ANÁLISIS DE EFICIENCIA Y PRODUCTIVIDAD

Autor:
Francisco Javier Parra Rodríguez. Doctor en Ciencias Económicas y Empresariales.

ÍNDICE

Introducción.

Estos apuntes constituyen una introducción a las nuevas teorías de eficiencia y productividad a través de modelos de técnicas de estimación de frontera paramétrica y no paramétrica. La complejidad de estos cálculos determina que los ejercicios prácticos deban de realizarse mediante el auxilio de programas informáticos diseñados para dicho fin. Estos programas constituyen bien aplicaciones desarrolladas en lenguajes matemáticos de programación (SAS, CC++, etc…) y otros programas desarrollados en Windows o MSDOS de uso comercial. De los programas más habitualmente utilizados para estos fines tres de ellos EAP, DEAP y Frontier 4.1, los dos últimos desarrollados por CEAP son de difusión libre para usos académicos. Por esta razón los apuntes están enfocados para que puedan servir de ayuda en la utilización practica de dichos programas, por ello se incluyen ejemplos resueltos utilizando estos programas. Junto a los apuntes se incluyen los textos técnicos de dichos programas que complementan a los apuntes y facilitan el que cualquier problema de productividad y DEA pueda ser resuelto una vez realizado el curso.

Por otro lado, junto al análisis específico de la productividad y la eficiencia mediante técnicas de frontera se han incluido otros apartados que recogen los aspectos teóricos y prácticos para poder realizar cálculos de productividad mediante índices de productividad total de factores. Estos índices (Divisa, Fisher, Hulten, etc…) son más habituales en los manuales de estadística, por corresponder a técnicas de elaboración de índices ponderados que son utilizados para elaborar índices de precios y cantidades. Estos índices se mencionan en otras materias del master (tema 4), en donde se recogen los aspectos prácticos que aquí no se desarrollan.

8.1 Concepto y medición de la eficiencia productiva

8.1.1. Concepto de eficiencia productiva

Los términos: "eficiente", "ineficiente", "alta eficiencia", son vocablos de uso común en nuestro lenguaje habitual. Se suele escuchar frases como: "hay que aumentar la eficiencia de la empresa", "la industria A es mucho más eficiente que la industria B", "hay que conseguir un nivel de producción eficiente".

Puesto que frases como éstas se usan a diario no debería ser difícil definir la palabra "eficiencia". Sin embargo, con mucha frecuencia el concepto teórico de eficiencia acaba mal interpretado, y la medida de eficiencia, que, por otro lado es una herramienta muy útil y poderosa que puede ser empleada en campos y ocupaciones muy diversas, al ser empleada incorrectamente acaba transformándose en un instrumento que genera indicadores totalmente artificiales.

Una definición de "eficiencia" es la siguiente:

"La eficiencia es la relación entre un ingreso y un gasto; entre una entrada y una salida; entre un recurso y un producto"

La expresión en cualquiera relación de eficiencia toma la forma de una proporción: un output dividido por un input, y se presenta en forma matemática de la siguiente forma:

F = E/I

donde: F = eficiencia
I = output especificado
E = input especificado

Muchos análisis de la eficiencia en la economía se han basado en el cálculo de ratios del tipo de Tm de producto por trabajador, que aunque nos informa del rendimiento de la mano de obra, no nos dice nada acerca de otros factores productivos como la maquinaria, la energía, los capitales invertidos, etc. Farrell (1957) propuso un método para medir la eficiencia teniendo en cuenta varios factores de producción al mismo tiempo. Este autor descomponía la eficiencia de una empresa en dos componentes: Eficiencia técnica, que refleja la habilidad de obtener el máximo output para un determinado nivel de inputs, y Eficiencia asignativa, que refleja la habilidad de una empresa para utilizar los inputs en una proporción óptima, considerando los precios de los inputs. Estos dos conceptos combinados constituirían la eficiencia económica.

Los métodos para estimar la eficiencia pueden ser divididos en dos (Coelli, 1995): métodos paramétricos, que estiman una frontera estocástica por técnicas econométricas; y métodos no paramétricos, como el DEA, que se basa en la resolución del modelo por programación lineal.

El primer modelo propuesto de frontera econométrica, que se denomina frecuentemente frontera determinística, suponía la eficiencia explicada por una variable aleatoria no-negativa. Posteriormente, Aigner, Lovell y Smith (1977) y Meeusen y Van den Broeck (1977) propusieron independientemente la función frontera estocástica de producción. Ésta se diferencia de la anterior en la estructura del término de error. Se trata de un error compuesto por dos elementos: variable aleatoria no-negativa asociada con la ineficiencia técnica en la producción y, error aleatorio simétrico fuera del control de la empresa que tiene en cuenta otros factores, tales como el error de medida en la variable tomada como producto, errores de omitir variables significativas del modelo, el tiempo, el azar, etc.

La mayor ventaja de DEA, es su flexibilidad, en el sentido de que impone condiciones menos restrictivas sobre la tecnología de referencia (forma de la función de producción) y también en cuanto a que se adapta a contextos multiproducto e, incluso, de ausencia de precios, con relativa sencillez. Otra ventaja del DEA es que permite relacionar simultáneamente todos los inputs con los outputs, pudiendo identificarse cuales inputs están siendo infrautilizados.

8.1.1.Medidas orientadas al Input

Farrell ilustró sus ideas a través de un sencillo ejemplo en el cual las empresas utilizan dos inputs (xl y x2), y producen un output (y), bajo el supuesto de rendimientos constantes a escala.1 El conocimiento de la unidad isocuántica de una empresa (o economía) completamente eficiente2, representada por SS' in el Gráfico nº1, permite la medición de la eficiencia técnica. Si una empresa utiliza unas cantidades de input, definidos por el punto P, para producir una unidad de output, la ineficiencia técnica quedaría representada por la distancia QP, la cual representa el montante por el cual todos los inputs podrían ser proporcionalmente reducidos sin una reducción en el output. Este montante se expresa normalmente en términos de porcentaje a través del ratio QP/OP, el cual representa el porcentaje por el cual todos los inputs podrían reducirse.

[1] El supuesto de rendimientos constantes a escala permite representar la tecnología utilizando una unidad isocuántica. Asimismo, Farell también extendió su método a más de dos inputs, múltiples outputs y rendimientos no constantes a escala.

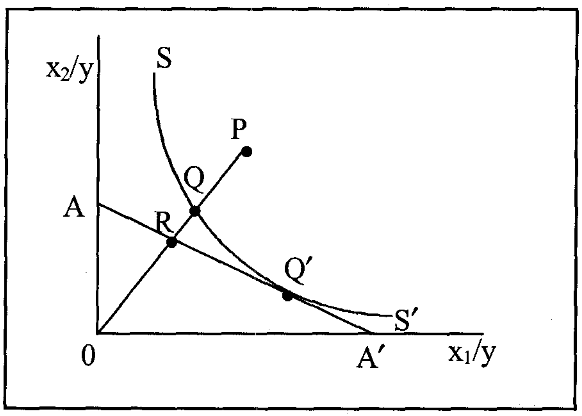
[2] La función de producción de una empresa (o economía) no es conocida en la práctica y debe ser estimada a través de las observaciones de una muestra de empresas en la industria concerniente. En nuestro caso, el DEA lo utilizamos para estimar esta frontera.

La eficiencia técnica (TE), se mide comúnmente por el ratio:

TEI = OQ/OP (1)
el cual es igual a 1 - QP/OP.[3]

Esta medida tomará un valor entre 0 y 1, constituyendo un indicador del grado de ineficiencia técnica de esta unidad. Un valor de 1 indicaría una empresa con eficiencia técnica completa. Por ejemplo, el punto Q es técnicamente eficiente, ya que está situado sobre la isocuántica eficiente.

Gráfico nº 1 Eficiencia técnica y localizada



Si la variación del precio del input, representada por la línea AA' en el gráfico 1 es también conocida, se podrá calcular la eficiencia asignativa. La eficiencia asignativa (AE) de la empresa operando en P se define como el ratio:

AEI = OR/OQ (2)

así, la distancia RQ representa la reducción de los costes de producción que ocurriría si la unidad fuera eficiente en la asignación de recursos. Así, el punto Q', sería eficiente técnicamente y asignativamente, siendo el ratio RQ/OQ la proporción de en la reducción de los costes al desplazarse de Q a Q’.

La eficiencia económica total se define a través de la tasa:

EEI = OR/OP (3)

---

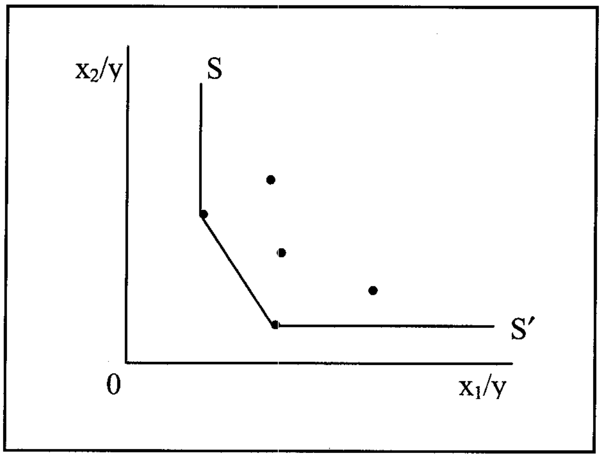
[3] El subíndice “I” se usa en la medida TE para indicar que la misma está orientada al input.

donde la distancia RP puede ser interpretada en términos de reducción de coste.

Cabe hacer notar, que la eficiencia económica puede ser calculada a través del producto de la eficiencia técnica y asignativa, estando comprendido su valor, también entre 0 y 1:

$$TEIxAEI = (OQ/OP)x(OR/OQ) = (OR/OP) = EEI \quad (4)$$

Gráfico nº2. Isocuántica Convexa Lineal



Estas medidas de eficiencia asumen que la función de producción de una empresa completamente eficiente es conocida. En la práctica este caso no se da, y la isocuánta de la empresa eficiente deberá ser estimada a través de datos muestrales.

8.2.3.Medidas orientadas al Output

La eficiencia técnica orientada al Input respondía a la pregunta: ¿qué cantidad de input puede ser reducida proporcionalmente sin cambiar la cantidad del output?

Otra pregunta alternativa sería: ¿en qué cantidad podemos aumentar el output sin alterar las cantidades de inputs utilizados? Su respuesta nos da una medida de eficiencia orientada al Output, en oposición a la descrita anteriormente. La diferencia entre las medidas orientadas al input y al output puede ser ilustrada usando un ejemplo sencillo de una industria que produce un solo output con un único input. En el Gráfico 3(a) en donde se representa una tecnología f(x) con rendimientos decrecientes a escala, y una empresa ineficiente operando en el punto P. La medida TE orientada al input de Farrell debería ser igual al ratio AB / AP, mientras que la medida TE orientada al output CP / CD. Las medidas orientadas al input y al output sólo proporcionarán medidas equivalentes de eficiencia técnica cuando existen rendimientos constantes a escala, pero serán distintas si los rendimientos son crecientes o decrecientes a escala. (Fare and Lovell 1978). Una tecnología con rendimientos constantes a escala como la representa en el gráfico 3(b), muestra que AB / AP = CP / CD, en el punto P.

Consideramos a continuación una industria que produce dos outputs (y_1 e y_2) con un input x. De nuevo, si asumimos rendimientos constantes a escala, podemos representar la tecnología a través de una curva unitaria de posibilidades de producción en dos dimensiones. Este ejemplo es el que se muestra en el Gráfico 4 donde la línea ZZ' es la curva unitaria de posibilidades de producción y el punto A se corresponde con la producción de una unidad ineficiente. Destacar que dicho punto está situado por debajo de la curva, ya que ZZ' representa la banda superior de las posibilidades de producción.

Gráfico nº3 Orientación Input y Output.

Medidas de eficiencia técnica y rendimientos de escala

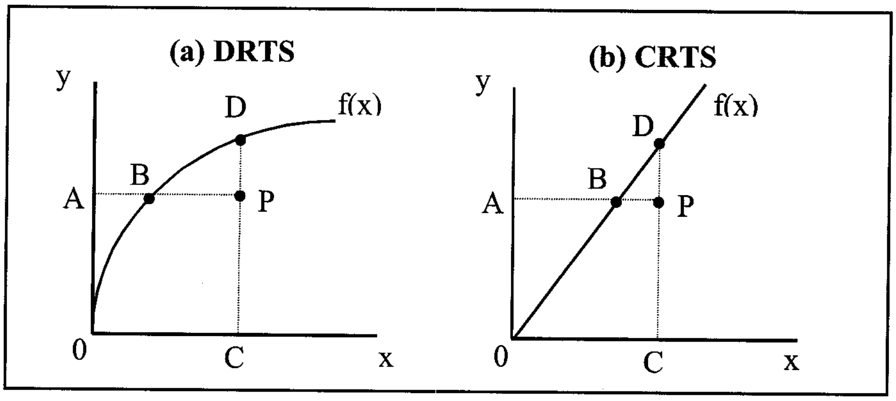
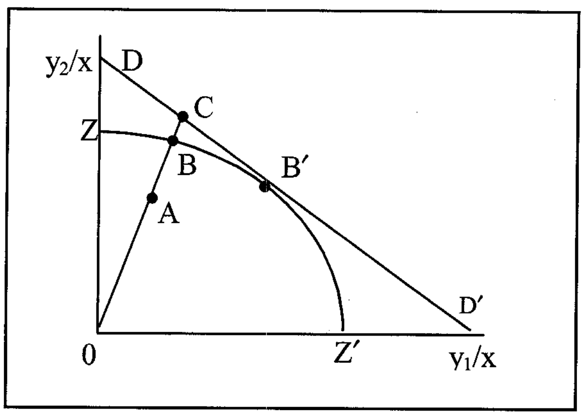


Gráfico nº4 Eficiencia técnica y de localización. Orientación al output.



Las medidas de eficiencia orientada a outputs de Farell deberían estar definidas como sigue. En el gráfico 2.4 la distancia AB representa la ineficiencia técnica. Esto es, el montante por el cual los outputs podrían ser incrementados sin requerir inputs extra. De hecho, una medida de eficiencia técnica orientada al output es el ratio:

TE_o = OA/OB (7)

Si tenemos en cuenta información de precios podremos dibujar la línea isocuántica de ingresos DD', y definir la eficiencia asignativa como:

AE_o = OB/OC (8)

la cual se interpreta como el incremento de ingresos (similar a la interpretación de la reducción de coste en el caso de la eficiencia asignativa en la medición orientada a los inputs).

Asimismo, se puede definir la eficiencia económica total como el producto de estas dos medidas

EE_o = (OA/OC) = (OA/0B)x(0B/OC) = TE_oxAE_o (9)

Significar que todas estas medidas están comprendidas entre 0 y 1.

Por último, señalar que todas las medidas de eficiente son unidades invariantes y pueden demostrarse que son equivalentes a las funciones de distancia descritas en Shepherd (1970).

8.2 Estimación de eficiencia en modelos con datos panel[4]

8.2.1. Técnica de datos panel.

Un modelo de datos de panel es según la definición más extendida, un modelo que utiliza muestras recogidas a individuos a lo largo de instantes de tiempo. Los modelos de datos de panel incluyen así información de una muestra de agentes económicos (individuos, empresas, bancos, ciudades, países, etc) durante un período determinado de tiempo, combinando, por tanto, la dimensión temporal y estructural de los datos.

Los modelos de datos de panel se aplican a conjuntos o bases de datos de series de tiempo agregadas para los mismos individuos; éstos conjuntos de datos suelen tener un número relativamente grande de individuos y pocas observaciones en el tiempo, o por el contrario podemos tener datos para un número grande de periodos pero para un número pequeño de individuos. Un ejemplo de este tipo de bases de datos es el panel de hogares de la Unión Europea (70.000 hogares en la UE), las encuestas de opiniones empresariales del Ministerio de Industria (3.000 empresas), los Indices Nielsen (5.000 hogares en España) para medir la audiencia televisiva, etc. Estos conjuntos de datos que son conocidos como datos de panel o datos longitudinales hay que diferenciarlos de las encuestas transversales que son repetidas en el tiempo pero no a los mismos individuos (por ejemplo, la Encuesta de Población Activa)[5].

El principal objetivo que se persigue al agrupar y estudiar los datos en panel es capturar la heterogeneidad no observable entre los agentes económicos como entre periodos temporales. Dado que esta heterogeneidad no se puede detectar exclusivamente con estudios de series temporales, ni tampoco con estudios de corte transversal, hay que realizar un análisis más dinámico incorporando a los estudios de corte transversal la dimensión temporal de los datos. Esta modalidad de analizar la información es muy usual en estudios de naturaleza empresarial,

---

[4] El material de esta sección está basado principalmente en Mauricio Mayorga M. y Evelyn Muñoz S. **LA TÉCNICA DE DATOS DE PANEL.UNA GUÍA PARA SU USO E INTERPRETACIÓN**. Banco Central de Costa Rica. División económica. Departamento de investigaciones económicas. Die-nt-05-2000. Septiembre, 2000.

[5] En los paneles de datos a veces también hay que sustituir individuos por falta de respuesta, pero no es el caso de las encuestas transversales en donde la muestra se renueva de forma sistemática, de manera que a un periodo de tiempo determinado, por ejemplo un año, los hogares de la muestra sean diferentes a los del periodo anterior. La falta de respuesta en los datos de panel como en otro tipo de encuesta a la hora de los análisis estadísticos deben de depurarse, bien eliminando todos los datos del individuo con falta de respuesta o eliminando únicamente los individuos con falta de respuesta en cada variable analizada.

ya que los **efectos individuales específicos** de cada empresa y los **efectos temporales** del medio son determinantes cuando se trabaja con este tipo de información.

Los efectos individuales específicos se definen como aquellos que afectan de manera desigual a cada uno de los agentes de estudio contenidos en la muestra (individuos, empresas, bancos). Estos efectos son invariables en el tiempo y se supone que afectan de manera directa a las decisiones que toman dichas unidades. Usualmente, se identifica este tipo de efectos con cuestiones de capacidad empresarial, eficiencia operativa, el “saber-hacer”(Know-how), acceso a la tecnología, etc.

Por su parte, los efectos temporales son aquellos que afectan por igual a todas las unidades individuales del estudio y que, además, varían en el tiempo. Este tipo de efectos suele asociarse, por ejemplo, a shocks macroeconómicos que afectan por igual a todas las empresas o unidades de estudio (una subida de los tipos de interés, un incremento de los precios de la energía, un aumento de la inflación, etc.), o a cambios en la regulación de mercados (ampliación de la U.E., reducción de tarifas arancelarias, aumento de la imposición indirecta, etc. .).

8.2.2. Especificación general de un modelo de datos de panel.

La especificación general de un modelo de regresión con datos de panel es la siguiente:

$$Y_{it} = \alpha_{it} + \sum_{j=1}^{K} X_{it}^{j} \beta^{j} + u_{it}$$

donde $i = 1,......N$ se refiere al individuo o a la unidad de estudio (corte transversal), $t = 1,...T$ a la dimensión en el tiempo, Y_{it} sería la variable a explicar correspondiente a cada unidad de estudio, α es un escalar con N parámetros que recoge los efectos específicos del i-esimo individuo, β es un vector de K parámetros que se asocian a las $j=1,\ldots.K$ variables explicativas X_{it}^{j}.

A partir del modelo general, y con base en ciertos supuestos y restricciones acerca del valor de algunos de los parámetros, se derivar las diferentes variantes de modelos de datos de panel (Tabla 1).

Tabla 1. Modelos alternativos para combinar datos de series de tiempo y de corte transversal

Modelo Lineal	$Y_{it} = \alpha_{it} + \sum_{j=1}^{K} X_{it}^{j} \beta_{i}^{j} + e_{it}$	
Modelo estático de datos de panel.	$Y_{it} = \alpha_{it} + \sum_{j=1}^{K} X_{it}^{j} \beta^{j} + e_{it}$	
Modelo estático de datos de panel de una vía (*one-way*) (A)	$Y_{it} = \alpha_{it} + \sum_{j=1}^{K} X_{it}^{j} \beta^{j} + e_{it}$	$\alpha_{it} = \alpha_{i}$
Modelo estático de efectos fijos con variable dummy, los coeficientes constantes se estiman a partir de variables cualitativas (B)	$Y_{it} = i\alpha_{i} + \sum_{j=1}^{K} X_{it}^{j} \beta^{j} + e_{it}$	i vector de variables cualitativas y α_i coeficientes constantes.
Modelo estático de datos de panel del doble-vía (*two-way*) (C)	$Y_{it} = \alpha_{it} + \sum_{j=1}^{K} X_{it}^{j} \beta^{j} + e_{it}$	$\alpha_{it} = \alpha + \mu_{i} + \lambda_{t}$
Modelo de Regresiones Aparentemente no correlacionadas (SUR)[6]	$Y_{it} = \alpha_{it} + \sum_{j=1}^{K} X_{it}^{j} \beta_{i}^{j} + e_{it}$	$\alpha_{it} = \alpha_{i}$
Modelo de datos de panel dinámico	$Y_{it} = \alpha_{it} + \vartheta Y_{i,t-1} + \sum_{j=1}^{K} X_{it}^{j} \beta^{j} + e_{it}$	$\alpha_{it} = \alpha + \mu_{i} + \lambda_{t}$

En un modelo de datos de panel las variables explicativas pueden ser de tres tipos:

- Una variable por cada individuo, sin que exista referencia temporal en dicha variable: las variables son las mismas para cada unidad de corte transversal y se refieren a atributos del individuo o agente, por ejemplo, el tipo de empresa, su tamaño, la forma gerencial; el sexo de un trabajador, el nivel de formación, la profesión y otras características sociales de los individuos.

- Una variable por periodo, pero sin que existan diferencias en el valor que toma la variable en cada individuo: las variables toman distintos valores en cada periodo temporal pero no varían entre los individuos. Como ejemplo de este tipo de variables cabe citar a la tasa de inflación, la tasa de interés, etc.

[6] Seemingly Unrelated Regression

- Una variable que cambia en el tiempo y por individuo: se trata de variables que cambian entre individuos en un momento del tiempo, y que además cambian a lo largo del tiempo. Como ejemplo de estas variables se pueden mencionar los ingresos totales, el nivel de beneficios, stock de capital, nivel de endeudamiento, entre otras.

Los modelos de datos de panel se interpretan a través de sus componentes de errores. Considerando la notación matricial abreviada de un modelo general de datos de panel:

$$Y_{it} = X_{it}^{'}\beta + u_{it} \quad (1)$$

El término de error u_{it} incluido en la ecuación (1), puede descomponerse de la siguiente manera:

$$u_{it} = \mu_i + \lambda_t + e_{it} \qquad (2)$$

donde μ_i representa los efectos no observables que difieren entre las unidades de estudio pero no en el tiempo (capacidad empresarial, eficiencia de cada unidad, etc…); λ_t identifica los efectos no cuantificables que varían en el tiempo pero no entre las unidades de estudio; y e_{it} se refiere al término de error puramente aleatorio.

La mayoría de los análisis realizados con datos de panel utilizan el modelo de componente de error conocido como *one way* para el cual $\lambda_t = 0$ (modelo A). Las diferentes variantes para el modelo *one way* de componentes de errores surgen de los distintos supuestos que se hacen acerca del término μ_i, pudiéndose presentar tres posibilidades:

- El caso más sencillo es el que considera $\mu_i = 0$; es decir, la no existencia de heterogeneidad no observable entre los individuos o empresas.
- La segunda posibilidad consiste en suponer a μ_i un efecto fijo y distinto para cada individuo o empresa. En este caso, la heterogeneidad no observable se incorpora a la constante del modelo (α_i).
- Finalmente, la tercera alternativa es tratar a μ_i como una variable aleatoria no observable que varía entre individuos/empresas pero no en el tiempo.

Bajo la primera especificación, los μ_{it} satisfacen todos los supuestos del modelo lineal general y, por tanto, se emplea como método de estimación MCO, obteniendo estimadores lineales e insesgados y con la ventaja de ganar grados de libertad.

Ahora bien, en los casos en que se rechaza el supuesto de homogeneidad en un sistema de datos de panel, es decir, que existe heterogeneidad no observable ya sea a través del tiempo, entre unidades de estudio (individuos) o en ambos sentidos, debe buscarse una especificación que la capture de forma apropiada, con el fin de evitar que los estimadores de los parámetros de las variables explicativas estén sesgados.

8.2.3. Ventajas y desventajas de los modelos de datos de panel

Los modelos de datos de panel presentan una serie de ventajas y desventajas en comparación con los modelos de series temporales y de corte transversal. Las más relevantes son las siguientes:

Ventajas:

- La técnica permite al investigador económico disponer de un mayor número de observaciones, incrementando los grados de libertad, reduciendo la multicolinealidad entre las variables explicativas y, en última instancia, mejorando la eficiencia de las estimaciones econométricas.
- Tal y como se mencionó anteriormente, la técnica permite capturar la heterogeneidad no observable ya sea entre unidades individuales de estudio como en el tiempo. Con base en lo anterior, la técnica de datos de panel permite aplicar una serie de contrastes para confirmar o rechazar dicha heterogeneidad y determinar cómo capturarla.
- Los datos de panel suponen, e incorporan al análisis, el hecho de que los individuos o agentes económicos (consumidores, empresas, regiones, países, etc…) son heterogéneos. Los análisis de series de tiempo y de corte transversal no incorporan esta heterogeneidad corriendo así el riesgo de obtener resultados sesgados.
- Permiten estudiar mejor la dinámica de los procesos de ajuste, ya que a través de ellos se pueden analizar los cambios en el tiempo de las distribuciones transversales.
- Permiten elaborar y probar modelos relativamente complejos de comportamiento en comparación con los análisis de series temporales y de corte transversal. Un ejemplo claro de este tipo de modelos es aquel que trata de medir niveles de eficiencia técnica por parte de unidades económicas individuales.
- Finalmente, puesto que las unidades transversales de un panel de datos normalmente se refieren a individuos, familias o empresas, se evitan los sesgos que aparecen cuando se trabaja con variables agregadas.

Desventajas:

- En términos generales, las desventajas asociadas a la técnica de datos de panel se relacionan con los procesos para la obtención y el procesamiento de la información estadística sobre las unidades individuales de estudio; es decir cuando ésta se obtiene por medio de encuestas, entrevistas o utilizando algún otro medio de inferencia estadística de los datos. Ejemplos de este tipo de limitaciones son los problemas de selección no aleatoria de la muestra, de recogida de datos con inadecuadas tasas de cobertura de la población, porcentajes de no respuesta, preguntas confusas, distorsión deliberada de las respuestas, etc.
- Asimismo, una escasa dimensión temporal puede invalidar alguno de los elementos teóricos de los modelos de datos de panel.
- Por ultimo, algunas investigaciones han demostrado que la utilización de modelos de efectos fijos produce resultados significativamente diferentes al los modelos con efectos aleatorios cuando se estima una ecuación usando una muestra de muchas unidades de corte transversal con pocos periodos de tiempo (700 individuos con 5 periodos, por ejemplo).

8.2.4. Modelo de efectos fijos

Como ya se mencionó, los modelos de datos de panel permiten contemplar la existencia de efectos individuales específicos a cada unidad, invariables en el tiempo, que determinan la manera en que cada unidad de corte transversal toma sus decisiones.

Estos modelos asumen que los efectos de las variables omitidas, ya sean específicas a cada individuo y/o que cambian en el tiempo, no son importantes en forma individual, pero sí en conjunto.

Por otro lado, dado que el efecto de las variables omitidas se supone constante en el tiempo para cada individuo, o que no varia en todos los individuos en un determinado momento en el tiempo, o una combinación de ambos, se pueden capturar en el término constante de un modelo de regresión como un promedio que toma en cuenta explícitamente la heterogeneidad entre individuos y/o en el tiempo contenida en los datos.

Según la forma de incorporar la heterogeneidad no observada, se pueden diferencian los modelos de efectos fijos y modelos de efectos aleatorios. Los modelos de efectos fijos se conocen también como modelos mínimos cuadráticos con variables ficticias.

Los modelos de datos de panel de efectos fijos tienen la siguiente expresión general:

$$Y_{it} = \alpha_i + \sum_{j=1}^{K} X_{it}^{j} \beta^{j} + u_{it}$$

donde Y_{it} es la variable dependiente, α_{it}, es un escalar que recoge los efectos específicos del *i*–ésimo individuo y se supone constante en el tiempo, y X_{it}^{j}, es el vector de las k variables explicativas y β^{j}, de los K parámetros que recogen los efectos de las variables explicativas; u_{it} es el termino de error que se suponen aleatorios distribuidos con media cero y varianza constante de valor σ_u^2 . El panel de datos corresponde a i = 1,2..., N unidades o individuos de corte transversal, observados para los períodos t = 1,2...,T.

Por tanto, lo que se pretende resolver es un sistema de regresiones específicas con N ecuaciones de corte transversal: $Y_i = \alpha_i + X_i^1 \beta^1 + X_i^2 \beta^2 + ... + X_i^j \beta^j + u_i$ y T observaciones.

Su notación matricial abreviada es:

$$Y_{it} = \alpha_i + X_{it}' \beta + u_{it}$$

Agrupando las observaciones temporales, para cada unidad transversal se llega al siguiente modelo:

$$Y_{it} = i\alpha + X_{it}' \beta + e_{it}$$

que en el supuesto de una única variable explicativa tendría la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ . \\ Y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 & ... & 0 \\ 0 & i & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ . \\ \alpha_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ . \\ X_N \end{bmatrix} \beta + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ . \\ e_N \end{bmatrix}$$

Con este modelo se considera que las variables explicativas afectan por igual a las unidades de corte transversal y que éstas se diferencian por características propias de cada una de ellas, medidas por medio de la intercepción en el origen. Es por ello que las *N* intercepciones se asocian con variables *dummy* con coeficientes específicos para cada unidad, los cuales se deben estimar.

La estimación de α_i y β se realiza por MCO, si bien hay que tener presente que este modelo presenta una pérdida importante de grados de libertad. Un test útil en este tipo de modelos es realizar la prueba F, para comprobar si $\alpha_i = \alpha$ para cualquier i. Por otro lado, cabe señalar que cuando se quiera incluir un término constante hay que introducir únicamente N-1 variables ficticias.

La perdida de grados de libertad que origina la estimación de este modelo, hace que sea más utilizada, la especificación del modelo general de efectos fijos en desviaciones respecto a la media, es decir, restando a cada variable su media.

El estimador a utilizar en este caso tiene la siguiente expresión:

$$\hat{\beta} = \left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \left(X_{it} - \overline{X}_i \right) \left(X_{it} - \overline{X}_i \right)' \right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \left(X_{it} - \overline{X}_i \right) \left(Y_{it} - \overline{Y}_i \right)' \right] (3)$$

donde $\overline{Y}_i, \overline{X}_i$, son las medias muestrales del individuo i-ésimo.

El estimador de la varianza de β es:

$$\operatorname{var}(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}_e^2 \left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \left(X_{it} - \overline{X}_i \right) \left(X_{it} - \overline{X}_i \right)' \right]^{-1}$$

donde $\hat{\sigma}_e^2$ es la varianza residual, calculada como $\hat{\sigma}_u^2 = \frac{e'e}{NT - N - K}$, donde e'e es la suma de los residuos al cuadrado del modelo.

