MA093 – Matemática básica 2

Introdução à trigonometria do triângulo retângulo.

Francisco A. M. Gomes

UNICAMP - IMECC

Setembro de 2018

Tópicos importantes

O objetivo dessa aula é investigar

1. Relação entre ângulos e lados do triângulo retângulo.
2. Funções trigonométricas em triângulos retângulos.
3. Relação fundamental (Pitagórica) entre seno e cosseno.

Trigonometria

O que é trigonometria

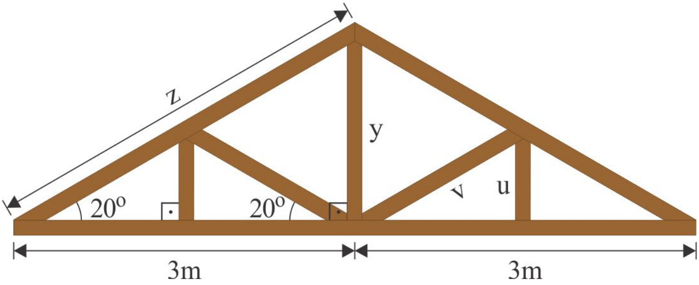
A trigonometria é um ramo da matemática no qual se estuda

- As relações entre ângulos e distâncias, usando triângulos retângulos.
- A representação de fenômenos periódicos da vida real.

Assim, podemos definir as funções trigonométricas como funções

- de ângulos (para trabalharmos com triângulos);
- de números reais quaisquer (para os fenômenos periódicos).

Um problema prático de distância

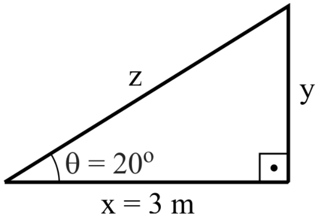


Problema 1

Queremos determinar os comprimentos y e z das barras da treliça de cobertura dada na figura acima, sabendo que

- a base da treliça mede 6 m;
- o ângulo entre a barra superior e a horizontal mede 20°.

Resumo do problema

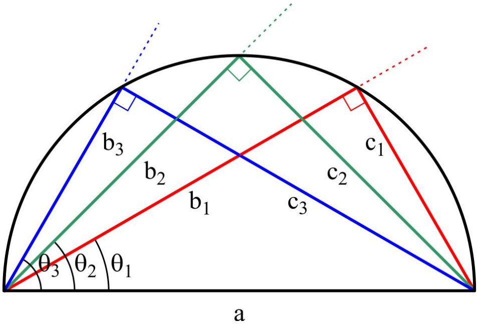


Problema 1 simplificado

Dados x e θ, determinar y e z.

Dificuldade: se conhecêssemos dois lados do triângulo retângulo, poderíamos usar o teorema de Pitágoras para determinar o outro. Entretanto, conhecemos apenas um lado e os três ângulos.

Relação entre ângulo e lado de um triângulo retângulo

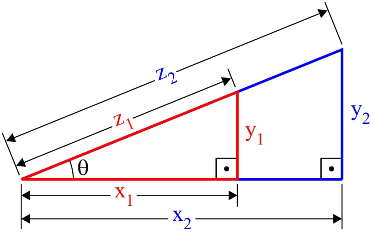


Cateto em função do ângulo e da hipotenusa

Tomando a hipotenusa de um triângulo retângulo como o diâmetro de uma circunferência, observamos que

- os comprimentos dos catetos são definidos unicamente em função do ângulo θ e de a, o comprimento da hipotenusa.

Razão entre lados de triângulos retângulos semelhantes



$$\frac{y_1}{z_1} = \frac{y_2}{z_2}.$$

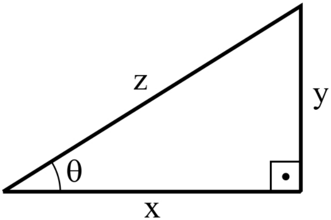
$$\frac{x_1}{z_1} = \frac{x_2}{z_2}.$$

- a razão entre o cateto oposto a θ e a hipotenusa não depende das medidas dos lados, mas apenas de θ;
- o mesmo ocorre com o lado adjacente a θ e a hipotenusa.

