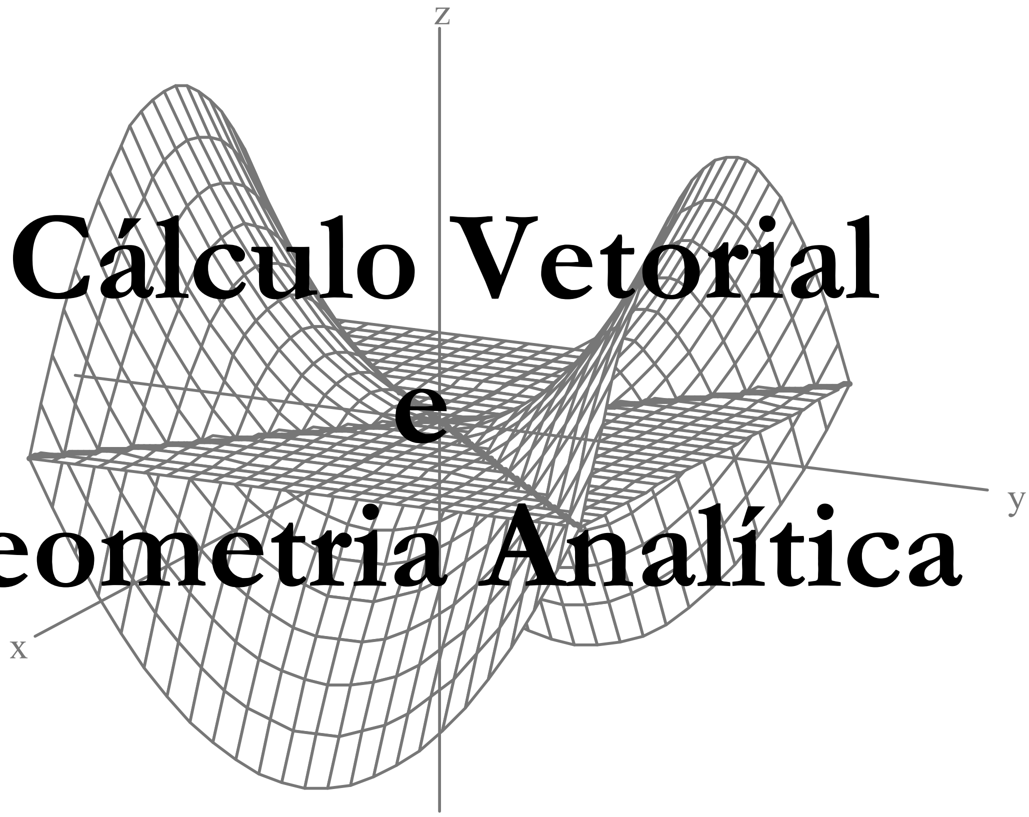
UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Prof. Jorge Costa Duarte Filho
Profa. Maria Silvia C. Favareto

2016.2

ÍNDICE

MATRIZES E SISTEMAS DE EQUAÇÕES

Neste capítulo, lembraremos-nos dos conceitos básicos sobre matrizes e resolução de sistemas lineares, conceitos estes que serão utilizados no decorrer deste curso, tanto na parte de Cálculo Vetorial como em sua aplicação à Geometria Analítica. Estudaremos, também, o escalonamento de matrizes, que será utilizado na resolução de sistemas de equações lineares.

1.1 - MATRIZES - INTRODUÇÃO

Chamaremos de ***matriz de ordem m × n*** (lê-se: *m* por *n*) a uma tabela de elementos dispostos em *m* sequencias horizontais, chamadas de linhas e *n* sequencias verticais chamadas de colunas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots\dots\dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots \dots\dots\dots\dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots\dots\dots\dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Os elementos da matriz serão indicados por a_{ij} , $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, onde *i* indica a linha, e *j*, a coluna em que ele se situa. Usaremos também a notação $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ou $A_{m \times n}$ para indicar a mesma matriz. Os elementos de uma matriz podem ser números reais ou complexos, polinômios, funções, outras matrizes, etc.

Exemplo: A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 6 & -5 & 5 \end{bmatrix}$ é uma matriz de ordem 2×3, isto é, 2 linhas e 3 colunas. Seus elementos são $a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$, $a_{13} = 2$, $a_{21} = 6$, $a_{22} = -5$, $a_{23} = 5$.

Duas matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{r \times s}$ são ***iguais*** se elas têm a mesma ordem e seus elementos correspondentes são iguais, isto é, se $m = r$, $n = s$ e $a_{ij} = b_{ij}$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$.

Exemplo: $\begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3^2 & \text{sen}\, \pi/2 \\ \text{sen}\, 0 & 5 \end{bmatrix}$

1.2 - TIPOS ESPECIAIS DE MATRIZES

Matriz quadrada é uma matriz cujo número de linhas é igual ao de colunas. Usaremos a notação $A_n = (a_{ii})_n$, $1 \le i, j \le n$ para indicar a matriz quadrada com n linhas e n colunas.

