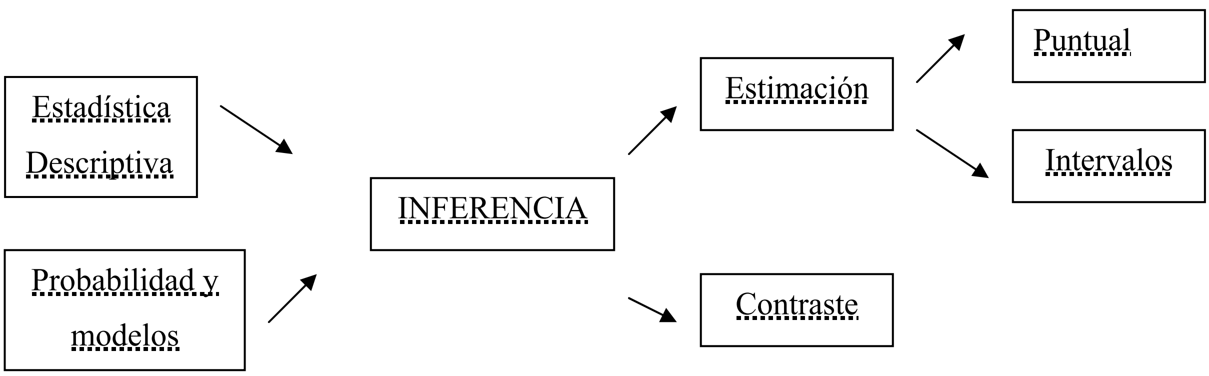
4

INFERENCIA, ESTIMACIÓN Y CONTRASTE DE HIPÓTESIS

1.- INTRODUCCIÓN

La Estadística descriptiva y la teoría de la Probabilidad van a ser los pilares de un nuevo procedimiento (*Estadística Inferencial*) con los que se va a estudiar el comportamiento global de un fenómeno. La probabilidad y los modelos de distribución junto con las técnicas descriptivas, constituyen la base de una nueva forma de interpretar la información suministrada por una parcela de la realidad que interesa investigar.

En el siguiente esquema representa el tema a tratar y que será desarrollado a continuación.

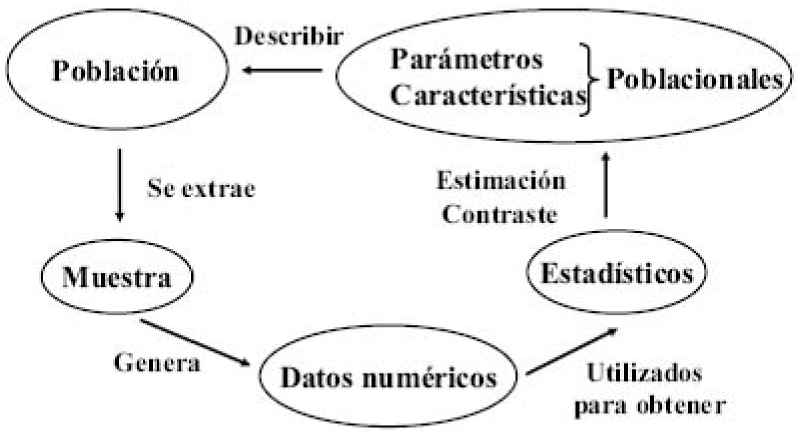


Los métodos básicos de la estadística inferencial son la estimación y el contraste de hipótesis, que juegan un papel fundamental en la investigación.

Por tanto, algunos de los objetivos que se persiguen en este tema son:

- Calcular los parámetros de la distribución de medias o proporciones muestrales de tamaño n, extraídas de una población de media y varianza conocidas.
- Estimar la media o la proporción de una población a partir de la media o proporción muestral.
- Utilizar distintos tamaños muestrales para controlar la confianza y el error admitido.
- Contrastar los resultados obtenidos a partir de muestras.
- Visualizar gráficamente, mediante las respectivas curvas normales, las estimaciones realizadas.

En la mayoría de las investigaciones resulta imposible estudiar a todos y cada uno de los individuos de la población ya sea por el coste que supondría, o por la imposibilidad de acceder a ello. Mediante la técnica inferencial obtendremos conclusiones para una población no observada en su totalidad, a partir de estimaciones o resúmenes numéricos efectuados sobre la base informativa extraída de una muestra de dicha población. Por tanto, el esquema que se sigue es,



En definitiva, la idea es, a partir de una población se extrae una muestra por algunos de los métodos existentes, con la que se generan datos numéricos que se van a utilizar para generar estadísticos con los que realizar estimaciones o contrastes poblacionales.

Existen dos formas de estimar parámetros: la **estimación puntual** y la **estimación por intervalo de confianza**. En la primera se busca, con base en los datos muestrales, un único valor estimado para el parámetro. Para la segunda, se determina un intervalo dentro del cual se encuentra el valor del parámetro, con una probabilidad determinada.

Si el objetivo del tratamiento estadístico inferencial, es efectuar generalizaciones acerca de la estructura, composición o comportamiento de las poblaciones no observadas, a partir de una parte de la población, será necesario que la parcela de población examinada sea representativa del total. Por ello, la selección de la muestra requiere unos requisitos que lo garanticen, debe ser representativa y aleatoria.

Además, la cantidad de elementos que integran la muestra (el **tamaño de la muestra**) depende de múltiples factores, como el dinero y el tiempo disponibles para el estudio, la importancia del tema analizado, la confiabilidad que se espera de los resultados, las características propias del fenómeno analizado, etcétera. Así, a partir de la muestra seleccionada se realizan algunos cálculos y se estima el valor de los parámetros de la población tales como la media, la varianza, la desviación estánda**r**, o la forma de la distribución, etc.