En general, el estimador de mínimos cuadrados ordinarios (MCO) es apropiado cuando las residuos son incorrelados en el tiempo y homocedásticos en los cortes transversales.

Los efectos fijos se estiman en un segundo paso a través de la siguiente ecuación:

$$\hat{\alpha}_i = \overline{Y}_i - \overline{X}_i^{'}\hat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^{T}\left(\overline{Y}_i - X_{it}^{'}\hat{\beta}\right)}{T} \quad (4)$$

El modelo anterior puede extenderse al modelo de efectos fijos de doble vía, en el que aparecen también los efectos no observables temporales, tal que:

$$Y_{it} = \alpha_i + \delta_t + X_{it}{'}\beta + u_{it}$$

Expresión que equivale a introducir dos conjuntos de variables ficticias, unas individuales y otras temporales; en este caso el estimador MCO tendría las mismas propiedades del modelo anterior.

El estimador a utilizar tendría la siguiente expresión:

$$\hat{\beta} = \left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left(X_{it} - \overline{X}_i - \overline{X}_t + \overline{X}\right)\left(X_{it} - \overline{X}_i - \overline{X}_t + \overline{X}\right)'\right]^{-1}\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left(X_{it} - \overline{X}_i - \overline{X}_t + \overline{X}\right)\left(Y_{it} - \overline{Y}_i - \overline{Y}_t + \overline{Y}\right)'\right]$$

donde $\overline{Y}_i, \overline{X}_i$, son las medias muestrales del individuo i-ésimo $\overline{Y}_t, \overline{X}_t$ las medias muestrales del periodo t, y $\overline{Y}, \overline{X}$ las medias muestrales de las variables para todos los *N* individuos y *T* periodos.

Y los efectos fijos se estiman en un segundo paso a través de la siguientes relaciones:

$$\hat{\alpha}_i = \left(\overline{Y}_i - \overline{Y}\right) - \left(\overline{X}_i - \overline{X}\right)^{'}\hat{\beta}$$

$$\hat{\delta}_t = \left(\overline{Y}_t - \overline{Y}\right) - \left(\overline{X}_t - \overline{X}\right)^{'}\hat{\beta}$$

8.2.5. Modelo de efectos aleatorios

A diferencia del modelo de efectos fijos, el modelo de efectos aleatorios considera que los efectos individuales no son independientes entre sí, sino que están distribuidos aleatoriamente alrededor de un valor dado. Una práctica común en el análisis de regresión es asumir que el gran número de factores que afectan al valor de la variable dependiente pero que no han sido incluidas explícitamente como variables independientes del modelo, puede resumirse apropiadamente en la perturbación aleatoria.

Así, en este modelo se considera que tanto el impacto de las variables explicativas como las características propias de cada unidad son diferentes.

El modelo de efectos aleatorios o modelo de componentes de la varianza asume que el término α_{it} es la suma de una constante común α, una variable aleatoria específica de corte transversal e invariante en el tiempo μ_i asociada a cada individuo e incorrelada con el residuo u_{it}, y otro asociado al tiempo λ_t, también incorrelacionado con el residuo u_{it}.

En lugar de tratar μ_i como una constante fija, esta especificación asume que $\mu_i \approx N\left(0, \sigma_\mu^2\right)$ independiente e igualmente distribuida, e incorrelada con u_{it} y X_{it}.

A su vez el modelo también requiere que λ_t esta incorrelado en el tiempo tal que $E(\lambda_t, \lambda_s) = 0$, y además está incorrelada con μ_i, u_{it} y X_{it}.

Si suponemos que $\lambda_t = 0$, la especificación del modelo entonces se convierte en:

$$Y_{it} = \sum_{i=1}^{j} X_{it}^{j} \beta^{j} + \varepsilon_{it} \ , \qquad \varepsilon_{\text{it}} = \mu_i + u_{it}$$

La estimación de este modelo exige de la utilización de Mínimos Cuadrados Generalizados pues los residuos del modelo están correlacionados entre sí al estar μ_i incluido tanto en ε_{it} como en ε_{is}, para $t \neq s$.

El estimador apropiado de este modelo expresado en desviaciones a la media es, por tanto:

$$\hat{\beta}_{MCG} = \left[\frac{1}{T} \sum_{i=1}^{N} X_i^{'} Q X_i + \psi \sum_{i=1}^{N} \left(X_{it} - \overline{X}_i \right)' \left(X_{it} - \overline{X}_i \right) \right]^{-1} \left[\frac{1}{T} \sum_{i=1}^{N} X_i^{'} Q Y_i \sum_{i=1}^{N} \left(X_{it} - \overline{X}_i \right) \left(X_{it} - \overline{Y}_i \right)' \right]$$

donde :

$$\psi = \frac{\sigma_{\varepsilon}^{2}}{\sigma_{\varepsilon}^{2} + T\sigma_{\mu}^{2}}$$

$$Q = I_T - \frac{1}{T} e \cdot e'$$

Generalmente las varianzas σ_{μ}^{2} (varianza entre grupos) y σ_{ε}^{2} no son conocidas y, por tanto, habrá que estimar un valor para ψ. Para estimar dicho valor un camino sería utilizar las estimaciones de las varianzas de los residuos obtenidas en la solución MCO del modelo.

8.2.6. Elección de modelo de efectos o efectos aleatorios.

La decisión acerca de la estructura apropiada para el análisis, es decir, efectos fijos vs efectos aleatorios, dependerá de los objetivos que se persigan.

Así, Haussman (1978) aconseja utiliza el modelo de efectos fijos para realizar inferencias sobre la muestra utilizada, mientras que el de efectos aleatorios resulta más útil para realizar inferencias sobre la población.

Adicionalmente, si el interés del estudio particular está puesto en los coeficientes de las pendientes de los parámetros, y no tanto en las diferencias individuales, se deberá elegir un método que relegue estas diferencias y trate la heterogeneidad no observable como aleatoria.

El contexto de los datos, es decir, cómo fueron obtenidos y el entorno de donde provienen, determinan también la elección del modelo. Con el modelo de efectos fijos la heterogeneidad no observable se incorpora en la ordenada al origen del modelo y con el de efectos aleatorios, como ya se mencionó, se incorpora en el término de error, modificándose la varianza del modelo. Asimismo, emplear un modelo de efectos fijos o aleatorios genera diferencias en las estimaciones de los parámetros en los casos en que se cuenta con T pequeño y N grande. En estos casos debe hacerse el uso más eficiente de la información para estimar esa parte de la relación de comportamiento contenida en las variables que difieren sustancialmente de un individuo a otro.

En principio, el enfoque de efectos fijos es más atractivo, ya que no requiere realizar supuestos paramétricos sobre la distribución condicional de la heterogeneidad inobservable. Sin embargo, su desventaja es que solo puede utilizarse en ciertas distribuciones y requiere hacer supuestos muy restrictivos sobre la distribución del término de error como lo son las hipótesis que exige el método MCO.

A este respecto hay que tener presente que el modelo de efectos fijos asume la existencia de diferencias entre unidades que se capturan en forma de movimientos de la curva de regresión. (Ver figura 1).

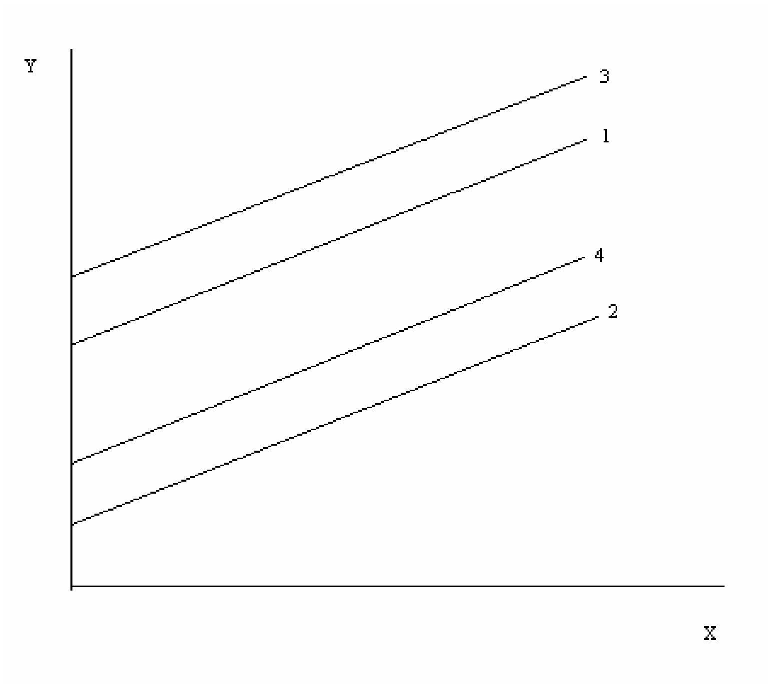


Figura 1

El modelo de efectos fijos, si se estima utilizando variables *dummy* no identifica directamente la causa de la variación en el tiempo y los individuos, e implica un alto coste informativo en términos de grados de libertad. En cuyo caso deben realizarse algunas consideraciones con respecto a la estructura de los datos, dado que si N es grande y T pequeño, podría darse el caso en que el número de parámetros en el modelo de efectos fijos sea muy grande en relación con el número de datos disponibles, lo que daría lugar a parámetros poco significativos y una estimación ineficiente.

Para elegir entre los estimadores del modelo fijo y aleatorio puede utilizarse el test de Hausman, que compara directamente ambos estimadores. El contraste se basa en el hecho de que bajo la hipótesis de que $E[\alpha_i | X_{it}] = 0$ el estimador del modelo de efectos aleatorios $(\hat{\beta}_{EA})$ es asintóticamente más eficiente que el estimador MCO del modelo de efectos fijos $(\hat{\beta}_{EF})$; sin embargo, si $E[\alpha_i | X_{it}] \neq 0$, el estimador MCO mantendrá la consistencia, mientras que el estimador MCG será sesgado e inconsistente.

El estadístico propuesto por Haussman es:

$$m = \hat{q}^{'} [Var(\hat{q})]^{-1} \hat{q}$$

donde $\hat{q} = \hat{\beta}_{EA} - \hat{\beta}_{EF}$, y la matriz $Var(\hat{q}) = Var(\hat{\beta}_{EA}) - Var(\hat{\beta}_{EF})$.

Bajo la hipótesis nula $H_0 = \{E[\alpha_i | X_{it}] = 0\}$ es estadístico m se distribuye como una variable χ_k^2.

8.2.7. Ejemplo práctico

A continuación vamos a realizar un ejemplo de estimación de un modelo de datos de panel, con las series temporales de créditos y depósitos de las cajas de ahorro de Castilla y León por provincias, el objetivo de la investigación es comprobar qué parte de los depósitos se queda en Castilla y León en forma de créditos y verificar si hay diferencias en los comportamientos provinciales. Los datos utilizados corresponden al periodo 1998-2003 y tienen periodicidad trimestral.

En primer lugar, utilizamos un modelo de datos de panel fijo de la forma siguiente:

$$Y_{it} = i\alpha + X_{it}'\beta + u_{it}$$

en donde Y_{it} son los créditos que prestan las cajas de ahorro en las nueve provincias de la región (N=9), y X_{it} los depósitos de las cajas de ahorro en cada una de las nueve provincias de la región. El número de observaciones temporales es T=22.

Aplicando MCO al modelo utilizado se obtienen los siguientes resultados:

Estadísticas de la regresión	
Coeficiente de correlación múltiple	0.96577233
Coeficiente de determinación R^2	0.9327162
R^2 ajustado	0.92417602
Error típico	274.756973
Observaciones	198

ANÁLISIS DE VARIANZA

	Grados de libertad	*Suma de cuadrados*	*Promedio de los cuadrados*	*F*	*Valor crítico de F*
Regresión	10	196,740,739	19,674,073.9	260,613465	4.338E-104
Residuos	188	14,192,382.1	75,491.3944		
Total	198	210,933,121			

	Coeficientes	*Error típico*	*Estadístico t*
AV	82.5909183	74.062306	1.11515456
BU	543.61444	154.683995	3.51435479
LE	760.615561	135.247529	5.62387768
PA	248.928645	66.1017603	3.76583988
SA	58.0469567	106.602347	0.54451856
SG	77.3436176	71.092936	1.08792268
SO	-52.4921486	62.268669	-0.84299455
VA	1323.60383	89.8271126	14.7350148
ZA	66.2517949	66.1422793	1.00165576
B	0.48266722	0.03002785	16.0739855

Se puede apreciar que tanto el estadístico F, como la distribución asociada a los estimadores de los coeficientes α_i descarta la hipotética igualdad de dichos coeficientes (el valor teórico del estadístico F en las tablas es 1,88), lo que hace significativa con un nivel de confianza del 95% la existencia de heterogeneidad de el comportamiento en cada provincia.

Si utilizamos el modelo (2) y el procedimiento descrito para obtener el estimador (3) y los coeficientes (4), obtendríamos los siguientes resultados en la estimación MCO.

$$\hat{\beta}_{MCO} = \frac{\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(X_{it} - \overline{X}_i)(\overline{Y}_{it} - \overline{Y}_i)'\right]}{\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(X_{it} - \overline{X}_i)(X_{it} - \overline{X}_i)'\right]} = \frac{40{,}410{,}738.5}{83{,}944{,}647.1} = 0.48139744$$

Coeficientes α correspondiente a Avila se obtiene como:

$$\hat{\alpha}_i = \frac{\sum_{t=1}^{T}\left(\overline{Y}_i - \hat{\beta}X_{it}\right)}{T} = \frac{\sum_{t=1}^{22}\left(811.04 - 0.4814X_{it}\right)}{22} = 84.50$$

Las intercepciones del resto de las provincias son:

Ávila	84.5073044
Burgos	549.668345
León	765.770462
Palencia	250.223762
Salamanca	61.8132386
Segovia	79.0470848
Soria	-51.5991472
Valladolid	1326.48352
Zamora	67.5506063

Tabla 2

CRÉDITOS TOTALES DE LAS CAJAS DE AHORRO. Millones de Euros.										
Año	Periodo	Ávila	Burgos	León	Palencia	Salamanca	Segovia	Soria	Valladolid	Zar
1998	I	587	1739	1844	488	1058	534	207	1459	
1998	II	607	1846	1956	516	1130	562	212	1552	
1998	III	623	1872	1953	531	1151	588	212	1593	
1998	IV	642	1992	2037	545	1189	610	218	1685	
1999	I	643	1991	2146	571	1097	627	225	1718	
1999	II	710	2147	2301	620	1254	656	232	1818	
1999	III	694	2171	2271	644	1182	660	235	1895	
1999	IV	694	2360	2350	652	1247	682	242	1981	
2000	I	685	2380	2514	670	1285	668	252	2061	
2000	II	731	2524	2682	719	1468	688	259	2208	
2000	III	753	2665	2765	737	1471	692	260	2308	
2000	IV	783	2840	3043	771	1493	708	280	2443	
2001	I	787	2882	3018	764	1534	704	287	2523	
2001	II	850	3066	3095	789	1628	739	301	2658	
2001	III	835	3166	2994	812	1609	743	310	2685	
2001	IV	894	3360	3081	837	1664	776	332	2869	
2002	I	902	3463	3056	849	1707	794	336	2969	
2002	II	976	3719	3153	908	1821	842	348	3195	
2002	III	1039	3826	3161	933	1835	854	357	3241	
2002	IV	1076	4020	3262	945	1913	899	387	3331	
2003	I	1139	4140	3472	984	1968	942	400	3434	
2003	II	1193	4417	3688	1022	2069	979	421	3575	

Tabla 3

DEPÓSITOS DEL SECTOR PRIVADO EN LAS CAJAS DE AHORRO. Millones de Euros.								
Año	Periodo	Ávila	Burgos	León	Palencia	Salamanca	Segovia	Soria
1998	I	1175	3686	3220	817	1600	1052	
1998	II	1170	3675	3275	802	1596	1060	
1998	III	1218	3731	3279	793	1614	1091	
1998	IV	1232	3862	3438	826	1619	1104	
1999	I	1238	3918	3374	822	1594	1112	
1999	II	1272	3959	3527	838	1627	1143	
1999	III	1295	4082	3426	861	1680	1173	
1999	IV	1329	4217	3459	894	1735	1183	
2000	I	1349	4322	3469	933	1822	1195	
2000	II	1388	4392	3470	961	1921	1227	
2000	III	1431	4497	3854	995	1984	1250	

2000	IV	1465	4692	3965	1059	2029	1293
2001	I	1488	4817	3957	1075	2081	1385
2001	II	1541	5271	4133	1121	3794	1462
2001	III	1587	5322	4251	1145	4137	1489
2001	IV	1773	5496	4476	1187	4334	1522
2002	I	1768	5528	4910	1173	4722	1597
2002	II	1806	5637	5095	1210	4970	1548
2002	III	1822	5658	5088	1208	5020	1577
2002	IV	1906	5898	4920	1242	5131	1722
2003	I	1949	5913	5239	1230	5118	1653
2003	II	2001	6316	5488	1247	5126	1676

8.2.8. Medición de la eficiencia con datos panel.

La medición de la ineficiencia se puede realizar utilizando distintas técnicas, si bien la diferencia básica entre las técnicas se basa en la especificación de la forma de la función de producción asociada a las unidades económicas o empresariales que se analizan. Se distingue así entre técnicas paramétricas, las que evalúan la eficiencia de cada unidad especificando una determinada forma funcional entre las variables, y las técnicas no paramétricas, que evalúan la eficiencia de cada unidad sin especificar dicha forma funcional. Entre las técnicas incluidas en el primer tipo se encuentra el análisis estocástico de una frontera de producción (SFA), y entre las del segundo tipo destaca el análisis envolvente de datos (DEA).

La aproximación paramétrica de la función estocástica implica estimar una función de producción frontera en la que la desviación entre el nivel de output observado y el máximo posible comprende dos componentes: un término de error, que capta el efecto de variables que no están bajo el control de la unidad productiva analizada, y un término de ineficiencia.

Este modelo de frontera de producción estocástica fue propuesto de forma simultánea por Aigner, Lovell y Schimdt (1977) y Meeusen y Van den Broeck (1977):

$$Y_{it} = e^{(x_{it}\beta + v_{it} + u_{it})}, t = 1,....T \quad (5)$$

donde ,Y sería la producción en el período t-ésimo y para la i-ésima empresa, X un vector (1 x k) de variables explicativas y β un vector (k x 1) de parámetros desconocidos. En cuanto a los dos componentes que constituyen el término de error, u_{it} está compuesto por variables aleatorias no-negativas, asociadas a la ineficiencia técnica en producción, y v_{it} son los errores aleatorios independientes e idénticamente distribuidos como una normal con media cero y varianza σ_v^2, e independientemente distribuidos de u_{it}.

8.3 Modelos de eficiencia técnica variante en el tiempo.

8.3.1 Alternativas de especificación de datos de panel a partir del modelo general

Como ya se mencionó, la técnica de datos de panel permite contemplar la existencia de efectos individuales específicos a cada firma, invariables en el tiempo que determinan la manera en que cada unidad de corte transversal toma sus decisiones.

Una forma simple, y de hecho la más utilizada, de considerar esta heterogeneidad es empleando los modelos de intercepción variable, identificados en las especificaciones B y C en la Figura n°1. Así, el modelo lineal es el mismo para todas las unidades o individuos bajo estudio, pero la ordenada en el origen es específica a cada una de ellas. A partir del modelo general esta situación se representa mediante la siguiente ecuación:

$$Y_{it} = \alpha_i + \sum \beta_k X_{it} \quad (1)$$

El supuesto básico de estos modelos es que dadas las variables explicativas observadas, los efectos de todas las variables omitidas pueden representarse de tres formas posibles:

- ⇒ Una variable por cada individuo, sin variables en el tiempo: las variables son las mismas para cada unidad de corte transversal a través del tiempo. Como ejemplos de ellas se tienen: tipo de empresa, tamaño, forma gerencial, sexo, nivel de formación, profesión y otras características sociales de los individuos.
- ⇒ Una variable por periodo, pero sin variables entre individuos: se consideran las mismas variables para todos los individuos en un momento del tiempo pero varían a lo largo del periodo de estudio. Como ejemplo de este tipo de variables, citar a los precios, las tasas de interés, el nivel de actividad económica, etc.
- ⇒ Una variable que cambia en el tiempo y por individuo: se trata de variables que cambian entre individuos en un momento del tiempo, y que además cambian a lo largo del tiempo. Como ejemplo de estas variables se pueden mencionar los ingresos totales, el nivel de beneficios, stock de capital, nivel de endeudamiento, entre otras.

Estos modelos con intercepción variable asumen que los efectos de las variables omitidas, ya sean específicas a cada individuo y/o que cambian en el tiempo, no son importantes en forma individual, pero que sí en conjunto.

Por otro lado, dado que el efecto de las variables omitidas se supone constante en el tiempo para cada individuo, o que no varia en todos los individuos en un determinado momento en el tiempo, o una combinación de ambos, se pueden capturar en el término constante de un modelo de regresión como un promedio que toma en cuenta explícitamente la heterogeneidad entre individuos y/o en el tiempo contenida en los datos.

Así, de acuerdo con la forma de incorporar la heterogeneidad no observada, se diferencian los siguientes modelos:

1. Modelo de efectos fijos

Una posibilidad es explicar los datos con el modelo de efectos fijos, que considera que existe un término constante diferente para cada individuo, y supone que los efectos individuales son independientes entre sí.

Con este modelo se considera que las variables explicativas afectan por igual a las unidades de corte transversal y que éstas se diferencian por características propias de cada una de ellas, medidas por medio de la intercepción en el origen. Es por ello que las N intercepciones se asocian con variables dummy con coeficientes específicos para cada unidad, los cuales se deben estimar. Para la i-ésima unidad de corte transversal, la relación es la siguiente:

$$Y_t = \mathrm{i}\,\alpha + \beta X_{it} + \mathrm{u}_{\mathrm{t}} \quad (2)$$

donde el subíndice i representa un vector columna de unos. Debe hacerse notar que en este modelo se presenta una pérdida importante de grados de libertad.

2. Modelo de efectos aleatorios

A diferencia del modelo de efectos fijos, el modelo de efectos aleatorios considera que los efectos individuales no son independientes entre sí, sino que están distribuidos aleatoriamente alrededor de un valor dado. Una práctica común en el análisis de regresión es asumir que el gran número de factores que afecta el valor de la variable dependiente pero que no han sido incluidas explícitamente como variables independientes del modelo, puede resumirse apropiadamente en la perturbación aleatoria.

Así, con este modelo se considera que tanto el impacto de las variables explicativas como las características propias de cada unidad son diferentes. El modelo se expresa algebraicamente de la siguiente forma:

$$Y_{it} = (\alpha + u_t) + \beta' X_t + e_{i\,t} \quad (3)$$

donde: μ_t viene a representar la perturbación aleatoria que permitiría distinguir el efecto de cada individuo en el panel.

Para efectos de su estimación, se agrupan los componentes estocásticos, y se obtiene la siguiente relación:

$$Y_{it} = \alpha + \beta' X_t + U_{i\,t} \quad (4)$$

donde $U_{it} = \delta_t + u_t + e_{it}$ se convierte en el nuevo término de la perturbación, correspondiendo δ_t, u_t y$\square_{it}$ al error asociado con las series de tiempo, la perturbación de corte transversal y el efecto combinado de ambas, respectivamente. Señalar asimismo que U no es homocedástico.

El método de Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO) no se utiliza para estimar este tipo de modelos ya que no se cumplen los supuestos que permiten que el estimador sea consistente, por lo que es preferible en este caso utilizar el método de Mínimos cuadrados Generalizados (MCG).

3. Elección del método: efectos fijos versus efectos aleatorios

La decisión acerca de la estructura apropiada para el análisis, es decir, efectos fijos versus efectos aleatorios, está en función de los objetivos que se persigan.

Si se desea hacer inferencias con respecto a la población, es decir si se trabaja con una muestra aleatoria, lo mejor es utilizar una especificación del tipo aleatoria. En caso de que el interés sea limitado a una muestra que se ha seleccionado a conveniencia o bien que se está trabajando con la población, la estimación de efectos fijos será la correcta.

Adicionalmente, si el interés del estudio particular está puesto en los coeficientes de las pendientes de los parámetros, y no tanto en las diferencias individuales, se debería elegir un método que relegue estas diferencias y tratar la heterogeneidad no observable como aleatoria.

El modelo de efectos fijos lleva implícito que el investigador hace inferencia condicionada a los efectos que ve en la muestra. En el de efectos aleatorios el investigador hace inferencia condicional o marginal respecto a una población.

El contexto de los datos, es decir, cómo fueron obtenidos y el entorno de donde provienen, determinan también la elección del modelo. Con el modelo de efectos fijos la heterogeneidad no observable se incorpora en la ordenada al origen del modelo y con el de efectos aleatorios, como ya se mencionó, se incorpora en el término de error, por lo cual lo que se modifica es la varianza del modelo. Emplear un modelo de efectos fijos o aleatorios genera diferencias en las estimaciones de los parámetros en los casos en que se cuenta con T pequeño y N grande. En estos casos debe hacerse el uso más eficiente de la información para estimar esa parte de la relación de comportamiento contenida en las variables que difieren sustancialmente de un individuo a otro.

El modelo de efectos fijos presenta el problema de que el uso de variables "Dummies" no identifica directamente la causa de la variación en el tiempo y en los individuos. Además, esto implica la pérdida de grados de libertad.

Por otro lado, deberán tomarse consideraciones con respecto a la estructura de los datos, dado que si N es grande y T pequeño, podría darse el caso en que el número de parámetros en el modelo de efectos fijos sea muy grande en relación con el número de datos disponibles, lo que daría lugar a parámetros poco significativos y una estimación ineficiente.

8.3.2. Eficiencia técnica variante en el tiempo

A partir de este esquema propuesto de forma simultánea por Aigner, Lovell y Schimdt (1977) y Meeusen y Van den Broeck (1977) se han planteado diferentes modelos, entre los que destaca el desarrollado por Battese y Coelli (1995) que ha contribuido de manera importante a la flexibilización del supuesto de invarianza de la eficiencia en el tiempo, al ofrecer la posibilidad de introducir éste como un regresor en la ecuación correspondiente a la ineficiencia. El mencionado modelo de frontera de producción estocástica es aplicable a estudios, en los que se dispone de un panel de datos y en donde las eficiencias técnicas de las unidades varían a lo largo del tiempo.

Considerando la función de producción propuesta por Aigner, Lovell y Schimdt (1977):

$$Y_{it} = e^{(x_{it}\beta + v_{it} + u_{it})}, t = 1,....T \quad (5)$$

donde, u_{it} está compuesto por variables aleatorias no-negativas, asociadas a la ineficiencia técnica en producción y obtenidas a partir de la distribución normal truncada en cero con media $Z_{it}\ \delta$ y varianza σ^2 . Z_{it} es un vector (1 x m) de variables explicativas asociadas a la ineficiencia técnica a lo largo del tiempo y δ es un vector (m x 1) de coeficientes desconocidos.

La ecuación (5) especifica la frontera estocástica en términos de los valores de producción originales. Mientras que la ineficiencia técnica, u_{it}, es función de un conjunto de variables explicativas, Z_{it} , y un vector de coeficientes desconocidos, δ.

De modo que la ineficiencia técnica se expresa como:

$u_{it}= Z_{it}\ \delta + W_{it}$ (6)

donde, W_{it} sigue una distribución normal truncada en $- Z_{it}\ \delta$ con media cero y varianza σ^2 .

Las ecuaciones (5)-(6) se estiman simultáneamente siguiendo el método de Máxima Verosimilitud, obteniéndose una eficiencia técnica (ET_{it}) de la forma:

$ET_{it}=e^{(-u_{it})}=e^{(-Z_{it}\ \delta - W_{it})}$ (7)

La eficiencia técnica será igual a uno, sólo si el efecto ineficiencia es igual a cero, en los demás casos será menor que uno, pero siempre positiva.

Battese and Coelli (1992) propusieron una función de frontera estocástica para ser utilizada con datos panel, en la cual los efectos de cada firma se asume que se distribuyen como una variable aleatoria con distribución normal, truncada en cero que, incluso puede varíar en el tiempo. Su modelo se expresa de la siguiente forma:

$Y_{it} = x_{it}\beta + (V_{it} - U_{it})$,i=1,...,N, t=1,...,T, (8)

donde Y_{it} es el logaritmo de la producción de la firma i en el periodo de tiempo t.

x_{it} es un $k\times1$ vector de cantidades (en logaritmos) de input que combina la firma i en el periodo de tiempo t;

β son coeficientes a determinar;

V_{it} es una variable aleatoria que está distribuida como una normal $N(0,\sigma_V^2)$, e independiente de:

$U_{it} = (U_i \exp(-\eta(t-T)))$, donde

U_i es una variable aleatoria no negativa que recoge la ineficiencia técnica de cada firma y que presenta una distribución independiente truncada en cero $N(\mu,\sigma_U^2)$.

η es un parámetro a estimar.

Se utiliza la parametrización de Battese and Corra (1977) que reemplaza σ_V^2 y σ_U^2 con $\sigma^2=\sigma_V^2+\sigma_U^2$ y $\gamma=\sigma_U^2/(\sigma_V^2+\sigma_U^2)$. El parámetro,$\gamma$, debe de tener un valor entre 0 y 1 y se obtiene a partir de un proceso de maximización iterativa (algoritmo de Davidon-Fletcher-Powell (DFP).

Battese and Coelli (1995) también propusieron un modelo en el que la ineficiencia técnica son expresados como una función explicita de un vector de variables específicas de cada firma y un termino de error aleatorio. Su modelo es equivalente al de Kumbhakar, Ghosh and McGukin (1991):

$$Y_{it} = x_{it}\beta + (V_{it} - U_{it}) \text{ ,} i=1,...,N, \; t=1,...,T, \quad (9)$$

donde Y_{it} es el logaritmo de la producción de la firma i en el periodo de tiempo t.

x_{it} es un k$\times$1 vector de cantidades (en logaritmos) de input que combina la firma i en el periodo de tiempo t;

β son coeficientes a estimar;

V_{it} es una variable aleatoria que se distibuye como una normal $N(0,\sigma_V^2)$, independiente de:

U_{it} que es una variable aleatoria no negativa que se supone recoge la infeciencia tecnica de cada firma, y que se supone que está indepentemente distribuida truncada en cero de media y variaza : $N(m_{it},\sigma_U^2)$; donde:

$m_{it} = z_{it}\delta$,

donde z_{it} es un p$\times$1 vector de variables que pueden tener influencia en la eficiencia de cada firma, y

δ es un 1$\times$p vector de parámetros a estimar.

Se utiliza la parametrización de Battese and Corra (1977), remplazando σ_V^2 y σ_U^2 con $\sigma^2=\sigma_V^2+\sigma_U^2$ y $\gamma=\sigma_U^2/(\sigma_V^2+\sigma_U^2)$. La función de máxima verosimilitud de este modelo aparece en Battese and Coelli (1993).

Las medidas de eficiencia técnica de la función de frontera para los modelos de Battesse y Coelli (1992) se definen como:

$$EFF_i = E(Y_i^*|U_i, X_i)/ E(Y_i^*|U_i=0, X_i),$$

donde Y_i^* es la producción de la firma y, que será igual a Y_i cuando la variable dependiente es el valor original y será igual a $\exp(Y_i)$ cuando se haya transformado en logaritmos. La medida de eficiencia, EFF_i tendrá un valor entre cero y uno.