Exemplos: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$;

Chamaremos de ***diagonal principal*** de uma matriz quadrada $A_n = (a_{ii})_n$, aos elementos a_{ij} com $i = j$. A diagonal principal, algumas vezes chamada apenas de diagonal, da matriz A é formada pelos elementos 1 e -8 e da matriz B pelos elementos $b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{nn}$.

A ***matriz identidade*** é uma matriz quadrada em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e o restante dos elementos da matriz são todos nulos.

Notação: $I = (a_{ij})_n$, onde $a_{ii} = 1$, para $i = j$, $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

Exemplos: $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ - matriz identidade de ordem 2.

$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ - matriz identidade de ordem 3

Matriz nula é aquela que todos os elementos são nulos, cuja notação é 0_{mxn}.

Exemplos: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $D = [0]$

Matriz linha é a matriz formada por uma única linha e será denotada por A_{1n}.

Exemplos: $A_{1\times 1} = [2 \quad -3 \quad 5]$; $B_{1x1} = [-4]$

Matriz coluna é a matriz formada por uma única coluna.

Exemplos: $C_{2x1} = \begin{bmatrix} sen 45^0 \\ \cos 60^0 \end{bmatrix}$ $D_{3x1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Matriz diagonal é uma matriz quadrada em que os únicos elementos não nulos estão na diagonal, isto é, $A = (a_{ij})_n$, com $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

Exemplos: $A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ **;** $B_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Matriz simétrica é uma matriz quadrada em que os elementos situados simetricamente em relação à diagonal são iguais, isto é, $A = (a_{ij})_n$ tal que $a_{ij} = a_{ji}$, $1 \leq i, j \leq n$.

Exemplos: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 9 \\ -1 & 9 & 4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Matriz anti-simétrica é uma matriz quadrada em que os elementos situados simetricamente em relação à diagonal são opostos, isto é, $A=(a_{ij})_n$, com $a_{ij} = -a_{ji}$, $1 \le i, j \le n$. Na matriz anti-simétrica a diagonal é nula.

Exemplos: $C=\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

Matriz triangular superior é uma matriz quadrada onde todos os elementos abaixo da diagonal são nulos: isto é, $A=(a_{ij})_n$, com $a_{ij} = 0$ para $i > j$.

Exemplos: $A=\begin{bmatrix} 11 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Matriz triangular inferior é uma matriz quadrada onde todos os elementos acima da diagonal são nulos, isto é, $A=(a_{ij})_n$, com $a_{ij} = 0$ para $i < j$.

Exemplos: $A=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 8 \end{bmatrix}$

Observação: Dada uma matriz $A=(a_{ij})_{m\times n}$, sua transposta, é a matriz A^t obtida de A trocando-se linha por coluna; isto é, $A=(a_{ji})_n$.

Exemplos: $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}_{3x2}$ $A^t=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}_{2x3}$

1.3 - OPERAÇÕES COM MATRIZES

1.3.1 - Adição

Sejam $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ e $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ duas matrizes de mesma ordem m x n. A soma entre as matrizes A e B é uma matriz de mesma ordem C, onde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$. De outra forma,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \qquad\; a_{2n} \\ \vdots & \vdots \ldots\ldots\ldots \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots\ldots\ldots a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \ldots\ldots\ldots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \qquad\; b_{2n} \\ \vdots & \vdots \ldots\ldots\ldots \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} \ldots\ldots\ldots b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \ldots\ldots\ldots a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \qquad\; a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} \ldots\ldots a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Exemplo: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 9 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 10 & -5 \end{bmatrix}$

1.3.2 - Propriedades da adição de matrizes

Sejam A, B e C matrizes de mesma ordem $m \times n$. São válidas as seguintes propriedades:

P1) $A + (B + C) = (A + B) + C$ **(associativa)**

P2) $A + B = B + A$ **(comutativa)**

P3) $A + 0 = 0 + A = A$, onde 0 é a matriz nula de ordem $m \times n$.

P4) Existe uma matriz, denotada por $-A$, tal *que* $A + (-A) = (-A) + A = 0$.

1.3.3 - MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR

Se k é um número real, o produto de uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ por k (também chamado de escalar) é a matriz $k.\,A = (b_{ij})_{m\times n}$, onde $b_{ij} = k.a_{ij}$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$.

