



# Tema 2. DINÁMICA

Física, J.W. Kane, M. M. Sternheim, Reverté, 1989

## Tema 2 Dinámica

Las leyes de Newton del movimiento

Movimiento circular

TS 5.8 Efectos fisiológicos de la aceleración

## Caps. 3 y 5

Cap. 3, pp44-69

Cap. 5, pp96-107

Cap. 5, pp 121-122

## 2.1 INTRODUCCIÓN

La **mecánica** se divide en **cinemática** y **dinámica**. La primera describe el movimiento de los cuerpos en dos y tres dimensiones, pero no explica cuáles son las causas de dicho movimiento

¿Por qué se necesita una distancia más grande para detener un barco en movimiento? ¿Por qué es más difícil controlar un coche sobre hielo que sobre suelo seco?

Los conceptos cinemáticos de **desplazamiento**, **velocidad** y **aceleración**, junto con los conceptos de **fuerza** y **masa**, permiten analizar los principios de la dinámica, que se resumen en las leyes de Newton.

El problema central puede plantearse de la siguiente manera: (1) Dada una partícula cuyas características conocemos, (2) se coloca con una velocidad inicial en un medio ambiente del que tenemos una descripción completa, (3) problema: ¿Cuál será el movimiento de dicha partícula?

### FORMA DE RESOLVERLO

- Introduciremos el concepto de fuerza y la definiremos en términos de la aceleración que experimenta el cuerpo.
- Desarrollaremos un procedimiento para asignar una aceleración en un cuerpo, de forma que podamos entender el hecho de que diferentes partículas de la misma clase puedan estar sujetas a distintas aceleraciones en el mismo medio.
- Trataremos de encontrar la manera de calcular las fuerzas que actúan sobre las partículas a partir de las propiedades de cada una de ellas y del medio que las rodea; es decir, buscaremos las leyes que rigen dichas fuerzas.

## 2.2 LEYES DE NEWTON

Las leyes de Newton no son producto de deducciones matemáticas, sino una descripción matemática a partir de la observación de experimentos con cuerpos en movimiento. Estas leyes son fundamentales porque no pueden deducirse ni demostrarse a partir de otros principios. Y su importancia radica en que permite entender la mayor parte de los movimientos comunes: son la base de la mecánica clásica o mecánica newtoniana. Sin embargo estas leyes no son universales, en el sentido de que requieren modificaciones a velocidades muy altas (cercanas a la velocidad de la luz) y para tamaños muy pequeños (del orden del átomo).

Fue **Sir Isaac Newton** (1642-1727) el primero en enunciar estas leyes, publicándolas en 1687 en su *Principia Mathematica Philosophiæ Naturalis*. Se puede decir que con esta publicación nace la ciencia física.

## 2.2.1 ENUNCIADO DE LAS LEYES DE NEWTON

### *Primera ley*

*Todo cuerpo permanece en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo y uniforme a menos que se le obligue a variar dicho estado mediante fuerzas que actúen sobre él.*

### *Segunda ley*

*La aceleración de un cuerpo tiene la misma dirección que la fuerza neta que actúa sobre él (suma vectorial de todas las fuerzas que actúan) y es proporcional a dicha fuerza neta.*

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

### *Tercera ley*

*A toda acción se le opone siempre una reacción igual. Las reacciones mutuas entre dos cuerpos son fuerzas de la misma intensidad. Sus direcciones se dirigen siempre en sentidos opuestos, a lo largo de la línea que une ambos cuerpos, considerados como partículas materiales.*

## 2.2.2 COMENTARIOS A LA PRIMERA LEY DE NEWTON (I)

### Consecuencias de la primera Ley:

- Los objetos no pueden cambiar por sí solos su estado de movimiento
- Para que se originen cambios en el estado de movimiento, se necesitan al menos dos cuerpos que interactúen.

Sin la acción de las fuerzas no pueden existir aceleraciones. En esta ley residen dos conceptos fundamentales de la mecánica:

**Definición cualitativa de fuerza:** *agente capaz de modificar el estado de movimiento de una partícula material.*

*El reposo ( $v = 0$ ) y el movimiento rectilíneo uniforme ( $v = cte$ ) son dos estados enteramente equivalentes para una partícula material. Estos estados cinemáticos definen el **sistema de referencia inercial**.*

Establece la definición de **masa inercial**, propiedad por la cual los cuerpos se oponen a la variación de su estado de movimiento.

## 2.2.2 COMENTARIOS A LA PRIMERA LEY DE NEWTON (II)

A partir de la primera ley de Newton se establece la **ley de inercia**: antes de Galileo se creía que una fuerza (empuje o tirón) siempre era necesaria para mantener un cuerpo con velocidad constante, de manera que si un cuerpo no es impulsado, se detendrá de manera natural. Galileo, y más tarde Newton, reconocieron que si se eliminan todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, éste permanecerá en movimiento rectilíneo uniforme.

El principio de inercia nos da un procedimiento experimental de lo que se quiere decir cuando se afirma que no existe fuerza neta o resultante, actuando sobre una partícula material ya que podemos determinar la existencia o no de esta resultante midiendo el estado de movimiento de la partícula.

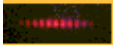
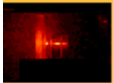
## 2.2.3 COMPROBACIÓN EXPERIMENTAL DE LA PRIMERA LEY

Consideremos un objeto (bloque), que descansa sobre una superficie horizontal lisa, como la de la mesa. Observamos que si el cuerpo está en reposo (respecto de la mesa) permanecerá en esta situación a menos que le empujemos o tiremos de él.

Si lanzamos el cuerpo de modo que deslice sobre la mesa podremos observar que su movimiento se irá haciendo cada vez más lento hasta que finalmente se detiene. De hecho, esta observación era la base para sostener la idea de que el movimiento tenía que cesar cuando la fuerza exterior, en este caso la mano que empujó al bloque, dejara de actuar.

Sin embargo, Galileo argumentó contra esta idea atribuyendo la disminución de velocidad a la fuerza de rozamiento entre el bloque y la mesa, debido a que ni el uno ni la otra son perfectamente lisos.

De modo que, aunque podemos considerar el bloque como "libre" de acción exterior en el sentido vertical (normal y peso se compensan), no es ese el caso en el sentido horizontal debido a la existencia de la fuerza de rozamiento que no está compensada por ninguna otra fuerza horizontal.