Los modelos de Battese and Coelli (1992)se estiman con el software Frontier 4.1.

La medida de eficiencia técnica también se calcula considerando otras funciones de producción diferentes del modelo lineal general. Si la función de producción que se estima es del tipo de Cobb- Douglas, su especificación lineal queda definida como sigue:

$$\begin{aligned} \ln Y_{it} &= \beta_0 + \beta_1 t_{it} + \sum_j \beta_j \ln X_{jit} + v_{it} - u_{it} \\ u_{it} &= z_{it}\delta + w_{it} \end{aligned} \qquad (10)$$

donde,

Y_{it}: output o producto para la empresa *i* en el período *t*.

X_{it}: conjunto de inputs de producción (j=1, 2, …) para la empresa *i* en el período *t*.

β: conjunto de parámetros desconocidos a estimar.

t: tendencia lineal. Introducimos esta tendencia en la función para permitir ajustes de la frontera en el tiempo, lo que sería interpretado como cambio técnico.

v_{it}: error aleatorio siguiendo una distribución normal de media 0 y varianza σ_v^2.

u_{it}: variable aleatoria independiente de v_{it}, no-negativa asociada a la ineficiencia técnica de producción que se distribuye como una distribución normal truncada en cero con media Z_{it} δ y varianza σ^2 .

z_{it}: variables que representan las características particulares de cada empresa y que utilizaremos como explicativas del comportamiento de la ineficiencia técnica.

δ: parámetros desconocidos que acompañan a los regresores z_{it}.

w_{it}: variable aleatoria que sigue una una distribución normal truncada en − Z_{it} δ con media cero y varianza σ^2

Alternativamente, también se puede realizar la especificación del modelo utilizando una función de producción translogarítmica:

$$\begin{aligned} \ln Y_{it} &= (\beta_0 + + \sum_j \beta_j \ln X_{jit} + \sum_{j<k} \sum_{k=1} \beta_{jk} X_{jit} X_{kit}) + v_{it} - u_{it}) \\ u_{it} &= z_{it}\delta + w_{it} \end{aligned} \qquad (11)$$

La diferencia con la especificación de Cobb-Douglas está en el tercer término de la ecuación, en el que se incluyen los productos cruzados entre los diferentes inputs (coeficientes de segundo orden) que aparecen en el segundo término.

El término de error en los modelos especificados en las ecuaciones anteriores está dividido en dos, v_{it} recogiendo los posibles errores de medida del output y la influencia conjunta de aquellas variables que no se han incluido de manera explícita en los dos modelos especificados. Mientras que la otra componente del error u_{it} está asociado a la ineficiencia técnica de producción, que se a hacen depender de una serie de variables explicativas (z_{it}), tal y como se especifica en la ecuación (8).

Para estimar los dos modelos especificados, tanto el modelo de Cobb-Douglas como el translogarítmico, se utilizar el método de máxima-verosimilitud.

Para realizar contrastes de hipótesis, es conveniente utilizar contrastes de significación de grupos de coeficientes, mejor que contrastes individuales basados en la distribución t-Student.

Hay ocasiones en las que los problemas de multicolinealidad llevan a conclusiones erróneas al utilizar el estadístico *t* de contraste individual de parámetros. Por lo tanto, el contraste de hipótesis sobre un conjunto de parámetros en la función de producción frontera o en el modelo de ineficiencia, se realiza a través del contraste estadístico de la razón de verosimilitudes, definido como:

$$\lambda = -2(L(H_0) - L(H_1))$$

donde $L(H_0)$ es el estimador de máxima verosimilitud del modelo restringido y $L(H_1)$ es el estimador de máxima verosimilitud del modelo sin restringir. El valor crítico de este contraste se compara con una distribución χ^2 con tantos grados de libertad como la diferencia de parámetros existente entre el modelo general y el modelo restringido.

8.3.3. Ejemplo

Partimos de los siguientes datos correspondientes a 60 firmas:

Tabla nº1. Medición de eficiencia técnica mediante métodos no paramétricos.

N	T	Y	L	K	Eficiencia
1	1	12778	9416	35134	0,65068
2	1	24285	4643	77297	0,82889
3	1	20855	5095	89799	0,72642
4	1	13213	4935	35698	0,74785
5	1	12018	8717	27878	0,69133
6	1	15284	1066	92174	0,77654
7	1	6707	258	97907	0,56516
8	1	21656	6334	82084	0,73768
9	1	14574	2350	38876	0,84388

10	1	13743	1076	81761	0,75784
11	1	3793	3432	9476	0,54558
12	1	37118	4033	55096	0,93739
13	1	11235	7975	73130	0,44809
14	1	9237	7604	24350	0,61831
15	1	12634	344	65380	0,87384
16	1	9677	2440	63839	0,54952
17	1	18315	7891	59241	0,71262
18	1	17094	2906	72574	0,75907
19	1	21566	2668	68916	0,85727
20	1	18872	4220	57424	0,80651
21	1	17102	2661	87843	0,72458
22	1	14550	2455	30789	0,87223
23	1	24031	2827	93734	0,83681
24	1	6787	439	35961	0,75225
25	1	6388	312	94264	0,52974
26	1	32996	3265	95773	0,89731
27	1	26040	6752	80275	0,81013
28	1	16619	4425	49886	0,78179
29	1	10065	1583	22072	0,8561
30	1	6554	907	38727	0,62097
31	1	3539	6149	5322	0,57938
32	1	1660	479	2520	0,74934
33	1	16775	1955	41545	0,88192
34	1	10085	8169	68389	0,42082
35	1	7064	4055	77556	0,35126
36	1	31793	5029	77812	0,88908
37	1	32303	6937	98904	0,84118
38	1	14571	8405	42740	0,67868
39	1	12258	2503	59741	0,67291
40	1	12683	6590	18085	0,83853
41	1	12880	7149	26651	0,75964
42	1	15841	8040	50488	0,68189
43	1	24623	4896	88182	0,80438
44	1	20571	6722	30451	0,88652
45	1	21208	4195	95834	0,74299
46	1	12493	4551	36704	0,7261
47	1	32313	7223	89312	0,85341
48	1	15575	9561	29055	0,78519
49	1	13414	4871	50018	0,67207
50	1	10228	9312	40996	0,5143
51	1	19927	2895	63051	0,84238
52	1	26938	8085	60992	0,85098
53	1	35825	8656	94159	0,85963
54	1	12768	3427	39312	0,75508
55	1	18412	1918	78628	0,81649
56	1	19853	6177	64377	0,75991
57	1	3269	7188	1073	0,8735
58	1	21358	9329	87124	0,66471
59	1	27124	7834	60340	0,8567

60	1	14105	5621	44218	0,70842

Para obtener el modelo (8) debemos de elaborar el siguiente fichero de instrucciones para el programa frontier 4.1. Se incluye transformación logarítmica de los datos (logged dependent variable y).

```
1            1=ERROR COMPONENTS MODEL, 2=TE EFFECTS MODEL
eg1.dta         DATA FILE NAME
eg1.out         OUTPUT FILE NAME
1            1=PRODUCTION FUNCTION, 2=COST FUNCTION
y            LOGGED DEPENDENT VARIABLE (Y/N)
60            NUMBER OF CROSS-SECTIONS
1            NUMBER OF TIME PERIODS
60            NUMBER OF OBSERVATIONS IN TOTAL
2            NUMBER OF REGRESSOR VARIABLES (Xs)
n            MU (Y/N) [OR DELTA0 (Y/N) IF USING TE EFFECTS MODEL]
n            ETA (Y/N) [OR NUMBER OF TE EFFECTS REGRESSORS (Zs)]
n            STARTING VALUES (Y/N)
            IF YES THEN     BETA0
                      BETA1 TO
                      BETAK
                      SIGMA SQUARED
                      GAMMA
                      MU           [OR DELTA0
                      ETA              DELTA1 TO
                                      DELTAP]

                      NOTE: IF YOU ARE SUPPLYING STARTING VALUES
                      AND YOU HAVE RESTRICTED MU [OR DELTA0] TO BE
                      ZERO THEN YOU SHOULD NOT SUPPLY
```

Los índices de eficiencia obtenidos aparecen en la última columna de la tabla nº1, en tanto que los coeficientes de la función de producción estimada son los que figuran a continuación:

	coefficient	standard-error	t-ratio
beta 0	0.56161963E+00	0.20261668E+00	0.27718331E+01
beta 1	0.28110205E+00	0.47643365E-01	0.59001301E+01
beta 2	0.53647981E+00	0.45251553E-01	0.11855501E+02
sigma-squared	0.21700046E+00	0.63909106E-01	0.33954545E+01
gamma	0.79720730E+00	0.13642399E+00	0.58436004E+01

Output from the program FRONTIER (Version 4.1)

```
instruction file = eg1.ins
data file =        eg1.dta


Error Components Frontier (see B&C 1992)
The model is a production function
The dependent variable is logged


the ols estimates are :

             coefficient     standard-error    t-ratio

  beta 0        0.24489834E+00  0.21360307E+00  0.11465114E+01
  beta 1        0.28049246E+00  0.48066617E-01  0.58354940E+01
  beta 2        0.53330637E+00  0.51498586E-01  0.10355748E+02
  sigma-squared  0.11398496E+00

log likelihood function =  -0.18446849E+02

the estimates after the grid search were :

  beta 0        0.58014216E+00
  beta 1        0.28049246E+00
  beta 2        0.53330637E+00
  sigma-squared  0.22067413E+00
  gamma          0.80000000E+00
  mu is restricted to be zero
  eta is restricted to be zero


 iteration =     0  func evals =     19  llf = -0.17034854E+02
    0.58014216E+00 0.28049246E+00 0.53330637E+00 0.22067413E+00 0.80000000E+00
 gradient step
 iteration =     5  func evals =     41  llf = -0.17027230E+02
    0.56160697E+00 0.28108701E+00 0.53647803E+00 0.21694170E+00 0.79718731E+00
 iteration =     7  func evals =     63  llf = -0.17027229E+02
    0.56161963E+00 0.28110205E+00 0.53647981E+00 0.21700046E+00 0.79720730E+00


the final mle estimates are :

             coefficient     standard-error    t-ratio

  beta 0        0.56161963E+00  0.20261668E+00  0.27718331E+01
  beta 1        0.28110205E+00  0.47643365E-01  0.59001301E+01
  beta 2        0.53647981E+00  0.45251553E-01  0.11855501E+02
  sigma-squared  0.21700046E+00  0.63909106E-01  0.33954545E+01
  gamma          0.79720730E+00  0.13642399E+00  0.58436004E+01
  mu is restricted to be zero
  eta is restricted to be zero

log likelihood function =  -0.17027229E+02

LR test of the one-sided error =   0.28392402E+01
with number of restrictions = 1
[note that this statistic has a mixed chi-square distribution]

number of iterations =      7

(maximum number of iterations set at :   100)

number of cross-sections =     60

number of time periods =      1

total number of observations =     60

thus there are:      0  obsns not in the panel
```

covariance matrix :

0.41053521E-01	-0.31446721E-02	-0.80030279E-02	0.40456494E-02	0.92519362E-02
-0.31446721E-02	0.22698902E-02	0.40106205E-04	-0.29528845E-04	-0.91550467E-04
-0.80030279E-02	0.40106205E-04	0.20477030E-02	-0.47190308E-04	-0.16404645E-03
0.40456494E-02	-0.29528845E-04	-0.47190308E-04	0.40843738E-02	0.67450773E-02
0.92519362E-02	-0.91550467E-04	-0.16404645E-03	0.67450773E-02	0.18611506E-01

technical efficiency estimates :

firm	eff.-est.
1	0.65068880E+00
2	0.82889151E+00
3	0.72642592E+00
4	0.74785113E+00
5	0.69133584E+00
6	0.77654637E+00
7	0.56516787E+00
8	0.73768185E+00
9	0.84388964E+00
10	0.75784167E+00
11	0.54558432E+00
12	0.93739520E+00
13	0.44809682E+00
14	0.61831027E+00
15	0.87384359E+00
16	0.54952777E+00
17	0.71262499E+00
18	0.75907226E+00
19	0.85727198E+00
20	0.80651927E+00
21	0.72458613E+00
22	0.87223606E+00
23	0.83681369E+00
24	0.75225715E+00
25	0.52974774E+00
26	0.89731683E+00
27	0.81013415E+00
28	0.78179413E+00
29	0.85610585E+00
30	0.62097885E+00
31	0.57938181E+00
32	0.74934194E+00
33	0.88192581E+00
34	0.42082174E+00
35	0.35126244E+00
36	0.88908382E+00
37	0.84118609E+00
38	0.67868899E+00
39	0.67291047E+00
40	0.83853427E+00
41	0.75964587E+00
42	0.68189614E+00
43	0.80438742E+00
44	0.88652992E+00
45	0.74299265E+00
46	0.72610191E+00
47	0.85341515E+00
48	0.78519185E+00
49	0.67207111E+00
50	0.51430249E+00
51	0.84238134E+00
52	0.85098581E+00
53	0.85963850E+00
54	0.75508293E+00
55	0.81649829E+00
56	0.75991250E+00
57	0.87350729E+00
58	0.66471456E+00

59	0.85670448E+00
60	0.70842786E+00

mean efficiency = 0.74056772E+00

8.4 Estimación de eficiencia con métodos no paramétricos. El Data Envelopment analysis (DEA).

8.4.1. Análisis envolvente de datos (DEA). Introducción

El análisis envolvente de Datos (DEA) es una técnica de progamación matemática no paramétrica, que es utilizada para determinar la estimación de la frontera. El análisis no parametrico de eficiencia DEA (Data envelopment Analysis) fue desarrollado por Charnes, Cooper y Rhodes en 1978 (Charnes et al, 1978) y se emplea para estimar los niveles de eficiencia de unidades organizativas sobre diversos campos de aplicación, como puede observarse en el trabajo de Cooper (1999).

El objetivo es obtener un escalar que representa la mínima proporción a la que se pueden reducir los consumos de inputs sin que se disminuya la cantidad producida de output.

La eficiencia relativa de las diferentes unidades consiste en calcular los siguientes cocientes que miden la relación input-output:

$$\text{Eficiencia de la unidad i - ésima} = \frac{\text{Output de la unidad i - ésima}}{\text{Input de la unidad i - ésima}}$$

Sin embargo, el cálculo de este tipo de cocientes como indicadores de eficiencia relativa se muestran insuficientes cuando, por ejemplo, las unidades organizativas emplean varios inputs para obtener simultáneamente varios outputs. En principio esta dificultad puede soslayarse generalizando la expresión anterior de la siguiente manera:

$$\text{Eficiencia de la unidad i - ésima} = \frac{\text{Suma de los outputs de la unidad i - ésima}}{\text{Suma de los inputs de la unidad i - ésima}}$$

El principal problema asociado con la medida de la eficiencia dada por la anterior expresión, reside en la falta de homogeneidad dimensional de los diferentes outputs e inputs. El problema entonces se resuelve, introduciendo un sistema de pesos adecuados que normalice tanto el numerador como el denominador de la última ecuación presentada:

$$\text{Eficiencia de la unidad i - ésima} = \frac{\text{Suma ponderada de outputs de la unidad i - ésima}}{\text{Suma ponderada de los inputs de la unidad i - ésima}}$$

Recurriendo a la notación usual en este campo, para el caso de m outputs y n inputs tenemos:

$$E_j = \frac{U_1 Y_{1j} + U_2 Y_2 j + \ldots + U_i Y_{ij} + \ldots + U_m Y_{mj}}{V_1 Y_{1j} + V_2 Y_2 j + \ldots + V_i Y_{ij} + \ldots + V_n Y_{nj}}$$

Donde:

Ej es la eficiencia relativa de la unidad organizativa j-ésima.

Ui es el peso asociado al ouput genérico i-ésimo.

Vi es el peso asociado al input genérico i-ésimo.

Yij es la cantidad de output genérico i-ésimo en la unidad organizativa j-ésima.

Xij es la cantidad de intput genérico i-ésimo en la unidad organizativa j-ésima.

En consecuencia de la definición de eficiencia relativa para esta expresión, se plantea el problema de determinar los conjuntos de pesos U_i y V_i que permiten normalizar tanto los outputs como los inputs. Una primera cuestión a considerar es si los pesos a aplicar a las diferentes unidades organizativas deben o no ser los mismos. Los primeros trabajos en este campo (Farrell, 1957, Farrell y Fieldhouse, 1962) abordaron este problema intentando establecer un mismo conjunto de pesos para ponderar los outputs e inputs de todas las unidades organizativas. Por el contrario, Charnes et al (1978) sostiene que cada unidad organizativa puede valorar sus outputs e inputs de manera diferente.

La forma de determinar los mejores conjuntos de pesos para los outputs e inputs de cada unidad organizativa constituye el núcleo analítico del análisis de la metodología DEA. De esta manera la eficencia de la unidad j-ésima se obtendrá maximizando el cociente que mide la eficiencia de dicha unidad, sujetando el proceso de optimización a que la eficiencia de todas las unidades organizativas, incluyendo la propia unidad j-ésima, sea menor o igual que la unidad. En términos analíticos, se formula un modelo de programación matemática, cuyas variables representan los pesos más favorables para la unidad organizativa j-ésima . La estructura algebraica del modelo, tal como lo propusieran Charnes et al. (1978), para la unidad j-ésima es la siguiente:

$$\text{Max} \quad E_j = \frac{\sum_{i=1}^{m} U_i Y_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} V_i X_{ij}}$$

$$s.a.$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} U_i Y_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} V_i X_{ij}} \leq 1, \forall j$$

$$U_i, V_i \geq 0, \qquad (1)$$

La solución del modelo anterior proporciona la cuantificación de la eficiencia relativa de la unidad organizativa j-ésima con respecto al resto de unidades, así como los mejores valores de los pesos que han permitido alcanzar dicha eficiencia.

Si en el óptimo Ej = 1, entonces podemos decir que la correspondiente unidad j-ésima es eficiente en términos relativos con respecto a las otras k-1 unidades. Por el contrario si Ej < 1 ello significa que aun habiendo elegido la unidad j-ésima sus pesos más favorables, existen unidades organizativas en la muestra analizada que combinan sus inputs en outputs de una manera más eficiente.

Comenzaremos con una descripción del modelo CRS orientado a Inputs, ya que este modelo fue el primero en ser ampliamente aplicado.

8.4.2 El modelo de rendimientos constantes a escala (CRS) orientado a Inputs

Supongamos que cada una de las N empresas (DMU's a partir de ahora) tienen K inputs y M outputs. La i-ésima DMU está representada por los vectores x_i e y_i, respectivamente. La matriz (KxN) de inputs, X, y la matriz (MxN) de outputs, representan los datos de las N DMU's.

El propósito del DEA es construir una frontera no paramétrica sobre los puntos de referencia, tal que todos los puntos observados queden sobre la frontera de la producción o por debajo. Para el sencillo ejemplo de una industria donde se produce un output usando dos inputs, esto puede ser visualizado como un número de planos que se intersectan formando una envolvente sobre una dispersión de puntos en un espacio tridimensional. Dado el supuesto de CRS, esto se puede también representar por una unidad isocuántica en un espacio de input/input (ver Gráfico nº 2).

La eficiencia en cada DMU se obtiene a partir de una medida del cociente de todos los outputs sobre todos los inputs, $u'y_i/v'x_i$, donde u es el vector de dimensión Mx1 de los pesos de los outputs y v es el vector de Kx1 de los pesos de los inputs. Para seleccionar los pesos óptimos especificamos el siguiente problema de programación matemática:

$$
\begin{aligned}
&\max_{u,v} \, (u'y_i/v'x_i), \\
&\text{st} \quad u'y_j/v'x_j \leq 1, \;\; j=1,2,...,N, \\
&\qquad\; u, v \geq 0.
\end{aligned} \qquad (2)
$$

Esto implica el encontrar los valores para u y v, de manera que la medida de la eficiencia del iésimo DMU es maximizada, sujeto a la restricción de que todas las medidas de la eficiencia deben ser menores o iguales a uno. El problema de esta formulación es que tiene un número infinito de soluciones.[7] Para evitar ésto se impone la restricción $vx_i = 1$, que proporciona:

$$
\begin{aligned}
&\max_{\mu,\nu} \, (\mu'y_i), \\
&\text{st} \quad \nu'x_i = 1, \\
&\qquad\; \mu'y_j - \nu'x_j \leq 0, \; j=1,2,...,N, \\
&\qquad\; \mu, \nu \geq 0,
\end{aligned} \qquad (3)
$$

donde el cambio en la notación de *u* y *v* a *μ* y *v* reflejan la transformación. Esta forma se conoce como la forma del multiplicador del problema de programación lineal.[8]

Usando la dualidad en la programación lineal, una manera equivalente de expresar dicho problema sería:

[7] Si (u*, v*) es una solución, entonces (au*, av*) es otra solución, etc.
[8] µ y v se denominan en este caso precios sombra normalizados.

$$\min_{\theta,\lambda} \theta,$$

$$\begin{aligned} \text{st} \quad & -y_i + Y\lambda \geq 0, \\ & \theta x_i - X\lambda \geq 0, \\ & \lambda \geq 0, \end{aligned} \qquad (4)$$

donde θ es un escalar y λ es un vector Nx1 de constantes. Esta forma de plantear el problema implica menos restricciones que la forma del multiplicador (K+M < N+1), y por lo tanto es generalmente la forma utilizada.

El valor de θ obtenido será la eficiencia de la iésima DMU y está comprendido entre 0 y 1, tomando un valor de 1 si el DMU está situado en la frontera de referencia, es decir, será técnicamente eficiente de acuerdo a la definición de Farell (1957). Señalar que el problema de programación lineal debe de ser resuelto N veces, una para cada DMU de la muestra, obteniendo un θ para cada DMU.

La forma de la frontera no paramétrica del DEA, formada por trozos de líneas, puede causar algunas dificultades en la medida de la eficiencia. El problema se presenta debido a las secciones de la frontera que discurren paralelas a los ejes (ver gráfico 2) que no ocurren en la mayoría de las funciones paramétricas (véase el Gráfico 1). Para ilustrar el problema, en el Gráfico 5 las DMU's que utilizan las combinaciones de inputs C y D son dos DMU's eficientes, las cuales definen la frontera, y A y B son ineficientes.

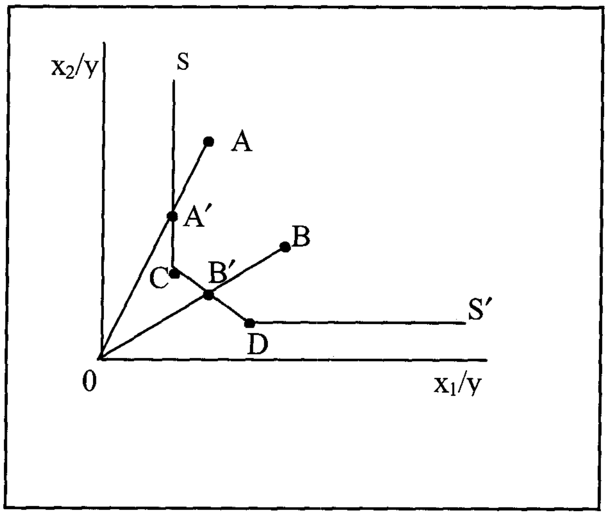
Las medidas de eficiencia técnica de Farrell (1957) dan la eficiencia de A y B como OA'/OA y OB'/OB, respectivamente. Sin embargo, es cuestionable si el punto A ' es un punto eficiente puesto que podría reducirse la cantidad del input x_2 usada (por la cantidad CA') y todavía producir la misma cantidad de output. Esto se conoce como holgura del input en la literatura. Análogamente se define las holguras de los outputs.

Así podría ser discutido que la medida de Farrell de la eficiencia técnica (θ) y cualquier holgura diferente a cero en el input o en el output debería ser calculada, de cara a proporcionar proporcionar una indicación exacta de la eficiencia técnica de un DMU en el análisis DEA.[9]

[9] La definición de Koopman (1951) de la eficiencia técnica es más estricta que la de Farrell (1957), ya que propone que una DMU es solamente técnicamente eficiente si opera sobre la frontera de referencia y además todas las holguras asociadas son cero.

Destacar que para la iésima DMU las holguras de los outputs serán iguales a cero solamente si $Y\lambda\text{-}y_i = 0$, mientras que las holguras de los inputs serán iguales a 0 si $\theta x_i - X\lambda = 0$ (para los valores óptimos dados de θ y λ).

Gráfico nº5 Medidas de eficiencia y holguras de input



En el Gráfico 5 la holgura del input x_2 asociada al punto A ' es CA'. En casos con más inputs y outputs, la identificación del punto eficiente "más cercano" de la frontera (tal como C), y por lo tanto el cálculo subsiguiente de holguras, no es una tarea trivial.

Algunos autores (véase Ali y Seiford 1993) han sugerido la solución de una segunda etapa del problema de programación lineal para mover a un punto eficiente de la frontera, maximizando la suma de las holguras requeridas para moverse desde un punto ineficaz de la frontera (tal como A ' en el Gráfico 5) a un punto eficiente de la frontera (tal como el punto C). Esta segunda etapa del problema de programación lineal se define como (Coelli, 1996) :

$$\begin{aligned} &\min_{\lambda,OS,IS} -(M1'OS + K1'IS),\\ &\text{st} \quad -y_i + Y\lambda - OS = 0,\\ &\qquad \theta x_i - X\lambda - IS = 0,\\ &\qquad \lambda \geq 0,\ OS \geq 0,\ IS \geq 0, \end{aligned} \tag{5}$$

donde OS es un vector Mx1 de holguras del output, IS es un vector Kx1 de holguras del input, and M1 and K1 son vectores unitarios de Mx1 y Kx1, respectivamente. Señalar que en esta segunda etapa, θ no es una variable, su valor es tomado de los resultados derivados de la primera etapa. Asimismo, este problema debe resolverse para cada una de las DMU's de la muestra.

Hay dos problemas importantes asociados a esta segunda etapa. El primero y más obvio es que la suma de holguras está maximizada más bien que reducida al mínimo. Por lo tanto identificará no el punto eficiente más cercano sino el punto eficiente más alejado. El segundo problema es que no es invariante a las unidades de medida. La alteración de las unidades de medida, podría dar lugar a la identificación de diferentes fronteras de eficiencia y por lo tanto de diferentes holguras y medidas de eficiencia.

Sin embargo, estas dos cuestiones no son un problema en el ejemplo del Gráfico 2.5 porque hay solamente un punto eficiente a elegir. No obstante, si la holgura ocurre en 2 o más dimensiones (lo cual ocurre a menudo) entonces los problemas antedichos pueden entrar en juego.

Como resultado de este problema, muchos estudios solucionan simplemente el problema lineal de primera etapa (ecuación 12) para los valores de las medidas técnicas radiales de la eficacia de Farrell (a) para cada DMU ignorando completamente las holguras, o calculan la medida de eficiencia de Farrell (θ) y las holguras residuales, calculadas como $OS = -y_i + Y\lambda$, y $IS = \theta x_i - X\lambda$. Sin embargo, esta forma de obtener las holguras no está exenta de problemas, porque no hay garantía de que proporcionen todas las holguras (por ejemplo, cuando un número de observaciones aparecen en la sección vertical de la frontera en el Gráfico 5) y por lo tanto no siempre puede identificarse el punto eficiente más cercano para cada DMU (Koopman, 1951).

Una solución a lo expuesto, sería la utilización de múltiples etapas del problema de programación lineal. El método multietapa del DEA exige mucho más cómputo que los otros dos metodos (véase Coelli 1997 para más detalles). Sin embargo, las ventajas de esta solución son que identifica los puntos eficientes con múltiples inputs y outputs, y que son también invariantes a las unidades de medida.

Las holguras se pueden ver como una consecuencia del método de construcción de la frontera elegido (DEA) y del uso de los tamaños de muestra finitos. Si un tamaño de muestra infinito estuviera disponible y/o si un método alternativo de construcción de la frontera fuera utilizado, que implique una superficie suave de la función, el problema de las holguras desaparecería. Además, parece absolutamente razonable aceptar el argumento de Ferrier y Lovell (1990), los cuales observan a las holguras como un problema de ineficacia asignativa.

Por lo tanto, un análisis de la eficiencia técnica puede razonablemente concentrarse sobre la medida de la eficiencia radial proporcionada en la primera etapa del DEA (ecuación 12). Sin embargo si uno insiste en identificar puntos proyectados Koopmans-eficientes entonces sería recomendable el uso del método multietapa por las razones descritas.

8.4.3. El modelo de rendimientos variables a escala (VRS)

El supuesto CRS sólo es apropiado cuando todas las DMU's operan sobre una escala optima. En competencia imperfecta, puede ocurrir que las DMU's no funcionen en la escala óptima. Banker, Charnes y Cooper(1984) sugirieron una extensión del modelo de CRS DEA para explicar las situaciones con rendimientos variables a escala (VRS). El uso de la especificación de CRS cuando no todas las DMU está funcionando en la escala óptima, dará lugar a medidas de TE que pueden confundirse con las eficiencias de la escala (SE). El uso de la especificación de VRS permitirá el cálculo de TE desprovisto de los efectos del SE.

El programa lineal CRS se modifica a un VRS, añadiendo la siguiente restricción de convexidad: $N1'\lambda=1$ a (4), con lo cual:

$$
\begin{aligned}
&\min_{\theta\lambda}\theta \\
\text{st}\quad & -y_i + Y\lambda \geq 0 \\
& \theta x_i - X\lambda \geq 0 \\
& N1'\lambda=1 \\
& \lambda\geq 0 \qquad\qquad (6)
\end{aligned}
$$

donde N1 es un vector Nx1 de unos. Este acercamiento forma un casco convexo de los planos que se intersectan sobre los puntos de referencia más firmemente que el casco cónico del CRS proporcionando medidas de eficiencia mayores o iguales que las obtenidas usando el modelo de CRS. El método VRS ha sido el más comúnmente utilizado durante los últimos años.

8.4.4. Cálculo de Eficiencias de escala

Muchos estudios han descompuesto las puntuaciones TE obtenidas de un método DEA CRS en dos componentes, uno debido a la ineficacia de la escala y uno debido a la ineficacia técnica "pura". Esto puede realizarse elaborando un DEA CRS y un VRS sobre los mismos datos. Si hay una diferencia en las dos puntuaciones TE para un DMU particular, esto indicará que el DMU tiene ineficiencia de escala, y que la ineficiencia de la escala se puede calcular como la diferencia entre la puntuación TE del VRS y la puntuación TE del CRS.