Exemplo: Se $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ então $-3A = \begin{bmatrix} -3 \\ -12 \end{bmatrix}$

1.3.4 - Propriedades da multiplicação por escalar

Dadas as matrizes A e B de mesma ordem $m \times n$ e escalares k_1 e k_2 temos:

M1) $k_1.\,(A + B) = k_1A + k_1B$

M2) $(k_1 + k_2)\ A = k_1A + k_2A$

M3) $0.A = \mathbf{O}$, onde **O** é matriz nula de ordem m x n

M4) $k_1(k_2A) = (k_1\, k_2)\, A$

1.3.5 - Multiplicação de Matrizes

Sejam $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{n\times p}$ matrizes. O produto de das matrizes A e B é uma matriz $C = (c_{ij})_{m\times p}$, onde $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj}$.

Observações:

1) Só podemos efetuar o produto de duas matrizes $A_{m\times n}$ e $B_{n\times p}$, nessa ordem, se o número de linhas da segunda matriz for igual o número de colunas da primeira. Neste caso, a matriz produto AB terá ordem $m \times p$.

2) Cada elemento c_{ij} da matriz produto é a soma dos produtos dos elementos da i-ésima linha da primeira matriz pelos elementos correspondentes da j-ésima coluna da segunda matriz. Abreviadamente, diz-se que o produto de matrizes é feito "linha por coluna".

Exemplos: 1. Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}_{2x3}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{3x1}$, então

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2)(1) + (1)(1) + (0)(0) \\ (-1)(1) + (3)(1) + (-1)(0) \end{bmatrix}_{2x1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Observe que o produto *BA* não poderá ser efetuado, pois o número de linhas da segunda matriz é diferente do número de colunas da primeira.

2. Se $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, note que os produtos *AB* e *BA* não poderão ser efetuados, pela mesma razão apresentada no Exemplo 1.

1.3.6 - Propriedades da multiplicação:

Dadas as matrizes $A_{m\times n}$, $B_{n\times p}$ e $C_{p\times q}$ de ordens compatíveis com as multiplicações e adições indicadas, são válidas:

M5) $A(BC) = (AB)C$ (**associativa**) ;

M6) $A(B + C) = AB + AC$ (**distributiva à esquerda**) ;

M7) $(A + B)C = AC + BC$ (**distributiva à direita**);.

M8) $A_{m\times n} \cdot I_n = A_{m\times n}$; $I_n \cdot A_{n\times m} = A_{n\times m}$, onde I_n é uma matriz identidade de ordem *n*.

Observações:

1) $A_{mxn} \cdot 0_{nxp} = 0_{mxp}$; $0_{mxn} \cdot A_{nxp} = 0_{mxp}$, onde *0* é uma matriz nula.

2) Em geral, $AB \neq BA$. Observe os exemplos abaixo.

2.1. O produto $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}_{3x2} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}_{2x2} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 7 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}_{3x2}$, mas $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}_{2x2} \bullet \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}_{3x2}$ não está definido.

2.2. Se $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}_{3x1}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 \; 1 \; 3 \end{bmatrix}_{1x3}$, temos que *AB* e *BA* estão definidos, mas *AB* é diferente *BA*, pois $AB = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 12 \end{bmatrix}_{3x3}$ e $BA = \begin{bmatrix} 10 \end{bmatrix}$.

2.3. Se $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2x2}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{2x2}$ então $AB = BA = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

3) É possível ter $AB = 0$ sem que se tenha $A = 0$ ou $B = 0$. Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, então $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

1.3.7 - Exercícios

1) Dadas as matrizes $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\\ 5 & -4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 3 & 4\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 3\\ 5 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 4\end{bmatrix}$ e $D=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, calcule, as operações indicadas: $AB + C$, BC, CB, $CB^t D - BA$, $AB + BA$, quando possível.

2) Dadas as matrizes $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

a) Classifique essas matrizes.

b) Determine $a, b, c \in \mathbb{R}$, tais que $aA + bB + cC = \boldsymbol{O}$.

c) Determine $x, y, z \in \mathbb{R}$, tais que $xA + yB + zC = \boldsymbol{I_3}$.

d) Determine $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, tais que $\alpha A + \beta B + \gamma C = \begin{bmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$.

3) Determine $x, y \in \mathbb{R}$ para que $A = B$, sendo $A=\begin{bmatrix}x^2+x & 6\\ y^2+4 & 1\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}2 & 6\\ 13 & 1\end{bmatrix}$.

4) Se $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}$, determine uma matriz B tal que $AB = I$.

5) Determine todas as matrizes que comutam com as matrizes

a) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ b) $B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

6) Determine uma matriz quadrada A, não nula, tal que $A^2 = 0_2$.

1.4 - SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES - INTRODUÇÃO

Um sistema de equações lineares com m equações a n incógnitas é um conjunto de equações

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

onde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$.

O sistema *(1)* também pode ser escrito na forma matricial $AX = B$, isto é:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{mxn}$$ - é a matriz dos coeficientes,

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{nx1}$$ - é a matriz das incógnitas

e

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{mx1}$$ - é a matriz dos termos independentes

Podemos também associar ao sistema *(1)* a *matriz ampliada*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

obtida acrescentando-se à matriz dos coeficientes uma coluna formada pelos termos independentes. Dessa maneira a matriz ampliada representa o sistema de forma abreviada.

