# APUNTES DE
# CÁLCULO INTEGRAL

$$\int f(x)\,dx$$

Centro de Estudios Tecnológicos
Industrial y de Servicios No. 33

**Ing. Manuel Zamarripa Medina**
Academia de Matemáticas
**CENTRO DE ESTUDIOS TECNOLÓGICOS**
**Industrial y de Servicios 33**
**Correo:**zamarripa6103@hotmail.com

# *PROLOGO*

Sin lugar a dudas el avance tecnológico que ha desarrollado la humanidad, se debe a que ha contado con la herramienta de las matemáticas que son "***El Lenguaje De La Naturaleza***"; una parte fundamental de las matemáticas lo constituye el Cálculo Infinitesimal y dentro de este ubicamos al *Cálculo Integral*, que es el tema de estos apuntes preparados para que los alumnos se introduzcan en su comprensión y dominio.

En los apuntes encontraran la parte teórica correspondiente seguida de ejemplos resueltos, los cuales incluyen los pasos a seguir y las formulas empleadas, las cuales se disponen hacia el margen derecho de los ejercicios planteados. La solución de los ejercicios propuestos al alumno es de vital importancia para la consolidación de sus conocimientos.

Como ayuda al estudiante se preparó también un ***Formulario De Matemáticas***, al cual hay que reproducir por separado. Lo anterior porque para la solución de problemas se requiere del conocimiento de otras áreas de las matemáticas, tales como: Álgebra, Geometría, Trigonometría, Geometría Analítica y Cálculo Diferencial.

En realidad es grande la importancia y son muchas las aplicaciones que tiene el Cálculo. El estudiante de esta asignatura encontrara en estos apuntes la ayuda necesaria para cubrir el programa de la materia y encaminarse a su descubrimiento, aplicación y la satisfacción de su dominio. Me sentiré retribuido si este sencillo esfuerzo contribuye en algo a ese propósito.

*Ing. Manuel Zamarripa Medina*

# ÍNDICE Página

## *INTRODUCCIÓN*

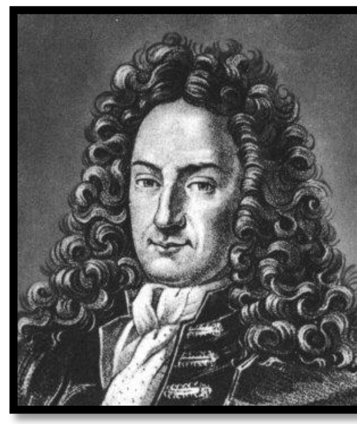
El *Cálculo Integral* junto con el *Cálculo Diferencial* constituyen el *Cálculo Infinitesimal* que se encarga del estudio de magnitudes infinitamente pequeñas.

El Cálculo Infinitesimal fue desarrollado casi al mismo tiempo por el científico inglés **Isaac Newton** y el abogado alemán **Gottfried Wilhelm Leibniz** a finales del siglo XVII.

Aunque Newton descubrió y empleo el nuevo lenguaje desde 1670, fue Leibniz el primero en publicar sus descubrimientos del cálculo infinitesimal en un breve ensayo que apareció en la revista Acta Eruditarum de su país en 1684, en donde utilizo la notación o simbología que se sigue utilizando en nuestros días.

***Sir Isaac Newton***
*(1642 – 1727)*

***Gottfried Wilhelm Leibniz***
*(1646 – 1716)*



En este nivel de preparación escolar los alumnos ya están preparados para realizar las operaciones mutuamente inversas como: adición y sustracción (suma y resta), multiplicación y división, elevar a una potencia y extraer una raíz. En el curso anterior aprendimos a *derivar* una función, ahora aprenderemos la operación inversa de la derivada que es el *Cálculo Integral*.

En el *Cálculo Diferencial* se investiga el límite del cociente de dos magnitudes sumamente pequeñas, o sea, se determina la pendiente de una curva dada por una ecuación.

El *Cálculo Integral* tiene fin hallar la ecuación de cuya grafica representativa se conoce la expresión de la pendiente de su tangente. No obstante lo anterior tiene además el objeto de hallar el límite de la suma de un número sumamente grande de magnitudes infinitamente pequeñas; por eso *Leibniz* ideó el signo $\int$ que es una letra **S** deformada para indicar a la Integral.

Las aplicaciones del Cálculo Integral van desde estudios geométricos en el cálculo de áreas y volúmenes, hasta procesos físicos e industriales, economía y negocios.

***Lectura de comprensión:***

# Matemáticas Aplicadas a la Vida Cotidiana y otros Lugares Inesperados

*Por el Lic. en Matemáticas: Alberto Vargas Mendoza*

No se requiere de un gran poder deductivo para concluir que existe una aversión generalizada hacia las matemáticas. La gran mayoría de los alumnos de preparatoria y de licenciaturas en ciencias sociales y humanidades experimentan las clases de matemáticas como entes completamente ajenos a sus vidas cotidianas y a sus futuros profesionales. Quizá la frase más escuchada por los profesores de estas clases es: "¿Y eso para qué me va a servir?".


El problema no radica en que el estudiante no conozca las aplicaciones de las matemáticas en ese momento, sino que lo más probable es que pase el resto de su vida sin conocerlas. El propósito de este escrito es presentar una serie de ejemplos de posibles aplicaciones a situaciones de la vida cotidiana, así como a disciplinas que tradicionalmente se han considerado como ajenas al mundo de las matemáticas, en un afán de contestar a esta eterna pregunta.

Continuando con la pasarela de frases célebres entre los alumnos de prepa, está aquella que dice: "Sí, ya me veo usando álgebra para ir al súper". Eso puede ser verdad en la mayoría de los casos, pero si pides una factura y necesitas el IVA desglosado, tendrás que confiar ciegamente en las habilidades del empleado de la tienda, a menos que sepas cómo despejar la ecuación que te da el precio después del IVA (nota: el precio antes del IVA no es 85% del precio final sino precio final)/1.15).

¿No vas a necesitar una factura nunca en tu vida? Aun así las matemáticas te pueden llegar a servir. Seguramente algún día querrás comprar un automóvil nuevo o una casa, y te enfrentarás con empleados bancarios o vendedores de autos que te hipnotizarán con promesas de cero intereses y pagos chiquitos para pagar poquito, pero en realidad ¿sabes cuánto estás pagando por el crédito? Comúnmente entre más benigno parezca un esquema de crédito es muy probable que la tasa de interés implícita sea más alta, para calcularla necesitas sólo álgebra de secundaria y un poco de paciencia. En estos casos como en muchos otros, el papel que juegan las matemáticas en la vida cotidiana es el de detectar mentiras y engaños.

Estando en el terreno de los engaños, la simple experiencia de leer el periódico o ver las noticias en la televisión es completamente diferente cuando se sabe un poco de matemáticas. Por ejemplo, uno de los temas que los periódicos tratan con gran frecuencia es el de la pérdida del poder adquisitivo de los salarios, sin embargo, es muy común que los reporteros hagan sus "estimaciones" sin explicar sus metodologías o la fuente de sus datos. Una vez más, sin conocimiento matemático, leer el periódico se reduce a un acto de fe.

Así, comprender las nociones básicas de álgebra y una pizca de matemáticas financieras nos da el poder de desenmascarar las mentiras, engaños y triquiñuelas de vendedores, periodistas y (aún peor) políticos. Pero vayamos más allá de las situaciones cotidianas que todos hemos de enfrentar y adentrémonos al terreno del ejercicio profesional. Hasta hace algunos años, la aplicación de las matemáticas avanzadas al ejercicio profesional era un terreno restringido de manera casi exclusiva a las ciencias físicas y a las ingenierías. Sin embargo este panorama está cambiando de una forma radical y cada día son más las disciplinas que están aplicando métodos que van de la administración cuantitativa a la psicología matemática, pasando por aplicaciones a la biología, la medicina o la planeación urbana.

Tradicionalmente los alumnos de las preparatorias a quienes les interesaba la ciencia pero no las matemáticas solían estudiar biología, con la firme esperanza de no volver a ver una fórmula en sus vidas. Desgraciadamente para ellos, esto se aleja cada vez más de la realidad, ya que a medida que avanza la biología ésta depende cada vez más de las herramientas matemáticas para producir modelos de la realidad.

Quizá el ejemplo más famoso de esto es el de la genética. Aquí los métodos de la teoría de probabilidad se utilizan con fines tan exóticos como encontrar la distancia evolutiva entre dos especies. Esto es, nos permite saber cuántas generaciones atrás debemos remontarnos para encontrar un ancestro común a dos especies. Esto se hace comparando el código genético de las dos especies y modelando el ritmo con que cambia este código mediante la evolución. Así, podemos estimar qué tan "lejos" se encuentran evolutivamente una de la otra. La evolución misma es sujeta a ser analizada desde un punto de vista matemático.

La teoría de juegos nos ofrece herramientas para explicar partes de la evolución que pueden parecernos casi absurdas. Tomemos como ejemplo lo grave del croar de los sapos. En los cursos básicos de biología nos enseñan que aquellas especies que sobreviven son las más aptas. Pero podemos preguntarnos: ¿En qué le ayuda a un sapo croar de manera más grave? Lo más probable es que lleguemos a la conclusión de que no le sirve de nada en la vida diaria. Sin embargo, los sonidos graves se asocian a lo largo de la historia evolutiva con sapos grandes. Así un sapo que croara de manera grave tiene mayor probabilidad de reproducirse que una con un croar agudo. Así, con el paso de las generaciones, los sapos adquieren un croar cada vez más grave ya que de no hacerlo sus genes no se perpetuarán al no lograr reproducirse.

Un caso muy similar es el de los pavo reales, cuyo plumaje no sirve a ningún propósito más que el de brindarle al macho de la especie una ventaja en las señales que manda a las hembras con las que podría reproducirse. Estos dos ejemplos los hemos logrado describir con palabras; sin embargo, traducirlos al lenguaje matemático nos permite no sólo escribirlos de una manera más elegante sino que al resolver el problema, estamos de hecho resolviendo todos los problemas que se puedan escribir de la misma forma. Es decir, si resolvemos el problema de los sapos y encontramos que el croar seguirá haciéndose más grave mientras las leyes de la física lo permitan es muy probable que la solución al problema de los pavo reales sea muy similar.

Además, el utilizar un modelo matemático nos permite analizar las cosas más allá de lo que podríamos hacer utilizando sólo palabras. Podemos comenzar a modelar varios atributos en una especie y el papel que juegan en conjunto en el éxito para reproducirse de un individuo y así encontrar que características que prevalecerán en el futuro evolutivo de esa especie.

La teoría de juegos es una herramienta de las matemáticas aplicadas que no sólo se aplica a la biología, sino que se ha enriquecido de ella. Al tomar algunas de las ideas de la evolución ha logrado avances importantes en aplicaciones en la ciencia política y la economía. Una aplicación directa (y sumamente simplificada) del ejemplo de los sapos se puede hacer a los partidos políticos de la siguiente forma: si suponemos que un partido prometió únicamente lo que es estrictamente posible cumplir, otro partido puede beneficiarse en número de votos prometiendo un poco más, lo que provocará que el primero prometa aún más y así sucesivamente… hasta que las promesas de campaña sean como el plumaje de los pavo reales.

Si bien hoy en día a casi nadie le sorprende la aplicación de las matemáticas a las ciencias económicas, lo que sí es sorprendente es la sofisticación de las matemáticas utilizadas. Cuando se leen las convocatorias para hacer estudios de posgrado en economía, tanto en Inglaterra como en Estados Unidos, las universidades parecen más preocupadas porque los aspirantes manejen el álgebra lineal y el cálculo de varias variables que los principios de la economía. Algunas incluso sugieren que es útil que los aspirantes sepan un poco de análisis. Esto no ha de sorprendernos después de hojear una revista especializada prácticamente en cualquier área de la economía emplea las matemáticas.

La intensidad del uso de modelos matemáticos en estas disciplinas es comparable sólo con el de las ciencias físicas. Este paralelo entre las ciencias económicas y las ciencias físicas va más allá de la profundidad o complejidad de las herramientas utilizadas, en muchas ocasiones las herramientas son las mismas. Por ejemplo, la macroeconomía ha tomado prestada de la ingeniería la teoría de control óptimo como una de las herramientas más ampliamente utilizadas y las finanzas han tomado la teoría del movimiento Browniano como una de sus piedras angulares.

Así cada vez más el perfil de los economistas se aleja más de aquel individuo que leía tomo tras tomo de las teorías de Ricardo, Smith, Marx y Mill, y se acerca más al del estudiante de ingeniería que deambula por las universidades con un grueso tomo en cuyo lomo se aprecia la palabra “Cálculo”.

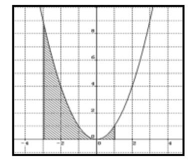
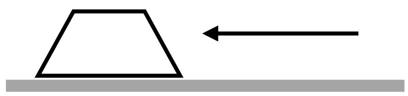
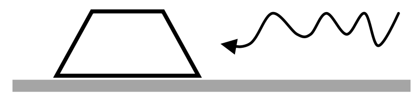
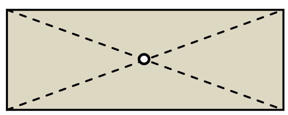
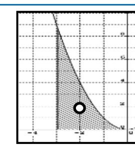
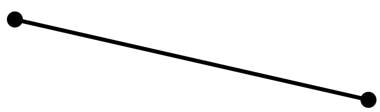
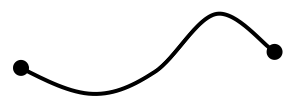
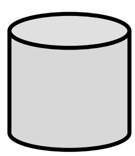
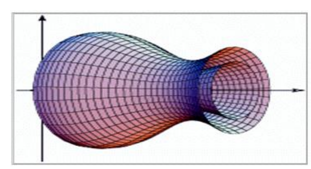
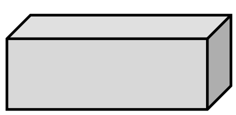
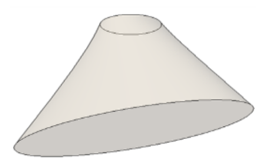
Hasta ahora hemos considerado aplicaciones en disciplinas que podríamos considerar como puramente académicas, sin embargo la historia difícilmente acaba ahí. Uno de los conceptos que más se utilizan en la administración moderna es el manejo de inventarios “just in time”. Este esquema sería absolutamente impensable sin la ayuda de la investigación de operaciones. Esta disciplina nos permite diseñar desde la distribución de los productos en las bodegas, hasta las rutas que han de seguir los camiones repartidores para optimizar los recursos disponibles. Utilizando información sobre la cantidad que se vende de un cierto producto cada día, podemos mantener inventarios mínimos y así disminuir drásticamente los costos de almacenamiento. Es gracias a estas herramientas que las existencias de muchos supermercados consisten de sólo aquello que está en exhibición, lo que evita que inviertan en grandes áreas de almacenamiento en sus sucursales.

Más allá de la maximización de ganancias, existen industrias completas que dependen de la investigación de operaciones para sobrevivir. El caso arquetípico de esto lo constituyen las aerolíneas. El margen de utilidad bajo el que operan estas empresas es muy estrecho y además están sujetas a algunas regulaciones sumamente estrictas, tanto en los estándares de sus equipos, como en la cantidad de horas que puede estar en el aire cualquier miembro de las tripulaciones. Así, se enfrentan con problemas complejísimos de asignar las tripulaciones de tal forma que no se violen las reglas internacionales, pero al mismo tiempo no darle a su personal mucho más tiempo en tierra del estrictamente necesario, ya que esto significa un costo significativo para las empresas. A tal grado es importante la optimización de recursos en las aerolíneas que inclusive la cantidad de sobreventa de boletos se optimiza.

Hemos, hasta ahora, considerado aplicaciones de las matemáticas “hacia afuera”, esto es, aplicaciones a otras ramas del conocimiento. Sin embargo, vale la pena considerar que otro lugar inesperado de aplicación de las matemáticas son las matemáticas mismas. Esto, que dé inicio puede parecer redundante no lo es. En el desarrollo de conocimiento nuevo dentro de las matemáticas (puras o aplicadas) con frecuencia se encuentra apoyo en otras ramas de la disciplina que uno nunca esperaría. Por ello, la especialización necia que sólo se concentra en un área muy específica y se olvida del resto de los conocimientos matemáticos representa un riesgo. Frecuentemente en áreas distantes se encuentra la respuesta que se busca, de la misma forma que las demás disciplinas encuentran en las matemáticas (un área que creen muy distante) las respuestas que ellas buscan.

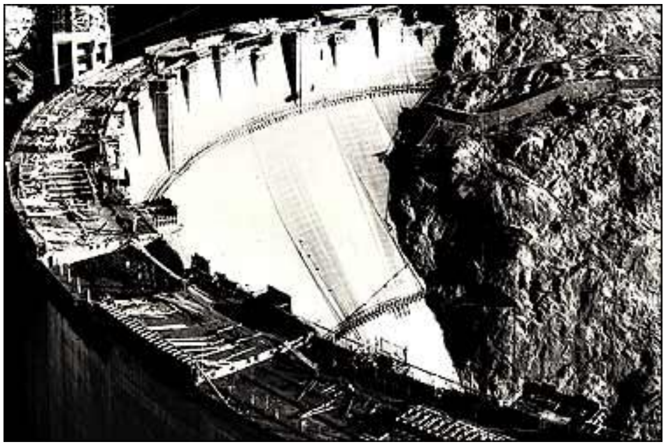
En nuestro recorrido por las aplicaciones de las matemáticas hemos pasado del supermercado a la agencia de coches, al laboratorio de biotecnología, por las promesas de campaña y por la sobrevivencia de las aerolíneas. Esta breve semblanza no pretende de manera alguna ser una exposición exhaustiva de las aplicaciones de las matemáticas, sino solamente una exposición inicial que permita al lector advertir la multiplicidad de lugares donde, de manera inesperada, las matemáticas pueden surgir como herramientas útiles (y hasta necesarias). Es nuestra esperanza que el lector adverso a las matemáticas se interese en ellas por el simple hecho de que le serán útiles en la vida y que el lector que es ya un amante de las matemáticas, sienta la curiosidad por explorar aplicaciones poco conocidas o poco convencionales de esta maravillosa ciencia.