El Gráfico nº6 muestra un ejemplo con un input y un output, con las fronteras del DEA CRS y VRS. La ineficiencia técnica del CRS orientado a inputs del punto P es la distancia PPc, mientras que la ineficiencia técnica VRS sería solamente PPv. La diferencia entre estos dos, PcPv, se interpreta como ineficiencia de escala. En términos de ratios, esto se puede expresar como sigue:

$TE_{I,CRS}$ = APc/AP

$TE_{I,VRS}$ = APv/AP

SE_{I} = APc/APv

donde todas las medidas están comprendidas entre 0 y 1. Además, se cumple que:

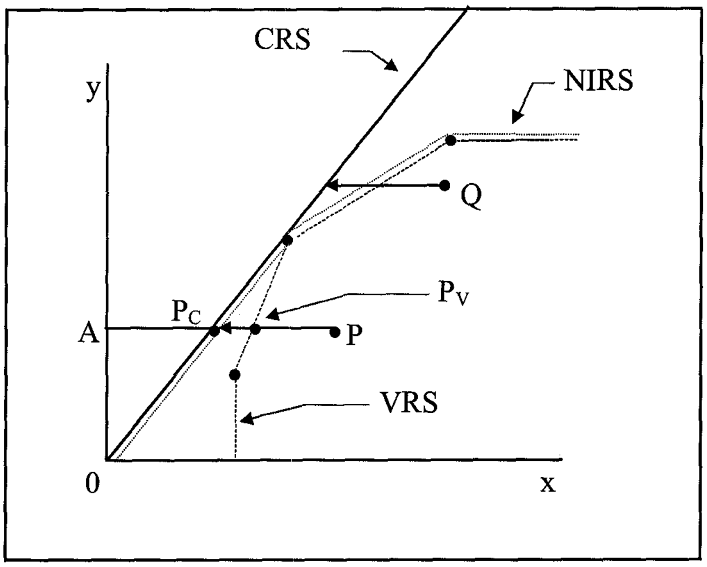
$TE_{I,CRS} = TE_{I,VRS} \times SE_{I}$

ya que:

APc/AP = (APv/AP)x(APc/APv)

Es decir, la medida de eficiencia técnica CRS se descompone en eficiencia técnica pura y escala de eficiencia.

Gráfico nº6 Cálculo de Economías de Escala con el DEA



Un defecto de esta medida de eficiencia de escala es que el valor no indica si el DMU está funcionando en un área de rendimientos crecientes o decrecientes a escala. Esto puede ser determinado adicionando al problema DEA la imposición de rendimientos no crecientes a escala (NIRS). Esto se hace alterando el modelo DEA en la ecuación (6), sustituyendo la restricción $N1'\lambda = 1$ con $N1'\lambda \leq 1$, obteniendo:

$$
\begin{aligned}
&\min_{\theta,\lambda} \theta, \\
&\text{st} \quad -y_i + Y\lambda \geq 0, \\
&\qquad \theta x_i - X\lambda \geq 0, \\
&\qquad N1'\lambda \leq 1 \\
&\qquad \lambda \geq 0,
\end{aligned}
\tag{7}
$$

La frontera de DEA NIRS también se muestra en el Gráfico 6. La naturaleza de las ineficiencias de escala (rendimientos crecientes o decrecientes de escala) para un DMU particular puede ser determinada considerando si la puntuación del TE NIRS es igual a la puntuación TE VRS. Si son desiguales (punto P en el Gráfico 6) entonces existen rendimientos crecientes a escala para ésa DMU. Si son iguales (punto Q en el Gráfico 6) entonces existirán rendimientos decrecientes a escala.

8.4.5.Orientaciones al Input y al Output

En los procedimientos de los modelos orientados al Input, el método utilizado para identificar la ineficiencia técnica es el cálculo de la reducción proporcional en el uso de los inputs. Esto corresponde a la medida basada en inputs de Farrell de ineficiencia técnica. Según se ha mencionado anteriormente, es también posible medir la ineficiencia técnica como aumento proporcional en la producción de los outputs. Las dos medidas proporcionan el mismo valor en el supuesto de CRS, pero son desiguales cuando se asume VRS (véase el Gráfico 2.3). Dado que la programación lineal no requiere de ciertas cualidades que si se exigen en los métodos estadísticos, la opción de una orientación apropiada no es tan crucial como en el caso de una valoración econométrica. En algunas industrias, los DMUs pueden tener fijada una cantidad de recursos, para producir tanto como sea posible. En este caso una orientación al output sería más apropiada. Esencialmente uno debe seleccionar una orientación según sobre la cual las cantidades (los inputs o los outputs) los gestores tienen mayor control. Además, en muchos casos se observa que la opción de la orientación tendrá solamente influencias de menor importancia sobre las puntuaciones obtenidas (e.g. vea Coelli y Perelman 1996).

Los modelos orientados al output son muy similares a sus contrapuestos orientados al input.. Considerando el ejemplo del modelo VRS orientado al Output:

$$
\begin{aligned}
& \max_{\phi,\lambda} \phi, \\
\text{st} \quad & -\phi y_i + Y\lambda \geq 0, \\
& x_i - X\lambda \geq 0, \\
& N1'\lambda = 1 \\
& \lambda \geq 0,
\end{aligned}
\qquad (8)
$$

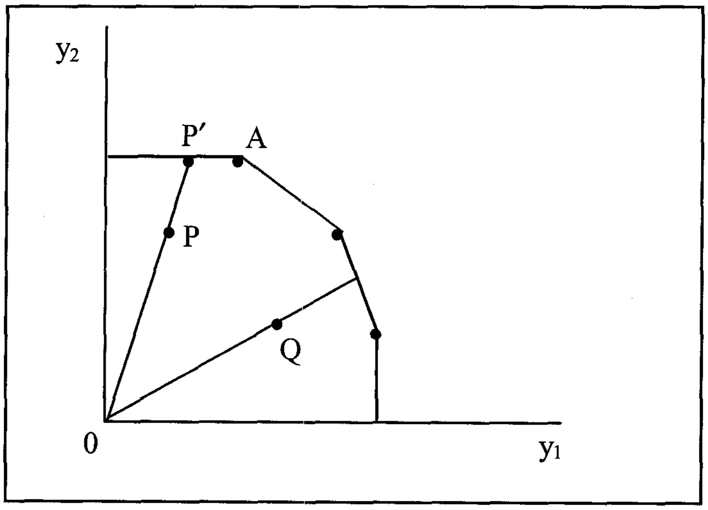
donde $1 \leq \phi < \infty$, y ϕ-1 es el incremento proporcional en los outputs que podría ser alcanzado por el iésmo DMU, sin alterar las cantidades de inputs utilizados.[10].Notar que 1/ϕ define una puntuación TE comprendida entre 0 y 1.

[10] El modelo CRS orientado al output se define de forma similar, pero por brevedad no se describe.

Un ejemplo de un problema DEA orientado al output con dos outputs se podría representar por una curva de posibilidad de producción por trozos lineales, tal como se muestra en el Gráfico 7. En este gráfico, el punto P se proyecta al punto P ' que está en la frontera pero no en la frontera eficiente, porque la producción de y_1 se podría aumentar en la cantidad AP ' sin usar mas input. Esto es aquí la holgura del output, en este caso AP ' en la salida y_l.

Un punto que debe ser mencionado es que los modelos orientados al input y al output estimarán exactamente la misma frontera y por lo tanto, por definición, identifican el mismo conjunto de DMU’s eficientes. Es decir, la diferencia entre los dos métodos radica en las puntuaciones de las DMU’s ineficientes

Gráfico nº7 Orientación output DEA



8.4.6 Información sobre precios y eficiencia económica

Si se dispone de información de precios y se está dispuesto a considerar un objetivo del comportamiento, tal como minimización del coste o maximización del ingreso, podríamos entonces medir también la eficiencia asignativa. Para el caso de la minimización del coste de VRS, de un modelo DEA orientado al input, y una vez resulta la ecuación (6), habrá que solucionar el siguiente problema:

$$\begin{aligned} &\min_{\lambda, x_i^*} \quad w_i' x_i^*, \\ &\text{st} \quad -y_i + Y\lambda \geq 0, \\ &\quad\quad x_i^* - X\lambda \geq 0, \\ &\quad\quad N1'\lambda = 1 \\ &\quad\quad \lambda \geq 0, \end{aligned} \tag{9}$$

donde w_i is un vector de precios del input para la iésima DMU y x_i* es el vector de costes minimizado, dados los precios y los niveles del output y_i. La eficiencia de costes (CE) o de la iésima DMU se calcula como:

CE = w_i' x_i*/ w_i' x_i.

Es decir, el cociente entre el mínimo coste y el observado. Es decir, se puede calcular la eficiencia económica residual como:

AE = CE/TE

Obsérvese que este procedimiento incluirá cualquier holgura en la medida de la eficiencia económica. Esto se justifica a menudo considerando que la holgura refleja una mezcla inadecuada de los inputs (véase Ferrier y Lovell, 1990, p235).

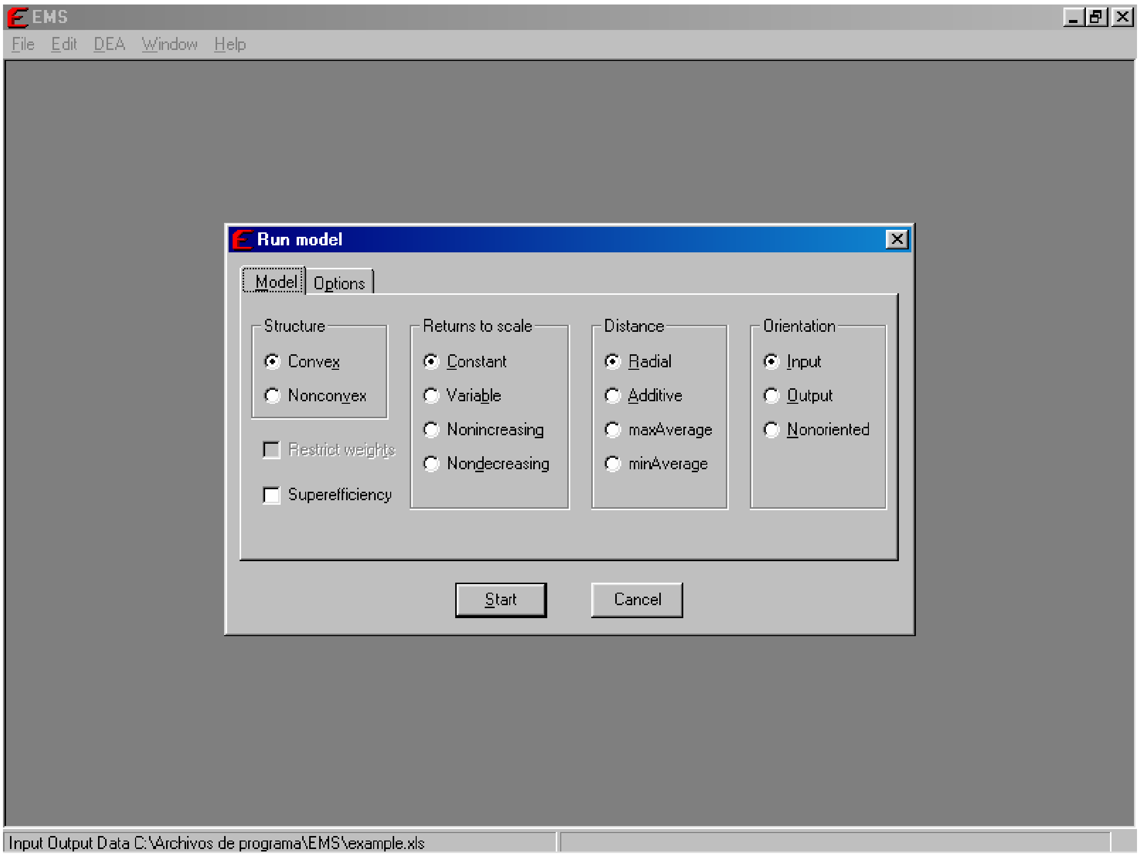
También, se puede considerar la maximización del ingreso y la ineficiencia económica en la selección de la mezcla del output de una manera similar. Véase a Lovell (1993, p33) para mayor detalle.

8.4.7. Ejemplo

Partiendo de cifras relativas a la producción de 20 empresas que fabrican dos productos, A y B, cuya producción en unidades es la que aparece en la tabla, utilizando como inputs más representativos los consumos de materiales, empleo y energía, que también aparecen en la tabla, se van a estimar diferentes modelos DEA de eficiencia utilizando el programa EMS. Señalar que dicho programa los inputs se denotan con el símbolo {I}, y los output con el símbolo {O}. Estos deben de estar residentes en una hoja de calculo EXCEL, denominada “Date”.

	Materiales {I}	empleo {I}	energia {I}	produccion A {O}	produccion B {O}
F1	152,65	10,8	128,63	122,85	154,12
F2	138,92	11,2	157,66	153,48	171,37
F3	137,19	9,6	106,78	131,6	144,7
F4	74,9	7,9	63,25	81,31	73,78
F5	98,47	7,4	117,57	98,56	105,04
F6	91,93	6,8	155,2	98,22	73,71
F7	74,51	5,0	61,14	62,56	42,89
F8	91,06	8,8	235,15	109,85	121,86
F9	64,7	5,4	51,73	50,86	32,98
F10	72,92	6,8	81,61	81,25	91,68
F11	190,01	11,7	179,52	203,5	187,36
F12	83,32	6,5	107,19	86,35	73,78
F13	68,63	5,2	117,57	76,85	30,82
F14	77,46	7,0	64,53	103,05	76,8
F15	95,36	9,3	79,95	101,17	129,84
F16	97,92	9,3	160,88	113,08	118,1
F17	142,35	13,0	23,52	144,49	170,9
F18	71,75	6,0	79,95	66,55	49,01
F19	132,78	10,4	198,1	172,16	122,81
F20	58,42	4,9	14,11	47,93	24,34

El programa EMS es de fácil manejo a través de un menú de opciones en donde hay que seleccionar el modelo de eficiencia a estimar, en la figura aparece la selección de un modelo CCR con orientación input:



Los resultados que ofrece el programa son los siguientes:

a) En la primera columna expresa el índice de eficiencia, correspondiendo en los modelos de orientación input el nivel 100 a las unidades eficientes. Estas unidades determinan la frontera de producción. La unidad menos eficiente, en el modelo de rendimientos constantes a escala orientado al input, sería la F9 que tiene un nivel de eficiencia del 63% respecto a las unidades más eficientes, o si se quiere un nivel de ineficiencia del 37% (100-63%). En los modelos orientados al output el indice de eficiencia expresa el aumento que cada unidad obtendría en el output si utilizara la combinación eficiente de inputs o factores de producción, en este caso la unidad F9 en el modelo orientado al output con rendimientos constantes a escala, podría aumentar la producción un 6,7% de utilizar eficientemente sus inputs, la puntuación obtenida por la DMU en este modelo sería 106,7%. En los modelos no orientados ó orientados input-output, la puntuación expresa el nivel de ineficiencia de cada unidad, de forma que las unidades eficientes tiene un valor 0, en tanto que las más ineficientes el valor mas altos, la unidad F9 presenta en el modelo no orientado con rendimientos constantes a escala el valor de 22,35%.

b) En las columnas siguientes figuran los multiplicadores con los que se obtiene la solución eficiente. En los modelos orientados al input y output los multiplicadores del input suman la unidad, al igual que los del output, en el modelo no orienteado la suma de los multiplicadores del input y output suman la unidad.

c) La columna de Benchmarck expresa los resultados de la comparación de individual de unidades, así la F1 ha sido ineficiente frente a la 2 (un 22% sería su nivel de eficiencia) y frente a la 11 (un 46% habría sido su nivel de eficiencia) y 17 (un 18%). La unidad F2 ha sido eficiente frente a 6 unidades individuales (la 1,3,5,10,12 y 16).

d) Las columnas siguientes son las holguras a que hace referencia el gráfico nº5, en el modelo DEA orientado al input con rendimientos constantes a escala, la unidad 1 tiene una holgura de 29,3 en la producción A. La unidad 5 tiene una holgura de 0,85 en el input de empleo. Como se aprecia, las unidades más eficientes al formar parte de la frontera de producción no tienen ninguna holgura.

Tabla nº 2 Orientación input y rendimientos constantes a escala

DMU	Store	Materiales {I}{W}	Empleo {I}{W}	Energia {I}{W}	producción A {O}{W}	producción B {O}{W}	Benchmarks	{S} materiales {
F1	93,72%	0,00	0,07	0,00	0,00	0,01	2 (0,22) 11 (0,46) 17 (0,18)	0
F2	100,00%	0,00	0,06	0,00	0,00	0,01	6,00	
F3	99,79%	0,00	0,08	0,00	0,00	0,01	2 (0,08) 11 (0,49) 17 (0,23)	0
F4	87,81%	0,01	0,00	0,00	0,01	0,01	8 (0,00) 14 (0,55) 15 (0,24)	0
F5	92,03%	0,00	0,11	0,00	0,00	0,01	2 (0,46) 11 (0,14)	0
F6	86,02%	0,00	0,12	0,00	0,01	0,00	11 (0,10) 19 (0,45)	0
F7	78,06%	0,00	0,13	0,01	0,02	0,00	11 (0,16) 14 (0,28)	5
F8	100,00%	0,01	0,00	0,00	0,01	0,00	3,00	
F9	63,46%	0,00	0,13	0,01	0,02	0,00	11 (0,02) 14 (0,46)	2
F10	98,44%	0,01	0,03	0,00	0,01	0,01	2 (0,08) 8 (0,11) 14 (0,15) 15 (0,41)	0
F11	100,00%	0,00	0,08	0,00	0,00	0,00	9,00	
F12	85,70%	0,01	0,06	0,00	0,01	0,00	2 (0,16) 11 (0,05) 14 (0,04) 19 (0,28)	0
F13	89,04%	0,00	0,15	0,00	0,01	0,00	11 (0,06) 19 (0,38)	0
F14	100,00%	0,01	0,00	0,00	0,01	0,00	8,00	
F15	100,00%	0,01	0,00	0,00	0,00	0,01	3,00	
F16	96,45%	0,01	0,02	0,00	0,00	0,00	2 (0,04) 8 (0,47) 14 (0,31) 15 (0,24)	0
F17	100,00%	0,00	0,00	0,04	0,00	0,01	3,00	
F18	71,06%	0	0,1	0,00%	0,02	0,00000	11 (0,01) 14 (0,35) 19 (0,16)	0,000
F19	100,00%	0	0,05	0	0,01	0,00000	4	
F20	84,53%	0	0,18	0,01	0,02	0,00000	14 (0,09) 17 (0,27)	4

__Tabla nº3 Orientación output y rendimientos constantes a escala__

DMU	Store	materiales {I}{W}	Empleo {I}{W}	energia {I}{W}	producción A {O}{W}	producción B {O}{W}	Benchmarks	{S} materiales {
F1	106,70%	0	0,07	0	0	0,01000	2 (0,23) 11 (0,49) 17 (0,20)	
F2	100,00%	0	0,06	0	0	0,01000	6	
F3	100,21%	0	0,08	0	0	0,01000	2 (0,08) 11 (0,49) 17 (0,23)	
F4	113,88%	0,01	0	0	0,01	0,01000	8 (0,00) 14 (0,63) 15 (0,27)	
F5	108,65%	0	0,11	0	0	0,01000	2 (0,50) 11 (0,16)	
F6	116,26%	0	0,12	0	0,01	0,00000	11 (0,12) 19 (0,53)	
F7	128,11%	0	0,13	0,01	0,02	0,00000	11 (0,21) 14 (0,36)	6
F8	100,00%	0,01	0	0	0,01	0,00000	3	
F9	157,57%	0	0,13	0,01	0,02	0,00000	11 (0,03) 14 (0,72)	3
F10	101,59%	0,01	0,03	0	0,01	0,01000	2 (0,08) 8 (0,11) 14 (0,16) 15 (0,42)	
F11	100,00%	0	0,08	0	0	0,00000	9	
F12	116,69%	0,01	0,06	0	0,01	0,00000	2 (0,19) 11 (0,05) 14 (0,04) 19 (0,33)	
F13	112,31%	0	0,15	0	0,01	0,00000	11 (0,06) 19 (0,43)	
F14	100,00%	0,01	0	0	0,01	0,00000	8	
F15	100,00%	0,01	0	0	0	0,01000	3	
F16	103,68%	0,01	0,02	0	0	0,00000	2 (0,04) 8 (0,49) 14 (0,32) 15 (0,25)	
F17	100,00%	0	0	0,04	0	0,01000	3	
F18	140,72%	0	0,1	0	0,02	0,00000	11 (0,02) 14 (0,50) 19 (0,23)	
F19	100,00%	0	0,05	0	0,01	0,00000	4	
F20	118,31%	0	0,18	0,01	0,02	0,00000	14 (0,10) 17 (0,32)	5

Tabla nº4 Orientación input-output y rendimientos constantes a escala

DMU	Score	materiales {I}{W}	Empleo {I}{W}	energia {I}{W}	produccion A {O}{W}	produccion B {O}{W}	Benchmarks	{S} materiales {I}	{S} empleo {I}
F1	3,24%	0	0,04	0	0	0,00000	2 (0,22) 11 (0,47) 17 (0,19)	0	0
F2	0,00%	0	0,03	0	0	0,00000	6		
F3	0,11%	0	0,04	0	0	0,00000	2 (0,08) 11 (0,49) 17 (0,23)	0	0
F4	6,49%	0,01	0	0	0	0,00000	8 (0,00) 14 (0,59) 15 (0,25)	0	0,91
F5	4,15%	0	0,06	0	0	0,00000	2 (0,47) 11 (0,15)	0	0
F6	7,52%	0	0,06	0	0	0,00000	11 (0,11) 19 (0,49)	0	0
F7	12,32%	0	0,07	0	0,01	0,00000	11 (0,18) 14 (0,32)	5,68	0
F8	0,00%	0,01	0	0	0	0,00000	3		
F9	22,35%	0	0,08	0	0,01	0	11 (0,02) 14 (0,56)	2,61	0
F10	0,79%	0,01	0,02	0	0	0	2 (0,08) 8 (0,11) 14 (0,15) 15 (0,41)	0	0
F11	0,00%	0	0,04	0	0	0	9,00000		
F12	7,70%	0	0,03	0	0	0	2 (0,18) 11 (0,05) 14 (0,04) 19 (0,30)	0	0
F13	5,80%	0	0,08	0	0,01	0	11 (0,06) 19 (0,40)	0	0
F14	0,00%	0,01	0	0	0,01	0	8,00000		
F15	0,00%	0	0	0	0	0	3,00000		
F16	1,81%	0	0,01	0	0	0	2 (0,04) 8 (0,48) 14 (0,31) 15 (0,24)	0	0
F17	0,00%	0	0	0,01	0	0	3,00000		
F18	16,92%	0	0,06	0	0,01	0	11 (0,01) 14 (0,41) 19 (0,19)	0	0
F19	0,00%	0	0,03	0	0	0	4,00000		
F20	8,39%	0	0,1	0	0,01	0	14 (0,09) 17 (0,29)	4,59	0

Tabla nº5 Orientación input y rendimientos variables a escala

DMU	Score	materiales {I}{W}	empleo {I}{W}	energia {I}{W}	produccion A {O}{W}	produccion B {O}{W}	Benchmarks	{S} materiales {
F1	93,86 %	0	0,07	0	0	0,01	2 (0,16) 3 (0,71) 11 (0,11) 17 (0,02)	
F2	100,00 %	0	0,04	0	0	0,01	2,00000	
F3	100,00 %	0	0,09	0	0	0,01	1,00000	
F4	96,32 %	0,01	0	0	0	0,01	10 (0,47) 14 (0,29) 17 (0,02) 20 (0,22)	
F5	100,00 %	0	0,14	0	0	0,01	1,00000	
F6	97,63 %	0	0,13	0	0,01	0,01	7 (0,37) 11 (0,13) 13 (0,10) 14 (0,40)	
F7	100,00 %	0	0,2	0	0	0,02	4,00000	
F8	100,00 %	0,01	0	0	0,01	0	1,00000	
F9	94,52 %	0	0,13	0	0	0,03	7 (0,07) 10 (0,11) 20 (0,82)	
F10	100,00 %	0,01	0,08	0	0	0,01	4,00000	
F11	100,00 %	0	0,03	0	0	0	2,00000	
F12	98,91 %	0	0,13	0	0,01	0,01	5 (0,30) 7 (0,36) 10 (0,05) 14 (0,30)	
F13	100,00 %	0,01	0,13	0	0,01	0	2,00000	
F14	100,00 %	0,01	0,02	0	0,01	0	4,00000	
F15	100,00 %	0,01	0	0	0	0,01	1,00000	
F16	96,97 %	0,01	0	0	0,01	0	2 (0,14) 8 (0,44) 14 (0,27) 15 (0,14)	
F17	100,00 %	0	0	0,04	0	0,01	2,00000	
F18	92,58 %	0	0,11	0	0,01	0,01	7 (0,05) 10 (0,33) 13 (0,24) 20 (0,38)	
F19	100,00 %	0,01	0	0	0,01	0	0,00000	
F20	100,00 %	0	0,12	0,03	0,01	0,03	3,00000	

Tabla nº6 Orientación output y rendimientos variables a escala

DMU	Score	materiales {I}{W}	empleo {I}{W}	energia {I}{W}	produccion A {O}{W}	produccion B {O}{W}	Benchmarks	{S} materiales {I}	{S} empleo {
F1	106,61%	0	0,07	0	0	0,01	2 (0,20) 3 (0,43) 11 (0,28) 17 (0,10)	0	
F2	100,00%	0	0,04	0	0	0,01	2,00000		
F3	100,00%	0	0,09	0	0	0,01	1,00000		
F4	106,86%	0,01	0	0	0	0,01	10 (0,44) 14 (0,38) 17 (0,03) 20 (0,15)	0	1,
F5	100,00%	0	0,14	0	0	0,01	1,00000		
F6	103,84%	0	0,13	0	0,01	0,01	7 (0,30) 11 (0,15) 13 (0,14) 14 (0,41)	0	
F7	100,00%	0	0,2	0	0	0,02	4,00000		
F8	100,00%	0,01	0	0	0,01	0	1,00000		
F9	123,93%	0	0,12	0	0,01	0,01	7 (0,04) 10 (0,18) 13 (0,21) 14 (0,05) 20 (0,53)	0	
F10	100,00%	0,01	0,01	0	0	0,01	4,00000		
F11	100,00%	0	0,01	0	0	0	2,00000		
F12	101,83%	0	0,13	0	0,01	0,01	5 (0,33) 7 (0,33) 10 (0,01) 14 (0,33)	0	
F13	100,00%	0,01	0,13	0	0,01	0	3,00000		
F14	100,00%	0,01	0,02	0	0,01	0	6,00000		
F15	100,00%	0,01	0	0	0	0,01	1,00000		
F16	102,84%	0,01	0	0	0,01	0	2 (0,21) 8 (0,44) 14 (0,25) 15 (0,10)	0	0,3
F17	100,00%	0	0	0,04	0	0,01	2,00000		
F18	121,47%	0	0,11	0	0,01	0,01	7 (0,10) 10 (0,27) 13 (0,29) 14 (0,26) 20 (0,09)	0	
F19	100,00%	0,01	0	0	0,01	0	0,00000		
F20	100,00%	0	0,12	0,03	0	0,04	3,00000		

Tabla nº7 Orientación input-output y rendimientos variables a escala

DMU	Score	materiales {I}{W}	empleo {I}{W}	energia {I}{W}	produccion A {O}{W}	produccion B {O}{W}	Benchmarks	{S} materiales {I}	{S} empleo {I}
F1	3,18%	0	0,04	0	0	0	2 (0,18) 3 (0,58) 11 (0,19) 17 (0,06)	0	0
F2	0,00%	0	0,02	0	0	0	2,00000		
F3	0,00%	0	0,05	0	0	0	1,00000		
F4	2,40%	0,01	0	0	0	0	10 (0,46) 14 (0,32) 17 (0,02) 20 (0,19)	0	1,1
F5	0,00%	0	0,08	0	0	0	1,00000		
F6	1,47%	0	0,08	0	0	0	7 (0,34) 11 (0,13) 13 (0,11) 14 (0,41)	0	0
F7	0,00%	0	0,16	0	0	0	4,00000		
F8	0,00%	0,01	0	0	0	0	1,00000		
F9	4,73%	0	0,11	0	0	0	7 (0,08) 10 (0,13) 20 (0,79)	0	0
F10	0,00%	0,01	0,01	0	0	0	4,00000		
F11	0,00%	0	0	0	0	0	2,00000		
F12	0,68%	0	0,08	0	0	0	5 (0,31) 7 (0,35) 10 (0,03) 14 (0,31)	0	0
F13	0,00%	0	0,08	0	0	0	2,00000		
F14	0,00%	0	0,01	0	0	0	4,00000		
F15	0,00%	0	0	0	0	0	1,00000		
F16	1,47%	0	0	0	0	0	2 (0,18) 8 (0,44) 14 (0,26) 15 (0,12)	0	0,29
F17	0,00%	0	0	0,01	0	0	2,00000		
F18	5,73%	0	0,08	0	0	0	7 (0,03) 10 (0,37) 13 (0,34) 20 (0,27)	0	0
F19	0,00%	0	0	0	0	0	0,00000		
F20	0,00%	0	0,12	0,03	0	0	3,00000		

8.5. Números índices y medidas de productividad

8.5.1. Medidas de productividad

El crecimiento de la productividad, en las empresas es una de las bases del incremento de las rentas reales y de la mejora del bienestar. Un crecimiento lento de la productividad limita el crecimiento de la renta y aumenta los riesgos de conflictos en cuanto a la redistribución de la misma (Englander et Gurney, 1994). Por lo tanto, las medidas del nivel e incremento de la productividad son indicadores económicos especialmente importantes.

En principio, la productividad es un indicador más bien sencillo, que describe la relación entre la producción y los factores necesarios para obtenerla. A pesar de la aparente simplicidad de este concepto, el cálculo de la productividad plantea una serie de problemas, que se vuelven cruciales en caso de pretender establecer una comparativa entre el nivel de productividad de las empresas de diversos sectores económicos o de una determinada área geográfica. Una parte de estos problemas están estrechamente vinculados al progreso técnico. Por ejemplo, para considerar el papel de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) en el crecimiento de la productividad, es necesario construir para los bienes TIC índices de precio y volumen.

Existen numerosos métodos para medir el crecimiento de la productividad. La elección definitiva, de por cual sistema inclinarse, dependerá del objetivo que se desee obtener a través de la medición de la productividad y en muchos casos, de la disponibilidad de los datos. En líneas generales, las medidas de la productividad pueden clasificarse en dos categorías: las medidas de la productividad monofactorial (informan de una medida de la producción a una medida de un único factor de producción) y las medidas de la productividad multifactorial (que informan de una medida de la producción en un conjunto de factores de producción). Se distingue también – lo que es especialmente interesante en el ámbito del sector o de la empresa - entre las medidas que informan de la producción bruta a uno o más factores de producción y aquéllas que recurren al valor añadido para obtener una medida comparativa o de evolución de la productividad.

La tabla 8 describe los principales métodos de medida de la productividad. Esta lista está incompleta ya que las medidas monofactoriales de la productividad pueden también construirse para los factores de producción intermedios. No obstante, por razones de simplicidad, la tabla se ha limitado a los métodos de medida de la productividad más extendidos. Se incluyen las medidas de la productividad laboral, de productividad del capital y las medidas de la productividad multifactorial (PMF). Éstas últimas toman la forma de un PMF capital-trabajo calculadas sobre la producción bruta o valor añadido o un PMF capital-trabajo-energía-productos intermedios - servicios intermedios (KLEMS) calculada sobre el concepto de la producción bruta. Entre estos distintos métodos de cálculo, el índice más frecuentemente utilizado es la productividad laboral basada en el concepto del valor añadido, seguido del PMF capital- trabajo y del PMF KLEMS.

