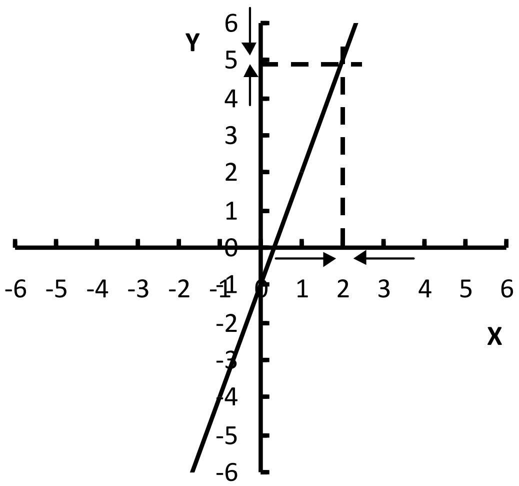
Límite y Derivada

Definición: Definimos intuitivamente, al límite **L** de una función f(x) de variable real, al número al cual se aproxima la función cuando la variable independiente **x**, se aproxima a un valor **a**; se simboliza:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = L}$$

Si nos interesa estudiar a que valor se aproxima la función $f(x) = 3x - 1$ cuando la variable independiente x se aproxima al valor 2



Si nos aproximamos a 2 por la izquierda vemos que la función se aproxima al valor 5 y si nos aproximamos al valor 2 por la derecha también vemos que la función se aproxima al valor 5, esto lo escribimos:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} (3x - 1) = 5 \quad \text{(límite por izquierda de f(x))} \\ \\ \lim\limits_{x \to 2^+} (3x - 1) = 5 \quad \text{(límite por derecha de f(x))} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 2} (3x - 1) = 5$$

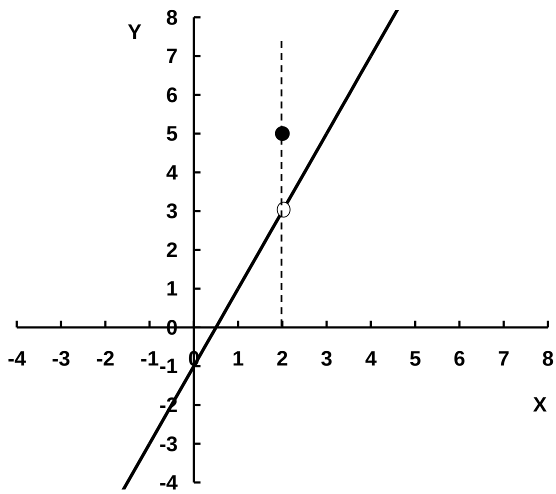
ESTUDIO DE LÍMITES EN FORMA GRÁFICA

A continuación veremos como podemos analizar el cálculo de un límite en forma gráfica.

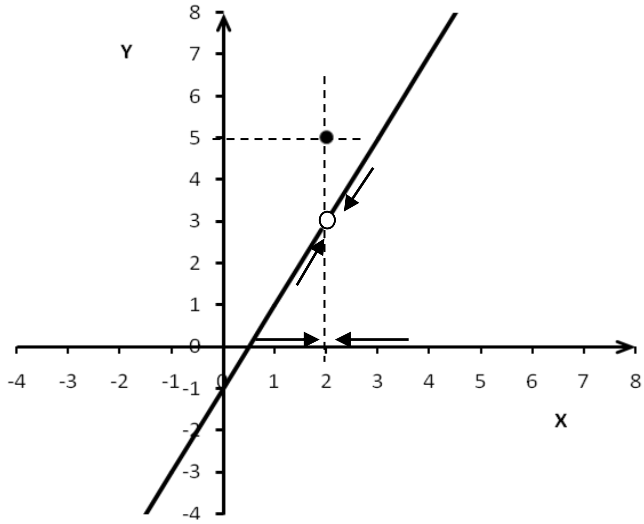
Ejemplo 1: Dada la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1 & \text{si } x\neq 2 \\ 5 & \text{si } x=2 \end{cases}$$

1° Se debe graficar la función.



2° Se debe analizar el valor al que la función tiende cuando x tiende al valor 2. Esto se hace acercandonos a x = 2 por la izquierda y por la derecha. Estos dos límites deben ser iguales para que exista el límite de la función. Observando la gráfica de la f(x) (ver la siguiente gráfica), cuando nos acercamos a 2 por la izquierda, vemos que f(x) se acerca al valor 3, y cuando nos acercamos a 2 por la derecha se observa que la gráfica de la función tiende al valor 3. Es decir:



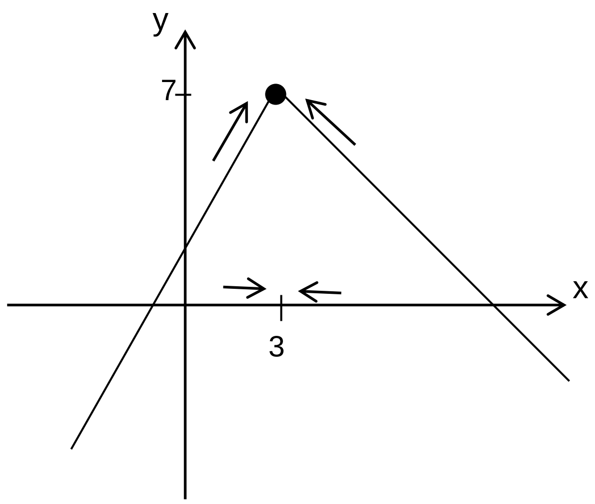
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=3 \quad \text{(límite por izquierda de f(x))}\\ \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=3 \quad \text{(límite por derecha de f(x))}\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=3$$

Para nuestro caso ambos límites son iguales a 3, por lo tanto el límite de f(x) cuando x tiende a 2 existe y es igual a 3, a pesar que f(2) = 5, según su definición.

Ejemplo 2: Dada la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{si } x<3\\ 10\text{ - x} & \text{si } x\geq 3\end{cases}$$

1° Graficamos la función.



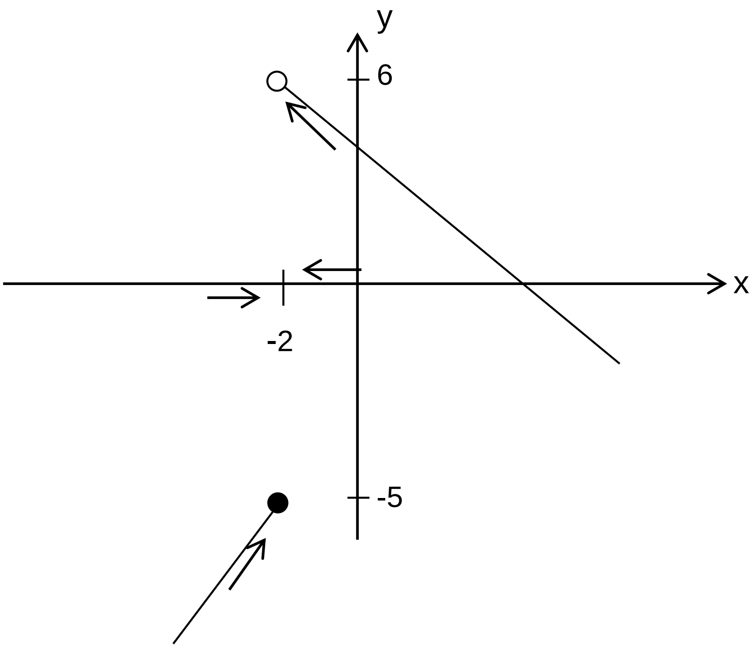
Analizamos el valor al que tiende la función cuando la variable x tiende a 3, acercándonos a 3 por la derecha y por la izquierda:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=7 \textit{ límite de } f(x) \textit{ por izquierda}\\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=7 \textit{ límite de } f(x) \textit{ por derecha}\end{array}\right\}\quad \begin{array}{l}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3} f(x)=7 \textit{ y concide con el valor}\\ \textit{de la función o sea } f(3)=7\end{array}$$

Ejemplo 3: Dada la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases} 6x+7 & \text{si } x\leq -2 \\ 4-\text{x} & \text{si } x>-2 \end{cases}$$

1° Graficamos la función.