Dois sistemas de equações lineares são *equivalentes* se admitem as mesmas soluções. Assim, os sistemas

$$(2)\ \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases} \quad e \quad (3)\ \begin{cases} 3x - y = 1 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$$

são equivalentes, pois ambos admitem a única solução $x = 1$ e $y = 2$. Observe que essa solução é também solução do sistema (4)

$$(4)\ \begin{cases} x + 0y = 1 \\ 0x + y = 2 \end{cases}$$

Logo, *(4)* é equivalente a *(2)* e *(3).*

1.5 - RESOLUÇÕES DE SISTEMAS LINEARES

Para resolver um sistema de equações lineares devemos exibir um outro sistema equivalente a ele no qual a solução está evidente. Assim, por exemplo, para resolver o sistema *(2)* acima devemos obter o sistema *equivalente (4),* onde os valores das incógnitas são facilmente obtidos. O sistema *(3)* é equivalente ao sistema *(2),* mas o seu conhecimento não fornece, de modo evidente, como no caso de *(4),* a solução comum.

Vejamos então, como proceder para obter o sistema equivalente conveniente, através do processo eliminação de variáveis em cada equação. Para tornar mais claro o processo, ao lado de cada sistema vamos escrever sua matriz ampliada.

$$(2) \qquad \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

1ª) Eliminemos x da $2^{\underline{a}}$ equação. Substituímos a $2^{\underline{a}}$ equação por outra, obtida somando-se a $2^{\underline{a}}$ equação com a $1^{\underline{a}}$ multiplicada por -2:

$$(2') \qquad \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 0x - 7y = -14 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & -14 \end{bmatrix}$$

2ª) Vamos tornar unitário o coeficiente de y na $2^{\underline{a}}$ equação. Para isso, substituímos a $2^{\underline{a}}$ equação por outra, obtida multiplicando-se a $2^{\underline{a}}$ equação por $-\frac{1}{7}$:

$$(2'') \qquad \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 0x + y = 2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

3ª) Eliminemos y da $1^{\underline{a}}$ equação. Substituímos a $1^{\underline{a}}$ equação por outra, obtida somando-se a $1^{\underline{a}}$ equação com a $2^{\underline{a}}$ equação multiplicada por -2 :

$$(2''') \qquad \begin{cases} x + 0y = 1 \\ 0x + y = 2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

O sistema $(2''')$ é equivalente ao sistema (2), e assim obtivemos a solução procurada de (2) : $x = 1$, $y = 2$. De modo análogo se resolve o sistema (3):

$$(3) \qquad \begin{cases} 3x - y = 1 \\ x - 2y = -3 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

A 1^a etapa é obter um coeficiente unitário para a variável x na $1^{\underline{a}}$ equação, o que pode ser obtido multiplicando a 1ª equação por $1/3$. Com isso, obtemos os outros coeficientes fracionários, o que dificultará os cálculos posteriores. Para evitar dificuldades e proceder da mesma maneira anterior, vamos aplicar, inicialmente, a 1^a etapa.

1ª) Vamos permutar a $1^{\underline{a}}$ com a $2^{\underline{a}}$ equação:

$$\begin{cases} x - 2y = -3 \\ 3x - y = 1 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2ª) Vamos eliminar x da $2^{\underline{a}}$ equação. Substituímos a $2^{\underline{a}}$ equação pela soma da $2^{\underline{a}}$ equação com a $1^{\underline{a}}$ multiplicada por -3 :

$$\begin{cases} x - 2y = -3 \\ 0x + 5y = 10 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

3ª) Vamos tornar unitário o coeficiente de y na $2^{\underline{a}}$ equação. Substituímos a $2^{\underline{a}}$ equação por ela mesma multiplicada por $1/5$:

$$\begin{cases} x - 2y = -3 \\ 0x + y = 2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

4ª) Vamos eliminar *y* da *1ª* equação: substituímos a *1ª* equação pela soma da *1ª* equação com a *2ª* multiplicada por *2*:

$$\begin{cases} x + 0y = 1 \\ 0x + y = 1 \end{cases} \qquad\qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Assim obtivemos a solução: $x = 1$, $y = 2$.

