1. Juegos en forma estratégica

Amparo M. Mármol Conde
Dpto. Economía Aplicada III.
Universidad de Sevilla.

Sevilla, 5 de Noviembre 2013

Contenidos

El dilema del prisionero

Ejemplo

Dos sospechosos de un delito grave y de un pequeño hurto son ubicados en celdas diferentes. Se sabe que son culpables de ambos hechos, pero no hay pruebas de que hayan cometido el delito. A ambos se les da la oportunidad de confesar. Si ambos confiesan el delito, cada uno de ellos pasará 10 años en la cárcel. Si solo uno confiesa, actuará como testigo contra el otro (que pasará 15 años en la cárcel) y no recibirá castigo. Finalmente, si ninguno confiesa, serán juzgados por el hurto y cada uno de ellos pasará 1 año en la cárcel.

- Cada jugador puede Delatar (D), No Delatar (ND)
- Los resultados

	ND	D
ND	-1, -1	-15, 0
D	0, -15	-10, -10

El dilema del prisionero

Ejemplo

	ND	D
ND	-1, -1	-15, 0
D	0, -15	-10, -10

El "mejor?resultado: (-1, -1). Corresponde a (ND, ND).
Pero...

Para cada jugador, la estrategia D conduce a un resultado estrictamente mejor que ND.

Actuando independientemente (aunque racionalmente) los jugadores **eligen el par de estrategias (D, D), y el resultado es (-10, -10).**

Juegos en forma estratégica

Un **juego en forma estratégica** es un modelo estático en el que los jugadores toman sus decisiones simultánea e independientemente. No disponen de mecanismos que permitan adoptar acuerdos vinculantes.

Sea $N = \{1, \ldots, n\}$ el conjunto de jugadores.

Definición

Un juego en forma estratégica con conjunto de jugadores N es un par $G := (A, u)$ donde

- A_i **Conjunto de estrategias del jugador** i.
- $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$ **Conjunto de perfiles de estrategias de los jugadores**.
- $u_i : A \to \mathbb{R}$ **Función de pagos (o de utilidad) del jugador i**.
- $u = (u_1, \ldots, u_n)$.

Los jugadores eligen sus estrategias $a_i \in A_i$ y obtienen un pago (o utilidad) $u_i(a_1, \ldots, a_n)$.

El dilema del prisionero

Ejemplo

- Los conjuntos de estrategias de ambos jugadores son $A_1 = A_2 = \{ND, D\}$ (Delatar, No Delatar)
- Las funciones de pago:

	ND	D
ND	-1, -1	-15, 0
D	0, -15	-10, -10

Por ejemplo $u_1(ND, ND) = u_2(ND, ND) = -1$, $u_1(ND, D) = -15$,....

Oligopolio de Cournot(1838)

Se consideran N empresas que producen un cierto bien. Cada empresa i decide el número de unidades que va a producir, $x_i \in [0, \infty)$, siendo el coste de producción $c_i(x_i)$. El precio de una unidad en el mercado depende de la cantidad total producida, $p(\sum_{j \in N} x_j)$.

Juego estratégico: $G = (A, u)$**.**

- $A_i = [0, \infty)$.
- Para cada empresa $i \in N$, y para cada $x \in A$ $(x_i \in A_i)$,

$$u_i(x) = p(\sum_{j \in N} x_j)x_i - c_i(x_i).$$

El equilibrio de Nash (1950, 1951)

Identificar los **resultados estables** de la interacción.

Equilibrio de Nash: Perfil de estrategias de los jugadores tal que ningún jugador gana desviándose unilateralmente de él.

Para un juego $G = (A, u)$ y un perfil de estrategias $x \in A$, $(x_{-i}, \bar{x}_i)$ denota el perfil $(x_1, \ldots, x_{i-1}, \bar{x}_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.

Definición

Un **equilibrio de Nash** del juego en forma estratégica $G = (A, u)$ es un perfil de estrategias $x^* \in A$ que cumple

$$u_i(x^*) \geq u_i(x^*_{-i}, \bar{x}_i),$$

para todo $\bar{x}_i \in A_i$ y todo $i \in N$.