El estudio muestral no es un tema que entre a formar parte de este tema, pero si necesitaremos una serie de conceptos necesarios para el desarrollo del tema, y que se detallan a continuación.

1.1.- Conceptos básicos

POBLACIÓN: Conjunto de elementos sobre los que se observa un carácter común. Se representa con la letra **N**.

MUESTRA: Conjunto de unidades de una población. Cuanto más significativa sea, mejor será la muestra. Se representa con la letra **n.**

UNIDAD DE MUESTREO: Está formada por uno o más elementos de la población. El total de unidades de muestreo constituyen la población. Estas unidades son disjuntas entre sí y cada elemento de la población pertenece a una unidad de muestreo.

PARÁMETRO: Es un resumen numérico de alguna variable observada de la población. Los parámetros normales que se estudian son:

- La media poblacional: $\overline{X}$
- Total poblacional: **X**
- Proporción: **P**

ESTIMADOR: Un estimador θ^* de un parámetro θ, es un estadístico que se emplea para conocer el parámetro θ desconocido.

ESTADÍSTICO: Es una función de los valores de la muestra. Es una variable aleatoria, cuyos valores dependen de la muestra seleccionada. Su distribución de probabilidad, se conoce como "Distribución muestral del estadístico".

ESTIMACIÓN: Este término indica que a partir de lo observado en una muestra (un resumen estadístico con las medidas que conocemos de Descriptiva) se extrapola o generaliza dicho resultado muestral a la población total, de modo que lo estimado es el valor generalizado a la población. Consiste en la búsqueda del valor de los parámetros poblacionales objeto de estudio. Puede ser puntual o por intervalo de confianza:

- Puntual: cuando buscamos un valor concreto.

- Intervalo de confianza: cuando determinamos un intervalo, dentro del cual se supone que va a estar el valor del parámetro que se busca con una cierta probabilidad.

CONTRATE DE HIPÓTESIS: Consiste en determinar si es aceptable, partiendo de datos muestrales, que la característica o el parámetro poblacional estudiado tome un determinado valor o esté dentro de unos determinados valores.

NIVEL DE CONFIANZA: Indica la proporción de veces que acertaríamos al afirmar que el parámetro θ está dentro del intervalo al seleccionar muchas muestras.

2.- EL CONCEPTO DE ESTADÍSTICO Y DISTRIBUCIÓN MUESTRAL

El objetivo de la inferencia es efectuar una generalización de los resultados de la muestra de la población. La tarea que nos ocupa ahora es conocer las distribuciones de la probabilidad de ciertas funciones de la muestra, es decir, variables aleatorias asociadas al muestreo o **estadísticos muestrales.** Éstos serán útiles para hacer inferencia respecto a los parámetros desconocidos de una población. Por ello se habla de **distribuciones muestrales,** ya que están basados en el comportamiento de las muestras.

El primer objetivo es conocer el concepto de distribución muestral de un estadístico; su comportamiento probabilístico dependerá del que tenga la variable X y del tamaño de las muestras.

Sea $x_1 \ldots\ldots x_n$, una muestra[1] aleatoria simple (m.a.s) de la variable aleatoria X, con función de distribución F_0, se define el estadístico **T** como cualquier función de la muestra que no contiene ninguna cantidad desconocida.

Sea una población donde se observa la variable aleatoria X. Esta variable X, tendrá una distribución de probabilidad, que puede ser conocida o desconocida, y ciertas características o parámetros poblacionales. El problema será encontrar una función que proporcione el mejor estimador de θ. El estimador, T, del parámetro θ debe tener una distribución concentrada alrededor de θ y la varianza debe ser lo menor posible.

Los estadísticos más usuales en inferencia y su distribución asociada considerando una población **P** sobre la que se estudia un carácter cuantitativo son:

- **Media muestral:** $\bar{x} = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^{n} x_i$
- **Cuasivarianza**: $s^2 = \frac{1}{n-1}\Sigma_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

---

[1] Todas las variables aleatorias que forman la muestra verifican que son independientes entre sí, que $E[X_i] = \mu$ y que su $V[X_i] = \sigma^2$.

- **Total**: $t = \Sigma_{i=1}^{n} x_i$.

2.1.- Distribuciones muestrales

Consideremos todas las posibles muestras de tamaño **n** en una población, entonces, como se decía anteriormente, para cada muestra podemos calcular un estadístico (media, desviación típica, proporción,...) que variará de una a otra. Así obtenemos una distribución de ese estadístico que se llamará **distribución muestral**.

Las medidas fundamentales de esta distribución son la media, la desviación típica, también denominada **error típico,** y el total poblacional, y sus distribuciones muestrales son las siguientes.

MEDIA MUESTRAL: Sea $X_1.....X_n$, una m.a.s. con media μ o con **E(x)=** μ y con varianza muestral $V[X] = \frac{\sigma^2}{n}$, entonces la media muestra se distribuye como una normal de parámetros:

$$\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}).$$

VARIANZA MUESTRAL: Sea $X_1.....X_n$, una m.a.s. independientes e idénticamente distribuidas, definimos el estadístico muestral para la varianza como la cuasivarianza muestral $s^2 = \frac{1}{n-1} \Sigma_{1=1}^{n} \left(x_1 - \overline{x}\right)^2$, entonces se verifica que:

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \to \chi^2_{n-1}$$

TOTAL MUESTRAL: Sea $X_1......X_n$, una m.a.s. con **E(t)=** nμ y con **V(t)=** $n\sigma^2$, entonces se distribuye como una normal:

$$t \to N\left(n\mu; \sqrt{n\sigma^2}\right).$$

3.- ESTIMACIÓN PUNTUAL

Un estimador de un parámetro poblacional es una función de los datos muestrales. En pocas palabras, es una fórmula que depende de los valores obtenidos de una muestra, para realizar estimaciones. Lo que se pretende obtener es el valor exacto de un parámetro. Por ejemplo, si se pretende estimar la talla media de un determinado grupo de individuos, puede extraerse una muestra y ofrecer como estimación puntual la talla media de los individuos de la muestra.