Analizamos el valor al que tiende la función cuando la variable x tiende a -2, acercándonos a -2 por la derecha y por la izquierda:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = -5 \; \textit{límite de } f(x) \textit{ por izquierda} \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 6 \; \textit{límite de } f(x) \textit{ por derecha} \end{array}\right\}$$

Como estos límites son distintos entonces **no existe** el límite de la función, sin embargo f(-2) = -5

CONTINUIDAD.

Decimos que una función dada por y = f(x) es continua en un punto de abscisa x = a si se cumplen las siguientes condiciones:

I) La función está definida en x = a, es decir, **a** pertenece al dominio de la función.

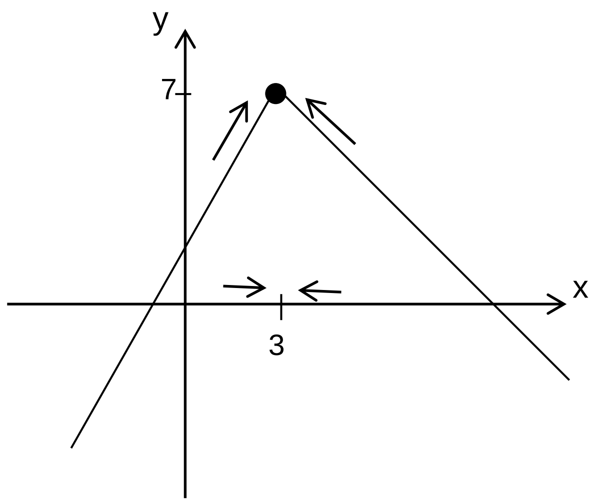
II) Existe el límite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, y es un valor finito.

III) El límite para x tendiendo a **a** es igual al valor de la función en el punto de abscisa x = **a**:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Ejemplo: En la función:

$$f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{si } x<3\\ 10-x & \text{si } x\geq 3\end{cases}$$



$I - f(3)=7$

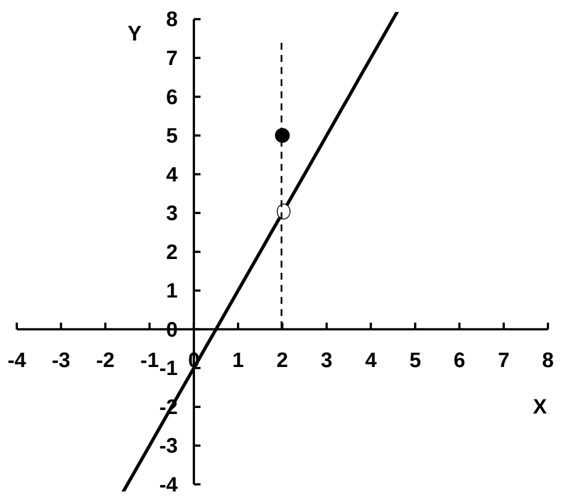
$$\left.\begin{array}{l} II - \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=7 \\ \quad\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=7\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 3} f(x)=7$$

$III - f(3)=\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

Podemos asegurar que la función es **continua** en x= 3.

Ejemplo: En la función:

$$f(x)=\begin{cases}2x-1 & \text{si } x\neq 2\\ 5 & \text{si } x=2\end{cases}$$



$I - f(2) = 5$

$$\left.\begin{array}{l} II - \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 3 \\ \quad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$$

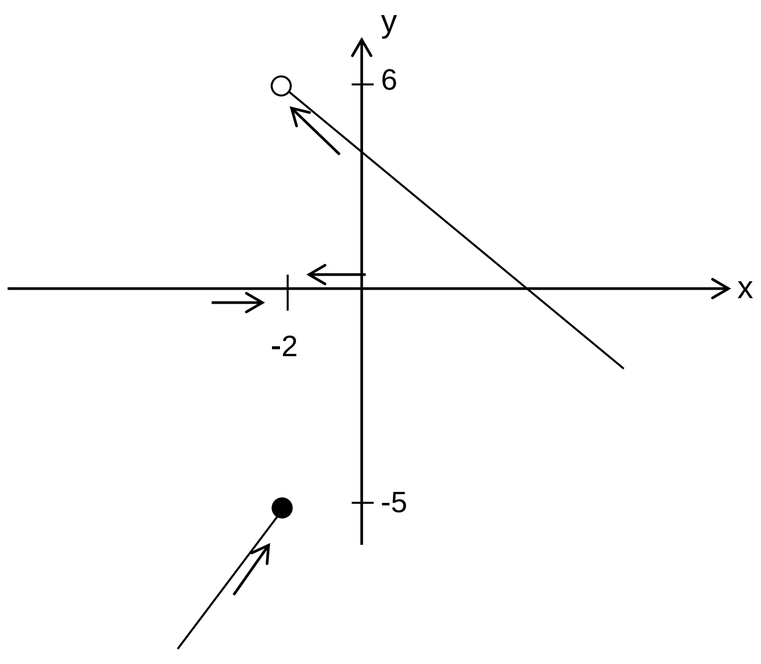
$III - f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2} f(x)$

En este caso la función **no** es **continua** en x = 2. Como existe el límite de la función cuando x tiende a 2, esta discontinuidad recibe el nombre de DISCONTINUIDAD EVITABLE.
Para evitar esta discontinuidad, se redefine la función haciendo coincidir el valor de la función en x= 2 con el valor del límite.

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Ejemplo: En la función:

$$f(x) = \begin{cases} 6x + 7 & \text{si } x \leq -2 \\ 4 - x & \text{si } x > -2 \end{cases}$$



$I - \ f(-2) = -5$

$$\left.\begin{array}{l} II - \ \underset{x \to -2^-}{lím} \ f(x) = -5 \\ \quad \underset{x \to -2^+}{lím} \ f(x) = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \textit{No existe el } \underset{x \to -2}{lím} \ f(x)$$

En este caso la función **no** es **continua** en x = -2. Como no existe el límite de la función cuando x tiende a - 2, esta discontinuidad recibe el nombre de DISCONTINUIDAD NO EVITABLE.

Actividad.

Representar las funciones, calcular los límites indicados y analizar la continuidad.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x \leq 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad \underset{x \to 1}{lím} \ f(x)$

b) $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \leq -2 \\ 3\text{-}x & \text{si } x > -2 \end{cases} \qquad \underset{x \to -2}{lím} \ f(x)$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \neq 1 \\ 5 & \text{si } x = 1 \end{cases} \qquad \underset{x \to 1}{lím} \ f(x)$

d) $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \\ 7 - 2x & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad \underset{x \to 1}{lím} \ f(x)$

ENUNCIADOS DE TEOREMAS SOBRE EL CÁLCULO DE LÍMITES.