## 2.2.4 EQUILIBRIO

Cuando el estado de movimiento de un cuerpo no cambia, se dice que el objeto está en **equilibrio**. El requisito para que exista equilibrio es que la fuerza neta sobre un objeto sea cero. El equilibrio puede ser **estable**, **inestable** o **indiferente**.



**Equilibrio estable:** Un pequeño desplazamiento conduce a una fuerza no equilibrada que hace que la partícula vuelva a su posición de equilibrio.

**Equilibrio inestable:** Cualquier pequeño desplazamiento conduce a una fuerza no equilibrada que aumenta aún más el desplazamiento con respecto a su posición de equilibrio.

**Equilibrio indiferente:** Aunque la partícula se desplace no aparecen fuerzas no equilibradas



## 2.2.5 COMENTARIOS A LA SEGUNDA LEY DE NEWTON (I)

La primera y segunda ley de Newton permiten definir el concepto de **fuerza**. Una fuerza es una influencia externa sobre un cuerpo que causa su aceleración respecto de un sistema inercial. La dirección de la fuerza coincide con la de la aceleración causada y su módulo es el producto de la masa por el módulo de la aceleración. Por lo tanto, establece un método para la medida de fuerzas y la relación “cuantitativa” existente entre el valor de una fuerza y la aceleración que produce al actuar sobre un determinado cuerpo.

A partir de la masa se puede definir el **newton** como la cantidad de fuerza neta que proporciona una aceleración de un metro por segundo al cuadrado de un cuerpo con masa un kilogramo

La segunda ley establece una forma cuantitativa de relacionar las masas de los cuerpos.

$$F = m_1 a_1 = m_2 a_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2}$$

## 2.2.5 COMENTARIOS A LA SEGUNDA LEY DE NEWTON (II)

### A destacar

- La segunda ley de Newton tiene carácter vectorial. Normalmente la usaremos en forma de componentes, con una ecuación para cada componente.
- El enunciado de esta ley se refiere sólo a fuerzas externas, es decir, fuerzas ejercidas sobre un cuerpo por otros cuerpos del entorno. Un cuerpo no puede afectar su propio movimiento ejerciendo una fuerza sobre sí mismo. Si eso fuera posible podríamos elevarnos hasta el techo tirando de nuestro cinturón.
- Esta ecuación es válida para masas constantes. No sirven para sistemas en los que la masa varía como un tanque que pierde gasolina o un cohete o un vagón que se carga con carbón. En este caso el tratamiento es distinto.
- Esta ley sólo es válida para sistemas de referencia inerciales. Por lo tanto no es válida en el marco de referencia de los vehículos con aceleración.

## 2.2.6 COMENTARIOS A LA TERCERA LEY DE NEWTON (I)

La tercera ley de newton se llama también **ley de acción y reacción**. Cuando dos cuerpos interaccionan mutuamente se ejercen fuerzas entre sí. La tercera ley establece que estas fuerzas son iguales en módulo y van en direcciones opuestas

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

Si un objeto A ejerce una fuerza sobre un objeto B, el objeto B ejerce una fuerza sobre el objeto A que es igual en módulo y opuesta en sentido. Así, las fuerzas se dan a pares. Estas fuerzas se llaman de acción y reacción, pero no significa que una fuerza reaccione contra la otra, sino que ambas se dan simultáneamente. Si cuando una fuerza externa actúa sobre un cuerpo la llamamos fuerza de acción, la correspondiente fuerza de reacción debe actuar sobre un cuerpo diferente. Así, en ningún caso, dos fuerzas externas que actúen sobre un único cuerpo constituyen un par acción-reacción. Hay que destacar, de nuevo, que las dos fuerzas descritas en la tercera ley actúan sobre cuerpos distintos.

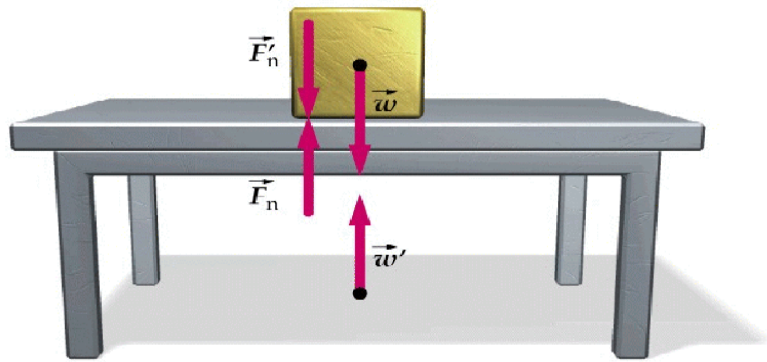
## 2.2.6 COMENTARIOS A LA TERCERA LEY DE NEWTON (II)

### Ejemplos

→ Cuando damos una patada a un balón, la fuerza hacia adelante que el pie ejerce sobre él lo lanza en su trayectoria, pero sentimos la fuerza que el balón ejerce sobre nuestro pie. Si damos una patada a una roca, el dolor que sentimos se debe a la fuerza que la roca ejerce sobre nuestro pie.

→ Si lanzamos una pelota de tenis, ésta ejercerá una fuerza gravitacional hacia arriba sobre la Tierra igual en magnitud a la que la Tierra ejerce hacia abajo sobre la pelota. Si dejamos caer la pelota, ésta y la Tierra se aceleran una hacia la otra. La fuerza neta sobre cada cuerpo tiene la misma magnitud, pero la aceleración de la Tierra es pequeñísima porque su masa es muy grande.

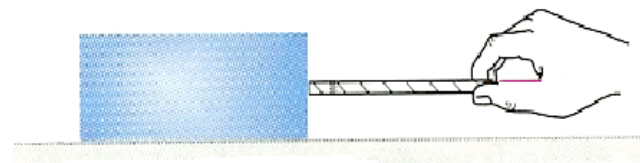
## 2.1 Considerar un bloque de masa $m$ , situado en reposo, sobre una mesa. Obtener las fuerzas que actúan sobre el bloque a partir de la tercera ley



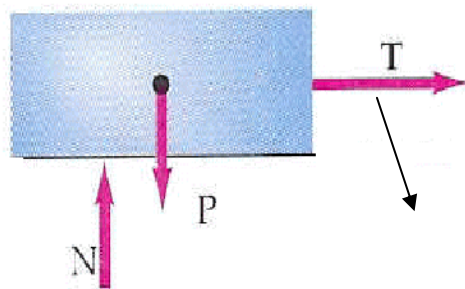
La fuerza hacia abajo que actúa sobre la caja es el peso ( $w$ ) debido a la atracción de la Tierra. El bloque ejerce sobre la Tierra una fuerza igual y de sentido contrario  $w' = -w$ . Estas fuerzas forman un par acción-reacción. Si fueran las únicas fuerzas presentes, la mesa se aceleraría hacia abajo y la Tierra hacia arriba.