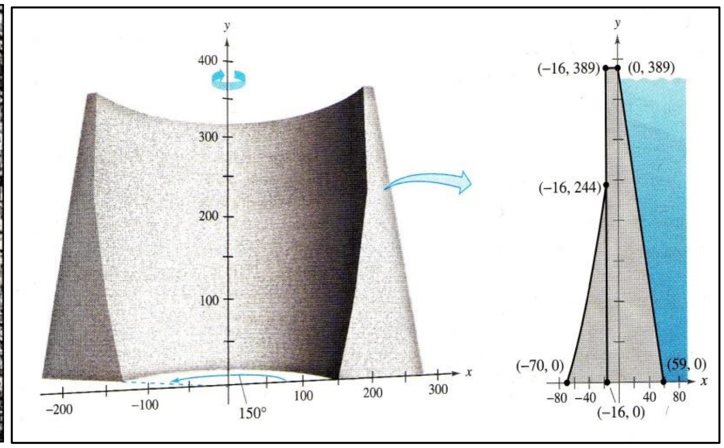
## VENTAJAS COMPARATIVAS DEL CÁLCULO INTEGRAL

| Sin Cálculo Integral | Con Cálculo Integral |
|---|---|
| Área de un<br>Rectángulo  | Área debajo<br>de una curva  |
| Trabajo realzado<br>Por una fuerza<br>constante  | Trabajo realzado<br>Por una fuerza<br>variable  |
| Centro de<br>Un rectángulo  | Centroide de<br>Una región  |
| Longitud de un<br>segmento rectilíneo  | Longitud de<br>un arco  |
| Área superficial<br>De un cilindro  | Área superficial<br>De un sólido de<br>Revolución  |
| Volumen de un<br>Solido rectangular  | Volumen de un<br>Solido debajo de<br>Una superficie  |
| Suma de un número<br>Finito de términos<br>$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ | Suma de un número<br>infinito de términos<br>$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ |

# Ejemplos de Aplicaciones de la Integración

**Áreas Planas**.- Diseño y construcción de una presa de arco.

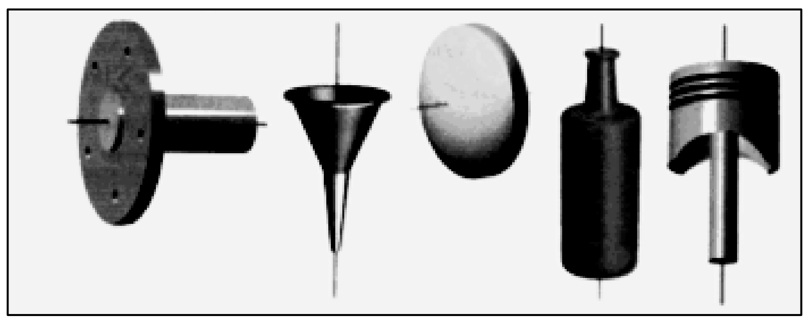





***La Presa Hoover**, uno de los diques de concreto más altos del mundo, se usó un tipo de construcción de arco por gravedad, para contener las aguas del Rio Bravo. Su sección transversal pudo modelarse por medio de la función:*
*$f(x) = 0.03x^2 + 7.1x + 350$ $\quad -70 \le x \le -16$ (una de sus tres secciones). La definición del área transversal de la presa posibilito entre otras cosas la determinación del volumen de concreto.*

## Volúmenes de Sólidos de Revolución

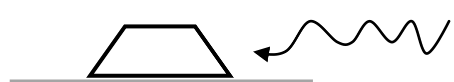
*Los sólidos de revolución se usan comúnmente en la ingeniería y en procesos industriales. Algunos ejemplos de aplicación son los ejes, embudos, discos, botellas y pistones.*



## Trabajo realizado por una fuerza variable

Si un objeto se mueve a lo largo de una línea recta mediante una fuerza ***F(x)*** continuamente variable, entonces el ***trabajo W*** hecho por la fuerza cuando el objeto se mueve de *x = a*, a *x = b*, es:

$$W = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i$$



$$W = \int_a^b F(x)\, dx$$

# LA INTEGRAL INDEFINIDA

## I. LA DIFERENCIAL

### I.1 Generalidades. Incremento De Una Función

Recuerda que uno de los objetivos fundamentales del cálculo infinitesimal es estudiar cómo varía una función cuando el valor de su variable independiente cambia.
Si ***x*** es la variable independiente de la función ***y = f(x)*** y su valor cambia desde $x_1$ hasta $x_2$, el aumento o disminución que experimenta dicha variable se llama incremento de ***x*** y se denota por ***Δx***. Así tenemos:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Cuando la variable independiente ***x*** en ***y = f(x)*** experimenta un incremento ***Δx***, generalmente la función ***y*** también experimenta un aumento o disminución de su valor, el cual se denomina incremento de la función y se denota por ***Δy***, es decir:

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

Como $\boldsymbol{\Delta x = x_2 - x_1}$, por lo tanto, $\boldsymbol{x_2 = \Delta x + x_1}$ Así tenemos que:

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$$

La palabra incremento se emplea para referirnos a la variación: aumento (+) como a una disminución (-).

**Ejemplo.-** Dada la función $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$, determina:

a) El incremento de ***x*** en el intervalo desde ***x = -2*** hasta ***x = 2***.

**Solución:**
$\Delta x = x_2 - x_1$, donde $x_2 = 2$ y $x_1 = -2$.
Por lo tanto: $\Delta x = 2-(-2)$ ; $\Delta x = 2+2$ ; $\Delta x = 4$

b) El incremento de la función ***y*** en el intervalo desde *x = -2* hasta ***x = 2***.

**Solución:**

$\boldsymbol{\Delta y = f(x_2) - f(x_1)}$, donde $\boldsymbol{f(x_2) = f(2)}$ y $\boldsymbol{f(x_1) = f(-2)}$

Determinemos a continuación ***f(2)*** y ***f(-2)***, y por último el incremento de la función (***Δy***).

$f(2) = 2(2)^2 - 5(2) + 3 = 8 - 10 + 3$

$f(2) = 1$

$f(-2) = 2(-2)^2 - 5(-2) + 3 = 2(4) + 10 + 3$

$f(-2) = 21$

De acuerdo con los valores obtenidos de ***f(2)*** y de ***f(-2)*** resulta:

$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$

$\Delta y = f(2) - f(-2)$ ; $\Delta y = 1 - 21$

$\Delta y = -20$

c) El incremento de la función ***y*** desde el intervalo ***x*** hasta $x + \Delta x$.

**Solución:**

Sea $x_2 = x + \Delta x$ y $x_1 = x$, entonces

$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

$\Delta y = [2(x + \Delta x)^2 - 5(x + \Delta x) + 3] - (2x^2 - 5x + 3)$

Si hacemos $h = \Delta x$, tenemos:

$\Delta y = [2(x + h)^2 - 5(x + h) + 3] - (2x^2 - 5x + 3)$

$\Delta y = [2(x^2 + 2xh + h^2) - 5x - 5h + 3] - 2x^2 + 5x - 3$

$\Delta y = [2x^2 + 4xh + 2h^2 - 5x - 5h + 3] - 2x^2 + 5x - 3$

$\Delta y = 2x^2 + 4xh + 2h^2 - 5x - 5h + 3 - 2x^2 + 5x - 3$

$\Delta y = 4xh + 2h^2 – 5h$, *o sea:*

$\Delta y = 4x\, \Delta x + 2\Delta x^2 - 5\Delta x$

d) El incremento de la función si $x = 4$ y $\Delta x = 2$. Solución:

De acuerdo con la expresión obtenida en el inciso anterior, tenemos:

$\Delta y = 4x\, \Delta x + 2\Delta X^2 - 5\Delta x$

Luego:

$\Delta y = 4(4)(2) + 2(2)^2 - 5(2)$ ; $\Delta y = 32 + 8 - 10$

$\Delta y = 30$

**Diferenciales**

Consideremos que la función $y = f(x)$ es derivable en el intervalo $a \leq x \leq b$. En un punto ***x*** de dicho intervalo, la derivada de ***y*** con respecto a ***x*** se define por la expresión:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Hasta ahora hemos utilizado la expresión $\frac{dy}{dx}$ como un símbolo para denotar la derivada de ***y*** con respecto a ***x***. Ahora definiremos el concepto de *diferencial* de manera que ***dx*** y ***dy*** tengan significados por separado. Esto nos permitirá considerar la expresión $\frac{dy}{dx}$ como la razón de ***dy*** y ***dx***, donde ***dx*** es la diferencial de la variable independiente ***x*** y ***dy*** es del diferencial de la variable dependiente ***y***.

Definición del diferencial ***dx***

Si $y = f(x)$ es una función derivable en ***x***, la diferencial de la variable independiente coincide con el incremento de x; o sea:

$$dx = \Delta x$$

Definición del diferencial ***dy***

Si ***y = f(x)*** es una función derivable en ***x*** y ***dx*** es el diferencial de ***x***, el diferencial ***dy*** que corresponde a la variable dependiente ***y*** se define como:

$$dy = f'(x)\,dx$$

**Se llama *diferencial* de una función al producto de la derivada por la diferencial de la variable independiente.**

De acuerdo con la expresión anterior, el valor del diferencial ***dy*** depende del valor de ***x*** y de ***dx***; o sea que ***dx*** es otra variable independiente de ***dy***.

Si en la expresión ***dy = f' (x) dx***, ***dx*** es diferente de cero y dividimos ambos miembros de la igualdad por ***dx*** obtenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)dx}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

***Ejemplos:***

1.- dadas las siguientes funciones derivar y determinar las diferenciales de ***y*** correspondientes.

| ***Función*** | ***Derivada*** | ***Diferencial*** |
|---|---|---|
| $y = x^3$ | $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ | $dy = 3x^2\,dx$ |
| $y = 4x^2$ | $\frac{dy}{dx} = 8x$ | $dy = 8x\,dx$ |
| $y = 3x$ | $\frac{dy}{dx} = 3$ | $dy = 3\,dx$ |

***Notación***. La diferencial de una función se representa por medio de la letra ***d*** colocada delante de la función. Así, si la función es $y = x^2$, la diferencial se expresa como:

*dy = 2x dx* ; y se lee: "***diferencial de y"***

2.- Determina la diferencial de la función *y = sen 4x*

**Solución:**

$\frac{dy}{dx}$ = *4 cos 4x*

*dy = 4 cos 4x dx*

3.- Determina la diferencial de la función *f(x)* = $\sqrt{5x-4}$.

**Solución:**

Haciendo *y = f(x)* y cambiando a notación de potencia

y = $(5x - 4)^{1/2}$ derivando, *aplicando* (10) $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(5x-4)^{-\frac{1}{2}}(5)$ *Bajando el binomio al denominador para que la potencia sea positiva y cambiando la notación a raíz:*

$\frac{dy}{dx} = \frac{5}{2\sqrt{5x-4}}$ Despejando *dx*

$dy = \frac{5}{2\sqrt{5x-4}}dx$

4.- Determina el incremento y la diferencial de la función ***f(x) = 2x²* - *x***, para ***x = 1*** y ***dx = 0.01*** .

**Solución:** se requiere calcular ***Δy*** *y* ***dy***

Primero calculamos el incremento de la función.

*De la expresión Δy = f(x + Δx) - f(x) sustituyendo valores*

*Δy = f(1+0.01) - f(1)*

*Δy = f(1.01) - f(1) ; sustituyendo en* ***f(x) = 2x² - x***

$\Delta y = [2(1.01)^2 - 1.01] - [2(1)^2 - 1]$

*Δy= 1.0302 – 1*

***Δy = 0.0302***

De la función *f(x) = 2x² - x obtenemos* ***dy*** *derivando:*

$\frac{dy}{dx}$ *= 4x-1 despejando* ***dx*** *al segundo miembro:*

*dy = (4x-1)dx*

*Sustituyendo* ***x = 1*** *y* ***dx = 0.01****, obtenemos:*

*dy* = $[4(1) - 1]0.01$ = 0.04 – 0. 1

***dy = 0.03***

Obsérvese que el valor del incremento de la función ***Δy*** *es aproximadamente el de la diferencial de la función* ***dy****.*

***Ejercicios (1)***.- Resuelve lo que se te pide:

1) Define los conceptos: a) ***incremento,*** b) ***diferencial.***

2) Dada la función $f(x) = x + 3x$, determina el incremento de la función cuando $x=2$ y $\Delta x = 0.01$.

3) Dada la función $f(x) = 3x^2 + 5$, determina:

a) el incremento de la función cuando $x=2$ y $\Delta x = 0.01$

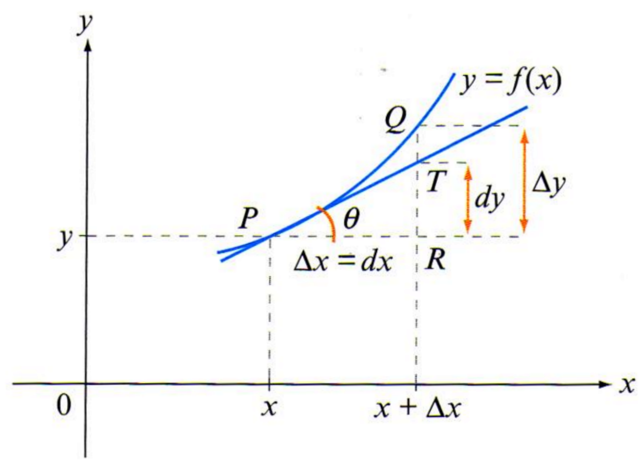
b) la diferencial de la función cuando $x=2$ y $\Delta x = 0.01$.

4) Aplicando la definición de diferencial, calcula las diferenciales de las funciones siguientes:

a) $y = 3x^4$ b) $y = sen\ 2x$ c) $y = 2x^3 - 3x^2 + 8$ d) $y = x$ e) $y = a^{2x}$

## I.2 Resolución De Problemas Por Aproximación

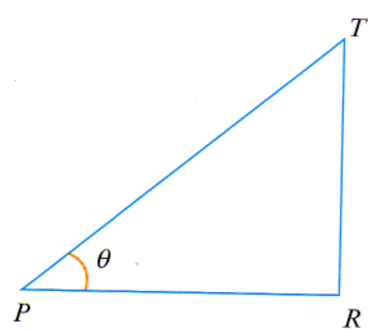
La siguiente figura corresponde a la función diferenciable ***y = f(x).***




Tomamos en la curva un punto arbitrario ***P(x,y)***, trazamos una tangente a la curva en ese punto y definimos como **θ** al ángulo que se forma por la tangente y la dirección positiva del eje ***x***.
Damos a la variable independiente un incremento Δx. Así, la función experimentará el incremento

***Δy = RQ***

De acuerdo con la figura, las coordenadas del punto ***Q*** son ***Q(x+Δx,y+Δy)***. En el triángulo **PRT** encontramos:




$$\tan\theta = \frac{\mathrm{RT}}{\mathrm{RP}}$$

$$\mathrm{RT} = \mathrm{RP}\tan\theta$$

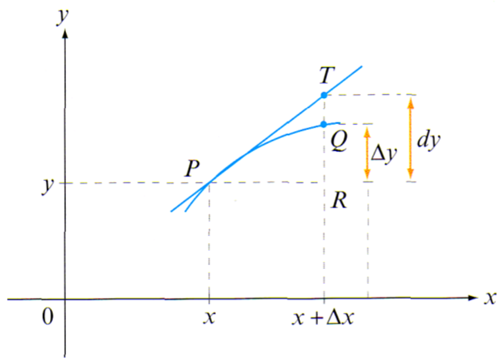
Como ***f'(x) =tan θ*** y ***RP = Δx***, tenemos que ***RT = f'(x) Δx***. La diferencial de la función es igual a la longitud del segmento de recta **RT**, o sea:

***dy = RT***

La igualdad anterior significa que la diferencial de la función ***f(x)***, correspondiente a los valores dados de ***x*** y de ***Δx***, es igual al incremento de la ordenada de la tangente a la curva ***y =f(x)*** en el punto dado ***x***.

En la figura también podemos observar que ***QT = Δy - dy***. Esto significa que la diferencial ***dy*** no es lo mismo que el incremento de la función; esto es, ***dy ≠ Δy***. Sin embargo, si ***Δx→ 0***, entonces ***dy ≈ Δy***.
Si ***Δx*** se aproxima a cero, tenemos que el valor del incremento de la función es aproximadamente igual al valor de la diferencial ***dy***.

Esto nos permite utilizar en los cálculos ordinarios la igualdad ***Δy = dy*** porque generalmente es más sencillo calcular ***f'(x) Δx*** que ***f'(x +Δx) - f(x)***.
Es importante aclarar que no siempre ***Δy*** es mayor que ***dy***. Analiza la siguiente figura y verás que aquí la gráfica de la función es cóncava hacia abajo.




***dy > Δx***

**Ejemplos:**

1. Determina el valor aproximado del incremento de la función ***f(x) = x² + 4x*** para ***x = 2*** y ***Δx = 0.001***.

**Solución:**

Considerando que Δy ≈ dy

*Derivando* ***f(x) = x² + 4x***

$\frac{dy}{dx}$ *= 2x + 4* *despejando dx*

*dy = (2x + 4)dx* *sustituyendo x= 2 y dx=Δx = 0.001*

dy = [2(2)+4] (0.001)= 8 (0.001)

dy = 0.008 como Δy ≈ dy

El incremento de la función es aproximadamente 0.008

2.- Supongamos que ante una determinada situación no contamos con calculadora y requerimos de una buena aproximación para determinar:

a) $\sqrt{4.6}$
b) $\sqrt{8.2}$

Solución:

**a)** Consideremos la gráfica de $y = \sqrt{x}$ dibujada en la figura siguiente. Si $x$ cambia de 4 (que tiene raíz exacta) a 4.6, $\sqrt{x}$ cambia de $\sqrt{4} = 2$ a (aproximadamente) $\sqrt{4} + dy$ . Ahora bien obteniendo la diferencial de ***dy***:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}x^{1/2} = \frac{1}{2}x^{-1/2}$$

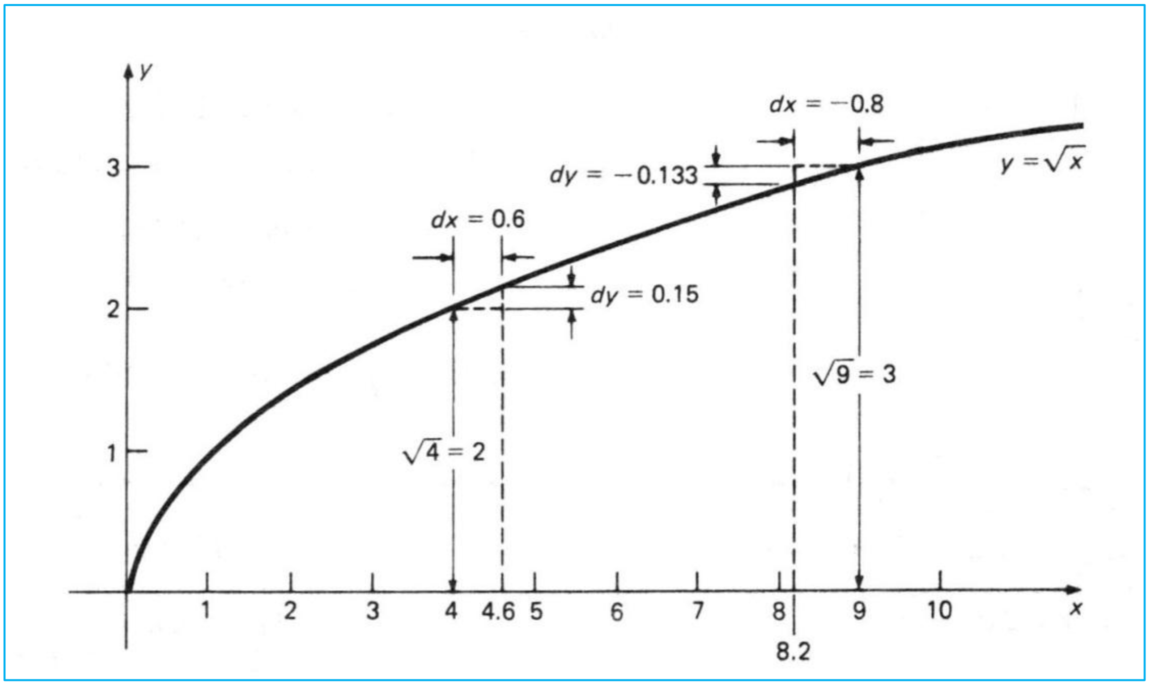
$$dy = \frac{1}{2}x^{-1/2}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

Lo cual para $x = 4 \quad y \quad dx = 0.6$ toma el valor

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{4}}(0.6) = \frac{0.6}{4} = 0.15$$

Por lo tanto,

$$\sqrt{4.6} \approx \sqrt{4} + dy = 2 + 0.15 \qquad \sqrt{4.6} \approx 2.15$$




**b)** En forma semejante $y = \sqrt{x}$ , para el radicando 8.2 hacemos para **x=9** (que tiene raíz exacta) y **dx = -0.8**

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{9}}\,(-0.8) = \frac{-0.8}{6} = -0.133$$

Y por lo tanto:

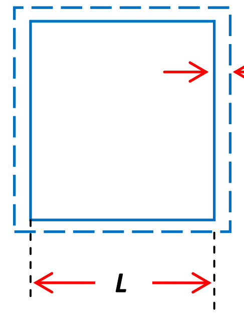
$$\sqrt{8.2} \approx \sqrt{9} + dy = 3 - 0.133 \qquad \sqrt{8.2} \approx 2.867$$

Nótese que tanto ***dx*** como ***dy*** son negativas en este caso.