Tabla 8

Método de medida de la producción	**Tipo de Factor de producción**			
	Trabajo	**Capital**	**Capital y trabajo**	**Capital, trabajo y factores de producción intermedios**
Producción Bruta	Productividad laboral sobre PB	Productividad del capital sobre PB	PMF capital-trabajo sobre PB	Productividad multifactorial (KLEMS)
VAB	Productividad laboral sobre VAB	Productividad del capital sobre VAB	PMF capital-trabajo sobre VAB	
	Método de medida de la productividad basada en un solo factor			

Fuente: Schereyet y Pital (2001)

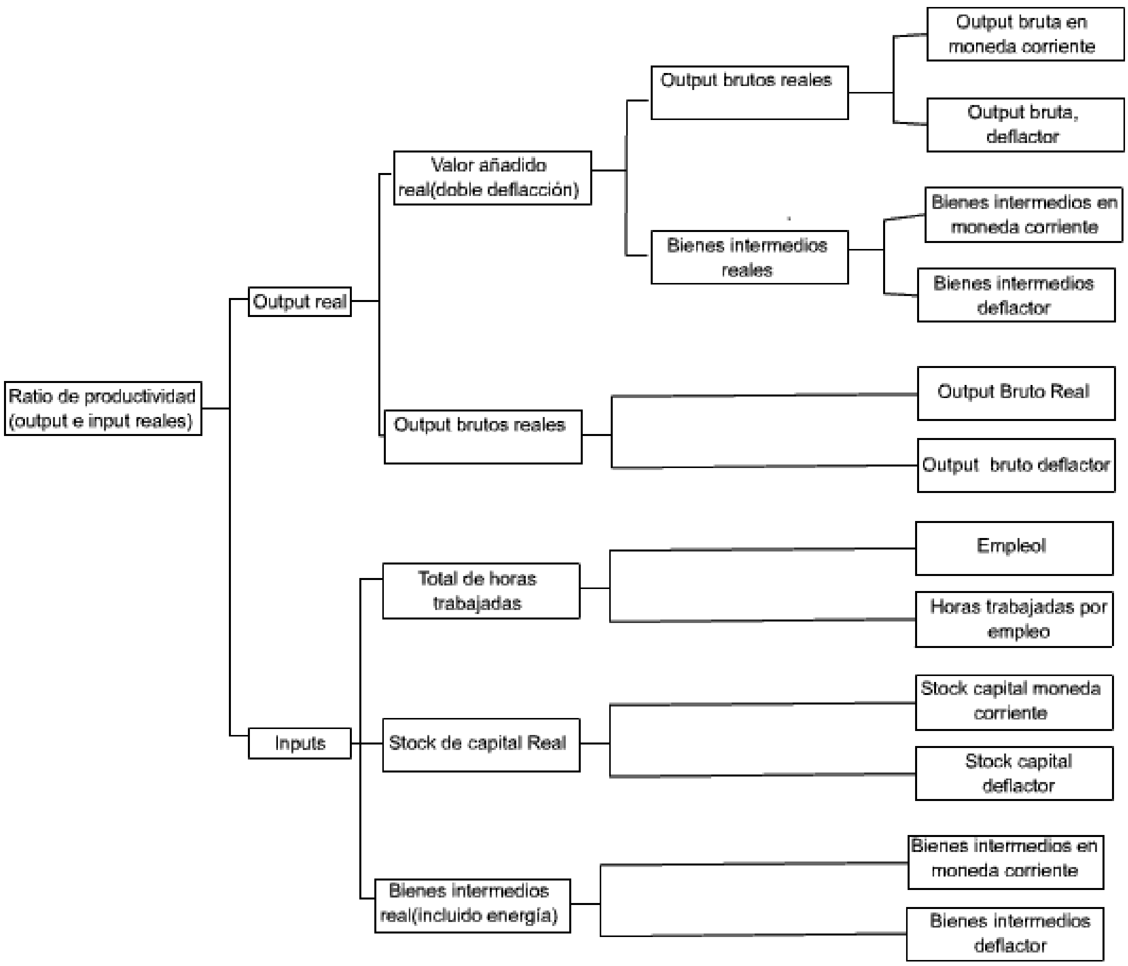
8.5.2.-Medidas de la productividad basadas en un solo factor

Los organismos de estadística no elaboran directamente estadísticas de la productividad a partir de los agentes económicos; realizan más bien medidas de la productividad a partir de los datos sobre los factores y los productos, obtenidos a partir de la elaboración de encuestas. En este sentido hay que destacar que todas las estadísticas sobre la producción, la población activa y las contabilidades nacionales sirven para elaborar índices sobre la productividad.

Un examen sobre la fiabilidad de las estadísticas sobre la productividad se convierte, así pues, en un examen sobre la fiabilidad del sistema de estadísticas económicas.

La Figura 1 presenta de forma gráfica los datos fundamentales necesarios para el cálculo de índices sobre la productividad y en particular los componentes básicos de la medida de la productividad.

Figura 1



El índice de productividad relaciona la producción valorada en términos reales y un factor de producción. Puede tratarse de una medida parcial de productividad, por ejemplo la productividad laboral, donde la producción se relaciona a un único factor, o de una medida de la productividad total de los factores o medida multifactorial donde el índice de la producción real está elaborado con más de un factor de producción.

Los índices multifactoriales se analizan en el siguiente apartado. No obstante, señalar aquí que, en general, la participación de las rentas de los factores en la producción, sirve para ponderar los distintos índices de crecimiento de cara a obtener un índice de la contribución total de los factores o multifactorial. Los factores de producción diferentes a la mano de obra incluida en los cálculos de la productividad multifactorial son el capital, tanto el inmovilizado como las existencias, los bienes intermedios, el consumo de materias primas y la energía.

Como ya se ha indicado, dos tipos de medidas de la producción pueden servir para determinar los índices de la productividad: el valor añadido y la producción bruta. La primera valora la producción como la suma de las rentas totales de los factores de producción (habitualmente el trabajo y el capital) en una industria, un sector o una economía. El segundo índice define la producción a partir del valor de la producción física de una industria, de un sector o de una economía.

A nivel industrial o sectorial, la producción bruta es igual al valor añadido más el consumo de bienes intermedios utilizados en el proceso de producción. A nivel global, la producción bruta equivale al valor añadido real o agregado nacional.

El valor añadido real es la medida más adecuada de la producción a efectos del cálculo de un índice de la productividad industrial cuando la mano de obra o el capital se incluyen como factores. La utilización de la producción bruta real puede sesgar los resultados debido a la sustitución en el proceso de la producción de los bienes intermedios, por la mano de obra o por el capital. Por está razón, el concepto más conveniente de la producción cuando se incluye como factor de producción los bienes intermedios es la producción bruta real.

El valor añadido real se calcula según un método de doble deflación por medio del cual los bienes intermedios en términos reales se descuentan de la producción bruta real. Para calcular esta última, se deflacta la producción bruta a través de índices de precios asociados a dicha producción. Los bienes intermedios reales se calculan de la misma manera, es decir, deflactando los bienes intermedios en precios corrientes según los índices de precios asociados.

Por lo que se refiere a los factores de producción, la medida más conveniente para el factor trabajo es el número total de horas trabajadas, estimada a partir del número total de empleos y las horas semanales medias reales. La valoración del factor capital (inmovilizado y a veces las existencias) se realiza a partir de las estimaciones capital en precios corrientes y de los índices de precios correspondientes.

Es necesario mencionar también las distintas interpretaciones para las estimaciones de la productividad laboral basadas en la producción bruta y el valor añadido. El crecimiento de la productividad laboral basada en el valor añadido depende de las variaciones de la intensidad del uso del factor capital (la cantidad de capital disponible por centro de trabajo) y el crecimiento de otros factores que también afectan a la evolución de la productividad (tecnología, capital humano, etc.). Cuando se mide a través de la producción bruta, el crecimiento de la productividad laboral depende también de las variaciones de la relación entre los consumos intermedios y la cantidad de trabajo. La externalización, por ejemplo, lo que hace es sustituir a factores primarios de producción (factor trabajo) por consumos intermedios.

Así, la productividad laboral basada en la producción bruta puede aumentar a medida que avanza la externalización y disminuir cuando la producción interna se sustituye por la adquisición de consumos intermedios, aunque estos cambios no reflejen necesariamente modificaciones características de la mano de obra, ni de los cambios tecnológicos ni de eficacia. En cambio, el índice de crecimiento de la productividad basada en el valor añadido sufre menos la influencia de la evolución del cociente entre los consumos intermedios y la cantidad de factor trabajo o de la evolución del grado de integración vertical. Cuando una externalización tiene lugar, la mano de obra es sustituida por consumos intermedios. En sí, este proceso tiende a aumentar la productividad laboral medida, en tanto que con el valor añadido va a disminuir simultáneamente, compensando parcial o completamente la subida medida de la productividad.

8.5.3.- Medidas de la productividad basadas en más de un factor (PMF)

Toda medida de la productividad se refiere implícita o explícitamente a una unidad de producción específica: un establecimiento, una empresa, una rama, un sector, o un área geográfica determinada. Los bienes y servicios producidos en una unidad productiva y destinados a su consumo por otras unidades constituyen la producción bruta. El concepto producción (actividad) se utiliza para especificar las relaciones entre el producto y los factores, por una parte, y la combinación específica de factores utilizada para producir el bien, por otra. En función de lo cual podemos decir que la producción se genera a través de la utilización de los factores trabajo y capital, así como de los consumos intermedios. Se presenta tradicionalmente esta relación en forma de una función de producción H con una producción bruta Q, una cantidad de trabajo L, una cantidad de capital K, una cantidad de consumos intermedios M y un parámetro que representa el progreso técnico (A).

$$Q = H\,(A, K, L, M) \qquad (1)$$

El progreso técnico es considerado "neutro en el sentido de Hicks", en cuyo caso la curva de oferta, en el largo plazo se desplazaría como consecuencia de los progresos tecnológicos, ya que es posible, dados los precios de los factores, obtener un determinado nivel de producción a un costo menor, afectando a todos los factores de producción de una manera proporcional.

$$Q = H(A, K, L, M) = A \cdot F(K, L, M) \qquad (2)$$

Partiendo de la anterior formulación de la función de producción, y aplicando tasas logarítmicas de variación, expresamos la producción de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \ln Q}{\partial t} = \frac{\partial \ln A}{\partial t} + S_L \frac{\partial \ln L}{\partial t} + S_K \frac{\partial \ln K}{\partial t} + S_M \frac{\partial \ln M}{\partial t} \qquad (3)$$

En la hipótesis de un productor que minimiza sus costes, los pesos (S_L, S_K, S_M) que ponderan la tasa de variación de cada factor de producción, corresponden a la parte en que participa cada factor en la producción bruta total.

El crecimiento de la PMF será positivo si el índice de crecimiento del volumen de la producción bruta es superior al índice de crecimiento del conjunto de los factores de producción combinados, es decir, si $\frac{\partial \ln A}{\partial t} > 0$. Esta medida del PMF puede considerarse como un índice del progreso técnico exógeno si se hace siempre la hipótesis de un progreso técnico que aumenta de manera homogénea a la producción (Solow ,1959)[11].

El cálculo de la PMF basado en la producción bruta tal y como lo hemos presentado proporciona pocas indicaciones sobre la importancia relativa de una empresa o de una industria en el crecimiento de la productividad global (en un determinado sector económico u área geográfica), debido al efecto derivado de los consumos intermedios o consumos interindustriales.

Schereyer y Pilat (2001), presentan un ejemplo que permite comprender este fenómeno, para lo cual plantean un escenario con, únicamente, dos sectores industriales: por una parte, la industria de calzado, que sólo produce consumos intermedios para la industria del calzado, y por otra parte, la industria del zapato, que sólo produce bienes terminados. Si se quiere considerar la productividad para la industria combinada del calzado y el cuero, será necesario solucionar el problema siguiente. La simple adición de los flujos de consumos intermedios y la producción no es el buen método para obtener los consumos intermedios y la producción de la industria del calzado y la industria del cuero agrupados, puesto que resultaría una doble contabilización de los flujos intermedios entre el productor de cuero y el productor de zapatos. Deben compensarse estos flujos, de modo que la producción de la industria integrada del cuero y el calzado incluyan solamente los zapatos producidos, y que los consumos intermedios

[11] En el tema 4, apartado 4.6.2., se estudia el modelo de crecimiento de Solow

integrados incluyan solamente las compras de la industria del cuero y las compras de la industria del calzado con exclusión de las compras de cuero. Eso tiene consecuencias importantes para las estimaciones de la productividad. Tomemos el ejemplo donde el crecimiento del PMF basado en el concepto de la producción bruta de los productores de cuero y los productores de zapatos es igual a 1 %. La media simple (ponderada) del crecimiento del PMF de los productores de zapatos y cuero será igual a 1 %. Sin embargo, el crecimiento de la productividad incorporada de la industria del calzado y el cuero será superior a 1 %, porque las ganancias de productividad de los productores de zapatos se acumulan con los de los productores de cuero, ya que una industria se abastece de la otra. En resumen, es difícil comparar el crecimiento del PMF basado en el concepto de la producción bruta entre los distintos niveles de agregación, puesto que el crecimiento del PMF incorporado no es la media simple ponderada de sus componentes.

El fenómeno de doble contabilización no se produce con el crecimiento del PMF basado en el concepto de valor añadido. Según este método, se calcula la productividad a partir del valor añadido y de los factores de producción de trabajo y de capital. Dado que el valor añadido, se obtiene descontando de la producción bruta los consumos intermedios, en términos de variación, el valor añadido real puede ser definido como:

$$\frac{\partial \ln VA}{\partial t} = \frac{1}{S_{VA}}\left(\frac{\partial \ln Q}{\partial t} - S_M \frac{\partial \ln M}{\partial t}\right) \tag{4}$$

En esta ecuación, S_{VA} representa la parte del valor añadido en la producción bruta a precios corrientes. Al utilizar la ecuación (3) para sustituir a la expresión entre paréntesis, se obtiene:

$$\frac{\partial \ln VA}{\partial t} = \frac{1}{S_{VA}}\left(\frac{\partial \ln A}{\partial t} + S_L \frac{\partial \ln L}{\partial t} + S_K \frac{\partial \ln K}{\partial t}\right) \tag{5}$$

Las estimaciones del PMF basadas en el valor añadido se obtienen entonces calculando la diferencia entre la tasa de variación del valor añadido real y la tasa de variación ponderada de las cantidades de factores de producción necesarios (trabajo y capital). Una vez determinado el porcentaje del factor trabajo y capital en el valor añadido:

$$S_L^{VA} = \frac{S_L}{S_{VA}} \qquad S_K^{VA} = \frac{S_K}{S_{VA}}$$

la PMF se calcularía:

$$\frac{\partial \ln A^{VA}}{\partial t} = \frac{\partial \ln VA}{\partial t} - S_L^{VA} \frac{\partial \ln L}{\partial t} - S_K^{VA} \frac{\partial \ln K}{\partial t} \qquad (6)$$

El crecimiento del PMF basado en el valor añadido será entonces positivo si el valor añadido en volumen aumenta más rápidamente que el crecimiento incorporado de los factores de producción. Este método presenta además una ventaja: el crecimiento del valor añadido global es una media ponderada simple del crecimiento del valor añadido de los distintos sectores, lo que ocurre también para el crecimiento del PMF basado en el concepto de valor añadido. Retornando al ejemplo anterior, el valor añadido (a precios corrientes) de la industria integrada del calzado y el cuero sería simplemente la suma del valor añadido de la industria del calzado y de la del cuero. Un crecimiento de 1 % del PMF basado en el valor añadido a la vez en la industria del calzado y en la industria del cuero implica un crecimiento de la productividad del 1 % en el conjunto de las dos industrias. Por otro lado la estimación de la PMF de cada sector se convierte así en indicador de la contribución de un sector industrial otorgado al crecimiento de la productividad en toda la economía. Sin embargo, el valor añadido no es una medida directa: contrariamente a lo que ocurre en la producción bruta, no hay ninguna cantidad física que corresponde a una cantidad considerada de valor añadido. Además si el modelo de producción constituye el "verdadero" modelo del progreso técnico, los cálculos basados en el valor añadido sobreestimarían el ritmo del progreso técnico, ya que: $\frac{\partial \ln A^{VA}}{\partial t} = \frac{1}{S_{VA}} \frac{\partial \ln A}{\partial t}$. De hecho, la estimación del PMF basada en el valor añadido es igual a la estimación basada en la producción bruta multiplicada por el inverso del porcentaje del valor añadido en la producción bruta. Como este parte no puede superar la unidad, la estimación del PMF basada en el valor añadido será siempre más elevada que la basada en la producción bruta.

De manera empírica, la elección entre los distintos conceptos es importante, como lo muestran Schereyer y Pilat (2001). Éstos calcularon diferentes estimaciones de la productividad en el sector de las máquinas y herramientas en Finlandia. El tipo de variación del PMF basado en la producción bruta es igual a 2.7% durante el período 1990-98, a comparar con una subida de 7.8% de la estimación basada en el valor añadido. Además, las dos medidas presentan perfiles de aceleración o desaceleración del crecimiento de la productividad muy diferentes entre los dos periodos.

En el ejemplo finlandés, la estimación basada en la producción bruta pasa de 2.1% a 3.3% al año entre la primera y la segunda mitad de los años noventa, lo que representa una aceleración igual a 1.2 puntos. Al mismo tiempo, la estimación basada en el valor añadido pasa de 5.7% a 9.8%, lo que representa una aceleración de 4.1 puntos.

Por otro lado, hay que tener presente que la diferencia entre las dos estimaciones se reduce a medida que se sube el nivel de agregación. A escala de la economía global, la estimación de la productividad basada en la producción bruta será igual a la estimación del PMF basada en el valor añadido[12].

9.5.4 Números índices de productividad multifactorial[13]

Las primeras medidas utilizadas para estudiar la evolución de la productividad consisten – como ya se ha comentado - en dividir el agregado del nivel de producción entre el agregado de un único input, son los llamados índices de productividad parcial. Así, pueden existir tantos índices de productividad parcial como factores de producción.

Dadas las limitaciones obvias que ofrecen estos índices, se ha definido el índice de productividad total o productividad multifactorial, el cual tiene en cuenta el agregado del output y el agregado de los inputs que intervienen en el anterior, permitiendo así tener en cuenta al mismo tiempo todos los factores productivos utilizados:

$PTF = Q/F$

siendo *PTF* el índice de productividad total de los factores, *Q* el agregado del nivel de output y *F* el agregado del nivel de input.

Para medir los vectores ó índices agregados de output y de input, es importante tener presente el método por el cual se han combinado los datos originales en un determinado número de subagregados manejables, y también es relevante cómo estos subagregados ha sido de nuevo re-agregados.

Si una empresa produce un único output (y) y para ello utiliza un único input (x) en cada período contable, el cambio en la productividad de la citada empresa entre los períodos cero y uno (t= 0,1) es el siguiente:

$PTF(x^0, x^1, y^0, y^1) = [y^1/y^0]/[x^1/x^0]$

[12] Esta igualdad se cumple bajo el supuesto que se valore una economía cerrada, ya que en una economía abierta, debido a las importaciones del extranjero, las dos estimaciones divergen, incluso a nivel macroeconómico.

[13] El material de esta sección esta basado principalmente Esther Decimavilla Herrero y Carlos San Juan Mesonada **DIFERENCIAS DE PRODUCTIVIDAD EN EUROPA. EQUILIBRIO A CORTO Y LARGO PLAZO.** Documento de Trabajo 00-18.Series de Economía 03.Noviembre 2000.Departamento de Economía.Universidad Carlos III de Madrid y en Diewert (1980, 1981 y 1992).

Por tanto, para cualesquiera que sean las cantidades positivas del output producido y del input utilizado en el período actual, la variación de la productividad es positiva, siempre que el output crezca a mayor ritmo que el input utilizado.

Pero el problema de medir la productividad surge en la realidad cuando virtualmente todas las empresas producen más de un output utilizando más de un input (empresas tipo output-múltiple/ input-múltiple). Aunque la teoría de los números índices se ocupa de este problema[14], Diewert (1976, 1981 y 1992) identificó los supuestos económicos inherentes a las funciones de agregación implícitas en cada uno de los índices usados para agregar los inputs y los outputs., y concluyó que desde el punto de vista económico, la mejor alternativa para representar el avance tecnológico es utilizar un índice que se ajuste a una función lineal homogénea y flexible, y los índices que tienen las propiedades anteriores son denominados por Diewert (1976): índices *superlativos.*

En este sentido, los índices más adecuados para la agregación de funciones que sean lineales, homogéneas y flexibles, y que permiten, por tanto, comparar rigurosamente la PTF de las empresas, son:

-Índices Divisa, índice de Törnqvist-Theil o índice Translog (PTFT)
-Índice de Fisher (PTFF)
-Índice de Hulten (PTFH).

El índice **Divisa** o su aproximación discreta que recibe el nombre de **Törnqvist-Theil o Translog** es exacto para una función de producción conocida, homogénea y lineal, la transcendental logarítmica o Translog y, por lo tanto, es un índice superlativo.

Para el supuesto de una empresa con input múltiple y con rendimientos constantes de escala (RCE), Kendrich (1961), Caves y otros (1982a) presentan una justificación económica válida para emplear, como medida para el cambio tecnológico, el índice de productividad de Törnqvist-Theil.

Por razones teóricas y prácticas, el índice de Törnqvist-Theil es frecuentemente usado para medir la Productividad Total de los Factores. Este índice permite efectuar comparaciones de productividad en el espacio, es decir, entre agregados de empresas de varios países y, también, comparaciones inter-temporales, es decir, entre distintos momentos del tiempo para el agregado de las empresas de un país.

El **índice de Fisher** de Productividad Total de los Factores ofrece la medida teóricamente más adecuada de la productividad desde el punto de vista de la metodología de los números índices, en el caso de empresas que sean de tipo multi-input/multi-output. Siendo también un índice *superlativo* de los cambios en la productividad (Diewert, (1992)).

Por su parte, el **índice de Hulten** mide la productividad a corto plazo cuando hay un factor cuasi-fijo. Se ha calculado este índice porque considera el supuesto en el que se aprecia una ineficiencia asignativa en los factores productivos (Grosskopf (1993)), algo que no se toma en consideración al utilizar el Translog o el de Fisher, que asumen equilibrio a largo plazo y, por tanto, una combinación eficiente de factores.

Hulten (1986) afirma que si la empresa no se encuentra en el equilibrio a largo plazo y existe una sub-utilización (o sobre-utilización) de la capacidad del input cuasi-fijo, la medida de la PTF debe ser calculada teniendo en cuenta de forma apropiada la ponderación de este input para evitar sesgos.

A. Índice Divisa, indice de Törnqvist-Theil

El índice de Divisia para los procesos de agregación se define en términos de tasas de crecimiento, así la tasa de variación del output agregado se expresa como:

$$\hat{Q} = \sum_j \frac{p_j q_j}{Y} \hat{q}_j \quad (7)$$

donde *pj* y *qj* son los precios y cantidades del output *j*-ésimo, $\hat{Q} = \frac{dQ/dt}{Q}$: es la tasa de crecimiento del output agregado, $Y = \sum_j p_j q_j$ son los ingresos totales y $\hat{q}_j = \frac{dq_j/dt}{q_j}$:*j*es la tasa de crecimiento del output *j*-ésimo.

De igual forma, se define el índice de Divisia para la agregación del input:

$$\hat{F} = \sum_i \frac{w_i x_i}{C} \hat{x}_i \quad (8)$$

[14] En el Tema 4, apartado 4.3.1. se recogen las nociones básicas de la teoría de elaboración de números índice.

donde w_i y x_i representan el precio y la cantidad del input *i*-ésimo y $\hat{F} = \frac{dF/dt}{F}$: es la tasa de crecimiento del input agregado, $C = \sum_i w_i x_i$ es el conste total y $\hat{x}_j = \frac{dx_j/dt}{x_j}$:*j*es la tasa de crecimiento del intput *i*-ésimo.

Por tanto, la tasa de crecimiento de la productividad total de los factores se define como:

$P\dot{T}F = \dot{Q} - \dot{F}$ (9)

denominado habitualmente como "índice de Divisia de la productividad total de los factores".

El índice de Divisia requiere de una aproximación discreta, ya que el índice divisa está definido de forma continua en el tiempo. La adaptación discreta más usual es la desarrollada por Törnqvist (1936) y Theil (1976) y que se denomina habitualmente como índice de Divisia-Törnqvist, índice de Törnqvist-Theil ó o transcendental logarítmico (Translog), y que se concreta en la siguiente formulación:

Δln =*PTF* Δln *Q* - Δln *F* (10)

donde:

$$\begin{aligned} \Delta \ln F &= \ln\left[\frac{F_t}{F_{t-1}}\right] = \tfrac{1}{2}\sum_j (a_{jt} + a_{jt-1}) \ln\left(\frac{x_{it}}{x_{it-1}}\right) \\ \Delta \ln Q &= \ln\left[\frac{Q_t}{Q_{t-1}}\right] = \tfrac{1}{2}\sum_j (b_{jt} + b_{jt-1}) \ln\left(\frac{q_{it}}{q_{it-1}}\right) \end{aligned} \quad (11)$$

y a su vez $b_j = \frac{p_{jt} q_{jt}}{\sum p_{jt} q_{jt}}$ es la participación de cada output en el valor de la producción total

y $a_i = \frac{w_{it} x_{it}}{\sum w_{it} x_{it}}$ es la participación de cada tipo de input en el valor del coste total.

El índice Törnqvist-Theil de cantidades expresado en su forma logarítmica es:

$$\Delta \ln F = \ln\left[\frac{F_t}{F_{t-1}}\right] = \frac{1}{2}\sum_j (a_{jt} + a_{jt-1}) \ln\left(\frac{x_{it}}{x_{it-1}}\right) \quad (12)$$

donde:

- a_{it} es la participación de cada input *i* en los pagos totales del período *t*
- x_{it} es la cantidad de inputs *i* en el momento *t*

De forma similar el índice Törnqvist-Theil de precios es:

$$\Delta \ln P = \ln\left[\frac{P_t}{P_{t-1}}\right] = \frac{1}{2}\sum_j (c_{jt} + c_{jt-1}) \ln\left(\frac{w_{it}}{w_{it-1}}\right) \quad (13)$$

donde:

- C_{it} es la participación de cada coste *i* en los costes totales del periodo *t*
- W_{it} es el precio del coste *i* en el momento *t*

La adecuación de este índice para los análisis de productividad total (por sus buenas propiedades) se justifica teóricamente en numerosos trabajos, entre los que podemos citar los de Solow (1957), Ritcher (1966), Hulten (1973) o Diewert (1976).

El índice Törnqvist-Theil asume que la tecnología de producción es input-output separable, homogénea para una función de producción lineal y con cambio técnico neutral en el sentido de Hicks.

De hecho, bajo la hipótesis de tecnología con rendimientos constantes de escala, Caves y otros (1982a), presentan una justificación económica para el uso del índice de Törnqvist-Theil o índice Translog de productividad para medir el cambio tecnológico (Diewert, 1992).

El índice Törnqvist-Theil también puede ser utilizado en algunas estructuras muy generales de funciones de producción, esto es, para casos de rendimientos de escala no constantes ni homogéneos (Caves y otros (1982a y 1982b)). Si las funciones de agregación son no-homotéticas[15], el índice Törnqvist-Theil sigue siendo útil, ya que la función Translog puede proveer una aproximación en diferencias de segundo orden a una función arbitraria doblemente diferenciable.

Para realizar comparaciones inter-temporales y entre países (inter-espaciales), hay que comenzado agregando datos contables de empresas con una función Translog en un país *i* en un momento *t*:

$$\ln Y_{it} = F_{it} [\ln L_{it}, \ln K_{it}, \ln M_{it}, T_t, D_i] \qquad (14)$$

donde:

- Y_{it} es el output total en el momento *t* en el país *i*.
- L_{it} es el input de trabajo en el momento *t* en el país *i*.
- K_{it} es el input de capital en el momento *t* en el país *i*.
- M_{it} es el input de consumo de bienes y servicios en el momento *t* en el país *i*.
- T_t es el estado de la tecnología en el momento *t*.
- D_i es el indicador espacial para el país *i* ó "indicador de eficiencia".

Esta función de producción asume la separabilidad débil entre inputs y outputs[16]y entre los tres subgrupos de inputs[17]. De forma adicional, se suponen rendimientos constantes y que la remuneración de los factores de producción es igual a su productividad marginal. Si aplicamos el lema cuadrático[18] de Diewert (1976) a esta función Translog en dos países (*i,i´*) en dos períodos de tiempo (*t,t´*), se obtiene la siguiente expresión:

$$\ln Y_{it} - \ln Y_{i't'} = \tfrac{1}{2} (a_{it}+a_{i't'})\cdot (\ln L_{it} - \ln L_{i't'}) + \tfrac{1}{2} (b_{it}+b_{i't'})\cdot (\ln K_{it} - \ln K_{i't'}) + \tfrac{1}{2} (c_{it}+c_{i't'})\cdot (\ln M_{it} - \ln M_{i't'}) + \tfrac{1}{2} (\partial F/\partial D_{D=D_i} + \partial F/\partial D_{D=D_{i'}}) \cdot (D_i - D_{i'}) + \tfrac{1}{2} (\partial F/\partial T_{T=T_t} + \partial F/\partial T_{T=T_{t'}}) \cdot (T_t - T_{t'}) \qquad (15)$$

donde:

- *i, i'* son países.
- *t, t'* son períodos de tiempo.
- *a, b, y c* son, respectivamente, la participación de los factores trabajo, capital e inputs intermedios en la producción total (en el país y período mostrado por el subíndice, y donde a+b+c =1 si asumimos rendimientos constantes de escala)
- *L, K y M* son los factores productivos: trabajo, capital e inputs intermedios respectivamente.

---

15 Una función es no-homotética cuando la participación dependerá del nivel de producción y no de los precios relativos.

16 Se dice que una función es débilmente separable entre inputs y outputs si y solo si, la tasa marginal de sustitución entre cualquier output es independiente de la cantidad de inputs considerada.

17 Se dice que una función es débilmente separable entre subgrupos de inputs, si la tasa marginal de sustitución entre dos inputs x_i y x_j de un subgrupo, es independiente del número de inputs que no pertenecen al subgrupo N.

- *Y* es el output total.

Los últimos dos términos de la ecuación son índices Translog, es decir, son índices exactos para funciones translogarítmicas. Los llamaremos $\rho_{ii'}$ y $\tau_{t,t'}$, e indicarán la productividad inter-espacial e intertemporal respectivamente:

$\rho_{ii'} = ½ (\partial F/\partial D_{D=Di} + \partial F/\partial D_{D=Di'}) \cdot (D_i - D_{i'})$

y

$\tau_{t,t'} = ½ (\partial F/\partial T_{T=Tt} + \partial F/\partial T_{T=Tt'}) \cdot (T_t - T_{t'})$

La fórmula general para el índice Translog de PTF en logaritmos es:

$$PTF_T = \ln Y_{it} - \ln Y_{it'} - \Phi \sum \frac{1}{2} [s_{it} + s_{it'}] (\ln X_{it} - \ln X_{it'}) \quad (16)$$

donde:

- Φ es el grado de homogeneidad de la función de producción
- *i, i'* son países.
- *t, t'* son períodos de tiempo.
- *s* es la participación de los factores productivos en la producción total.
- *X* son los factores productivos (trabajo, capital e inputs materiales intermedios).
- *Y* es el output total.