Sin embargo, la mesa ejerce una fuerza hacia arriba sobre la caja que compensa el peso ( $F_n$ ) y de la misma manera, la caja ejerce una fuerza sobre la mesa hacia abajo ( $F'_n$ ). Éstas vuelven a formar un par acción-reacción.

2.2 Considerar un bloque de masa  $m$ , que se encuentra en reposo sobre una mesa, de manera que sea despreciable el rozamiento entre las superficies del bloque y la mesa. El bloque es arrastrado mediante una fuerza  $F$  aplicada a través de una cuerda ligera. Determinar el movimiento del bloque.

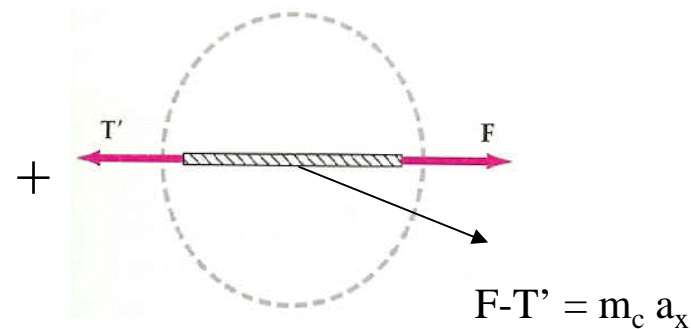


Aislamos la masa  $m$  de su entorno y dibujamos el diagrama de partícula libre para el bloque.



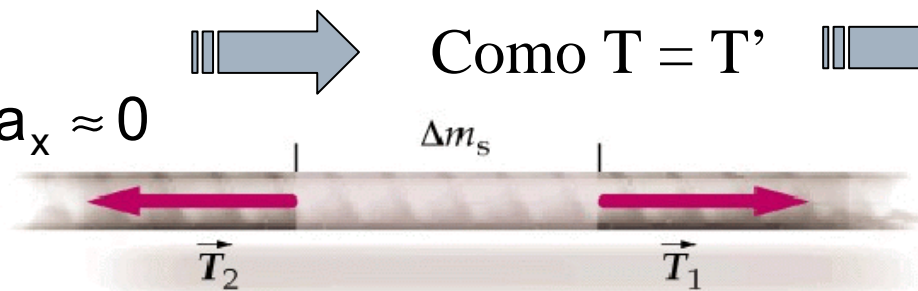
$T$  = fuerza de contacto ejercida por la cuerda sobre  $m$

$$T = m a_x$$



$$T = m a_x$$

$$F - T' = m_c a_x \approx 0$$



$$F = m a_x$$

$T_1$  es la fuerza ejercida por la fracción de cuerda que queda a la derecha del segmento de cuerda  $m_s$ ,  $T_2$  es la fuerza ejercida por la fracción de cuerda situada a la izquierda del mismo.



Para una cuerda ideal, de masa despreciable,

$$T_1 = T_2 = T$$

La tensión  $T$  es la magnitud de la fuerza que cada segmento de la misma ejerce sobre el adyacente.

## 2.3 PESO Y PESO EFECTIVO (I)

El peso de un objeto es la fuerza gravitatoria que éste experimenta. Si  $m$  es la masa del objeto,  $R_T$  el radio de la Tierra y  $M_T$  su masa, la fuerza gravitatoria sobre dicho objeto será

$$F = G \frac{mM_T}{R_T^2}$$

**Diferencia entre masa y peso:** La masa es una propiedad intrínseca del objeto, es una medida de la cantidad de materia del objeto y determina su respuesta ante una fuerza externa. El peso de un objeto varía según la posición y es la fuerza resultante de la gravedad.

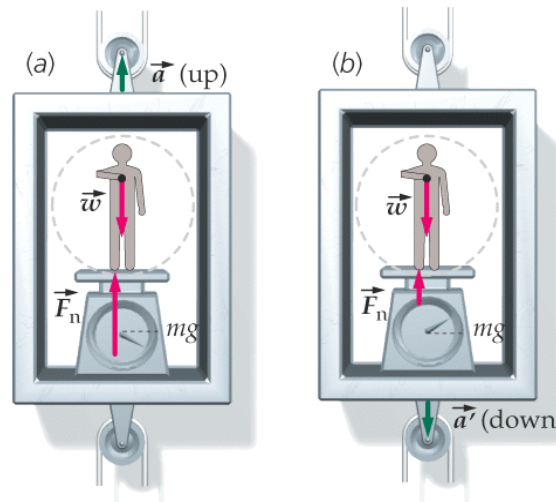
**Cuestión:** Estamos en el espacio interestelar con dos latas de Coca-Cola, una llena y la otra vacía. Al no haber gravedad el peso de todos los objetos es cero ¿Cómo se puede averiguar cuál de las dos está llena?



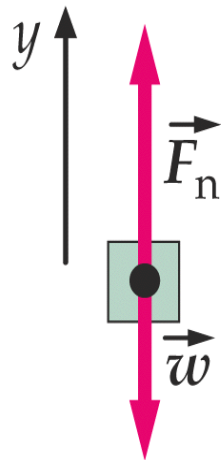
## 2.3 PESO Y PESO EFECTIVO (II)

**El peso efectivo o aparente** de un objeto es la fuerza total que dicho objeto ejerce sobre una balanza. Según la tercera ley de Newton, esta tiene la misma magnitud y sentido contrario a la fuerza que la balanza ejerce sobre la persona. El peso y el peso efectivo son distintos cuando el sistema en estudio se mueve con aceleración.

Un hombre está de pie sobre una balanza de resorte en un ascensor. Obtener la lectura de la balanza cuando el ascensor se acelera hacia arriba y hacia abajo con aceleración constante  $a$ .