La media de la muestra puede ser un estimador de la media de la población, la cuasivarianza muestral es un buen estimador de la varianza poblacional y el total muestral es un buen estimador del total poblacional.

Por tanto, una definición más matemática de un estimador y las propiedades que debe de cumplir un estimador para ser bueno.

Sea $X_1......X_n$, una m.a.s. de tamaño n, decimos que es un estimador θ^* de un parámetro θ si el estadístico que se emplea para conocer dicho parámetro desconocido es este.

3.1.- Propiedades deseables de un estimador

Las propiedades o criterios para seleccionar un buen estimador son los siguientes:

A) Insesgadez: Diremos que un estimador θ^* de un parámetro θ es insesgado si su esperanza coincide con el verdadero valor del parámetro.

$$E[\theta^*] = \theta.$$

En el caso de que no coincidan, diremos que el estimador es sesgado.

B) Eficiencia: Dados dos estimadores θ_1^* y θ_2^* para un mismo parámetro θ, se dice que θ_1^* es más eficiente que θ_2^* si:

$$V[\theta_1^*] < V[\theta_2^*].$$

C) Suficiencia: Se dice que un estimador de un parámetro es suficiente cuando para su cálculo utiliza toda la información de la muestra.

D) Consistencia: Decimos que un estimador θ^* de un parámetro θ es consistente si la distribución del estimador tiende a concentrarse en un cierto punto cuando el tamaño de la muestra tiende a infinito.

$$Lim_{n \to \infty} = \{P[\hat{o} - \varepsilon \leq \hat{o} \leq \hat{o} + \varepsilon]\}.$$

3.2.- Métodos para obtener estimadores

El demostrar que un cierto estimador cumple estas propiedades puede ser complicado en determinadas ocasiones. Existen varios métodos que nos van a permitir obtener los estimadores puntuales. Los más importantes son:

- MÉTODO DE LOS MOMENTOS: se basa en que los momentos poblacionales y se estiman mediante los momentos muestrales. Suelen dar estimadores consistentes.
- MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS: consiste en obtener un estimador que hace mínima una determinada función.
- MÉTODO DE MÁXIMA VEROSIMILITUD: consiste en tomar como parámetro poblacional el valor de la muestra que sea más probable, es decir, que tenga mayor probabilidad. Se suelen obtener estimadores consistentes y eficientes. Es el más utilizado.

La probabilidad de que la media muestral sea igual a la media poblacional es cero, $P[\overline{\mathrm{x}} = \mu] = 0$, es decir, que será bastante complicado obtener un estimador puntual, por ello se utiliza más el Intervalo de Confianza y el Contraste de Hipótesis.

4.- ESTIMACIÓN POR INTERVALOS DE CONFIANZA

El intervalo de confianza está determinado por dos valores dentro de los cuales afirmamos que está el verdadero parámetro con cierta probabilidad. Son unos límites o margen de variabilidad que damos al valor estimado, para poder afirmar, bajo un criterio de probabilidad, que el verdadero valor no los rebasará. Es una expresión del tipo $[\theta_1, \theta_2]$ ó $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, donde θ es el parámetro a estimar. Este intervalo contiene al parámetro estimado con una determinada certeza o nivel de confianza.

En la estimación por intervalos se usan los siguientes conceptos:

- **Variabilidad del parámetro:** Si no se conoce, puede obtenerse una aproximación en los datos o en un estudio piloto. También hay métodos para calcular el tamaño de la muestra que prescinden de este aspecto. Habitualmente se usa como medida de esta variabilidad la **desviación típica** poblacional y se denota σ.
- **Error de la estimación:** Es una medida de su precisión que se corresponde con la amplitud del intervalo de confianza. Cuanta más precisión se desee en la estimación de un parámetro, más estrecho deberá ser el intervalo de confianza y, por tanto, menor el error, y más sujetos deberán incluirse en la muestra estudiada. Llamaremos a esta precisión E, según la fórmula $E = \theta_2 - \theta_1$.
- **Nivel de confianza:** Es la probabilidad de que el verdadero valor del parámetro estimado en la población se sitúe en el intervalo de confianza obtenido. El nivel de confianza se denota por (1-α), aunque habitualmente suele expresarse con un porcentaje ((1-α)·100%). Es habitual tomar como nivel de confianza un 95% o un 99%, que se corresponden con valores α de 0,05 y 0,01, respectivamente.
- **Valor α:** También llamado nivel de significación. Es la probabilidad (en tanto por uno) de fallar en nuestra estimación, esto es, la diferencia entre la certeza (1) y el nivel de confianza (1-α). Por ejemplo, en una estimación con un nivel de confianza del 95%, el valor α es (100-95)/100 = 0,05.
- **Valor crítico:** Se representa por $Z_{\alpha/2}$. Es el valor de la abscisa en una determinada distribución que deja a su derecha un área igual a α/2, siendo 1-α el nivel de confianza. Normalmente los valores críticos están tabulados o pueden calcularse en función de la distribución de la población. Por ejemplo, para una distribución normal, de media 0 y desviación típica 1, el valor crítico para α = 0,05 se calcularía del siguiente modo: se busca en la tabla de la distribución ese valor (o el más aproximado), bajo la columna "Área"; se observa que se corresponde con -0,64. Entonces $Z_{\alpha/2} = 0{,}64$. Si la media o desviación típica de la distribución normal no coinciden con las de la tabla, se puede realizar el cambio de variable $t=(X-\mu)/\sigma$ para su cálculo.