De las ecuaciones (15) y (16) se pueden obtener las siguientes conclusiones:

1) Si hacemos $D_i = D_{i'}$, podemos observar los movimientos en la productividad para diversos períodos de tiempo en una empresa tipo representativa de un país o sobre la media ponderada de diferentes tipos de empresas (análisis inter-temporal de la productividad):

$\tau_{t,t'} = (\ln Y_t - \ln Y_{t'}) - [½ (a_t+a_{t'}) \cdot (\ln L_t - \ln L_{t'})] - [½ (b_t+b_{t'}) \cdot (\ln K_t - \ln K_{t'})] - [½ (c_t+c_{t'}) \cdot (\ln M_t - \ln M_{t'})]$ (17)

Por lo tanto, $\tau_{t,t'} > 0$ indica que la productividad ha crecido respecto a los períodos anteriores. El caso contrario se da cuando $\tau_{t,t'} < 0$, señala que la productividad total disminuye.

[18] El lema cuadrático afirma que la diferencia entre los valores de una función cuadrática estimada en dos puntos, es igual a la media del gradiente evaluado en esos dos puntos multiplicada por la diferencia entre ellos

2) Cuando $T_t = T_{t'}$, podemos comparar la productividad mediante el indicador de eficiencia relativa considerando dos países *i e i´* (análisis inter-espacial de la productividad):

$$\rho_{i,i'} = (\ln Y_i - \ln Y_{i'}) - [½ (a_i+a_{i'})\cdot (\ln L_i - \ln L_{i'})]- [½ (b_i+b_{i'})\cdot (\ln K_i - \ln K_{i'})]- [½ (c_i+c_{i'})\cdot (\ln M_i - \ln M_{i'})] \quad (18)$$

Por lo tanto, $\rho_{i,i'} > 0$ indica menor productividad en el país *i´* con respecto al país *i*. El caso contrario se produce cuando $\rho_{i,i'} < 0$.

B. Índice de Fisher

Diewert (1992) muestra que el índice ideal de cantidades de Fisher es la única función que satisface todas las propiedades matemáticas que se proponen como deseables para ser satisfechas por un índice de output. Igualmente, sus resultados establecen también una justificación económica robusta para el uso del índice de productividad de Fisher (PTFF) que resulta ligeramente preferible al índice de productividad Translog (PTFT) en el caso de inputs y outputs múltiples.

El índice de Fisher es la medida geométrica de los índices de Laspeyres y Paasche.

El índice de cantidades de Laspeyres para el output es:

$$Q_L = p^0 y^1 / p^0 y^0 \quad (19)$$

donde *p* es el precio del output e *y* la cantidad de output.

El índice de cantidades de Paasche para el output es:

$$Q_p = p^1 y^1 / p^1 y^0 \quad (20)$$

Por lo tanto, el índice Fisher de cantidades para el output agregado es:

$$Q_F = \sqrt{\left(\frac{p^0 y^1}{p^0 y^0} \quad \frac{p^1 y^1}{p^1 y^0} \right)} \quad (21)$$

De forma similar, el índice de cantidades de Fisher del input agregado es:

$$X_F = \sqrt{\left(\frac{w^0 x^1}{w^0 x^0} \quad \frac{w^1 x^1}{w^1 x^0} \right)} \text{ (22)}$$

donde *w* es el precio del input y *x* la cantidad.

De este modo, el índice del Productividad Total de los Factores de Fisher es:

$PTFF = Q_F / X_F$ (23)

donde Q_F es el índice Fisher del output agregado y X_F es el índice Fisher del input agregado.

El *PTFF* es consistente bajo los siguientes supuestos (Bureau y otros (1995)):

1. La tecnología puede ser aproximada por formas funcionales doblemente diferenciales.
2. Las empresas son competitivas y maximizadoras de beneficios en cada .
3. La tecnología satisface rendimientos de escala no-crecientes.
4. Todos los inputs y outputs pueden ser ajustados al precio de mercado o coste de uso.
5. El coste de uso de los inputs es una representación adecuada del valor del flujo de los servicios que generan los inputs cuasi-fijos.

Esto implica que las tasas de descuento anticipadas en presencia de incertidumbre están aproximadas de forma correcta, al igual que la depreciación. Existe el riesgo de sesgar las medidas si las combinaciones de factores no pueden ser fácilmente ajustables después de que los inputs cuasi-fijos hayan sido comprados (porque exista complementariedad ex-post entre los factores); o por ejemplo, si el coste de uso del capital no es independiente del precio de los restantes inputs.

Además, cuando calculamos la *PTFF* asumimos una situación de equilibrio a largo plazo. Esto significa que no hay asignaciones ineficientes de factores, y por lo tanto, el precio del factor iguala su coste marginal. En el equilibrio a largo plazo, el coste marginal a corto plazo, el coste medio a corto plazo, el coste marginal a largo plazo y el coste medio a largo plazo se cortan todos en el mismo punto (véanse las Figuras 1 y 2).

FIGURA 1:

Productividad a corto y largo plazo

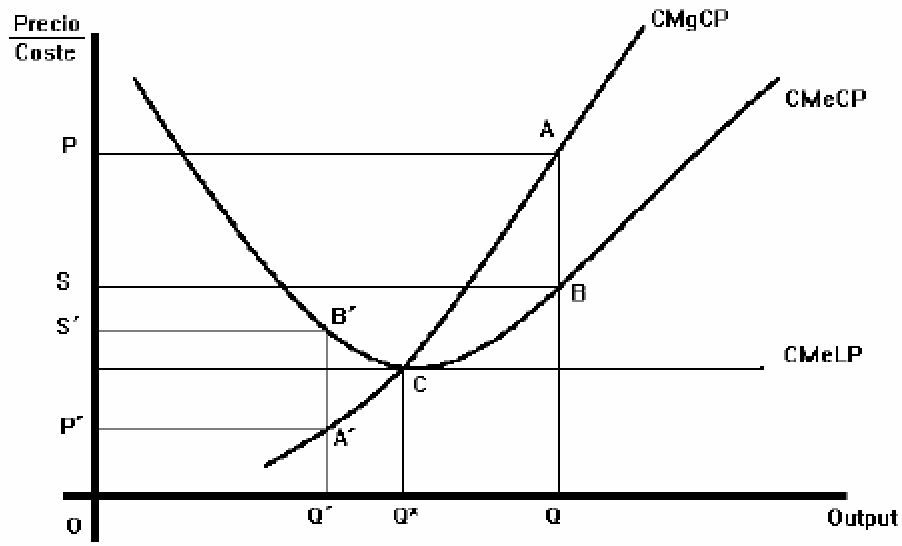
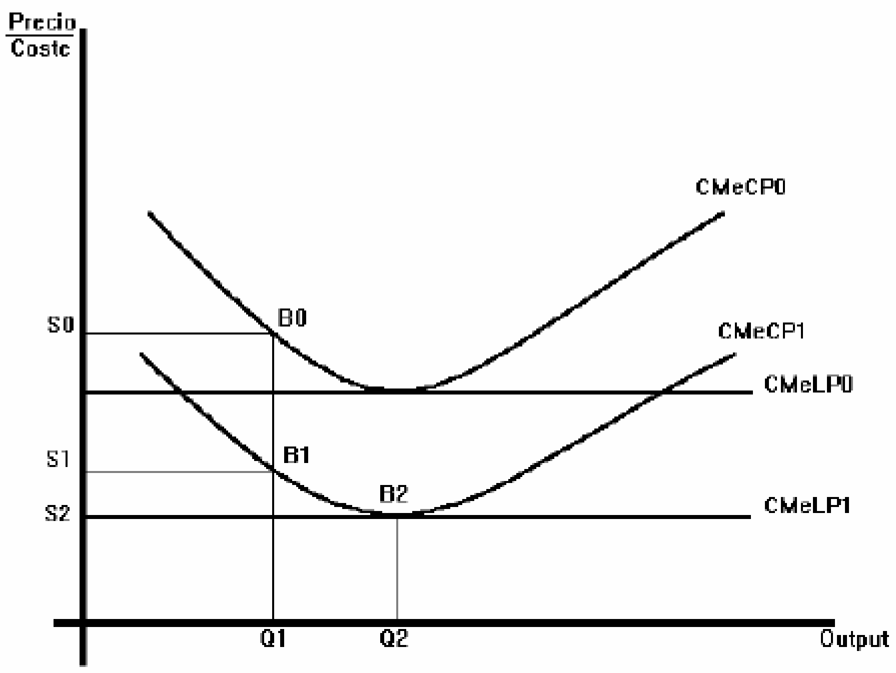


FIGURA 2:

Variación de la productividad a largo plazo



Destacar, por último, un aspecto práctico a lo hora del calcular de la *PTFF.* Conviene calcular primero los índices de cantidades Paasche (Q_P) y Laspeyres (Q_L) para inputs y outputs, ya que partiendo de los datos contables a precios corrientes y de los índices de precios de los inputs y outputs, haciendo uso el teorema de Diewert (1992), se obtienen los demás índices de precios de Laspeyres (P_L) y Paasche (P_P) .

El índice de precios de Laspeyres se obtendría a partir del índice de cantidades de Paasche:

$$\frac{p^1 q^1}{p^0 q^0 Q_P} = \frac{p^1 q^0}{p^0 q^o} = P_L \quad (24)$$

El índice de precios de Paasche se obtendría a partir del índice de cantidades de Laspeyres:

$$\frac{p^1 q^1}{p^0 q^0 Q_L} = \frac{p^1 q^1}{p^0 q^1} = P_P \quad (25)$$

C. El uso del Índice de Hulten

Para construir la *PTFH*, utilizamos la ecuación (23), pero calculando las tasas del factor cuasifijo bajo la hipótesis de que, por diferentes causas (oscilaciones cíclicas, inestabilidad de mercados,...), el factor cuasi-fijo puede ser sobre o sub-utilizado en el corto plazo. Por ello debemos interpretar el índice de Hulten como una medida de PTF a corto plazo cuando el factor cuasi-fijo no esta siendo usado como en el equilibrio a largo plazo.

Bajo este enfoque alternativo, los resultados de Hulten (1986) se utilizan asumiendo que si las empresas no se encuentran en el equilibrio a largo plazo, existe una sobre-utilización (o subutilización) de la capacidad del factor cuasi-fijo, lo que implica que la medición obtenida por el indicador de PTF está sesgada.

Supongamos ahora que, el input cuasi-fijo *F*, es fijo en el corto plazo, y sólo los otros inputs variables *L*, *M* (trabajo asalariado e inputs materiales) pueden ser ajustados. El equilibrio a corto plazo se determina al igualarse el precio con el coste marginal a corto plazo. Este equilibrio puede suceder, o no, al nivel del output en el cual el coste medio a corto plazo es minimizado y se iguala al coste medio a largo plazo. Únicamente cuando la tasa de utilización del input cuasi-fijo es igual a uno, la empresa se encuentra en un equilibrio a largo plazo, y bajo rendimientos constantes de escala, los niveles utilizados de los inputs variables minimizan el coste medio a corto y largo plazo, esto es:

Q(t) = Q*(t) (26)

donde :

- Q(t) = output actual
- Q*(t) = output en el equilibrio a largo plazo (Coste marginal a corto plazo = coste medio a corto plazo=coste marginal a largo plazo = coste medio a largo plazo).

Definimos la tasa de utilización, como el cociente obtenido al dividir el output actual entre el nivel de output al que el coste medio a corto plazo es minimizado. De este modo:

$$U(t) = \frac{Q(t)}{Q^*(t)} \quad (27)$$

y si *U(t)=1*, la empresa se encuentra en un equilibrio de largo plazo, es decir, minimiza costes o maximiza beneficios.

Por el contrario, si $Q(t)^1 Q^*(t)$ tenemos que*:*

$$P(t)\frac{\partial Q(t)}{\partial Q^*(t)} = Z^F(t) \neq P^F(t) \quad (28)$$

En este caso, cuando se utilizan menores cantidades de los inputs variables (*L* y *M),* el factor cuasi-fijo *F*, hace que *U(t)<1*. Simétricamente, si se utilizan mayores cantidades de los inputs variables, *U(t)* será superior a la unidad, por lo que *Q(t)>Q*(t)* y, entonces, el factor cuasi-fijo *F* gana una cuasirenta, $Z^F(t)$, que excede de la renta $P^F(t)$ ganada en otros usos.

Con estas ecuaciones fundamentales de Berndt y Fuss (1986), el enfoque de Hulten muestra que la PTF puede ser medida por:

$$\frac{\dot{A}^*}{A^*} = \frac{\dot{Q}}{Q} - V_F\frac{\dot{F}}{F} - V_L\frac{\dot{L}}{L} - V_M\frac{\dot{M}}{M} \quad (29)$$

donde las ponderaciones del factor cuasi-fijo y de los factores variables vienen definidas, respectivamente, por:

$$V_F = \frac{Z^F F}{PQ}$$

donde :

$PQ = Z^F\ F + P^L\ L + W^M\ M$ (29)

Hay que resaltar que estas ponderaciones son iguales a sus correspondientes elasticidades respecto del output:

$V^F=E^F$, $V^L=E^L$ y $V^M=E^M$ (30)

y por lo tanto:

$V^F+V^L+V^M=1$, bajo el supuesto de rendimientos constantes de escala. (31)

Para hacer operativo este planteamiento teórico, es necesario medir la cuasi-renta Z^F y construir las ponderaciones V^F, V^L y V^M :

$P(t)Q(t) = Z^F(t)F(t) + P^L(t)L(t) + W^M(t)M(t)$ (32)

y despejando $Z^F(t)$:

$$Z^F(t) = \frac{P(t)Q(t) - \left[P^L(t)L(t) + W^M(t)M(t)\right]}{F(t)} \quad (33)$$

Si consideramos el factor cuasi-fijo como el agregado de la "capacidad empresarial" de la empresa, que son los activos fijos (edificios, maquinaria, etc.....) más la propia unidad u organización empresarial y/o las unidades de trabajo familiar no asalariado. Para obtener la cuasi-renta del factor cuasi-fijo y su ponderación (V^F) descomponemos dicho factor cuasi-fijo en capital (cuyo coste es calculado a partir del interés medio implícito pagado por cada empresa) y la capacidad organizativa-empresarial y/o trabajo de las unidades familiares (que se obtiene de forma residual). Las ponderaciones de los factores productivos variables, trabajo asalariado (V^L) e inputs intermedios (V^M) se pueden obtener directamente de los datos contables de cada año.

El índice de Hulten es consistente con los siguientes supuestos (Bureau y otros (1995)):

1. A corto plazo, maximización de beneficios en un entorno competitivo para los inputs variables y combinación de outputs libremente ajustables en cada período.
2. Rendimientos constantes de escala.
3. Realización del output esperado y de los precios de los inputs variables. Si el output o el precio de los inputs variables esperado no se cumple, la remuneración residual de los factores cuasi-fijos no se corresponderá con la cuasi-renta, ya que la decisión sobre el output y los inputs variables se llevan a cabo antes del comienzo de la producción.

Finalmente, destacar que la divergencia existente entre los índices de la Productividad Total de los Factores de Fisher y Hulten, se debe a la corrección introducida por el índice Hulten con respecto a la capacidad de utilización del trabajo familiar (Hulten (1986) y Morrison (1986)). Pero es preciso matizar que esto se basa en el supuesto de que la medida ex-post de los rendimientos del trabajo familiar es una aproximación correcta a las cuasi-rentas. Por este motivo, no debemos omitir que las variaciones climáticas en la agricultura, no sólo implican diferencias entre precios ex-post y ex-ante, sino también diferencias sobre el nivel de output obtenido y el esperado (véase Bureau y otros (1995)).

8.6. Evolución de la productividad con Indice de Malmquist.

8.6.1. Indices de Malmquist

El estudio de la productividad multifactorial se basa, como ya hemos visto, en la función de producción, que establece una relación conocida entre un vector de factores de producción y el vector máximo de productos que pueden obtenerse. La medida tradicional del crecimiento productivo sigue la formulación de Solow (1957) de la tasa de variación de la productividad global, y su adaptación a periodos de tiempo discreto conocido como índice de Törnqvist-Theil. La sencillez de su cálculo radica en algunos supuestos ciertamente restrictivos, al tiempo que requiere de cierta información, en algún caso difícil de conseguir.

En primer lugar, hay que suponer que la unidad productiva se encuentra en una situación de equilibrio en el largo plazo: la producción se encuentra en la frontera de posibilidades de producción[19], por lo que no se contempla la posibilidad de planes de producción ineficientes. En consecuencia, el cambio productivo únicamente refleja desplazamientos en el límite del conjunto de posibilidades de producción, sin tener en cuenta los movimientos que se producen dentro de su conjunto de posibilidades de producción, los cuales representan reducciones o aumentos de ineficiencia de la unidad productiva.

En segundo lugar, se está suponiendo que los niveles de todos los inputs se ajustan instantáneamente, según el valor de su productividad marginal, en respuesta a los cambios en los precios, sin existir costes de ajuste. Por último, se precisan datos sobre precios de los inputs y de los outputs.

Para evitar estos inconvenientes, se puede evaluar el crecimiento productivo mediante el índice de Malmquist (Malmquist, 1953). Para Grifell y Lovell (1995), los índices de Malmquist presentan varias ventajas frente a otros métodos más tradicionales de medir la productividad global de los factores:

i) En primer lugar, no se necesitan supuestos sobre el comportamiento de la unidad que se analiza, tales como la maximización de beneficios o la minimización de costes.

[19] Frontera de posibilidades de producción: Muestra todas las combinaciones de bienes y servicios que puede producir una economía que utiliza todos sus recursos. Un movimiento de un punto a otro de la frontera muestra un cambio en el conjunto de bienes producidos.

ii) Un índice de productividad de Malmquist está basado en funciones de distancia, por lo que no se requieren precios de inputs o outputs en su construcción.

iii) Finalmente, al contrario que el índice de Törnqvist, puede descomponerse en elementos que expliquen las causas del cambio productivo.

La definición general del índice de Malmquist está basada en el concepto económico de función de distancia introducido por Shephard (1970), cuya inversa es igual a la medida de la eficiencia técnica enunciada por Farrell (1957). Desde la contribución inicial de Farrell (1957) al análisis de la producción, se ha desarrollado el concepto de frontera de posibilidades de producción formada por las mejores observaciones, que define el límite de las combinaciones de output-input posibles. De esta manera, la cuantía en la que una observación se encuentre alejada de la frontera dará lugar a una medida de su ineficiencia técnica. En particular, se considera que una unidad es técnicamente eficiente si no es posible aumentar la cantidad obtenida de uno de sus productos sin incrementar el uso de ningún factor o sin disminuir la cantidad obtenida de cualquier otro producto.

El índice de Malmquist, inicialmente propuesto por Caves et al. (1982), consiste en el cálculo de índices a partir de funciones de distancia –introducidas en la teoría del consumo por Malmquist (1953). A partir de dichas funciones de distancia, se podrá establecer en que medida un sector es eficiente, y en caso de no serlo, como es de ineficiente, en relación con una eficiencia óptima del mercado para ese sector. La combinación de estas funciones de distancia permite definir índices de productividad que pueden ser interpretados como variaciones en la PTF si cumplen con la propiedad de proporcionalidad, según la cuál si la producción se ve incrementada de un año a otro, permaneciendo el consumo de factores inalterado, entonces el índice debe incrementarse en igual proporción, que el aumento de outputs. Asimismo, si el consumo de factores productivos se reduce en una determinada proporción a lo largo de un periodo de tiempo, manteniéndose la producción inalterada, entonces el índice debe incrementarse en igual proporción. Desde la perspectiva de los índices de Malmquist y las funciones de distancia que lo integran, esto implica que las funciones de distancia deben ser homogéneas de grado uno en outputs y –1 en factores, lo cual equivale a que la tecnología de producción considerada para evaluar el rendimiento o eficiencia productiva se corresponda con rendimientos constantes a escala.

Este índice permite medir el crecimiento de la productividad entre dos períodos t y s. El procedimiento, propuesto por Caves, Christensen y Diewert (1982), se basa en el cálculo de la distancia que separa a cada individuo de la tecnología de referencia en cada período, utilizando para ello la función distancia.

Una tecnología de producción, en un período t, se puede definir utilizando el conjunto de outputs, que representa el conjunto de todos los vectores de output y, que se pueden producir con el vector de inputs x. Es decir:

$$P^t(x) = \{y^t : (x^t, y^t) es\, posible\} \qquad (1)$$

Si suponemos que P^t satisface ciertos axiomas, se puede definir la función de distancia del output como:

$$D^t(x^t, y^t) = min\{\phi : (y^t / \phi) \in P^t(x)\} \leq 1 \qquad (2)$$

Esta función se define coma la inversa de la expansión proporcional máxima del vector de outputs y^t, dados los inputs x^t, para que el individuo (x^t, y^t) sea eficiente y se encuentre situado en la frontera del período t. $D^t(x^t, y^t)$ toma valores inferiores a la unidad, si y sólo si, $(x^t, y^t) \in P^t$, y toma el valor unitario, si y sólo si, (x^t, y^t) se sitúa en la frontera de producción. En este último caso, la unidad evaluada será técnicamente eficiente.

Dado que se trata de comparar la evolución de la productividad, el índice de Malmquist precisa funciones de distancia con respecto a diferentes períodos de tiempo. Así, en un período posterior s, la función de distancia se define como:

$$D^t(x^s, y^s) = \min\{\phi : (y^s / \phi) \in P^t(x)\} \qquad (3)$$

Esta función mide el máximo cambio proporcional en los outputs necesario para que (x^s, y^s) sea factible con la tecnología del momento t. En este caso, el valor de la función distancia puede exceder la unidad, debido a que la observación evaluada no es posible con la tecnología de otro período.

A partir de estas funciones de distancia, Caves, Christensen y Diewert (1982) definen el índice de productividad de Malmquist referido al período t como:

$$M^t = \frac{D^t(x^s, y^s)}{D^t(x^t, y^t)} \qquad (4)$$

Un índice $M^t > 1$ indica que la productividad en el período s es superior a la del período t, puesto que la expansión necesaria en los outputs del período s para que la observación sea factible en t es inferior a la aplicable a los outputs del período t. Por el contrario, un $M^t < 1$ indica que la productividad ha descendido entre los períodos t y s.

De la misma manera se puede definir este índice referido al período s, para lo cual se deben utilizar las correspondientes funciones distancia, de forma que:

$$M^s = \frac{D^s(x^s, y^s)}{D^s(x^t, y^t)} \tag{5}$$

Para evitar los problemas derivados de la elección de uno u otro período, estos autores proponen elaborar una media geométrica de ambos. Por lo tanto, el índice se calcula definitivamente como:

$$M\left(x^s, y^s, x^t, y^t\right) = \left[\left(\frac{D^t(x^s, y^s)}{D^t(x^t, y^t)}\right)\left(\frac{D^s(x^s, y^s)}{D^s(x^t, y^t)}\right)\right]^{1/2} \tag{6}$$

Siguiendo a Färe el al. (1990), una forma equivalente de expresar este índice es:

$$M\left(x^s, y^s, x^t, y^t\right) = \frac{D^s(x^s, y^s)}{D^t(x^t, y^t)} * \left[\left(\frac{D^t(x^s, y^s)}{D^s(x^s, y^s)}\right)\left(\frac{D^t(x^t, y^t)}{D^s(x^t, y^t)}\right)\right]^{1/2} = CEFIT * CTEC \tag{7}$$

El primer término mide el cambio en la eficiencia técnica[20] entre los períodos t y s. Si es mayor que uno, la producción en el período s es más eficiente que la producción en el período t. Si es igual a uno, la distancia respecto a la frontera es la misma. Si es menor que uno, en el período s la producción es menos eficiente que en t.

La media geométrica de las dos ratios incluidas en los corchetes nos informa sobre la existencia del cambio técnico experimentado entre los dos períodos evaluados en dos puntos x^t y x^s. Si han existido mejoras tecnológicas, tendrá un valor superior a uno.

Por lo tanto, un índice de Malmquist superior a la unidad indica mejoras de la productividad, mientras que si toma valores inferiores a la unidad, implica pérdidas. Además, debe tenerse en cuenta que, aunque el producto del cambio en la eficiencia técnica y el cambio técnico debe ser, por definición, igual al índice de Malmquist, estas dos componentes pueden tener comportamientos en direcciones opuestas.

Para calcular las funciones de distancia se utiliza el DEA, siguiendo la propuesta de Farell et al. (1990). El análisis se va a orientar a la maximización del output, es decir, se trata de evaluar cual sería el máximo output obtenible por cada unidad productiva dadas las cantidades de inputs disponibles.

El índice se calcula asumiendo rendimientos constantes a escala, dado que con el supuesto de rendimientos variables a escala, si se produce un cambio técnico, las observaciones de un período pueden no ser factibles con la tecnología de otros períodos, por lo que no se puede garantizar la existencia de soluciones de los problemas de programación utilizados para calcular las distancias de períodos mixtos.

Se expone a continuación el método de cálculo de las funciones de distancia utilizando DEA.

8.6.2. Análisis envolvente de datos aplicado a la construcción de índices de Malmquist

Si disponemos de datos de panel, se puede utilizar la programación lineal DEA (basada en inputs o outputs) para medir el cambio de la productividad, a través del índice de Malmquist, y para descomponer este cambio en cambio técnico y cambio técnico de la eficiencia. Fare et al (1994) especifica un índice basado en el output del cambio de la productividad de Malmquist como[21]:

---

[20] Posteriormente, Färe, Grosskopf y Lovell (1994) propusieron una ampliación de esta aproximación de forma que se puede descomponer el cambio en la eficiencia técnica en dos componentes: cambio en la eficiencia técnica pura y cambio en la eficiencia de escala.

[21] El subíndice "o" se ha introducido para recordarnos que éstas medidas son con orientación al output. Obsérvese que los índices con orientación alinput de Malmquist se pueden también definir de una manera similar a los presentados aquí (véase Grosskopf, 1993, p183).

$$m_o(y_{t+1}, x_{t+1}, y_t, x_t) = \left[\frac{d_o^t(x_{t+1}, y_{t+1})}{d_o^t(x_t, y_t)} \times \frac{d_o^{t+1}(x_{t+1}, y_{t+1})}{d_o^{t+1}(x_t, y_t)}\right]^{1/2}. \qquad (8)$$

Este índice representa la productividad del punto de la producción (x_{t+1}, y_{t+1}) con respecto al punto de producción (x_t, y_t). Un valor mayor de uno indicará crecimiento positivo de la productividad total de factores (TFP) a partir del período t al período t+l. Este índice es, de hecho, la media geométrica de los dos índices basados en el output de Malmquist. El índice utiliza la tecnología del período t y la del período t+1. Para calcular la ecuación (8) debemos calcular las cuatro funciones de distancia que lo componen, que implicarán cuatro problemas de programación lineal (similares a los utilizados en el cálculo de las medidas de la eficiencia técnica de Farrell (TE)).

Comenzamos asumiendo que la tecnología es de CRS. El problema de programación lineal utilizado para el cálculo de la distancia $d_o^t(x_t, y_t)$ es idéntico a la ecuación (8) del apartado 8.4.5., excepto que la restricción de convexidad (VRS) se ha suprimido y se han incluido los subíndices de tiempo. Es decir:

$$\begin{aligned} &[d_o^t(x_t, y_t)]^{-1} = \max_{\phi,\lambda} \phi, \\ &\text{st} \quad -\phi y_{it} + Y_t\lambda \geq 0, \\ &\qquad x_{it} - X_t\lambda \geq 0, \\ &\qquad \lambda \geq 0, \end{aligned} \qquad (9)$$

Los restantes programas de programación lineal (LP) son simples variantes de este:

$$\begin{aligned} &[d_o^{t+1}(x_{t+1}, y_{t+1})]^{-1} = \max_{\phi,\lambda} \phi, \\ &\text{st} \quad -\phi y_{i,t+1} + Y_{t+1}\lambda \geq 0, \\ &\qquad x_{i,t+1} - X_{t+1}\lambda \geq 0, \\ &\qquad \lambda \geq 0, \end{aligned} \qquad (10)$$

$$\begin{aligned} &[d_o^t(x_{t+1}, y_{t+1})]^{-1} = \max_{\phi,\lambda} \phi, \\ &\text{st} \quad -\phi y_{i,t+1} + Y_t\lambda \geq 0, \\ &\qquad x_{i,t+1} - X_t\lambda \geq 0, \\ &\qquad \lambda \geq 0, \end{aligned} \qquad (11)$$

$$[d_o^{t+1}(x_t, y_t)]^{-1} = \max_{\phi,\lambda} \phi,$$
$$\text{st} \quad -\phi y_{it} + Y_{t+1}\lambda \geq 0,$$
$$x_{it} - X_{t+1}\lambda \geq 0,$$
$$\lambda \geq 0, \qquad (12)$$

Algunos puntos a tener presente son que los ф y los λ pueden tomar diversos valores en los cuatro LP's antedichos. Además, los cuatro LP's se deben calcular para cada DMU en la muestra. Así, si se tienen 20 DMU's y 2 periodos se deben calcular 80 LP's. También, si se agregan períodos adicionales, se deben calcular los tres LP's adicionales para cada DMU (construir un índice encadenado). Si se tienen T periodos de tiempo, se deberá calcular (3T-2) LP's para cada DMU en la muestra. Por lo tanto, si se tienen N DMU's se necesitarán calcular Nx(3T-2) LP's. Por ejemplo, para N=20 DMU's y T=10 periodos, esto requeriría resolver 20x(3x10-2) = 560 LP's.

Los resultados en cada DMU para cada par adyacente de períodos pueden ser tabulados, y/o las medidas sumarias a través del tiempo y/o del espacio pueden ser presentadas.

Obsérvese que en los LP's (11) y (12), donde los puntos de la producción se comparan con tecnologías de diferentes períodos de tiempo, el parámetro ф no tiene que ser ≥ 1. El punto podía situarse por encima del conjunto de posibilidades de producción. Esto ocurrirá muy probablemente en el LP donde un punto de la producción a partir del período t+1 se compara utilizando la tecnología del período t. Si se ha experimentado un progreso técnico en el periodo t+1, un valor de ф <1 es posible. Notar que esto podría también ocurrir posiblemente en LP cuando se experimenta un cambio técnico negativo.

Lo expuesto anteriormente puede ser ampliado descomponiendo (CRS) el cambio en la eficiencia técnica en eficiencia de escala (VRS) y el componente de la eficiencia técnica "pura" Esto implicará el calcular dos LP's adicionales (al comparar dos puntos de la producción). Éstos implicarían el resolver los LP's con la restricción de convexidad (N1'λ=1) agregada a cada uno. Es decir, se calcularían las funciones de distancia relativas a una tecnología de VRS (en vez de un CRS). Se puede entonces utilizar los valores de CRS y de VRS para calcular el efecto de la eficiencia de escala residual, usando los métodos descritos anteriormente. Para el caso de las N DMU's y T periodos, esto aumentaría el número de los LP's de Nx(3T-2) a Nx(4T-2). Véase Fare et al (1994, p75) para más detalle en eficacias de escala.

8.6.3. Ejemplo

A continuación se van a calcular los índices de Malquist con un panel de datos correspondientes a 27 tipologías de empresas de los siguientes 10 países: Holanda, Bélgica, Francia, España, Italia, Austria, Alemania, Japón, Portugal y Suecia, utilizando el programa DEAP.