Equilibrios de Nash en el dilema del prisionero

	ND	D
ND	-1, -1	-15, 0
D	0, -15	-10, -10

El único equilibrio de Nash es (D, D).
Para cada jugador, si se desvia de la estrategia D (a ND) empeora su resultado.
(D, D) es el único comportamiento racional en un contexto **no cooperativo**.

Equilibrios de Nash en el modelo de Cournot

- Consideramos un duopolio: $N = \{1, 2\}$.
- Costes lineales: $c_i(x_i) = cx_i$ para $i \in \{1, 2\}$, con $c > 0$.
- Función precio: $p(x_1 + x_2) = a - (x_1 + x_2)$.

La función de pagos es:

$$u_i(x_1, x_2) = (a - x_1 - x_2 - c)x_i.$$

Un **equilibrio de Nash** de este juego (equilibrio de Cournot) es un par $(x_1^*, x_2^*) \in A_1 \times A_2$ tal que:

$$u_1(x_1^*, x_2^*) \geq u_1(x_1, x_2^*),\ \forall x_1 \in A_1,$$

$$u_2(x_1^*, x_2^*) \geq u_2(x_1^*, x_2),\ \forall x_2 \in A_2.$$

x_1^*, x_2^* son mutuamente la mejor respuesta a la acción del otro jugador.

Equilibrios de Nash en el modelo de Cournot

$$u_i(x_1, x_2) = x_i(a - x_1 - x_2 - c) \textit{ para } i = 1, 2.$$

Mejor respuesta de 1 a la estrategia x_2 de 2: $B_1(x_2)$

$\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}(x) = -2x_1 + a - x_2 - c,$

$\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}(x) = -2 \Rightarrow u_1$ es cóncava *en su propia acción*.

Su máximo:

$\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}(x) = -2x_1 + a - x_2 - c = 0 \Leftrightarrow \quad x_1 = \dfrac{a - x_2 - c}{2}.$

Por tanto $B_1(x_2) = \dfrac{a - x_2 - c}{2}.$

Igualmente, $B_2(x_1) = \dfrac{a - x_1 - c}{2}.$

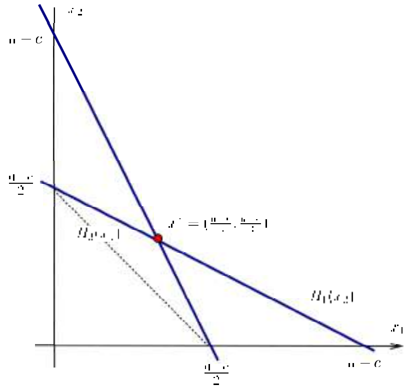
Mejor respuesta mutua: $x_1 = \dfrac{a - x_2 - c}{2},\ x_2 = \dfrac{a - x_1 - c}{2}.$

Único equilibrio de Nash del juego:

$$x^* = \left(\frac{a - c}{3}, \frac{a - c}{3}\right).$$

Equilibrios de Nash en el modelo de Cournot

En **equilibrio**, para $i \in \{1, 2\}$, $x_i^* = \dfrac{a - c}{3}$, y $u_i(x^*) = \dfrac{(a - c)^2}{9}$.



Con un único agente en el mercado (**monopolista**):

Producción y beneficio óptimo: $\hat{x} = \dfrac{a - c}{2},\ u(\hat{x}) = \dfrac{(a - c)^2}{4}.$

Se produce menos que el total en equilibrio, el beneficio del monopolista es mayor que la suma de los beneficios de los duopolistas en equilibrio.

Equilibrios de Nash en el modelo de Cournot

- El resultado obtenido sobre la unicidad del equilibrio de Cournot depende de la linealidad del precio con respecto a la demanda.
- Con otras formas funcionales, puede no existir equilibrios o haber multiplicidad de equilibrios (incluso infinitos equilibrios).