La lectura de la balanza es el módulo de la fuerza normal ejercida por la balanza sobre el hombre. Como el hombre está en reposo respecto del ascensor, tanto el uno como el otro poseen la misma aceleración. Sobre el hombre actúan dos fuerzas: la fuerza de la gravedad hacia abajo,  $mg$  y la fuerza normal de la balanza hacia arriba. La suma de ambas es la causa de la aceleración observada sobre el hombre. Si elegimos como positiva la dirección hacia arriba y teniendo en cuenta las fuerzas que aparecen en el dibujo y aplicando la segunda ley de Newton en el eje  $y$



Si el ascensor se mueve con aceleración hacia arriba

$$F_n - mg = ma \rightarrow F_n = m(g + a)$$

Si el ascensor se mueve con aceleración hacia abajo

$$F_n - mg = m(-a') \rightarrow F_n = m(g - a')$$

Cuando el ascensor acelera hacia arriba, el peso aparente del hombre es mayor que  $mg$ . Para el hombre todo ocurre como si la gravedad hubiera aumentado hasta  $(g+a)$ . Cuando el ascensor se acelera hacia abajo, el peso aparente del hombre es menor y se siente más ligero. Si  $a' = g$ , el ascensor estaría en caída libre y el hombre experimentaría la ingravidez.

## 2.4 ROZAMIENTO (I)

Históricamente, el estudio del rozamiento comienza con **Leonardo da Vinci** (1542-1534), que dedujo las leyes que gobiernan el movimiento de un bloque rectangular que desliza sobre una superficie plana. Sin embargo, este estudio pasó desapercibido. En el siglo XVII Guillaume Amontons (1663-1705), físico francés, redescubrió las leyes del rozamiento estudiando el deslizamiento seco de dos superficies planas deduciendo que:

- ★ La fuerza de rozamiento se opone al movimiento de un bloque que desliza sobre un plano.
- ★ Es proporcional a la fuerza normal que ejerce el plano sobre el bloque.
- ★ No depende del área aparente de contacto.

Más tarde, Coulomb en 1781 establece que una vez comenzado el movimiento, la fuerza de rozamiento es independiente de la velocidad.

El rozamiento es una de las fuerzas más importantes en muchos aspectos de nuestra vida. El aceite del motor de un coche reduce la fricción entre las piezas móviles, pero sin fricción entre las ruedas y el suelo un coche no podría avanzar. La fricción ejercida por el aire sobre un cuerpo que se mueve a través de él (arrastre del aire) reduce el rendimiento del combustible en los coches, pero permite que funcionen los paracaídas. Sin rozamiento, los clavos se saldrían, las bombillas se caerían y deportes como el ciclismo serían imposibles.

## 2.4 ROZAMIENTO (II)

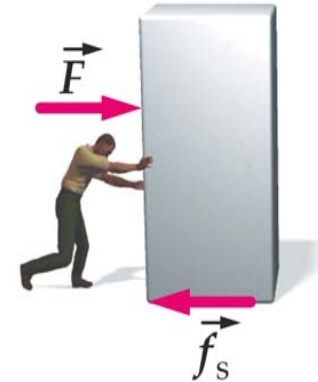
Ejemplos de lubricación para disminuir el rozamiento: la saliva que incorporamos a los alimentos al masticar, recubrimientos mucosos del corazón, pulmones e intestinos.



Muchas articulaciones de los mamíferos están lubricadas mediante **fluido sinovial**, que pasa a través del cartílago que reviste las articulaciones cuando éstas se mueven. Cuando la articulación está en reposo tiende a ser absorbido, facilitando el mantener una posición fija.

## 2.4 ROZAMIENTO (III)

**Rozamiento estático:** Se presenta entre dos superficies en contacto aunque no haya movimiento relativo entre ellos, basta con que haya una “tendencia” al movimiento por la acción de fuerzas que actúen sobre los cuerpos en contacto. Por ejemplo, si tratamos de deslizar una caja con libros, no lo conseguiremos a no ser que apliquemos una fuerza mínima. La caja no se mueve debido a la fuerza de rozamiento estático ejercida por el suelo sobre el bloque, que equilibra la fuerza que estamos aplicando (ver figura)



**Rozamiento cinético:** Si empujamos la caja con fuerza suficiente, éste se deslizará sobre el suelo. Al deslizar, el suelo ejerce una fuerza de rozamiento cinético (o rozamiento por deslizamiento) que se opone al sentido del movimiento. Para que el bloque deslice con velocidad constante debe ejercerse sobre la caja una fuerza igual y de sentido opuesto a esta fuerza de rozamiento. Es decir, el rozamiento cinético se produce cuando las superficies de contacto se encuentran en movimiento.

## 2.4 ROZAMIENTO (IV)

La fuerza de fricción estática actúa cuando no hay movimiento relativo. En este caso  $\mu_e$  es el **coeficiente de rozamiento estático**, que depende de la naturaleza de las dos superficies

La fuerza de rozamiento máxima se dará cuando el movimiento es inminente, de forma que hasta que eso ocurra, se cumplirá que

$$F_r \leq \mu_e N$$

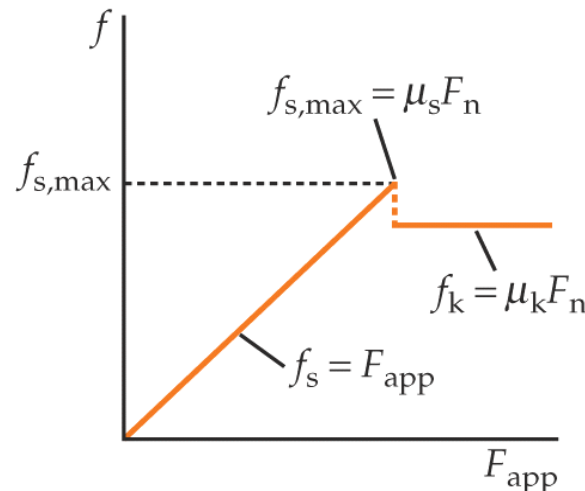
Si empujamos el bloque con una fuerza suficiente, éste comenzará a deslizarse sobre la superficie. Al deslizar, el suelo ejerce una fuerza de rozamiento cinético que se opone al sentido del movimiento. Para que el bloque se mueva con velocidad constante, se debe ejercer una fuerza igual y de sentido opuesto a esta fuerza de rozamiento, cumpliéndose que

$$F_r = \mu_c N$$

Donde  $\mu_c$  es el **coeficiente de rozamiento cinético** que también depende de la naturaleza de las superficies en contacto. Experimentalmente se comprueba que este coeficiente de rozamiento es aproximadamente constante para velocidades relativamente pequeñas (entre 1 cm/s y varios m/s) y decrece lentamente cuando el valor de la velocidad aumenta.

