Equações Diferenciais de Ordem Superior

Uma e.d.o. de segunda ordem é da forma

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right)$$

ou então

$$y'' = f(t, y, y'). \quad (1)$$

Dizemos que a equação (1) é **linear** quando a função f for linear em y e y', ou então quando a equação (1) puder ser escrita na forma:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \quad (2)$$

onde p, q e g são funções de uma variável t.

Em geral uma e.d.o. de segunda ordem linear pode ser apresentada na forma

$$P(t)y'' + Q(t)y' + R(t)y = G(t). \quad (3)$$

Para os valores em que $P(t) \neq 0$ podemos dividir a equação por $P(t)$ e obter a forma geral (2):

$$y'' + \frac{Q(t)}{P(t)}y' + \frac{R(t)}{P(t)}y = \frac{G(t)}{P(t)}.$$

Iremos estudar métodos para resolver e.d.o.'s de segunda ordem lineares.

Um problema de valor inicial para uma equação diferencial de segunda ordem tem que ter duas condições iniciais $y(t_0) = y_0$ e $y'(t_0) = y_0'$. Ou seja,

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_0' \end{cases}$$

é um problema de valor inicial (P.V.I.).

Uma equação linear de segunda ordem é **homogênenea** se a função $g(t)$ na equação (2) (ou a função $G(t)$ na equação (3)) forem identicamente nulas, isto é,

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

ou

$$P(t)y'' + Q(t)y' + R(t)y = 0$$

são equações diferenciais lineares homogêneas.

Veremos que será fundamental saber resolver os problemas de equações homogêneas para poder depois resolver as equações não homogêneas, onde os termos $g(t)$ (ou $G(t)$) podem ser funções não nulas.

Soluções Fundamentais de Equações Lineares Homogêneas

Teorema 1 (Existência e Unicidade)

Considere o problema de valor inicial

$$(4)\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_0' \end{cases}$$

onde p, q e g são funções contínuas em um intervalo aberto $I = (\alpha, \beta)$ contendo o ponto t_0. Então existe uma única solução $y = \varphi(t)$ para o problema (4), para todo $t \in I$.

Exemplo 2 Encontre o maior intervalo no qual a solução do P.V.I. abaixo existe e é única.

$$\begin{cases} (t^2 - 3t)y'' + ty' - (t+3)y = 0 \\ y(1) = 2 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$$

Primeiro escrevemos a equação na forma (2):

$$y'' + \frac{t}{t(t-3)}y' - \frac{t+3}{t(t-3)}y = 0.$$

$$y'' + \frac{y'}{t-3} - \frac{t+3}{t(t-3)}y = 0.$$

Assim $p(t) = \frac{1}{t-3}$, $q(t) = -\frac{t+3}{t(t-3)}$ e $g(t) = 0$.

Os pontos de descontinuidade são $t = 0$ e $t = 3$.

Portanto um intervalo I onde p, q e g são todas contínuas e contém o ponto $t_0 = 1$ é $I = (0, 3)$.

Exemplo 3 Encontre a única solução do P.V.I.:

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \\ y(t_0) = 0 \\ y'(t_0) = 0 \end{cases}$$

onde p e q são contínuas em um intervalo aberto I contendo t_0.

Solução: $y = \varphi(t) = 0$, para todo $t \in I$.

Teorema 4 (Princípio da Superposição) Se y_1 e y_2 são soluções da equação diferencial $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ (5), então a combinação linear $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução de (5), para quaisquer constantes c_1 e c_2.

Demonstração: Seja

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2.$$

Então

$$y' = c_1 y_1' + c_2 y_2'$$

e

$$y'' = c_1 y_1'' + c_2 y_2''.$$

Substituindo na equação (5):

$$y'' + p(t)y' + q(t)y =$$

$$= (c_1 y_1'' + c_2 y_2'') + p(t)(c_1 y_1' + c_2 y_2') + q(t)(c_1 y_1 + c_2 y_2) =$$

$$= (c_1 y_1'' + c_1 p(t) y_1' + c_1 q(t) y_1) +$$

$$+ (c_2 y_2'' + c_2 p(t) y_2' + c_2 q(t) y_2) =$$

$$= c_1(y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1) + c_2(y_2'' + p(t)y_2' + q(t)y_2) =$$

$$= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0,$$

pois y_1 e y_2 são soluções de (5). Portanto y é solução de (5).