Pares o nones

Ejemplo [Pares o nones]

Los jugadores 1 y 2 tienen que escoger simultánea e independientemente un número natural. Si la suma de los números elegidos es par, entonces gana el jugador 1, y si es impar, gane el jugador 2. Puesto que solo importa si el número elegido es par o impar, las estrategias de cada jugador son jugar par (P) y jugar impar (I).
Los pagos del juego en forma estratégica pueden representarse como:

	P	I
P	1, -1	-1, 1
I	-1, 1	1, -1

No existe equilibrio de Nash para este juego.

El teorema de Nash

Una condición suficiente para la existencia de equilibrios de Nash para juegos en forma estratégica.

Teorema

Sea $G = (A, u)$ un juego en forma estratégica, tal que para cada $i \in N$

a) A_i es un subconjunto de $\mathbb{R}^{m_i}$, no vacio, convexo y compacto.

b) u_i continua.

c) Para cada $\bar{x}_{-i}$, la función de x_i, $u_i(\bar{x}_{-i}, x_i)$ es cuasi-cóncava en A_i.

Entonces, G tiene al menos un equilibrio de Nash.

Los ejemplos vistos anteriormente no cumplen las hipótesis de este Teorema.

Juegos bipersonales de suma nula

- Representan situaciones en las que los jugadores tienen intereses totalmente contrapuestos.
- Fueron los primeros juegos estudiados en la literatura, por John von Neumann (1928, 1944).

Definición

Un **juego bipersonal de suma nula** es un juego en forma estratégica, $G = (\{X, Y\}, \{u_1, u_2\})$, tal que para cada perfil de estrategias $(x, y) \in X \times Y$, $u_1(x, y) + u_2(x, y) = 0$.

Basta con especificar la función de pagos del jugador 1.
Se puede representar por una terna por $G = (X, Y, u)$.

Juegos bipersonales de suma nula

- El juego de pares o nones es un juego bipersonal de suma nula.
- El oligopolio de Cournot **no** es de suma nula.
- El dilema del prisionero **no** es de suma nula.

Juego bipersonal de suma nula finito.

Pagos del agente 1:

	L	R	H
U	2	2	4
D	1	3	2

Valor del juego

Dado un juego bipersonal de suma nula $G = (X, Y, u)$

- $\underline{\Lambda}(x) = inf_{y \in Y}\ u(x, y)$, $\qquad \overline{\Lambda}(y) = sup_{x \in X}\ u(x, y)$.
  $\underline{\Lambda}(x)$: pago que se garantiza el jugador 1 con su estrategia $x \in X$.
  $\overline{\Lambda}(y)$: pérdida máxima del jugador 2 con su estrategia $y \in Y$.
- El **valor inferior** de G es el pago que el jugador 1 puede garantizarse por si mismo:
$$\underline{v} = sup_{x \in X}\ \underline{\Lambda}(x).$$
- El **valor superior** de G es la pérdida minima que se puede garantizar el jugador 2 por si mismo:
$$\overline{v} = inf_{y \in Y}\ \overline{\Lambda}(y).$$

Definición

Un juego bipersonal de suma nula está **estrictamente determinado** o **tiene valor** si su valor superior coincide con el inferior.
En este caso $V = \underline{v} = \overline{v}$ es el **valor** del juego.

Valor del juego

Un juego estrictamente determinado

	L	R	H
U	2	2	4
D	1	3	2

$\underline{\Lambda}(U) = 2$, $\underline{\Lambda}(D) = 1$, entonces $\underline{v} = 2$.
$\overline{\Lambda}(L) = 2$, $\overline{\Lambda}(R) = 3$, $\overline{\Lambda}(H) = 4$, entonces $\overline{v} = 2$.

$$V = 2.$$

Pares o nones no es estrictamente determinado

	P	I
P	1, -1	-1, 1
I	-1, 1	1, -1

$$\underline{v} = -1, \overline{v} = 1.$$

Estrategias óptimas

Definición

Sea $G = (X, Y, u)$ un juego bipersonal de suma nula con valor V,
$x \in X$ es una **estrategia óptima** del jugador 1 si $V = \underline{\Lambda}(x)$.
$y \in Y$ es una **estrategia óptima** del jugador 2 si $V = \overline{\Lambda}(y)$.