Dados los números reales m y n:

1) $\lim_{x \to a} (mx + n) = ma + n$

2) $\lim_{x \to a} n = n$

3) $\lim_{x \to a} x = a$

4) Si $K \in$R y existe el $\lim_{x \to a} f(x)$ entonces

$$\lim_{x\to a} Kf(x) = K \lim_{x\to a} f(x)$$

5) para a ≥ 0, $\lim_{x\to a}\sqrt{x} = \sqrt{a}$

6) Si existen los límites: $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ entonces:

6.1) $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

6.2) $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$

6.3) $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$

6.4) $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)};\quad si \quad \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

CÁLCULO DE LÍMITES.

a) Ejemplo: $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x}{x+3}$

Aplicando sucesivamente los teoremas precedentes resulta:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+2x}{x+3} = \frac{(-1)^2+2(-1)}{(-1)+3} = -\frac{1}{2} =$$

b) Ejemplo: $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x-3}$

Si reemplazamos x por 3 resulta una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

Para eliminar la indeterminación debemos factorizar el numerador (y eventualmente el denominador) de modo de poner en evidencia el “factor responsable“ del $\frac{0}{0}$. Dicho factor es (x – 3), ya que al reemplazar x por 3 da cero. En general si el límite es para x tendiendo a **<u>a</u>** es de la forma (x – a).

Para factorizar el polinomios del numerador, hallamos la raíces de la ecuación:

$x^2 - 2x - 3 = 0$ Aplicando la expresión que nos permite calcular la raíces, obtenemos:

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \bullet 1 \bullet (-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Luego

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x+1).(x-3)}{x-3} = \lim_{x \to 3} (x+1) = 4$$

Actividad.

Calcular los siguientes límites

a) $\underset{x \to 2}{lím}\, 3x^2 + 2x - 1 =$

b) $\underset{x \to 0}{lím}\, 4x^3 + 3x =$

c) $\underset{x \to 1}{lím} \dfrac{x^2 - 6x + 5}{2x^2 - 2}$

d) $\underset{x \to -3}{lím} \dfrac{x^2 - x - 12}{x^2 - 9}$

e) $\underset{x \to 1}{lím} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}$

f) $\underset{x \to -4}{lím} \dfrac{3x + 12}{2x^3 + 128}$

g) $\underset{x \to -1}{lím} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$

h) $\underset{x \to -1}{lím} \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + x^2 + x + 1}$

i) $\underset{x \to 0}{lím} \dfrac{3x^3 + 6x^2}{2x^4 - 15x^2}$

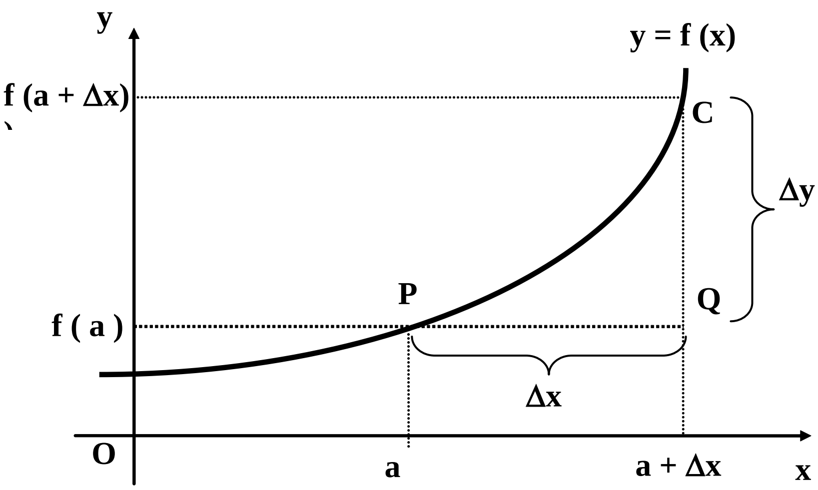
j) $\underset{x \to 2}{lím} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$

k) $\underset{t \to 0}{lím} \dfrac{2 - \sqrt{4 - t}}{2t}$

l) $\underset{x \to 2}{lím} \dfrac{4x - 3}{x^2 - 4x + 4}$

INCREMENTOS.

Dada una función por y = f(x) podemos interesarnos en conocer la rapidez de variación de dicha función en un punto dado de abscisa a.
Si la gráfica de la función es la representada en la figura, a la abscisa a le corresponde una ordenada que indicamos como f(a).



Si ahora queremos saber que pasa con la función cuando nos corremos a la derecha o a la izquierda de a, debemos darle a la abscisa un incremento distinto de cero que llamaremos Δx.

Supongamos que el Δx elegido sea la medida del segmento PQ. Pasamos de ese modo a un nuevo punto de abscisa a + Δx dado que, como ya dijimos, la abscisa de un punto (en valor absoluto) mide la distancia entre dicho punto y el origen de las coordenadas.

La nueva ordenada será entonces f(a+Δx): ¿Cómo se modificó la función?
Es evidente que el cambio que experimentó y = f(x) viene dado por la diferencia f(a+Δx) – f(a). Precisamente a esa diferencia la llamamos incremento de la función y la simbolizamos con Δy.

Al cociente $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ se lo denomina Cociente Incremental.

DEFINICION DE DERIVADA.

Si aplicamos límite con $\Delta x \to 0$ al cociente incremental, se obtiene, si existe, un número llamado derivada de la función en $x = a$, y se simboliza $f'(a)$

$$\boxed{f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}}$$

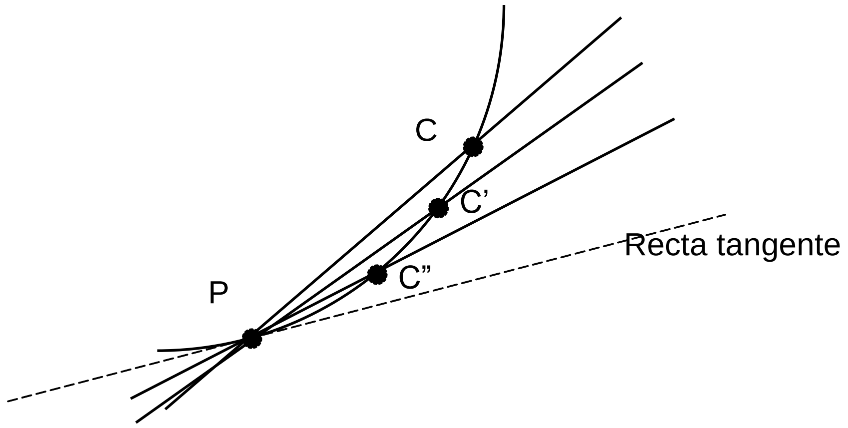
y decimos que la función es derivable en el punto de abscisa **a**.
Si lo es en todos los valores de su abscisa se obtiene la función derivada, que en general se expresa:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA.