Nos dois exemplos apresentados partimos de um sistema de equações lineares e fomos obtendo sistemas sucessivos, obtidos do anterior por operações que preservam as igualdades indicadas, até chegarmos ao sistema equivalente que expressa a solução. As etapas intermediárias são todas reversíveis, pois podemos obter o sistema *(2)* a partir do sistema *(4)* efetuando as operações inversas das mencionadas, na ordem inversa. Analogamente para o sistema *(3).* As operações que fornecem sistemas equivalentes são chamadas *operações elementares.*

1.6 - OPERAÇÕES ELEMENTARES

As operações elementares sobre as linhas de uma matriz são:

1. Permutação da i-ésima e j-ésima linha: $L_i \leftrightarrow L_j$

Exemplo: $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 5 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \; L_1 \leftrightarrow L_2 \; \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

2. Multiplicar a i-ésima linha por um escalar qualquer *k*, não nulo: $L_i \rightarrow k.L_i$.

Exemplo: $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 5 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \quad L_3 \rightarrow -2L_3 \quad \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 5 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$

3. Substituição da i-ésima linha pela i-ésima linha mais *k* vezes a j-ésima linha: $L_i \rightarrow L_i + k..L_j$

Exemplo: $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 5 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \; L_3 \rightarrow L_3 - 3L_2 \; \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 5 \\ 0 & -19 \end{bmatrix}$

Na resolução dos sistemas *(2)* e *(3)* da seção *1.5*, observamos que as matrizes ampliadas dos vários sistemas obtidos sucessivamente apenas sofreram operações elementares sobre suas linhas com objetivo de serem transformadas numa *matriz na forma escada*. Lembremos que quando não fazemos referência a alguma linha, a mesma deve permanecer inalterada.

1.7 - MATRIZ NA FORMA ESCADA

Uma matriz é *linha reduzida à forma escada* se satisfaz às condições:

1) O primeiro elemento não nulo de cada linha é *1*.

2) Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os outros elementos iguais a zero.

3) Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas.

4) Se L_1 , L_2 ,..., L_r são as linhas não nulas e se o primeiro elemento não nulo de L_i ocorre na coluna j_i , então $j_1 < j_2 < ... < j_r$.

Lembramos que uma linha é nula se todos os seus elementos forem nulos. Uma linha não nula é aquela que possui pelo menos um elemento não nulo. A condição *4)* significa que os primeiros elementos não nulos unitários de cada linha devem ocorrer em colunas seqüenciadas.

Exemplos:

Consideremos as matrizes abaixo e verifiquemos quais são linha reduzida à forma escada:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix};$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 1 \end{bmatrix}; \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

As matrizes A e B são linha reduzida à forma escada, pois todas as condições estão satisfeitas. A matriz C não é linha reduzida à forma escada, pois não satisfaz à $1^{\underline{a}}$ condição. A matriz D não é linha reduzida à forma escada, pois não satisfaz a $2^{\underline{a}}$ e $4^{\underline{a}}$ condições. A matriz E também não é linha reduzida à forma escada, pois não satisfaz a $3^{\underline{a}}$ condição.

Dadas duas matrizes *m x n, A* e *B,* dizemos que *B é linha-equivalente a A* se *B* foi obtida de *A* após um número finito de operações elementares sobre as linhas de *A*. Neste caso, indicamos

$$A \to B, \text{ ou } A \sim B$$

Teorema 1 : Dois sistemas de equações lineares que possuem matrizes ampliadas equivalentes são equivalentes.

Teorema 2 : Toda matriz A_{mxn} é linha-equivalente a uma única matriz linha reduzida à forma escada.

Dada uma matriz A_{mxn} , chamamos de *posto* (ou *característica*) de *A*, indicado por *p,* ao número de linhas não nulas de sua matriz equivalente linha reduzida à forma escada.

Exemplo:

Para obter o posto da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ precisamos, em primeiro lugar, obter a sua matriz equivalente B linha reduzida à forma escada. Isso é conseguido aplicando-se operações elementares convenientes às linhas da matriz A :

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & -1 & 3\\ 1 & -3 & -2 & 4\end{bmatrix}\begin{array}{c}L_2 \to L_2-2L_1\\ \to\\ L_3 \to L_3-L_1\end{array}\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & -3 & -5 & 3\\ 0 & -4 & -4 & 4\end{bmatrix} L_2 \to L_3 \begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & -4 & -4 & 4\\ 0 & -3 & -5 & 3\end{bmatrix}$$

$$L_2 \to -\frac{1}{4}L_2\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -3 & -5 & 3\end{bmatrix}\begin{array}{c}L_1 \to L_1-L_2\\ \to\\ L_3 \to L_3+3L_2\end{array}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -2 & 0\end{bmatrix}$$

$$L_3 \to -\frac{1}{3}L_3\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{array}{c}L_1 \to L_1-L_3\\ \to\\ L_2 \to L_2-L_3\end{array}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix} = B$$

Portanto, o posto de A é igual a 3, que é o número de linhas não nulas da matriz B.

Observação: Podemos considerar a matriz A acima como a matriz ampliada de um sistema de equações lineares, a saber:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0\\ 2x - y - z = 3\\ x - 3y - 2z = 4\end{cases}$$

A matriz B acima é linha-equivalente à matriz A, e pode ser considerada como a matriz ampliada de um sistema de equações lineares equivalente ao anterior, a saber:

$$\begin{cases} x = 1\\ y = -1\\ z = 0\end{cases}$$

Os dois sistemas possuem a mesma solução: $x = 1$, $y = -1$, $z = 0$.