Si el juego bipersonal de suma nula es finito, entonces existen estrategias óptimas para ambos jugadores. Esto no se cumple, en general, cuando el juego no es finito.

Un juego con estrategias óptimas

En el juego

	L	R	H
U	2	2	4
D	1	3	2

U y L son estrategias óptimas de los jugadores 1 y 2, respectivamente, pues $\underline{\Lambda}(U) = 2$ y $\overline{\Lambda}(L) = 2$.
Con estas estrategias el jugador 1 se garantiza un pago igual al valor del juego ($V = 2$). El jugador 2 se garantiza que su pérdida no es mayor que 2.

Nash y von Neumann

En un juego bipersonal de suma nula (X, Y, u), el par de estrategias $(x^*, y^*) \in X \times Y$ es un **equilibrio de Nash** si para todo $x \in X$, $y \in Y$,

$$u(x, y^*) \leq u(x^*, y^*) \leq u(x^*, y).$$

Proposición

Sea $G = (X, Y, u)$ un juego bipersonal de suma nula y (x^*, y^*) un equilibrio de Nash de G. Entonces

- G está estrictamente determinado.
- x^*, y^* son estrategias óptimas del jugador 1 y 2, respectivamente.
- $V = u(x^*, y^*)$.

Proposición

Sea $G = (X, Y, u)$ un juego bipersonal de suma nula estrictamente determinado y x^*, y^* estrategias óptimas de los jugadores 1 y 2, respectivamente. Entonces,

- (x^*, y^*) es un equilibrio de Nash y $V = u(x^*, y^*)$.

Nash y von Neumann

Estrategias óptimas y equilibrios

En el juego

	L	R	H
U	2	2	4
D	1	3	2

U y L son estrategias óptimas de los jugadores 1 y 2, respectivamente, pues $\underline{\Lambda}(U) = 2$ y $\overline{\Lambda}(L) = 2$. Por tanto (U, L) es un equilibrio de Nash del juego.

Juegos finitos y estrategias mixtas

Definición

Un **juego finito** es un juego en forma estratégica tal que para $i \in N$, $|A_i| < \infty$.

Extensión mixta del juego: Aumentan las posibilidades estratégicas de los jugadores. Además de sus estrategias iniciales (**estrategias puras**), también pueden escoger *loterias* sobre sus conjuntos finitos de estrategias puras (**estrategias mixtas**).

Las estrategias mixtas se interpretan como las probabilidades con que los agentes juegan sus estrategias puras (se realizaría un experimento aleatorio cada vez que se juega el juego para elegir la estrategia a usar). El jugador valora el **pago esperado**.

Estrategias en Pares o Nones

	P	I
P	1, -1	-1, 1
I	-1, 1	1, -1

Una estrategia mixta del agente 1, es jugar par con probabilidad 1/2 e impar con probabilidad 1/2. Otra, jugar par con probabilidad 1/4, e impar con probabilidad 3/4.

Juegos finitos y estrategias mixtas

A_i: conjunto de estrategias puras del agente i.
Conjunto de estrategias mixtas del agente i:

$$S_i = \{s_i \in \mathbb{R}^{A_i} : s_i(a_i) \geq 0 \, \forall a_i \in A_i, \sum_{a \in A_i} s_i(a_i) = 1\}.$$

$s_i(a_i)$ probabilidad con que el jugador i elige su estrategia pura a_i.
Para $a \in A$ $(a_i \in A_i)$, $s(a) = s_1(a_1) \times \ldots \times s_n(a_n)$ es la probabilidad de que se juegue el perfil de estrategias a.