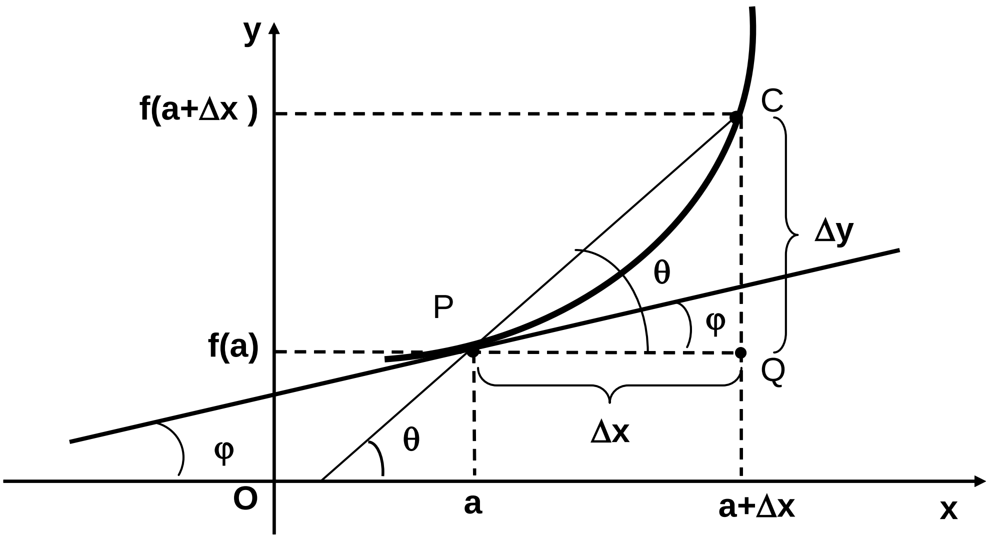
Una interpretación muy importante de la derivada es la que surge analizándola desde el punto de vista geométrico.

Pero antes de avanzar en este tema vamos a precisar qué entendemos por recta tangente a una curva en un punto. En la figura hemos trazado una curva y una secante a la misma que pasa por los puntos P y C.



Si dejamos fijo P y tomamos nuevas ubicaciones para C de modo que C', C", etc. recorran la curva acercándose cada vez más a P, vemos que las sucesivas secantes que pasan por PC', PC", etc., se aproximan a una posición límite que es la que definimos como recta tangente a la curva en P.

Luego si volvemos al gráfico en donde explicamos la noción de derivada vemos que en el triángulo $\overset{\Delta}{PQC}$



$$\frac{QC}{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\theta$$

Por lo tanto la derivada en el punto P es:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} tg\theta$$

Pero cuando $\Delta x \to 0$, C recorre la curva acercándose a P de modo que las secantes se aproximan a la recta tangente y si φ es la inclinación de ésta última entonces $\theta \to \varphi$

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{C \to P} tg\theta = \lim_{\theta \to \varphi} tg\theta = tg\varphi$$

Luego la derivada en un punto se interpreta geométricamente como la pendiente m de la recta tangente en el punto considerado, siendo la recta de ecuación: y = mx + n.

REGLAS DE DERIVACION.

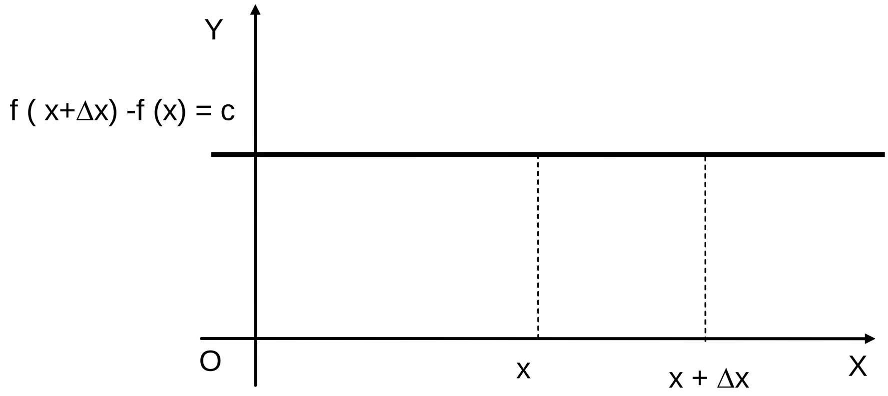
El cálculo de derivada aplicando la definición resulta en general muy complicado y es mejor hallar reglas de derivación que convenientemente combinadas permiten derivar en una forma más práctica.

DERIVADA DE LA FUNCION CONSTANTE.

Sea f (x) = c donde c $\in$ R, luego

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c-c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

Por lo tanto $f'(x) = 0$ en la función **constante**



La derivada de una constante es cero. Gráficamente corresponde a la pendiente de una recta paralela al eje x.

DERIVADA DE LA FUNCION IDENTIDAD.

Sea f (x) = x, luego

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x+\Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1$$

$f'(x) = 1$ La derivada de la variable independiente es igual a uno. (Pendiente de la recta a 45°)

Sea ahora, $f(x) = x^2$, luego

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} =$$

$$\underset{\Delta x \to 0}{lím} \frac{\Delta x (2x + \Delta x)}{\Delta x} = 2x$$

$$f'(x) = 2x$$

Sea ahora, $f(x) = x^3$, luego

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2 \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} =$$

$$\underset{\Delta x \to 0}{lím} \frac{\Delta x\left(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2\right)}{\Delta x} = 3x^2$$

$$f'(x) = 3x^2$$

Podemos, inferir la siguiente Regla de derivación:

$$\boxed{\text{Si} \quad f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = n\,x^{n-1}}$$

DERIVADA DE LA SUMA O DIFERENCIA DE FUNCIONES.

Sea f(x) = u(x) $\pm$ v(x) donde u = u(x) y v = v(x) son dos funciones derivables. Luego

$$f'(x) = (u(x) \pm v(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) \pm v(x+\Delta x) - (u(x) \mp v(x))}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} = u'(x) \pm v'(x)$$

$$f'(x) = (u \pm v)' = u' \pm v'$$

La derivada de una suma o diferencia de funciones derivables es la suma o diferencia de sus derivadas. Esta regla se puede extender fácilmente a un número finito de funciones.

Ejemplo:

Si $f(x) = x^3 + x^2 - 2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2 + 2x$

FÓRMULA PARA DERIVAR PRODUCTOS Y COCIENTES DE FUNCIONES.

Sea f(x) = u(x) ● v(x) donde u = u(x) y v = v(x) son dos funciones derivables.

$$\boxed{f'(x) = u'.v + u.v'}$$

Si se trata del producto de una constante por una función entonces

$f(x) = k.q(x)$

$f'(x) = k.q'(x)$

La derivada de una constante (*k*) por una función es igual a la constante por la derivada de la función.

Para un cociente de dos funciones derivables debemos aplicar la fórmula.

$$f'(x) = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$$.

TABLA DE DERIVADAS.

1.- $(u \pm v)' = u' \pm v'$

2.- $(u \bullet v)' = u' \bullet v + u \bullet v'$

3.- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \bullet v - u \bullet v'}{v^2}$

4.- $(k \bullet f(x))' = k\, f'(x)$

5.- $(C)' = 0 \quad \text{con} \quad \mathrm{C} = \mathrm{cte.}$

6.- $(x^n)' = n.x^{n-1}$

7.- $(sen\, x)' = \cos x$

8.- $(\cos x)' = -senx$

9.- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

10.- $(e^x)' = e^x$

Actividad.

Hallar la función derivada de

a) $f(x)=x^2-\dfrac{x}{2}$

b) $f(x)=x^3$

c) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

d) $f(x)=4+\sqrt{x}$

e) $f(x)=x-\dfrac{2}{x}$

f) $f(x)=5$

g) $f(x)=3x^3+5x-2$

h) $f(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{5}{x}$

i) $f(x)=\dfrac{3}{x^3}+\sqrt{x}$

j) $f(x)=3\,x^2+sen\,x$

k) $f(x)=\sqrt{x}-\cos x+e^x$

l) $f(x)=e^x+tg\,x-\ln x$

APLICACIONES DE LA DERIVADA.

Es importante recordar el concepto de derivada de una función en un punto y su interpretación geométrica.