## 2.4 ROZAMIENTO (V)

La fuerza de rozamiento tiene un comportamiento distinto, dependiendo de si existe o no movimiento. Mientras no hay movimiento es porque la fuerza de rozamiento va compensando la fuerza ejercida, hasta que alcanza su máximo valor. En este momento la caja empieza a moverse y a partir de entonces empieza a actuar la fuerza de rozamiento cinético, menor que la fuerza de rozamiento estático.



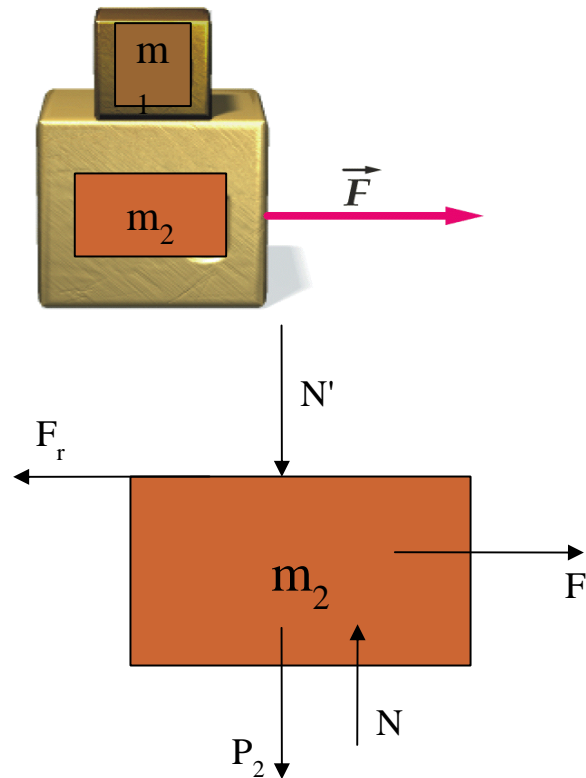
El coeficiente de rozamiento cinético suele ser menor que el estático, para una par de superficies dadas. En algunas ocasiones, ocurre que las superficies se atorán (fricción estática) y deslizan (fricción cinética) de forma alterna. Esto provoca el chirrido de la tiza sobre una pizarra bajo cierto ángulo, el ruido del limpiaparabrisas cuando el cristal está casi seco. El ejemplo agradable es el movimiento de un arco de violín contra una cuerda.

2.3 Un bloque de masa  $m_1$  se apoya sobre un segundo bloque de masa  $m_2$ , que a su vez descansa sobre una mesa horizontal sin rozamiento, como muestra la figura.

Una fuerza externa  $F$  se aplica al bloque inferior como indica la figura y los coeficientes de fricción estática y cinética son  $\mu_e$  y  $\mu_k$ .

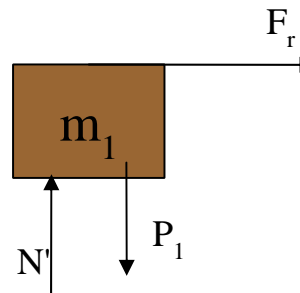
a) Obtener el valor máximo de  $F$  para el cual los bloques no se deslizan uno sobre otro.

b) Determinar la aceleración de cada bloque cuando  $F$  supere ese valor.



Pasos a seguir:

- ◆ Realizar el diagrama de partícula libre (DPL) para cada cuerpo
- ◆ Aplicar la segunda ley de Newton a cada cuerpo
- ◆ Aplicar la condición de no deslizamiento.





Aplicamos la segunda ley de Newton a cada bloque, descomponiendo las fuerzas en el eje X y en el eje Y

Bloque  $m_1$

$$\text{Eje x: } F_r = m_1 a_1 \quad (1)$$

$$\text{Eje y: } N' - P_1 = 0 \quad (3)$$

Bloque  $m_2$

$$\text{Eje x: } F - F_r = m_2 a_2 \quad (2)$$

$$\text{Eje y: } N - N' - P_2 = 0 \quad (4)$$

$$\text{Ligadura: } a_1 = a_2 = a \quad (5)$$

A partir de estas cinco ecuaciones  $F = (m_1 + m_2)a$

¿Cómo se obtiene el valor máximo de F para el cual los dos bloques no deslizan el uno sobre el otro? Debemos imponer la condición de que sea el instante para el cual la fuerza de rozamiento es la máxima

$$F_r = m_1 a \leq F_r^{\max} = \mu_e N' = \mu_e m_1 g$$

$$a \leq \mu_e g$$

El valor máximo de  $F$  será el que provoque una aceleración a justo antes de que el bloque 1 deslice sobre el 2. Justo en ese instante actúa la fuerza de rozamiento máxima y la aceleración vale

$$a = \mu_e g$$

En ese instante la fuerza máxima será  $F = (m_1 + m_2)\mu_e g$

Cuando  $F$  supera ese valor se cumple que  $F \geq F_{\max} = (m_1 + m_2)\mu_e g$

En este caso las aceleraciones son distintas y el coeficiente de rozamiento que actúa es el dinámico

$$F_r = m_1 a_1 = \mu_k N' = \mu_k m_1 g \quad \Rightarrow \quad a_1 = \mu_k g$$

$$\text{En ese instante } F - F_r = m_2 a_2 \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{F - \mu_k g}{m_2}$$

## 2.5 MOVIMIENTO CIRCULAR

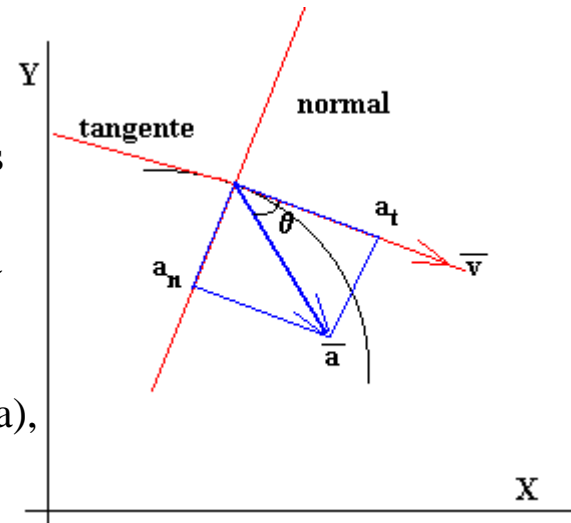
Lo que caracteriza al movimiento circular es que si éste se produce con celeridad constante, su aceleración se dirige hacia el centro del círculo. A la fuerza que es capaz de producir este movimiento se le llama **fuerza centrípeta**, y puede tener muchos orígenes.

