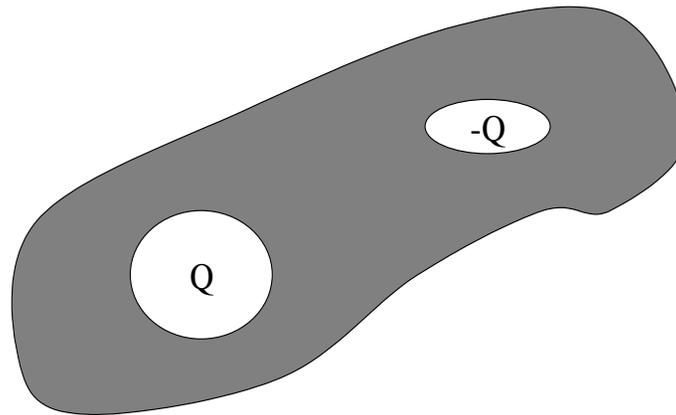
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon, \quad (236)$$

nos dá imediatamente que a densidade volumétrica também é nula. Isto é, não há cargas no interior de um condutor em condições eletrostáticas. Se distribuirmos certa quantidade de carga no interior de um condutor, haverá uma corrente transitória por um curto período de tempo. Durante este período, a carga é distribuída na superfície, e após este período transitório, a corrente, o campo elétrico e a carga serão nulos no interior do condutor.



Capacitância

Dado dois corpos condutores, separados por um meio dielétrico, considere que o condutor C_1 tenha uma carga total positiva Q e que o condutor C_2 tenha uma carga igual e negativa. Não existem outras cargas presentes, e a carga total do sistema é nula.



A capacitância deste sistema de dois condutores é definida como sendo a razão entre o módulo da carga total em um dos condutores e a diferença de potencial V entre eles.

$$C = Q/V, \quad (237)$$

$$C = \frac{\oiint \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}}{- \int_{-}^{+} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}} \quad (238)$$

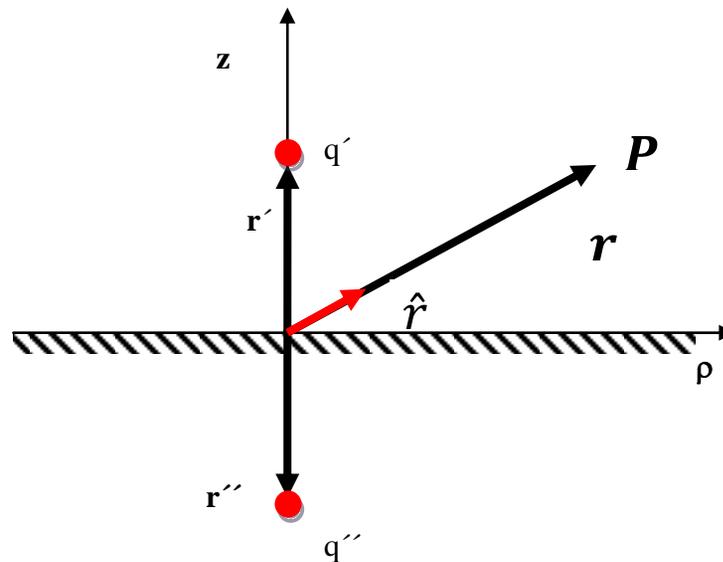
3.8 Método das Imagens

Esse método consiste em substituir o problema de “distribuição de cargas mais superfícies de contorno” por outro “distribuições de cargas – as mesmas que antes, chamadas de *cargas reais* – mais outra distribuição de cargas – as *cargas imagens*”.

Seja uma partícula puntiforme de carga q situada diante de um plano condutor ilimitado no vácuo (Fig. abaixo). O problema consiste em determinar, num ponto P , o potencial devido à carga real q na presença do plano condutor ilimitado. Por ser ilimitado, o potencial do plano deve ser nulo.

O potencial no semi-espaço abaixo do plano condutor é nulo, pois o condutor blindava essa região da influência da carga real q . O potencial no ponto P , que nos interessa, está no semi-espaço superior.

Pela simetria do problema, o potencial não varia com o ângulo azimutal. Assim, a forma e a posição da carga imagem devem ser tais que preserve essa característica física. Assim, vamos considerar que a carga imagem seja pontual com carga q'' e está localizada em \mathbf{r}'' ao longo da perpendicular ao plano que passa pela carga real.



O potencial em P , devido à carga real e sua imagem é:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{q'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{q''}{|\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}''|} \right), \quad (239)$$

ou em função dos unitários,

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{q'}{\sqrt{r^2 - 2rr'\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}' + r'^2}} + \frac{q''}{\sqrt{r^2 + 2rr''\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}'' + r''^2}} \right), \quad (240)$$

Sobre o plano, o potencial é nulo, logo:

$$0 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{q'}{\sqrt{r^2 + r'^2}} + \frac{q''}{\sqrt{r^2 + r''^2}} \right), \quad (241)$$

Como o denominador é positivo, logo:

$$q'q'' < 0, \quad (242)$$

isto é a carga imagem q'' deve ter sinal oposto à carga real q' . De (241), podemos escrever:

$$(q'^2 - q''^2)r^2 + (q'^2 r''^2 - q''^2 r'^2) = 0, \quad (243)$$

Como r é a distância à origem de um ponto arbitrário do plano condutor, significa que as parcelas devem se anular uma a uma, isto é:

$$q'^2 = q''^2 \quad (244)$$

$$q'^2 r''^2 = q''^2 r'^2. \quad (245)$$

Pela equação (242), a única solução de (244) é

$$q'' = -q'. \quad (246)$$

Com isto, a equação (245) nos dá imediatamente que

$$\mathbf{r}'' = -\mathbf{r}'. \quad (247)$$

As duas últimas equações mostram que a carga imagem é a própria imagem especular da carga real ao condutor plano. Assim, o potencial em qualquer ponto P, situado no semi-espaço superior é:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} q' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} + \mathbf{r}'|} \right) \quad (248)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} q' \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} - \frac{\mathbf{r} + \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} + \mathbf{r}'|^3} \right) \quad (249)$$

A força eletrostática que o plano condutor exerce sobre a carga real pode ser facilmente calculada como sendo a força que sobre esta exerce a carga imagem:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q'q''}{(r'+r'')^2} \hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{16\pi\epsilon} \frac{q'^2}{z'^2} \hat{\mathbf{z}} \quad (250)$$

3.9 Dielétricos em Condições Eletrostáticas

Do ponto de vista eletrostático, os meios podem ser separados em três tipos fundamentalmente diferentes:

Vácuo	Condutores	Dielétricos
$\epsilon = \epsilon_0$	$\epsilon = \epsilon_0$	$\epsilon > \epsilon_0$
$\lambda = 0$	$\lambda > 0$	$\lambda = 0$

Na discussão do comportamento dos meios isolantes, ou dielétricos, convém introduzirmos o *vetor polarização*, ou simplesmente *polarização*, definido como:

$$\mathbf{P} \equiv \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (251)$$

onde a polarização tem a mesma unidade da densidade de fluxo elétrico (C/m^2). Essa definição não se restringe à eletrostática. Ela é geral.

Da Eq. (251), vemos que a polarização é uma grandeza vetorial função do ponto (e do tempo, em geral) e é diretamente ligada à existência, no ponto, de um meio dielétrico, pois é nula tanto no vácuo quanto nos meios condutores, onde $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$. Nos meios condutores, mesmo quando a permissividade é diferente da do vácuo, a polarização é nula pois $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, e consequentemente $\mathbf{D} = \mathbf{0}$.

Aplicando a divergência à Eq. $\mathbf{P} \equiv \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E}$, podemos escrever:

$$\nabla \cdot \mathbf{P} \equiv \nabla \cdot \mathbf{D} - \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} \quad (252)$$

ou

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = (\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}) / \epsilon_0 \quad (253)$$

Essa equação mostra que, num ponto de um dielétrico, a divergência do campo elétrico difere, pela parcela $-\nabla \cdot \mathbf{P} / \epsilon_0$, da divergência do campo que haveria nesse ponto se aí houvesse a mesma fonte ρ mas se o meio fosse o vácuo. Pelas suas

dimensões, podemos imaginar que tal parcela decorra de uma distribuição volumar de cargas de densidade:

$$\rho_p \equiv -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (254)$$

Tal densidade é denominada de densidade volumar de cargas de polarização. Assim, a equação (253), com essa definição, pode ser reescrita como:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = (\rho + \rho_p) / \epsilon_0 \quad (255)$$

Por outro lado, sabemos que para meios homogêneos,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon \quad (256)$$

Assim, comparando as duas equações (255) e (256), podemos fazer a devida alteração na equação de Poisson para o potencial escalar, substituindo ρ/ϵ por $(\rho + \rho_p)/\epsilon_0$. Isto é:

$$\nabla^2 \phi = -\rho / \epsilon \quad (257)$$



$$\nabla^2 \phi = -(\rho + \rho_p) / \epsilon_0 \quad (258)$$

Observe que a equação (258) é válida para quaisquer tipos de meios (homogêneo ou não, isotrópico ou anisotrópico), pois a característica ϵ_0 é constante.

A solução da equação (258), pode ser obtida a partir da solução da equação (257):

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_v \frac{\rho(\mathbf{r}')dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (259)$$

Susbtituindo nesta equação ρ/ϵ por $(\rho+\rho_p)/\epsilon_0$, obtemos imediatamente

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_v \frac{\rho(\mathbf{r}') + \rho_p(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' . \quad (260)$$

Obviamente que as duas expressões são válidas para o potencial num meio dielétrico. Comparando-as, observamos que no potencial devido a equação (259), a presença do meio dielétrico em relação ao vácuo manifesta-se multiplicativamente, pelo fator $1/\epsilon = 1/K\epsilon_0$, para algum K. No potencial dado por (260), a presença do meio se manifesta aditivamente. A sua primeira parcela é o potencial, no vácuo, devido a uma distribuição ρ , e a segunda parcela é o potencial, também no vácuo, devido a uma distribuição adicional ρ_p , ligada diretamente à existência do material dielétrico.

As condições de interface entre meios podem também ser facilmente deduzidas. Relembrando as condições de interface para os componentes normais de \mathbf{D} :

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma . \quad (261)$$

Ou

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\varepsilon_2 \mathbf{E}_2 - \varepsilon_1 \mathbf{E}_1) = \sigma. \quad (262)$$

Assim, da definição de \mathbf{P} , podemos escrever:

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{D}_1 - \varepsilon_0 \mathbf{E}_1 \quad (263)$$

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{D}_2 - \varepsilon_0 \mathbf{E}_2 \quad (264)$$

Subtraindo (263) de (264), obtemos:

$$\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1 = (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) - \varepsilon_0 (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \quad (265)$$

Multiplicando ambos os lados pelo unitário normal:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = [\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) - \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)] / \varepsilon_0 \quad (266)$$

Ou,

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = [\sigma - \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)] / \varepsilon_0 \quad (267)$$

Definindo a *densidade superficial de carga de polarização* como

$$\sigma_p \equiv -\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \quad (268)$$

Obtemos,

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = [\sigma + \sigma_p] / \varepsilon_0 \quad (269)$$

Outra vez transformamos uma expressão multiplicativa - Eq. (262) – numa aditiva – Eq. (269). *Essa equação mostra que o salto no valor do campo elétrico ao passar a fronteira entre os dois meios de permissividades diferentes, causa, no observador, o mesmo efeito que causaria uma quantidade adicional de cargas distribuída nessa superfície fronteira se ela estivesse no vácuo.*

Havendo uma distribuição superficial de carga de polarização, o potencial eletrostático pode ser escrito a partir da Eq. (260) como sendo

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_v \frac{\rho(\mathbf{r}') + \rho_P(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(\mathbf{r}') + \sigma_P(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' \quad (270)$$

ou

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_v \frac{\rho(\mathbf{r}') - \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(\mathbf{r}') - \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{P}_2(\mathbf{r}') - \mathbf{P}_1(\mathbf{r}'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' \quad (271)$$

ou

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_0(\mathbf{r}) + \phi_P(\mathbf{r}) \quad (272)$$

onde

$$\phi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_v \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_s \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS'. \quad (273)$$

e

$$\phi_P(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_v \frac{-\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_s \frac{-\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{P}_2(\mathbf{r}') - \mathbf{P}_1(\mathbf{r}'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS'. \quad (274)$$

É possível mostrar que este último potencial é igual a (veja livro texto, págs. 213 a 215):

$$\phi_P(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_v \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'. \quad (275)$$

Substituindo as equações (273) e (275) em (272) e englobando a densidade superficial de carga de (273) na densidade volumétrica, temos:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_v \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_v \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'. \quad (276)$$

No estudo de dipolos, encontramos que o potencial devido a um dipolo puntiforme, no vácuo, é dado pela Eq. (227), a qual é repetida abaixo:

$$\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (277)$$

Se a distribuição desses dipolos for contínua, o potencial criado num ponto por um dipolo elementar é

$$d\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\mathbf{p}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (278)$$

Integrando em todo o volume, temos:

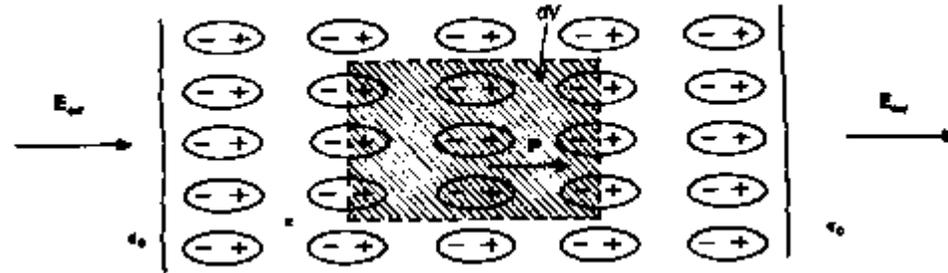
$$\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{d\mathbf{p}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (279)$$

Comparando esta expressão com o segundo termo do lado direito de (276), vemos que, se fizermos $\mathbf{P}(\mathbf{r}')dV' = d\mathbf{p}(\mathbf{r}')$, isto é

$$\mathbf{P} \equiv \frac{d\mathbf{p}(\mathbf{r}')}{dV'} \quad (280)$$

o potencial escalar de polarização (276) coincidirá com o potencial de uma distribuição contínua de dipolos ao longo do volume ocupado pelo dielétrico. Concluimos então que a existência de um dielétrico material equivale, para o observador do potencial, à existência de uma distribuição contínua de dipolos elementares, com um momento de dipolo na unidade de volume que envolve um ponto igual ao vetor polarização nesse ponto.

Por serem as cargas de polarização volumares e superficiais integrantes de uma distribuição de dipolos, e por ser nula a carga total de uma distribuição de dipolos, concluímos que deve ser nula a carga total de polarização.



Se o meio for linear, a Eq. (251) mostra que a relação entre o vetor polarização e o campo elétrico também será linear:

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E} = (\epsilon - \epsilon_0) \mathbf{E} \quad (281)$$

Alguns autores costumam escrever a equação acima como sendo

$$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}, \quad (282)$$

outros a transformam em

$$\mathbf{P} = k_e \epsilon_0 \mathbf{E}. \quad (283)$$

As definições são portanto:

$$\chi_e \equiv \varepsilon - \varepsilon_0, \quad (284)$$

$$k_e \equiv \varepsilon / \varepsilon_0 - 1, \quad (285)$$

onde χ_e **é a susceptibilidade elétrica** e k_e **é a constante dielétrica**. A razão entre a permissividade elétrica do meio pela permissividade do vácuo, é denominada de permissividade relativa, isto é:

$$\varepsilon' \equiv \varepsilon_r \equiv \varepsilon / \varepsilon_0. \quad (286)$$

Observe que a equação (283) só exige que o meio seja linear. Logo ele pode ser homogêneo ou não homogêneo, isotrópico ou anisotrópico. Neste último caso, χ_e , k_e e ε_r podem ser tensores!

3.10 Energia Eletrostática

No capítulo anterior, definimos a densidade de energia eletromagnética como sendo:

$$w \equiv \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}). \quad (287)$$

Num ponto onde há somente campo elétrico, a densidade de energia elétrica

$$w_e \equiv \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}. \quad (288)$$

A energia eletrostática total contida numa região V é simplesmente a integral de volume dessa densidade,

$$W_e \equiv \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV'. \quad (289)$$

É possível mostrar que a energia eletrostática total também pode ser dada por:

$$W_e \equiv \frac{1}{2} \iiint_V \phi \rho dV', \quad (290)$$

isto é, a energia pode ser dada em termos do potencial escalar e da densidade volumar de carga elétrica.

Se há n cargas pontuais, então a densidade volumar pode ser dada por

$$\rho = \sum_{i=1}^n q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (291)$$

e a energia [Eq. (290)] se escreve:

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \phi_i, \quad (292)$$

onde $\phi_i = \phi_i(\mathbf{r}_i)$ é o potencial no ponto \mathbf{r}_i devido a todas as n cargas do conjunto, à exceção da própria carga q_i .

4. Magnetostática

4.1 As Equações Fundamentais da Magnetostática

As equações fundamentais da eletrodinâmica são:

$$\nabla \times \mathbf{E} + \partial \mathbf{B} / \partial t = 0 \quad (293)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \partial \mathbf{D} / \partial t = \mathbf{j} \quad (294)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (295)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (296)$$

$$\mathbf{D} = \overset{\Rightarrow}{\varepsilon}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E} \quad (297)$$

$$\mathbf{B} = \overset{\Rightarrow}{\mu}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H} \quad (298)$$

$$\mathbf{j} = \overset{\Rightarrow}{\lambda}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E} \quad (299)$$

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (300)$$

Na eletrostática, impusemos a condição de completa inexistência de correntes e constância no tempo de todas as grandezas, isto é $\partial/\partial t = \mathbf{0}$. **Vamos agora incluir na discussão as correntes elétricas, mantendo, no entanto, a constância temporal de todas as grandezas eletromagnéticas.** Assim, as equações fundamentais da magnetostática podem ser obtidas considerando a seguinte condição:

Se em todo o espaço, considerarmos as seguintes condições:

i) Todas as grandezas eletromagnéticas são constantes no tempo. (301)

Isto nos conduz ao conjunto de equações:

$\nabla \times \mathbf{E} = 0$ (302)	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}$ (303)
$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ (304)	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (305)
$\mathbf{D} = \overset{\Rightarrow}{\varepsilon}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}$ (306)	$\mathbf{B} = \overset{\Rightarrow}{\mu}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}$ (307)
$\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}$ (308)	
$\mathbf{f}_e = \rho \mathbf{E}$ (309)	$\mathbf{f}_m = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ (310)

Observe que, à primeira vista, aqui não ocorre a completa separação dos campos elétrico e magnético, formando dois conjuntos independentes. **Isto porque agora a lei de Ohm liga \mathbf{E} a \mathbf{j} , e \mathbf{j} , por sua vez, determina \mathbf{H} (e \mathbf{B}).** Veremos no estudo de condutores em condições magnetostáticas que a lei de Ohm não acopla os campos, pois, o campo elétrico que nela aparece não pode ser o mesmo campo coulombiano, irrotacional (Eq. (302)). Assim, os dois campos continuam independentes. O campo eletrostático continua sendo oriundo da distribuição de carga constante ρ e o campo magnetostático provém somente das correntes de densidade constante \mathbf{j} . Por isso são independentes as duas parcelas da força de Lorentz, a elétrica e a magnética.