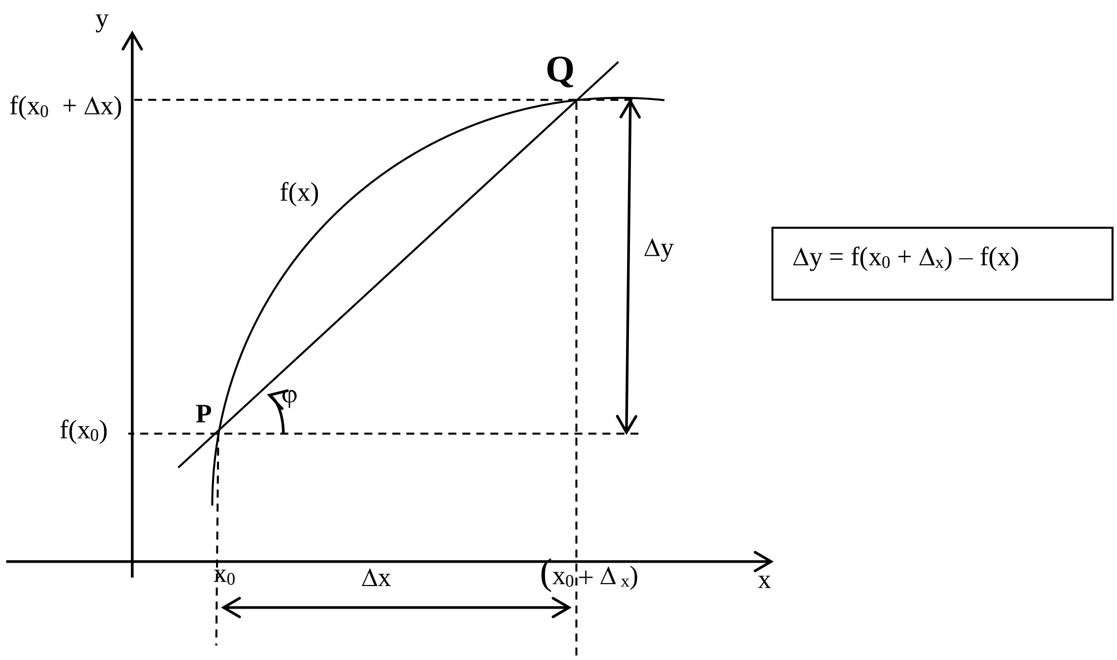
DEFINICIÓN: Se llama **derivada** de una función continua en un punto al límite del cociente incremental cuando el incremento de la variable independiente tiende a cero.

Es decir: La derivada de la función f(x) en x_0 se representa por $f'(x_0)$ y de acuerdo con la definición es:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

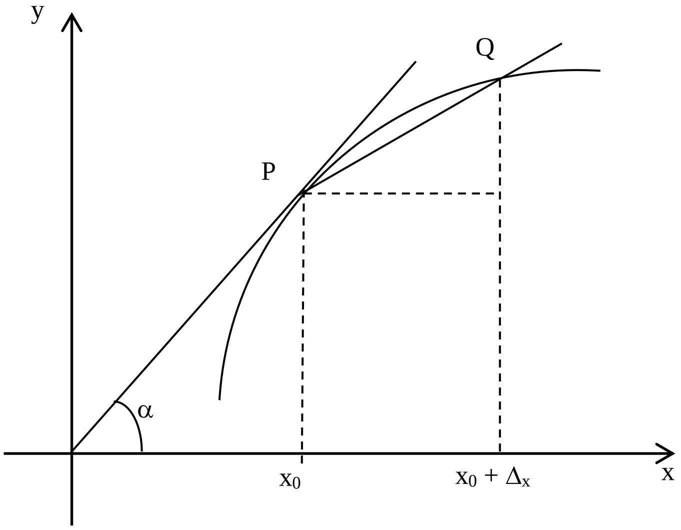
Este límite finito es un número.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA: Sea f(x) una función continua que admite derivada en el punto de abscisa $\mathbf{x_0}$. A este valor le corresponde el punto **P** de la curva. Al valor de abscisa $(x_0 + \Delta x)$ le corresponde el punto Q de la curva.
Si se traza la recta $\overline{PQ}$ secante de la curva.



Observamos que: $tg\ \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)}{\Delta x}$ es decir, el cociente incremental es la pendiente de la recta secante $\overline{PQ}$

Cuando Δx se hace más pequeño, el punto Q se aproxima a P. Cuando $\Delta x \to 0$ la recta secante pasa a ser tangente en P y determina el ángulo α (con el semieje positivo de las x).



Por lo tanto, el límite del cociente incremental cuando $\Delta x \to 0$,o sea la <u>derivada</u> <u>en</u> el punto de abscisa x_0, <u>es un número que mide la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto P</u>.

PUNTOS CRÍTICOS: Se llaman así a aquellos puntos en que la derivada es cero o no está definida.

<u>Ejemplos</u>: Determinar los puntos críticos de la función

a) $f(x)= x^3 - 6x^2 + 9x + 3$

Derivando se tiene:

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ La derivada está definida para todo x.

Hacemos $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0$

Simplificando tenemos: $x^2 - 4x + 3 = 0$

Resolviendo la ecuación de segundo grado: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} \Rightarrow x_1 = 3$

$x_2 = 1$

Por lo tanto f '(x) se anula para $x_1 = 3$ y $x_2 = 1$, luego $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$ son las abscisas de los puntos críticos de f (x).

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

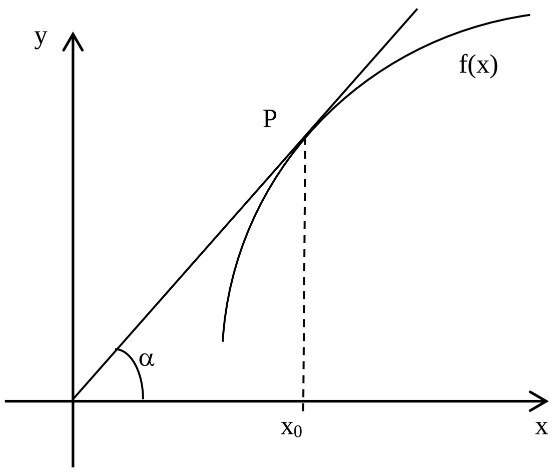
La derivada no está definida en x = 1; además se anula cuando el numerador es igual a cero, es decir:

$$x^2 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(x-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{matrix}$$

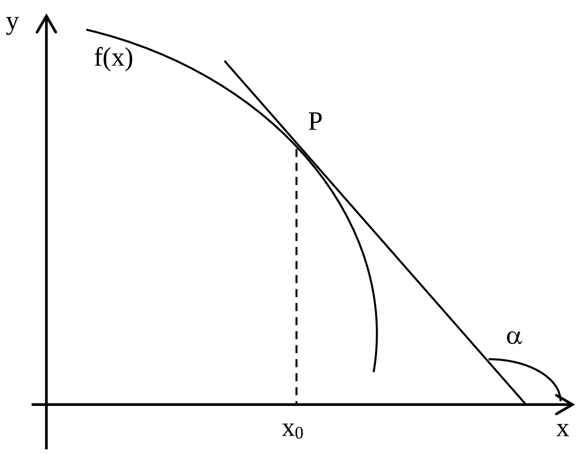
Por lo tanto la función tiene tres puntos críticos de abscisa: $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = 1$.

MÁXIMOS Y MÍNIMOS RELATIVOS.