Con estas definiciones, si tras la extracción de una muestra se dice que "3 es una estimación de la media con un margen de error de 0,6 y un nivel de confianza del 99%", podemos interpretar que el verdadero valor de la media se encuentra entre 2,7 y 3,3, con una probabilidad del 99%. Los valores 2,7 y 3,3 se obtienen restando y sumando, respectivamente, la mitad del error, para obtener el intervalo de confianza según las definiciones dadas.

Para un tamaño fijo de la muestra, los conceptos de error y nivel de confianza van relacionados. Si admitimos un error mayor, esto es, aumentamos el tamaño del intervalo de confianza, tenemos también una mayor probabilidad de éxito en nuestra estimación, es decir, un mayor nivel de confianza.

Por tanto, un aspecto que debe de tenerse en cuenta es el tamaño muestral, ya que para disminuir el error que se comente habrá que aumentar el tamaño muestral. Esto se resolverá, para un intervalo de confianza cualquiera, despejando el tamaño de la muestra en cualquiera de las formulas de los intervalos de confianza que veremos a continuación, a partir del error máximo permitido.

Los intervalos de confianza pueden ser unilaterales o bilaterales:

- UNILATERAL: $P\left[X < z_{\alpha} \right] = 1 - \alpha$ ó $P\left[X > z_{\alpha} \right] = 1 - \alpha$.
- BILATERAL: $P\left[z_{\frac{\alpha}{2}} < X < z_{\frac{\alpha}{2}} \right]$.

4.1.- Intervalo de confianza para la media con varianza conocida

Sea X una variable aleatoria que se distribuye como X → N(μ , σ), si utilizamos la media muestral ($\overline{X}$) como estimador, entonces $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

Tipificando, centramos el estimador, cambiando de origen y de escala obteniendo:

$$Z = \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \to N(0;1).$$

Entonces, el intervalo de confianza o la probabilidad para el estimador "media" con la varianza conocida viene dado por los siguientes parámetros:

$$P\left[-z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} < z_{\frac{\alpha}{2}} \right] = P\left[-z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \overline{x} - \mu < z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] =$$

$$P\left[-\bar{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<-\mu<-\bar{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Cambiamos todos los signos, para conseguir la media (μ) positiva:

$$P\,[\,\bar{x}+z_{\alpha/2}\;\frac{\sigma}{\sqrt{n}}>\mu>\bar{x}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,]=(1-\alpha).$$

Ordenando la información:

$$P\,[\,\bar{x}-z_{\alpha/2}\;\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{x}+\;z_{\alpha/2}\;\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,]=(1-\alpha\,).$$

Por tanto, el intervalo es,

$$\left[\bar{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\bar{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

4.2.- Intervalo de confianza para la media con varianza desconocida y n>30

Sabemos que para cualquier distribución, por el *Teorema Central del Límite*, si tiene un tamaño de muestra grande, se puede aproximar o se distribuye como una Normal de parámetros:

$$\overline{X}\rightarrow N(\mu,\frac{s}{\sqrt{n}}),$$

siendo s la cuasidesviación típica muestral. En consecuencia,

$$Z=\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}\rightarrow N(0;1),$$

y procediendo de forma análoga a la anterior llegamos a que el intervalo de confianza que buscamos es

$$\left[\bar{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}};\bar{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}\right].$$

4.3.- Intervalo de confianza para la media con varianza desconocida y n<30

Partiendo de una población Normal, en estas condiciones la variable aleatoria se distribuye como una t-Student con *n-1* grados de libertad de la forma,

$$\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \to t_{n-1}.$$

Construimos entonces el intervalo de confianza a un nivel (1- α)% de la forma:

$$P\left[-t_{n-1;\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} < t_{n-1;\frac{\alpha}{2}}\right] = P\left[-t_{n-1;\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < \bar{x}-\mu < t_{n-1;\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha.,$$

de manera que si continuamos despejando de forma análoga a los caso anteriores se obtiene un intervalo de confianza:

$$\boldsymbol{I.C.}\left[\bar{x}-t_{n-1;\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x}+t_{n-1;\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\right].$$

4.4.- Intervalo de confianza para la proporción

Basándonos en una variable aleatoria que se distribuye como una Binomial, $X \to B(n;p)$; y la aproximación de una distribución Binomial por una Normal cuando el tamaño de la muestra es muy grande, se ha visto que se puede expresar como $X \to N\left(n\cdot p;\sqrt{npq}\right)$. Según esto, la variable aleatoria definida como Y=X/n se distribuye como $Y \to N\left(p;\sqrt{pq/n}\right)$.

Al tipificar, nos queda

$$Z = \frac{p-P}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \to N(0;1).$$

Entonces, el intervalo de confianza o la probabilidad para el estimador "proporción" viene dado por los siguientes parámetros:

$$\left[p - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}}; p + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}};\right].$$

4.5.- Intervalo de confianza para la varianza

En poblaciones Normales ya hemos visto que la variables aleatoria $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \rightarrow \chi^2_{n-1}$. Para un nivel de confianza de (1- α)% viene dado por,

$$P\left[\chi^2_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} < \chi^2_{n-1;\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha.$$

Si invertimos y despejamos, nos queda,

$$P\left[\frac{1}{\chi^2_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}} > \frac{\sigma^2}{(n-1)s^2} > \frac{1}{\chi^2_{n-1;\frac{\alpha}{2}}}\right] = P\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}} > \sigma^2 > \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1;\frac{\alpha}{2}}}\right] = 1-\alpha.$$

Y por tanto, el intervalo de confianza para la varianza es:

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1;\frac{\alpha}{2}}} ; \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}}\right].$$

5.- CONTRASTE DE HIPÓTESIS

El problema central de la inferencia estadística es un problema de toma de decisiones, del cual la estimación y el contraste de hipótesis son aspectos importantes, diferenciados entre sí, pero complementarios.