Assim, as equações fundamentais da magnetostática juntamente com as condições de interface são:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} \quad (311)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (312)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{k} \quad (313)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \quad (314)$$

$$\mathbf{B} = \overset{\Rightarrow}{\mu}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H} \quad (315)$$

$$\mathbf{f}_m = \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (316)$$

Se o meio for homogêneo e isotrópico, o conjunto acima pode ser simplificado:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} \quad (317)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (318)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \left(\frac{\mathbf{B}_2}{\mu_2} - \frac{\mathbf{B}_1}{\mu_1} \right) = \mathbf{k} \quad (319)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \quad (320)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (321)$$

$$\mathbf{f}_m = \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (322)$$

4.2 O Potencial Vetor de Distribuições de Correntes

Comparando as equações de Maxwell da eletrostática e da magnetostática,

Eletrostática

Magnetostática

$\nabla \times \mathbf{E} = 0$ (irrotacional) (323)	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}$ (rotacional) (324)
$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ (não solenoidal) (325)	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (solenoidal) (326)

vemos que os dois conjuntos diferem fundamentalmente entre si no que se refere às relações dos vetores campo com suas respectivas fontes. O campo eletrostático é irrotacional, mas não solenoidal, enquanto que exatamente o contrário se dá com o magnetostático. Consequentemente não pode haver um potencial escalar magnético válido em todo o espaço, mas apenas nas regiões em que a densidade de corrente é nula. Entretanto, como a divergência da densidade de fluxo é nula, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, e sabendo-se que a divergência do rotacional de qualquer campo vetorial é nulo, podemos então definir implicitamente o potencial vetor magnético como

$$\mathbf{B} \equiv \nabla \times \mathbf{A} \quad (\text{Unidade de } \mathbf{A} \rightarrow \text{Wb/m ou T.m}) \quad (327)$$

Como a divergência de \mathbf{B} é nula não só na magnetostática, o potencial vetor, diferentemente do potencial escalar ϕ , permanece ligado à densidade de fluxo magnético pela equação (327) ao longo da eletrodinâmica.

Se integrarmos ambos os lados da Eq. (327) por uma integral de superfície aberta, obtemos, após aplicar o Teorema de Stokes:

$$\iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (328)$$

Havendo simetria, esta equação pode ser útil na determinação explícita do potencial vetor magnético quando se conhece \mathbf{B} .

Assim como o potencial escalar é definido a menos de uma constante, o potencial vetor magnético é também indeterminado, porém a arbitrariedade é todo gradiente de uma função escalar do ponto. Realmente, seja a transformação de calibre:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi. \quad (329)$$

As densidades de fluxo magnético $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ e $\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}'$ são idênticas, pois o rotacional do gradiente de qualquer função escalar é nulo. Assim, $\mathbf{B} = \mathbf{B}'$, e o potencial vetor é definido então, a menos do gradiente de uma função escalar.

Contrariamente ao que foi feito com o potencial escalar elétrico, ao potencial vetor é impossível associar qualquer significado físico. Ele é, portanto, apenas uma grandeza matemática que nos permite resolver determinados problemas de forma mais fácil. Como a indeterminação no potencial escalar elétrico era bastante restrita, apenas uma constante, bastava-nos impor o valor do potencial

num único ponto do espaço para que ele se tornasse unívoco em todos os demais. No caso do potencial vetor magnético, essa liberdade é muito maior, pois temos à nossa disposição uma função vetorial irrotacional ($\text{grad } \chi$). Vamos usar esta liberdade para impor, além da constante de normalização que ainda poderemos escolher, a condição de que o potencial vetor seja solenoidal:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (330)$$

Esta é a condição de *calibre de Coulomb ou solenoidal*. Essa condição impõe ao potencial \mathbf{A}' :

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot (\mathbf{A} + \nabla \chi) = 0 + \nabla^2 \chi \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \chi = 0 \quad (331)$$

A Eq. (331) nos mostra que agora a função escalar $\chi(\mathbf{r})$, antes totalmente arbitrária, deva agora restringir-se às funções harmônicas.

Se considerarmos os meios homogêneos, $\nabla \mu = \mathbf{0}$, a lei de Ampère pontual da magnetostática é:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} , \quad (332)$$

ou

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu \mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{j} . \quad (333)$$

Lembrando a condição de Coulomb, temos:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{j}. \quad (334)$$

Essa é a **equação de Poisson** para o potencial vetor, válida na magnetostática. Em coordenadas cartesianas, a equação vetorial (334), pode ser transformada em três equações escalares:

$$\nabla^2 A_x = -\mu j_x, \quad \nabla^2 A_y = -\mu j_y \quad \text{e} \quad \nabla^2 A_z = -\mu j_z. \quad (335)$$

Se lembrarmos da solução da equação de Poisson para o potencial escalar elétrico:

$$\nabla^2 \phi = -\rho/\epsilon \quad \Rightarrow \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_v \frac{\rho(\mathbf{r}')dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (336)$$

obtemos imediatamente a solução para cada componente do potencial vetor magnético, que em forma vetorial torna-se:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_v \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (337)$$

Essa expressão justifica o porquê do nome dado à condição ($\text{div } \mathbf{A} = 0$) como condição de Coulomb: o potencial vetor que obtivemos a partir desta condição tem, com as correntes, exatamente a mesma relação analítica coulombiana que o potencial escalar tem com as cargas.

Se há várias distribuições de correntes, a expressão do potencial vetor \mathbf{A} , semelhantemente ao potencial escalar, torna-se:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \left[\iiint_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \iint_S \frac{\mathbf{k}(\mathbf{r}') dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + I \oint_C \frac{d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right]. \quad (338)$$

Pode-se verificar que o potencial vetor é finito para distribuições finitas de corrente situadas em volumes e em superfícies de extensão limitada, bem como atravessará distribuições superficiais de corrente sem sofrer descontinuidades. Entretanto, o potencial vetor não será definido sobre distribuições de correntes filiformes ($\mathbf{r} = \mathbf{r}'$), mesmo quando finitas e limitadas.

Condições de Interface

Considere a continuidade da componente normal de \mathbf{B} :

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{n}} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}_2 - \nabla \times \mathbf{A}_1) = 0. \quad (339)$$

A descontinuidade do componente tangencial de \mathbf{H} :

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{k} \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{n}} \times \left(\frac{1}{\mu_2} \nabla \times \mathbf{A}_2 - \frac{1}{\mu_1} \nabla \times \mathbf{A}_1 \right) = \mathbf{k}. \quad (340)$$

Com a condição de Coulomb, a componente normal do potencial vetor é sempre contínua, isto é:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) = 0 . \quad (341)$$

Por outro lado, a componente tangencial acusa a diferença de permeabilidade magnética dos meios, mediante a condição:

$$\hat{\mathbf{n}} \times \left(\frac{1}{\mu_2} \mathbf{A}_2 - \frac{1}{\mu_1} \mathbf{A}_1 \right) = 0 . \quad (342)$$

Assim, as equações (339) a (342) dão as condições de interface para as derivadas normal e tangencial e para os componentes normal e tangencial do potencial vetor \mathbf{A} . Além dessas condições, podemos também impor a normalização $\mathbf{A}(\mathbf{r}_0) = \mathbf{A}_0$, uma vez que o potencial vetor não tem significado físico.

4.3 O Campo de uma Distribuição de Correntes

Para determinar a densidade de fluxo magnético, \mathbf{B} , podemos simplesmente tomar a Eq. (337),

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_v \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} , \quad (343)$$

e calcular o rotacional de ambos os lados:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_v \nabla \times \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad (344)$$

Para simplificar a expressão no interior da integral, considere a identidade vetorial $\nabla \times (f\mathbf{v}) = \nabla f \times \mathbf{v} + f\nabla \times \mathbf{v}$ aplicada à Eq. (344):

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_v \left[\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') \right] dV'. \quad (345)$$

Se observarmos que $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ não depende das variáveis de ∇ e que o gradiente de $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ é dado por

$$\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (346)$$

a Eq. (344) reduz-se a:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_v \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'. \quad (347)$$

A Eq. (347) é a famosa Lei de Biot-Savart. Ela permite calcular a densidade de fluxo magnético \mathbf{B} se conhecemos a densidade de corrente $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$.

O campo magnético \mathbf{H} é obviamente obtido multiplicando a expressão (347) pela permeabilidade magnética do meio.

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_v \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' . \quad (348)$$

Observe que a expressão (347) apresenta várias semelhanças com a expressão da Lei de Coulomb para o campo elétrico:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_v \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' . \quad (349)$$

A grande diferença é o **produto vetorial necessário na Eq. (347) para garantir a natureza vetorial da densidade de fluxo magnético \mathbf{B}** . Por outro lado, a expressão (348) apresenta semelhanças com a densidade de fluxo elétrico $\mathbf{D}(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_v \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' . \quad (350)$$

De forma semelhante ao caso do potencial escalar e potencial vetor magnético, na presença de várias distribuições de corrente, podemos expressá-las em termos da densidade volumar com a ajuda das funções delta de Dirac e obter a correspondente expressão para os campos \mathbf{B} ou \mathbf{H} . Assim, na presença de

distribuições volumares, superficiais e filamentosas de corrente, podemos escrever:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \left[\iiint_v \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' + \iint_s \mathbf{k}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS' + I \oint_c d\mathbf{l}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] \quad (351)$$

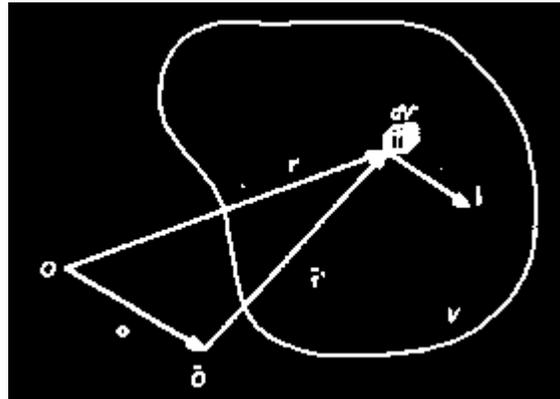
e

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \left[\iiint_v \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' + \iint_s \mathbf{k}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS' + I \oint_c d\mathbf{l}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right]. \quad (352)$$



4.4 O Potencial e o Campo de uma Espira

Nesta seção discutiremos o análogo do dipolo elétrico – a espira magnética.



Seja V o volume de uma região limitada, ocupada por uma distribuição de correntes de densidade $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$. Se \mathbf{r}' é o vetor posição, em relação a uma origem O , de um elemento de volume dV' , definimos o momento de dipolo magnético, ou simplesmente momento magnético da distribuição por meio de

$$\mathbf{m} \equiv \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV', \quad (353)$$

dado no SI em $\text{A}\cdot\text{m}^2$. O fator $\frac{1}{2}$ é adotado nesta expressão por conveniência. O momento magnético é a definição mais semelhante, a menos deste fator, possível de ser feita do momento de dipolo elétrico:

$$\mathbf{p} \equiv \iiint_V \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dV'. \quad (354)$$

Se trasladamos a origem do sistema de referência de O para \bar{O} (veja figura anterior), o momento de dipolo magnético será

$$\bar{\mathbf{m}} \equiv \frac{1}{2} \iiint_{\bar{v}} \bar{\mathbf{r}}' \times \mathbf{j}(\bar{\mathbf{r}}') d\bar{V}' . \quad (355)$$

Por outro lado, sendo o elemento de volume e a densidade de corrente em O iguais aos respectivos em \bar{O} e

$$\bar{\mathbf{r}}' = \mathbf{r}' - \mathbf{o} , \quad (356)$$

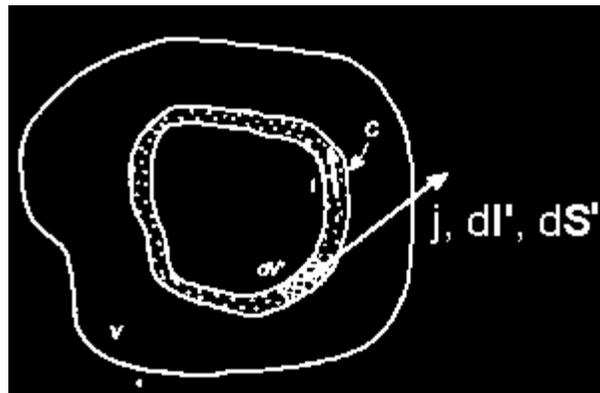
obtemos após fazer as devidas substituições em (355):

$$\bar{\mathbf{m}} = \frac{1}{2} \iiint_{\bar{v}} (\mathbf{r}' - \mathbf{O}) \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV' = \frac{1}{2} \iiint_{\bar{v}} \mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV' - \frac{\mathbf{O}}{2} \times \iiint_{\bar{v}} \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV' . \quad (357)$$

A primeira integral do lado direito é exatamente igual ao momento magnético dado em (353). A segunda integral se anula para correntes fechadas como podemos facilmente verificar. Assim,

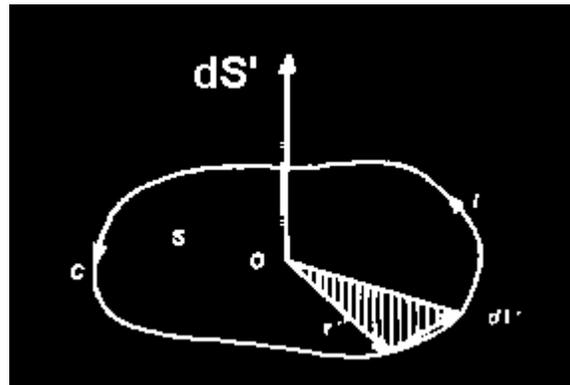
$$\bar{\mathbf{m}} = \mathbf{m} . \quad (358)$$

Este resultado nos diz que, se as correntes de uma distribuição são fechadas, como se dá na magnetostática, o momento de dipolo magnético é uma característica que dispensa a especificação da origem.



Dá-se o nome de dipolo magnético à distribuição que tem nula a integral da corrente, mas não-nulo o momento de dipolo magnético. Assim como no dipolo elétrico bipuntiforme, que envolve apenas duas cargas puntiformes, é a mais simples distribuição bipolar de cargas, uma espira de correntes, por envolver uma única corrente linear, é a distribuição fechada mais simples a constituir um dipolo magnético. Neste caso, o momento de dipolo magnético devido a uma espira de corrente é

$$\mathbf{m} = I \oint_C \frac{\mathbf{r}' \times d\mathbf{l}'}{2} . \quad (359)$$



O integrando da equação anterior é na verdade a área dS' do triângulo que tem r' e dl' como dois de seus lados. Logo,

$$\mathbf{m} = I\mathbf{S}, \quad (360)$$

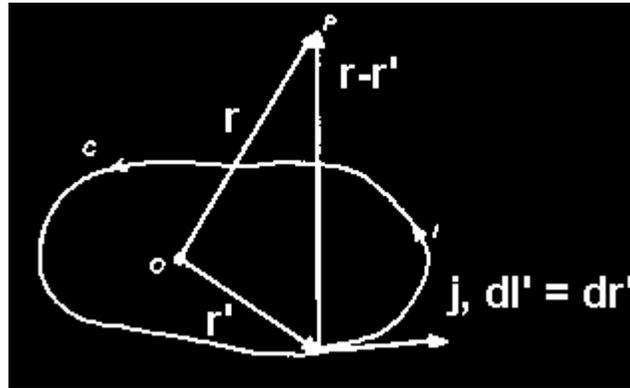
onde \mathbf{S} é a área orientada de qualquer superfície S que tenha a linha de corrente C como fronteira orientada.

Podemos definir de forma análoga ao dipolo elétrico elementar, a espira magnética puntiforme ou elementar, de modo que, no limite

$$\mathbf{m} = \lim_{\substack{S \rightarrow 0 \\ I \rightarrow \infty}} I\mathbf{S}, \quad (361)$$

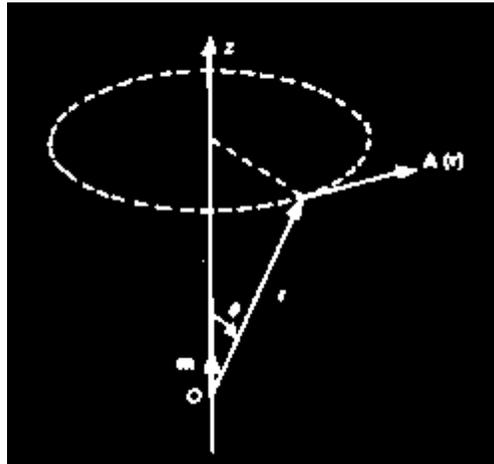
o momento magnético permaneça finito. Também de forma análoga ao caso elétrico, se a distribuição não se encontra na origem,

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}') = \lim_{\substack{S \rightarrow 0 \\ I \rightarrow \infty}} I(\mathbf{r}')\mathbf{S}(\mathbf{r}') . \quad (362)$$



O cálculo do potencial vetor e dos campos magnéticos para uma espira é uma tarefa muito mais difícil do que foi para o caso do dipolo elétrico. Assim, vamos nos contentar aqui em fornecer a expressão para o potencial vetor magnético válido para pontos distantes do dipolo magnético que se encontra sobre a origem do sistema de referência (veja Fig. abaixo).

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} . \quad (363)$$



Dedução detalhada pode ser encontrada no livro Eletrodinâmica Clássica do Jackson.

No caso do dipolo não se encontrar na origem do sistema de referência, a expressão (363) torna-se:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{\mathbf{m}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (364)$$

Observe que as equações (363) e (364) são muito semelhantes às análogas do caso eletrostática:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (365)$$

$$\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\mathbf{p}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (366)$$

A equação (363) pode ser reescrita, para $\mathbf{m} = m \hat{\mathbf{z}}$, como:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} m \frac{\sin(\mathbf{m} \wedge \hat{\mathbf{r}})}{r^2} \hat{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\mu}{4\pi} m \frac{\sin(\theta)}{r^2} \hat{\boldsymbol{\alpha}}. \quad (367)$$

A densidade de fluxo magnético \mathbf{B} para o dipolo na origem do sistema de referência pode ser obtida tomando o rotacional da equação (367) em coordenadas esféricas. Fazendo-se isto obtemos

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}; \theta) = \frac{\mu}{4\pi} m \frac{2\cos(\theta)\hat{\mathbf{r}} + \sin(\theta)\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r^3}. \quad (368)$$

Se observarmos que o unitário na direção z em coordenadas esféricas se transforma em

$$\hat{\mathbf{z}} = \cos(\theta)\hat{\mathbf{r}} - \sin(\theta)\hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (369)$$

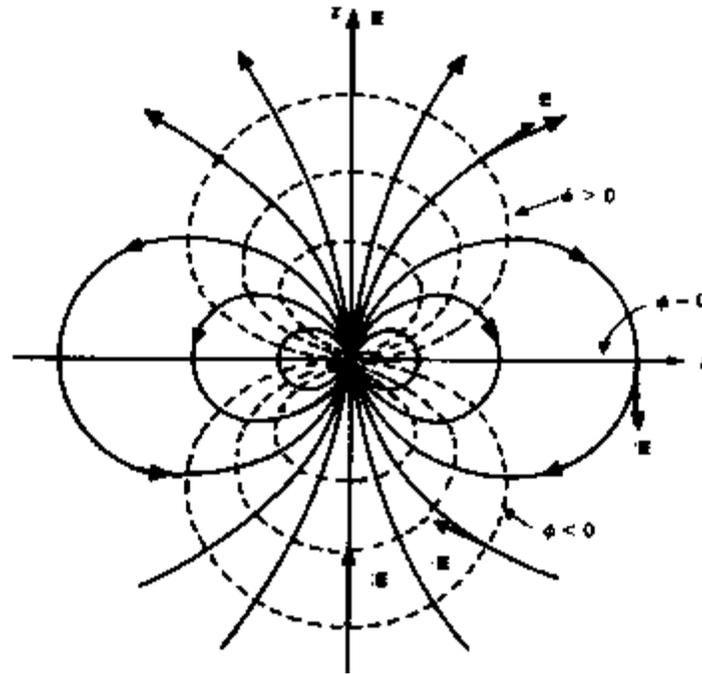
e que $\mathbf{m} = m \hat{\mathbf{z}}$, a equação (368) pode ser escrita como:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}; \theta) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{3(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{m}}{r^3} . \quad (370)$$

Essa equação é semelhante à equação para o campo eletrostático obtida para o dipolo elétrico:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{3(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}}{|\mathbf{r}|^3} \quad (371)$$

As linhas do campo magnético de uma espira puntiforme são iguais às linhas do campo elétrico da Fig. dada a seguir.