Los valores aproximados 2.15 y 2.867 se pueden comparar con los valores verdaderos 2.1448 y 2.8636.

4. El lado de un cuadrado mide 20 cm. Calcula el incremento aproximado del área si su lado se incrementa 0.1 cm.

**Solución:**




$\Delta A \approx dA$

*El incremento del Área es aproximadamente*
*El diferencial del área.*

*Dónde: el área es una función del lado*

$A = f(L)$

$A = L^2$ *(formula del cuadrado)*

*Derivando respecto a* $\boldsymbol{L}$

$\frac{dA}{dL} = 2L$ *despejando dL*

$dA = 2L\,(dL)$ *sustituyendo los valores de* $\boldsymbol{L}$ *y* $\boldsymbol{dL}$

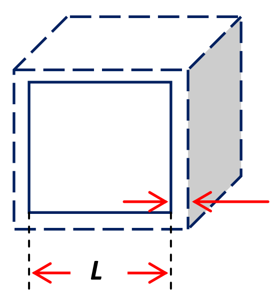
$dA = 2(20)(0.1)$

$dA = 4$ *como* $\Delta A \approx dA$

*El incremento aproximado del área del cuadrado es de 4* $cm^2$

5. Calcula el incremento aproximado del volumen de un cubo cuyos lados miden 3 cm y aumentan 0.002 cm cada uno.

**Solución:**




$\Delta V \approx dV$

*El incremento del volumen es aproximadamente*
*el diferencial del volumen*

*Dónde: el volumen es una función del lado*

$V = f(L)$

$V = L^3$ *derivando*

$\frac{dV}{dL} = 3L^2$ *despejando dL*

$dV = 3L^2\,dL$

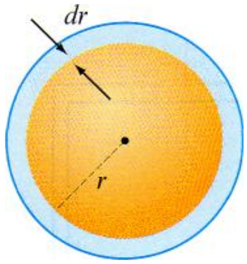
*Sustituyendo valores L = 3 cm y dL = 0.002 obtenemos:*

$dV = 3(3\ cm)^2\,(0.002\ cm) = 27\ cm^2\,(0.002\ cm)$

$dV = 0.054\ cm^3$ *como* $\Delta V \approx dV$

*El incremento aproximado de volumen es de* $0.054\ cm^3$

6. El volumen de un cascarón esférico se considera como un incremento del volumen de una esfera. Analiza la siguiente figura.




Calcula el volumen aproximado del cascarón esférico que tiene un radio interior de 8 cm y cuyo espesor es de 0.12 cm.

**Solución:**

$\Delta V \approx dV$ *el incremento de volumen es aproximadamente el diferencial de volumen*

*Dónde:*

$V = f(r)$ *el volumen es una función del radio*

$V = \frac{4\pi r^3}{3}$ *formula del volumen*

*Derivando respecto al radio*

$\frac{dV}{dr} = \frac{4}{3}\pi(3r^2)$ *reduciendo* $\frac{3}{3} = 1$ *y despejando dr*

$dV = 4\pi r^2 dr$

*Sustituyendo valores r = 8 cm y dr = 0.12 cm, obtenemos:*

$dV = 4\pi(8\ cm)^2(0.12\ cm) = 256\ \pi cm^2(0.12\ cm)$

$dV = 30.72\pi\ cm^3$ *multiplicando por* $\pi$:

$dV = 96.51\ cm^3$ *como* $\Delta V \approx dV$

El incremento de volumen es aproximadamente 96.51 $cm^3$

***Ejercicios (2)***.- Resuelve los siguientes ejercicios:

1) Mediante diferenciales calcula el valor aproximado de $\sqrt{25.2}$

2) Mediante diferenciales calcula el valor aproximado de $\sqrt[3]{64.2}$

3) Si el lado de un cuadrado mide 15 cm, calcula el incremento aproximado del área si su lado se incrementa 0.02 cm.

4) Si el lado de un cubo mide 4 cm, calcula el incremento aproximado del volumen si su lado aumenta 0.02 cm.

5) Calcula el volumen de un cascaron esférico si su radio interior mide 6 cm y su espesor es de 0.02 cm.

## 1.3 Antiderivada: La Integral Indefinida Como Operación Inversa De La Diferenciación

Por lo que sea visto referente al cálculo diferencial, se desprende que por el se investiga el límite de una razón (cociente) de dos magnitudes sumamente pequeñas, o sea que se determina la pendiente de una curva dada por su función.

El cálculo integral tiene como fin hallar la función original cuya derivada se conoce, desde este punto de vista la integral es la operación inversa a la derivada.

Supongamos que se nos pide encontrar una función ***F*** cuya derivada es $\boldsymbol{f}(x) = 3x^2$ . De lo que sabemos sobre derivadas, podemos decir que:

$$\mathbf{F}(x) = x^3 \quad \text{debido a que} \quad \frac{d}{dx}x^3 = 3x^2$$

La función ***F*** es una antiderivada de ***f*** ; nótese que se está indicando una antiderivada, no la antiderivada, esto porque funciones como:

$$F_1(x) = x^3, \quad F_2(x) = x^3 - 5, \quad F_3(x) = x^3 + 2, \quad F_4(x) = x^3 + \sqrt{\pi}$$

Son todas antiderivadas de $\mathbf{f}(x) = 3x^2$ . De hecho para cualquier constante ***C***, la función dada por $\mathbf{F}(x) = x^3 + C$ es una antiderivada de ***f***. Para los ejemplos anteriores la constante ***C*** tomaría los valores: *0, -5, 2 y* $\sqrt{\pi}$.

**Consideremos los ejemplos siguientes:**

| **Función Primitiva** | **Derivada** | **Diferencial** | **Antiderivada ó Integral Indefinida** |
|---|---|---|---|
| $F(x)$ | $\boldsymbol{f}(x)$ | $\boldsymbol{f}(x)\,dx$ | $\int \boldsymbol{f}(x)\,dx$ |
| $x^3$ | $3x^2$ | $3x^2\,dx$ | $x^3 + C$ |
| $\cos(5x)$ | $-5\,\mathrm{sen}(5x)$ | $-5\,\mathrm{sen}(5x)\,dx$ | $\cos(5x) + C$ |
| $e^{3x}$ | $3e^{3x}$ | $3e^{3x}\,dx$ | $e^{3x} + C$ |
| $Ln(X^2 - 1)$ | $\frac{2x}{x^2+1}$ | $\frac{2x}{x^2+1}\,dx$ | $Ln(X^2 - 1) + C$ |

En estos ejemplos tenemos en la primer columna a la función primitiva, en la segunda columna la derivada, en la tercer columna su diferencial y en la cuarta a la integral, donde volvemos a obtener la primitiva más la constante de integración ***C***.

**De lo anteriormente expuesto podemos concluir lo siguiente:**

1. La derivada y la integral son operaciones inversas,
2. El problema del cálculo integral consiste en que : "dada la diferencial de una expresión, hallar la función",
3. La diferencial de una función es igual al producto de su derivada por la diferencial de la variable independiente. Una ecuación diferencial en ***x*** y ***y*** es una igualdad que comprende a ***x, y*** y derivadas de ***y*** , cuando se resuelve una ecuación diferencial de la forma:

$\frac{dy}{dx} = f(X)$ Es útil escribirla en su forma diferencial equivalente, como:

$$dy = f(x)\,dx$$

4. *Notación Para Las Antiderivadas*.- La operación de hallar todas las soluciones de esta ecuación se llama antiderivación o **integración indefinida** y se indica con el signo de integral ideado por Leibniz: $\int$, que como ya se menciono es una letra **s** deformada y **expresa suma**. La solución general se denota por:

$$y = \int \underbrace{f(x)}_{\text{Integrando}} dx = F(x) + \underbrace{C}_{\text{Constante de integración}}$$

*Se lee como "**la integral de f con respecto a x**"*

**Prueba de la integración indefinida.** Para comprobar el resultado de una integral indefinida, se halla la derivada del resultado, esta derivada debe ser igual al integrando.

**Reglas para integrar las formas elementales de la integral indefinida.**

1) Para facilitar el trabajo en el principio del aprendizaje conviene echar mano del formulario de integrales inmediatas. Por separado a estos apuntes viene un ***formulario de matemáticas***, del cual es necesario tener una copia para consulta.

2) Para resolver una integral se compara la expresión diferencial dada con las fórmulas de integrales inmediatas; si se encuentra la formula inmediata, se aplica y se calcula la integral; si no existe una formula inmediata, se aplican diversos métodos algebraicos hasta reducirla a una de las formas registradas.

**Ejemplo**.- sea el caso de obtener la antiderivada de ***3x***

Formulas aplicadas

**Solución:** $\int 3x\, dx$

Aplicamos la fórmula 2, regla de la constante

(2) $\int audx = a\int udx$

$\int 3x\, dx = 3\int x\, dx$

Aplicamos la fórmula 4, regla de la potencia, con *n=1*

(4) $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$

$=3\frac{x^2}{2} + C$

Simplificando:

$= \frac{3}{2}x^2 + C$

La comprobación de la integral de una función diferencial es mediante derivación; en el ejemplo del inciso b, derivando el resultado, tenemos:

$\frac{d}{dx}\left[\frac{2}{3}x^{2/3} + C\right] = \frac{2}{3}\,\frac{3}{2}x^{1/2} = x^{1/2} = \sqrt{x}$ Igual que el integrando del ejemplo *b*

**Ejemplos.-** Integra y comprueba por derivación los resultados obtenidos.

**1.** $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$ Aplicando formula 4; con **u = x** y **n = 2**

(4) $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$

Derivando para comprobar: Sea *f(x)* $= \frac{x^3}{3} + C$

*f'(x)* $= \frac{1}{3}[3x^2] = \mathbf{x^2}$

(4) $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$

**2.** $\int \frac{1}{x^3}\, dx = \int x^{-3} dx$

Subiendo $x^3$ al numerador; ver leyes de los exponentes en formulario. Aplicando formula 4; con u = x y n = -3

$$= \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{x^{-2}}{-2} + C$$
$$= -\frac{1}{2x^2} + C$$

Bajando $x^{-2}$ al denominador para presentar como potencia positiva.

Derivando para comprobar: *Sea f(x) =* $-\frac{1}{2x^2} + C$ ; *f'(x) =* $-\frac{1}{2}[-2x^{-2-1}] = \boldsymbol{x^{-3}} = \frac{1}{x^3}$

**3.** $\int \sqrt[3]{x^2}\, dx = \int x^{2/3} dx$

Cambiando la notación radical a potencia; ver Radicales en formulario. Aplicando formula 4; con **u = x y n = 2/3.**

$$= \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C = \frac{x^{5/3}}{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + C$$

Para efectuar la suma de fracciones, considérese que: 1= 3/3

*Derivando para comprobar:* *Sea f(x) =* $\frac{3}{5} X^{5/3} + C$ ; *f'(x) =* $\frac{3}{5}\left[\frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1}\right] = x^{2/3} = \sqrt[3]{x^2}$

**4.** $\int (x^2 + 2x - \sqrt{x})\, dx$

(1) $\int (u + v - w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx$

(2) $\int audx = a\int udx$

*Aplicando las formulas 1 y 2, volvemos a escribir:*

$$\int x^2 + 2\int x\, dx - \int x^{1/2}\, dx$$

*Integrando y reduciendo:*

$$\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$$

*Derivando para comprobar:*

*Sea f(x) =* $\frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$

*f'(x) =* $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}\right) + \frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C\right)$

$$= \frac{1}{3}(3x^2) + 2x - \frac{2}{3}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}-1}\right] = \boldsymbol{x^2 + 2x - \sqrt{x}}$$

***Ejercicios (3)***.- Resuelve las siguientes integrales y comprueba por derivación los resultados

*1)* $\int x^3 dx$ *2)* $\int \frac{dx}{x^2}$ *3)* $\int \sqrt{x^2}\, dx$ *4)* $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

*5)* $\int (2x^2 + 3x + 5)dx$ *6)* $\int 2\, sen\, x\, dx$ *7)* $\int 3 \cos x\, dx$

*8)* $\int 3\sqrt[3]{x^2}\, dx$ *9)* $\int e^x dx$ *10)* $\int 2a^x$

## I.4 Interpretación Geométrica de la Constante *C* de Integración

Como la ecuación ***y = f(x) dx*** tiene muchas soluciones diferentes por una constante, esto significa que cualquier par de integrales de f son traslaciones verticales una de la otra. Traslación es una propiedad geométrica que mantiene la forma, el tamaño y la orientación de las figuras o gráficas.

En estas circunstancias la constante **C** es un parámetro, es decir una cantidad distinta de la variable a la cual se le pueden fijar distintos valores numéricos.

**Ejercicio.-** Integra la ecuación diferencial ***dy = 2x dx*** ; representando gráficamente la familia de funciones para valores de C = -4 , C = -1, C = 0 y C = 1 en el dominio [-4 , 4].

**Solución:** Integramos ambos miembros de la ecuación diferencial ***dy = 2x dx***

$\int dy = \int 2x\, dx$

*En el primer miembro se reducen la integral y la diferencial, quedando solo **y;** en el segundo miembro aplicamos las formulas 2 y 4*

(2) $\int audx = a\int udx$

(4) $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c$

y = ∫ 2x dx = 2 ∫ x dx = 2 $\dfrac{x^2}{2} + C$ ; ***y = x² + C***

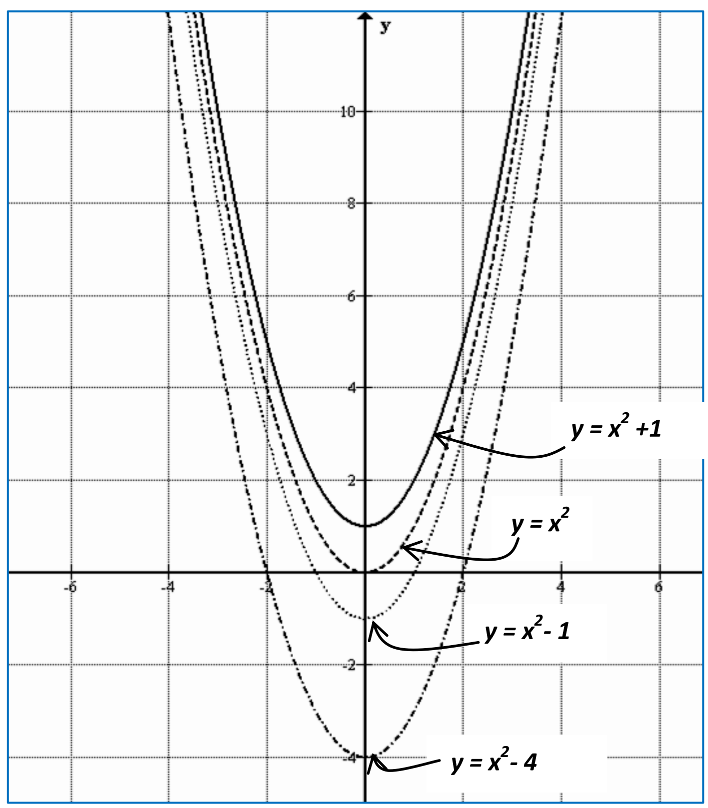
Tabulación para obtener pares ordenados, haciendo ***y = f(x)***
En el dominio [-4 , 4] para valores de C = -4 , C = -1, C = 0 y C = 1

| *Para C =-4* ***f(x)= x² - 4*** | |
|---|---|
| x | f(x) |
| -4 | 12 |
| -3 | 5 |
| -2 | 0 |
| -1 | -3 |
| 0 | -4 |
| 1 | -3 |
| 2 | 0 |
| 3 | 5 |
| 4 | 12 |

| *Para C =-1* ***f(x)= x²- 1*** | |
|---|---|
| x | f(x) |
| -4 | 15 |
| -3 | 8 |
| -2 | 3 |
| -1 | 0 |
| 0 | -1 |
| 1 | 0 |
| 2 | 3 |
| 3 | 8 |
| 4 | 15 |

| *Para C = 0* ***f(x)= x²*** | |
|---|---|
| x | f(x) |
| -4 | 16 |
| -3 | 9 |
| -2 | 4 |
| -1 | 1 |
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 4 |
| 3 | 9 |
| 4 | 16 |

| *Para C = 1* ***f(x)= x²+ 1*** | |
|---|---|
| x | f(x) |
| -4 | 17 |
| -3 | 10 |
| -2 | 5 |
| -1 | 2 |
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 5 |
| 3 | 10 |
| 4 | 17 |




*Las gráficas de las funciones resultantes son traslaciones verticales una de la otra y forman la familia de curvas **y = x² + C***

## Calculo de la constante C de integración

Conociendo la ecuación de una curva, ***y = f (x)***, la pendiente ***m*** de la tangente a ella en uno de sus puntos ***P(x, y)***, viene dada por ***m = f ' (x) = dy/dx*** ; recíprocamente por integración se puede hallar la familia de curvas ***y = f (x) + C***; para determinar una de ellas en particular es necesario asignar o determinar el valor de la constante ***C***. esto se consigue obligando a que la curva pase por el punto dado.

**Ejercicio**.- dada la ecuación diferencial ***dy = $x^5$ dx*** ; determina la integral, la constante **C** de integración y la ecuación de la curva que pasa por el punto **(-1, -1)**.