Tabla 9

Compras de Bienes y servicios/Cifra de Negocio					**AÑO**				
PAIS	**91**	**92**	**93**	**94**	**95**	**96**	**97**	**98**	**99**
Holanda_Grandes	75,20	76,47	77,09	79,66	82,60	79,18	79,22	79,63	79,08
Belgica_Grandes	78,51	78,73	78,14	78,30	79,17	78,28	77,79	79,35	80,50
Francia_Grandes	76,56	76,28	76,18	76,54	78,71	79,22	76,20	77,72	81,36
España_Grandes	76,17	80,10	80,87	77,88	80,57	80,92	81,92	82,75	84,18
Italia_Grandes	75,61	77,04	78,62	78,23	79,57	79,98	79,10	82,90	84,28
Austria_Grandes	68,98	69,12	67,58	65,66	67,17	68,33	64,47	64,41	66,58
Alemania_Grandes	61,04	61,40	59,80	60,79	62,56	63,50	65,67	68,12	68,58
Japón_Grandes	80,96	81,02	80,79	79,80	79,81	78,92	78,35	78,10	79,49
Portugal_Grandes	75,49	78,37	78,68	76,89	85,41	82,54	84,33	85,99	81,58
Holanda_Medianas	66,17	66,34	65,60	62,98	65,76	69,55	66,84	66,21	70,43
Belgica_Medianas	70,60	72,90	73,90	77,72	74,39	75,95	73,84	77,63	75,71
Francia_Medianas	63,22	62,48	63,28	61,83	66,18	68,44	69,95	72,88	64,38
España_Medianas	60,96	60,84	60,18	67,41	71,06	72,41	69,50	69,67	66,46
Italia_Medianas	66,84	69,91	67,72	72,28	72,09	72,95	72,96	75,39	74,21
Austria_Medianas	46,48	53,60	53,33	56,97	53,51	57,06	57,77	53,72	53,60
Suecia_Medianas	68,45	84,29	67,66	65,54	68,31	69,59	69,23	66,83	68,76
Alemania_Medianas	57,29	56,78	54,18	53,43	56,65	57,62	55,44	56,01	58,20
Japón_Medianas	76,71	76,77	75,59	73,84	75,98	76,28	75,82	75,22	76,54
Portugal_Medianas	72,62	67,90	67,23	65,85	58,08	69,41	69,18	72,69	74,35
Belgica_Pequeñas	66,48	73,93	78,71	91,54	79,97	75,04	73,85	70,07	68,03
Francia_Pequeñas	63,88	61,79	62,18	61,16	63,24	63,58	62,43	64,20	64,20
España_Pequeñas	56,79	59,53	54,39	60,20	60,89	60,79	64,49	54,41	57,50
Italia_Pequeñas	70,10	69,88	71,37	69,20	68,48	70,63	71,45	73,19	73,96

Austria_Pequeñas	49,29	46,17	48,61	55,07	47,18	51,69	56,70	53,18	52,89
Suecia_Pequeñas	67,07	68,59	67,42	67,31	66,07	66,75	65,87	67,35	66,37
Alemania_Pequeñas	57,76	56,05	53,46	52,00	54,60	55,59	54,47	56,07	55,88
Japón_Pequeñas	68,67	68,79	66,29	70,67	70,93	69,81	68,63	69,58	69,06
Portugal_Pequeñas	66,51	65,75	67,12	67,23	67,77	67,22	64,00	64,70	65,01

Tabla 10

Suma de % Gastos de Personal					**AÑO**				
PAIS	**91**	**92**	**93**	**94**	**95**	**96**	**97**	**98**	**99**
Holanda_Grandes	18,88	18,45	22,70	19,04	16,55	13,70	12,30	11,36	11,44
Belgica_Grandes	17,54	18,22	18,49	16,23	16,35	16,40	17,57	16,39	15,80
Francia_Grandes	15,70	15,72	17,46	16,38	16,29	16,44	16,55	14,50	12,72
España_Grandes	17,93	16,91	18,62	14,56	12,89	12,52	11,36	10,34	9,81
Italia_Grandes	21,38	22,29	22,85	19,49	16,63	16,63	15,03	14,70	13,79
Austria_Grandes	14,38	18,30	17,79	22,47	22,29	22,01	23,61	17,92	16,61
Alemania_Grandes	24,66	25,16	27,45	24,39	24,11	22,35	20,46	19,10	17,60
Japón_Grandes	11,46	11,61	12,02	12,35	12,28	12,22	13,10	13,62	12,93
Portugal_Grandes	17,59	17,69	17,40	14,40	13,23	10,30	6,39	6,34	8,85
Holanda_Medianas	23,71	23,63	26,72	26,99	25,38	24,25	24,11	24,13	23,23
Belgica_Medianas	26,11	24,03	22,88	23,05	24,62	19,66	21,41	17,87	19,02
Francia_Medianas	27,76	28,47	31,22	28,22	26,33	27,84	26,31	26,35	25,96
España_Medianas	33,07	36,74	33,60	27,30	25,28	23,67	21,70	20,26	21,55
Italia_Medianas	25,32	23,61	23,08	20,76	19,34	19,80	19,20	18,23	17,82
Austria_Medianas	29,81	27,49	28,85	29,58	24,02	23,66	26,18	27,86	24,28
Suecia_Medianas	30,57	13,05	26,31	25,58	23,86	24,74	28,09	27,05	26,83
Alemania_Medianas	27,60	28,39	29,92	31,43	27,36	26,95	28,98	28,16	28,69
Japón_Medianas	14,19	13,80	15,24	16,10	15,81	15,53	15,92	16,28	15,51
Portugal_Medianas	32,19	20,68	24,09	22,44	34,68	24,71	18,44	16,24	25,13
Belgica_Pequeñas	33,48	24,93	24,63	23,50	23,12	23,37	22,80	21,41	22,75
Francia_Pequeñas	29,60	32,86	34,45	33,42	31,14	31,49	30,79	29,37	30,53
España_Pequeñas	29,88	33,62	45,63	33,86	32,02	30,78	30,80	32,98	32,75
Italia_Pequeñas	26,40	25,84	28,90	25,74	24,28	23,43	22,00	20,98	20,78
Austria_Pequeñas	37,89	36,67	36,64	33,30	38,78	34,19	29,80	30,78	30,85
Suecia_Pequeñas	34,70	25,47	26,86	24,46	25,23	27,69	27,13	28,58	28,67
Alemania_Pequeñas	26,30	28,82	31,76	33,59	31,34	31,47	30,48	29,39	27,82
Japón_Pequeñas	21,59	22,10	24,74	21,57	21,41	22,49	24,19	23,27	23,97
Portugal_Pequeñas	29,53	29,45	31,81	30,67	27,01	26,63	27,20	25,78	27,72

Tabla 11

Suma de Activos/Cifra de Negocio					AÑO				
PAIS	**91**	**92**	**93**	**94**	**95**	**96**	**97**	**98**	**99**
Holanda_Grandes	27,91	20,81	34,27	37,86	25,33	27,81	23,10	18,46	18,11
Belgica_Grandes	11,39	10,94	10,70	9,71	9,51	10,26	11,82	10,32	10,10
Francia_Grandes	17,51	17,47	18,43	16,72	16,64	16,36	14,05	9,77	9,36

España_Grandes	22,25	26,36	31,56	25,89	21,78	21,65	18,02	15,26	15,24
Italia_Grandes	19,78	23,65	32,98	31,33	27,66	26,25	23,08	21,82	20,44
Austria_Grandes	18,34	19,59	25,03	22,93	20,07	21,16	20,57	12,63	10,18
Alemania_Grandes	15,99	15,65	17,17	14,57	13,17	12,19	12,96	12,00	11,86
Japón_Grandes	21,49	22,81	23,84	23,92	23,09	21,69	23,20	25,00	25,37
Portugal_Grandes	50,95	42,44	23,75	22,39	23,11	32,23	29,02	24,02	24,77
Holanda_Medianas	26,18	21,25	27,74	27,08	30,83	25,69	27,61	31,35	37,27
Belgica_Medianas	17,10	17,04	14,00	20,01	17,61	15,12	14,60	12,43	18,48
Francia_Medianas	13,51	13,56	15,71	13,96	12,42	12,68	11,90	12,36	12,21
España_Medianas	26,46	28,58	31,58	26,79	28,36	25,43	25,25	22,23	26,75
Italia_Medianas	27,32	27,88	29,56	26,09	26,34	25,95	24,49	18,71	19,21
Austria_Medianas	23,91	30,61	27,66	29,30	20,92	19,96	17,10	24,44	19,17
Suecia_Medianas	17,86	18,05	28,77	27,29	22,96	18,07	19,74	18,05	18,63
Alemania_Medianas	11,27	10,06	11,23	12,46	10,89	10,38	11,60	12,62	12,00
Japón_Medianas	23,21	22,89	26,84	31,92	26,62	26,67	31,35	31,22	27,75
Portugal_Medianas	42,01	35,06	39,66	47,76	63,79	61,77	40,60	30,83	41,12
Belgica_Pequeñas	37,58	26,75	25,24	23,65	21,14	21,90	26,97	24,97	23,96
Francia_Pequeñas	9,48	10,84	11,58	11,17	9,68	9,60	10,06	9,22	8,72
España_Pequeñas	20,10	24,20	36,19	28,91	24,74	25,85	31,04	24,28	25,59
Italia_Pequeñas	36,98	42,71	142,06	32,56	29,89	38,28	30,07	37,98	29,79
Austria_Pequeñas	36,49	29,74	30,20	39,79	31,70	27,42	36,30	19,04	36,69
Suecia_Pequeñas	32,71	42,77	24,91	27,67	29,80	17,99	18,27	18,93	18,27
Alemania_Pequeñas	7,51	7,89	11,58	10,35	8,37	8,87	10,52	8,26	9,96
Japón_Pequeñas	22,15	28,01	28,38	24,86	23,27	30,24	28,30	26,94	29,74
Portugal_Pequeñas	43,90	43,94	71,33	74,49	34,03	35,68	47,28	40,64	38,71

La información anterior procede de las Centrales de Balances de diversos países occidentales, y al estar valorados en unidades monetarias deferentes conviene considerar la función de producción de cada unidad de análisis en términos unitarios o de unidad de producción, obviando por tanto de los efectos de escala vinculados al crecimiento de la productividad de cada país.

Tomando como referente del valor de producción el importe de la cifra de negocio, los factores de producción unitarios se obtendrían de la siguiente forma:

- Porcentaje de los gastos de personal sobre el importe de la cifra de negocios (IGP)
- Porcentaje del consumo de compras de bienes y servicios sobre el importe de la cifra de negocio (ICM)
- Ratio entre el activo fijo que figura en el activo del Balance y el importe de la cifra de negocio (IAF).

Realizadas estas consideraciones, la función objetivo a maximizar en este ejercicio queda expresada del siguiente modo para la primera función de distancia a obtener:

$$[D^t_o(x^t,y^t)]^{-1}= max_{\phi,\lambda}\ \phi,$$

$$st \qquad -\phi+ \Sigma\lambda_i \geq 0,$$

$$IGP^t{}_i + \Sigma IGP^t{}_i\ \lambda_i \geq 0$$

$$ICM^t{}_i + \Sigma ICM^t{}_i\ \lambda_i \geq 0$$

$$IAF^t{}_i + \Sigma IAF^t{}_i\ \lambda_i \geq 0$$

$$\lambda_i \geq 0,$$

Para obtener los indices de productividad en Malquist utilizando el programa DEAP hay que generar el siguiente programa de instrucciones:

```
Eg5.dta             DATA FILE NAME
Eg5.out             OUTPUT FILE NAME
27                 NUMBER OF FIRMS
9                NUMBER OF TIME PERIODS
1                 NUMBER OF OUTPUTS
3                 NUMBER OF INPUTS
1                 0=INPUT AND 1=OUTPUT ORIENTATED
0                0=CRS AND 1=VRS
2                0=DEA(MULTI-STAGE), 1=COST-DEA, 2=MALMQUIST-DEA,
3=DEA(1-STAGE), 4=DEA(2-STAGE)
```

La tabla 12 muestra los niveles medios de eficiencia para el periodo 1991-1999 para el sector calculados con el programa DEAP, a través de la cual observamos que únicamente las empresas alemanas pequeñas presentan eficiencia para todos los años objeto de estudio. Por otra parte las empresas belgas, alemanas grandes, y austriacas y alemanas medianas presentan también altos grados de eficiencia para todo el periodo.

Las empresas belgas de tamaño pequeño son las más ineficientes en el periodo 1991-1996. Las italianas grandes son las más ineficientes a lo largo de todo el periodo 1991-1999 exceptuando los años 1994 y 1995. La explicación a este hacho puede estar relacionada con las dificultades que atraviesa el principal fabricante de automóviles italiano.

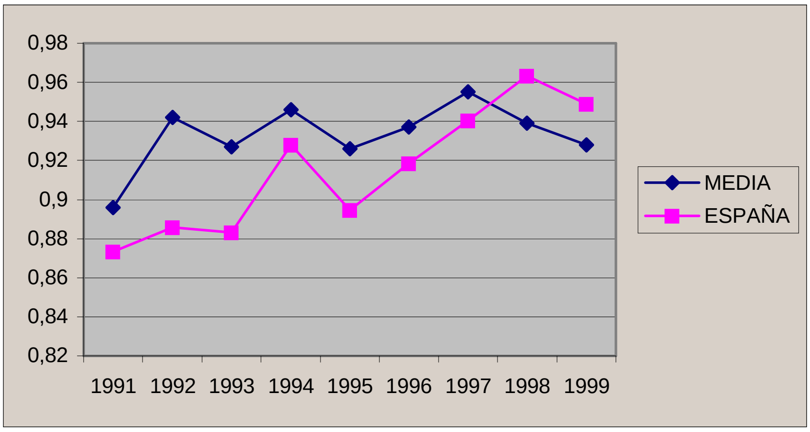
Tabla 12

Eficiencia	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
Holanda_Grandes	0,876	0,935	0,851	0,905	0,897	0,970	0,973	0,981	0,988
Belgica_Grandes	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,953	0,946
Francia_Grandes	0,953	1,000	0,982	0,988	0,968	0,956	0,995	1,000	1,000
España_Grandes	0,879	0,921	0,877	0,984	0,989	0,986	1,000	1,000	1,000
Italia_Grandes	0,853	0,873	0,838	0,911	0,919	0,915	0,937	0,887	0,890

Eficiencia	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
Austria_Grandes	1,000	1,000	1,000	0,982	0,932	0,930	0,966	1,000	1,000
Alemania_Grandes	0,954	0,985	0,966	1,000	0,985	1,000	1,000	0,969	0,963
Japón_Grandes	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,969	0,945	0,945
Portugal_Grandes	0,889	0,924	0,932	0,997	0,953	1,000	1,000	1,000	1,000
Holanda_Medianas	0,893	0,949	0,907	0,946	0,875	0,882	0,937	0,908	0,863
Belgica_Medianas	0,852	0,899	0,943	0,872	0,864	0,934	0,914	0,911	0,878
Francia_Medianas	0,907	0,934	0,892	0,950	0,930	0,886	0,934	0,852	0,917
España_Medianas	0,828	0,848	0,879	0,899	0,840	0,869	0,942	0,915	0,920
Italia_Medianas	0,867	0,911	0,929	0,945	0,930	0,923	0,941	0,894	0,908
Austria_Medianas	1,000	1,000	1,000	0,982	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
Suecia_Medianas	0,823	1,000	0,892	0,937	0,887	0,892	0,869	0,881	0,837
Alemania_Medianas	0,972	0,995	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,954
Japón_Medianas	0,948	1,000	0,980	1,000	0,963	0,965	0,956	0,927	0,926
Portugal_Medianas	0,752	0,973	0,921	0,980	0,875	0,877	0,989	0,950	0,810
Belgica_Pequeñas	0,780	0,863	0,831	0,775	0,835	0,861	0,889	0,899	0,889
Francia_Pequeñas	0,894	0,895	0,959	0,920	0,921	0,941	1,000	0,924	1,000
España_Pequeñas	0,915	0,890	0,894	0,903	0,862	0,904	0,883	0,977	0,929
Italia_Pequeñas	0,828	0,881	0,833	0,904	0,873	0,886	0,920	0,874	0,868
Austria_Pequeñas	0,943	1,000	1,000	0,963	1,000	1,000	0,976	1,000	1,000
Suecia_Pequeñas	0,764	0,896	0,893	0,937	0,875	0,877	0,909	0,863	0,844
Alemania_Pequeñas	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
Japón_Pequeñas	0,899	0,943	0,922	0,948	0,906	0,907	0,919	0,885	0,864
Portugal_Pequeñas	0,821	0,866	0,837	0,869	0,837	0,866	0,924	0,905	0,846
Media_Muestral	0,896	0,942	0,927	0,946	0,926	0,937	0,955	0,939	0,928
Media_España	0,873	0,886	0,883	0,928	0,895	0,918	0,940	0,963	0,949

Los índices de eficiencia medios de las empresas españolas se encuentran, tal como se puede observar en el gráfico 8, por debajo de los medios, siendo el comportamiento de los índices españoles poco estable. No obstante hay que destacar que a lo largo del periodo el nivel de eficiencia de las empresas españolas ha aumentado un 8,67% (un 3,57% en las europeas).

Gráfico nº8



En los cuadros siguientes figuran los valores de los indices de productividad total de factores (PTF), cambio técnico puro (TECH) y eficiencia técnica pura (EFCH) obtenidos en el programa DEAP.

Tabla 13

Eficiencia PMF	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
Holanda_Grandes	1	0,999	0,912	1,031	1,016	1,087	1,024	1,034	1,005
Belgica_Grandes	1	0,997	1,002	1,083	1,006	0,968	0,925	1,081	1,009
Francia_Grandes	1	1,001	0,966	1,024	0,984	0,995	1,044	1,143	1,06
España_Grandes	1	0,978	0,963	1,102	1,018	1,016	1,086	1,09	1,017
Italia_Grandes	1	0,965	0,966	1,052	1,037	0,996	1,034	0,974	1,004
Austria_Grandes	1	0,933	1,004	0,954	0,997	0,991	1,013	1,089	1,026
Alemania_Grandes	1	0,991	0,977	1,039	1,001	1,025	1,002	1,02	1,018
Japón_Grandes	1	0,983	0,978	0,988	1,009	1,018	0,986	0,994	0,999
Portugal_Grandes	1	0,971	1,012	1,07	0,967	1,16	1,293	1,057	0,845
Holanda_Medianas	1	1,053	0,968	0,93	1,098	1,029	1,015	1,057	1,002
Belgica_Medianas	1	0,993	0,965	1,03	1,075	0,999	0,974	1,051	1,024
Francia_Medianas	1	0,923	0,977	0,964	1,011	1,004	0,956	1,137	0,947
España_Medianas	1	1,01	0,947	1,063	1,03	0,997	1,014	0,995	0,995
Italia_Medianas	1	1,061	0,96	0,92	1,115	0,939	0,944	1,053	0,999
Austria_Medianas	1	1,114	0,999	1,032	0,998	0,988	1,015	0,969	1,012
Suecia_Medianas	1	0,977	0,864	1,039	1,075	0,964	0,948	1,094	0,96
Alemania_Medianas	1	0,989	0,986	1,003	1,002	0,988	0,986	1,002	0,996
Japón_Medianas	1	1,008	0,957	1,012	1,044	1,011	1,025	1,011	0,971
Portugal_Medianas	1	1,008	0,958	1,025	0,999	0,988	1,028	1,006	0,971
Belgica_Pequeñas	1	1,007	1,03	0,942	1,011	1,084	0,989	1,065	0,979
Francia_Pequeñas	1	0,998	0,948	1,061	1,004	0,96	1,026	0,972	1,09

Eficiencia PMF	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
España_Pequeñas	1	0,96	1,028	1	1,001	1,016	1,058	1,017	1,015
Italia_Pequeñas	1	0,996	1,029	0,989	1,026	0,984	1,009	0,992	1,018
Austria_Pequeñas	1	0,941	0,989	0,951	1,105	0,968	0,969	1,024	1,03
Suecia_Pequeñas	1	1,204	0,857	1,031	1,007	0,999	0,955	1,038	0,98
Alemania_Pequeñas	1	1,006	0,96	0,99	1,016	0,999	0,988	1	0,969
Japón_Pequeñas	1	1,009	0,98	1,001	0,985	1,003	0,998	1	1,001
Portugal_Pequeñas	1	1,227	0,957	1,038	0,94	0,972	1,104	1	0,862
Media_Muestral	1	1,009	0,968	1,012	1,02	1,004	1,013	1,033	0,992
Media_España	1	0,953	0,989	1,020	1,010	1,012	1,032	1,080	0,992

Tabla 14

Eficiencia TECH	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
Holanda_Grandes	1	0,936	1,001	0,97	1,025	1,004	1,021	1,026	0,988
Belgica_Grandes	1	0,997	1,002	1,083	1,006	0,968	0,925	1,135	0,946
Francia_Grandes	1	0,955	0,984	1,018	1,004	1,008	1,003	1,137	1,000
España_Grandes	1	0,934	1,011	0,982	1,013	1,02	1,071	1,09	1,000
Italia_Grandes	1	0,943	1,007	0,968	1,028	1	1,01	1,028	0,890
Austria_Grandes	1	0,933	1,004	0,972	1,05	0,993	0,975	1,052	1,000
Alemania_Grandes	1	0,96	0,997	1,003	1,017	1,01	1,002	1,053	0,963
Japón_Grandes	1	0,983	0,978	0,988	1,009	1,018	1,018	1,019	0,945
Portugal_Grandes	1	0,935	1,004	1	1,012	1,105	1,293	1,057	1,000
Holanda_Medianas	1	0,952	1,004	0,998	1,019	0,998	0,982	1,046	0,863
Belgica_Medianas	1	0,993	0,9	1,074	1,074	0,978	0,917	1,138	0,878
Francia_Medianas	1	0,949	0,973	0,955	1,059	0,958	0,979	1,027	0,917
España_Medianas	1	0,949	1,002	0,98	1,066	0,982	0,976	1,047	0,920
Italia_Medianas	1	1	0,96	0,956	1,074	0,939	0,967	1,028	0,908
Austria_Medianas	1	0,95	1,003	0,983	1,069	0,987	0,979	1,021	1,000
Suecia_Medianas	1	0,977	0,864	1,039	1,075	0,964	0,948	1,094	0,837
Alemania_Medianas	1	0,944	1,008	0,976	1,048	0,988	0,972	1,041	0,954
Japón_Medianas	1	0,955	0,991	0,975	1,085	0,977	0,96	1,032	0,926
Portugal_Medianas	1	0,948	1,003	0,982	1,08	0,98	0,968	1,038	0,810
Belgica_Pequeñas	1	0,955	0,982	1,019	1,021	1,002	1,01	1,069	0,889
Francia_Pequeñas	1	0,968	0,994	0,996	1,025	1,008	0,973	1,065	1,000
España_Pequeñas	1	0,938	0,991	0,978	1,071	0,983	0,976	1,047	0,929
Italia_Pequeñas	1	0,948	1,009	0,972	1,043	0,991	0,99	1,044	0,868
Austria_Pequeñas	1	0,941	0,989	0,969	1,085	0,968	0,969	1,024	1,000
Suecia_Pequeñas	1	0,991	0,961	0,982	1,064	0,993	0,981	1,024	0,844
Alemania_Pequeñas	1	0,983	0,955	0,99	1,016	0,999	0,988	1	1,000
Japón_Pequeñas	1	0,957	0,999	0,981	1,023	1,001	1,008	1,032	0,864
Portugal_Pequeñas	1	0,949	1,011	0,975	1,054	0,97	0,979	1,041	0,846
Media_Muestral	1	0,958	0,985	0,991	1,043	0,992	0,992	1,051	1,005

Eficiencia TECH	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
Media_España	1	0,940	0,992	0,972	1,047	0,987	1,008	1,054	1,008

Tabla 15

Eficiencia EFCH	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
Holanda_Grandes	1	1,068	0,91	1,063	0,991	1,082	1,003	1,008	1,008
Belgica_Grandes	1	1	1	1	1	1	1	0,953	0,992
Francia_Grandes	1	1,049	0,982	1,006	0,98	0,987	1,041	1,005	1
España_Grandes	1	1,047	0,952	1,122	1,005	0,997	1,014	1	1
Italia_Grandes	1	1,023	0,96	1,087	1,009	0,996	1,024	0,947	1,004
Austria_Grandes	1	1	1	0,982	0,95	0,997	1,039	1,035	1
Alemania_Grandes	1	1,032	0,98	1,035	0,985	1,015	1	0,969	0,993
Japón_Grandes	1	1	1	1	1	1	0,969	0,975	0,999
Portugal_Grandes	1	1,039	1,008	1,069	0,956	1,05	1	1	1
Holanda_Medianas	1	1,106	0,964	0,932	1,077	1,031	1,033	1,011	0,989
Belgica_Medianas	1	1	1,072	0,959	1,001	1,022	1,062	0,924	1,083
Francia_Medianas	1	0,973	1,004	1,01	0,955	1,048	0,977	1,107	0,95
España_Medianas	1	1,064	0,946	1,085	0,966	1,015	1,038	0,95	0,993
Italia_Medianas	1	1,06	1	0,963	1,039	1	0,976	1,024	1
Austria_Medianas	1	1,172	0,996	1,05	0,934	1,002	1,036	0,949	0,978
Suecia_Medianas	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Alemania_Medianas	1	1,048	0,978	1,028	0,956	1	1,014	0,963	0,977
Japón_Medianas	1	1,055	0,967	1,038	0,963	1,035	1,068	0,979	0,934
Portugal_Medianas	1	1,063	0,955	1,044	0,925	1,008	1,061	0,969	0,95
Belgica_Pequeñas	1	1,054	1,049	0,924	0,991	1,081	0,979	0,996	0,963
Francia_Pequeñas	1	1,03	0,955	1,065	0,979	0,952	1,054	0,912	1,076
España_Pequeñas	1	1,024	1,037	1,023	0,935	1,034	1,084	0,971	1,005
Italia_Pequeñas	1	1,051	1,019	1,018	0,984	0,993	1,02	0,95	1,016
Austria_Pequeñas	1	1	1	0,982	1,019	1	1	1	1
Suecia_Pequeñas	1	1,215	0,892	1,051	0,946	1,006	0,974	1,013	0,951
Alemania_Pequeñas	1	1,024	1,005	1	1	1	1	1	0,954
Japón_Pequeñas	1	1,054	0,98	1,02	0,963	1,002	0,991	0,969	1
Portugal_Pequeñas	1	1,293	0,947	1,064	0,892	1,002	1,128	0,96	0,853
Media_Muestral	1	1,053	0,984	1,021	0,978	1,012	1,02	0,983	0,987
Media_España	1	1,014	0,997	1,051	0,965	1,026	1,024	1,024	0,985

A continuación se muestra la tabla 16 en la cual se analiza el crecimiento anual de la productividad total de factores y su descomposición en eficiencia técnica pura y cambio técnico. Como se refleja en ella el incremento medio de productividad derivado tanto del cambio técnico, como de la eficiencia técnica ha sido positivo en el conjunto del periodo, obteniéndose un incremento de productividad total de los factores de 0,60%. Atendiendo a los subperiodos, es reseñable que durante el 1991-1995 se obtuvo un incremento de productividad negativo debido al cambio técnico.

Tabla 16

	1991-1999			1991-1995			1996-1999		
	Eficiencia Técnica Pura	Cambio Técnico	Productividad Total de los Factores	Eficiencia Técnica Pura	Cambio Técnico	Productividad Total de los Factores	Eficiencia Técnica Pura	Cambio Técnico	Productividad Total de los Factores
Holanda_Grandes	1,50%	-0,30%	1,20%	0,59%	-1,76%	-1,16%	2,47%	1,19%	3,71%
Belgica_Grandes	-0,70%	1,50%	0,80%	0,00%	2,14%	2,14%	-1,39%	0,83%	-0,59%
Francia_Grandes	0,60%	2,00%	2,60%	0,39%	-1,00%	-0,65%	0,81%	5,06%	5,92%
España_Grandes	1,60%	1,60%	3,30%	2,96%	-1,55%	1,38%	0,27%	4,90%	5,16%
Italia_Grandes	0,50%	-0,20%	0,30%	1,87%	-1,41%	0,42%	-0,77%	0,94%	0,18%
Austria_Grandes	0,00%	0,00%	0,00%	-1,72%	-1,12%	-2,85%	1,76%	1,11%	2,91%
Alemania_Grandes	0,10%	0,80%	0,90%	0,77%	-0,60%	0,17%	-0,59%	2,23%	1,62%
Japón_Grandes	-0,70%	0,10%	-0,60%	0,00%	-1,06%	-1,06%	-1,43%	1,37%	-0,08%
Portugal_Grandes	1,50%	2,40%	3,90%	1,71%	-1,27%	0,42%	1,23%	6,29%	7,58%
Holanda_Medianas	-0,40%	0,20%	-0,30%	-0,50%	0,21%	-0,28%	-0,39%	0,13%	-0,20%
Belgica_Medianas	0,40%	0,90%	1,30%	0,31%	-0,61%	-0,31%	0,37%	2,42%	2,82%
Francia_Medianas	0,10%	0,50%	0,60%	0,63%	-0,45%	0,20%	-0,39%	1,42%	1,07%
España_Medianas	1,30%	-0,20%	1,20%	0,39%	-0,67%	-0,30%	2,27%	0,36%	2,63%
Italia_Medianas	0,60%	-0,10%	0,50%	1,77%	-0,77%	0,98%	-0,56%	0,68%	0,07%
Austria_Medianas	0,00%	-0,40%	-0,40%	0,02%	-0,54%	-0,56%	0,00%	-0,27%	-0,27%
Suecia_Medianas	0,20%	0,30%	0,50%	1,88%	-0,12%	1,74%	-1,43%	0,70%	-0,75%
Alemania_Medianas	-0,20%	-0,70%	-0,90%	0,72%	-1,42%	-0,72%	-1,17%	0,07%	-1,11%
Japón_Medianas	-0,30%	0,00%	-0,30%	0,36%	-1,03%	-0,63%	-0,96%	1,04%	0,05%
Portugal_Medianas	0,90%	-0,20%	0,70%	3,83%	-0,35%	3,46%	-1,92%	-0,04%	-1,93%
Belgica_Pequeñas	1,60%	0,10%	1,80%	1,71%	-0,71%	1,01%	1,58%	0,95%	2,55%
Francia_Pequeñas	1,40%	-0,10%	1,30%	0,72%	0,76%	1,49%	2,09%	-0,87%	1,16%
España_Pequeñas	0,20%	-1,40%	-1,20%	-1,48%	-1,70%	-3,18%	1,87%	-1,03%	0,83%
Italia_Pequeñas	0,60%	0,00%	0,60%	1,35%	-0,17%	1,16%	-0,15%	0,14%	0,02%
Austria_Pequeñas	0,70%	-1,10%	-0,30%	1,48%	-0,36%	1,10%	-0,01%	-1,73%	-1,73%
Suecia_Pequeñas	1,20%	0,30%	1,50%	3,44%	0,03%	3,47%	-0,93%	0,50%	-0,42%
Alemania_Pequeñas	0,00%	-1,30%	-1,30%	0,00%	-1,46%	-1,46%	0,00%	-1,02%	-1,02%
Japón_Pequeñas	-0,50%	-0,10%	-0,60%	0,18%	-0,67%	-0,50%	-1,17%	0,49%	-0,70%
Portugal_Pequeñas	0,40%	0,10%	0,50%	0,49%	0,03%	0,48%	0,27%	0,14%	0,43%
MEDIA	**0,50%**	**0,20%**	**0,60%**	**0,85%**	**-0,62%**	**0,20%**	**0,04%**	**0,97%**	**1,04%**
Grande	**0,49%**	**0,88%**	**1,40%**	**0,72%**	**-0,85%**	**-0,14%**	**0,25%**	**2,64%**	**2,90%**
Mediana	**0,50%**	**0,92%**	**0,30%**	**0,85%**	**-0,74%**	**0,35%**	**0,16%**	**2,61%**	**0,23%**
Pequeña	**0,73%**	**0,75%**	**0,29%**	**0,93%**	**-0,89%**	**0,38%**	**0,54%**	**2,42%**	**0,12%**

Atendiendo al tamaño de las empresas, se observa que el incremento de productividad derivado del nivel de eficiencia es positivo para todos los tamaños tanto a nivel global como en los dos subperiodos objeto de estudio. Con respecto al cambio técnico se observa un cambio de tendencia, siendo negativa su influencia para el periodo 1991-1995 y positiva en 1996-1998.