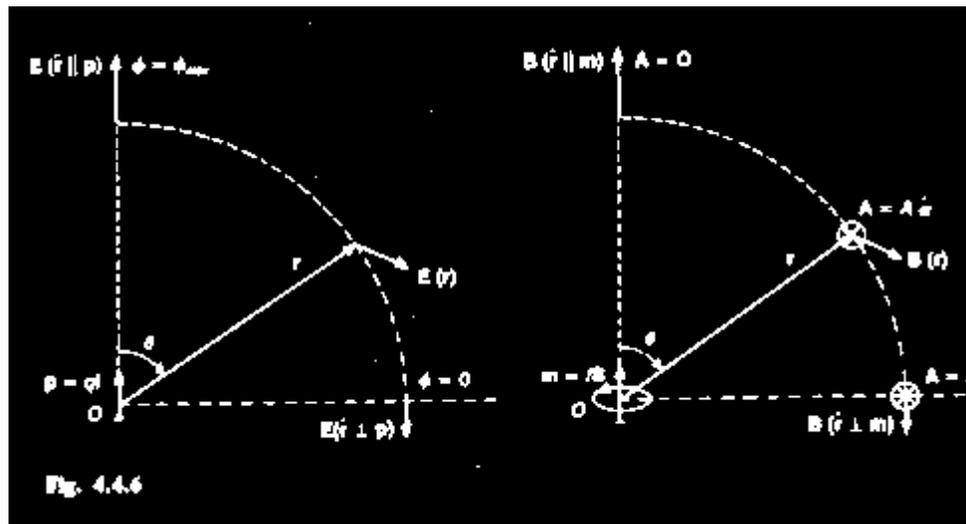
Logo, se o dipolo não está na origem do sistema, obtemos:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\mu}{4\pi} \left[\frac{3\mathbf{m}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \frac{\mathbf{m}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right], \quad (372)$$

a qual também é semelhante ao caso da eletrostática:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{3\mathbf{p}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \frac{\mathbf{p}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] \quad (373)$$

A densidade de fluxo magnético é máxima no eixo do dipolo e mínima no plano equatorial, onde ela é antiparalela ao momento magnético.



4.5 Meios Magnéticos em Condições Estáticas

Os meios magnéticos são aqueles que de alguma forma interagem com o campo magnético. Não há no magnetismo, materiais cujos comportamentos sejam essencialmente distintos, como é o caso, na eletricidade, dos condutores e dielétricos. Isso se deve ao fato de não haver monopolos magnéticos, o qual, como correspondente da carga livre, poderia (ou não) se deslocar sob a influência de campos magnéticos externos, criar ‘correntes magnéticas’, formar densidades superficiais, etc., e assim classificar os meios onde isso se desse como os análogos dos condutores. As equações constitutivas ($\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$, $\mathbf{D}=\epsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{j}=\lambda\mathbf{E}$) demonstram este fato. A equação $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$ é análoga a $\mathbf{D}=\epsilon\mathbf{E}$, mas $\mathbf{j}=\lambda\mathbf{E}$ está desemparelhada, pois não existe a análoga $\mathbf{j}_m=\lambda_m\mathbf{B}$.

A correspondência que existe para o meio magnético é o dielétrico. Porém, essa correspondência não é total. Como sabemos a permissividade dos dielétricos é maior do que a do vácuo ($\epsilon > \epsilon_0$). Já nos meios magnéticos, a permeabilidade pode ser maior ou igual ($\mu >, =$ ou $< \mu_0$). Nos meios em que $\mu > \mu_0$ ocorre, são denominados de paramagnéticos, e aqueles em que $\mu < \mu_0$ são denominados de diamagnéticos. Os materiais em que $\mu \gg \mu_0$, são denominados de ferromagnéticos, eles são uma classe especial de materiais paramagnéticos. Outro fato, interessante é que à exceção dos materiais ferromagnéticos, as

propriedades magnéticas são muito mais fracas que as elétricas. A permeabilidade desses meios diferem muito pouco da do vácuo. Mesmo em cristais, onde ϵ deve ser tratado como um tensor, o μ pode quase sempre ser confundido com o μ_0 .

O vetor magnetização ou polarização magnética é definido como sendo:

$$\mathbf{M} \equiv \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{H} . \quad (374)$$

A dimensão do vetor magnetização é portanto A/m. Vale ressaltar que esta definição é geral, aplicável quer os campos sejam estáticos ou não. No vácuo, o vetor magnetização é nulo, entretanto, em meios magnéticos isotrópicos, ele pode ser paralelo ($\mu > \mu_0$) ou antiparalelo ($\mu < \mu_0$) ao campo magnético, enquanto nos meios dielétricos a polarização é sempre paralela.

De forma análoga à eletrostática, é possível usar o vetor magnetização para caracterizar aditivamente os efeitos do material magnético. Para isso, considere a lei de Ampère pontual para a magnetostática:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{j} + \nabla \times \mathbf{M}) . \quad (375)$$

Como $\nabla \times \mathbf{M}$ tem a mesma dimensão de \mathbf{j} , ele é definido como densidade de corrente magnética \mathbf{j}_m , isto é:

$$\mathbf{j}_m \equiv \nabla \times \mathbf{M}. \quad (376)$$

Assim,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{j} + \mathbf{j}_m). \quad (377)$$

De forma análoga ao estudo dos dielétricos, a consideração de $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{j} + \mathbf{j}_m)$ no lugar de $\nabla \times \mathbf{B} = \mu\mathbf{j}$, conduz à seguinte alteração na equação de Poisson:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0(\mathbf{j} + \mathbf{j}_m). \quad (378)$$

no lugar de

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu\mathbf{j}. \quad (379)$$

Como sabemos a solução para (379),

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad (380)$$

é fácil encontrar a solução para (378), substituindo \mathbf{j} por $\mathbf{j} + \mathbf{j}_m$ e μ por μ_0 . Fazendo-se isto, obtemos

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') + \mathbf{j}_m(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' . \quad (381)$$

Observe que na equação (380), a presença do meio se manifesta através da grandeza multiplicativa μ , e que em (381) esta mesma presença se manifesta mediante a parcela aditiva \mathbf{j}_m .

De nossa experiência prévia, como a descontinuidade do campo magnético tangencial não depende do meio, mas apenas da existência de correntes superficiais,

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{k} , \quad (382)$$

e como a indução magnética sofre um salto devido aos dois fatores,

$$\hat{\mathbf{n}} \times \left(\frac{\mathbf{B}_2}{\mu_2} - \frac{\mathbf{B}_1}{\mu_1} \right) = \mathbf{k} , \quad (383)$$

então a magnetização \mathbf{M} será descontínua; esta descontinuidade dever-se-á, apenas, à mudança abrupta nas propriedades magnéticas de dois meios vizinhos, e será indiferente à existência ou não de distribuições de correntes livres nessa fronteira. Realmente, escrevendo a equação de definição da magnetização para dois meios,

$$\mathbf{M}_1 = \frac{\mathbf{B}_1}{\mu_0} - \mathbf{H}_1, \quad (384)$$

e

$$\mathbf{M}_2 = \frac{\mathbf{B}_2}{\mu_0} - \mathbf{H}_2 \quad (385)$$

fazendo a subtração da primeira desta última, obtemos:

$$\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1 = \frac{\mathbf{B}_2}{\mu_0} - \frac{\mathbf{B}_1}{\mu_0} - (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1). \quad (386)$$

Multiplicando essa equação vetorialmente pelo unitário normal, temos

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1) = \hat{\mathbf{n}} \times \left(\frac{\mathbf{B}_2}{\mu_0} - \frac{\mathbf{B}_1}{\mu_0} \right) - \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1), \quad (387)$$

ou

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = \mu_0 (\boldsymbol{\kappa} + \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1)) = \mu_0 (\boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{\kappa}_m), \quad (388)$$

onde,

$$\boldsymbol{\kappa}_m = \mathbf{n} \times (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1) \quad (389)$$

é a **densidade linear de corrente de magnetização**. Diferentemente da equação (383), a equação (388) apresenta aditivamente as duas diferentes causas do salto

na componente tangencial da densidade de fluxo magnético: a existência de correntes superficiais e a variação abrupta na permeabilidade do meio (segunda parcela).

De forma análoga ao meio dielétrico, podemos mostrar que o potencial vetor magnético pode ser dado como sendo

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'. \quad (390)$$

A equação acima nos permite relacionar a magnetização num ponto do meio com o momento magnético da unidade de volume que contém esse ponto. Adaptando o potencial vetor devido ao momento magnético elementar $d\mathbf{m}$ de um dipolo elementar (eq. (364)), podemos escrever:

$$d\mathbf{A}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \frac{\mu}{4\pi} \frac{d\mathbf{m}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (391)$$

Integrando esta equação percebemos imediatamente que ela é idêntica à segunda parcela de (390) se fizermos

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{m}}{dV}. \quad (392)$$

Essa equação é análoga ao vetor polarização \mathbf{P} ,

$$\mathbf{P} = \frac{d\mathbf{p}}{dV} . \quad (393)$$

Concluimos assim que a existência de um meio magnético equivale, para o observador da densidade de fluxo magnético, à existência de uma distribuição contínua de dipolos magnéticos elementares, com um momento de dipolo magnético por unidade de volume circundante do ponto igual ao vetor magnetização neste ponto.

Podemos observar uma completa analogia entre os pares de equações abaixo:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} \quad (394)$$

com

$$\nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{j}_m \quad (395)$$

e

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{k} \quad (396)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{k} \quad (397)$$

com

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1) = \mathbf{k}_m . \quad (398)$$

Se definirmos

$$\mathbf{B}_m \equiv \nabla \times \mathbf{A}_m, \quad (399)$$

então

$$\mathbf{B}_m(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \nabla \times \left[\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] dV'. \quad (400)$$

É possível mostrar que a partir desta equação se chega a

$$\mathbf{B}_m(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{M} - \nabla \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \right], \quad (401)$$

ou simplesmente

$$\mathbf{B}_m(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{M} - \nabla \phi_m, \quad (402)$$

onde a grandeza

$$\phi_m(\mathbf{r}) \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \quad (403)$$

damos o nome de *potencial escalar de magnetização*. A equação (402) nos diz que a indução magnetostática criada num ponto do espaço por uma distribuição

de dipolos magnetostáticos elementares é a soma do vetor magnetização no ponto, com o gradiente negativo do potencial escalar de magnetização nesse ponto.

A densidade de fluxo magnético total, criada num ponto do espaço por distribuições de correntes livres e por distribuições de correntes de magnetização é a soma

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_v \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' + \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}) - \nabla \phi_m(\mathbf{r}) . \quad (404)$$

Se considerarmos a equação de definição do vetor magnetização,

$$\mathbf{M} = \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu} \right) \mathbf{B} , \quad (405)$$

podemos introduzir a suscetibilidade magnética do meio,

$$\chi_m = \frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu} . \quad (406)$$

Assim,

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{B}. \quad (407)$$

Definimos também a permeabilidade magnética relativa como

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}. \quad (408)$$

4.6 Condutores em Condições Magnetostáticas

Na magnetostática, os campos elétricos que criam as correntes são não coulombianos. **Eles não são irrotacionais, não se exprimem como o gradiente de um escalar, não são conservativos, não têm circulação nula.** Do ponto de vista da teoria de Maxwell, visão macroscópica, eles não têm origem elétrica, mas sim química, o que os tornam “estranhos” à teoria macroscópica.

Para verificarmos essas características, suponha que os dizeres acima estão errados e que o campo que origina as correntes estacionárias são irrotacionais. Assim, podemos escrever para a força eletromotriz induzida,

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} = 0. \quad (409)$$

Se substituirmos na integral a lei de Ohm pontual, obtemos

$$\mathcal{E} = \oint_c \frac{1}{\lambda} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} = \oint_c \frac{1}{\lambda} j dl = 0 \quad \Rightarrow \quad j = 0. \quad (410)$$

Pela equação (410), vemos ser impossível a existência de uma corrente estacionária originada com um campo irrotacional. Isto contraria obviamente todos os dados experimentais disponíveis, que comprovam cotidianamente a existência de correntes de condução constantes no tempo. O erro consiste em supormos que, em condições estáticas, as correntes de condução se originam do mesmo campo eletrostático coulombiano que aparece nas equações de Maxwell para a magnetostática (Eqs. 302 - 310).

Isto pode ser exemplificado: Se ligarmos cada extremidade de um fio condutor a cada uma das placas de um capacitor com diferença de potencial inicialmente constante, haverá uma corrente elétrica fluindo através do fio. Essa corrente se deve ao transporte de cargas elétricas que estão sendo retiradas de uma das placas e depositadas na outra, durante o processo transiente que busca o equilíbrio eletrostático. Em conseqüência, a diferença de potencial entre as placas vai diminuindo à medida que a corrente flui. Isto transforma o campo do capacitor, inicialmente eletrostático, em variável com o tempo, o que contraria a hipótese de que ele seja permanentemente estático.

Portanto, os campos elétricos que originam as correntes estacionárias não são campos eletrostáticos. Para diferenciá-los claramente dos campos coulombianos, chamamo-los de campos aplicados ou campos estranhos:

$$\mathbf{E}_a \equiv \mathbf{j}/\lambda \quad \text{onde } \mathbf{j} \text{ é estacionário.} \quad (411)$$

À circulação do campo aplicado,

$$\mathcal{E}_a = \oint_C \mathbf{E}_a \cdot d\mathbf{l} \quad (412)$$

damos o nome de *força eletromotriz aplicada*, *força eletromotriz estranha* ou quando não há risco de confusão, simplesmente *força eletromotriz*. A fonte de uma força eletromotriz aplicada é qualquer dispositivo (p.ex.: pilha eletroquímica) que mantenha uma diferença de potencial constante entre dois pontos do espaço.

Convém pois explicitar na lei de Ohm pontual os dois tipos de campos:

$$\mathbf{j} = \lambda(\mathbf{E} + \mathbf{E}_a). \quad (413)$$

Como na magnetostática só existe a segunda parcela (\mathbf{E}_a), fica agora claro que os campos elétricos e magnéticos estão, na magnetostática, completamente desacoplados.

Quando se especificam os dois campos (\mathbf{E} e \mathbf{E}_a), isto é, o campo eletrostático e o campo aplicado, a densidade de potência dissipada em cada ponto do condutor pelo efeito joule é:

$$u = \mathbf{j} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{E}_a). \quad (414)$$

Integrando no volume ambos os lados dessa equação temos:

$$U = \iiint_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV' + \iiint_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}_a dV' = -\iiint_V \mathbf{j} \cdot \nabla \Phi dV' + \iiint_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}_a dV'. \quad (415)$$

Substituindo a identidade vetorial

$$\mathbf{j} \cdot \nabla \Phi = -\Phi \nabla \cdot \mathbf{j} + \nabla \cdot (\Phi \mathbf{j}) = \nabla \cdot (\Phi \mathbf{j}), \quad (416)$$

obtemos quando as correntes são solenoidais

$$U = -\oiint \Phi \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}' + \iiint_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}_a dV' \quad (417)$$

ou como o volume envolve todo o meio condutor, a densidade de corrente é nula ao longo da fronteira S . Assim, como era de se esperar a potência dissipada se deve somente ao campo aplicado, que é o único responsável pela corrente estacionária.

$$U = \iiint_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}_a dV'. \quad (418)$$

4.7 A Energia Magnetostática

Abordamos a seguir os aspectos da energia de interação de correntes estacionárias com campos magnetostáticos. Consideramos inicialmente a densidade de energia eletromagnética:

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \quad (419)$$

Como há na magnetostática, semelhantemente ao que ocorre na eletrostática, completa separação dos campos elétricos e magnéticos, podemos considerar isoladamente a segunda parcela da densidade de energia:

$$w_m = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \quad (420)$$

a qual é constante no tempo. Se V_∞ denotar o volume do espaço inteiro, a energia magnetostática total será:

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint_{V_\infty} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV \quad (421)$$

Substituindo \mathbf{B} na equação (421) pelo rotacional de \mathbf{A} , temos

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint_{V_\infty} \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{A} dV \quad (422)$$

O integrando dessa equação pode ser transformado considerando a identidade vetorial $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{H}$. Fazendo-se isto, temos

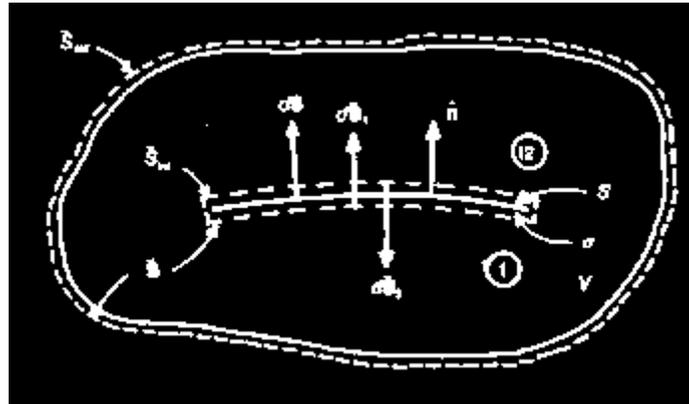
$$W_m = \frac{1}{2} \iiint_{V_\infty} [\mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{A}] dV = \frac{1}{2} \iiint_{V_\infty} [\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) + \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{H}] dV \quad (423)$$

ou

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint_{V_\infty} \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) dV + \frac{1}{2} \iiint_{V_\infty} \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} dV \quad (424)$$

A segunda integral pode ser avaliada sem nenhum problema, uma vez que o potencial vetor é finito e contínuo sobre distribuições volumares e superficiais limitadas. Entretanto, na primeira integral já vimos que sobre distribuições superficiais o campo \mathbf{H} sobre a descontinuidade $\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{k}$. Assim, a

primeira integral, no caso de haver distribuições superficiais (veja figura) pode ser escrita como:



$$\iiint_{V_\infty} \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) dV = \oiint_{S_{\text{int}}} (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} + \oiint_{S_{\text{ext}}} (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} \quad (425)$$

A superfície S_{ext} é a superfície que borda o infinito. Sobre esta superfície o integrando é nulo pois, no limite de R tendendo para infinito, o integrando é proporcional a R^{-1} [$R^{-1}R^{-2}R^2 = R^{-1}$]. Assim, a equação (425), reduz-se a

$$\iiint_{V_\infty} \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) dV = \oiint_{S_{\text{int}}} (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \cdot d\bar{\mathbf{S}}, \quad (426)$$

onde a superfície \bar{S}_{int} , conforme a figura, é uma superfície fechada que recobre qualquer superfície S onde haja distribuições superficiais de correntes.