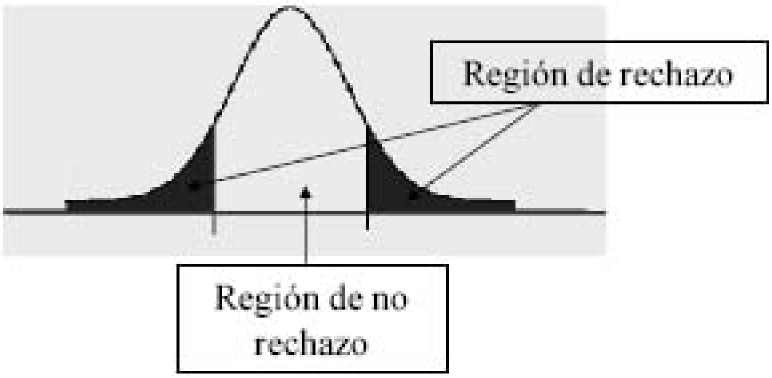
Un **contraste de hipótesis** **o** **Test de hipótesis estadístico** es una prueba de significación o una prueba estadística, que indican el proceso mediante el cual decidimos si una proposición respecto de la población, debe ser aceptada o no. Esta proposición es lo que se denomina hipótesis estadística.

Es una regla de decisión que nos dice cuando aceptar y rechazar las hipótesis, con esto vemos si los datos de una muestra son compatibles o no con los de la población.

Una **hipótesis estadística**, por tanto, es una proposición acerca de la función de probabilidad o de la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria o de varias variables aleatorias. Tal proposición debe referirse bien a la forma de la distribución de probabilidad, bien al valor o valores de los parámetros que lo definan o bien a ambos. **Hipótesis estadística** es, una afirmación acerca de la distribución de la población. Puede haber hipótesis estadísticas en contextos paramétricos y no paramétricos.

El contraste de hipótesis estadístico se basará en la información proporcionada por la muestra. De modo, que si rechazamos la hipótesis, queremos indicar que los datos de la muestra ofrecen cierta evidencia sobre su falsedad. Si la aceptamos simplemente queremos significar que no se rechaza.

Un contraste de hipótesis consiste, por tanto, en estudiar dos hipótesis: H_0 (hipótesis nula), H_1 (hipótesis alternativa), de manera que el investigador divide los resultados muestrales en dos zonas; una zona de rechazo y otra de aceptación, de manera que según como obtengamos el resultado, aceptaremos o rechazaremos la hipótesis.



Al aplicar un contraste de hipótesis, clasificamos los puntos del espacio muestral en dos regiones excluyentes y complementarias:

- **Región de Rechazo o Región Crítica**: La formada por el conjunto de los valores del estadístico de contraste que nos llevan a rechazar la hipótesis nula H_0, se llama región crítica (los puntos que delimitan la región crítica se llaman puntos críticos).
- **Región de Aceptación o Región de No Rechazo**: Es la formada por el conjunto de los valores del estadístico de contraste que nos lleva a aceptar la hipótesis nula H_0.

5.1.- Planteamiento de la hipótesis estadística

Aquella hipótesis que se desea contrastar se llama hipótesis nula (Ho), por tanto, la que se acepta o rechaza como conclusión del contraste. La hipótesis nula suele ser una estrategia o medio del que se sirve el investigador para probar la alternativa. Suele ir acompañada por la hipótesis alternativa o hipótesis experimental, simbolizada por H_1.

La hipótesis alternativa es la que se verifica cuando no se verifica la hipótesis nula. El planteamiento de Ho permite elaborar un modelo Probabilístico a partir del cual podemos llegar a la decisión final.

A su vez, al plantear una hipótesis, esta puede ser simple o compuesta. Una hipótesis es simple si se especifica exactamente el valor del parámetro. Una hipótesis es compuesta, si contiene dos ó más valores del parámetro. La hipótesis nula (Ho) por ser más concreta suele ser simple y la alternativa, compuesta. Es frecuente plantearlas como complementarias.

5.2.- Supuestos

Las suposiciones que podemos hacer dependiendo del tipo de contraste que necesitemos son:

a) Supuestos acerca de las características ó de los datos que se van a manipular, como puede ser la independencia de la observaciones, nivel de medida utilizada, etc.
b) Supuestos acerca de la forma de distribución de partida: Normal, Binomial, etc.

La violación de los supuestos podrá invalidar más o menos el modelo probabilístico y llevarnos a decisiones erróneas. Concierne al investigador conocer las consecuencias que se derivan de la violación de tales supuestos sobre el modelo. Por este motivo, si se plantean los supuestos deben ser mínimos y no demasiado exigentes.

Por ejemplo, se puede plantear de partida:

- Poblaciones de partida: normales.
- Muestras independientes.
- Observaciones de las muestras: independiente.

5.3.- Estadístico de Contraste

Estadístico de Contraste es, aquel estadístico (T) que utilizamos para tomar una decisión en un contraste de hipótesis. Este estadístico es una variable aleatoria, con una distribución muestral determinada, que nos dará las probabilidades asociadas a un valor o un determinado intervalo de valores del estadístico de contraste. Este deberá cumplir todas las características que se mencionaron anteriormente cuando se habló de los estadísticos.

5.4.- Reglas de decisión

Una regla de decisión es el criterio utilizado para decidir si aceptamos o rechazamos la hipótesis nula, a partir del espacio muestral de valores del estadístico de contraste y probabilidades asociadas.