Juegos finitos y estrategias mixtas

Definición

Sea $G = (A, u)$ un juego finito. La **extensión mixta** de G es el juego estratégico $E(G) = (S, u)$ donde

- **Conjunto de estrategias mixtas del agente** i:
  $S_i = \{s_i \in \mathbb{R}^{A_i} : s_i(a_i) \geq 0 \, \forall a_i \in A_i, \sum_{a \in A_i} s_i(a_i) = 1\}$.
- $S = \prod_{i \in N} S_i$.
- **Función de pago del agente** i:
  $u_i(s) = \sum_{a \in A} u_i(a) s(a)$ para todo $s \in S$.

Utilidad esperada en Pares o Nones

	P	I
P	1, -1	-1, 1
I	-1, 1	1, -1

$$u_1((1/2, 1/2), (1/2, 1/2)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(1) = 0.$$

$$u_1((1/4, 3/4), (4/5, 1/5)) = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5}(1) + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}(-1) + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}(-1) + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5}(1) = -\frac{3}{10}.$$

Juegos finitos y estrategias mixtas

Teorema (Consecuencia del Teorema de Nash

La extensión mixta de un juego finito tiene al menos un equilibrio de Nash.

Ejemplo [Pares o nones]

	P	I
P	1, -1	-1, 1
I	-1, 1	1, -1

La estrategia mixta $s_1^* = (1/2, 1/2)$, $s_2^* = (1/2, 1/2)$ es un equilibrio de Nash del juego de pares o nones.

Juegos matriciales

Si el juego bipersonal de suma nula es finito los pagos se representan por una matriz.

$G = (M, N, u)$ con $M = \{e_1, \ldots, e_m\}, N = \{b_1, \ldots, b_n\}$.

La **matriz de pagos** del jugador 1 es

$$\mathcal{A} = (a_{ij})_{i=1,\ldots,m}^{j=1,\ldots n}, \quad con \quad a_{ij} = u(e_i, b_j).$$

La del jugador 2 es $(-\mathcal{A})$.

Matriz de Pares o Nones

El juego de pares o nones es un juego bipersonal de suma nula finito. La matriz de pagos (del jugador 1) es

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Juegos matriciales

Definición

Un **juego matricial** es la extensión mixta de un juego bipersonal de suma nula finito $(G = (M, N, u)$, con $|M| = m, |N| = n)$. Se representa por una terna (S_m, S_n, u) tal que

- **Conjuntos de estrategias:**
  $S_m = \{x \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0 \, \forall i \in \{1, \ldots, m\}, \sum_{i=1}^m x_i = 1\}$.
  $S_n = \{y \in \mathbb{R}^n : y_j \geq 0 \, \forall j \in \{1, \ldots, n\}, \sum_{j=1}^n x_j = 1\}$.
- **Función de pagos:** Para cada $(x, y) \in S_m \times S_n$,

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = x \mathcal{A} y^t.$$

Obsérvese que la matriz $\mathcal{A}$ basta para caracterizar el juego matricial.

El Teorema Minimax

Dado un juego matricial $m \times n$ de matrix $\mathcal{A}$,

- El pago que puede garantizarse el jugador 1 cuando juega su estrategia $x \in X$, es

$$\underline{\Lambda}(x) = min_{y \in Y}\, x\mathcal{A}y^t = min_{j=1,\ldots n}\, xa_{\cdot j}.$$

- El pago que se garantiza el jugador 2 cuando juega su estrategia $y \in Y$ es

$$\overline{\Lambda}(y) = max_{x \in X}\, x\mathcal{A}y^t = max_{i=1,\ldots m}\, xa_{i\cdot}.$$

Teorema (Minimax de Von Neumann)

- Todo juego matricial está estrictamente determinado (Consecuencia del Teorema de Nash).
- Su valor es $V = Max_{x \in X}\, min_{j=1,\ldots n}\{xa_{\cdot j}\} = Min_{y \in Y}\, max_{i=1,\ldots m}\{xa_{i\cdot}\}$.