Razão entre lados do triângulo retângulo como funções de θ

As razões entre os lados do triângulo retângulo podem ser definidas como funções do ângulo θ

Relação entre ângulo e lado de um triângulo retângulo

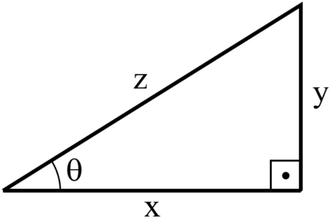


Seno

Dado um triângulo retângulo com um ângulo agudo θ, a razão entre o cateto oposto a θ e a hipotenusa é chamada seno de θ:

$$sen(\theta) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{z}$$

Relação entre ângulo e lado de um triângulo retângulo

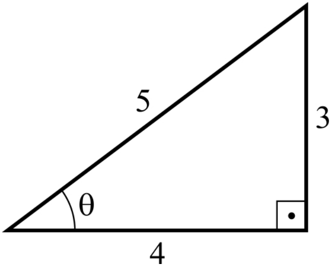


Cosseno

Dado um triângulo retângulo com um ângulo agudo θ, a razão entre o cateto adjacente a θ e a hipotenusa é chamada cosseno de θ:

$$cos(\theta) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{z}$$

Exercício 1

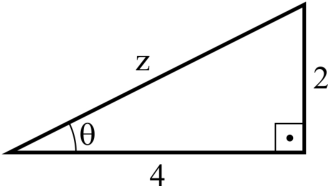


Triângulo retângulo com todos os lados conhecidos

Determinar $sen(\theta)$ e $cos(\theta)$.

$$sen(\theta) = \frac{cat.\ oposto}{hipotenusa} = \frac{3}{5} \qquad cos(\theta) = \frac{cat.\ adjacente}{hipotenusa} = \frac{4}{5}.$$

Exercício 2



Triângulo retângulo com dois lados conhecidos

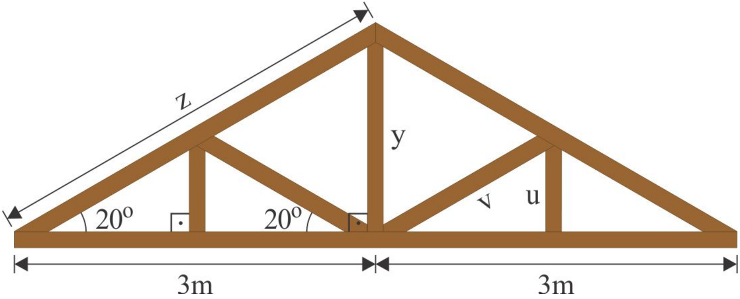
Determinar $sen(\theta)$ e $cos(\theta)$.

$$z^2 = 4^2 + 2^2 = 20 \quad \rightarrow \quad z = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

$$sen(\theta) = \frac{2}{z} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$$cos(\theta) = \frac{4}{z} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Voltando ao problema da treliça



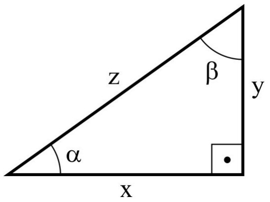
Observamos que $cos(20°) = x/z = 3/z$ e $sen(20°) = y/z$.

Sabendo que $cos(20°) \approx 0,940$ e $sen(20°) \approx 0,342$, obtemos

$$z = 3/cos(20°) \approx 3/0,940 \approx 3,19m$$

$$y = z \cdot sen(20°) \approx 3,19 \cdot 0,342 \approx 1,09m$$

Ângulos complementares



$$\alpha + \beta = 90°$$
(α e β são complementares)

$$sen(\alpha) = \frac{y}{z} = cos(\beta) \qquad \text{e} \qquad cos(\alpha) = \frac{x}{z} = sen(\beta)$$

Seno e cosseno de ângulos complementares

Se α e β são ângulos complementares, então

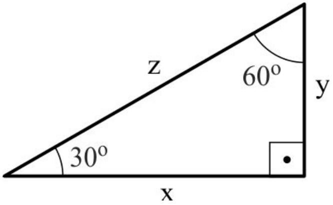
$$sen(\alpha) = cos(\beta)$$

Ângulos complementares

Exemplo

Sabendo que $sen(30^\circ) = \dfrac{1}{2}$ e $cos(30^\circ) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, determine

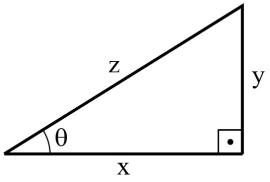
$$sen(60^\circ) \quad \text{e} \quad cos(60^\circ)$$



$$sen(60^\circ) = cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos(60^\circ) = sen(30^\circ) = \frac{1}{2}$$

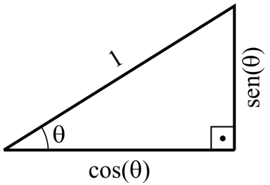
Relação fundamental



Podemos determinar os catetos a partir da hipotenusa e do ângulo θ:

$$sen(\theta) = \frac{y}{z} \quad \rightarrow \quad y = z \cdot sen(\theta)$$

$$cos(\theta) = \frac{x}{z} \quad \rightarrow \quad x = z \cdot cos(\theta)$$

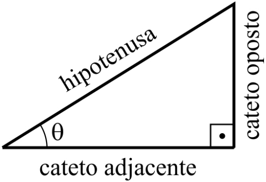


Se a hipotenusa medir 1, os catetos medirão $sen(\theta)$ e $cos(\theta)$.