Si $f'(x_0) > 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha \text{ es un ángulo agudo} \\ \text{la función es creciente} \end{cases}$

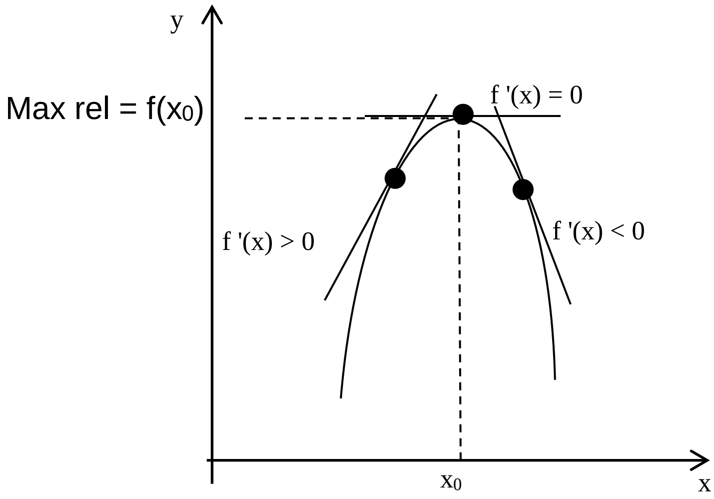


Si $f'(x_0) < 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha \text{ es un ángulo obtuso} \\ \text{la función es decreciente} \end{cases}$

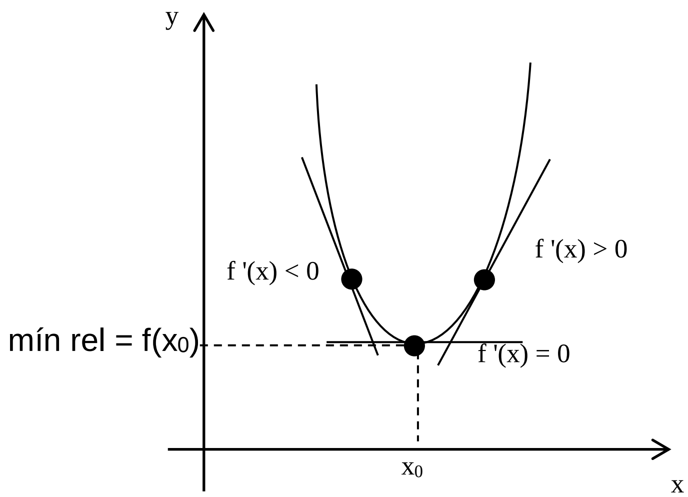


Si la derivada de una función en un punto es positiva, la función es creciente en dicho punto; si la derivada es negativa, la función es decreciente.

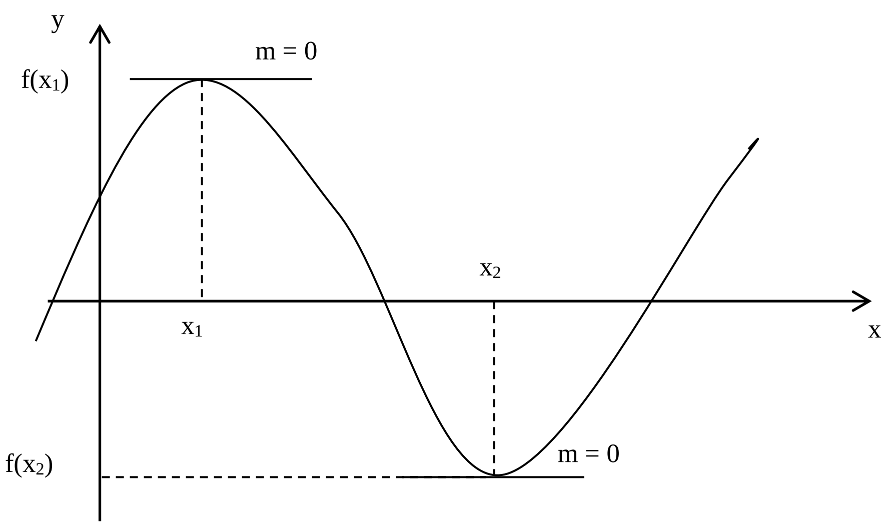
Si a la izquierda de un punto la derivada es positiva y a la derecha es negativa, en ese punto existe un **Máximo relativo**



Si a la izquierda del punto crítico, la derivada es negativa y a la derecha es positiva; en ese punto existe un **mínimo relativo.**

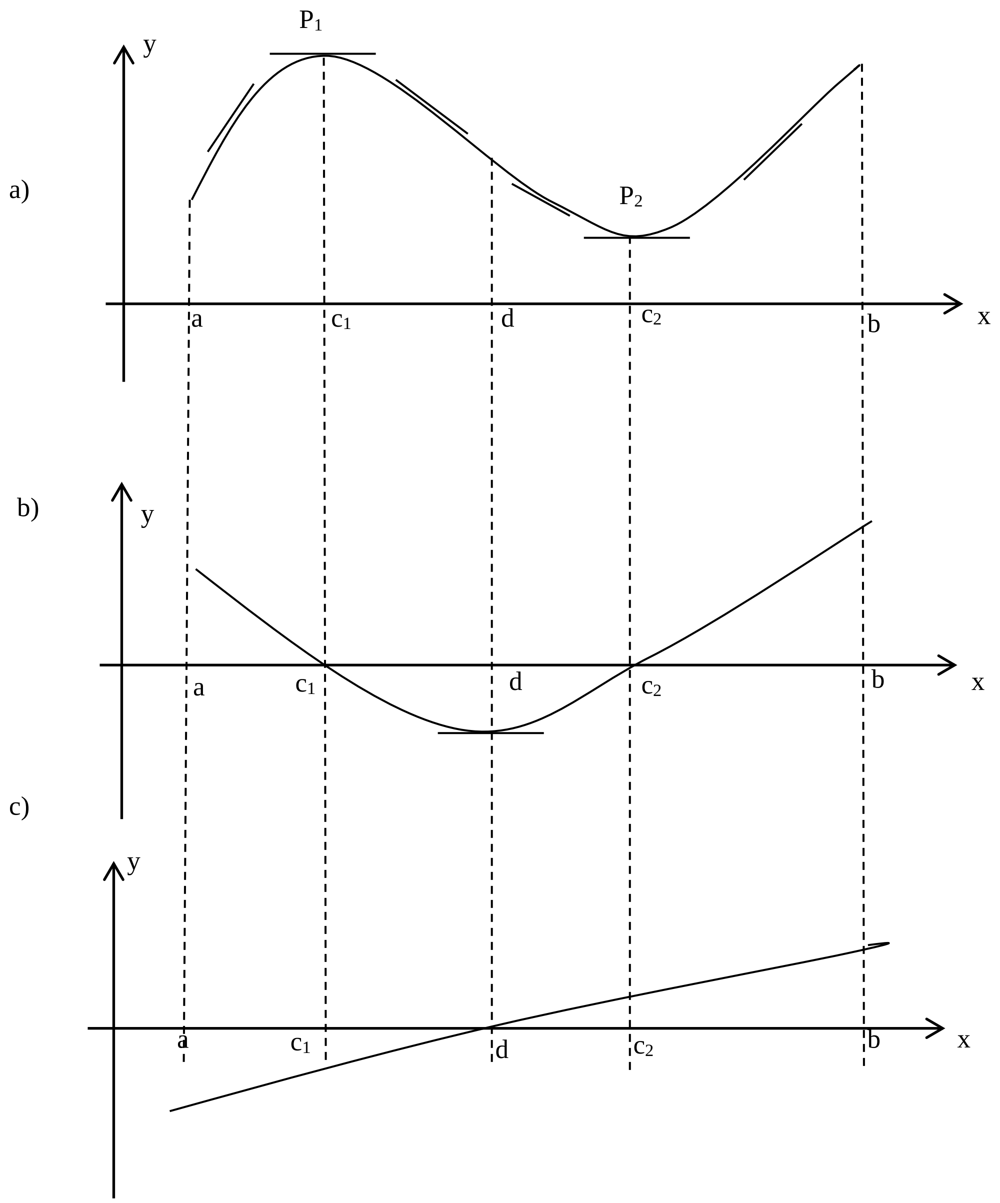


Observación: Si en el punto en que la función tiene un máximo relativo o un mínimo relativo existe derivada, ésta debe ser cero; es decir, la tangente en dicho punto es horizontal.