Resolución del juego matricial

- Existen diversos algoritmos para resolver algunos tipos de juegos matriciales.
- la Programación Lineal proporciona un método general para resolverlos. Dantzig (1951), Gale, Kuhn y Tucker(1951) establecen la equivalencia entre resolver un juego y un problema lineal.

Resolución por Programación Lineal

Para hallar el conjunto de estrategias óptimas de los jugadores hay que resolver los problemas lineales:

$$\begin{array}{lll} max & v & \\ s.a.: & xa_{\cdot j} \geq v, & \forall j \in N, \\ & \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, & \\ & x \geq 0. & \end{array} \qquad \begin{array}{lll} min & t & \\ s.a.: & ya_{i\cdot} \leq t, & \forall i \in M, \\ & \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, & \\ & y \geq 0. & \end{array}$$

- Son un par de problemas primal-dual.
- Resolviendo uno de ellos se obtiene la solución de ambos.
- Las solución del segundo son los valores de las variables duales en el óptimo del primero.

Resolución por Programación Lineal

**Este juego tiene un equilibrio en estrategias puras.
En estrategias mixtas tiene más.**

	L	R	H
U	2	2	4
D	1	3	2

$$\begin{array}{ll} max & v \\ s.a.: & 2x_1 + x_2 \geq v \\ & 2x_1 + 3x_2 \geq v \\ & 4x_1 + 2x_2 \geq v \\ & x_1 + x_2 = 1 \\ & x \geq 0. \end{array} \qquad \begin{array}{ll} min & t \\ s.a.: & 2y_1 + 2y_2 + 4y_3 \leq t \\ & y_1 + 3y_2 + 2y_3 \leq t \\ & y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ & y \geq 0. \end{array}$$

Resolviendo el primer problema lineal: $v^* = 2$, $x^* = (1, 0)$.
Solución del segundo: $t^* = 2$.
Soluciones óptimas extremas: $y^* = (1, 0, 0)$, $y^* = (1/2, 1/2, 0)$.
Los pares de (x^*, y^*) son los equilibrios del juego matricial.
En equilibrio, el jugador 1 utiliza siempre su primera estrategia pura.
El jugador 2 utiliza una combinación, $(\frac{1+\alpha}{2}, \frac{1-\alpha}{2}, 0)$, $\alpha \in [0, 1]$, de sus dos primeras estrategias.

Resolución por Programación Lineal

Piedra, papel o tijera

Dos jugadores participan en un juego en el que tienen que escoger simultánea e independientemente uno de los siguientes objetos: piedra papel o tijera. La piedra gana a la tijera rompiéndola, la tijera gana al papel cortándolo, y el papel gana a la piedra envolviéndola. El jugador que escoge el objeto vencedor obtiene una unidad del otro jugador y cuando ambos jugadores escogen el mismo objeto, ninguno gana.

	Pie	Pa	T
Pie	0	-1	1
Pa	1	0	-1
T	-1	1	0

En estrategias puras:

- No está estrictamente determinado.
- No hay equilibrio de Nash.

En estrategias mixtas.

- El valor del juego es $v^* = 0$.
- Las estrategias óptimas son $(1/3, 1/3, 1/3)$, $(1/3, 1/3, 1/3)$.

Resolución por Programación Lineal

Piedra, papel o tijera (sin una tijera)

El jugador 1 puede jugar piedra papel o tijera, pero el jugador 2 sólo piedra y papel.
Los pagos del juego:

	Pie	Pa
Pie	0	-1
Pa	1	0
T	-1	1

?Cómo se juega a esto?

Bibliografía y lecturas

- Casas B., Fiestras M.G., García I., González J. (2012) *Introducción a la Teoría de Juegos*. Universidad de Santiago de Compostela.
- González J., García, Fiestras M.G.(2010) *An Introductory Course on Mathematical game Theory*. American Mathematical Society.
- Poundstone W. (1995) *El Dilema del Prisionero*. Alianza Editorial.
- Thomas L.C. (2003) *Games, Theory and Applications*. Dover Publications, Inc.