1.8 - RESOLUÇÃO DE SISTEMAS POR ESCALONAMENTO

Para resolver um sistema de equações lineares de m equações a n incógnitas procedemos da seguinte maneira:

1º) Escrevemos a matriz ampliada do sistema.

2º) Através da aplicação de operações elementares convenientes chegamos à matriz linha reduzida à forma escada equivalente.

3º) Escrevemos o sistema associado à matriz obtida, chegando-se assim à solução do sistema dado.

Exemplo:

Resolva os sistemas abaixo:

1) $\begin{cases} x - 2y - 3z = 0\\ x + 4y - z = -1\\ 2x - y + z = 0\end{cases}$

Vamos escalonar a matriz ampliada do sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \to L_2 - L_1 \\ \to \\ L_3 \to L_3 - 2L_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 7 & 0 \end{bmatrix} L_2 \to \frac{1}{6} L_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 3 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_1 \to L_1 + 2L_2 \\ \to \\ L_3 \to L_3 - 3L_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \end{bmatrix} L_3 \to \frac{1}{6} L_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{11}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{12} \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \to L_1 + \frac{11}{3} L_3 \\ \to \\ L_2 \to L_2 + \frac{1}{3} L_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{36} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{36} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{12} \end{bmatrix}$$

Como esta última matriz é linha reduzida à forma escada, paramos o processo e escrevemos o sistema a ela associado:

$$\begin{cases} x = -\,{}^{5}\!/_{36} \\ y = -\,{}^{7}\!/_{36} \\ z = {}^{1}\!/_{12} \end{cases}$$

o qual nos fornece a solução do sistema dado.

2) $\begin{cases} x + y + z + 3t = 1 \\ x + y - z + 2t = 0 \end{cases}$

Tomemos a matriz ampliada do sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} L_2 \to L_2 - L_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} L_2 \to -\frac{1}{2} L_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$L_1 \to L_1 - L_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

A última matriz é linha reduzida à forma escada, ou seja, a matriz ampliada do sistema dado já foi escalonada, e o sistema associado será:

$$\begin{cases} x + y + \frac{5}{2} t = \frac{1}{2} \\ z + \frac{1}{2} t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Aqui o sistema obtido não fornece uma solução numérica única, mas sim uma família de soluções, dependendo das escolhas arbitrárias de algumas variáveis. Essa família de soluções recebe o nome de **solução geral do sistema:** $x = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} t - y; \; z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} t, \; y, t \in \Re.$

3) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \to L_2 - L_1 \\ \to \\ L_3 \to L_3 - 2L_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} L_3 \to -L_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \to L_1 - L_2 \\ \to \\ L_3 \to L_3 + 2L_2 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} L_3 \to -L_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \to L_1 - 2L_3 \\ \to \\ L_2 \to L_2 + L_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tendo escalonado a matriz ampliada, escrevemos o sistema associado à matriz escada:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Em vista da última igualdade desse sistema ser absurda, o sistema é impossível, isto é, não existe uma solução que satisfaça simultaneamente às três equações do sistema.

Vamos agora analisar três sistemas bem simples, de duas equações e duas incógnitas, bastantes esclarecedores.

4) $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ x - 3y = -3 \end{cases}$

Observemos inicialmente que cada equação desse sistema é a equação de uma reta, cujos gráficos esboçamos na *fig. 01,* abaixo. A resolução gráfica do sistema nos mostra duas retas concorrentes, isto é, retas com um único ponto em comum, $P = (3, 2)$, que é a solução do sistema. Assim o sistema é possível e tem como única solução o ponto $P = (3, 2)$.

Resolvendo o sistema por escalonamento de matrizes, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -5 & -10 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to -\frac{1}{5} L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 - 2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Portanto o sistema terá como solução $x = 3$, $y = 2$ ou o ponto $P = (3, 2)$.

5) $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x + 4y = 14 \end{cases}$

Iniciando com a resolução gráfica, obtemos duas retas coincidentes, isto é, tem todos os pontos em comum *(fig. 02)*. Assim, o sistema é possível e tem infinitas soluções (cada ponto da reta) e portanto a solução é indeterminada. Resolvendo, agora, por escalonamento, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 14 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo a solução geral será: $x + 2y = 7$, ou $x = 7 - 2y$, $\forall y \in \mathbb{R}$.