Este criterio consiste en dividir tal espacio en dos zonas mutuamente excluyentes y exhaustivas: la zona de rechazo o región crítica y la zona de aceptación. La zona de rechazo está constituida por aquellos valores del estadístico de contraste que se alejan mucho de Ho, por lo tanto es muy poco probable que ocurran si Ho es verdadera. Por ejemplo, a continuación se pueden ver dos ejemplos de contrastes, uno unilateral y otro bilateral, aunque se pueden crear muchos más.

Un contraste de hipótesis unilateral es de la forma (hay más formas):

$Ho: \theta = \theta o$

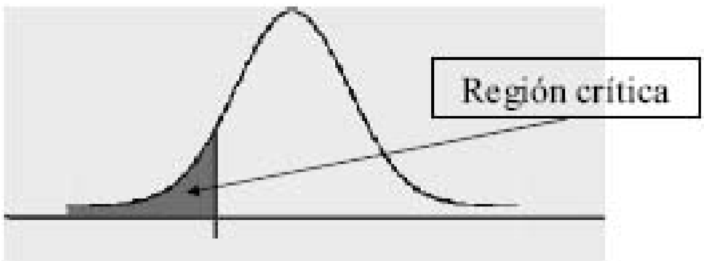
$H_1: \theta > \theta o$

Un contraste de hipótesis bilateral es de la forma:

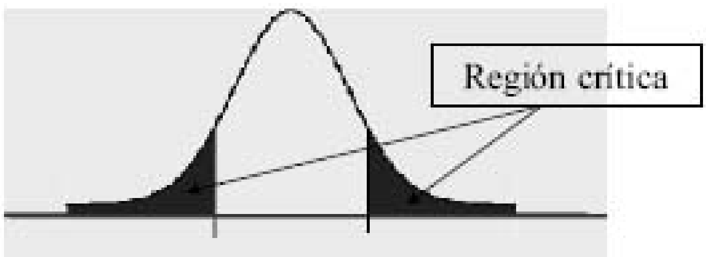
$Ho: \theta = \theta o$

$H_1: \theta \neq \theta o$

Decidimos que un contraste es unilateral o direccional, si para tomar la decisión de rechazar Ho nos servimos exclusivamente de los valores muy grandes "o" exclusivamente de los valores muy pequeños del estadístico de contraste.



Decidimos que un contraste es bilateral o no direccional, si utilizamos los valores muy grandes "y" muy pequeños de los posibles valores del estadístico de contraste.



Si la distribución, bajo la H_1, sólo puede estar a la derecha será más potente si colocamos a la derecha toda la región crítica.

Si la distribución, bajo la H_1, puede estar a la derecha o la izquierda sería un test más potente el que pone parte de la región crítica a la derecha y parte a la izquierda.

El valor α se llama "**nivel de significación o nivel de riesgo**" y representa a la probabilidad de que un nivel concreto del estadístico de contraste, caiga en la zona de rechazo o crítica, es decir, es el conjunto de valores del estadístico de contraste que nos lleva a la decisión de rechazar la hipótesis nula.

El valor $(1-\alpha)$ se llama "**nivel de confianza**", es el conjunto de valores del estadístico de contraste que nos lleva a la decisión de aceptar la hipótesis nula.

En los contrates unilaterales α está concentrada en uno de los dos extremos de la distribución, en una única cola. En los contrastes bilaterales α se reparte entre los dos extremos de la distribución, en las dos colas.

Los contrastes unilaterales suelen ser mejores que los contrates bilaterales. La elección de uno u otro, está condicionada al planteamiento de la hipótesis alternativa.

<u>Ejemplo</u>:

Si $H_o \leq 0.50 \Rightarrow H_1 > 0.50$ Es unilateral.

Si $H_o = 0.50 \Rightarrow H_1 \neq 0.50$ Es bilateral.

5.5.- Cálculo del estadístico y toma de decisión

Antes de poder tomar una decisión se debe recopilar los datos con los que se van a trabajar, es decir, se obtienen los datos de una ó varias muestras y los estimadores del parámetro (proporción, media, etc.) correspondiente, calculamos el valor concreto del estadístico de contraste y fijado el nivel de significación con la zona crítica, si el valor de tal estadístico cae en la zona crítica, rechazamos las hipótesis nula y por tanto, aceptamos la hipótesis alternativa. En este caso debemos interpretar que no hay evidencia suficiente para decidir que es falsa. En caso contrario se aceptará la hipótesis nula.

5.6.- Errores en los contrates de hipótesis

Cuando se realiza un contraste de hipótesis, siempre debemos tener en cuenta que cuando aceptamos o rechazamos una hipótesis puede que estemos cometiendo un cierto error. Cuando Rechazamos Ho, significa que Ho es falsa y cuando aceptamos Ho, significa que Ho es verdadera. Por tanto, se pueden considerar, dos tipos de errores que se pueden cometer cuando se realiza un contraste:

- **Error tipo I (α)**: Es el error que se comete en la decisión del contraste cuando se rechaza la hipótesis nula (Ho), siendo correcta (cierta).

- **Error tipo II (β):** Es el error que se comete en la decisión del contraste cuando se acepta la hipótesis nula (Ho), siendo falsa.

En la siguiente tabla se puede ver de forma más concreta:

	Verdadera	**Falsa**
Acertar	(1- α) Decisión correcta	β Error tipo II
Rechazar	α Error tipo I	(1-β) Decisión Correcta

De aquí se pueden obtener las siguientes conclusiones que deben de tenerse en cuenta:

- El ERROR II es el más grave, al que también se le conoce como potencia del contraste, y se representa con la letra β **.**
- α es el valor de significación, nos dice a partir de qué valor estamos cometiendo un error tipo I.