O Princípio da Superposição afima que quaisquer duas soluções da equação homogênea (5) geram uma terceira solução da equação (5). Mas será que toda solução de (5) é uma combinação linear de duas outras soluções de (5)?

Dizemos que duas soluções y_1 e y_2 da equação (5) formam um **conjunto fundamental de soluções da equação** (5) se toda solução de (5) for uma combinação linear de y_1 e y_2.

Teorema 5 Sejam p e q funções contínuas em um intervalo $I = (\alpha, \beta)$. Sejam y_1 e y_2 soluções da equação diferencial

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \ \ (6).$$

Suponha que

$$y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) \neq 0, \text{ para todo } t \in I.$$

Então qualquer solução da equação (6) é uma combinação linear de y_1 e y_2.

Demonstração: Seja $y = \varphi(t)$ uma solução de (6). Queremos encontrar constantes c_1 e c_2 tais que

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t), \text{ para todo } t \in I$$

e consequentemente

$$y'(t) = c_1 y_1'(t) + c_2 y_2'(t), \text{ para todo } t \in I.$$

Fixemos um ponto $t_0 \in I$. Então temos o seguinte sistema:

$$(7) \begin{cases} c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) = y(t_0) \\ c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0) = y'(t_0) \end{cases}$$

Este sistema tem solução única c_1 e c_2 se e somente se

$$\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} \neq 0,$$

ou seja

$$y_1(t_0) y_2'(t_0) - y_1'(t_0) y_2(t_0) \neq 0.$$

Assim se c_1 e c_2 são soluções do sistema (7) então as funções $c_1 y_1 + c_2 y_2$ e y satisfazem a equação (6) com valor inicial t_0. Pelo Teorema de Existência e Unicidade (Teorema 1) temos que a solução é única. Logo

$$y = \varphi(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t), \text{ para todo } t \in I.$$

$y = c_1y_1 + c_2y_2$ é chamada de solução geral da equação (6).

O valor $y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)$ é chamado de **Wronskiano de y_1 e y_2 no ponto** t e é denotado por $W(y_1, y_2)(t)$. A função Wronskiano tem uma importante propriedade, que melhora o Teorema 5.

Teorema 6 Sejam p e q funções contínuas em um intervalo $I = (\alpha, \beta)$. Sejam y_1 e y_2 soluções da equação diferencial

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0.$$

Então ou $W(y_1, y_2)$ é identicamente zero em I ou $W(y_1, y_2)$ nunca é zero em I. Em outras palavras, ou $W(y_1, y_2)(t) = 0$, para todo $t \in I$, ou $W(y_1, y_2)(t) \neq 0$, para todo $t \in I$.

Exemplo 7 Mostre que $y_1(t) = t^{1/2}$ e $y_2(t) = t^{-1}$ formam um conjunto fundamental de soluções da equação

$$2t^2y'' + 3ty' - y = 0, \ t > 0 \quad (8).$$

Precisamos verificar primeiro se y_1 e y_2 são soluções da equação (8).

$$y_1'(t) = \frac{1}{2}t^{-1/2} \qquad y_1''(t) = -\frac{1}{4}t^{-3/2},$$

$$y_2'(t) = -t^{-2} \qquad y_2''(t) = 2t^{-3}.$$

Substituindo em (8):

$$2t^2\big(-\frac{1}{4}t^{-3/2}\big) + 3t\frac{1}{2}t^{-1/2} - t^{1/2} =$$

$$= -\frac{t^{1/2}}{2} + \frac{3}{2}t^{1/2} - t^{1/2} = 0.$$

Portanto y_1 é solução de (8).

$$2t^2(2t^{-3}) + 3t(-t^{-2}) - t^{-1} = 4t^{-1} - 3t^{-1} - t^{-1} = 0.$$

Portanto y_2 é solução de (8).