ESTUDIO DE LA CONCAVIDAD

La siguiente figura muestra, en la parte a), la gráfica de una función, que admite derivadas sucesivas, que es cóncava hacia abajo entre los puntos a y d y es cóncava hacia arriba entre los puntos d y b. El gráfico b) muestra en forma aproximada, la gráfica de la función derivada primera y en c), también en forma aproximada, la gráfica de la función derivada segunda.



Vemos que en el intervalo en el que la curva es cóncava hacia abajo la función derivada segunda es negativa, y en el intervalo en que la curva es cóncava hacia arriba, la función derivada segunda es positiva. El punto de la gráfica en el que cambia el sentido de la concavidad se llama **Punto de Inflexión.**

Conclusión: Si una función tiene derivada segunda en un intervalo (a,b)

- Si $f''(x) > 0$, entonces la gráfica de f(x) es cóncava hacia arriba.
- Si $f''(x) < 0$, entonces la gráfica de f(x) es cóncava hacia abajo.

Definición: Diremos que el punto P(d,f(d)) de la gráfica de la función es un Punto de Inflexión si existe la recta tangente a la curva en P, y en él cambia el sentido de la concavidad de la gráfica.

Técnica para realizar el estudio completo de una función:

1º. Se determinan los valores críticos de la función, o sea los puntos en los cuales $f'(x) = 0$, o no existe.

2º. Se determinan los valores críticos de f '(x). O sea los puntos en los cuales $f''(x) = 0$, o no existe.

3º. Se subdivide el dominio de la función, en subintervalos, teniendo en cuenta los valores críticos de f (x) y de f ' (x).

4º. Se analiza el signo de la derivada primera de la función en cada subintervalo, para determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función.

5º. Se determinan los máximos y mínimos relativos de la función.

6º. Se analiza el signo de la derivada segunda de la función en cada subintervalo, para determinar la concavidad de la función.

7º. Se determinan los puntos de inflexión de la función.

8º. Se grafica en forma aproximada la función.

Ejemplo. Realizar el estudio completo de la función: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

- Hallamos la derivada primera de la función: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$
- Igualamos a cero la derivada primera de la función

$$f'(x) = 0 = 3x^2 - 12x + 9 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2}$$

los valores de x son: $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$

- Hallamos la derivada segunda de la función, la igualamos a cero y calculamos los valores de las abscisas de los puntos críticos de f ‘(x), para obtener los posibles puntos de inflexión de f(x).

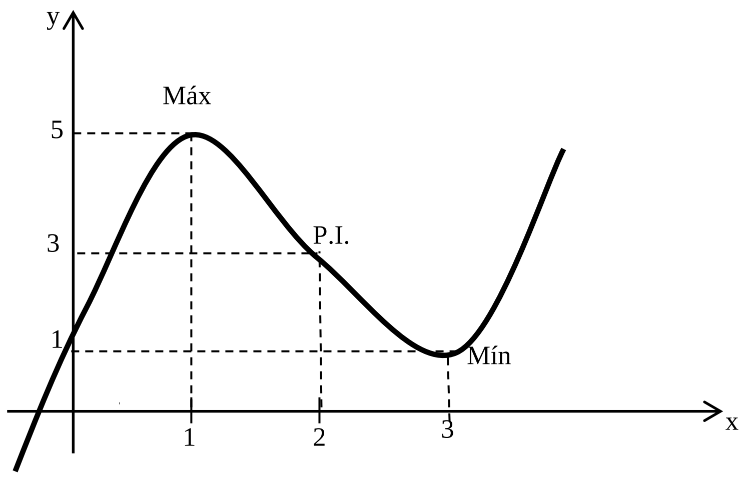
$$f''(x) = 6\,x^2 - 12$$

$$f''(x) = 0 = 6\,x^2 - 12 \quad \Rightarrow \; x = 2$$

- Confeccionamos una tabla en la cual volcamos el estudio de los signos de las derivadas primera y segunda en los subintervalos en que dividimos el dominio de la función y las conclusiones que obtenemos.

	f(x)	f ‘(x)	f ‘’(x)	Conclusiones
(- ∞ , 1)		+	-	La función crece y es cóncava hacia abajo
1	5	0	-	Existe un Máximo Relativo
(1 , 2)		-	-	La función decrece y es cóncava hacia abajo
2	3	-	0	Existe un Punto de Inflexión
(2 ,3)		-	+	La función decrece y es cóncava hacia arriba
3	1	0	+	Existe un Mínimo Relativo
(3 , ∞)		+	+	La función crece y es cóncava hacia arriba

- Graficamos en forma aproximada la función.



ACTIVIDAD.

Ejercicio 1: Hallar los puntos críticos de las siguientes funciones:

a) f (x) = $x^2 - 5x + 6$

b) f (x) = $x^{4/3} + 4x^{1/3}$

c) f (x) = $\sqrt[3]{x-2}$

d) f (x) = $x^4 + 4x^3 - 20x^2 + 9$

Ejercicio 2: Realizar el estudio completo de las siguientes funciones, determinando: los puntos críticos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, la concavidad y los extremos relativos. Realizar la gráfica aproximada de la función.

a) f (x) = $x^2 + 4x + 6$

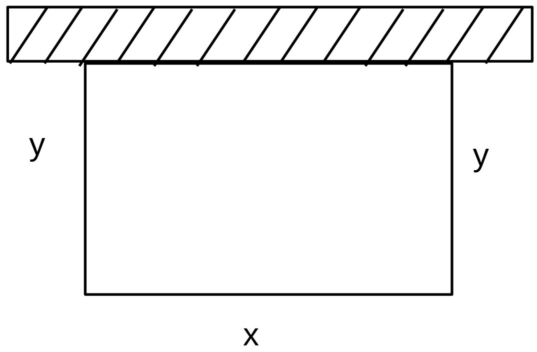
b) f (x) = $2x^3 - 3x^2 - 36x + 30$

c) f (x) = $x^4 - 2x^2 - 3$

d) f (x) = $2x^2 - x^4$

PROBLEMA DE APLICACIÓN.

Con un rollo de alambre de 48 m. de longitud, se quiere construir junto a una pared un recinto cuya superficie sea máxima.



Sup. rectángulo = *base x altura* $\therefore$ $S(x,y) = x \bullet y$ (1)

Debemos construir una variable de acuerdo a las condiciones del problema.

x e **y** están vinculadas de manera tal que podemos escribir una en función de la otra.

De acuerdo con el problema será $2\,y + x = 48m \quad \therefore \quad y = 24 - \dfrac{x}{2}$

Reemplazando en (1)

$$F(x) = x \bullet \left(24 - \frac{x}{2}\right) = 24x - \frac{x^2}{2}$$

$F(x) = 24x - \dfrac{x^2}{2}$ Esta es la función que debemos maximizar.

$F'(x) = 24 - x$

Luego $F'(x) = 0 \Rightarrow \quad 24 - x = 0 \quad \Rightarrow x = 24m.$

Para demostrar que es un máximo, calculamos

$F''(x) = -1 < 0$ $\therefore$ sólo existe un Máximo y corresponde a x = 24.