Assim, pelo teorema de Pitágoras,

$$sen^2(\theta) + cos^2(\theta) = 1.$$

A tangente



Tangente

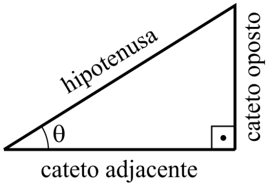
Em um triângulo retângulo, a tangente de θ é dada por

$$tan(\theta) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}.$$

Assim,

$$tan(\theta) = \frac{sen(\theta)}{cos(\theta)}.$$

Secante (sec), cossecante (csc) e cotangente (cot)



Em um triângulo retângulo, temos

$$sec(\theta) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{1}{cos(\theta)}$$

$$csc(\theta) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto oposto}} = \frac{1}{sen(\theta)}$$

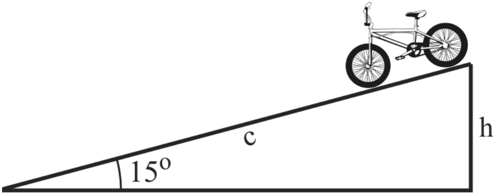
$$cot(\theta) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{cateto oposto}} = \frac{1}{tan(\theta)}$$

Observe que $cot(\theta) = \frac{cos(\theta)}{sen(\theta)}$.

Exercício 3

Rampa de bicicleta

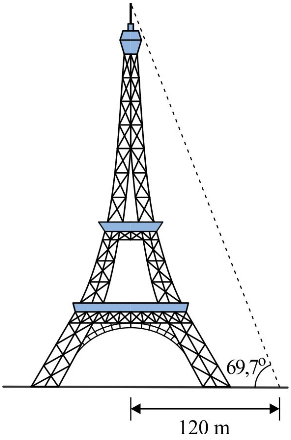
Uma rampa tem altura $h = 1,5m$ e ângulo de inclinação igual a 15°. Determine seu comprimento, c.



$$sen(15^\circ) = h/c$$

$$c = h/sen(15^\circ) \approx 1,5/0,259 \approx 5,79m.$$

Exercício 4



Altura da torre

Parado a $120m$ do centro da base de uma torre, um topógrafo descobre que o ângulo de elevação do topo da torre mede $69,7^\circ$. Determine a altura aproximada da torre.

$$tan(69,7^\circ) = h/120$$

$$h = 120 \cdot tan(69,7^\circ)$$

$$h \approx 120 \cdot 2,70 \approx 324m.$$

Exercício 5

Problema

Determine o seno do ângulo θ tal que $cos(\theta) = 0,7$

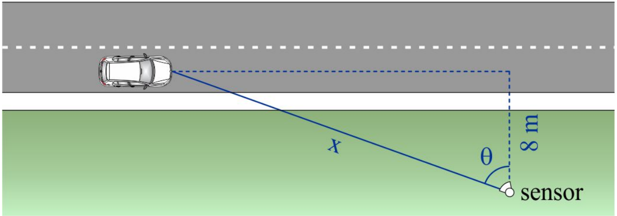
$$sen(\theta) \approx 0,714.$$

Exercício 6

Problema

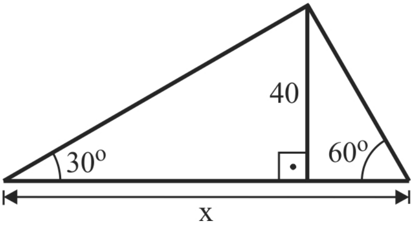
Um sensor detecta a aproximação de veículos em uma rua.

1. Determine uma função $x(\theta)$ que forneça a distância do sensor ao veículo, em relação a θ.
2. Se o sensor só detecta objetos quando θ é menor ou igual a 65°, determine a distância máxima que o carro pode estar do sensor para ser detectado.



$x = 8\ sec(\theta)$ $\qquad d = 18,93$ m

Exercício 7

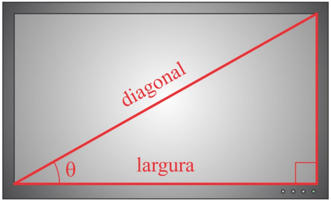


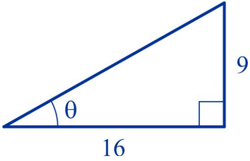
Base do triângulo retângulo, dada a altura

Determine o valor de x na figura.

$$x = \frac{160\sqrt{3}}{3}$$

Exercício 8





Dimensões de uma TV

Calcule a largura, em centímetros, de uma TV de 65 polegadas (na diagonal), levando em conta que a razão entre a altura e a largura da TV é igual a 9/16 e que cada polegada corresponde a 2,54 cm.

$143,9$ cm