Así, las probabilidades asociadas a los tipos dos tipos de Error vienen dadas por las siguientes expresiones:

1.- Nivel de significación o tamaño del contraste (α):

α =P(error tipo I}=P{rechazar Ho / Ho cierta}

2.- Potencia del contraste (β):

β= P{rechazar Ho / Ho falsa}=1-P{ Aceptar Ho / Ho falsa}= 1-P{error tipo II}

5.7.- Potencia de un contrate

Se llama potencia de un contraste a la probabilidad de rechazar Ho, cuando es falsa. Su probabilidad es 1-β. Más estrictamente debería llamarse potencia de región crítica. No es más que la probabilidad de que ésta detecte una Ho falsa dado un valor para H_1.

Los valores de α y β no tienen la misma importancia psicológica. Es el investigador el que en cada caso deberá saber que error tiene más importancia para tratar de disminuirlo. Para disminuir el valor de α es necesario aumentar el tamaño de la muestra.

5.8.- Curvas de potencia de un contrate

Fijado un nivel de significación (α), una hipótesis nula y una hipótesis alternativa, tendremos una potencia para cada valor que tome la hipótesis alternativa (H_1). La curva que se obtiene al relacionar los posibles valores de H_1 con los correspondientes (1-β), se llama curva de potencia o función de potencia.

Cuanto mayor es el nivel de significación (probabilidad Error Tipo I) mayor es la potencia.

5.9.- Efecto del tamaño de la muestra en la potencia

Se trata de poner de manifiesto cómo, manteniendo constante α , al aumentar el tamaño de la muestra decrece el valor de β, y por tanto, se incrementa la potencia, la capacidad del contraste para distinguir H_0 y H_1.

Al igual que ocurría en los intervalos de confianza, el tamaño de la muestra será importante para determinar el error que se comete o cual es el tamaño de la muestra necesario para mantener un determinado error mínimo.

5.10.- Nivel de significación y nivel critico

Se puede definir el "nivel de significación (α)" como la máxima probabilidad de rechazar la Ho cuando es cierta. El nivel de significación lo elige el investigador antes de realizar el contrate, para que no influya en su decisión. Por lo tanto el nivel de significación representa el riesgo máximo admisible al rechazar Ho.

El nivel crítico se calcula después de obtener el valor del estadístico de contraste y representa el riesgo mínimo con el que se rechaza Ho.

5.11.- Violación de los supuestos en los contrastes de hipótesis

A continuación, se detalla de forma esquemática en que situaciones se deben utilizar otras distribuciones asociadas a la normal.

5.11.1.- Utilización de la distribución T-Student, en el contraste de μ

a) Independencia: m.a.s. y población pequeña
b) Normalidad: Si la muestra es grande no presenta serios problemas. Si la muestra es pequeña los contrastes unilaterales aumentan el error. Por lo tanto, si la muestra es grande haremos un contraste unilateral, si utilizamos la distribución t-student y no se puede asumir que la población es normal.

5.11.2.- Utilización de la distribución T-Student, en el contraste de μ_1 - μ_2

a) Independencia: Muy importante.
b) Normalidad.

c) Igualdad de varianzas.

5.11.3.- Utilización de la distribución Chi-Cuadrado (χ^2), en el contraste σ^2

El supuesto de normalidad lleva consigo un error, que no podemos corregir aumentando el tamaño muestral.

5.11.4.- Utilización de la distribución F-Snedecor en el contraste de $\sigma^2{}_1/\sigma^2{}_2$

No se puede usar si las poblaciones no son normales o los tamaños de las muestras no son grandes. Tampoco debe utilizarse si la independencia no es segura.

5.12.- Propiedades deseables en los contrastes de hipótesis

El investigador debe seleccionar aquella prueba que le sirve para contrastar su hipótesis y procurar que se cumplan los supuestos que la sustentan, además deben de reunir estas propiedades:

Carencia de Sesgo:

Un Contraste de Hipótesis es una prueba insesgada de Ho, si la probabilidad de rechazar Ho cuando es falsa, es igual o mayor que la probabilidad de rechazar Ho cuando es cierta. Es decir, si su potencia es mayor ó igual que su nivel de significación.

Consistencia:

Una secuencia de contrastes es consistente frente a todas las alternativas Hi, si su función de potencia se aproxima a 1, a medida que n tiende al infinito. Se supone $\alpha > 0$ y constante.

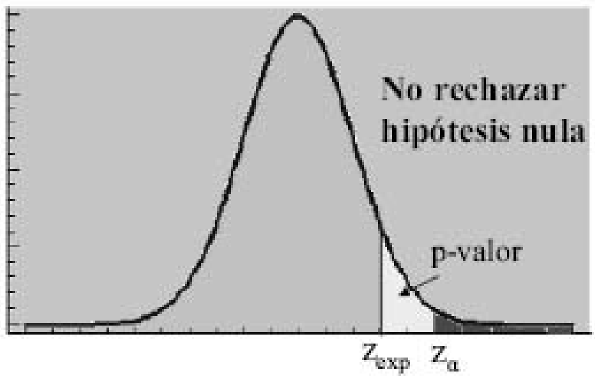
5.13.- El concepto de *p-valor*

Cuando se realiza un contraste de hipótesis sabemos que a partir del nivel de significación delimitamos la zona de aceptación y de rechazo. En ocasiones es muy interesante calcular el nivel de significación a partir del cual la hipótesis nula, H_0, se va a rechazar. Esta es la idea o concepto del *p-valor*, es decir,

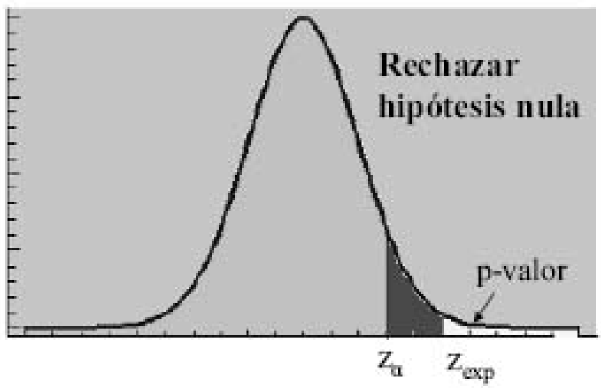
$$p = P\left[|Z| > z_{\exp}\right].$$

El p-valor puede considerarse como el valor límite para que un contraste sea significativo, es decir, elegido un nivel de significación α, se rechazará H_0 si $p \leq \alpha$.