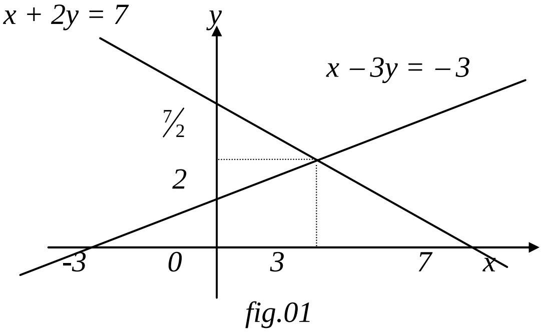


fig.01

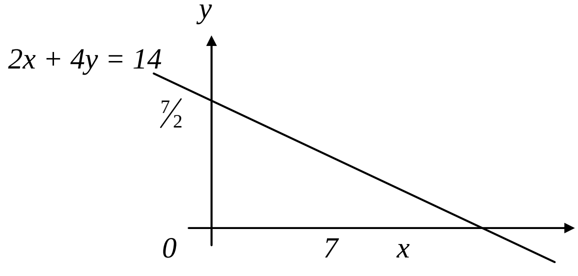
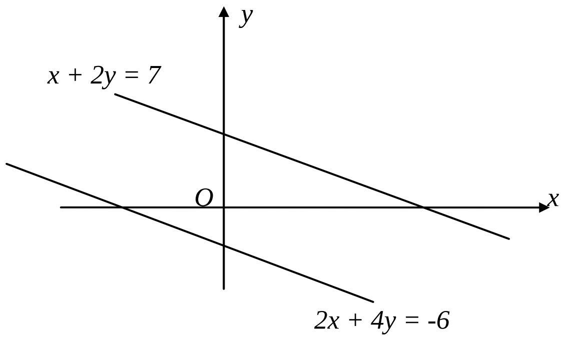


fig.02

x + 2y = 7

6) $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x + 4y = -6 \end{cases}$

Aqui a resolução gráfica nos fornece duas retas paralelas sem pontos em comum: O sistema é impossível, não admite solução.



Por escalonamento, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & -6 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ \to \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -20 \end{bmatrix}$$

Sistema associado: $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ \quad\;\; 0 = -20 \end{cases}$

A segunda equação expressa um absurdo, o que nos informa ser o sistema impossível. Assim, não existe solução satisfazendo simultaneamente as duas equações.

Em cada um destes três últimos sistemas acima resolvidos vamos analisar a forma escada de suas matrizes dos coeficientes e ampliadas:

$$4)\begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \qquad 5)\begin{bmatrix} 1 & 2 & \vdots & 7 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \qquad 6)\begin{bmatrix} 1 & 2 & \vdots & 7 \\ 0 & 0 & \vdots & -20 \end{bmatrix}$$

Os três sistemas envolvem duas incógnitas. No Exemplo *4)*, tanto a matriz dos coeficientes como a matriz ampliada tem duas linhas não nulas, em número igual ao de incógnitas, e obtivemos uma solução bem determinada: $P = (3, 2)$. No Exemplo *5)*, tanto a matriz dos coeficientes como a ampliada tem uma linha não nula, em número inferior ao de incógnitas, e obtivemos solução indeterminada. No Exemplo *6)*, as matrizes dos coeficientes e a ampliada não apresentam aspectos compatíveis: na matriz dos coeficientes existe apenas uma linha não nula, enquanto na matriz ampliada tem duas linhas não nulas e observe que o sistema não tem solução. O sistema foi impossível. Adotando a seguinte notação, ***p_c = posto da matriz dos coeficientes, p_a = posto da matriz ampliada e n = número de incógnitas do sistema,*** os três exemplos 4*)*, *5)* e *6)* fornecem seguintes resultados: No exemplo *4)*, temos $p_c = 2, p_a = 2, n = 2$ e $n - p_c = 0$. Neste caso, observou-se que o sistema tem solução, e essa solução é única. No exemplo *5)*, temos: $p_c = 1, p_a = 1, n = 2$ e $n - p_c = 1$. Neste caso, podemos observar que o sistema tem solução, mas é uma solução indeterminada. Para cada valor atribuído a uma das variáveis, obtém-se um valor para a outra, havendo, portanto, infinitas soluções. Já no exemplo *6)*, temos: $p_c = 1, p_a = 2$ e $n = 2$. Neste caso, o sistema não tem solução.

1.9 - DISCUSSÃO DE UM SISTEMA $m \times n$

Um sistema de *m* equações a *n* incógnitas pode ter:

a) uma única solução e neste caso, o sistema é dito compatível ou possível e determinado.

b) infinitas soluções e neste caso o sistema é dito compatível e indeterminado.

c) nenhuma solução e neste caso o sistema é dito incompatível ou impossível.

No parágrafo *1.8*, os exemplos *1)* e *4)* são compatíveis e determinados, *2)* e *5)* são compatíveis e indeterminados e *3)* e *6)* são incompatíveis.