Ejemplos de fuerzas centrípetas:

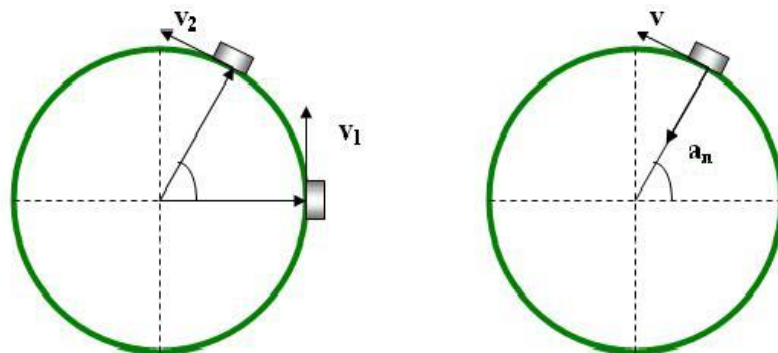
- ♦ La fuerza de rozamiento en el caso de un coche sobre una pista plana y circular.
- ♦ La fuerza de la gravedad para un satélite en órbita alrededor de la Tierra.
- ♦ La fuerza eléctrica para un electrón en órbita alrededor del núcleo.

## 2.5.1 ACELERACIÓN CENTRÍPETA (I)

En un movimiento circular, el vector velocidad  $\vec{v}$  es tangente a la trayectoria, y el vector aceleración  $\vec{a}$  puede descomponerse en dos componentes (llamadas componentes intrínsecas) mutuamente perpendiculares: una componente tangencial  $\vec{a}_t$  (en la dirección de la tangente a la trayectoria), llamada aceleración tangencial y una componente normal  $\vec{a}_n$  (en la dirección de la normal principal a la trayectoria), llamada aceleración normal o centrípeta).



Cuando el movimiento circular se produce con **celeridad constante**, se puede comprobar que el módulo de la velocidad no varía, sin embargo el vector velocidad está cambiando continuamente, tal y como se ve en la figura



$$a_t = \frac{dv}{dt} = 0$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} \quad \text{Dirigida hacia el centro del círculo}$$

## 2.5.1 ACELERACIÓN CENTRÍPETA (II)

En ausencia de fuerza neta sobre un objeto, éste se mueve en línea recta. Si la trayectoria es circular, el movimiento se produce con aceleración centrípeta. Esto quiere decir que debe haber una fuerza que produzca esta aceleración.

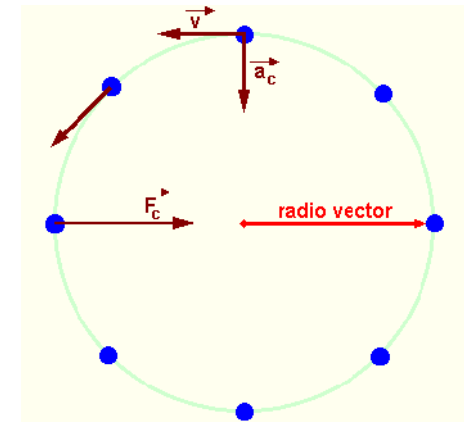
Aplicando la segunda ley de Newton

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Si la única aceleración es la centrípeta, podemos escribir

$$\sum \vec{F} = -\frac{mv^2}{r}\vec{u}_r$$

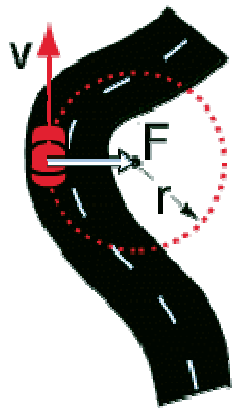
Donde  $\vec{u}_r$  es un vector unitario que va dirigido en la dirección del radio vector.



## 2.5.1 ACELERACIÓN CENTRÍPETA (III)

2.4 Un coche recorre una pista circular plana. Si el radio de la pista es de 200 m y lo recorre a una velocidad de 30 m/s de manera que su aceleración centrípeta es de 4.5 m/s<sup>2</sup>

- ¿Cuál es la fuerza de rozamiento necesaria para proporcionar esta aceleración?
- Si el coeficiente de rozamiento estático es  $\mu_e = 0.8$  ¿Cuál es la celeridad máxima que puede alcanzar el coche en la pista?



$$F_{\text{centripeta}} = m \frac{v}{r}$$


$$\frac{v^2}{r} = \text{aceleración centripeta}$$

(a) En este caso, a única fuerza que actúa sobre el coche es la fuerza de rozamiento, ya que el peso se compensa con la normal. A partir de la segunda ley de Newton

$$\sum F = F_r = m a_n$$

Sustituyendo los datos numéricos obtenemos el valor de la fuerza de rozamiento necesaria para recorrer la pista

$$F_r = 4500 \text{ N}$$



Como la fuerza normal es igual al peso, la máxima fuerza de rozamiento será, a partir de la definición