Si $\alpha <$ p-valor $\Rightarrow$ No rechazar H_0



Si $\alpha \geq$ p - valor $\Rightarrow$ Rechazar H_0



5.14.- Contraste de hipótesis para la media con varianza conocida

Supongamos una población Normal. Para realizar este contraste el estadístico mejor conocido es la media muestral,

$$\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}).$$

Como ya se conoce su distribución, el estadístico de contraste será:

$$\frac{\overline{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \to N(0;1).$$

Podemos hacer tres tipos de contraste. Se presupone que la hipótesis nula es cierta, y se rechaza cuando:

A) $\begin{matrix} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{matrix}$ RECHAZO H_0 si $\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > z_{\frac{\alpha}{2}}$

B) $\begin{array}{l} H_0 : \mu \le \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{array}$ RECHAZO H_0 si $\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} > z_\alpha$

C) $\begin{array}{l} H_0 : \mu \ge \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{array}$ RECHAZO H_0 si $\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} < -z_\alpha$

En caso contrario se acepta la hipótesis nula.

5.15.- Contraste de hipótesis para la media con varianza desconocida y n>30

Supongamos una población Normal. Para realizar este contraste el estadístico mejor conocido es la media muestral, $\overline{X} \to N(\mu, \frac{s}{\sqrt{n}})$.

Como ya se conoce su distribución, el estadístico de contraste será:

$$\frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}} \to N(0;1).$$

Podemos hacer tres tipos de contraste. Se presupone que la hipótesis nula es cierta, y se rechaza cuando:

A) $\begin{array}{l} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \ne \mu_0 \end{array}$ RECHAZO H_0 si $\left| \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} \right| > z_{\frac{\alpha}{2}}$

B) $\begin{array}{l} H_0 : \mu \le \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{array}$ RECHAZO H_0 si $\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} > z_\alpha$

C) $\begin{array}{l} H_0 : \mu \ge \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{array}$ RECHAZO H_0 si $\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} < -z_\alpha$

En caso contrario se acepta la hipótesis nula.

5.16.- Contraste de hipótesis para la media con varianza desconocida y n<30

Supongamos una población Normal. Para realizar este contraste el estadístico mejor conocido es la media muestral, $\overline{X} \to t_{n-1}$.

Como ya se conoce su distribución, el estadístico de contraste será:

$$\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \to t_{n-1}$$

Podemos hacer tres tipos de contraste. Se presupone que la hipótesis nula es cierta, y se rechaza cuando:

A) $\begin{array}{l} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{array}$ RECHAZO H_0 si $\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right| > t_{n-1;\frac{\alpha}{2}}$

B) $\begin{array}{l} H_0 : \mu \leq \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{array}$ RECHAZO H_0 si $\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} > t_{n-1;\alpha}$

C) $\begin{array}{l} H_0 : \mu \geq \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{array}$ RECHAZO H_0 si $\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} < -t_{n-1;\alpha}$

En caso contrario se acepta la hipótesis nula.

5.17.- Contraste de hipótesis para la proporción

Supongamos una población Normal. Para realizar este contraste el estadístico mejor conocido es la proporción muestral, $P \to N\left(p; \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$.

Como ya se conoce su distribución, el estadístico de contraste será:

$$\frac{p-P_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} \to N(0;1).$$

Podemos hacer tres tipos de contraste. Se presupone que la hipótesis nula es cierta, y se rechaza cuando:

A) $\begin{array}{l} H_0 : P = P_0 \\ H_1 : P \neq P_0 \end{array}$ RECHAZO H_0 si $\left|\frac{p-P_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}}\right| > z_{\frac{\alpha}{2}}$

B) $\begin{matrix} H_0 : P \leq P_0 \\ H_1 : P > P_0 \end{matrix}$ RECHAZO H_0 si $\dfrac{p - P_0}{\sqrt{\dfrac{p_0 q_0}{n}}} > z_\alpha$

C) $\begin{matrix} H_0 : P \geq P_0 \\ H_1 : P < P_0 \end{matrix}$ RECHAZO H_0 si $\dfrac{p - P_0}{\sqrt{\dfrac{p_0 q_0}{n}}} < -z_\alpha$

En caso contrario se acepta la hipótesis nula.

5.18.- Contraste de hipótesis para la varianza

Supongamos una población Normal. Para realizar este contraste el estadístico mejor conocido es la varianza muestral**.** Como ya se conoce su distribución, el estadístico de contraste será:

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \rightarrow \chi^2_{n-1} .$$

Como en este caso, la distribución del estadístico no es simétrica, podremos hacer tres mismos tipos de contraste, pero en este caso habrá que tener en cuenta esa no simetría. Se presupone que la hipótesis nula es cierta, y se rechaza cuando:

A) $\begin{matrix} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{matrix}$ RECHAZO H_0 si $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \notin \left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}} ; \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \right)$

B) $\begin{matrix} H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{matrix}$ RECHAZO H_0 si $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_\alpha$

C) $\begin{matrix} H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{matrix}$ RECHAZO H_0 si $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{1-\alpha}$

En caso contrario se acepta la hipótesis nula.