Desmembrando a integral Sint nas devidas parcelas conforme figura anterior, temos:

$$\iiint_{V_\infty} \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) dV = \iint_S (\mathbf{A}_1 \times \mathbf{H}_1) \cdot d\bar{\mathbf{S}}_1 + \iint_S (\mathbf{A}_2 \times \mathbf{H}_2) \cdot d\bar{\mathbf{S}}_2 \quad (427)$$

ou

$$\iiint_{V_\infty} \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) dV = \iint_S (\mathbf{A}_1 \times \mathbf{H}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\bar{S}_1 - \iint_S (\mathbf{A}_2 \times \mathbf{H}_2) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\bar{S}_2 \quad (428)$$

se observarmos que \mathbf{S}_1 e \mathbf{S}_2 têm o mesmo unitário normal com sinal invertido ($\mathbf{S}_1 = \mathbf{nS}$ e $\mathbf{S}_2 = -\mathbf{nS}$). A equação (428) pode ser transformada se consideramos a propriedade $(\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{H} \times \hat{\mathbf{n}}) = -\mathbf{A} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H})$.

$$\iiint_{V_\infty} \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) dV = -\iint_S \mathbf{A}_1 \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_1) dS + \iint_S \mathbf{A}_2 \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_2) dS \quad (429)$$

ou

$$\iiint_{V_\infty} \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) dV = \iint_S \mathbf{A} \cdot [\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)] dS = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{k} dS \quad (430)$$

Substituindo esta equação em (424) e incorporando a \mathbf{j} as eventuais densidades lineares \mathbf{k} , ficamos com

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint_{V_\infty} \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} dV, \quad (431)$$

a qual nos fornece a energia magnética total de todo o espaço em função do potencial vetor e da densidade de corrente de distribuições limitadas. Essa equação é semelhante àquela obtida para a energia eletrostática:

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_{V_\infty} \phi \rho dV. \quad (432)$$

Indutância

Se consideramos n condutores, podemos escrever para o potencial vetor \mathbf{A}_i , criado no elemento de volume dV_i , por todas correntes do conjunto de n condutores

$$\mathbf{A}_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{j=1}^n \iiint_{V_j} \frac{\mathbf{j}_j dV_j}{r_{ij}} \quad i = 1, \dots, n, \quad (433)$$

Assim, a energia magnetostática para este sistema é

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \iiint_{V_i} \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{j}_i dV_i, \quad (434)$$

Se substituirmos a expressão de \mathbf{A}_i ,

$$W_m = \frac{\mu_0}{8\pi} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \iiint_{V_i} \iiint_{V_j} \frac{\mathbf{j}_j \cdot \mathbf{j}_i}{r_{ij}} dV_i dV_j, \quad (435)$$

Esta é a energia magnetostática total nos condutores, em termos das correntes que neles fluem. Para simplificar a aparência desta equação, sejam:

i) A corrente total I_i que flui pelo condutor i dada por

$$I_i = \iint_{S_i} \mathbf{j}_i \cdot d\mathbf{S}_i \quad i = 1, \dots, n, \quad (436)$$

ii) O termo

$$L_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_i I_j}{I_i I_j} \iiint_{V_i} \iiint_{V_j} \frac{\mathbf{j}_j \cdot \mathbf{j}_i}{r_{ij}} dV_i dV_j \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (437)$$

Assim, podemos escrever a energia na forma:

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n L_{ij} I_i I_j, \quad (438)$$

A expressão (437) é a definição de indutância ou coeficientes de indução. Quando $i=j$, temos a indutância própria ou auto-indutância; quando i é diferente de j , temos a indutância mútua. Este parâmetro, como no caso da capacitância e

da resistência depende somente da geometria do material e de suas propriedades físicas. No caso de haver somente um condutor, a expressão (438) se resume a:

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2. \quad (439)$$

4.8 Força Magnetostática

Da expressão de densidade de força eletromagnética, de Lorentz,

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (440)$$

reduz na magnetostática a

$$\mathbf{f}_m = \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (441)$$

A parte magnética da força de Lorentz é, pois, a força magnetostática,

$$\mathbf{F}_m = \iiint_v \mathbf{j} \times \mathbf{B} dv. \quad (442)$$

Se as correntes forem lineares, além de fechadas elas serão também uniformes (eq. da continuidade). Para essas correntes,

$$\mathbf{F}_m = I \oint_C d\mathbf{l} \times \mathbf{B}. \quad (443)$$

Para uma partícula puntiforme de carga q , dotada de velocidade \mathbf{v} num meio com uma densidade de fluxo magnético \mathbf{B} , a parte magnética da força de Lorentz é a segunda parcela da equação (440):

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (444)$$

A lei de Biot-Savart,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV', \quad (445)$$

nos dá o campo \mathbf{B} num ponto \mathbf{r} , devido a uma distribuição de corrente \mathbf{j} num volume V . Substituindo essa expressão na equação (442), é possível achar a força magnetostática que uma distribuição de correntes $\mathbf{j}' = \mathbf{j}(\mathbf{r}')$, de um volume V' , exerce sobre outra distribuição $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$, de um volume V ,

$$\mathbf{F}_m = \iiint_V \mathbf{j} \times \mathbf{B} dV = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \iiint_{V'} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \left[\mathbf{j}'(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] dV' dV. \quad (446)$$

É possível mostrar que essa equação resume-se a (maiores detalhes consulte livro da Annita, pg. 311):

$$\mathbf{F}_m = -\frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \iiint_{V'} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}'(\mathbf{r}') \left[\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] dV' dV. \quad (447)$$

Se intercambiamos as variáveis com linha e sem linha, essa força troca de sinal. Mas esse intercâmbio significa trocarmos a força que a distribuição de V' exerce sobre a que está em V , pela que esta, em V , exerce sobre aquela em V' . Concluimos que neste caso, a força magnetostática obedece à terceira lei de Newton. Isto não se verifica para o caso de variação no tempo!!

5. A Quase-Estática

A transição da estática para a dinâmica pode ser intercalada pelos fenômenos lentos quanto à variação no tempo. A razão disto está em que, quando as grandezas eletromagnéticas variam lentamente com o tempo, o campo apresenta semelhanças essenciais com o estático, tanto que toma o nome de quase-estática, e não de quase-dinâmico.

5.1 As Equações Fundamentais da Quase-Estática

Mais uma vez voltemos aos nossos postulados, as Equações de Maxwell, constitutivas e da força de Lorentz:

$\nabla \times \mathbf{E} + \partial \mathbf{B} / \partial t = 0$	(448)	$\nabla \times \mathbf{H} - \partial \mathbf{D} / \partial t = \mathbf{j}$	(449)		
$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	(450)	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	(451)		
$\mathbf{D} = \overset{\Rightarrow}{\varepsilon}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}$	(452)	$\mathbf{B} = \overset{\Rightarrow}{\mu}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}$	(453)	$\mathbf{j} = \overset{\Rightarrow}{\lambda}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}$	(454)

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (455)$$

e comecemos por definir variações lentas e rápidas no tempo.

Campo eletromagnético monocromático é aquele que depende do tempo segundo uma função harmônica. Isto é:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \phi_r(\mathbf{r}) (a \cos wt + b \sin wt) \quad (456)$$

onde a , b e w são constantes. O escalar positivo w é a frequência angular, ou simplesmente, frequência do campo. O limite $w = 0$ torna estático o campo variável. Como a função do tempo é periódica, repetindo-se a cada intervalo 2π , chama-se período ao intervalo de tempo T em que $wT = 2\pi$, isto é:

$$T \equiv \frac{2\pi}{w} \quad (457)$$

O inverso do período é a frequência linear,

$$f \equiv \frac{1}{T} = \frac{w}{2\pi} \quad (458)$$

A frequência angular é portanto,

$$w = 2\pi f \quad (459)$$

Ambas as frequências são dadas em s^{-1} . No caso da frequência linear dá-se o nome ao inverso do segundo de Hertz, cujo símbolo é Hz. Sendo as equações que envolvem os vetores do campo lineares, é mais conveniente escrever as componentes monocromáticas na forma complexa:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \phi_r(\mathbf{r}) e^{i\omega t}, \quad (460)$$

onde $i = (-1)^{1/2}$. Nesta forma, as equações diferenciais dos vetores do campo se simplificam, já que tanto as derivadas da exponencial, como as integrais, de qualquer ordem, repetem a própria função exponencial.

Seja então, o campo elétrico monocromático,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_r(\mathbf{r}) e^{i\omega t}. \quad (461)$$

Num meio de permissividade ϵ , o vetor deslocamento ou densidade de fluxo elétrico \mathbf{D} ,

$$\frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = i\omega \epsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (462)$$

Se a condutividade do meio for λ , a lei Ohm pontual dará a corrente de condução \mathbf{j} ,

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \lambda \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (463)$$

Nessas condições, a lei de Ampère generalizada se escreve:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t = (\lambda + i\omega \epsilon) \mathbf{E}. \quad (464)$$

A definição de variação lenta do campo com o tempo, isto é, de frequência baixa do campo monocromático, depende portanto, da relação entre os fatores λ e $\omega \epsilon$,

$$\lambda \gg \omega \epsilon \quad \Rightarrow \quad \omega \ll \lambda / \epsilon. \quad (465)$$

Esta equação é equivalente a dizer que a variação é lenta no tempo quando a corrente de deslocamento é desprezível em relação à corrente de condução:

$$|\partial \mathbf{D} / \partial t|_{\max} \ll |\mathbf{j}|_{\max}. \quad (466)$$

Assim, podemos dizer que os campos quase-estáticos são campos que resultam de admitirmos, nas equações de Maxwell, variações temporais que acoplem os campos elétrico e magnético pela lei de Faraday pontual, mas não pela lei de Ampère generalizada, isto é, sem o termo relativo à densidade de corrente de deslocamento. As outras equações continuam idênticas, com os campos variando com o ponto como antes e agora também com o tempo.

Assim, as equações fundamentais da quase-estática são:

$\nabla \times \mathbf{E} + \partial \mathbf{B} / \partial t = 0$	(467)	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}$	(468)		
$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	(469)	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	(470)		
$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$	(471)	$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$	(472)	$\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}$	(473)
$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$			(474)		

À equação (468), daremos o nome de lei de *Ampère pontual da quase-estática*.

A limitação (465) ou (466), do ponto de vista pontual é a única limitação da quase-estática. Entretanto, *na forma integral, as equações descrevem o comportamento do campo num ponto do espaço como resultado do comportamento das fontes em regiões diversas, envolvendo o ponto ou não, próximas dele ou não*. Se o comportamento das fontes variar com o tempo, então, a menos que a informação sobre tais mudanças se propague pelo espaço com velocidade infinita, o observador num ponto só poderá saber da nova situação algum tempo depois de ela se haver estabelecido em outro ponto. Assim, se o campo for quase-estático, variar lentamente com o tempo, a percepção das variações temporais deverá dar-se quase instantaneamente. O

observador deverá detectar, em cada instante, o comportamento das fontes praticamente naquele mesmo instante. Obviamente, isto só será possível se a distância entre o observador e a fonte não for demasiadamente longa. Se ela for grande, não se poderá desprezar o atraso entre os instantes da emissão e recepção dos sinais de mudanças. Vejamos como definir essa distância.

Suponha que os campos além de terem variações harmônicas no tempo, tenham também variações harmônicas no espaço. Assim, podemos escrever a parte espacial de (460) como,

$$\phi_r(\mathbf{r}) = \phi_0 e^{-i\mathbf{wz}/v}, \quad (475)$$

onde Φ_0 , w e v são constantes, w é como antes a velocidade angular e v a velocidade de propagação da informação (onda) da fonte ao observador. Como esta parte é também periódica, se repetindo a cada intervalo de 2π , denominamos de comprimento de onda à distância ℓ em que $w\ell/v = 2\pi$, ou seja,

$$\ell \equiv 2\pi v / w. \quad (476)$$

ou

$$\ell \equiv vT = v/f. \quad (477)$$

Com a definição de comprimento de onda, a equação (475) torna-se:

$$\phi_r(\mathbf{r}) = \phi_0 e^{-i2\pi z/\ell}, \quad (478)$$

e isto dá, na equação (460),

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \phi_0 e^{-i2\pi z/\ell} e^{i\omega t} = \phi_0 e^{i(\omega t - 2\pi z/\ell)} = \phi_0 e^{i2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\ell}\right)}. \quad (479)$$

Fica evidente desta equação que, para podermos desprezar a defasagem entre o comportamento do campo no ponto z , onde está o observador, e seu comportamento no ponto 0 , onde se encontra a fonte, a distância z entre ambos deve ser muito menor do que o comprimento de onda ℓ :

$$z \ll \ell. \quad (480)$$

Com essa condição, podemos agora resumir as condições da quase-estática:

- i)* A corrente de deslocamento é desprezível diante da corrente de condução, $|\partial\mathbf{D}/\partial t|_{\max} \ll |\mathbf{j}|_{\max}$.
- ii)* A distância máxima entre as fontes e o observador é muito menor do que o comprimento de onda do campo, $z \ll \ell$.

Em termos de frequência, considera-se como campos quase-estáticos aqueles em que a frequência não supere a faixa de ondas de rádio, onde $\omega \sim 10^7 \text{ S}^{-1}$, e $\ell \sim 10^2 \text{ m}$.

5.2 Os Potenciais de Distribuições de Cargas e Correntes

A lei de Gauss na forma diferencial do magnetismo,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (481)$$

não sofreu alterações na passagem da magnetostática para a quase-estática. Assim, podemos continuar com o potencial vetor \mathbf{A} , dado pela definição

$$\mathbf{B} \equiv \nabla \times \mathbf{A}, \quad (482)$$

agora também variável no tempo. A lei de Faraday em forma diferencial, para a quase-estática, é:

$$\nabla \times \mathbf{E} + \partial \mathbf{B} / \partial t = 0. \quad (483)$$

Substituindo \mathbf{B} pela equação (482),

$$\nabla \times \mathbf{E} + \partial \nabla \times \mathbf{A} / \partial t = \nabla \times (\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t) = 0. \quad (484)$$

Como o rotacional do gradiente de qualquer função escalar é nulo, podemos definir a quantidade entre parêntese como sendo o potencial escalar quase-estático e escrever:

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \partial \mathbf{A} / \partial t. \quad (485)$$

Em face da arbitrariedade dos potenciais, podemos em geral escolhê-los de acordo com as nossas necessidades. Na quase-estática, como na magnetostática, veremos que a escolha mais conveniente é ainda a condição de Coulomb:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (486)$$

Para isto, considere os meios homogêneos e lei de Gauss na forma diferencial:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}. \quad (487)$$

Substituindo o campo elétrico pela sua expressão (485), temos:

$$\nabla \cdot (-\nabla\phi - \partial\mathbf{A}/\partial t) = -(\nabla \cdot \nabla\phi + \partial\nabla \cdot \mathbf{A}/\partial t) = \frac{\rho}{\varepsilon}. \quad (488)$$

Observando a condição de Coulomb e o fato de que a divergência do gradiente é o Laplaciano, temos,

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}, \quad (489)$$

a qual é a equação de Poisson, tal como encontramos na eletrostática, agora com a diferença de que as quantidades envolvidas variam também com o tempo. Por isso, voltamos a obter a solução para o potencial escalar, acrescida da dependência temporal:

$$\phi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_v \frac{\rho(\mathbf{r}',t)dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} . \quad (490)$$

Quanto ao potencial vetor, as duas equações de Maxwell que envolvem apenas campo magnético são iguais às da magnetostática, $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}$ e $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, a ligação do potencial vetor com a densidade de fluxo magnético permaneceu inalterada, e a condição de Coulomb é a mesma de antes. Logo, o potencial vetor obedece à equação de Poisson, e sua solução é como antes a mesma, agora acrescida da variação temporal.

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_v \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t)dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} . \quad (491)$$

As equações (489) a (491), dizem-nos que, do ponto de vista espacial, os potenciais quase-estáticos comportam-se da mesma forma que os estáticos. Uma pequena variação na fonte em \mathbf{r}' , no instante de tempo t , será vista pelo observador em \mathbf{r} , no mesmo instante de tempo. Isto equivale obviamente a desprezar o tempo de atraso. Deve ter agora ficado clara a razão do nome quase-estático dado ao campo lentamente variável.

5.3 Os Campos de Distribuições de Cargas e Correntes

De forma análoga à magnetostática, a densidade de fluxo magnético pode ser obtida através do rotacional do potencial vetor magnético \mathbf{A} , o qual tem a mesma expressão que na magnetostática acrescida da dependência temporal. Logo, a densidade de fluxo \mathbf{B} também terá a mesma expressão que aquela da magnetostática acrescida da variação temporal:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_v \mathbf{j}(\mathbf{r}',t) \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' . \quad (492)$$

Na determinação do campo elétrico, devemos levar em conta sua nova relação [eq. (485)] com os potenciais. A primeira parcela daquela equação, o negativo do gradiente do potencial escalar elétrico, vai dar, é claro, a mesma lei de Coulomb da eletrostática, aqui quase-estática. A segunda parcela decorre imediatamente do potencial vetor, pois a derivada no tempo só afeta o fator \mathbf{j} do integrando. Assim,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_v \rho(\mathbf{r}',t) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' - \frac{\mu}{4\pi} \iiint_v \frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}',t)}{\partial t} \frac{dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} . \quad (493)$$

A primeira destas integrais vem da lei de Gauss da eletricidade, de acordo com a qual uma distribuição de cargas cria um campo elétrico. A segunda é consequência conjunta das leis na forma diferencial de Ampère da quase-estática e de Faraday, já que, pela primeira uma distribuição de correntes produz um campo magnético e, pela segunda, a variação temporal da indução cria um campo elétrico.