Por lo tanto, será $y = 24 - \dfrac{24}{2} \Rightarrow y = 12m.$

$$Superficie\ máxima = x \bullet y = 24m \bullet 12m = 288m^2$$

Actividad.

Problema 1- Resolver el problema anterior aprovechando el ángulo de una pared.

Problema 2- Con 400 m. de alambre se quiere delimitar una superficie rectangular. ¿Cuáles deben ser las dimensiones para que el área sea máxima?

Problema 3- Con una hoja de cartón de 54 cm. de lado se quiere construir una caja sin tapa de base cuadrada y capacidad máxima. Calcular las dimensiones que debe tener la caja.

Problema 4- De todos los rectángulos de 25 cm2 de superficie. ¿Cuál es el de menor perímetro?

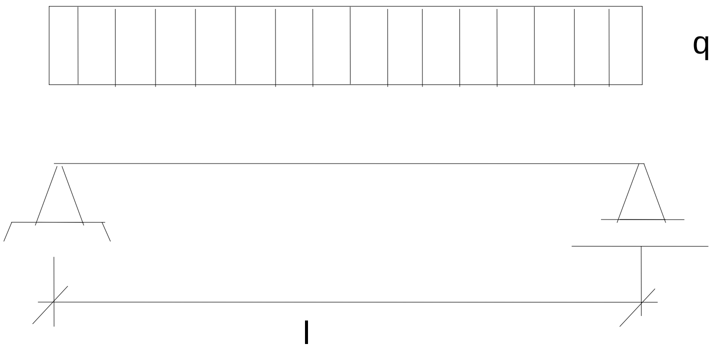
Problema 5- Sobre la orilla de un canal se necesita limitar un terreno rectangular, alambrando los tres lados que no pertenecen a la orilla. Para construir el alambrado se deben utilizar 1.800 m. de alambre. ¿Cuáles son las dimensiones que debe tener el terreno para que su superficie sea máxima?

Problema 6- Entre todos los pares de números positivos cuyo producto es 144, hallar dos cuya suma sea máxima.

Problema 7: El momento flector de una viga simplemente apoyada sometida a una carga uniformemente distribuida está dado por la expresión:

$$M_x = q\frac{1}{2}x - qx.\frac{x}{2} = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}$$

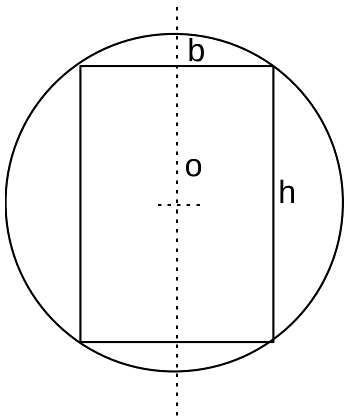
Hallar el momento flector máximo y su ubicación.



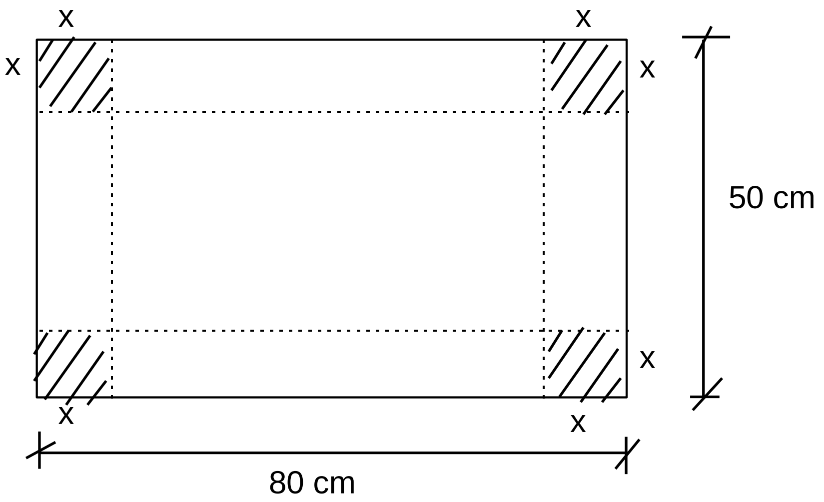
Problema 8: De un tronco circular se ha de aserrar una viga de sección rectangular, de modo que para una longitud dada su resistencia represente un máximo.

RESISTENCIA: R = cuadrado de la altura x ancho sección transversal

$\therefore$ R = h^2 . b Rta.: Resistencia máxima cuando $b = 2\frac{r}{3}\sqrt{3}$



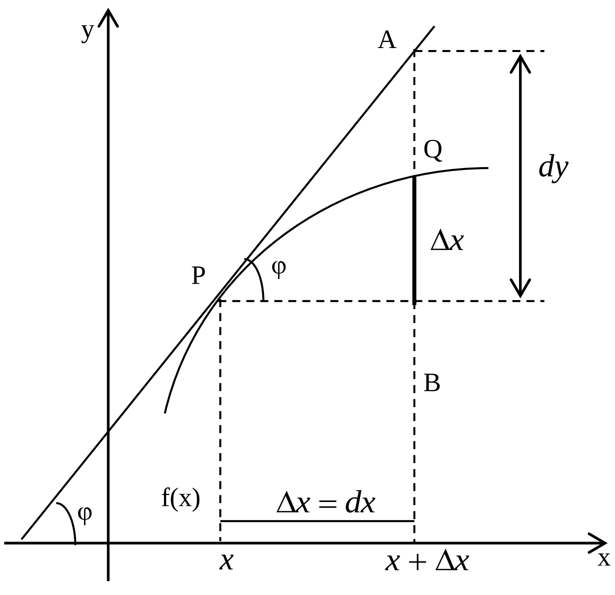
Problema 9: Con una hoja de cartón de 80 cm. de largo y 50 cm. de ancho, se quiere construir un caja rectangular sin tapa, cortando los cuadrados de los vértices, como se indica en la figura y levantando las aletas de los costados. Calcular las dimensiones de la caja para que el volumen de la misma sea el máximo.



DIFERENCIALES: Supongamos que la función $f(x)$ tiene derivada $f'(x)$
Definimos el <u>diferencial de x</u> y <u>el diferencial de y</u> que simbolizaremos **dx** y **dy** respectivamente.
Por definición: $dx = \Delta x$

$$dy = f'(x)\,\Delta x \Rightarrow dy = f'(x)\,dx$$

es decir, el valor de dx coincide con el incremento de **x** y el valor de dy depende de la derivada de la función en x y del incremento Δx.
Gráficamente resulta:



Si por el punto P trazamos la recta tangente a la función f(x) y la prolongamos hasta la intersección de la vertical trazada por la abscisa (x + Δx), tenemos el punto A. El segmento $AB = dy$

Del gráfico $tg\,\varphi = \dfrac{dy}{dx}$
Como φ es el ángulo de inclinación de la recta tangente a la función, entonces

$$tg\,\varphi = f'(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore\ dy = f'(x) \bullet dx$$

ACTIVIDAD

Ejercicio 1: Hallar el dy de:

a) $y = x^3 + 5x$ b) $y = sen\, x + \ln x$

Ejercicio 2: Utilizar diferenciales para estimar el incremento en el volumen de un cubo cuando sus lados cambian de 10 cm a 10,1 cm. ¿Cuál es el incremento exacto del volumen?

Ejercicio 3:¿En cuanto aumenta aproximadamente el volumen de una esfera, si su radio de 15 cm. se aumenta en 2 mm.?