Results fr om DEAP Version 2.1

Instruction file = 223.ins
Data file = 223.txt

Output orientated Malmquist DEA

DISTANCES SUMMARY

year = 1

firm	crs te	rel to techin yr		vrs	
no,	******	************		******	te
	t-1	t	t+1		
1	0	0,876	0,934	1	
2	0	1	1,014	1	
3	0	0,953	0,998	1	
4	0	0,879	0,94	1	
5	0	0,853	0,904	1	
6	0	1	1,083	1	
7	0	0,954	0,995	1	
8	0	1	1,03	1	
9	0	0,889	0,951	1	
10	0	0,78	0,813	1	
11	0	0,894	0,921	1	
12	0	0,915	0,958	1	
13	0	0,828	0,872	1	
14	0	0,943	0,949	1	
15	0	0,764	0,804	1	
16	0	1	1,073	1	
17	0	0,899	0,954	1	
18	0	0,821	0,859	1	
19	0	0,893	0,942	1	
20	0	0,852	0,889	1	
21	0	0,907	0,937	1	
22	0	0,828	0,878	1	
23	0	0,867	0,913	1	
24	0	1	1,084	1	
25	0	0,823	0,855	1	
26	0	0,972	0,999	1	
27	0	0,948	0,994	1	
28	0	0,752	0,788	1	
mean	0	0,896	0,94	1	

year = 2

firm	crs te	rel to techin yr		vrs	
no,	******	************		******	te
	t-1	t	t+1		
1	0,873	0,935	0,949	1	
2	1,008	1	1,006	1	
3	0,954	1	1,016	1	

4	0,859	0,921	0,915	1
5	0,822	0,873	0,877	1
6	0,943	1	1,016	1
7	0,946	0,985	0,991	1
8	0,995	1	1,04	1
9	0,864	0,924	0,911	1
10	0,816	0,863	0,857	1
11	0,909	0,895	1,018	1
12	0,84	0,89	0,893	1
13	0,836	0,881	0,877	1
14	1,007	1	1,053	1
15	0,851	0,896	0,892	1
16	1,024	1	1,362	1
17	0,89	0,943	0,93	1
18	0,828	0,866	0,873	1
19	0,899	0,949	0,943	1
20	0,856	0,899	0,916	1
21	0,905	0,934	0,945	1
22	0,79	0,848	0,856	1
23	0,862	0,911	0,903	1
24	0,96	1	1,017	1
25	1,02	1	1,083	1
26	0,988	0,995	1,098	1
27	0,959	1	1,008	1
28	0,917	0,973	0,957	1
mean	0,908	0,942	0,972	1

year = 3

firm no,	crs te ****** t-1	rel to techin yr ************ t	t+1	vrs ******	te
1	0,867	0,851	0,879	1	
2	1,01	1	0,964	1	
3	0,966	0,982	0,967	1	
4	0,891	0,877	0,9	1	
5	0,853	0,838	0,866	1	
6	1,025	1	1,038	1	
7	0,966	0,966	0,975	1	
8	0,995	1	1,027	1	
9	0,926	0,932	0,935	1	
10	0,833	0,831	0,844	1	
11	0,884	0,959	0,898	1	
12	0,849	0,894	0,956	1	
13	0,832	0,833	0,849	1	
14	0,97	1	1,07	1	
15	0,894	0,893	0,904	1	
16	1,016	1	1,001	1	
17	0,926	0,922	0,943	1	
18	0,828	0,837	0,86	1	
19	0,906	0,907	0,923	1	
20	0,927	0,943	0,919	1	
21	0,891	0,892	0,9	1	
22	0,873	0,879	0,905	1	
23	0,937	0,929	0,953	1	
24	0,995	1	1,034	1	
25	0,893	0,892	0,909	1	
26	1,006	1	1,02	1	
27	0,988	0,98	0,996	1	
28	0,927	0,921	0,943	1	
mean	0,924	0,927	0,942	1	

year = 4

firm no,	crs te ****** t-1	rel to techin yr ************ t	t+1	vrs ******	te
1	0,879	0,905	0,877	1	
2	1,131	1	1,008	1	

3	1,008	0,988	0,983	1
4	0,974	0,984	0,971	1
5	0,882	0,911	0,88	1
6	0,962	0,982	0,927	1
7	1,016	1	0,984	1
8	1,002	1	0,999	1
9	1,001	0,997	0,987	1
10	0,784	0,775	0,763	1
11	0,993	0,92	0,897	1
12	0,88	0,903	0,854	1
13	0,884	0,904	0,846	1
14	0,941	0,963	0,92	1
15	0,917	0,937	0,879	1
16	1,081	1	1,036	1
17	0,923	0,948	0,902	1
18	0,848	0,869	0,794	1
19	0,928	0,946	0,869	1
20	0,882	0,872	0,853	1
21	0,951	0,95	0,925	1
22	0,886	0,899	0,835	1
23	0,916	0,945	0,903	1
24	0,952	0,982	0,916	1
25	0,921	0,937	0,874	1
26	1	1	1,003	1
27	0,978	1	0,976	1
28	0,955	0,98	0,924	1
mean	0,945	0,946	0,914	1

year = 5

firm no,	crs te ****** t-1	rel to techin yr ************ t	t+1	vrs ******	te
1	0,913	0,897	0,895	1	
2	1,021	1	1,069	1	
3	0,971	0,968	0,961	1	
4	1,002	0,989	0,974	1	
5	0,938	0,919	0,918	1	
6	0,97	0,932	0,939	1	
7	1,002	0,985	0,979	1	
8	1,016	1	0,99	1	
9	0,966	0,953	0,93	1	
10	0,853	0,835	0,836	1	
11	1,035	0,921	0,938	1	
12	0,914	0,862	0,898	1	
13	0,93	0,873	0,89	1	
14	1,102	1	1,096	1	
15	0,938	0,875	0,895	1	
16	1,198	1	1,059	1	
17	0,948	0,906	0,914	1	
18	0,899	0,837	0,857	1	
19	0,938	0,875	0,895	1	
20	0,881	0,864	0,863	1	
21	0,951	0,93	0,922	1	
22	0,895	0,84	0,857	1	
23	0,967	0,93	0,938	1	
24	1,098	1	1,051	1	
25	0,937	0,887	0,898	1	
26	1,036	1	1,009	1	
27	0,984	0,963	0,963	1	
28	0,916	0,875	0,912	1	
mean	0,972	0,926	0,941	1	

year = 6

firm no,	crs te ****** t-1	rel to techin yr ************ t	t+1	vrs ******	te
1	0,977	0,97	0,952	1	

2	1,002	1	1,138	1
3	0,963	0,956	0,946	1
4	1,01	0,986	0,965	1
5	0,915	0,915	0,908	1
6	0,924	0,93	0,949	1
7	1,013	1	1,009	1
8	1,026	1	0,985	1
9	1,192	1	0,964	1
10	0,857	0,861	0,874	1
11	0,916	0,941	1,047	1
12	0,864	0,904	0,921	1
13	0,872	0,886	0,91	1
14	0,965	1	1,054	1
15	0,872	0,877	0,895	1
16	0,984	1	1,134	1
17	0,893	0,907	0,929	1
18	0,846	0,866	0,902	1
19	0,866	0,882	0,91	1
20	0,937	0,934	0,926	1
21	0,892	0,886	0,905	1
22	0,856	0,869	0,892	1
23	0,915	0,923	0,934	1
24	0,984	1	1,046	1
25	0,89	0,892	0,905	1
26	1,006	1	1,036	1
27	0,966	0,965	0,957	1
28	0,86	0,877	0,906	1
mean	0,938	0,937	0,961	1

year = 7

firm no,	crs te ******	rel to techin yr ************		vrs ****** te
	t-1	t	t+1	
1	0,996	0,973	0,958	1
2	0,974	1	0,923	1
3	0,991	0,995	0,932	1
4	1,123	1	0,966	1
5	0,949	0,937	0,913	1
6	0,937	0,966	0,931	1
7	1,012	1	0,96	1
8	0,989	0,969	0,952	1
9	1,612	1	1,016	1
10	0,871	0,889	0,851	1
11	0,935	1	0,912	1
12	0,862	0,883	0,857	1
13	0,901	0,92	0,88	1
14	0,961	0,976	0,946	1
15	0,889	0,909	0,889	1
16	1,019	1	1,017	1
17	0,89	0,919	0,884	1
18	0,888	0,924	0,897	1
19	0,906	0,937	0,902	1
20	0,924	0,914	0,866	1
21	0,903	0,934	0,877	1
22	0,922	0,942	0,901	1
23	0,933	0,941	0,899	1
24	0,982	1	0,987	1
25	0,848	0,869	0,848	1
26	1,011	1	1,003	1
27	0,962	0,956	0,927	1
28	0,979	0,989	0,945	1
mean	0,97	0,955	0,923	1

year = 8

firm no,	crs te ******	rel to techin yr ************		vrs ****** te
	t-1	t	t+1	

1	1,016	0,981	0,984	1
2	1,132	0,953	0,936	1
3	1,211	1	0,983	1
4	1,147	1	0,998	1
5	0,914	0,887	0,887	1
6	1,066	1	1	1
7	1,031	0,969	0,946	1
8	0,964	0,945	0,945	1
9	1,135	1	1,396	1
10	0,94	0,899	0,891	1
11	1,091	0,924	0,982	1
12	1,001	0,977	0,982	1
13	0,917	0,874	0,871	1
14	1,024	1	1,008	1
15	0,879	0,863	0,834	1
16	1,217	1	1,1	1
17	0,922	0,885	0,869	1
18	0,936	0,905	0,874	1
19	0,942	0,908	0,885	1
20	0,986	0,911	0,884	1
21	0,908	0,852	0,839	1
22	0,959	0,915	0,911	1
23	0,932	0,894	0,892	1
24	1,034	1	0,994	1
25	0,901	0,881	0,854	1
26	1,002	1	0,987	1
27	0,957	0,927	0,925	1
28	0,983	0,95	0,948	1
mean	1,005	0,939	0,95	1

year = 9

firm	crs te	rel to techin yr		vrs	
no,	******	************		******	te
	t-1	t	t+1		
1	0,986	0,988	0	1	
2	0,961	0,946	0	1	
3	1,105	1	0	1	
4	1,032	1	0	1	
5	0,889	0,89	0	1	
6	1,053	1	0	1	
7	0,988	0,963	0	1	
8	0,944	0,945	0	1	
9	0,997	1	0	1	
10	0,905	0,889	0	1	
11	0,952	1	0	1	
12	0,926	0,929	0	1	
13	0,869	0,868	0	1	
14	1,005	1	0	1	
15	0,872	0,844	0	1	
16	1,013	1	0	1	
17	0,882	0,864	0	1	
18	0,883	0,846	0	1	
19	0,877	0,863	0	1	
20	0,88	0,878	0	1	
21	0,927	0,917	0	1	
22	0,934	0,92	0	1	
23	0,911	0,908	0	1	
24	1,054	1	0	1	
25	0,863	0,837	0	1	
26	0,971	0,954	0	1	
27	0,928	0,926	0	1	
28	0,825	0,81	0	1	
mean	0,944	0,928	0	1	

[Note thatt-1 in year 1 and t +1 in th e final year are not defined]

MALMQUI ST INDEX SUMMARY

year = 2

firm	effch	techch	pech	sech	tfpch
1	1,068	0,936	1	1,068	0,999
2	1	0,997	1	1	0,997
3	1,049	0,955	1	1,049	1,001
4	1,047	0,934	1	1,047	0,978
5	1,023	0,943	1	1,023	0,965
6	1	0,933	1	1	0,933
7	1,032	0,96	1	1,032	0,991
8	1	0,983	1	1	0,983
9	1,039	0,935	1	1,039	0,971
10	1,106	0,952	1	1,106	1,053
11	1	0,993	1	1	0,993
12	0,973	0,949	1	0,973	0,923
13	1,064	0,949	1	1,064	1,01
14	1,06	1	1	1,06	1,061
15	1,172	0,95	1	1,172	1,114
16	1	0,977	1	1	0,977
17	1,048	0,944	1	1,048	0,989
18	1,055	0,955	1	1,055	1,008
19	1,063	0,948	1	1,063	1,008
20	1,054	0,955	1	1,054	1,007
21	1,03	0,968	1	1,03	0,998
22	1,024	0,938	1	1,024	0,96
23	1,051	0,948	1	1,051	0,996
24	1	0,941	1	1	0,941
25	1,215	0,991	1	1,215	1,204
26	1,024	0,983	1	1,024	1,006
27	1,054	0,957	1	1,054	1,009
28	1,293	0,949	1	1,293	1,227
mean	1,053	0,958	1	1,053	1,009

year = 3

firm	effch	techch	pech	sech	tfpch
1	0,91	1,001	1	0,91	0,912
2	1	1,002	1	1	1,002
3	0,982	0,984	1	0,982	0,966
4	0,952	1,011	1	0,952	0,963
5	0,96	1,007	1	0,96	0,966
6	1	1,004	1	1	1,004
7	0,98	0,997	1	0,98	0,977
8	1	0,978	1	1	0,978
9	1,008	1,004	1	1,008	1,012
10	0,964	1,004	1	0,964	0,968
11	1,072	0,9	1	1,072	0,965
12	1,004	0,973	1	1,004	0,977
13	0,946	1,002	1	0,946	0,947
14	1	0,96	1	1	0,96
15	0,996	1,003	1	0,996	0,999
16	1	0,864	1	1	0,864
17	0,978	1,008	1	0,978	0,986
18	0,967	0,991	1	0,967	0,957
19	0,955	1,003	1	0,955	0,958
20	1,049	0,982	1	1,049	1,03
21	0,955	0,994	1	0,955	0,948
22	1,037	0,991	1	1,037	1,028
23	1,019	1,009	1	1,019	1,029
24	1	0,989	1	1	0,989
25	0,892	0,961	1	0,892	0,857
26	1,005	0,955	1	1,005	0,96
27	0,98	0,999	1	0,98	0,98
28	0,947	1,011	1	0,947	0,957
mean	0,984	0,985	1	0,984	0,968

year = 4

firm	effch	techch	pech	sech	tfpch

1	1,063	0,97	1	1,063	1,031
2	1	1,083	1	1	1,083
3	1,006	1,018	1	1,006	1,024
4	1,122	0,982	1	1,122	1,102
5	1,087	0,968	1	1,087	1,052
6	0,982	0,972	1	0,982	0,954
7	1,035	1,003	1	1,035	1,039
8	1	0,988	1	1	0,988
9	1,069	1	1	1,069	1,07
10	0,932	0,998	1	0,932	0,93
11	0,959	1,074	1	0,959	1,03
12	1,01	0,955	1	1,01	0,964
13	1,085	0,98	1	1,085	1,063
14	0,963	0,956	1	0,963	0,92
15	1,05	0,983	1	1,05	1,032
16	1	1,039	1	1	1,039
17	1,028	0,976	1	1,028	1,003
18	1,038	0,975	1	1,038	1,012
19	1,044	0,982	1	1,044	1,025
20	0,924	1,019	1	0,924	0,942
21	1,065	0,996	1	1,065	1,061
22	1,023	0,978	1	1,023	1
23	1,018	0,972	1	1,018	0,989
24	0,982	0,969	1	0,982	0,951
25	1,051	0,982	1	1,051	1,031
26	1	0,99	1	1	0,99
27	1,02	0,981	1	1,02	1,001
28	1,064	0,975	1	1,064	1,038
mean	1,021	0,991	1	1,021	1,012

year = 5

firm	effch	techch	pech	sech	tfpch
1	0,991	1,025	1	0,991	1,016
2	1	1,006	1	1	1,006
3	0,98	1,004	1	0,98	0,984
4	1,005	1,013	1	1,005	1,018
5	1,009	1,028	1	1,009	1,037
6	0,95	1,05	1	0,95	0,997
7	0,985	1,017	1	0,985	1,001
8	1	1,009	1	1	1,009
9	0,956	1,012	1	0,956	0,967
10	1,077	1,019	1	1,077	1,098
11	1,001	1,074	1	1,001	1,075
12	0,955	1,059	1	0,955	1,011
13	0,966	1,066	1	0,966	1,03
14	1,039	1,074	1	1,039	1,115
15	0,934	1,069	1	0,934	0,998
16	1	1,075	1	1	1,075
17	0,956	1,048	1	0,956	1,002
18	0,963	1,085	1	0,963	1,044
19	0,925	1,08	1	0,925	0,999
20	0,991	1,021	1	0,991	1,011
21	0,979	1,025	1	0,979	1,004
22	0,935	1,071	1	0,935	1,001
23	0,984	1,043	1	0,984	1,026
24	1,019	1,085	1	1,019	1,105
25	0,946	1,064	1	0,946	1,007
26	1	1,016	1	1	1,016
27	0,963	1,023	1	0,963	0,985
28	0,892	1,054	1	0,892	0,94
mean	0,978	1,043	1	0,978	1,02

year = 6

firm	effch	techch	pech	sech	tfpch
1	1,082	1,004	1	1,082	1,087
2	1	0,968	1	1	0,968

3	0,987	1,008	1	0,987	0,995
4	0,997	1,02	1	0,997	1,016
5	0,996	1	1	0,996	0,996
6	0,997	0,993	1	0,997	0,991
7	1,015	1,01	1	1,015	1,025
8	1	1,018	1	1	1,018
9	1,05	1,105	1	1,05	1,16
10	1,031	0,998	1	1,031	1,029
11	1,022	0,978	1	1,022	0,999
12	1,048	0,958	1	1,048	1,004
13	1,015	0,982	1	1,015	0,997
14	1	0,939	1	1	0,939
15	1,002	0,987	1	1,002	0,988
16	1	0,964	1	1	0,964
17	1	0,988	1	1	0,988
18	1,035	0,977	1	1,035	1,011
19	1,008	0,98	1	1,008	0,988
20	1,081	1,002	1	1,081	1,084
21	0,952	1,008	1	0,952	0,96
22	1,034	0,983	1	1,034	1,016
23	0,993	0,991	1	0,993	0,984
24	1	0,968	1	1	0,968
25	1,006	0,993	1	1,006	0,999
26	1	0,999	1	1	0,999
27	1,002	1,001	1	1,002	1,003
28	1,002	0,97	1	1,002	0,972
mean	1,012	0,992	1	1,012	1,004

year = 7

firm	effch	techch	pech	sech	tfpch
1	1,003	1,021	1	1,003	1,024
2	1	0,925	1	1	0,925
3	1,041	1,003	1	1,041	1,044
4	1,014	1,071	1	1,014	1,086
5	1,024	1,01	1	1,024	1,034
6	1,039	0,975	1	1,039	1,013
7	1	1,002	1	1	1,002
8	0,969	1,018	1	0,969	0,986
9	1	1,293	1	1	1,293
10	1,033	0,982	1	1,033	1,015
11	1,062	0,917	1	1,062	0,974
12	0,977	0,979	1	0,977	0,956
13	1,038	0,976	1	1,038	1,014
14	0,976	0,967	1	0,976	0,944
15	1,036	0,979	1	1,036	1,015
16	1	0,948	1	1	0,948
17	1,014	0,972	1	1,014	0,986
18	1,068	0,96	1	1,068	1,025
19	1,061	0,968	1	1,061	1,028
20	0,979	1,01	1	0,979	0,989
21	1,054	0,973	1	1,054	1,026
22	1,084	0,976	1	1,084	1,058
23	1,02	0,99	1	1,02	1,009
24	1	0,969	1	1	0,969
25	0,974	0,981	1	0,974	0,955
26	1	0,988	1	1	0,988
27	0,991	1,008	1	0,991	0,998
28	1,128	0,979	1	1,128	1,104
mean	1,02	0,992	1	1,02	1,013

year = 8

firm	effch	techch	pech	sech	tfpch
1	1,008	1,026	1	1,008	1,034
2	0,953	1,135	1	0,953	1,081
3	1,005	1,137	1	1,005	1,143
4	1	1,09	1	1	1,09
5	0,947	1,028	1	0,947	0,974

6	1,035	1,052	1	1,035	1,089
7	0,969	1,053	1	0,969	1,02
8	0,975	1,019	1	0,975	0,994
9	1	1,057	1	1	1,057
10	1,011	1,046	1	1,011	1,057
11	0,924	1,138	1	0,924	1,051
12	1,107	1,027	1	1,107	1,137
13	0,95	1,047	1	0,95	0,995
14	1,024	1,028	1	1,024	1,053
15	0,949	1,021	1	0,949	0,969
16	1	1,094	1	1	1,094
17	0,963	1,041	1	0,963	1,002
18	0,979	1,032	1	0,979	1,011
19	0,969	1,038	1	0,969	1,006
20	0,996	1,069	1	0,996	1,065
21	0,912	1,065	1	0,912	0,972
22	0,971	1,047	1	0,971	1,017
23	0,95	1,044	1	0,95	0,992
24	1	1,024	1	1	1,024
25	1,013	1,024	1	1,013	1,038
26	1	1	1	1	1
27	0,969	1,032	1	0,969	1
28	0,96	1,041	1	0,96	1
mean	0,983	1,051	1	0,983	1,033

year = 9

firm	effch	techch	pech	sech	tfpch
1	1,008	0,997	1	1,008	1,005
2	0,992	1,017	1	0,992	1,009
3	1	1,06	1	1	1,06
4	1	1,017	1	1	1,017
5	1,004	1	1	1,004	1,004
6	1	1,026	1	1	1,026
7	0,993	1,025	1	0,993	1,018
8	0,999	1	1	0,999	0,999
9	1	0,845	1	1	0,845
10	0,989	1,013	1	0,989	1,002
11	1,083	0,946	1	1,083	1,024
12	0,95	0,996	1	0,95	0,947
13	0,993	1,002	1	0,993	0,995
14	1	0,999	1	1	0,999
15	0,978	1,034	1	0,978	1,012
16	1	0,96	1	1	0,96
17	0,977	1,02	1	0,977	0,996
18	0,934	1,039	1	0,934	0,971
19	0,95	1,021	1	0,95	0,971
20	0,963	1,017	1	0,963	0,979
21	1,076	1,013	1	1,076	1,09
22	1,005	1,01	1	1,005	1,015
23	1,016	1,003	1	1,016	1,018
24	1	1,03	1	1	1,03
25	0,951	1,031	1	0,951	0,98
26	0,954	1,016	1	0,954	0,969
27	1	1,001	1	1	1,001
28	0,853	1,01	1	0,853	0,862
mean	0,987	1,005	1	0,987	0,992

MALMQUI ST INDEX SUMMARY OF ANNU AL MEANS

year	effch	techch	pech	sech	tfpch
2	1,053	0,958	1	1,053	1,009
3	0,984	0,985	1	0,984	0,968
4	1,021	0,991	1	1,021	1,012
5	0,978	1,043	1	0,978	1,02
6	1,012	0,992	1	1,012	1,004
7	1,02	0,992	1	1,02	1,013
8	0,983	1,051	1	0,983	1,033

9	0,987	1,005	1	0,987	0,992
mean	1,005	1,002	1	1,005	1,006

MALMQUIST INDEX SUMMARY OF FIRM MEANS

firm	effch	techch	pech	sech	tfpch
1	1,015	0,997	1	1,015	1,012
2	0,993	1,015	1	0,993	1,008
3	1,006	1,02	1	1,006	1,026
4	1,016	1,016	1	1,016	1,033
5	1,005	0,998	1	1,005	1,003
6	1	1	1	1	1
7	1,001	1,008	1	1,001	1,009
8	0,993	1,001	1	0,993	0,994
9	1,015	1,024	1	1,015	1,039
10	1,016	1,001	1	1,016	1,018
11	1,014	0,999	1	1,014	1,013
12	1,002	0,986	1	1,002	0,988
13	1,006	1	1	1,006	1,006
14	1,007	0,989	1	1,007	0,997
15	1,012	1,003	1	1,012	1,015
16	1	0,987	1	1	0,987
17	0,995	0,999	1	0,995	0,994
18	1,004	1,001	1	1,004	1,005
19	0,996	1,002	1	0,996	0,997
20	1,004	1,009	1	1,004	1,013
21	1,001	1,005	1	1,001	1,006
22	1,013	0,998	1	1,013	1,012
23	1,006	0,999	1	1,006	1,005
24	1	0,996	1	1	0,996
25	1,002	1,003	1	1,002	1,005
26	0,998	0,993	1	0,998	0,991
27	0,997	1	1	0,997	0,997
28	1,009	0,998	1	1,009	1,007
mean	1,005	1,002	1	1,005	1,006

[Note that all Malmquist index averages are geometric means]

8.7. Referencia a programas informáticos.

Los programas informáticos que incluyen los métodos de programación DEA más utilizados son:

- WARWICK-WINDOWS-DEA
- BYU-DEA
- IDEA
- PIONEER
- Olesen and Petersen's DEA code
- cddCode(cdd+)
- SAS/DEA

- SAS/MALM
- EMS: Efficiency Measurement System
- Frontier 4.1.
- DEAP

a) WARWICK DEA-SOFTWARE

Este software ha sido desarrollado en la universidad de Warwick. Está disponible previo pago, pero existe una versión demostración que solo permite utilizar 20 DMU.

Las entradas de datos se realizan en formato ASCII, y pueden ser creados con un procesador de texto como WORD, WINWORD, etc... La salida que proporciona el programa también puede ser leída en un procesador de texto.

Este software funciona en cualquier PC, si bien el número de DMU que evalúa dependen del tamaño de la memoria RAM de la maquina. Con un PC de 640 RAM, el número de unidades que se pueden evaluar no pueden exceder de un total de 20,000 inputs y outputs más uno.

Permite realizar Modelos CCR, BCC, Additive, Handle Target models (modelos nonradiales : Thanassoulis and Dyson, EJOR 56:80-97), Mixed target model, permitiendo variables no discretas para BCC, y estimaciones de Super-eficiencia con pesos y restricciones.

b) BYU-DEA

Es un shoffware DEA compatible para equipos IBM PC o Compatible, que permite estimar Modelos DEA, CCR, BCC, Multiplicativos y con variables categóricas

Direcciones:
Donald L. Adolphson, Marriott School of Management,
Birgham Young University, Provo, Utah 84602
801-378-2433 (Tel) 801-378-5984 (Fax)
ADOLPHSD@msml.byu.edu
Lowrence C. Walters, Marriott School of Management,
Birgham Young University, Provo, Utah 84602

801-378-2433 (Tel) 801-378-5984 (Fax)
larry@msml.byu.edu

c) IDEA

Softwate DEA para IBM PC-286 o superior o compatible con MS-DOS 3.1 y superior, que permite estimar Modelos DEA: CCR, BCC, Multiplicativos, Aditivos y con variables categóricas

Direcciones:
Agha Iqbal Ali
1 Consuling, PO BOX 2453, Amherst MA 01004-2453
413-256-1211 (Tel)

d) PIONEER

Este es un Software para sistemas Unix, que permite elaborar modelos CCR, BCC, Multiplicativos, Aditivos, Handle window analysis, handle large-scale problem para data set con más de 8000 DMUs.

Direcciones:
Richard Barr
Department of Computer Science and Engineering
Science information centre
Southern Methodist University
Dallas, TX 75275
214-768-2605 (Tel) 214-768-3085 (Fax)
barr@seas.smu.edu
Olesen and Petersen's DEA code

Es un código de DEA para GAMS disponible en Olesen and Petersen (1995), "A presentation of GAMS for DEA", Computers & Operations Research 23(4) pp 323-339.

cdd Code(cdd+)

Es un código de DEA para CDD y CDD+, que funciona con cualquier hardware con ANSI C compiler (cdd+ requiere GNU GCC compiler y G++ Library), resuelve pequeños LP's, y cuyo autor es:
Komei Fukuda

Institute for Operations Research ETH Zentrum, CH-8092 Zurich, Switzerland
Fax: +41-1-632 1025 ,Tel: +41-1-632 4023 or 28
fukuda@ifor.math.ethz.ch,
FTP site: ifor13.ethz.ch (129.132.154.13)
directory: pub/fukuda/cdd
latest version: cdd-056.tar.gz (cdd+-073.tar.gz)
e) SAS/MALM software
The SAS/MALM es otra herramienta que facilita los cálculos de índices de productividad y eficiencia en metodología DEA para sistema SAS. El programa realiza los modelos standard de minimización de inputs ó maximización de output. Tambien calcula índices de Malmquist. Su autor es Ali Emrouznejad

f) EMS: Efficiency Measurement System

Este software incluye varios modelos de para medir la eficiencia, compatible para Windows 9x/NT y para ficheros Excel 97 o ASCII. Permite obtener modelos CCR, VCR, aditivos, radoiales y medidas de supereficiencia, orientados al input, output e input-output. También permite calcular indices de Malmquist.

En el anexo aparecen las instrucciones de este programa.

g) FRONTIER 4.1

El programa FRONTIER 4.1 desarrollado en el *Centre for Efficiency and Productivity Analysis* (CEPA) de la Universidad de New England en Australia, se utiliza para realizar las estimaciones de los parámetros del modelo y calcular los valores estimados para la eficiencia técnica, por métodos paramétricos.

El programa FRONTIER versión 4.1 estima los parámetros del modelo simultáneamente, proporcionando también las estimaciones de las eficiencias técnicas para cada empresa y cada período de observación.

En el anexo aparecen las instrucciones de este programa.

h) DEAP.

El programa DEAP ha sido desarrollado en el *Centre for Efficiency and Productivity Analysis* (CEPA) de la Universidad de New England en Australia, y permite estimar modelos DEA, CCR, BBC, orientados al input, output e input-output. También permite obtener índices de Malmquist.

Existe una aplicación que permite que DEAP y Frontier puedan ser ejecutados desde Windows, dicha aplicación se denomina Win4deap110, y está disponible en:
http://www.umoncton.ca/desliem/dea/install.html

En el anexo aparecen las instrucciones de este programa.

En consecuencia se puede construir una matriz de índices de productividad tal que:

$$IP = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{tg(\alpha_1)}{tg(\alpha_0)} & \cdots & \dfrac{tg(\alpha_n)}{tg(\alpha_0)} \\ \dfrac{tg(\alpha_0)}{tg(\alpha_1)} & 1 & & \dfrac{tg(\alpha_n)}{tg(\alpha_1)} \\ . & & & \\ \dfrac{tg(\alpha_0)}{tg(\alpha_n)} & \dfrac{tg(\alpha_1)}{tg(\alpha_n)} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$