**Solución:** ***dy = $x^5$ dx***

*Integrando ambos miembros y aplicando la fórmula 4* *(4)* $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$

***∫ dy = ∫ $x^5$ dx***

$\boldsymbol{y = \frac{x^6}{6} + C}$ *Función Primitiva: Ecuación de la Familia de Curvas*

*Para calcular el valor de **C**, sustituimos (-1, -1): x=1, y=1 en la función primitiva.*

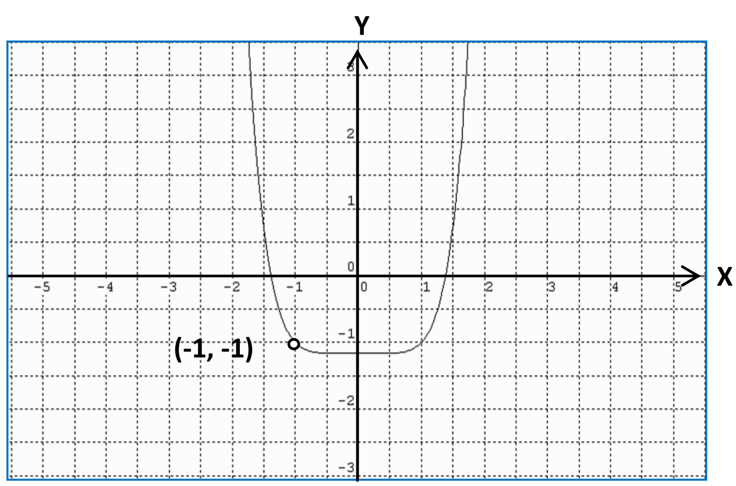
$(-1) = \frac{(-1)^{\,6}}{6} + C$ ; $-1 = \frac{1}{6} + C$ *Despejando C*

$C = -1 - \frac{1}{6}$ *Como:* $-1 = -\frac{6}{6}$ *:*

$C = -\frac{7}{6}$ *Sustituyendo este valor en la primitiva*

*En consecuencia, la función cuya curva pasa por el punto (-1, -1) es:*

$$y = \frac{x^6}{6} - \frac{7}{6}$$




*Grafica de la función*

***Ejercicios (4)***.- Resuelve los siguientes ejercicios:

1) Integra la ecuación diferencial ***dy = 2 dx*** y grafica el dominio [-3, 3]; para valores de C= -5, C= -2, C= 0 y C=3.

2) Integra la ecuación diferencial $dy=3x^2\,dx$ y grafica el dominio [-2, 2]; para valores de C= -3, C= 0 y C= 1.

3) Dada la ecuación diferencial ***$dy = (2x + 2)\,dx$*** determina la integral, la constante C de integración y la ecuación de la curva que pasa por el punto (3, 10).

# Unidad II: MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

En esta unidad estudiaremos los diferentes métodos de integración, desde la simplicidad de las integrales elementales o inmediatas, donde aplicamos directamente las fórmulas de integración, sin embargo cuando las integrales no son inmediatas, es necesario emplear algún otro de los métodos de integración.

**II.1 Integrales inmediatas**

**II.2 Integración por cambio de variable**

**II.3 Integración de diferenciales trigonométricas**

**II.4 Integración por sustitución trigonométrica**

**II.5 Integración por partes**

**II. 6 Integración de fracciones parciales**

## II.1 Integrales Inmediatas

Para resolver una integral inmediata, se compara la expresión diferencial dada con las fórmulas de integrales inmediatas; si se encuentra la formula inmediata, se aplica y se calcula la integral; si no existe una formula inmediata, se aplica algún otro de los diversos métodos hasta reducirla a una de las formas inmediatas.

Observa que el patrón general de integración es similar al de derivación:

| Integral Original | Vuelve a Escribir | Integra | Simplifica | Formulas Aplicadas |
|---|---|---|---|---|
| a) $\int \frac{1}{x^2}\, dx$ | $\int x^{-2}\, dx$ | $\frac{x^{-1}}{-1} + C$ | $-\frac{1}{x} + C$ | $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$ |
| b) $\int \sqrt{x}\, dx$ | $\int x^{1/2}\, dx$ | $\frac{x^{3/2}}{3/2} + C$ | $\frac{2}{3} x^{3/2} + C$ | $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$ |
| c) $\int 2 \operatorname{sen} X\, dx$ | $2 \int \operatorname{sen} x\, dx$ | $2(-\cos x) + C$ | $-2 \cos x + C$ | $\int \operatorname{sen} u\, du = -\cos u + c$ |

**Ejemplos.-** Resuelve las siguientes integrales.

Formulas empleadas

(4) $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$

1.- $\int x^6 dx =$

Aplicando la fórmula 4

$$\int x^6 dx = \frac{x^{6+1}}{6+1} + C = \frac{x^7}{7} + C$$

2.- $\int \sqrt{x}\, dx$

La podemos escribir como potencia

$\int x^{\frac{1}{2}} dx$

Aplicando fórmula 4

$$\int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$$

3.- $\int \frac{dx}{x^3}$

La podemos escribir como

$\int x^{-3} dx$

Aplicando fórmula 4

$$\int x^{-3} dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$$

4.- $\int ax^5 dx$

Utilizando fórmula 2 tenemos

(2) $\int audx = a\int udx$

$= a\int x^5 dx$

Utilizando fórmula 4

(4) $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c$

$a\int x^5 dx = a\dfrac{x^{5+1}}{5+1} + C = \dfrac{ax^6}{6} + C$

5.- $\int \left(2x^3 - 5x^2 - 3x + 4\right)dx$

Utilizando fórmulas 1 y 2 tenemos

$= 2\int x^3 dx - 5\int x^2 dx - 3\int x dx + 4\int dx$

(3) $\int dx = x + c$

Utilizando las fórmulas 4 y 3

$= 2\dfrac{x^{3+1}}{3+1} - 5\dfrac{x^{2+1}}{2+1} - \dfrac{3x^2}{2} + 4x + C$

Simplificando

$= \dfrac{x^4}{2} - \dfrac{5x^3}{3} - \dfrac{3}{2}x^2 + 4x + C$

(1) $\int (u + v - w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx$

6.- $\int \left(\dfrac{2a}{\sqrt{x}} - \dfrac{b}{x^2} + 3c^3\sqrt{x}\right)dx$

Utilizando las fórmulas 1 y 2 podemos escribir

$2a\int x^{-\frac{1}{2}} dx - b\int x^{-2} dx + 3c^3\int x^{\frac{1}{2}} dx$

Aplicando la formula 4

$= 2a\dfrac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - b\dfrac{x^{-2+1}}{-2+1} + 3c^3\dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$

$= \dfrac{2ax^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - b\dfrac{x^{-1}}{-1} + \dfrac{3c^3x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$

Simplificando queda

$= 4a\sqrt{x} + \dfrac{b}{x} + 2c^3\sqrt{x^3} + C$

7.- $\int \frac{x^2-4}{x^4}dx$

La podemos escribir como

$\int \frac{x^2}{x^4}dx - \int \frac{4}{x^4}dx$

Simplificando y utilizando fórmula 2

$\int x^{-2}dx - 4\int x^{-4}dx$ (2) $\int audx = a\int udx$

Aplicando fórmula 4

$= \frac{x^{-2+1}}{-2+1} - 4\frac{x^{-4+1}}{-4+1} + C$ (4) $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$

Simplificando

$= \frac{x^{-1}}{-1} - \frac{4x^{-3}}{-3} + C$

$= -\frac{1}{x} + \frac{4}{3x^3} + C$

8.- $\int \frac{3}{x}\, \mathrm{dx}$

Aplicando formula 2 y posteriormente la 5 (2) $\int audx = a\int udx$

$\int \frac{3}{x}\, \mathrm{dx} = 3\int \frac{\mathrm{dx}}{x}$ (5) $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$

= 3 *ln* $|x|$ + C

9.- $\int 3e^x\, \mathrm{dx}$

Aplicando formula 2 y posteriormente 7 (7) $\int e^u du = e^u + c$

$\int 3e^x\, \mathrm{dx} = 3\int e^x\, \mathrm{dx}$

= $3e^x + C$

10.- $\int \frac{\text{sen } x}{\cos x}\, \mathrm{dx}$ aplicamos la identidad trigonométrica $\frac{\text{sen } x}{\cos x} = \tan x$ (ver formulario)

$\int \frac{\text{sen } x}{\cos x}\, \mathrm{dx} = \int \tan x\, \mathrm{dx}$

Aplicando formula 14 (14) $\int \tan udu = \ln|\sec u| + c$

= ln $|\sec x|$ + C

***Ejercicios (5)***.- Resuelve las siguientes integrales indefinidas

1.- $\int \frac{dx}{x^3}$

2.- $\int (6e^x + 2)dx$

3.- $\int 3a^x\, dx$

4.- $\int ( 4x^3 + 3x^2 + x )\, dx$

5.- $\int \text{Cos}\, x\, dx$

6.- $\int \frac{2x\, dx}{x^2 + 3}$

7.- $\int \sqrt{x^5}\, dx$

8.- $\int \frac{4x^2 + 2x + 3}{x} \, dx$

9.- $\int Csc^2 x \, dx$

10).- $\int \frac{dx}{x^4}$

11).- $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

12).- $\int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx$

13).- $\int (x-3)^2 dx$ dx

14).- $\int 5$ Sen x dx

15).- $\int$ Sec x Tan x dx

## II.2 Integración Por Sustitución Algebraica O Cambio De Variable

Con frecuencia es necesario tomar a ***u*** como una nueva variable en sustitución de un alguna función de la variable "x"; con esto una diferencial determinada se transforma en otra que se integra fácilmente mediante una de las fórmulas de integración inmediata.

En ocasiones se sustituye la base, en otras el exponente; en otros casos se sustituye el denominador o el ángulo de una función trigonométrica. La sustitución o cambio de variable se hace según convenga.

**Ejemplos:**

**1.-** $\int (x^3+2)^2\, 3x^2\, dx$ ; *apoyados en la fórmula 4, hacemos:* (4) $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$

$u = x^3 + 2$ ; *derivando respecto x:* $\frac{du}{dx} = 3x^2$ ; *despejando dx ;* $du = 3x^2\, dx$ ; *entonces resulta:*

$\int u^2\, du = \frac{u^3}{3} + C$ ; *restituyendo u por su valor original:*

$= \frac{(x^3+2)^3}{3} + C$

**2.-** $\int \sqrt{1-3t}\; dt$ ; *se puede escribir como:* $\int (1-3t)^{1/2}\, dt$ ; *apoyados en la fórmula 4, hacemos:*

$u = 1 - 3t$ ; *derivando:* $\frac{du}{dt} = -3$ ; $dt = -\frac{du}{3}$ ; *haciendo el cambio de variable:*

$\int u^{1/2}\left(-\frac{du}{3}\right)$ ; *Aplicando la fórmula 2* (2) $\int a u dx = a \int u dx$

$-\frac{1}{3}\int u^{1/2}\, du$ ; *Aplicando la formula 4*

$-\frac{1}{3}\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = -\frac{2}{9}u^{3/2} + C = -\frac{2}{9}\sqrt{u^3} + C$ *Restituyendo u por su valor original.*

$= -\frac{2}{9}\sqrt{(1-3t)^3} + C$

3.- $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x - 5}}$

**Nota:** En el desarrollo de los siguientes ejercicios considérese que la variable *u* de las formulas es igual a la variable *v* empleada en el cambio de variable.

Podemos escribirla como

$\int \left(e^x - 5\right)^{-\frac{1}{2}} e^x dx$

(4) $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$

Apoyados en la fórmula 4

$v = e^x - 5 \quad ; \quad \frac{dv}{dx} = e^x \quad ; \quad dv = e^x dx$ (Cambio de Variable)

Sustituyendo estos valores en la integral

$\int v^{-\frac{1}{2}} dv$

Aplicando fórmula 4 y restituyendo a v su valor

$$= \frac{\left(e^x - 5\right)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \frac{\left(e^x - 5\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= 2\sqrt{e^x - 5} + C$$

4.- $\int \frac{3dx}{2+3x}$

Apoyados en la fórmula 5

$v = 2 + 3x \quad ; \quad \frac{dv}{dx} = 3 \quad ; \quad dv = 3dx$ (Cambio de Variable)

Sustituimos en la integral

(5) $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$

$= \int \frac{dv}{v}$

Aplicando fórmula 5 y restituyendo a v su valor

$= \ln|v| + C = \ln|2+3x| + C$

5.- $\int \frac{tdt}{3t^2+4}$

(5) $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$

Apoyados en la fórmula 5

$v = 3t^2 + 4 \quad ; \quad \frac{dv}{dt} = 6t \quad ; \quad dv = 6tdt \quad ; \quad \frac{dv}{6} = tdt$ (Cambio de Variable)

Sustituyendo en la integral

$= \int \frac{\frac{dv}{6}}{v}$

(2) $\int audx = a\int udx$

Aplicando fórmula 2

$= \frac{1}{6}\int \frac{dv}{v}$

Aplicando fórmula 5 y restituyendo a v su valor original

$= \frac{1}{6}\ln|v| + C = \frac{1}{6}\ln|3t^2+4| + C$

6.- $\int \frac{3dx}{e^x}$

Podemos escribirla como

$= 3\int e^{-x}dx$

(7) $\int e^u du = e^u + c$

Apoyados en la fórmula 7 tenemos

$v = -x \quad ; \quad \frac{dv}{dx} = -1 \quad ; \quad dv = -dx \quad ; \quad -dv = dx$

Sustituyendo en la integral

$= 3\int e^v(-dv)$

$= -3\int e^v dv$

Utilizando fórmula 7

$= -3e^{-x} + C$

$= -\frac{3}{e^x} + C$

7.- $\int \operatorname{sen}\left(\frac{2x}{3}\right)dx$

(8) $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + c$

Apoyados en la fórmula 8

$v = \frac{2x}{3}$ ; $\frac{dv}{dx} = \frac{2}{3}$ ; $dv = \frac{2}{3}dx$ ; $\frac{3}{2}dv = dx$

Sustituyendo en la integral

$= \int \operatorname{sen} v \bullet \frac{3}{2}dv$

$= \frac{3}{2}\int \operatorname{sen} v\,dv$

Utilizando la fórmula 8 y restituyendo a v su valor

$= \frac{3}{2}\left[-\cos\left(\frac{2x}{3}\right)\right] + C$

$= -\frac{3}{2}\cos\left(\frac{2x}{3}\right) + C$

8.- $\int \cos(b + ax)dx$

(9) $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + c$

Apoyados en la fórmula 9 tenemos

$v = b + ax$ ; $\frac{dv}{dx} = a$ ; $dv = a\,dx$ ; $\frac{dv}{a} = dx$

Sustituyendo en la integral

$= \int \cos v \bullet \frac{dv}{a}$

Aplicando fórmula 9 y restituyendo a v su valor

$= \frac{1}{a}\operatorname{sen}(b + ax) + C$

9.- $\int \csc^2(a-bx)dx$

Apoyados en la fórmula 11 tenemos

(11) $\int \csc^2 u du = -\cot u + c$

$v = a - bx \quad ; \quad \frac{dv}{dx} = -b \quad ; \quad dv = -bdx \quad ; \quad \frac{dv}{-b} = dx$

Sustituyendo en la integral

$= \int \csc^2 v \bullet \frac{dv}{-b}$

$= -\frac{1}{b}\int \csc^2 v dv$

Aplicando fórmula 11 y restituyendo a v su valor tenemos

$= -\frac{1}{b}\left[-\cot(v)\right] + C$

$= \frac{1}{b}\cot(a-bx) + C$

10.- $\int e^x \cot e^x dx$

Podemos escribirla como

$\int \cot(e^x)e^x dx$

(15) $\int \cot u du = \ln|senu| + c$

Apoyados en la fórmula 15 tenemos

$v = e^x \quad ; \quad \frac{dv}{dx} = e^x \quad ; \quad dv = e^x dx$

Sustituyendo en la integral

$= \int \cot v \bullet dv$

Aplicando fórmula 15 y restituyendo a v su valor

$= \ln|\operatorname{sen} v| + C$

$= \ln|\operatorname{sen} e^x| + C$

11.- $\int \sec^2(2ax)dx$

(11) $\int \sec^2 u du = \tan u + c$

Apoyados en la fórmula 10 tenemos

$v = 2ax \quad ; \quad \frac{dv}{dx} = 2a \quad ; \quad dv = 2adx \quad ; \quad \frac{dv}{2a} = dx$

Sustituyendo en la integral tenemos

$= \int \sec^2 v \bullet \frac{dv}{2a}$

$= \frac{1}{2a}\int \sec^2 v dv$

Aplicando fórmula 10 tenemos y restituyendo a v su valor

$= \frac{1}{2a} tan v + C$

$= \frac{1}{2a} tan(2ax) + C$

***Ejercicios (6)***.- Resuelve las siguientes integrales empleando el método de sustitución o cambio de variable.

1) $\int \frac{dx}{x+2}$
2) $\int 5e^{5x}\, dx$
3) $\int a^{2x}\, dx$
4) $\int 2\cos 2x\, dx$
5) $\int 2x(x^2+1)dx$
6) $\int \cos^2 2x\ \ sen2x\, dx$
7) $\int \frac{e^x dx}{e^x+5}$
8) $\int \sqrt{3x-2}\ dx$
9) $\int x^2 e^{x^3} dx$
10) $\int \frac{dx}{4^{2x}}$

## II.3 Integración De Diferenciales Trigonométricas

Para integrar una función trigonométrica con cierto grado de dificultad, no existe una regla general de solución, por lo que se recomienda la aplicación de los conocimientos sobre ***identidades trigonométricas*** (ver formulario) y aplicarlo en la sustitución de la función que se desea integrar. Este procedimiento aplicado a base de prueba y error permite adquirir practica y experiencia para transformar una función por otra u otras equivalentes y que se les pueda aplicar a estas las formulas básicas de integración.

**Ejemplos:** Integra las siguientes diferenciales trigonométricas.

1.- $\int \sec^2 \frac{x}{5} dx$

Resolviendo por sustitución, aplicando la fórmula 10.