5.4 Condutores em Condições Quase-estáticas

A lei de Ampère na forma diferencial não se alterou na passagem da magnetostática à quase-estática. Logo,

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (494)$$

ou seja, que as correntes quase-estáticas são também fechadas. A lei de Faraday, porém, aparece completa,

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \cdot \quad (495)$$

Isto nos leva a ter, agora, não só o campo elétrico aplicado \mathbf{E}_a , relacionado à força eletromotriz aplicada $\boldsymbol{\mathcal{E}}_a$,

$$\mathcal{E}_a \equiv \oint_C \mathbf{E}_a \cdot d\mathbf{l} \quad (496)$$

como também o próprio campo elétrico \mathbf{E} , que se liga à força eletromotriz induzida de acordo com

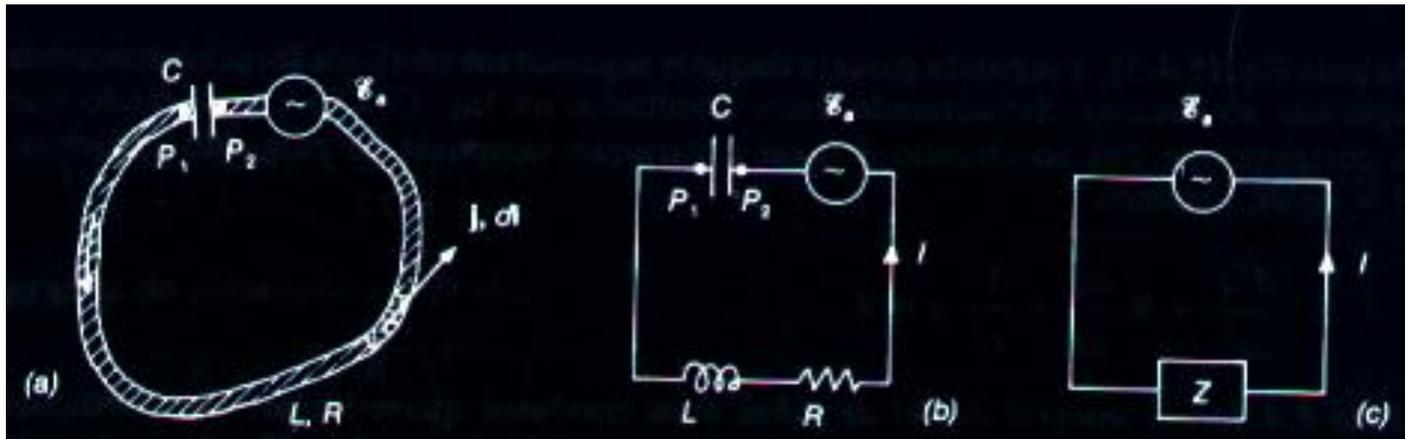
$$\mathcal{E} \equiv \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} . \quad (497)$$

Explicitando os dois campos na forma diferencial da lei de Ohm, continuamos, assim, com

$$\mathbf{j} = \lambda(\mathbf{E} + \mathbf{E}_a) . \quad (498)$$

Vejamos, então, como fica a forma integral da lei de Ohm da quase-estática. Analisemos inicialmente um único condutor quase-linear.

Chamamos circuito LRC série ao condutor quase-linear fechado com auto-indutância, resistência e capacitância, em série. A indutância e a resistência são, em geral, propriedades distribuídas ao longo do condutor. Além disso, ambas existem em todas as seções do circuito (Fig. a). Graficamente, é interessante que as indiquemos como elementos localizados, numa representação esquemática como a da parte b da figura.



A presença de um capacitor implica, obrigatoriamente, que o circuito seja aberto, já que as placas, por definição, devem estar isoladas uma da outra. No entanto, se as dimensões do capacitor forem muito pequenas em relação às do condutor como um todo, condição que vamos impor, poderemos desprezar a abertura decorrente de sua presença e definir o circuito como quase-fechado. De resto, como a corrente de deslocamento, interna às placas, é igual à corrente de condução, e como o campo magnético decorre, indiferentemente, de correntes de condução ou deslocamento, podemos considerar o circuito como sendo fechado para efeitos do campo magnético. Quanto à força eletromotriz aplicada, vamos considerá-la como sendo monocromática, isto é alternada.

Dividindo pela condutividade λ a equação (498) e integrando-a, temos:

$$\int_{P1}^{P2} \frac{\mathbf{j}}{\lambda} \cdot d\mathbf{l} = \int_{P1}^{P2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{P1}^{P2} \mathbf{E}_a \cdot d\mathbf{l} . \quad (499)$$

A integral do primeiro membro pode ser escrita como:

$$\int_{P1}^{P2} \frac{\mathbf{j}}{\lambda} \cdot d\mathbf{l} = \int_{P1}^{P2} jS \frac{d\mathbf{l}}{S\lambda} = I \int_{P1}^{P2} \frac{d\mathbf{l}}{S\lambda} = RI , \quad (500)$$

onde,

$$R = \int_{P1}^{P2} \frac{d\mathbf{l}}{S\lambda} . \quad (501)$$

A primeira integral do lado direito de (499), podemos escrever:

$$\int_{P1}^{P2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{P1}^{P2} \left(-\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{l} = - \int_{P1}^{P2} \left(\nabla\phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{l} = - \int_{P1}^{P2} (\nabla\phi) \cdot d\mathbf{l} - \frac{\partial}{\partial t} \int_{P1}^{P2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} . \quad (502)$$

Observando que $\nabla\phi \cdot d\mathbf{l} = d\phi$, essa equação se resume a:

$$\int_{P1}^{P2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{P1}^{P2} (\nabla\phi) \cdot d\mathbf{l} - \frac{\partial}{\partial t} \int_{P1}^{P2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \approx -(\phi_2 - \phi_1) - \frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\frac{q}{C} - L \frac{\partial I}{\partial t}. \quad (503)$$

A segunda parcela do lado direito de (499), é a força eletromotriz aplicada ao circuito. Assim, substituindo (503), (500) e (496) em (499), obtemos:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}_a. \quad (504)$$

Se derivarmos a equação (504) em relação ao tempo, obtemos:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{d\mathcal{E}_a}{dt}, \quad (505)$$

sujeita às condições iniciais pertinentes. Ambas as equações (504) e (505) são denominadas de forma integral da lei de Ohm. É claro que no caso estático, quando não pode haver capacitância no circuito, da equação (504) obtemos a clássica equação $RI = \mathcal{E}_a$.

5.5 Lei de Faraday e os Condutores Móveis

Nas equações que deduzimos até então, consideramos os meios estacionários, isto é, sem movimento. Entretanto, sabemos da física, que o **movimento de um condutor num campo magnético, mesmo estático, acarreta o surgimento de uma força eletromotriz induzida**, em geral, variável com o tempo.

Já vimos que para um meio em repouso, a lei de Faraday na forma diferencial para um certo campo elétrico induzido \mathbf{E}_r ,

$$\nabla \times \mathbf{E}_r = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (506)$$

produz a lei de Faraday na forma integral

$$\oint_C \mathbf{E}_r \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (507)$$

Como foi dito anteriormente, **a passagem da derivada em relação ao tempo para fora da integral de superfície só foi possível com a hipótese de que a própria superfície não variasse com o tempo**, isto é, estivesse em repouso, donde o índice r agregado ao campo elétrico induzido \mathbf{E} . **A força eletromotriz que aparece no primeiro membro se refere, pois, à variação temporal da indução magnética quando a superfície permanece em repouso, e vamos indicá-la por \mathcal{E}_r** . Assim, podemos reescrever a equação (507) como

$$\varepsilon_r = -\frac{d\Phi_r}{dt} . \quad (508)$$

Suponhamos agora que um condutor quase-linear varie de posição ou de forma na presença de um campo magnético constante. Se \mathbf{v} for a velocidade instantânea com que um seu elemento $d\mathbf{l}$ se desloca na indução \mathbf{B} , **cada partícula carregada**, livre, desse elemento sofrerá uma força de Lorentz dada por

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} . \quad (509)$$

O **conjunto dessas partículas móveis forma uma corrente elétrica**, a qual poderia se ter originado de um campo elétrico da forma:

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{v} \times \mathbf{B} , \quad (510)$$

onde o índice \underline{m} indica o movimento do condutor. Tal campo elétrico exerce sobre a carga puntiforme a mesma força de Lorentz (509), mas pode ser associada a uma força eletromotriz, induzida no elemento de arco condutor, que é dada por

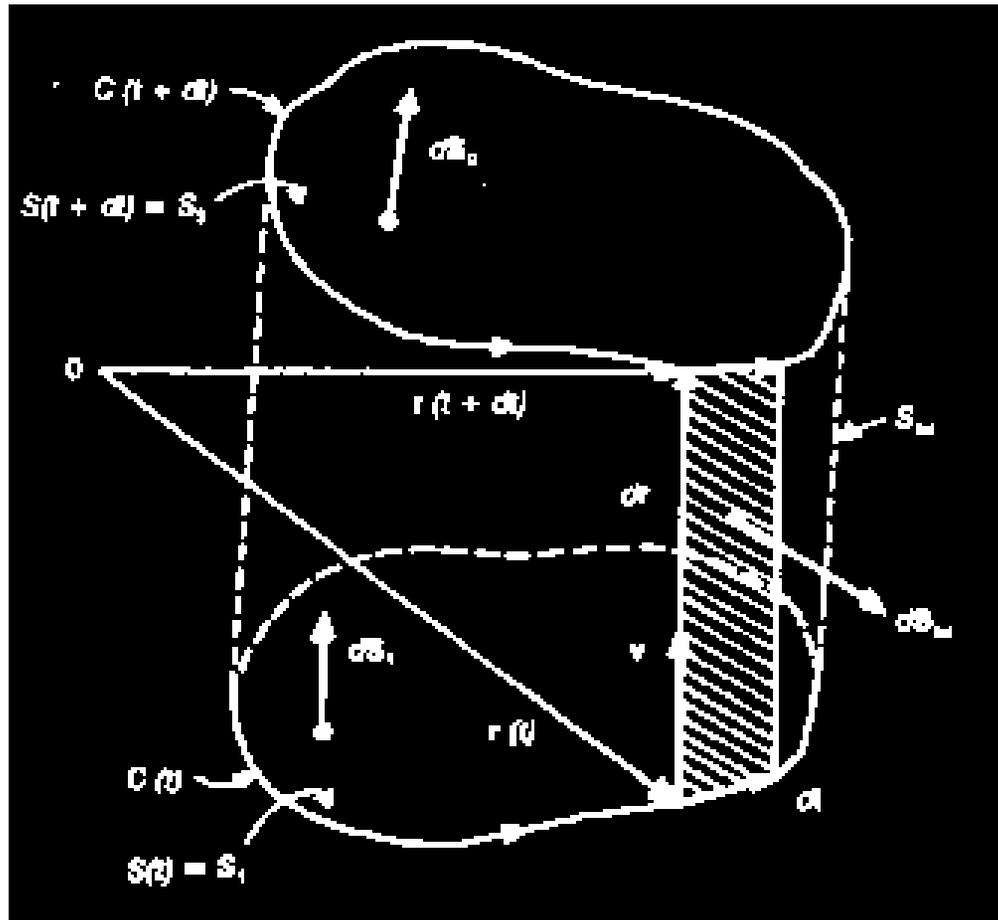
$$d\mathcal{E}_m = \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{l} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} . \quad (511)$$

No condutor todo,

$$\mathcal{E}_m = \int_c (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} . \quad (512)$$

Seja \mathbf{r} o vetor posição instantânea, em relação a uma origem O , do elemento $d\mathbf{l}$ do condutor (veja figura). Como $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$, se o condutor for fechado, a força eletromotriz induzida será

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{dt} \oint_C (d\mathbf{r} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{dt} \oint_C \mathbf{B} \cdot (d\mathbf{l} \times d\mathbf{r}) = \frac{1}{dt} \iint_{S_{\text{lat}}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_{\text{lat}} . \quad (513)$$



Eletromagnetismo – Departamento de Engenharia Elétrica – UFMG

© Prof. João Antônio de Vasconcelos

Como o fluxo de \mathbf{B} através de uma superfície fechada é nulo, e como a orientação de $d\mathbf{S}_1=d\mathbf{S}(t)$ é oposta à convencional para uma superfície fechada, vem

$$-\iint_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_1 + \iint_{S_{\text{lat}}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_{\text{lat}} + \iint_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_2 = 0. \quad (514)$$

Logo, substituindo na equação (513), a integral na superfície lateral em termos das integrais nas superfícies S_1 e S_2 , temos:

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{dt} \iint_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_1 - \frac{1}{dt} \iint_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_2 = \frac{1}{dt} [\Phi(t) - \Phi(t + dt)], \quad (515)$$

ou

$$\mathcal{E}_m = -\frac{d\Phi_m(t)}{dt}. \quad (516)$$

Essa equação é formalmente igual à equação (508). Verificamos, assim, que a variação do fluxo magnético com o tempo induz uma força eletromotriz, quer essa variação de fluxo se deva à variação do campo, com a superfície em repouso, \mathcal{E}_r , quer se deva ao movimento da superfície, na presença de um campo

constante, \mathcal{E}_m . Quando as duas causas estão presentes, superpomos linearmente as forças eletromotrizes parciais,

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_r + \mathcal{E}_m, \quad (517)$$

para obtermos a forma integral da lei de Faraday ampliada,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (518)$$

onde

$$\Phi = \Phi_r + \Phi_m, \quad (519)$$

e donde fica claro que a força eletromotriz se deve à variação do fluxo magnético com o tempo, quaisquer que sejam as causas dessa variação.

Vejamos agora como se escreve a lei de Faraday ampliada na forma diferencial. Seja \mathbf{E} o campo elétrico total induzido devido ao movimento e à variação temporal de \mathbf{B} ,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m + \mathbf{E}_r. \quad (520)$$

Assim, temos

$$\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E}_r + \nabla \times \mathbf{E}_m = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (521)$$

Lembrando a identidade vetorial

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = (\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{v} - (\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{B}, \quad (522)$$

que a divergência de \mathbf{B} é nula e verificando que $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ e $(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{v} = 0$ (prob. 5.5.10), podemos escrever

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{B}. \quad (523)$$

Se observarmos que

$$d\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dt + (d\mathbf{l} \cdot \nabla)\mathbf{B} \Rightarrow \frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \left(\frac{d\mathbf{l}}{dt} \cdot \nabla\right)\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{B}, \quad (524)$$

obtemos, finalmente,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{B}}{dt}. \quad (525)$$

Essa equação é a forma diferencial da lei de Faraday ampliada, isto é, a que leva em conta as duas parcelas, a de repouso e a de movimento.

A Equação de Onda e Suas Soluções

As equações de Maxwell, as relações constitutivas e a força de Lorentz estão apresentadas, em sua forma geral, na tabela abaixo. Tais equações descrevem de maneira completa a teoria eletromagnética clássica. Nota-se que nelas não são incluídas cargas e correntes magnéticas, uma vez que nenhum experimento realizado até o presente momento foi capaz de detectá-las.

$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$		$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	
$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$		$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	
$\mathbf{D} = \bar{\bar{\epsilon}}(\mathbf{r}) \mathbf{E}$	$\mathbf{B} = \bar{\bar{\mu}}(\mathbf{r}) \mathbf{H}$	$\mathbf{j} = \mathbf{j}_i + \bar{\bar{\lambda}}(\mathbf{r}) \mathbf{E}$	$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$

O termo referente à corrente de deslocamento introduzido por Maxwell, além de tornar a formulação do eletromagnetismo mais simétrica, prevê a existência de ondas eletromagnéticas que se propagam sem a necessidade de um meio e longe da presença de fontes.

Dedução das Equações de Onda

O objetivo dessa seção é a dedução das equações de onda e sua solução para alguns casos especiais. Para tal, começa-se por determinar a expressão do laplaciano de ambos os campos, uma vez que busca-se por relações da forma (1).

$$\nabla^2 \mathbf{F} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial t^2} \quad (1)$$

Inicialmente, para se obter a equação de onda vetorial para o campo magnético, calcula-se o rotacional da Lei de Ampère:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \left(\mathbf{j}_i + \lambda \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \quad (2)$$

Aplica-se a propriedade distributiva do rotacional, assumindo-se comutatividade entre as operações espaciais e temporais e considerando meios homogêneos, obtém-se:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{j}_i + \lambda \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial(\nabla \times \mathbf{D})}{\partial t} \quad (3)$$

Pode-se utilizar a Lei de Faraday para simplificar os rotacionais de \mathbf{D} e \mathbf{E} no membro direito, resultando em:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{j}_i - \lambda\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (4)$$

O membro esquerdo de (4) pode ser simplificado pelo uso da seguinte identidade vetorial. Nela, \mathbf{U} representa um vetor qualquer.

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{U} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{U}) - \nabla^2 \mathbf{U} \quad (5)$$

O resultado da aplicação de tal identidade leva à seguinte relação:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H} = -\nabla^2 \mathbf{H} \quad (6)$$

Utilizou-se o fato da divergência do campo magnético ser nula. Combinando os resultados obtidos na Equações (4) e (6), obtém-se:

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{H} - \lambda \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times \mathbf{j}_i} \quad (7)$$

Essa equação é conhecida como a equação de onda vetorial para o campo magnético. Deve-se destacar o fato de que esta equação incorpora três das quatro equações de Maxwell. Desse modo, outra equação, além dessa, é necessária para representação completa da teoria eletromagnética clássica.

O mesmo procedimento pode ser realizado para se deduzir a equação de onda vetorial para o campo elétrico. Inicia-se pela tomada do rotacional da Lei de Faraday:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \quad (8)$$

Utilizando a mesma argumentação apresentada para o campo magnético, pode-se obter:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial(\nabla \times \mathbf{B})}{\partial t} \quad (9)$$

Substituindo-se a Lei de Ampère no membro do lado direito dessa relação e considerando meios homogêneos, obtém-se:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{j}_i + \lambda \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (10)$$

A aplicação da identidade (5) e da Lei de Gauss para o campo elétrico, culmina com a expressão seguinte:

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \lambda \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon} \nabla \rho + \mu \frac{\partial \mathbf{j}_i}{\partial t}} \quad (11)$$

Essa equação é conhecida como equação de onda vetorial para o campo elétrico. De forma análoga à Equação (7), ela contém três das quatro equações de Maxwell.

As relações (7) e (11) são válidas na presença de fontes de corrente e de cargas elétricas. Entretanto, no fenômeno da propagação das ondas eletromagnéticas, os termos referentes às fontes são nulos. As equações de onda na forma vetorial para ambos os campos ficam, então, dadas por:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{E} - \lambda\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= 0 \\ \nabla^2 \mathbf{H} - \lambda\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} &= 0\end{aligned}\tag{12}$$

Os termos de derivada primeira referem-se à atenuação da onda devido à perda de energia para o meio. Por sua vez, os termos de derivada segunda se referem puramente à propagação da onda. Tais afirmações serão embasadas ao se analisar as

soluções para campos harmônicos.

Na ausência de perdas de energia, a condutividade é nula ($\lambda = 0$). Desse modo, o conjunto acima simplifica-se para a equação (13) que é a forma mais simples que uma equação de onda vetorial pode assumir.

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{E} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \mathbf{H} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}\end{aligned}\tag{13}$$

O resultado acima é da forma apresentada em (1). Ao comparar (13) com essa equação, a velocidade de propagação fica determinada pela expressão em (14).

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3,0 \times 10^8 \text{ m/s}\tag{14}$$

O fato da velocidade calculada acima ser igual à velocidade conhecida para a luz não é mera coincidência. A luz é uma onda eletromagnética.