$$F_r^{\max} = \mu_e N = \mu_e mg$$

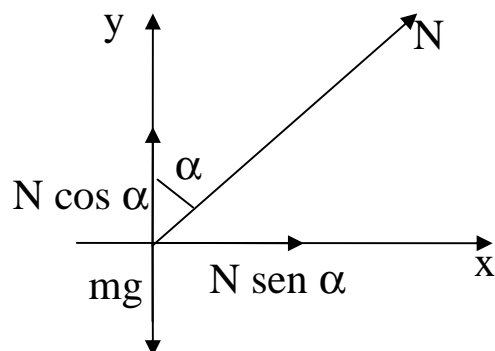
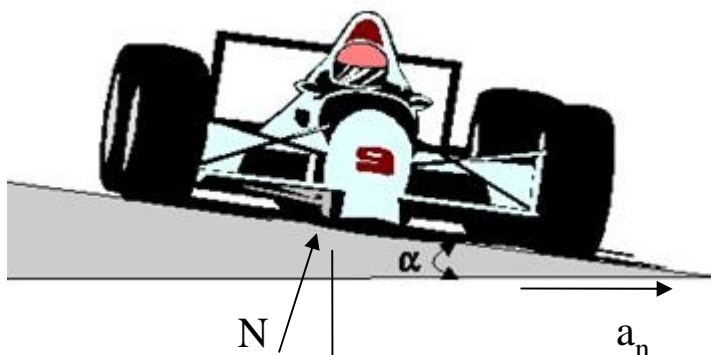
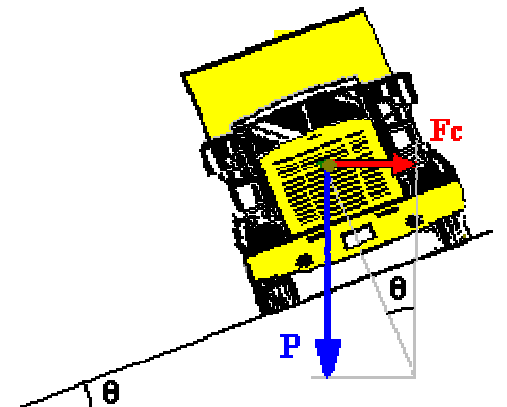
Aplicando la segunda ley de Newton, esta fuerza es igual al producto de la masa por la única aceleración presente en este movimiento, que es la aceleración centrípeta, así

$$\mu_e mg = m \frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\mu_e r g} \quad \Rightarrow \quad v = 39.6 \text{ m/s}$$

Podemos comprobar que esta velocidad es independiente de la masa, luego la velocidad máxima es la misma para cualquier coche siempre y cuando el coeficiente de rozamiento estático sea el mismo. Si el conductor supera esta velocidad, el coche no puede seguir la trayectoria circular y se saldrá de la curva.

## 2.5.2 EJEMPLOS DE MOVIMIENTO CIRCULAR (I)

**Curva peraltada:** en este tipo de curvas, la inclinación hace que aparezca una componente de la fuerza normal que ayuda a producir la fuerza centrípeta, reduciendo el papel de la fuerza de rozamiento.



¿Cuál debe ser la velocidad para que, sin rozamiento, el coche no se salga de la curva? La componente horizontal de la normal debe proporcionar la aceleración centrípeta.

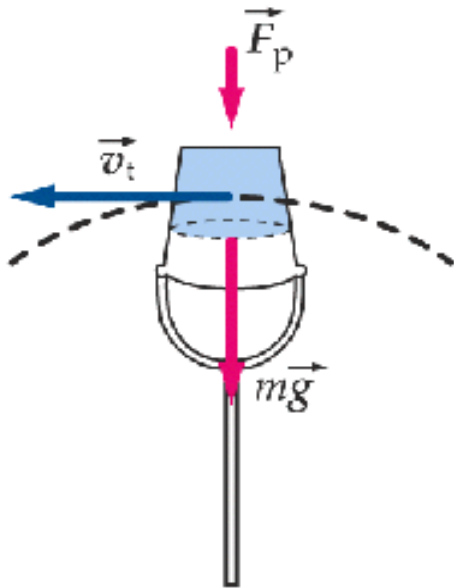
$$\left. \begin{array}{l} \text{Eje x} \quad N \operatorname{sen} \alpha = \frac{mv^2}{r} \\ \text{Eje y} \quad N \cos \alpha - mg = 0 \end{array} \right\} \text{Dividiendo} \\ \text{ambas ecuaciones}$$

$$v = \sqrt{r g \tan \alpha}$$



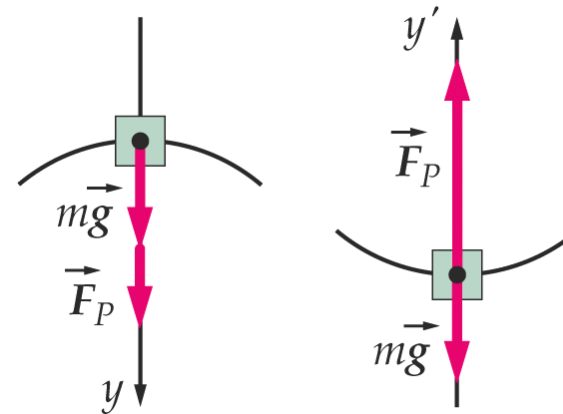
## 2.5.2 EJEMPLOS DE MOVIMIENTO CIRCULAR (II)

**Movimiento en un círculo vertical:** ¿cómo evitar que el agua de un cubo que está girando en un círculo vertical no se derrame?



Como el agua se mueve según una trayectoria circular, existirá una aceleración centrípeta hacia el centro del círculo.

Vamos a dibujar el diagrama de fuerzas para el agua en la parte superior y en la parte inferior del círculo. En cada caso, la dirección positiva del eje  $y$  es hacia el centro del círculo.



Aplicamos la segunda ley de Newton cuando el cubo está en la parte más alta del círculo, cuando la velocidad es  $v$  y despejamos la fuerza que hace el cubo sobre el agua ( $F_p$ ). Como únicamente hay fuerzas en el eje vertical y además la única aceleración que existe es la aceleración centrípeta

$$\sum F = ma_n \quad \longrightarrow \quad F_p + mg = m \frac{v^2}{r} \quad \longrightarrow \quad F_p = m \left( \frac{v^2}{r} - g \right)$$

El cubo puede empujar el agua, pero no puede tirar de ella. La fuerza mínima que puede hacer es cero, por lo tanto, de la ecuación anterior

$$0 = m \left( \frac{v_{\min}^2}{r} - g \right) \quad \longrightarrow \quad v = \sqrt{r g}$$

Repitiendo el proceso cuando el cubo está en la parte más baja, con una velocidad  $v_b$ , obtenemos la fuerza que ejerce el cubo sobre el agua

$$F_p = m \left( \frac{v_b^2}{r} + g \right)$$

Vemos que en los diagramas de fuerzas para el agua no está representada la fuerza centrípeta, ya que no es un tipo de fuerza, sino el nombre de la fuerza resultante que apunta hacia el centro del círculo. Cuando el cubo está en la parte más alta, contribuyen a la fuerza centrípeta tanto la gravedad como la fuerza de contacto entre el cubo y el agua. Cuando el agua se mueve a velocidad mínima en lo alto del círculo, su aceleración es  $g$  y la única fuerza que actúa sobre ella es el peso. En la parte más baja del círculo la fuerza de contacto debe ser mayor que el peso para suministrar al agua la fuerza centrípeta necesaria.