Para que y_1 e y_2 formem um conjunto fundamental de soluções da equação (8), pelos Teoremas 5 e 6, basta que o Wronskiano $W(y_1, y_2)(t)$ seja diferente de zero para algum $t > 0$. Agora

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t^{1/2} & t^{-1} \\ \frac{1}{2}t^{-1/2} & -t^{-2} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{3}{2}t^{-3/2} \neq 0, \text{ se } t > 0.$$

Logo y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções da equação (8).

Independência Linear e o Wronskiano

Dizemos que duas funções f e g são **linearmente dependentes (l.d.)** em um intervalo $I = (\alpha, \beta)$ se existem duas constantes k_1 e k_2, uma delas diferente de zero, tais que

$$k_1 f(t) + k_2 g(t) = 0, \text{ para todo } t \in I.$$

Duas funções são **linearmente independentes (l.i.)** em I elas não forem linearmente dependentes, isto é, se valer a igualdade

$$k_1 f(t) + k_2 g(t) = 0, \text{ para todo } t \in I$$

então $k_1 = k_2 = 0$.

Exemplo 7 Determine se as funções sen$t$ e $\cos(t - \pi/2)$ são l.d. ou l.i.

Temos que $\cos(t - \pi/2) = \cos t \cdot \cos(\pi/2) + \text{sen} t \cdot \text{sen}(\pi/2) = \text{sen} t$. Assim tomando $k_1 = 1$ e

$k_2 = -1$ temos que

$$k_1 \text{sen} t + k_2 \cos(t - \pi/2) = 0, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Assim as funções são l.d.

Exemplo 8 Decida se as funções e^{at} e e^{bt} são l.d. ou l.i., onde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$.

Suponha que $k_1 e^{at} + k_2 e^{bt} = 0$ para todo t em algum intervalo aberto I.Derivando temos que

$$ak_1 e^{at} + bk_2 e^{bt} = 0, \text{ para todo } t \in I.$$

Temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} k_1 e^{at} + k_2 e^{bt} = 0 \\ ak_1 e^{at} + bk_2 e^{bt} = 0 \end{cases}$$

O determinante deste sistema é $(b - a)e^{(a+b)t}$ que é sempre diferente de zero pois $a \neq b$. Logo o sistema admite somente a solução trivial, ou seja

$$k_1 = k_2 = 0,$$

e portanto as funções são l.i.

Teorema 9 Sejam p e q funções contínuas em um intervalo $I = (\alpha, \beta)$. Sejam y_1 e y_2 soluções da equação diferencial

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0.$$

Então as funções y_1 e y_2 são linearmente independentes em I se e somente se $W(y_1, y_2)$ nunca se anula em I, isto é, $W(y_1, y_2)(t) \neq 0$, para todo $t \in I$.

Resumindo, provamos nesta aula que as quatro seguintes afirmações são equivalentes.

(1) As funções y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ em I.

(2) As funções y_1 e y_2 são linearmente independentes.

(3) $W(y_1, y_2)(t_0) \neq 0$, para algum $t_0 \in I$.

(4) $W(y_1, y_2)(t) \neq 0$, para todo $t \in I$.

O próximo teorema será útil para resolvermos alguns exercícios.

Teorema 10 (Teorema de Abel) Sejam p e q funções contínuas em um intervalo $I = (\alpha, \beta)$. Sejam y_1 e y_2 soluções da equação diferencial

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0.$$

Então o wronskiano $W(y_1, y_2)(t)$ é dado pela fórmula

$$W(y_1, y_2)(t) = c \cdot exp\Big(- \int p(t)dt \Big),$$

onde c é uma constante que depende de y_1 e y_2.