Campos Harmônicos

Uma função harmônica no tempo pode ser escrita como dado pela Equação (15):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cos(\omega t + \phi) = \text{Re}\{(\mathbf{E}_r + j\mathbf{E}_i) e^{j\omega t}\} \quad (15)$$

Fazendo $\mathbf{E}_r + j\mathbf{E}_i = \mathbf{E}(\mathbf{r})$, uma grandeza fasorial complexa, e $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{j\omega t}$, o termo dentro do colchete $\{.\}$ na Equação (15) apresenta a seguinte propriedade:

$$\frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = j\omega \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{j\omega t} = j\omega \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (16)$$

Utilizando-se esse resultado na Equação (12), pode se escrever a seguinte relação para campos harmônicos. Por simplicidade, somente a equação para o campo elétrico será apresentada.

$$\nabla^2 \mathbf{E} = -\mu\epsilon\omega^2 \mathbf{E} + j\omega\mu\lambda \mathbf{E} \quad (17)$$

Motivados pela Equação (11), apresenta-se a definição da grandeza γ , denominada constante de propagação e expressa pela equação (18).

$$\gamma^2 = j\omega\mu(\lambda + j\omega\epsilon) \quad (18)$$

Por conveniência, dá-se nomes distintos para a parte real e imaginária de γ . Essa decomposição está apresentada na equação abaixo:

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (19)$$

O termo α , dominado constante de atenuação, é medido em Np/m. O termo β , denominado constante de fase, é medido em rad/s. Caso a condutividade do meio seja nula, a constante β é dada pela expressão abaixo:

$$\beta^2 = \omega^2 \mu \epsilon \quad (20)$$

No caso geral, α e β são dados, respectivamente, pelas Equações (21) e (22):

$$\alpha = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \left\{ \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda}{\omega \epsilon} \right)^2} - 1 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (21)$$

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \left\{ \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (22)$$

Solução da Equação de Onda para Meios Livres de Perdas e Fontes

Como exemplo de solução da equação de onda, inicialmente será considerado um meio livre de fontes e sem perdas. Isso implica nulidade de termos referentes à presença de

cargas elétricas e condutividade do meio. Sendo assim, pode-se utilizar a equação (17) com condutividade nula ($\lambda = 0$). A equação, então, reduz-se para:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \beta^2 \mathbf{E} = 0 \quad (23)$$

Escolhendo-se um sistema **cartesiano** de coordenadas, a equação (23) pode ser decomposta em três outras, uma para cada eixo coordenado:

$$\begin{aligned} \nabla^2 E_x(x, y, z) + \beta^2 E_x(x, y, z) &= 0 \\ \nabla^2 E_y(x, y, z) + \beta^2 E_y(x, y, z) &= 0 \\ \nabla^2 E_z(x, y, z) + \beta^2 E_z(x, y, z) &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

Deve-se ter em mente que a operação acima somente é válida devido à seguinte propriedade do laplaciano para sistemas cujos vetores base (unitários) são constantes. No caso do sistema cartesiano, tem-se:

$$\nabla^2(U_x\hat{x} + U_y\hat{y} + U_z\hat{z}) = \nabla^2(U_x)\hat{x} + \nabla^2(U_y)\hat{y} + \nabla^2(U_z)\hat{z} \quad (25)$$

Dada a simetria das equações apresentadas em (24), basta solucionar uma delas e o resultado das outras pode ser obtido por simples inspeção. Inicialmente, escreve-se a equação para a componente 'x' expandindo-se o laplaciano:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \beta^2 E_x = 0 \quad (26)$$

A equação acima pode ser resolvida utilizando separação de variáveis. Para tal, supõe-se que a componente 'x' do campo elétrico pode ser escrita como o produto de três funções, cada uma delas dependente somente de uma coordenada espacial:

$$E_x = f(x) g(y) h(z) \quad (27)$$

Substituindo-se (27) em (26) e rearranjando os termos, obtém-se:

$$\frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{1}{h} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = -\beta^2 \quad (28)$$

Uma vez que a soma dos três termos permanece inalterada frente à variação individual de cada uma de suas parcelas, conclui-se que cada um dos termos do membro esquerdo deve ser igual a uma constante:

$$\frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\beta_x^2 \quad (29)$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -\beta_y^2 \quad (30)$$

$$\frac{1}{h} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = -\beta_z^2 \quad (31)$$

$$\beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2 = \beta^2 \quad (32)$$

Essas constantes são chamadas constantes de fase e são determinadas pelo uso das condições de fronteiras. A Equação (32) é conhecida como equação de restrição. Devido

à simetria presente nas Equações acima, somente analisaremos a solução de uma delas. De forma geral, ambas as formas satisfazem à equação (29):

$$f_1(x) = A_1 e^{+j\beta_x x} + B_1 e^{-j\beta_x x} \quad (33)$$

$$f_2(x) = C_1 \cos(\beta_x x) + D_1 \sin(\beta_x x) \quad (34)$$

De forma análoga, as soluções para g e h podem ser escritas como:

$$g_1(y) = A_2 e^{+j\beta_y y} + B_2 e^{-j\beta_y y} \quad (35)$$

$$g_2(y) = C_2 \cos(\beta_y y) + D_2 \sin(\beta_y y) \quad (36)$$

$$h_1(z) = A_3 e^{+j\beta_z z} + B_3 e^{-j\beta_z z} \quad (37)$$

$$h_2(z) = C_3 \cos(\beta_z z) + D_3 \sin(\beta_z z) \quad (38)$$

Equações da forma (33), (35) e (37) apresentam uma interpretação física muito importante: elas representam ondas viajantes. Para que essa interpretação torne-se clara, imagine uma solução da forma (39), obtida pela restauração da variação temporal para um dos componentes da solução.

$$f(x, t) = \cos(\omega t - \beta_x x) \quad (39)$$

Um mesmo ponto dessa função pode ser monitorado fazendo-se o argumento da exponencial igual à uma constante.

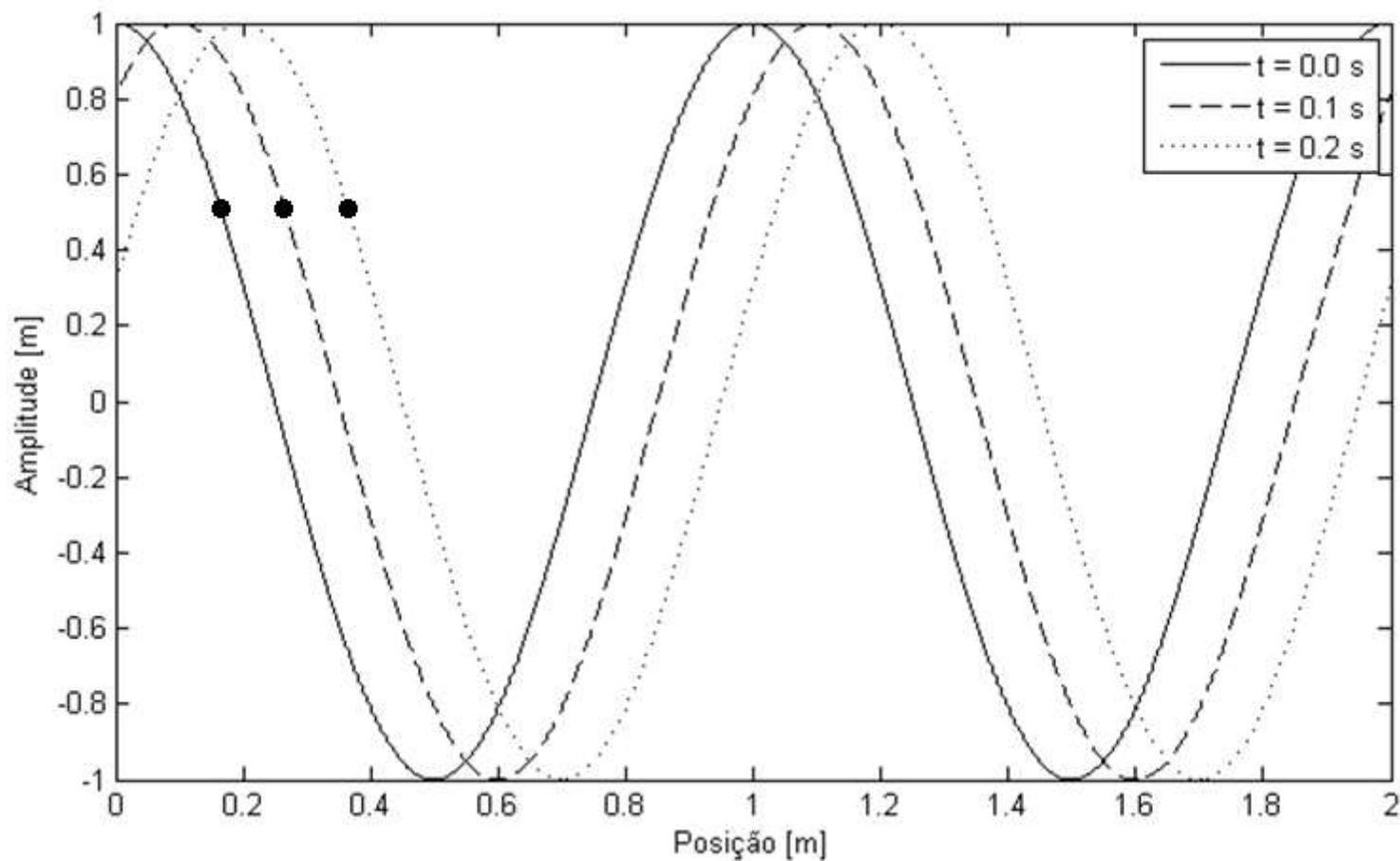
$$\omega t - \beta_x x = C_0 \quad (40)$$

Derivando essa equação em relação ao tempo obtém-se:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta_x} \quad (41)$$

A equação (41) apresenta uma interpretação física muito importante. À medida que a variável temporal torna-se maior, ela representa uma onda viajando no sentido positivo

do eixo de coordenadas. O gráfico abaixo ilustra tal comportamento para uma onda de velocidade 1 m/s e comprimento de onda de 1 m:



Utilizando essa expressão, pode-se reescrever a equação (39) em função da velocidade e do comprimento de onda ‘ λ ’, uma vez que

$$\lambda = v/f$$

ou

$$f = v/\lambda$$

e

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta_x}$$

ou

$$\beta_x = \frac{\omega}{v_x} = \frac{2\pi f}{v_x} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$f(x, t) = \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(v t - x) + \phi\right) \quad (42)$$

Soluções da equação de onda com forma igual a (34), (36) e (38) representam ondas estacionárias. Ondas estacionárias podem ser obtidas pela superposição de duas ondas viajantes em sentidos opostos.

Exemplo de Aplicação

A solução de um problema para uma das componentes pode ser obtida pela aplicação da Equação (27) e escolha da forma adequada para representar f, g e h. Para que isso se torne mais claro, um exemplo é fornecido por meio da apresentação da solução da equação de onda para a componente 'x' para a geometria apresentada na Figura 1.

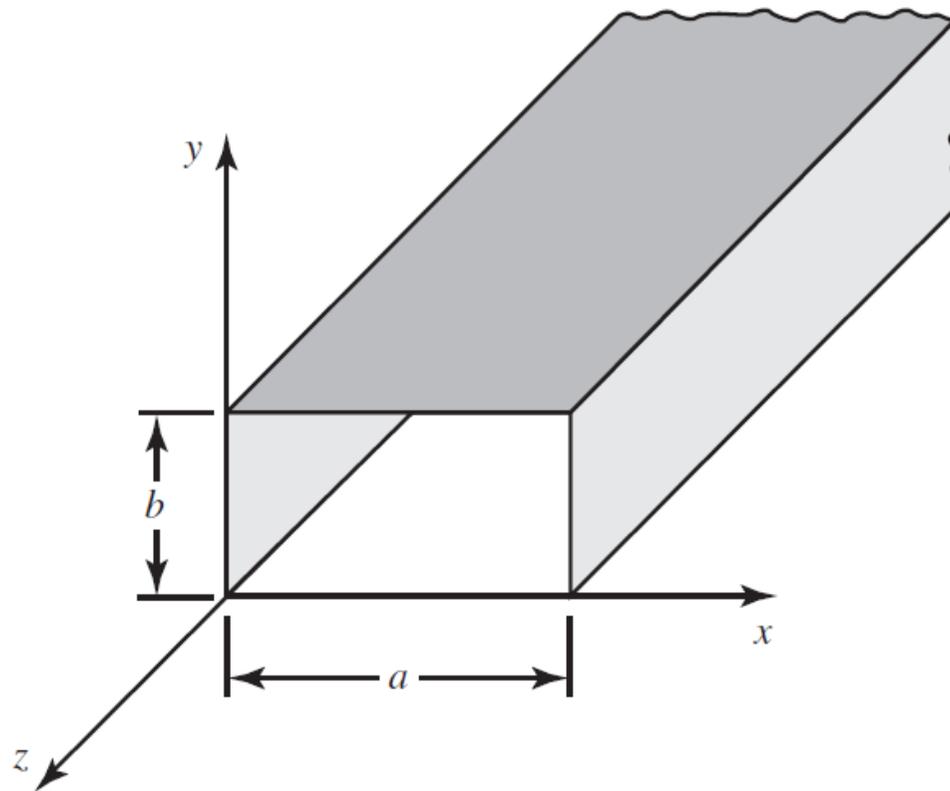


Figura 1- Geometria utilizada no exemplo

Para a geometria apresentada, espera-se que existam ondas estacionárias ao longo das direções 'x' e 'y'. Portanto, ondas viajantes devem ser obtidas na direção 'z'. A expressão geral é dada em (43).

$$E_x(x, y, z) = [C_1 \cos(\beta_x x) + D_1 \sin(\beta_x x)][C_2 \cos(\beta_y y) + D_2 \sin(\beta_y y)][A_3 e^{-j\beta_z z} + B_3 e^{j\beta_z z}] \quad (43)$$

Solução da Equação de Onda para Meios com Perdas e sem Fontes

Considera-se, agora, o caso de uma onda afastada de fontes porém em um meio com presença de perdas. Diferentemente do que foi feito na Equação (23), não mais considera-se $\lambda = 0$. Portanto, a equação de onda vetorial para o campo elétrico torna-se:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \gamma^2 \mathbf{E} = 0 \quad (44)$$

Aplicando argumentos similares aos da seção anterior, essa equação vetorial pode ser decomposta nas seguintes equações:

$$\begin{aligned}\nabla^2 E_x(x, y, z) - \gamma^2 E_x(x, y, z) &= 0 \\ \nabla^2 E_y(x, y, z) - \gamma^2 E_y(x, y, z) &= 0 \\ \nabla^2 E_z(x, y, z) - \gamma^2 E_z(x, y, z) &= 0\end{aligned}\tag{45}$$

Devido à simetria dessas equações, ao se resolver uma delas, as outras podem ser solucionadas por simples inspeção. Utilizando o procedimento de separação de variáveis e um procedimento completamente análogo ao realizado na seção anterior, obtém-se:

$$\frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \gamma_x^2\tag{46}$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \gamma_y^2\tag{47}$$

$$\frac{1}{h} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \gamma_z^2 \quad (48)$$

$$\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2 = \gamma^2 \quad (49)$$

Antes de resolver uma das equações acima, deve-se relembrar o conceito de seno e cosseno hiperbólico. Suas definições estão apresentadas nas equações (50) e (51).

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (50)$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (51)$$

A solução geral de uma das equações apresentadas em (46) é dada pelas expressões abaixo:

$$f(x) = A_1 e^{+\gamma x} + B_1 e^{-\gamma x} \quad (52)$$

$$f(x) = C_1 \cosh(\gamma x) + D_1 \sinh(\gamma x) \quad (53)$$

Ambas as formas apresentam termos que não são funções harmônicas puras. Os termos exponenciais com argumentos reais significam que a amplitude da onda decai ao se propagar pelo meio ($e^{\gamma x} = e^{(\alpha+j\beta)x} = e^{\alpha x} e^{j\beta x}$).

De forma análoga, as soluções para as equações g e h estão apresentadas abaixo:

$$g_1(y) = A_2 e^{+j\gamma_y y} + B_2 e^{-j\gamma_y y} \quad (54)$$

$$g_2(y) = C_2 \cos(\gamma_y y) + D_2 \sen(\gamma_y y) \quad (55)$$

$$h_1(z) = A_3 e^{+j\gamma_z z} + B_3 e^{-j\gamma_z z} \quad (56)$$

$$h_2(z) = C_3 \cos(\gamma_z z) + D_3 \sen(\gamma_z z) \quad (57)$$

Wave type	Wave functions	Zeroes of wave functions	Infinities of wave functions
Traveling waves	$e^{-j\beta x}$ for $+x$ travel $e^{+j\beta x}$ for $-x$ travel	$\beta x \rightarrow -j\infty$ $\beta x \rightarrow +j\infty$	$\beta x \rightarrow +j\infty$ $\beta x \rightarrow -j\infty$
Standing waves	$\cos(\beta x)$ for $\pm x$ $\sin(\beta x)$ for $\pm x$	$\beta x = \pm(n + \frac{1}{2})\pi$ $\beta x = \pm n\pi$ $n = 0, 1, 2, \dots$	$\beta x \rightarrow \pm j\infty$ $\beta x \rightarrow \pm j\infty$
Evanescent waves	$e^{-\alpha x}$ for $+x$ $e^{+\alpha x}$ for $-x$ $\cosh(\alpha x)$ for $\pm x$ $\sinh(\alpha x)$ for $\pm x$	$\alpha x \rightarrow +\infty$ $\alpha x \rightarrow -\infty$ $\alpha x = \pm j(n + \frac{1}{2})\pi$ $\alpha x = \pm jn\pi$ $n = 0, 1, 2, \dots$	$\alpha x \rightarrow -\infty$ $\alpha x \rightarrow +\infty$ $\alpha x \rightarrow \pm\infty$ $\alpha x \rightarrow \pm\infty$
Attenuating traveling waves	$e^{-\gamma x} = e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}$ for $+x$ travel $e^{+\gamma x} = e^{+\alpha x} e^{+j\beta x}$ for $-x$ travel	$\gamma x \rightarrow +\infty$ $\gamma x \rightarrow -\infty$	$\gamma x \rightarrow -\infty$ $\gamma x \rightarrow +\infty$
Attenuating standing waves	$\cos(\gamma x) = \cos(\alpha x) \cosh(\beta x) - j \sin(\alpha x) \sinh(\beta x)$ for $\pm x$ $\sin(\gamma x) = \sin(\alpha x) \cosh(\beta x) + j \cos(\alpha x) \sinh(\beta x)$ for $\pm x$	$\gamma x = \pm j(n + \frac{1}{2})\pi$ $\gamma x = \pm jn\pi$ $n = 0, 1, 2, \dots$	$\gamma x \rightarrow \pm j\infty$ $\gamma x \rightarrow \pm j\infty$

Propagação e Irradiação de Ondas Eletromagnéticas

A análise das equações de Maxwell sobre condições de dinâmica levou à dedução de equações de ondas vetoriais para os campos elétrico e magnético. O objetivo dessa apresentação é analisar os fenômenos de propagação e irradiação relacionados a essas entidades.

Modos Eletromagnéticos Transversais

Um modo eletromagnético corresponde a uma configuração particular de campo eletromagnético que satisfaz às equações de Maxwell, às equações de onda e às condições de contorno.

Denomina-se de modo eletromagnético transversal (TEM) aqueles modos cujos campos elétricos e magnéticos estão em todos os instantes do tempo contidos em um mesmo plano local denominado plano equifásico. Deve-se destacar que não existe necessidade

de que planos equifásicos representados por instantes distintos no tempo sejam paralelos. Essa situação é ilustrada pela Figura 1.