## 2.5.2 EJEMPLOS DE MOVIMIENTO CIRCULAR (III)

**Uso de la centrifugadora:** Girando rápidamente una muestra se puede conseguir la sedimentación de un material, aumentando la aceleración de la gravedad con el movimiento circular, hasta  $1 \cdot 10^6 g$

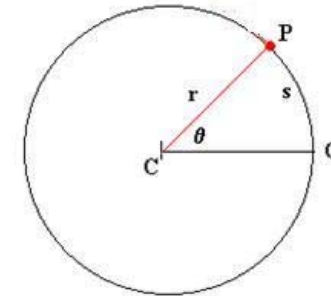


## 2.6 VARIABLES ANGULARES

Las variables angulares se usan en estudios de rotación de un sólido rígido alrededor de un eje fijo.

POSICIÓN ANGULAR (rad):

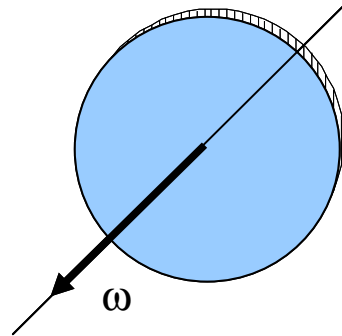
$$\theta = \frac{s}{r}$$



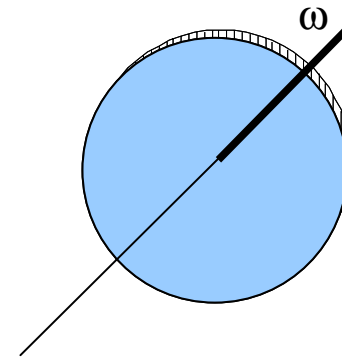
VELOCIDAD ANGULAR (rad/s):

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Dirección de giro en sentido antihorario



Dirección de giro en sentido horario



Relación entre velocidad lineal y velocidad angular

$$v = \omega r$$

La celeridad de los puntos de un objeto en rotación es proporcional a su distancia al eje de rotación

2.5 La velocidad máxima de las cuchillas de una máquina para cortar césped se limita para reducir el riesgo de lanzamientos de piedras u otros pequeños objetos. Un modelo normal tiene una velocidad de rotación de 3700 revoluciones por minuto y una cuchilla de 0.25 m de radio. ¿Cuál es la celeridad en el filo de la cuchilla?

En primer lugar expresamos la velocidad angular en unidades del S.I.

$$\omega = 3700 \frac{rev}{min} \left( \frac{2\pi}{rev} \right) \left( \frac{1 min}{60s} \right) = 387.46 \text{ rad/s}$$

Por lo tanto, la velocidad lineal en el extremo de la cuchilla será

$$v = \omega r = 387.46 \frac{rad}{s} \cdot 0.25m = 96.8 \text{ m/s}$$

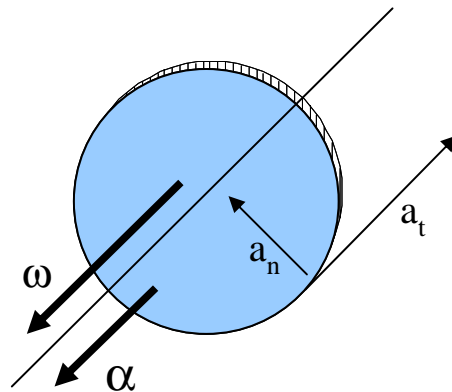
Que equivale a una velocidad de casi 350 km/h

## ACELERACIÓN ANGULAR ( $\text{rad/s}^2$ ): Tasa de variación de la velocidad angular

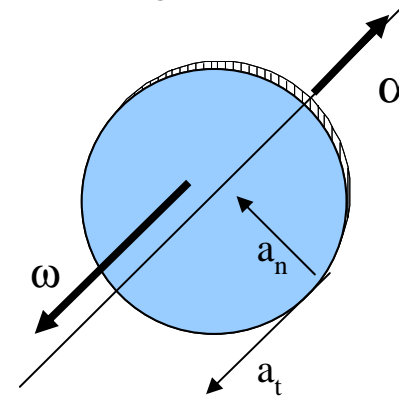
$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

El sentido del vector también varía en función de la tasa de rotación

La velocidad angular del disco aumenta



La velocidad angular del disco disminuye



En el movimiento plano tanto la velocidad angular como la aceleración angular son vectores perpendiculares al plano en el que se produce el movimiento.

La aceleración tangencial varía con la distancia al eje de rotación

$$a_t = \alpha r$$

La aceleración normal depende, además, de la velocidad angular

$$\vec{a}_n = -\omega^2 r \vec{u}_r$$

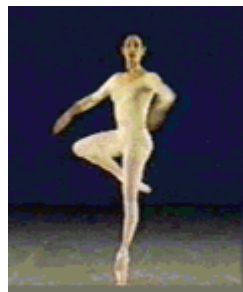
## 2.7 MOMENTOS DE INERCIA

Se puede estudiar la tendencia que tiene un sólido a girar a través de su “*momento de inercia (I)*” que da idea de la distribución de masa de dicho sólido (o de un sistema de partículas en rotación), respecto a un eje de giro. Sólo depende de la geometría del cuerpo y de la posición del eje de giro y no de las fuerzas que intervienen en el movimiento.

De manera análoga a la segunda ley de Newton, se puede escribir

$$\tau = I \alpha$$

El momento de inercia siempre es proporcional al producto  $mR^2$  donde  $m$  es la masa del sólido y  $R$  la distancia al eje respecto del cual está girando.



Cuando la bailarina extiende los brazos, el radio  $R$  aumenta y por lo tanto su momento de inercia. Esto hace que gire más despacio. Si quiere aumentar la velocidad de giro debe cerrar los brazos.

## Determinación experimental del momento de inercia

Para objetos irregulares como un hueso o un antebrazo, se define el momento de Inercia en función de la masa  $m$  del cuerpo y su *radio de giro*,  $k$

$$I = m k^2 \quad \Rightarrow \quad k = \sqrt{\frac{I}{m}}$$

Esto quiere decir que una masa puntual  $m$ , a una distancia  $k$  del eje de rotación tendría el mismo momento de inercia que el objeto real.

Si para una esfera  $I = \frac{2}{5} m R^2$

Su radio de giro vale  $k = \sqrt{\frac{2}{5} m \frac{R^2}{m}} = 0.63R$