(10) $\int \sec^2 u du = \tan u + c$

sea $u = \frac{x}{5}$ ; $\frac{du}{dx} = \frac{1}{5}$ ; $5du = dx$

$$= \int \sec^2 u \bullet 5du = 5\int \sec^2 u du = 5\tan \frac{x}{5} + C$$

2.- $\int \frac{\sec x}{\cos x} dx$

El coseno y la secante son funciones reciprocas: sec x = 1 / cos x ; 1 / $\cos^2$ x = $\sec^2$ x. Aplicando la fórmula 10.

$$= \int \frac{\frac{1}{\cos x}}{\cos x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

3.- $\int \text{sen}^2 x dx$

Aplicamos la identidad $\text{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

$$= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right) dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx$$

Resultan dos integrales, resolviendo la segunda por cambio de variable.

sea $u = 2x$ ; $\frac{du}{2} = dx$

(9) $\int \cos u du = \text{sen}\, u + c$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\int \cos u \frac{du}{2}$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \text{sen } 2x + C$$

4.- $\int \operatorname{sen}^3 x dx$

Haciendo $sen^3x = sen\ x\ sen^2x$; aplicando la identidad $sen^2x = 1- cos^2x$, y efectuando el producto, resultan dos integrales.

$$= \int \operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 x dx = \int \operatorname{sen} x\left(1-\cos^2 x\right)dx = \int \operatorname{sen} x dx - \int \cos^2 x \operatorname{sen} x dx$$

Resolviendo la segunda integral por cambio de variable.

sea $u = \cos x$ ; $\frac{du}{dx} = -\operatorname{sen} x(1)$ ; $du = -\operatorname{sen} x dx$ ; $-du = \operatorname{sen} x dx$

$$= \int \operatorname{sen} x dx - \int u^2(-du) = \int \operatorname{sen} x dx + \int u^2 du$$

Aplicando las formulas 8 y 4

$$= -\cos x + \frac{u^3}{3} + C$$

(8) $\int \operatorname{sen} u du = -\cos u + c$

(4) $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$

$$= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

5.- $\int \cos^5 x \operatorname{sen}^2 x dx$

Haciendo $cos^5x= (cos^2x)^2cos\ x$; aplicando $cos^2x = 1- sen^2x$ , desarrollando el cuadrado del binomio y posteriormente el producto.

$$= \int \operatorname{sen}^2 x\left(\cos^2 x\right)^2 \cos x dx = \int \operatorname{sen}^2 x\left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)^2 \cos x dx$$

$$= \int \operatorname{sen}^2 x\left(1-2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^4 x\right)\cos x dx$$

$$= \int \operatorname{sen}^2 x \cos x dx - 2\int \operatorname{sen}^4 x \cos x dx + \int \operatorname{sen}^6 x dx$$

sea $u = \operatorname{sen} x$ ; $\frac{du}{dx} = \cos x$ ; $du = \cos x dx$

Resolviendo por cambio de variable, apoyados en fórmula 4

$$= \int u^2 du - 2\int u^4 du + \int u^6 du$$

$$= \frac{u^3}{3} - 2\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + C$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} - \frac{2\operatorname{sen}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{sen}^7 x}{7} + C$$

***Ejercicios (7)***.- Resuelve las siguientes integrales trigonométricas.

1) $\int \csc^2 x\, dx$
2) $\int \sec x \tan x\, dx$
3) $\int \operatorname{sen}^3 6x \cos 6x\, dx$
4) $\int \cos^5 3x \operatorname{sen} 3x\, dx$
5) $\int (\operatorname{sen} 3x / \cos 3x)\, dx$

## II.4 Integración por sustitución trigonométrica

Las integrales en cuyo integrando aparecen radicales del tipo:

$$\sqrt{a^2 - v^2} \quad ó \quad \sqrt{v^2 - a^2}$$

O bien binomios del tipo:

$$\left(a^2 - v^2\right)^{\frac{n}{2}} \quad ó \quad \left(v^2 - a^2\right)^{\frac{n}{2}}$$

Que pueden ser expresados como raíces cuadradas del binomio o a la enésima potencia

$$\left(a^2 - v^2\right)^{\frac{n}{2}} = \sqrt{\left(a^2 - v^2\right)^n}$$

$$\left(v^2 - a^2\right)^{\frac{n}{2}} = \sqrt{\left(v^2 - a^2\right)^n}$$

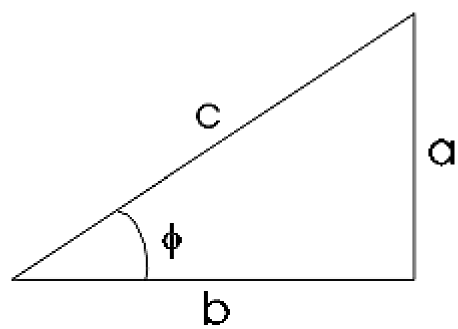
Se pueden resolver por medio de una sustitución trigonométrica. Recordando el teorema de Pitágoras y las propiedades del triángulo rectángulo.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = c\,\mathrm{sen}\phi = b\tan\phi$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = c\cos\phi$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = b\sec\phi$$

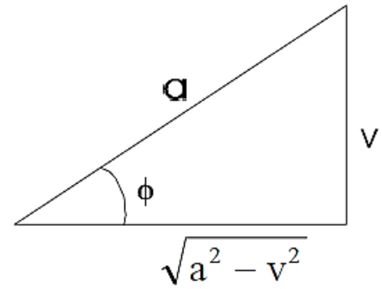



Podemos observar que lo radicales son semejantes a los que aparecen en dichas propiedades por lo tanto vamos hacer que estos radicales pertenezcan a un triángulo rectángulo.

1.- El radical $\sqrt{a^2 - v^2}$ por su forma representa a uno de los catetos del triángulo, la constante ***a*** para la hipotenusa y la variable ***v*** será el otro cateto entonces tendremos que:

$$v = a\,\mathrm{sen}\phi$$

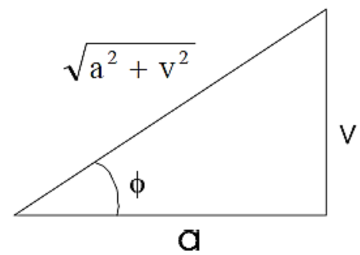
$$\sqrt{a^2 - v^2} = a\cos\phi$$




2.- El radical $\sqrt{a^2 + v^2}$ $o$ $\sqrt{v^2 + a^2}$ por su forma representa a la hipotenusa del triángulo rectángulo y la constante "***a***" será un cateto y la variable "***v***" será otro cateto con lo que tendremos que:

$$v = a\tan\phi$$

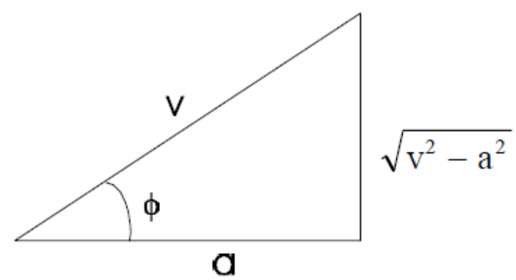
$$\sqrt{a^2 + v^2} = a\sec\phi$$




3.- El radical $\sqrt{v^2 - a^2}$ por su forma será uno de los catetos del triángulo rectángulo, la variable "***v***" será la hipotenusa y la constante "***a***" será el otro cateto con lo que tendremos:

$$v = a\sec\phi$$

$$\sqrt{v^2 - a^2} = a\tan\phi$$




Estas serán las sustituciones que haremos cuando en un integrando aparezca uno de estos radicales:

Debe observarse que en todos los casos tanto la variable como el radical son iguales al producto de la constante por la función trigonométrica correspondiente.

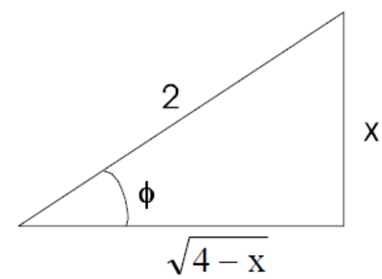
La sustitución de los demás elementos que aparezcan en el integrando debe hacerse condicionada a la sustitución hecha por la variable o por el radical.

Una vez hecha la sustitución de todos los elementos, la integral por resolver será trigonométrica y se resolverá por los métodos ya explicados.

Ya resuelta la integral trigonométrica, el resultado debe de transformarse a la variable original, para la cual utilizamos el mismo triángulo rectángulo.

**Ejemplos.-** Resuelve los siguientes ejercicios aplicando el método de sustitución trigonométrica.

1.- $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$




Sea $\operatorname{sen}\phi = \frac{x}{2}$ ; $x = 2\operatorname{sen}\phi$ ; $x^2 = 4\operatorname{sen}^2\phi$

$\cos\phi = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$ ; $\sqrt{4-x^2} = 2\cos\phi$

$\frac{dx}{d\phi} = 2\cos\phi$ ; $dx = 2\cos\phi d\phi$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{4\operatorname{sen}^2\phi 2\cos\phi d\phi}{2\cos\phi} = 4\int \operatorname{sen}^2\phi d\phi = 4\int \left(\frac{1-\cos 2\phi}{2}\right) d\phi$$

$$= 2\int d\phi - 2\int \cos 2\phi d\phi$$

Sea $u = 2\phi$ ; $\frac{du}{d\phi} = 2$ ; $\frac{du}{2} = d\phi$

$$= 2\int d\phi - 2\int \cos u \bullet \frac{du}{2} = 2\int d\phi - \int \cos u du = 2\phi - \operatorname{sen} u + C$$

$$= 2\phi - \operatorname{sen} 2\phi + C$$

$$\phi = \operatorname{arcsen}\frac{x}{2}$$

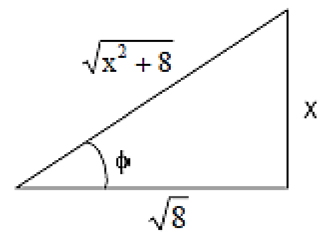
$y$ $\operatorname{sen} 2\phi = 2\operatorname{sen}\phi\cos\phi$ Identidad de ángulos dobles

$$= 2\frac{x}{2} \bullet \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} = \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}} = 2\operatorname{arcsen}\frac{x}{2} - \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + C$$

2.- $\int \frac{x^2 dx}{\left(x^2+8\right)^{\frac{3}{2}}}$

$$\int \frac{x^2 dx}{\left(\sqrt{x^2+8}\right)^3}$$




$$tan\phi = \frac{x}{\sqrt{8}} \quad ; \quad x = \sqrt{8}\, tan\phi \qquad x^2 = 8tan^2\phi$$

$$\frac{dx}{d\phi} = \sqrt{8}\sec^2\phi \quad ; \quad dx = \sqrt{8}\sec^2\phi d\phi$$

$$\sec\phi = \frac{\sqrt{x^2+8}}{\sqrt{8}} \quad ; \quad \sqrt{x^2+8} = \sqrt{8}\sec\phi$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\left(\sqrt{x^2+8}\right)^3} = \int \frac{8tan^2\phi\sqrt{8}\sec^2\phi d\phi}{\left(\sqrt{8}\sec\phi\right)^3} = \int \frac{8tan^2\sqrt{8}\sec^2\phi d\phi}{8\sqrt{8}\sec^3\phi}$$

$$= \int \frac{tan^2}{\sec\phi} d\phi = \int \left(\frac{\sec^2\phi - 1}{\sec\phi}\right) d\phi = \int \left(\frac{\sec^2\phi}{\sec\phi} - \frac{1}{\sec\phi}\right) d\phi$$

$$= \int \sec^2\phi d\phi - \int \cos\phi d\phi = \ln\left|\sec\phi + tan\phi\right| - \text{sen}\phi + C$$

$$\text{como} \quad \sec\phi = \frac{\sqrt{x^2+8}}{\sqrt{8}} \quad ; \quad tan\phi = \frac{x}{8} \quad ; \quad \text{sen}\phi = \frac{x}{\sqrt{x^2+8}}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\left(\sqrt{x^2+8}\right)^3} = \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+8}}{\sqrt{8}} + \frac{x}{\sqrt{8}}\right| - \frac{x}{\sqrt{x^2+8}} + C$$

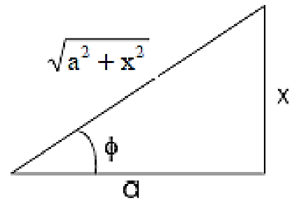
$$= \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+8}+x}{\sqrt{8}}\right| - \frac{x}{\sqrt{x^2+8}} + C$$

$$= \ln\left|x + \sqrt{x^2+8}\right| - \ln\left|\sqrt{8}\right| - \frac{x}{\sqrt{x^2+8}} + C$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{x^2+8}} + \ln\left|x + \sqrt{x^2+8}\right| - \ln\left|\sqrt{8}\right| + C$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{x^2+8}} + \ln\left|x + \sqrt{x^2+8}\right| + C$$

3. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}$




$$tan\phi=\frac{x}{a} \quad ; \quad x=a tan\phi \quad ; \quad x^2=a^2 tan^2\phi$$

$$\frac{dx}{d\phi}=a\sec^2\phi \quad ; \quad dx=a\sec^2\phi\, d\phi$$

$$\sec\phi=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a} \quad ; \quad \sqrt{a^2+x^2}=a\sec\phi$$

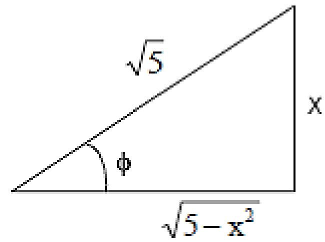
$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}=\int\frac{a\sec^2\phi\, d\phi}{a^2 tan^2\phi\, a\sec\phi}=\frac{1}{a^2}\int\frac{\sec\phi\, d\phi}{tan^2\phi}=\frac{1}{a^2}\int$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\cot\phi\bullet\frac{\frac{1}{\cos\phi}}{\frac{\text{sen}\phi}{\cos\phi}}d\phi=\frac{1}{a^2}\int\cot\phi\bullet\frac{1}{\text{sen}\phi}d\phi=\frac{1}{a^2}\int\cot\phi\csc\phi$$

$$=\frac{1}{a^2}(-\csc\phi)+C \qquad como \quad \csc\phi=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}$$

$$=-\frac{1}{a^2}\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}+C$$

4. $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{5-x^2}}$$




$$\operatorname{sen}\phi = \frac{x}{\sqrt{5}} \quad ; \quad x = \sqrt{5}\operatorname{sen}\phi \quad ; \quad x^2 = 5\operatorname{sen}^2\phi$$

$$\frac{dx}{d\phi} = \sqrt{5}\cos\phi \quad ; \quad dx = \sqrt{5}\cos\phi\, d\phi$$

$$\cos\phi = \frac{\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{5}} \quad ; \quad \sqrt{5-x^2} = \sqrt{5}\cos\phi$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{5-x^2}} = \int \frac{\sqrt{5}\cos\phi\, d\phi}{5\operatorname{sen}^2\phi\sqrt{5}\cos\phi} = \frac{1}{5}\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2\phi} d\phi = \frac{1}{5}\int \csc^2$$

$$= \frac{1}{5}(-\cot\phi) + C$$

$$\text{como} \quad \cot\phi = \frac{\sqrt{5-x^2}}{x}$$

$$= -\frac{1}{5}\frac{\sqrt{5-x^2}}{x} + C$$

***Ejercicios (8)***.- Resuelve las siguientes integrales aplicando el método de integración por sustitución trigonométrica.

1.- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$ 2.- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ 3.- $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$

4.- $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$ 5.- $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ 6.- $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$

## II.5 Integración Por Partes

Una de las técnicas más importantes de integración es la integración por partes, la cual es aplicada en situaciones como las descritas a continuación:

1.- integrales no inmediatas que presentan productos de funciones de distintas clases, como:

$\int x \text{ Cos } x\, dx$ ; $\int x e^x\, dx$ ; $\int e^x \text{ Sen } x\, dx$

2.- integrales logarítmicas, del tipo:

$\int \ln |x|\, dx$ ; $\int \log |5x|\, dx$

3.- las integrales con funciones trigonométricas inversas, por ejemplo:

$\int \text{Arc Tan } x\, dx$ ; $\int \text{Arc Cos } \varnothing\, d\varnothing$

Son integrales que pueden resolverse por el método de integración por partes, que a continuación se describe:

Siendo ***u*** y ***v*** funciones derivables de ***x***.

De la fórmula**:** $d\,(u \cdot v) = u\, dv + v\, du$ ; integrando:

$\cancel{\int d}\,(u \cdot v) = \int u\, dv + \int v\, du$ ; reduciendo en el primer miembro la integral y la diferencial:

$u \cdot v = \int u\, dv + \int v\, du$ ; despejando la primera integral:

$$\boxed{\int u\, dv = u\, v - \int v\, du}$$

*Formula de la integración por partes*

Esta fórmula se aplica cuando se tiene un producto de la forma $\int u\, dv$ ; cuyos factores ***u*** y ***dv*** son las partes de la integral, en donde ***dv*** debe ser integrable y siempre incluye a la ***dx***. La integral que se obtiene $\int v\, du$ en el segundo miembro de la formula, deberá ser más sencilla que la original, o un múltiplo de ella.

### Pasos para resolver una integral por partes:

1) Designar las partes de la integral (**u** y **dv**) tomando como **dv** la parte de aspecto más complicado, a condición de que se pueda integrar.
2) Calcular **du** (diferenciando **u**) y calcular **v** (integrando **dv**)
3) Aplicar la fórmula de integración por partes.

**Ejemplos.-** Resuelve los siguientes ejercicios aplicando el método de integración por partes.

*1.-* $\int x\, e^x\, dx$

*En este caso hacemos* $u = x$, *que es la parte más simple; y hacemos* $dv = e^x\, dx$ :

*Diferenciando* $u = x$ ; $\frac{du}{dx} = 1$ ; $du = dx$

*Integrando* $dv = e^x\, dx$

$\int v = \int e^x\, dx$ ; $v = \int e^x\, dx$ *integrando, aplicando la fórmula 7*

$v = e^x$ *(7)* $\int e^u du = e^u + c$

*Sustituyendo en la fórmula de integración por partes:*

$\int x\, e^x\, dx = x\, e^x - \int e^x\, dx$ *la integral resultante es más sencilla, integramos:*

$= x\, e^x - e^x + C$ *factorizando*

$= e^x ( x - 1 ) + C$

2.- $\int x^2 \ln x\, dx$

En este caso hacemos $u = \ln x$, que es la parte más simple para derivar; y hacemos $dv = x^2\, dx$

*Diferenciando* $u = \ln x$ ; $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$ ; $du = \frac{1}{x}\, dx$ *formula* $\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$

*Integrando* $dv = x^2\, dx$

$\int dv = \int x^2 dx$ *Reduciendo y aplicando la fórmula 4* *(4)* $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$

$v = \frac{x^3}{3}$

*Sustituyendo en la fórmula de integración por partes:* $\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$

$\int x^2 \ln x\, dx = \ln x \frac{x^3}{3} - \int \left(\frac{x^3}{3}\right)\left(\frac{1}{x}\right) dx$

$\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \ln\ x - \frac{1}{3} \int x^2 dx$ *Integrando*

$\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3} + C$ *Reduciendo*

$\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C$

*3.-* $\int x \operatorname{sen} x dx$

Sea $u = x$ ; $\frac{du}{dx} = 1$ ; $du = dx$

$dv = \operatorname{sen} x \quad ; \quad \int dv = \int \operatorname{sen} x \quad ; \quad v = -\cos x$

$\int x \operatorname{sen} x dx = x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx$

$= -x \cos x + \int \cos x dx$

$= -x \cos x + \operatorname{sen} x + C$

Realicemos el mismo ejercicio pero tomando al contrario las partes

$u = \operatorname{sen} x \quad ; \quad \frac{du}{dx} = \cos x \quad ; \quad du = \cos x dx$

$dv = x dx \quad ; \quad \int dv = \int x dx$

$v = \frac{x^2}{2}$

$\int x \operatorname{sen} x dx = \operatorname{sen} x \left( \frac{x^2}{2} \right) - \int \frac{x^2}{2} \cos x dx$

Se complica la integral. Lo anterior significa que es muy importante la manera en que son designadas las partes de la integral

4.- $\int x^2 \operatorname{sen} x dx$

$$\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$$

**Integración por partes**

sea $\quad u = x^2 \quad ; \quad \frac{du}{dx} = 2x \quad ; \quad du = 2x dx$

$dv = \operatorname{sen} x dx \quad ; \quad \int dv = \int \operatorname{sen} x dx$

$v = -\cos x$

$\int x^2 \operatorname{sen} x dx = x^2(-\cos x) - \int -\cos x 2x dx$

$= -x^2 \cos x + 2\int x \cos x dx$

Esta ultima integral no es inmediata, pero es más simple que la original, por lo que se le aplicara el método de integración por partes nuevamente.