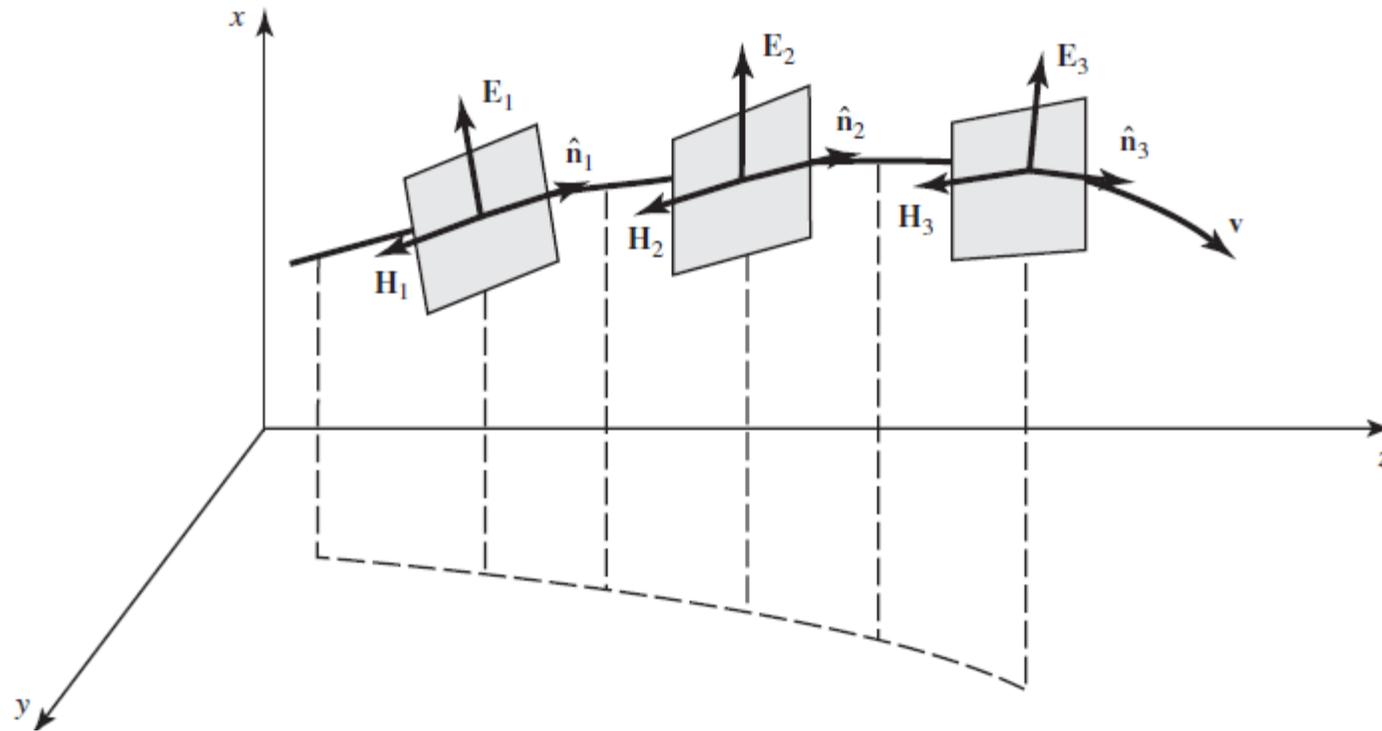


Figura 1 Exemplo de modo eletromagnético transversal - (Balanis, 2012)

Caso os planos equifásicos de uma onda eletromagnética sejam paralelos entre si, ela recebe a classificação de “onda plana”. Se a amplitude dos campos se mantiver constante

sobre os pontos do plano equifásico, isto é, se os campos não variarem com as coordenadas deste plano, ela é dita “onda plana uniforme”. Esse último caso está ilustrado na Figura 2.

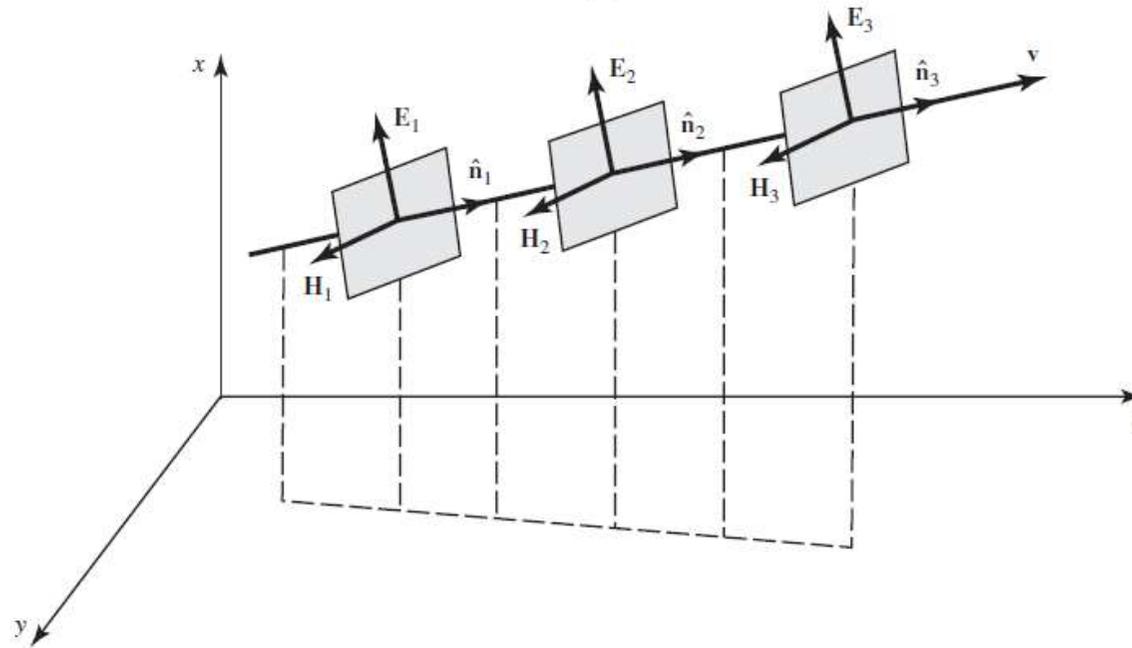


Figura 2 Exemplo de onda plana uniforme - (Balanis, 2012)

Ondas Planas Uniformes na Ausência de Perdas em Meio Ilimitado

Inicialmente, para que se possa estudar as configurações dos campos na situação especial da propagação de uma onda TEM em meios ilimitados e sem perdas, assume-se o caso particular em que a onda apresenta velocidade somente na direção “z” do eixo de coordenada e que a única componente não nula do campo elétrico está associada ao eixo “x”. Essa configuração particular está apresentada na Figura 3 e será utilizada como base para que, posteriormente, apresente-se o caso geral.

O campo elétrico, para o caso estudado, pode ser, então, escrito como expresso em (1).

$$\mathbf{E} = E_x(z)\hat{\mathbf{x}} \quad (1)$$

Desse modo, a equação de onda para a componente ‘x’ do campo elétrico, conforme visto na aula anterior, se reduz para a Equação (2).

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \beta^2 E_x = \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \beta^2 E_x = 0 \quad (2)$$

função das coordenadas “x” e “y”, tem-se, então, a relação indicada na Equação (4).

$$\beta = \beta_z \quad (4)$$

Para que o campo magnético possa ser determinado, são apresentados dois caminhos distintos. O primeiro deles consiste em aplicar a Lei de Faraday como indicado pela Equação (5). Uma vez que pela definição de onda plana uniforme, o campo não é função das variáveis que constituem o plano equifásico, o campo magnético, após a expansão do produto vetorial, é dado pela Equação (6).

$$\mathbf{H} = \frac{j}{\omega\mu} \nabla \times \mathbf{E} = \frac{j}{\omega\mu} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \frac{j}{\omega\mu} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{\mu/\epsilon}} (E_0^+ e^{-j\beta z} - E_0^- e^{+j\beta z}) \hat{\mathbf{y}} \quad (6)$$

Da equação acima pode-se identificar dois termos indicados pelas Equações (7) e (8).

$$H_y^+ = \frac{E_x^+}{\sqrt{\mu/\epsilon}} \quad (7)$$

$$H_y^- = -\frac{E_x^-}{\sqrt{\mu/\epsilon}} \quad (8)$$

A relação entre os campos elétricos e magnéticos é chamada de impedância de onda e é dada pela Equação (9).

$$Z_w = \frac{E_x^+}{H_y^+} = -\frac{E_x^-}{H_y^-} = \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (9)$$

Ao aplicar os termos identificados nas Equações (7), (8) e (9) na Equação (6), obtém-se o resultado expresso pela Equação (10).

$$H_y = \frac{1}{\eta} (E_x^+ - E_x^-) \quad (10)$$

Em toda essa discussão, utilizou-se uma direção para o campo elétrico e um eixo de propagação particulares. Todavia, processo semelhante pode ser realizado para se obter as relações para todas as possibilidades.

Outra forma de se determinar o campo magnético é apresentada abaixo. Inicialmente, pode-se determinar a orientação do campo magnético pela utilização do vetor de Poynting, cuja expressão é mostrada na Equação (11), que aponta para a direção de

propagação da onda.

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (11)$$

Uma regra prática para se determinar a direção do campo magnético é dada pelos seguintes passos:

- 1) Alinhe os dedos de sua mão direita com a direção do campo elétrico;
- 2) Mova seu polegar de forma que ele coincida com a direção de propagação da onda;
- 3) Dobre os demais dedos 90°. A direção apontada será coincidente com a orientação do campo magnético.

Uma vez que o campo magnético é uma grandeza vetorial, falta determinar sua magnitude. Isso pode ser alcançado utilizando as relações apresentadas em (10).

Princípios Básicos de Irradiação

Para que se possa apresentar os princípios básicos de irradiação, assume-se a existência de um filamento elementar, como ilustrado pela Figura 4, e cuja corrente é dada pela Equação (12).

$$I = I_0 \cos(\omega t) \quad (12)$$

O objetivo desta seção é calcular o campo elétrico e magnético que é gerado por essa configuração particular de correntes.

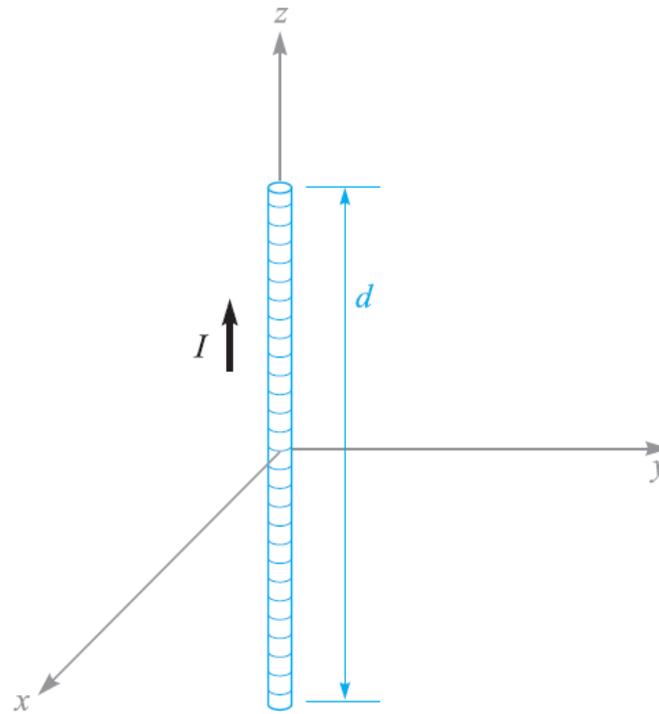


Figura 4 Filamento elementar analisado - (Hayt, 2011)

Para tal, faz-se uso do potencial vetor magnético, cujas expressões estão apresentadas na Tabela 1 para diferentes casos particulares.

Tabela 1- Expressões matemáticas para o potencial vetor magnético

Caso Particular	Expressão Matemática
Magnetostática	$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{ \mathbf{r} - \mathbf{r}' } dV'$
Quase-estática	$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t)}{ \mathbf{r} - \mathbf{r}' } dV'$
Eletrodinâmica	$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')}{ \mathbf{r} - \mathbf{r}' } dV'$

Na última equação, deve-se notar que o vetor potencial magnético calculado para o tempo t é função do estado da fonte de corrente em um tempo t' . A relação entre essas duas variáveis está expressa na Equação (13).

$$t' = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v} \quad (13)$$

Uma vez que se trabalha com o fenômeno de irradiação e, conseqüentemente, com a eletrodinâmica, a última equação da Tabela 1 deve ser utilizada para a solução do problema estudado. Além disso, uma vez que se trabalha com um filamento elementar, a integral reduz-se para o resultado apresentado na Equação (14).

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{I}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot d\mathbf{l}' \quad (14)$$

Nessa equação, $d\mathbf{l}'$ representa um vetor de comprimento infinitesimal alinhado com a fonte de corrente. Assumindo-se que o filamento analisado é elementar e que a corrente em sua extensão não é função das coordenadas espaciais, então o resultado da integral em (14) se reduz à Equação (15).

$$\mathbf{A} = \frac{\mu[I]d}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \hat{\mathbf{z}} \quad (15)$$

O cálculo dos campos \mathbf{E} e \mathbf{H} , em pontos distantes da fonte, fica facilitado se uma transformação de coordenadas cartesianas para coordenadas esféricas é realizada. Para isto, troca-se a variável $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, módulo da distância entre fonte e ponto de observação, por r , quando o filamento estiver localizado na origem do sistema de coordenadas, situação em que $\mathbf{r}' = \mathbf{0}$. Desse modo a equação (15) fica dada por (16).

$$\mathbf{A} = \frac{\mu[I]d}{4\pi r} \hat{\mathbf{z}} \quad (16)$$

A notação $[I]$ representa a avaliação da função (12) no tempo t' . Para garantir a clareza do texto, isso está apresentado na equação (17).

$$[I] = I_0 \cos \left(\omega \left(t - \frac{r}{v} \right) \right) = \Re \left\{ I_0 e^{-\frac{j\omega r}{v}} e^{j\omega t} \right\} \quad (17)$$

Aplicando-se a transformação fasorial, à equação (17) obtém-se o resultado apresentado em (18).

$$I_s(r) = I_0 e^{-\frac{j\omega r}{v}} \quad (18)$$

Para o caso de campos harmônicos no tempo, a equação (16) permite obter o componente 'z' do fasor potencial magnético (A_{zs}), expresso pela equação (19).

$$A_{zs} = \frac{\mu d}{4\pi r} I_0 e^{-\frac{j\omega r}{v}} \quad (19)$$

Além disso, deve-se determinar o valor dos componentes nas direções θ e ϕ (polar e azimutal). Isso pode ser visto na Figura 5.

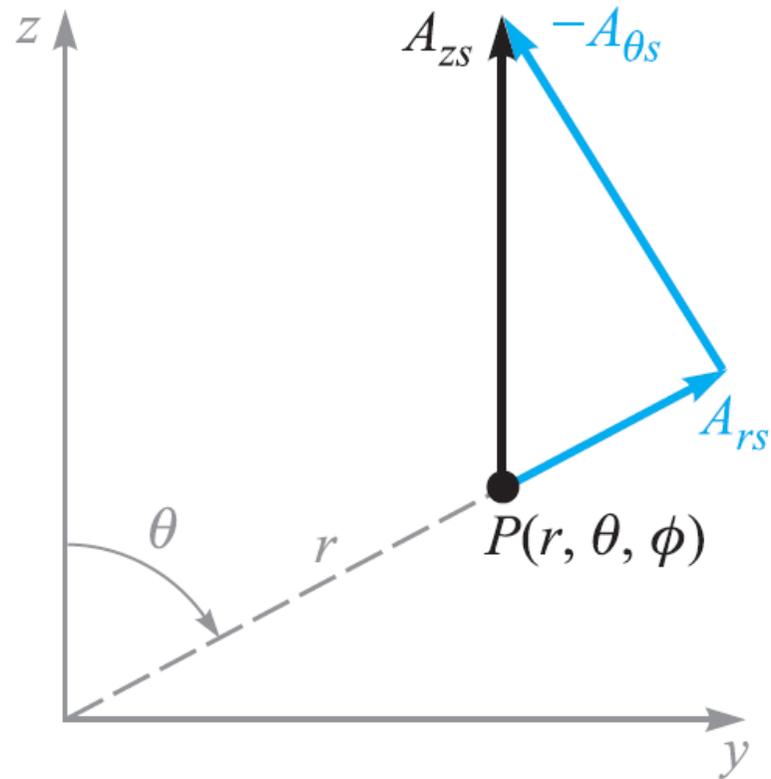


Figura 5 Decomposição do componente vertical em coordenadas esféricas - (Hayt, 2011)

Os resultados dessas operações são apresentados nas Equações (20) e (21).

$$A_{rs} = \frac{\mu I_0 d}{4\pi r} \cos(\theta) e^{-\frac{j\omega r}{v}} \quad (20)$$

$$A_{\theta s} = -\frac{\mu I_0 d}{4\pi r} \sin(\theta) e^{-\frac{j\omega r}{v}} \quad (21)$$

Pela definição do potencial vetor magnético, pode-se obter o campo magnético, para meios homogêneos, como expresso pela Equação (22).

$$\mathbf{H}_s = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}_s = \frac{1}{\mu} \frac{1}{r^2} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r \sin \theta \hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_{sr} & r A_{s\theta} & r \sin \theta A_{s\phi} \end{vmatrix} \quad (22)$$

Por considerações de simetria, o campo magnético não é função da coordenada azimutal (ϕ). Além disso, o potencial vetor magnético não apresenta componente nessa direção.

Sendo assim, a Equação (22) reduz-se para:

$$\mathbf{H}_s = \frac{1}{\mu} \frac{\csc \theta}{r^2} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r \operatorname{sen} \theta \hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 \\ A_{sr} & r A_{s\theta} & 0 \end{vmatrix} \quad (23)$$

Ao se realizar a operação indicada na Equação (22) obtém-se o campo magnético, cujo único componente não nulo (ϕ) é dado pela Equação (24).

$$H_{\phi s} = \frac{I_0 d}{4\pi R} \operatorname{sen}(\theta) e^{-\frac{j\omega r}{v}} \left(\frac{j\omega}{rv} + \frac{1}{r^2} \right) \quad (24)$$

O campo elétrico pode ser obtido pela aplicação direta da Lei de Ampère, válida no espaço livre de fontes ($\mathbf{J}=\mathbf{0}$). O processo matemático é similar ao utilizado para a obtenção do campo magnético.

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = j\omega\epsilon\mathbf{E}_s \quad (25)$$

O resultado desse processo está apresentado nas Equações (26) e (27).

$$E_{rs} = \frac{I_0 d}{2\pi} \cos(\theta) e^{-\frac{j\omega r}{v}} \left(\frac{1}{\epsilon v r^2} + \frac{1}{j\omega\epsilon r^3} \right) \quad (26)$$

$$E_{\theta s} = \frac{I_0 d}{4\pi} \sin(\theta) e^{-\frac{j\omega r}{v}} \left(\frac{j\omega}{\epsilon v^2 r} + \frac{1}{\epsilon v r^2} + \frac{1}{j\omega\epsilon r^3} \right) \quad (27)$$

As Equações (24), (26) e (27) podem ser reescritas como apresentado abaixo ao se utilizar a definição de impedância de onda e da velocidade de propagação. Para isto, substitua:

$$\frac{j\omega r}{v} \Rightarrow \frac{j2\pi r}{\lambda}; \quad \epsilon v \Rightarrow \frac{1}{\eta} \quad \text{e} \quad \omega\epsilon \Rightarrow \frac{2\pi}{\eta\lambda}$$

$$E_{rs} = \frac{I_0 d}{2\pi} \eta \cos(\theta) e^{-\frac{j2\pi r}{\lambda}} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\lambda}{j2\pi r^3} \right) \quad (28)$$

$$E_{\theta s} = \frac{I_0 d}{4\pi} \eta \sin(\theta) e^{-\frac{j2\pi r}{\lambda}} \left(\frac{j2\pi}{\lambda r} + \frac{1}{r^2} + \frac{\lambda}{j2\pi r^3} \right) \quad (29)$$

$$H_{\phi s} = \frac{I_0 d}{4\pi R} \sin(\theta) e^{-\frac{j2\pi r}{\lambda}} \left(\frac{j2\pi}{\lambda r} + \frac{1}{r^2} \right) \quad (30)$$

Para o caso em que o ponto de observação (ou de análise) encontra-se afastado da fonte, os termos com distância quadrática e cúbica, tornam-se demasiadamente pequenos frente ao termo linear. Dessa forma, as expressões acima podem ser simplificadas para o conjunto apresentado abaixo.

$$E_{rs} = 0 \quad (31)$$

$$E_{\theta s} = j \frac{I_0 d}{2\lambda r} \eta \sin(\theta) e^{-\frac{j2\pi r}{\lambda}} \quad (32)$$

$$H_{\phi s} = j \frac{I_0 d}{2\lambda r} \sin(\theta) e^{-\frac{j2\pi r}{\lambda}} \quad (33)$$

Fica claro que o campo elétrico na direção polar (θ) relaciona-se com o campo magnético na direção azimutal (ϕ) como dado pela Equação (34).

$$E_{\theta s} = \eta H_{\phi s} \quad (34)$$

As expressões para os campos no domínio do tempo, podem ser obtidas através da transformação fasorial inversa, dada pela Equação (35).

$$\mathbf{E}(r, t) = \text{Re}\{\mathbf{E}_s e^{j\omega t}\} \quad (35)$$

Assim, os campos no domínio do tempo são:

$$E_{\theta s} = -\frac{I_0 d}{2\lambda r} \eta \sin(\theta) \sin\left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda}\right) \quad (36)$$

$$H_{\phi s} = -\frac{I_0 d}{2\lambda r} \sin(\theta) \sin\left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda}\right) \quad (37)$$

Dessa forma, os campos longe de sua fonte geradora podem ser aproximados por uma onda plana uniforme. Para que se possa calcular a energia transportada pela onda, obtém-se o vetor de Poynting para essa configuração de campos, como mostrado pelas Equações (38) e (39).

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = E_{\theta} H_{\phi} \hat{\mathbf{r}} \quad (38)$$

$$\mathbf{P} = \left(\frac{I_0 d}{2\lambda r} \right)^2 \eta \sin^2(\theta) \sin^2 \left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda} \right) \hat{\mathbf{r}} \quad (39)$$

A potência que atravessa uma superfície esférica de raio r é dada pela Equação (40).

$$P_t = \iint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} P_r r^2 \sin \theta \, d\theta d\phi = \left(\frac{I_0 d}{\lambda} \right)^2 \frac{2\pi\eta}{3} \sin^2 \left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda} \right) \quad (40)$$

O valor médio de tal potência é dado pela Equação (41).

$$P_{\text{av}} = \frac{1}{T} \int_0^T P_t(t) dt = \left(\frac{I_0 d}{\lambda} \right)^2 \eta \frac{\pi}{3} \quad (41)$$

Essa potência seria a dissipada por uma resistência R_{rad} caso a fonte de corrente fosse conectada diretamente a ela e o fenômeno da irradiação não existisse. Tal resistência, denomina-se resistência de irradiação e é definida pela Equação (42).

$$P_{\text{av}} = I_{\text{rms}}^2 R_{\text{rad}} = \frac{1}{2} I_0^2 R_{\text{rad}} \quad (42)$$

Desse modo, pode-se obter uma expressão explícita para o valor dessa resistência, como dado pela equação abaixo.

$$R_{\text{rad}} = \frac{2\pi}{3} \eta \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 \quad (43)$$

Se o valor da impedância de onda do vácuo for utilizado (120π), a equação acima reduz-se para:

$$R_{\text{rad}} = 80\pi^2 \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 \quad (44)$$

Fica claro que para que se obtenha uma potência de irradiação apreciável, precisa-se que o comprimento da antena emissora seja comparável ao comprimento de onda.

Bibliografia

Balanis, C., 2012. *Advanced Engineering Electromagnetics*. 8^a ed. s.l.:Wiley.

Hayt, W. a. B. J., 2011. *Engineering Electromagnetics*. 8^a ed. s.l.:McGraw-Hill Education.

Linhas de Transmissão

A transmissão de potência por meio de uma fonte omnidirecional¹ não é eficiente. Isso ocorre porque nos pontos localizados longe do emissor, a densidade de potência é muito pequena, uma vez que a energia está distribuída sobre uma esfera de área muito grande.

Essa situação ocorre, também, para antenas cuja irradiação é fortemente direcionada, uma vez que a uma distância suficiente, a densidade de potência se torna pequena.

Para que se possa transmitir potência de forma eficiente entre dois pontos do espaço, as ondas devem ser guiadas.

¹ **Omnidirecional** refere-se à noção de ter as mesmas propriedades em todas as direções.

Equação Geral da Linha de Transmissão

A teoria clássica de circuito utiliza componentes discretos, como resistores, capacitores e indutores. Assume-se que os parâmetros (resistância, indutância e capacitância) estão concentrados nesses componentes. **Essa aproximação é válida quando o tamanho físico do circuito é muito menor do que o comprimento de onda de operação do mesmo.**

Linhas de transmissão, entretanto, normalmente apresentam extensão considerável frente ao comprimento de onda em que são operadas. Para o caso de uma linha operada em 60 Hz, o comprimento de onda é de cerca de 5.000 km. Desse modo, o tratamento de linhas de transmissão deve considerar que os parâmetros elétricos estão distribuídos no espaço. O mapa abaixo apresenta o Sistema Interligado Nacional (SIN) mostrando corredores reais de transmissão de energia elétrica.

Para que se possa deduzir as equações que regem o comportamento da corrente e da tensão em linhas de transmissão genéricas, assume-se a existência de dois condutores paralelos e homogêneos. Uma porção infinitesimal desses condutores pode ser representada por elementos de circuito como mostrado na Figura 1.

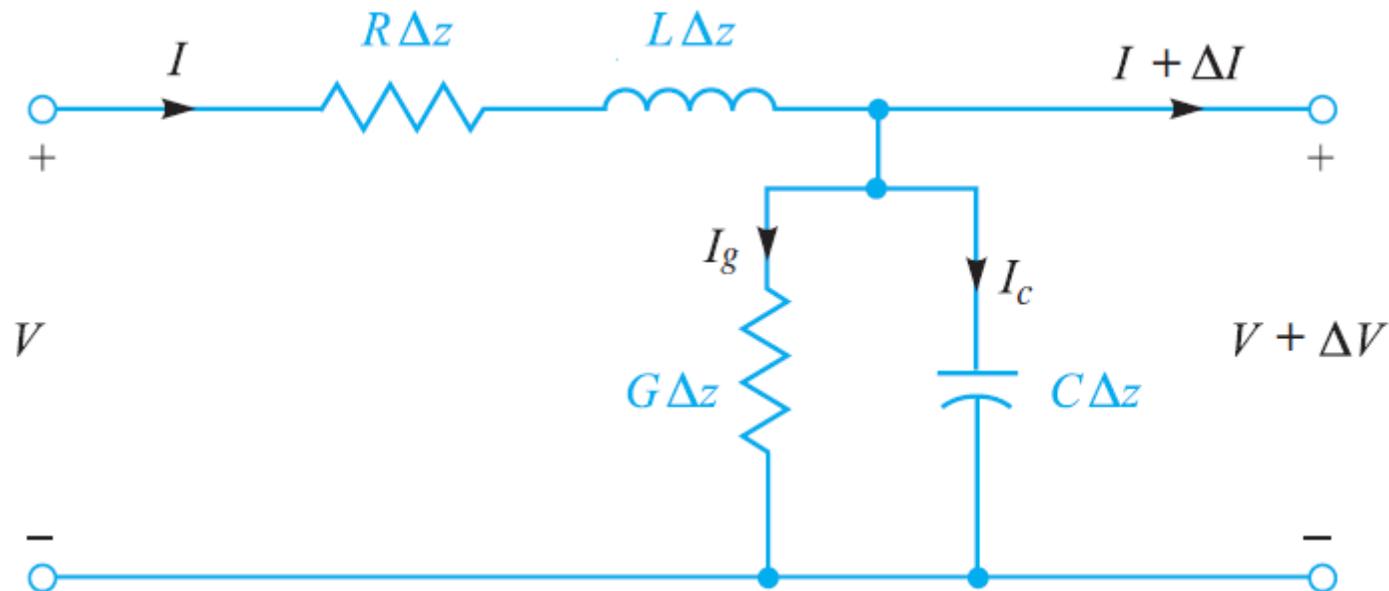


Figura 1 - Trecho Infinitesimal de uma linha de transmissão

O significado de cada um dos parâmetros está listado abaixo:

- R – resistência por unidade de comprimento (ambos os condutores) [Ω/m]
- L – indutância por unidade de comprimento (ambos os condutores) [H/m]
- G – condutância por unidade de comprimento [S/m]
- C – capacitância por unidade de comprimento [F/m]

Deve-se destacar que uma vez que o trecho representado apresenta comprimento infinitesimal, a utilização de elementos concentrados torna-se válida para representar essa porção da linha.

Aplicando as equações de Kirchhoff para tensão e para a corrente, obtém-se o resultado expresso pelas Equações (1) e (2).

$$-\frac{V(z + \Delta z, t) - V(z, t)}{\Delta z} = RI(z, t) + L \frac{\partial I(z, t)}{\partial t} \quad (1)$$

$$-\frac{I(z + \Delta z, t) - I(z, t)}{\Delta z} = GV(z + \Delta z, t) + C \frac{\partial V(z + \Delta z, t)}{\partial t} \quad (2)$$

Ao se aplicar o limite em que Δz tende para 0, obtém-se as chamadas **equações gerais das linhas de transmissão**, mostradas em (3) e (4).

$$-\frac{\partial V(z, t)}{\partial z} = RI(z, t) + L \frac{\partial I(z, t)}{\partial t} \quad (3)$$

$$-\frac{\partial I(z, t)}{\partial z} = GV(z, t) + C \frac{\partial V(z, t)}{\partial t} \quad (4)$$

Ao se aplicar a transformada fasorial, essas equações podem ser escritas como mostrado nas Equações (5) e (6).

$$-\frac{dV(z)}{dz} = (R + j\omega L)I(z) \quad (5)$$

$$-\frac{dI(z)}{dz} = (G + j\omega C)V(z) \quad (6)$$

O conjunto de equações obtido apresenta acoplamento entre a corrente e a tensão. Pode-se, todavia, obter equações desacopladas ao custo da elevação da ordem do sistema. O

resultado dessa operação está apresentado nas Equações (7) e (8). Esse conjunto é chamado equações da linha de transmissão para campos harmônicos no tempo.

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} = (R + j\omega L)(G + j\omega C)V(z) \quad (7)$$

$$\frac{d^2I(z)}{dz^2} = (R + j\omega L)(G + j\omega C)I(z) \quad (8)$$

Define-se a constante de propagação como mostrado pela Equação (9). Sua parte real (α) recebe o nome de constante de atenuação e é medida em Np/m e sua parte imaginária (β) denomina-se constante de fase, medida em rad/m.

$$\gamma^2 = (R + j\omega L)(G + j\omega C) \quad (9)$$

Normalmente, as linhas de transmissão apresentam elevada condutividade, logo, o valor de R pode ser desconsiderado no cálculo da constante de propagação, que fica, então, dada pela Equação (10).

$$\gamma = j\omega\sqrt{LC} \left(1 + \frac{G}{j\omega C}\right)^{1/2} \quad (10)$$

Essa expressão apresenta uma analogia direta com a constante de propagação de uma onda TEM em um meio cujos parâmetros constitutivos são (μ, ϵ, λ) :

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\lambda + j\omega\epsilon)} = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \left(1 + \frac{\lambda}{j\omega\epsilon}\right)^{1/2} \quad (11)$$

Comparando as Equações (10) e (11) pode-se extrair as duas relações apresentadas na Equações (12) e (13).

$$\frac{G}{C} = \frac{\lambda}{\epsilon} \quad (12)$$

$$LC = \mu\epsilon \quad (13)$$

Essas duas relações podem ser utilizadas para se obter os demais parâmetros de uma linha dado que G ou C ou L seja conhecido. **Por exemplo, caso o valor de L seja dado, pode-se utilizar a Equação (13) para se determinar C e, subsequentemente, utilizar a equação (12) para se determinar G .** O parâmetro R , por sua vez, pode ser obtido pela perda de potência nos condutores ou por especificação de fabricantes.

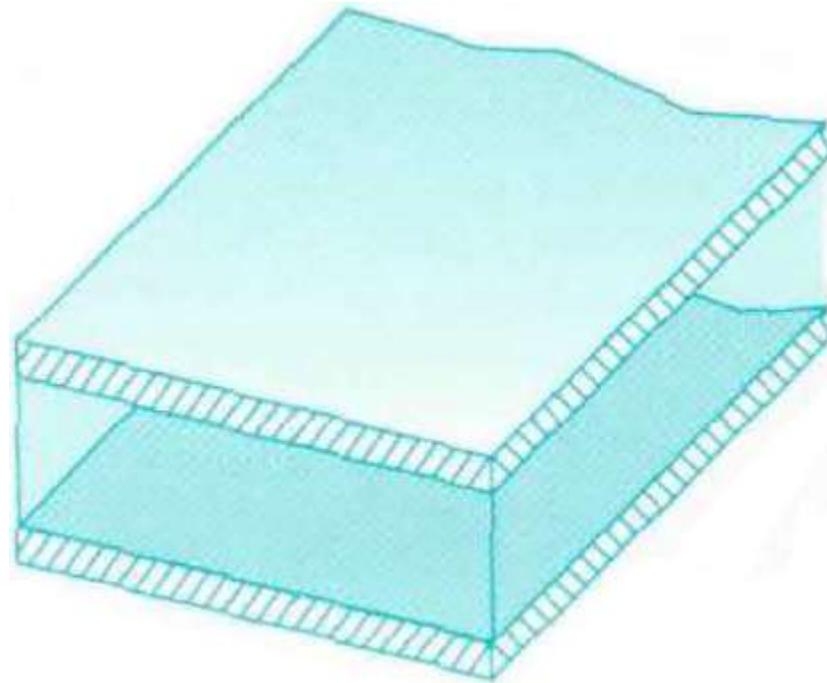
Parâmetros de Linhas de Transmissão

Nessa seção, são apresentados sem demonstração os parâmetros C, L, G e R para algumas configurações específicas de linhas de transmissão. A indutância interna dos condutores é ignorada nessa análise. Além disso, os valores de R fornecidos são aproximações válidas para frequências suficientemente elevadas.

O aluno é encorajado a verificar a veracidade das equações (12) e (13) constatando que os parâmetros fornecidos satisfazem a essas relações.

1) Linha de Transmissão de Placas Paralelas

Essa configuração consiste de duas placas de largura 'w' separadas por um meio dielétrico de espessura 'd' caracterizado por ϵ , μ e λ . Variáveis com o índice inferior 'c' referem-se ao condutor.



$$C = \epsilon \frac{w}{d} \quad (14)$$

$$L = \mu \frac{d}{w} \quad (15)$$

$$G = \lambda \frac{w}{d} \quad (16)$$

$$R = \frac{2}{w} \sqrt{\frac{\pi f \mu_c}{\lambda_c}} \quad (17)$$

2) Linha de Transmissão de Dois Fios

Essa configuração consiste de dois fios ambos de raio 'a' separados por uma distância 'D' por um meio dielétrico por ϵ , μ e λ . Variáveis com o índice inferior 'c' referem-se ao condutor.



$$C = \frac{\pi\epsilon}{\cosh^{-1}(D/2a)} \quad (18)$$

$$L = \frac{\mu}{\pi} \cosh^{-1} \left(\frac{D}{2a} \right) \quad (19)$$

$$G = \frac{\pi \lambda}{\cosh^{-1}(D/2a)} \quad (20)$$

$$R = \frac{1}{\pi a} \sqrt{\frac{\pi f \mu_c}{\lambda_c}} \quad (21)$$

3) Linha de Transmissão Coaxial

Essa configuração consiste de dois fios ambos de raio 'a' separados de uma distância 'D' por um meio dielétrico por ϵ , μ e λ . Variáveis com o índice inferior 'c' referem-se ao condutor.



$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)} \quad (22)$$

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (23)$$

$$G = \frac{2\pi\lambda}{\ln(b/a)} \quad (24)$$

$$R = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \sqrt{\frac{\pi f \mu_c}{\lambda_c}} \quad (25)$$

Solução das Equações da Linha de Transmissão para Campos Harmônicos no Tempo – Impedância Característica

Equações diferenciais na forma (26) apresentam solução geral como dado em (27), em que C_1 e C_2 são constantes que devem ser determinadas pelas condições de contorno.

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} = K^2 f(z) \quad (26)$$

$$f(z) = C_1 e^{-Kz} + C_2 e^{Kz} \quad (27)$$

Para o caso das equações (7) e (8), repetidas nas equações (28) e (29), os resultados estão expressos em (30) e (31).

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} = (R + j\omega L)(G + j\omega C)V(z) \quad (28)$$

$$\frac{d^2I(z)}{dz^2} = (R + j\omega L)(G + j\omega C)I(z) \quad (29)$$

$$V(z) = V^+(z) + V^-(z) = V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{\gamma z} \quad (30)$$

$$I(z) = I^+(z) + I^-(z) = I_0^+ e^{-\gamma z} + I_0^- e^{\gamma z} \quad (31)$$

Fisicamente, as funções indicadas pelos sinais positivos e negativos representam, respectivamente, ondas viajantes na direção '+z' e '-z'. De forma similar, as constantes (V_0^+ , I_0^+) e (V_0^- , I_0^-) representam, respectivamente, a amplitude das ondas que se propagam na direção '+z' e '-z'.

As soluções obtidas em (30) e (31) devem obedecer às equações gerais da linha de transmissão. Substituindo (30) e (31) em (5) ou (32) e (6) ou (33), o resultado obtido está exposto em (34) e (35).

$$-\frac{dV(z)}{dz} = (R + j\omega L)I(z) \quad (32)$$

$$-\frac{dI(z)}{dz} = (G + j\omega C)V(z) \quad (33)$$

$$\gamma(V^+ - V^-) = (R + j\omega L)(I^+ + I^-) \quad (34)$$

$$\gamma(I^+ - I^-) = (G + j\omega C)(V^+ + V^-) \quad (35)$$

A quantidade apresentada em (36) é denominada impedância característica da linha e pode ser utilizada para simplificar as equações (37) e (38).

$$Z_0 = \frac{R + j\omega L}{\gamma} = \frac{\gamma}{G + j\omega C} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad (36)$$

$$Z_0(I^+ + I^-) = (V^+ - V^-) \quad (37)$$

$$Z_0(I^+ - I^-) = (V^+ + V^-) \quad (38)$$

Combinando as equações (37) e (38), pode-se obter a relação apresentada abaixo:

$$\frac{V_0^+}{I_0^+} = -\frac{V_0^-}{I_0^-} = Z_0 \quad (39)$$