$u = x \quad du = dx$

$dv = \cos x dx \quad ; \quad \int dv = \int \cos x dx$

$v = \operatorname{sen} x$

$\int x^2 \operatorname{sen} x dx = -x^2 \cos x + 2[x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x dx]$

$= -x^2 \cos x + 2[x \operatorname{sen} x - (-\cos x)] + C$

$= -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + C$

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

**Integración por partes**

5.- $\int \ln x dx$

Sea $u = \ln x$ ; $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$ ; $du = \frac{dx}{x}$

$dv = dx$ ; $v = \int dv = \int dx = x$

$\int \ln x dx = \ln x(x) - \int x \bullet \frac{dx}{x}$

$= x \ln x - \int dx$

$= x \ln x - x + C$

6.- $\int x a^x dx$

Sea $u = x$ ; $\frac{du}{dx} = 1$ ; $du = dx$

$dv = a^x dx$ ; $v = \int dv = \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$

$\int x a^x dx = x\frac{a^x}{\ln a} - \int \frac{a^x}{\ln a} \bullet dx$

$= \frac{a^x x}{\ln a} - \frac{1}{\ln a}\int a^x dx$

$= \frac{a^x x}{\ln a} - \frac{1}{\ln a}\left(\frac{a^x}{\ln a}\right) + C$

$= \frac{a^x}{\ln a}\left(x - \frac{1}{\ln a}\right) + C$

***Ejercicios (9)***.- Resuelve las siguientes integrales aplicando el método de integración por partes.

1) $\int X^3 \ln x\, dx$
2) $\int x \cos x\, dx$
3) $\int x^2 e^x\, dx$
4) $\int 2x\, a^x\, dx$
5) $\int 2 \ln x\, dx$

## II.6 Integración Por Fracciones Parciales

Integración de fracciones racionales.- Se llama fracción racional a una fracción tal como

$$\frac{x^3+3x}{x^2-2x-3}$$

cuyo numerador y denominador son polinomios

Si el grado del numerador es igual o superior al del denominador se transforma la fracción por medio de la división. Así

$$\frac{x^3+3x}{x^2-2x-3}=x+2+\frac{10x+6}{x^2-2x-3}$$

Una fracción cuyo numerador es de grado inferior al denominador puede transformarse en una suma de fracciones parciales, cuyos denominadores sean factores de primitivo denominador. Así

$$\frac{10x+6}{x^2-2x-3}=\frac{10x+6}{(x-3)(x+1)}=\frac{9}{x-3}+\frac{1}{x+1}$$

Muchas veces esas fracciones pueden hallarse por tanteos.

En caso contrario, se procede de la siguiente manera.

**Caso I**.- Los factores en que se puede descomponer el denominador son todos de primer grado y ninguno se repite.

Ejemplo $\int\frac{x^4+2x+6}{x^3+x^2-2x}dx$

Dividiendo el numerador por el denominador, obtenemos

$$\frac{x^4+2x+6}{x^3+x^2-2x}=x-1+\frac{3x^2+6}{x^3+x^2-2x}=x-1+\frac{3x^2+6}{x(x-1)(x+2)}$$

Supongamos

$$\frac{3x^2+6}{x(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

Los 2 miembros de esta ecuación son simplemente maneras distintas de escribir la misma función. Por consiguiente, si quitamos denominadores, los 2 miembros de la ecuación resultante

$$3x^2+6=A(x-1)(x+2)+B(x)(x+2)+C(x)(x-1)$$

$$3x^2+6=(A+B+C)x^2+(A+2B-C)x-2A$$

De esta identidad tenemos

A+B+C = 3 I

A+2B-C = 0 II

-2A = 6 III

Resolviendo el sistema de ecuaciones, obtenemos A = -3, B = 3, C = 3

Recíprocamente, si A, B y C tienen esos valores, se satisfacen idénticamente las ecuaciones anteriores. Por consiguiente

$$\int\frac{x^4+2x+6}{x^3+x^2-2x}dx=\int\left(x-1-\frac{3}{x}+\frac{3}{x-1}+\frac{3}{x+2}\right)dx$$

$$=\int xdx-\int dx-3\int\frac{dx}{x}+3\int\frac{dx}{x-1}+3\int\frac{dx}{x+2}$$

$$=\frac{x^2}{2}-x-3\ln x+3\ln(x-1)+3\ln(x+2)+C$$

$$=\frac{x^2}{2}-x+3\ln\left|\frac{(x-1)(x+2)}{x}\right|+C$$

**Caso II**.- Los factores en que se puede descomponer el denominador son todos de primer grado, pero algunos están repetidos.

Ejemplo $\int \frac{8x^3+7}{(x+1)(2x+1)^3}dx$

Supongamos

$$\frac{8x^3+7}{(x+1)(2x+1)^3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(2x+1)^3}+\frac{C}{(2x+1)^2}+\frac{D}{(2x+1)}$$

Correspondiendo al factor repetido $(2x+1)^3$, introducimos, pues, fracciones con $(2x+1)^3$ y todas las potencias inferiores como denominadores. Desarrollando y resolviendo en igual forma que en el caso I obtenemos

A = 1, B = 12, C = 6, D = 0

De aquí obtenemos

$$\int \frac{8x^3+7}{(x+1)(2x+1)^3}dx=\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{12}{(2x+1)^3}-\frac{6}{(2x+1)^2}\right)dx$$

$$=\ln|x+1|-\frac{3}{(2x+1)^2}+\frac{3}{2x+1}+C$$

**Caso III**.- El denominador contiene factores de segundo grado, pero ninguno repetido.

Ejemplo $\int \frac{4x^2+x+1}{x^3-1}dx$

Los factores del denominador son $(x-1)$ y $(x^2+x+1)$.

Supongamos

$$\frac{4x^2+x+1}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

Empleamos pues, con el denominador cuadrático $x^2+x+1$, un numerador que no es una sola constante, si no una función lineal Bx+C. Haciendo desaparecer las fracciones y resolviendo para A, B y C obtenemos

A=2, B=2 y C=1

Por consiguiente

$$\int \frac{4x^2+x+1}{x^3-1}dx = \int\left(\frac{2}{x-1}+\frac{2x+1}{x^2+x+1}\right)dx$$

$$= 2\ln|x-1| + \ln|x^2+x+1| + C$$

**Caso IV**.- El denominador contiene factores de segundo grado, están algunos repetidos

Ejemplo $\int \frac{x^3+1}{x\left(x^2+1\right)^2}dx$

Supongamos $\frac{x^3+1}{x\left(x^2+1\right)^2} = \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{Dx+E}{\left(x^2+1\right)}$

Correspondiendo al factor de segundo grado repetido $\left(x^2+1\right)^2$, introducimos fracciones parciales que tengan como denominador

$\left(x^2+1\right)^2$ y todas las potencias inferiores $x^2 + 1$, siendo todos los numeradores de primer grado. Haciendo desaparecer las fracciones y resolviendo para A, B, C, D y E obtenemos.

A=1, B=-1, C=-1, D=-1, E=1

De aquí

$$\int \frac{x^3+1}{x\left(x^2+1\right)^2}dx = \int\left(\frac{1}{x}-\frac{x+1}{\left(x^2+1\right)^2}-\frac{x-1}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{2}arctanx-\frac{x-1}{2\left(x^2+1\right)}+C$$

**Ejemplos.-** Resuelve los siguientes ejercicios aplicando el método de integración por fracciones parciales

1.- $\int \frac{dx}{x^2-4}$

Caso I.- $\frac{1}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$

$$(x-2)(x+2)\frac{1}{\left(x^2-4\right)} = \frac{A}{(x-2)}(x-2)(x+2) + \frac{B(x-2)(x+2)}{(x+2)}$$

$$1 = A(x+2) + B(x-2)$$

$$1 = Ax + 2A + Bx - 2B$$

$$1 = (A+B)x + 2A - 2B$$

De esta identidad tenemos que

A+B=0 I
2A-2B=1 II

Resolviendo este sistema de ecuaciones $A = \frac{1}{4}$ $y$ $B = -\frac{1}{4}$

$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \int\left(\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}\right)dx = \int\left(\frac{\frac{1}{4}}{x-2} + \frac{-\frac{1}{4}}{x+2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+2}$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|x-2\right| - \frac{1}{4}\left|x+2\right| + C$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$$

2.- $\int \frac{(x+1)dx}{x^3+x^2-6x}$

$$=\int \frac{(x+1)dx}{x(x^2+x-6)}=\int \frac{(x+1)dx}{x(x+3)(x-2)}$$

**Caso I**.- $\frac{x+1}{x^3+x^2-6x}=\frac{x+1}{x(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x-2}$

$$x(x+3)(x-2)\frac{(x+1)}{x^3+x^2-6x}=\frac{A(x)(x+3)(x-2)}{x}+\frac{B(x)(x+3)(x-2)}{x+3}+\frac{C(x)(x+3)(x-2)}{x-2}$$

$$x+1=A(x+3)(x-2)+B(x)(x-2)+C(x)(x+3)$$

$$x+1=(A+B+C)x^2+(A-2B+3C)x-6A$$

De donde

A+B+C=0 I

A-2B+3C=1 II

-6A=1 III

Resolviendo el sistema de ecuaciones tenemos

$A=-\frac{1}{6}$ , $B=-\frac{2}{15}$ , $C=\frac{3}{10}$

$$\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}dx=\int\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x-2}\right)dx=\int \frac{-\frac{1}{6}dx}{x}+\int \frac{\frac{-2}{15}dx}{x+3}+\int \frac{\frac{3}{10}dx}{x-2}$$

$$=-\frac{1}{6}\int \frac{dx}{x}-\frac{2}{15}\int \frac{dx}{x+3}+\frac{3}{10}\int \frac{dx}{x-2}$$

$$=-\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{2}{15}\ln|x+3|+\frac{3}{10}\ln|x-2|+C$$

3.- $\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}dx$

$$x^3-x^2-x+1=x^2(x-1)-(x-1)=(x^2-1)(x-1)=(x+1)(x-1)(x-1)=(x+1)(x-1)^2$$

Caso II.- $\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$

$$\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}=\frac{A(x+1)(x-1)^2}{x+1}+\frac{B(x+1)(x-1)^2}{(x-1)}+\frac{C(x+1)(x-1)^2}{(x-1)^2}$$

$$3x+5=A(x-1)^2+B(x+1)(x-1)+C(x+1)$$

$$3x+5=Ax^2-2Ax+A+Bx^2-B+Cx+C$$

$$3x+5=(A+B)x^2+(-2A+C)+A-B+C$$

De aquí obtenemos que

A+B=0 I
-2A+C=3 II
A-B+C=5 III

Resolviendo este sistema $A=\frac{1}{2}$ ; $B=-\frac{1}{2}$ ; $C=4$

$$\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}dx=\int\left(\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}\right)dx=\int \frac{\frac{1}{2}}{x+1}dx+\int \frac{-\frac{1}{2}dx}{x-1}+\int \frac{4}{(x-1)^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1}-\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1}+4\int \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1}-\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1}+4\int (x-1)^{-2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{4}{x-1}+C$$

4.- $\int \frac{dx}{x^2-9}$

**Caso I.-** $x^2-9=(x+3)(x-3)$

$$\frac{1}{x^2-9}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-3}$$

$$(x+3)(x-3)\frac{1}{x^2-9}=\frac{A(x+3)(x-3)}{x+3}+\frac{B(x+3)(x-3)}{x-3}$$

$$1=A(x-3)+B(x+3)$$

1=Ax-3A+Bx+3B

1=(A+B)x-3A+3B

De aquí obtenemos A+B=0 I
-3A+3B=1 II

Resolviendo el sistema obtenemos $A=-\frac{1}{6}$ ; $B=\frac{1}{6}$

$$\int\frac{dx}{x^2-9}=\int\left(\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+3}\right)dx=\int\frac{-\frac{1}{6}dx}{x+3}+\int\frac{\frac{1}{6}dx}{x-3}$$

$$=-\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x+3}+\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x-3}$$

$$=-\frac{1}{6}\ln|x+3|+\frac{1}{6}\ln|x-3|+C$$

5.- $\int \frac{dx}{x^2+7x+6}$

Caso I.- $x^2+7x+6=(x+6)(x+1)$

$$\frac{1}{x^2+7x+6}=\frac{A}{x+6}+\frac{B}{x+1}$$

$$(x+6)(x-1)\frac{1}{x^2+7x+6}=\frac{A(x+6)(x+1)}{(x+6)}+\frac{B(x+6)(x+1)}{(x+1)}$$

$$1=A(x+1)+B(x+6)$$
$$1=Ax+A+Bx+6B$$
$$1=(A+B)x+A+6B$$

De esta identidad obtenemos el sistema siguiente

A+B=0 I
A+6B=1 II

Resolviendo el sistema tenemos que $A=-\frac{1}{5}$ y $B=\frac{1}{5}$

$$\int \frac{dx}{x^2+7x+6}=\int\left(\frac{-\frac{1}{5}}{x+6}+\frac{\frac{1}{5}}{x+1}\right)dx=-\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x+6}+\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x+1}$$

$$=-\frac{1}{5}\ln|x+6|+\frac{1}{5}\ln|x+1|+C$$

$$=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x+1}{x+6}\right|+C$$

***Ejercicios (10)***.- Resuelve las siguientes integrales.

1.- $\int \frac{xdx}{(x+1)^2}$

2.- $\int \frac{dx}{x^3+1}dx$

3.- $\int \frac{(x^2+6)dx}{(x-1)^2(x-2)}$

4.- $\int \frac{(x^5+2)dx}{x^2-1}$

5.- $\int \frac{(3x+7)dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

6.- $\int \frac{(x^2+1)dx}{x^3+1}$

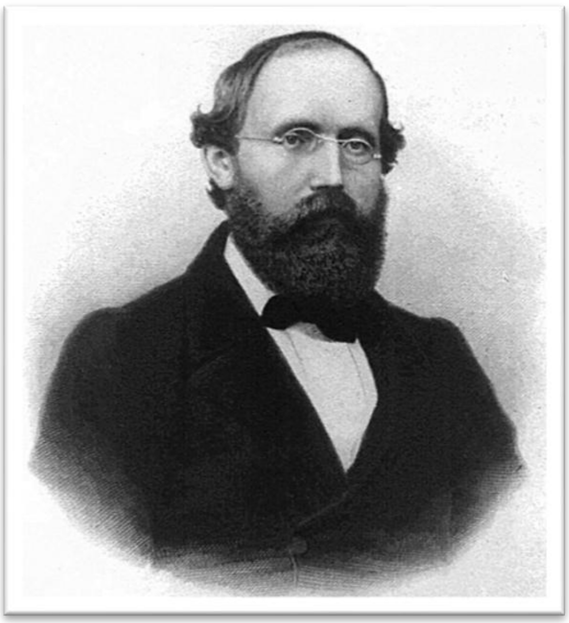
7.- $\int \frac{x^3dx}{x^2-2x-3}$

8.- $\int \frac{(x+5)dx}{x^2-x+6}$

9.- $\int \frac{(x^2-1)dx}{(x^2+1)(x-2)}$

# III. INTEGRAL DEFINIDA

## III.1 Suma de Riemann



***Georg Friedrich Bernhard Riemann***
*(1826 – 1866)*

*Matemático alemán que hizo sus trabajos más famosos en áreas de la geometría, ecuaciones diferenciales y teoría de los números. Sus descubrimientos fueron la base para la teoría general de la relatividad de Einstein.*

## La Notación Sigma

La letra del alfabeto griego sigma (∑ mayúscula ó **σ** minúscula) es la decimoctava letra del alfabeto griego y es muy empleada en matemáticas. De forma particular nos vamos a referir a sigma mayúscula **∑** la cual denota o expresa sumatoria.

Los números cuya suma se indica en una notación sigma pueden ser naturales, complejos u objetos matemáticos más complicados. Si la suma tiene un número infinito de términos, se conoce como serie infinita.

Por ejemplo, para obtener la suma de los términos de la sucesión:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots$$

Ésta se puede representar como la suma de los $n$ términos con la notación de sumatoria o **notación sigma ∑** , que corresponde a nuestra S de **"suma"**. La notación sigma se aplica de la siguiente manera:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots + a_n$$

La ecuación anterior se lee la "suma de $a_k$ desde $k=1$ hasta $k=n$." La letra k es el **índice de la suma** o **variable de la sumatoria** y se reemplaza k en la ecuación después de sigma, por los enteros $1,2,3,4,5,\ldots\ldots n$, y se suma lo que resulte del lado derecho de la ecuación.

### Ejemplos

1. Calcula la siguiente sumatoria:

$$\sum_{k=1}^{5} k^2$$

Solución: k toma valores desde 1 hasta 5.

$$\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$

2. Calcula la sumatoria:

$$\sum_{j=3}^{5} \frac{1}{j}$$

Solución: en este caso la variable de la sumatoria ***j*** toma valores desde 3 hasta 5

$$\sum_{j=3}^{5} \frac{1}{j} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{20+15+12}{(3)(4)(5)} = \frac{47}{60}$$

3. Determina la suma:

$$\sum_{i=5}^{10} i$$

Solución: La variable de la sumatoria ***i*** toma valores desde 5 hasta 10.

$$\sum_{i=5}^{10} i = 5+6+7+8+9+10 = 45$$

4. Determina la suma:

$$\sum_{h=1}^{6} 2$$

Solución: La variable de la sumatoria ***h*** toma valores desde 1 hasta 6, no aparece en los términos a sumar y 2 es constante, por lo que el intervalo de ***h*** es el número de sumandos.

$$\sum_{h=1}^{6} 2+2+2+2+2+2 = 12$$

5. Expresa la siguiente suma en notación sigma:

$$5^3+6^3+7^3+8^3+9^3+10^3$$

Solución: Para este caso seleccionamos arbitrariamente a ***j*** como variable de la sumatoria.

$$5^3+6^3+7^3+8^3+9^3+10^3 = \sum_{j=5}^{10} j^3$$

6. Expresa la siguiente suma en notación sigma:

$$\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\ldots+\sqrt{77}$$

Solución:

$$\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\ldots+\sqrt{77} = \sum_{k=3}^{77} \sqrt{k}$$

## El problema de determinar el área de una región limitada por una curva y un eje cartesiano

**Ejemplo.-** Sea encontrar el área de la región acotada por la gráfica de la función $f(x) = 4 - x^2$, el eje $x$ y las rectas verticales x=1, x=2, como se muestra en la figura(*a*).

**Solución**: la función *f(x)* es continua en el intervalo [1, 2], subdividimos el intervalo en ***n*** subintervalos iguales, por ejemplo en 3 intervalos y formamos rectángulos verticales de los cuales podemos determinar su área, multiplicando la base por su altura, la suma de los rectángulos será aproximada al área requerida, figura (b).

***La Suma de Riemann***. La aproximación mejora si el número de subdivisiones aumenta; Riemann se dio cuenta de ello y género un número de intervalos infinito, dando por resultado un número infinito de rectángulos de base infinitamente pequeña, es decir que su base tiende a cero, figura (c)

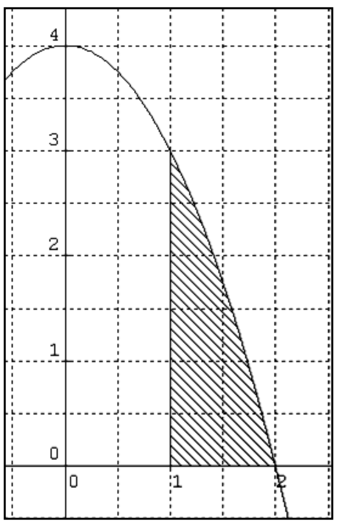



Figura (*a*)

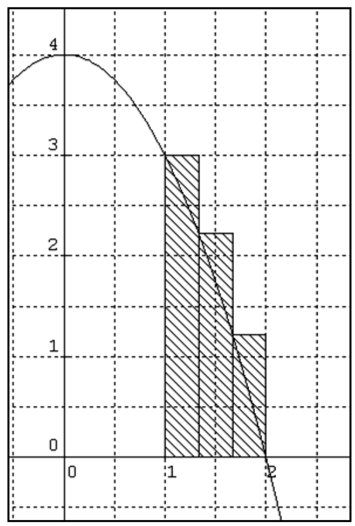



Figura (*b*)

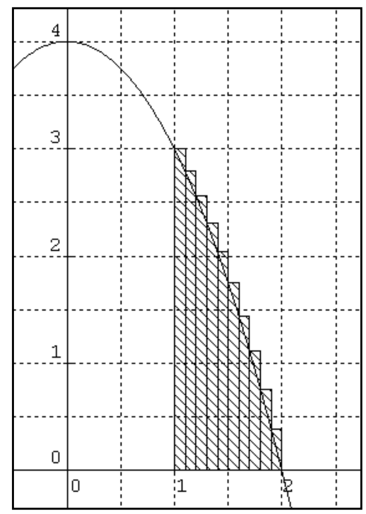
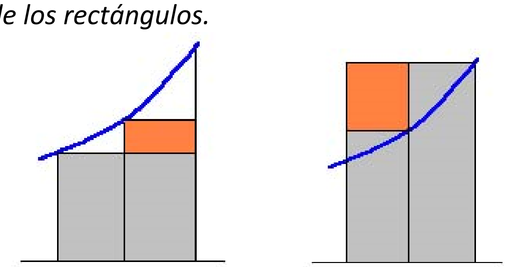


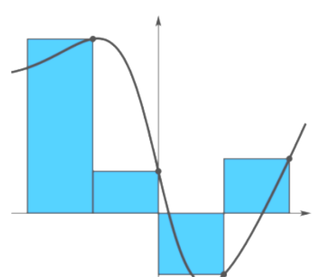

Figura (*c*)

***Las sumas de Riemann***

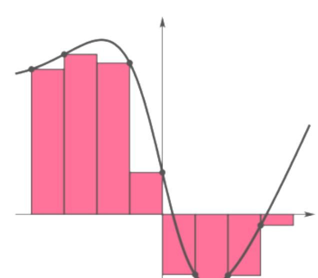
*Las variaciones en las áreas bajo la curva (o sobre la curva) disminuyen a medida que se da más refinamiento en la partición del intervalo en estudio, porque cada rectángulo se divide en otros y esto hace que cuando la base de los rectángulos tiende a cero y el número de rectángulos es infinito; el área bajo la curva corresponda con la suma de las áreas de los rectángulos.*



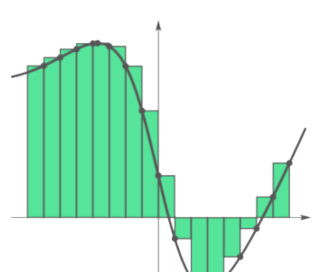
*Obsérvese lo anterior en la sucesión de las figuras (1,2,3,4) de la derecha.*



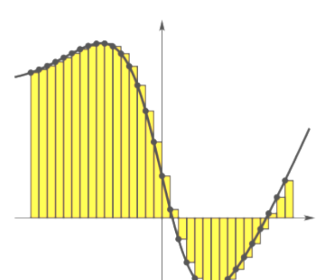
(1)



(2)



(3)



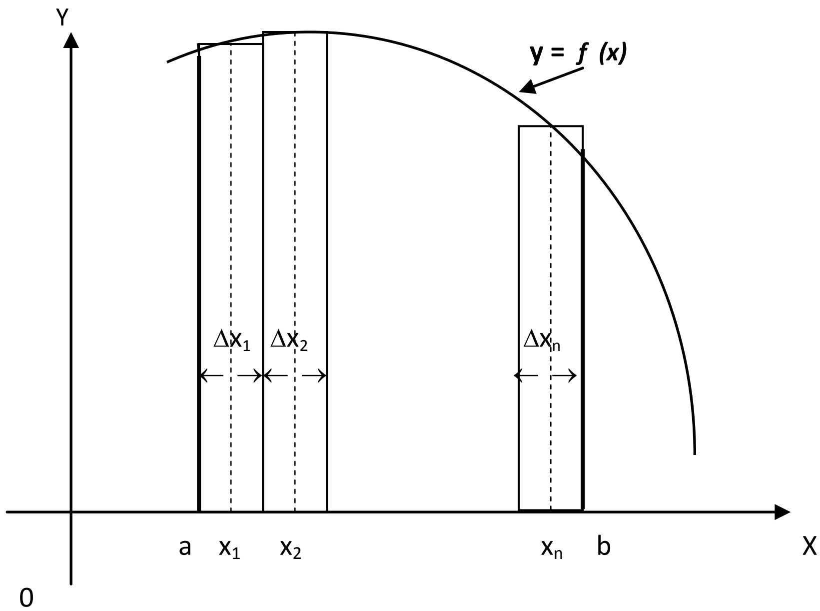
(4)

## Representación Geométrica De Una Integral

Sea **f (x)** una función continua en el intervalo desde **x = a** hasta **x = b**. Dividiendo este intervalo en **n** sub-intervalos cuyas longitudes son $\Delta x_1$ , $\Delta x_2$ , . . . $\Delta x_n$ , elegimos los puntos medios de cada sub-intervalo, de abscisas $x_1$, $x_2$,. . . $x_n$, respectivamente.

Considérese la suma de los ***n*** rectángulos, siendo $f(x_n)$ la altura y $\Delta x_n$ la base de cada rectángulo:

$$f(x_1)\,\Delta x_1 + f(x_2)\,\Delta x_2 + \ldots\ldots + f(x_n)\,\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i$$




*El valor límite de esta suma cuando **n** tiende a infinito y cada sub-intervalo tiende a cero, es igual a la integral definida:*

$$\int_a^b f(x)dx$$

Esta integral también se puede expresar como:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i$$

***La Integral es el límite de una suma***

La interpretación del área como resultado de la integral definida, depende de la naturaleza de las magnitudes que representan la abscisa y la ordenada. si ***x*** y ***y*** se consideran coordenadas de un punto fijo, entonces la integral, es realmente un área.

Supóngase que la ordenada representa la velocidad de un móvil y la abscisa represente el tiempo cuando el móvil tiene esa velocidad; entonces la gráfica es la curva de la velocidad y el área bajo ella entre dos ordenadas, representa la distancia recorrida en el intervalo de tiempo correspondiente. Es decir que el número que representa el área o valor de la integral, es igual al número que representa la distancia.

Así mismo una integral definida que signifique volumen, superficie, masa, fuerza, resistencia, trabajo, utilidad, etc, puede ser representada geométricamente por un área.

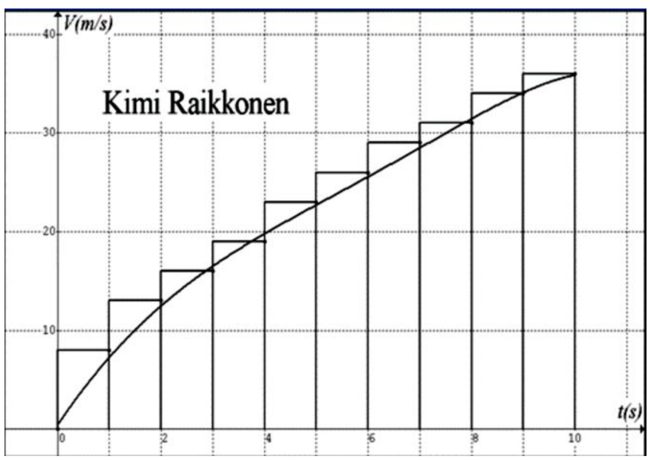
## El Área Bajo La Curva

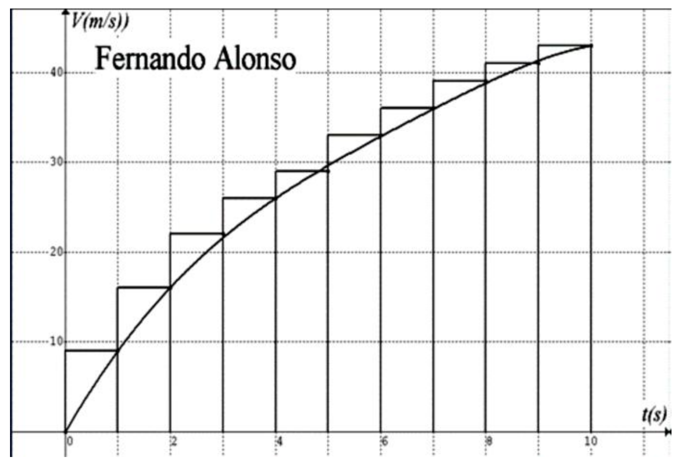
En el **Gran Premio de España** en 2008, los autos de Fernando Alonso y el de Kimi Raikkonen están uno al lado del otro al inicio de la carrera, la velocidad de Raikkonen se denota con ($V_R$) y la velocidad de Alonso por ($V_A$). En la tabla siguiente se indican las velocidades en km/h de cada vehículo en los primeros 10 segundos de la competencia.

| t(s) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $V_R$(km/h) | 0 | 30 | 48 | 57 | 69 | 81 | 93 | 104 | 111 | 121 | 129 |
| $V_A$(km/h) | 0 | 33 | 58 | 78 | 92 | 106 | 120 | 129 | 140 | 147 | 153 |

**¿Con cuántos metros aventaja el auto de Alonso al de Raikkonen a los 10 segundos?**

Solución: Transformando la velocidad en m/s y graficando; siendo la velocidad una función del tiempo, para los dos competidores tenemos:




De la fórmula de la velocidad: $V = \frac{d}{t}$ ; despejamos a la distancia ***d:*** $d = V\,t$

Obsérvese que la fórmula para hallar la distancia se puede establecer también como la fórmula para hallar ***el área de un rectángulo***: ***A = b * h*** para nuestro caso ***A = t * V*** *el área representa la distancia.*

Obteniendo el área de cada rectángulo en cada intervalo de tiempo de 1 seg. con rectángulos por extremos derechos e izquierdos

| Distancia con rectángulos por extremos derechos | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| t(s) | 0-1 | 1-2 | 2-3 | 3-4 | 4-5 | 5-6 | 6-7 | 7-8 | 8-9 | 9-10 | suma |
| $d_R$ | 8 | 13 | 16 | 19 | 23 | 26 | 29 | 31 | 34 | 36 | 234 |
| $d_A$ | 9 | 16 | 22 | 26 | 29 | 33 | 36 | 39 | 41 | 43 | 293 |

La ventaja de Alonso sobre Raikkonen utilizando los rectángulos por los extremos derechos es de 293-234 = 59m

| Distancia con rectángulos por extremos izquierdos | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| t(s) | 0-1 | 1-2 | 2-3 | 3-4 | 4-5 | 5-6 | 6-7 | 7-8 | 8-9 | 9-10 | suma |
| $d_R$ | 0 | 8 | 13 | 16 | 19 | 23 | 26 | 29 | 31 | 34 | 198 |
| $d_A$ | 0 | 9 | 16 | 22 | 26 | 29 | 33 | 36 | 39 | 41 | 251 |

La ventaja de Alonso sobre Raikkonen utilizando los rectángulos por los extremos izquierdos es de 251-198 = 53m

Por lo tanto la ventaja de Alonso sobre Raikkonen está en el intervalo: **53 < d < 59**

## III.2 Teorema Fundamental Del Cálculo

Hasta ahora se han presentado las dos ramas principales del cálculo: *calculo diferencial*, introducido con el problema de la recta tangente, y calculo integral introducido con el problema del área. Ambos problemas parecen no estar relacionados, pero, existe una conexión muy cercana. Isaac Newton y Gottfried Leibniz descubrieron esta conexión y expresaron versiones de este concepto, sin embargo fue Reimann quien dio la definición.

*Una integral definida es la integración entre límites, entre un límite superior "b" y un límite inferior "a". Entonces la integral tiene un valor definido que depende de la función f (x) y del intervalo* [*a, b*] *escogido.*

La simbología de una integral definida es:

$\int_a^b y\,dx$ *ó* $\int_a^b f(x)\,dx$ *y se lee: "la integral de **a** hasta **b**"*

Se calcula por:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

**Teorema fundamental del cálculo**: *la integral definida de una función continúa en un intervalo dado, es igual a la diferencia de los valores de una de sus primitivas para los extremos de un intervalo.*

De lo anterior se concluye que una integral definida: $\int_a^b f\,(x)\,dx$ ***Es un número***,

Mientras que una integral indefinida: $\int f\,(x)\,dx$ ***Es una función***.

***Ejercicios (11)***.- Responde correctamente las siguientes preguntas:

1) Indica los objetivos del cálculo integral

2) Explica con tus palabras, Cuáles son las ventajas de emplear el cálculo integral.

3) ¿Que representa el símbolo de integración?

4) ¿Qué son las sumas de Riemann?

5) ¿Qué representa el resultado de una integral definida?

6) ¿Qué representa el resultado de una integral indefinida?

7) ¿Cuál es el teorema fundamental del cálculo?

## III.3 La integral definida

La *integral definida* es la integración entre límites, entre un *límite superior* “b” y un *límite inferior* “a”. Entonces la integral tiene un valor definido que depende de la función *f ( x)* y del intervalo [a , b] escogido.

La nomenclatura de la integral definida es:

$\int_a^b y\,dx$ *ó* $\int_a^b f(x)dx$ *“La integral de **a** hasta **b**”*

*Que se calcula por*:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

**Pasos para resolver una integral definida**

1) se resuelve la integral como indefinida, haciendo caso omiso de la constante de integración.
2) el resultado anterior se encierra dentro de un paréntesis rectangular afectado por los límites de integración.
3) en la primitiva encontrada, se sustituye en lugar de la variable el límite superior y se le resta lo que resulta de sustituir el límite inferior.

**Ejemplo**.- determina el área limitada por la parábola $y = x^2$ con el eje de las “x” y las ordenadas x = 2 , x = 4. Elaborando su gráfica.

**Solución:**

Los límites de integración son: *a = 2 , b = 4*

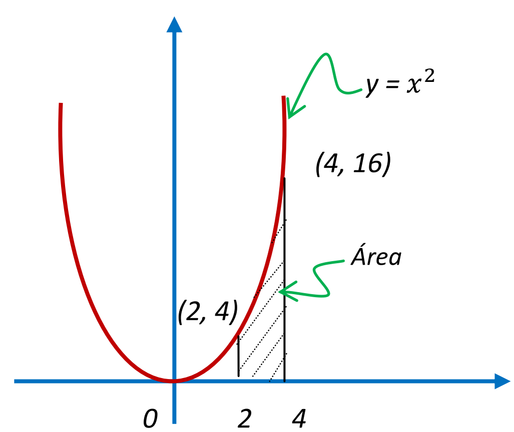
*ÁREA* = $\int_2^4 x^2\,dx$ *resolviendo la integral como indefinida*

$$ÁREA = \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = \frac{56}{3}$$

*ÁREA* = $18.67\,u^2$

*Pares ordenados (para elaborar la gráfica)*

| x | $y = x^2$ |
|---|---|
| -4 | 16 |
| -2 | 4 |
| 0 | 0 |
| 2 | 4 |
| 4 | 16 |



**Ejemplos.-** Resuelve las siguientes Integrales Definidas

1.- $\int_1^3 x^2 dx$

$$\int_1^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big]_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{26}{3}$$

2.- $\int_{-1}^0 (x-2)dx$

$$\int_{-1}^0 (x-2)dx = \int_{-1}^0 xdx - 2\int_{-1}^0 dx = \frac{x^2}{2} - 2x\Big]_{-1}^0 = \left[\frac{0^2}{2} - 2(0)\right] - \left[\frac{(-1)^2}{2} - 2(-1)\right] = -\frac{5}{2}$$

3.- $\int_0^1 2xdx$

$$\int_0^1 2xdx = 2\int_0^1 xdx = \frac{2x^2}{2}\Big]_0^1 = x^2\Big]_0^1 = 1^2 - 0^2 = 1$$

4.- $\int_{-1}^1 (t^2 - 2)dt$

$$\int_{-1}^1 (t^2 - 2)dt = \int_{-1}^1 t^2 dt - 2\int_{-1}^1 dt = \frac{t^3}{3} - 2t\Big]_{-1}^1 = \left[\frac{1^3}{3} - 2(1)\right] - \left[\frac{(-1)^3}{3} - 2(-1)\right] = -\frac{10}{3}$$

5.- $\int_0^1 (2t-1)^2 dt$

$$\int_0^1 (2t-1)^2 dt = \int_0^1 (4t^2 - 4t + 1)dt$$

$$= 4\int_0^1 t^2 dt - 4\int_0^1 tdt + \int_0^1 dt$$

$$= \frac{4t^3}{3} - \frac{4t^2}{2} + t\Big]_0^1$$

$$= \left[\frac{4(1)^3}{3} - \frac{4(1)^2}{2} + 1\right] - \left[\frac{4(0)^3}{3} - \frac{4(0)^2}{2} + 0\right] = \left[\frac{4}{3} - \frac{6}{3} + \frac{3}{3}\right] - [0] = \frac{1}{3}$$

6.- $\int_1^2\left(\frac{3}{x^2}-1\right)dx = 3\int_1^2 x^{-2}dx - \int_1^2 dx$

$= \frac{3x^{-1}}{-1} - x\Big]_1^2$

$= -\frac{3}{x} - x\Big]_1^2$

$= \left[-\frac{3}{2}-2\right] - \left[-\frac{3}{1}-1\right] = -\frac{7}{2}+4 = \frac{1}{2}$

7.- $\int_{-1}^1\left(\sqrt[3]{t}-2\right)dt$

$= \int_{-1}^1 t^{\frac{1}{3}}dt - 2\int_{-1}^1 dt = \frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - 2t\Bigg]_{-1}^1$

$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{t^4} - 2t\Big]_{-1}^1$

$= \left[\frac{3}{4}\sqrt[3]{1^4} - 2(1)\right] - \left[\frac{3}{4}\sqrt[3]{(-1)^4} - 2(-1)\right] = -\frac{5}{4} - \frac{11}{4} = -4$

***Ejercicios (12)***.- Resuelve las siguientes integrales definidas:

1) $\int_{-3}^{3} \frac{x}{2}\, dx$

2) $\int_{0}^{a} (a^2x - x^3)dx$

3) $\int_{1}^{e} \frac{dx}{x}$

4) $\int_{0}^{2} (3x+2)dx$

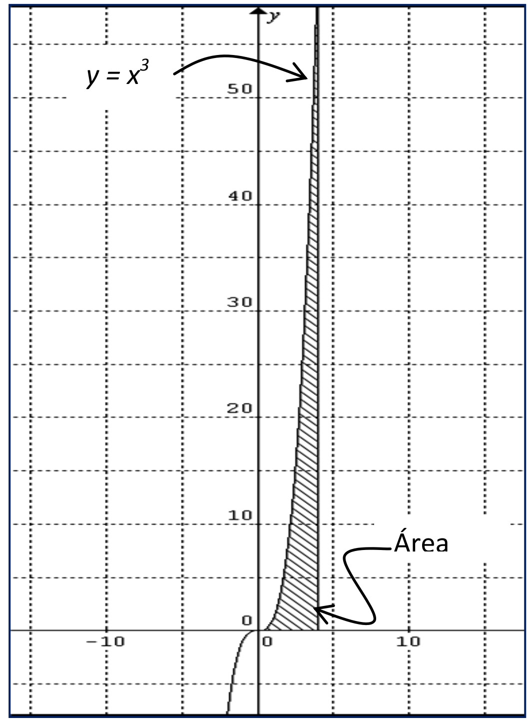
5) $\int_{2}^{5} 4x\, dx$

## III.4 Aplicaciones geométricas de la integral definida

### III.4.1 Áreas bajo la curva

**Hallar el área de la superficie limitada por la curva dada, el eje de las "x" y los límites indicados.**

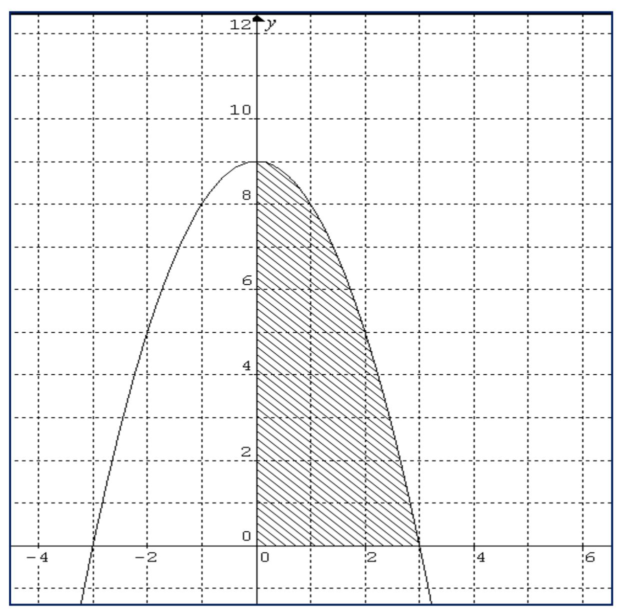
***1.- Curva: $y = x^3$ ; limites: $x = 0$ , $x = 4$***




**Solución:**

$$A = \int_0^4 x^3\ dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^4 = \frac{4^4}{4} - \frac{0^4}{4} = 4^3 = 64\,u^3$$

***2.- Curva: $y = 9 - x^2$ ; $x = 0$ ; $x = 3$***




**Solución:**

$$A = \int_0^3 (9 - x^2)dx = 9\int_0^3 dx - \int_0^3 x^2\,dx$$

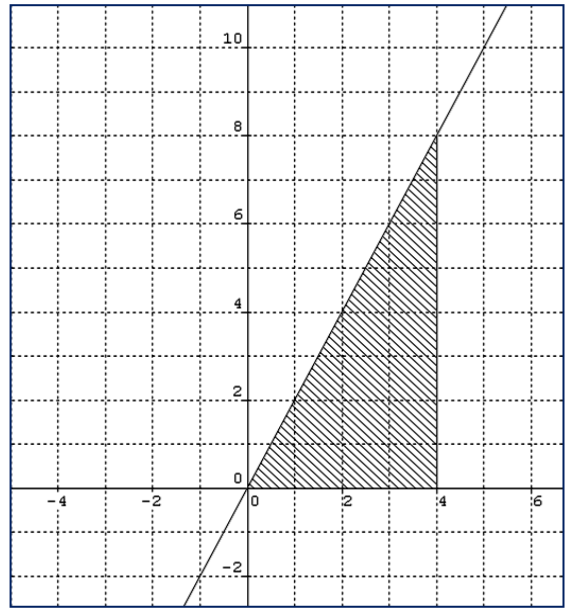
$$A = \left[9x - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \left[9(3) - \frac{3^3}{3}\right] - \left[9(0) - \frac{0^3}{3}\right]$$

$$A = [27 - 9] - [0] = 18\,u^3$$

***3.- Calcula por integración el área del triángulo limitada por la recta y= 2x , las rectas x = 0, x = 4. Verifica el resultado obtenido, determinando el área por medio de la fórmula del triángulo.***

**Solución.**

*Los límites de integración son x = 0 , x = 4*
*El área se determina por:*



$$A = \int_0^4 2x\,dx = 2\int_0^4 x\,dx$$

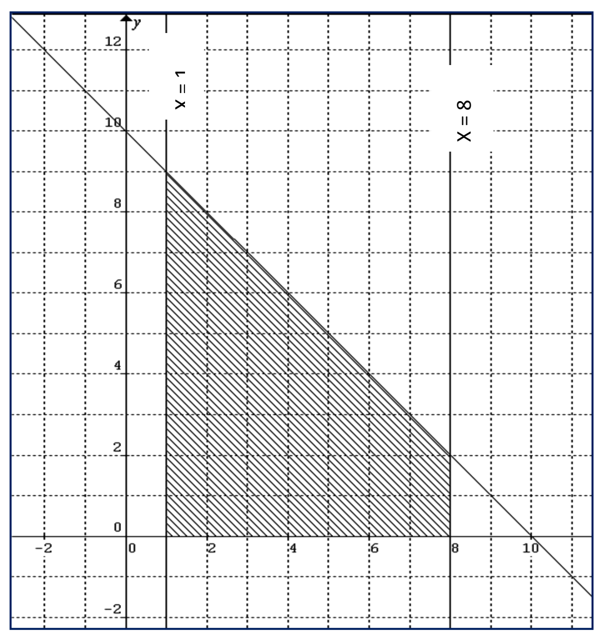
$$A = 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = [X^2]_0^4 = [4^2 - 0^2] = 16\,u^2$$

*Comprobación:*

$$A = \frac{b \times h}{2} = \frac{4 \times 8}{2} = \frac{32}{2} = 16\,u^2$$

*4.- Determina por integración el área del trapecio limitado por la recta* ***x + y = 10*** *, el eje de las* ***X*** *y las rectas* ***x = 1, x = 8****. Verifica el resultado obteniendo el área con la fórmula del trapecio.*

**Solución.**
*x + y = 10  Ecuación implícita, transformamos a forma explícita en función de* ***x***
*y = 10 – x  Integramos, los límites de integración son x=1, x=8*




$$A = \int_1^8 (10 - x)dx = 10\int_1^8 dx - \int_1^8 x\,dx$$

$$A = \left[10x - \frac{x^2}{2}\right]_1^8 = \left[10(8) - \frac{(8)^2}{2}\right] - \left[10(1) - \frac{(1)^2}{2}\right]$$

$$A = [80 - 32] - \left[10 - \frac{1}{2}\right]$$

$$A = 48 - \frac{19}{2} = \frac{96}{2} - \frac{19}{2} = \frac{77}{2}\,u^2$$

*Comprobación:*

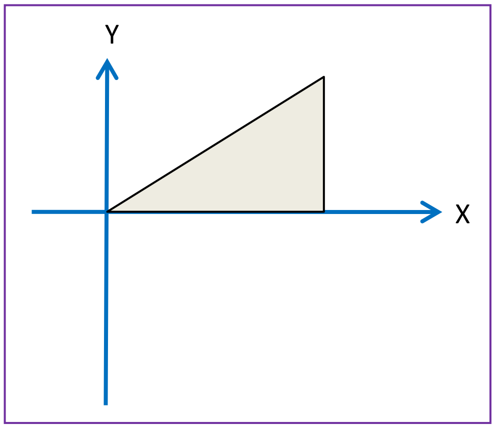
$$A = \frac{B + b}{2}h$$

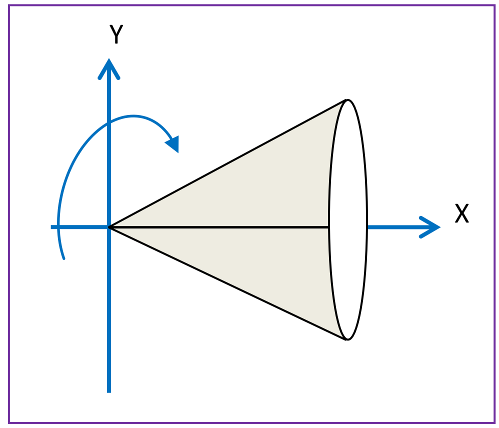
$$A = \left(\frac{9 + 2}{2}\right)7 = \left(\frac{11}{2}\right)7 = \frac{77}{2}\,u^2$$

## III.4.2 Volúmenes de sólidos de revolución

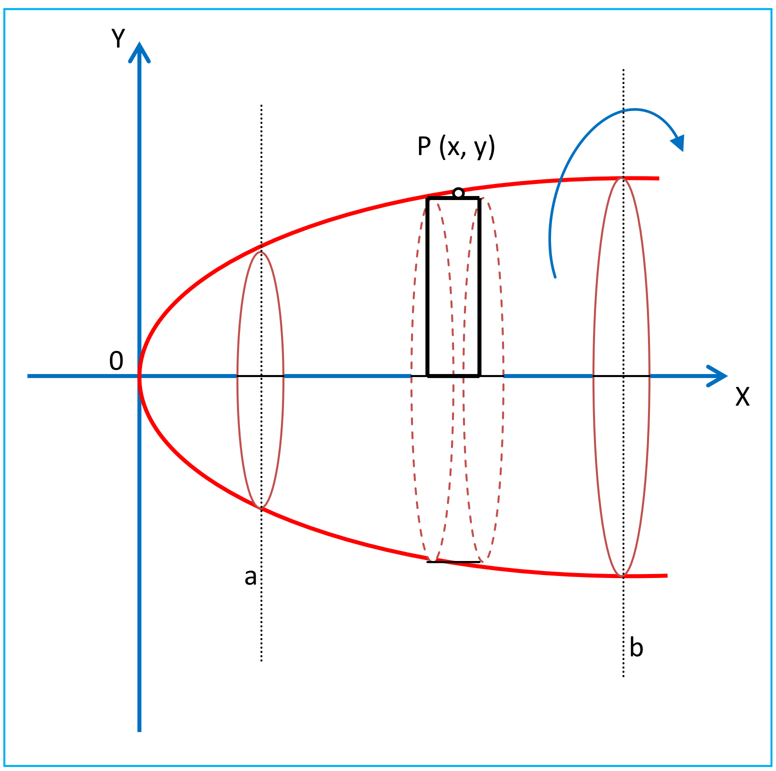
Se llama *solido de revolución* a aquel que se engendra o genera al hacer girar alrededor de un eje una superficie plana.

Por ejemplo, si se hace girar un triángulo rectángulo alrededor del eje x, este triángulo en su giro va a generar un cono circular.



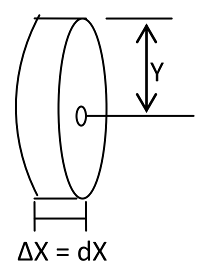




Para obtener el volumen de un sólido de revolución, pondremos de ejemplo la siguiente parábola:




Consideremos que la superficie limitada por la gráfica de la función ***f(x)***, el eje ***X*** y las rectas **x=a, x=b**, gira alrededor del eje **X**.

Si dividimos esta superficie en "n" rectángulos, cada uno de ellos engendrara un cilindro recto.




De la fórmula de la circunferencia:

$$A = \pi r^2$$

$$V = \pi r^2 h$$

Para nuestro caso:

$$A = \pi y^2$$

$$V = \pi y^2 \Delta X$$

El diferencial (incremento) de volumen es igual al área de la base por su altura.

$$\mathbf{dV = \pi Y^2 dx}$$

El límite de la suma de los volúmenes de los "***n***" cilindros engendrados cuando ***n*** $\rightarrow \infty$ es el volumen del solido de revolución.

Cuando el eje de revolución es "X":

$$\text{Volumen} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi y^2 \Delta X = \int_a^b \pi y^2\, dx$$

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

Cuando el eje de revolución es "Y" :

$$V = \pi \int_a^b x^2 dy$$

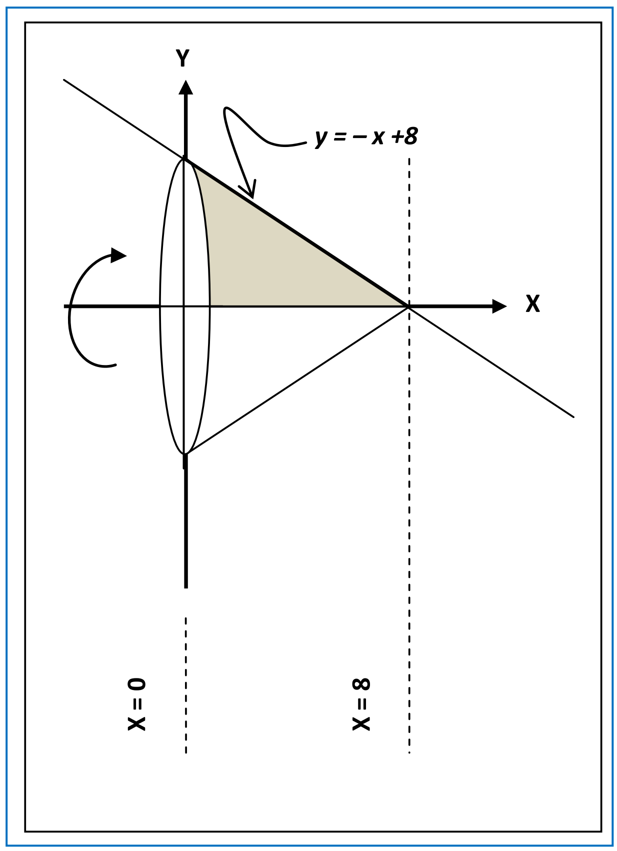
**Ejemplos.-**

1.- Determina el volumen engendrado por el área limitada por la recta ***y = -x + 8*** y las rectas ***x= 0, y = 0***.

**Solución:**

*Tabulando valores para dibujar la gráfica:*

| ***y = - x + 8*** | |
|---|---|
| *y* | *x* |
| *0* | *8* |
| *4* | *4* |
| *8* | *0* |




*El eje de revolución es X, por tanto:*

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

*Los límites de integración son: a = 0, b = 8, sustituyendo* ***y***

$$V = \pi \int_0^8 (-x+8)^2\, dx = \pi \int_0^8 (x^2 - 16x + 64)\, dx$$

$$V = \pi \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{16x^2}{2} + 64x \right]_0^8$$

$$V = \pi \left[ \frac{(8)^3}{3} - 8(8)^2 + 64(8) \right] - \pi \left[ \frac{(0)^3}{3} - 8(0)^2 + 64(0) \right]$$

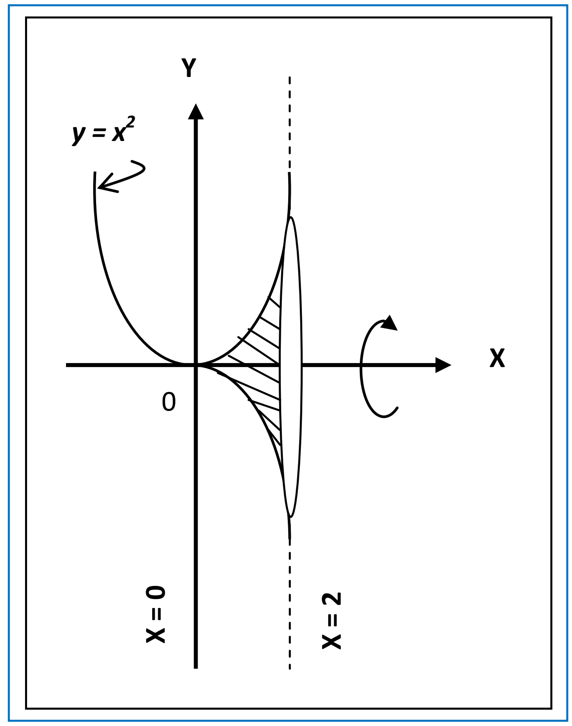
$$V = \pi \left[ \frac{512}{3} - 512 + 512 \right] = \frac{512}{3} \pi\ u^3$$

**2.- Determina el volumen engendrado por el área limitada por las intersecciones de las rectas *x=0, x=2* y la curva *y = x²* .**

**Solución:**

*Tabulando valores para elaborar la gráfica*

| ***y = x²*** | |
|---|---|
| *x* | *y* |
| *-2* | *4* |
| *-1* | *1* |
| *0* | *0* |
| *1* | *1* |
| *-2* | *4* |




*El eje de revolución es X, por tanto:*

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

*Los límites de integración son: a = 0, b = 2, sustituyendo **y***

$$V = \pi \int_0^2 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 x^4 dx$$

$$V = \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \pi \left[\frac{(2)^5}{5} - \frac{(0)^5}{5}\right] = \pi \left[\frac{32}{5} - 0\right]$$

$$V = \frac{32}{5}\pi \ u^3$$

***Ejercicios (13)***.- Resuelve los siguientes ejercicios:

1) Calcula el área bajo la curva $y = x^2$ limitada por las rectas $x = 2$, $x = 5$.

2) Calcula por integración el área del triángulo limitada por la recta ***y= 3x***, las rectas $x = 0$, $x = 5$. Verifica el resultado obtenido, determinando el área por medio de la fórmula del triángulo.

3) Determina por integración el área del trapecio limitado por la recta $x + y = 8$, el eje de las **X** y las rectas $x = 1, x = 6$. Verifica el resultado obteniendo el área con la fórmula del trapecio.

4) Determina el volumen engendrado por el área limitada por la recta $y = x + 6$ y las rectas $x = 0$, $y = 0$.

5) Calcula el volumen generado por la rotación alrededor del ***eje X*** del rectángulo limitado por las rectas cuyas ecuaciones son: $y = 4,\ x = 2,\ x = 7$. Realiza una gráfica del rectángulo y del cilindro engendrado, comprueba el resultado por medio de la fórmula del cilindro $V = \pi r^2 h$.