Teorema: 1) Um sistema de m equações a n incógnitas admite soluções se, e somente se, o posto da matriz ampliada p_a for igual ao posto da matriz dos coeficientes p_c , isto é, $p_a = p_c$. 2) Se o sistema tem solução, isto é, $p_a = p_c = p$, e se $n = p$, então a solução será única (sistema compatível e determinado)

3) Se o sistema tem solução, isto é, $p_a = p_c = p$, e se $n > p$, então $n - p$ incógnitas são arbitrárias e as p incógnitas restantes são dadas uma função dessas $n - p$ incógnitas. Chamamos o valor $n - p$ de ***grau de liberdade*** do sistema (sistema compatível e indeterminado).

Do item 1) do teorema acima, concluímos que o sistema é incompatível se, e somente se, $p_a \neq p_c$. Voltando aos três primeiros exemplos de *§1.8*, temos:

1) $\begin{cases} x - 2y - 3z = 0 \\ x + 4y - z = -1 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 10 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{36} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{36} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{12} \end{bmatrix}$

Aqui temos $p_c = p_a = p = n = 3$. Logo o sistema é compatível e determinado.

2) $\begin{cases} x + y + z + 3t = 1 \\ x + y - z + 2t = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Neste caso, temos $p_a = p_c = 2$ e $n = 4 > p$. Logo o sistema é compatível e indeterminado. Tem-se $n - p = 2$ e portanto o sistema terá grau liberdade igual a 2. Note que este sistema é compatível e indeterminado, com infinitas soluções. Há $n - p = 2$ variáveis livres ou independentes, e as outras $p = 2$ variáveis restantes dependem das duas primeiras. A solução geral do sistema é : $x = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}t - y,\ z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t,\ \forall y, t \in \Re$. As variáveis independentes são y e t. As variáveis x e z são dadas em função das primeiras, isto é, são variáveis dependentes.

3) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Aqui temos $p_a \neq p_c$ e, portanto, o sistema é incompatível.

1.9.1 - Exercícios Resolvidos

1) Discutir e resolver o sistema $\begin{cases} mx + 2y = 6 \\ 3x - y = -2 \\ x + y = 0 \end{cases}$

Solução: Se x $\neq$ 0, a matriz ampliada fica :

$$\begin{bmatrix} m & 2 & 6 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ m & 2 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - mL_1]{L_2 \to L_2 - 3L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 2-m & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to -\frac{1}{4} L_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2-m & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - (2-m)L_2]{L_1 \to L_1 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{10+m}{2} \end{bmatrix}$$

Se $m = -10$, temos $p_a = p_c = n = 2$. Assim o sistema é compatível e determinado, com solução $x = -\frac{1}{2}$ e $y = \frac{1}{2}$. Se $m \neq -10$, temos que $\frac{m+10}{2} \neq 0$. Logo a matriz ampliada do sistema tem posto 3, enquanto que a matriz dos coeficientes tem posto 2. Portanto o sistema é incompatível.

2) Discutir e resolver o sistema: $\begin{cases} x + 4y = 2 \\ x - 5y = 1 \\ 2x - y = 3 \\ 4x + 16y = 8 \end{cases}$

Solução: Usando o método de escalonamento, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 16 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4 \to L_4 - 4L_1]{\substack{L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - 2L_1}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -9 & -1 \\ 0 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to -\frac{1}{9} L_2} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{9} \\ 0 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 + 9L_2]{L_1 \to L_1 - 4L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{14}{9} \\ 0 & 1 & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Temos, $p_c = p_a = n = 2$. Logo o sistema é compatível e determinado, com solução $x = \frac{14}{9}$ e $y = \frac{1}{9}$..

3) Discutir e resolver o sistema $\begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ x - 7y = 3 \end{cases}$

Solução: Novamente, usaremos o método do escalonamento. Temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -7 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_1]{L_2 \to L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to \frac{1}{5} L_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & -5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \to L_1 + 2L_2 \\ \to \\ L_3 \to L_3 + 5L_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Temos $p_a = p_c = 2$. Logo o sistema é compatível. Como o grau de liberdade do sistema é igual a 1, pois $n - p = 3 - 2 = 1$, então o sistema será compatível e indeterminado com uma variável livre. Portanto, temos o sistema associado:

$$\begin{cases} x - \frac{7}{5}z = \frac{1}{5} \\ y - \frac{1}{5}z = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

cuja solução geral é: $x = \frac{1}{5} + \frac{7}{5}z \;\; e \;\; y = -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}z,\; z \in \Re$.

1.9.2 - Exercícios propostos

1) Determine valores de a, b e c para que as matrizes $\begin{bmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & -1 & 0 \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ sejam linha-equivalentes.

2) Discuta e resolva os sistemas:

$a)\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + 2z = 5 \\ x + 4y - 5z = 4 \end{cases}$ $\quad b)\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_2 + 3x_3 = -2 \end{cases}$

$c)\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 3x_1 - 4x_2 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 = 1 \end{cases}$ $\quad d)\begin{cases} 2x - y + 3z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 0 \\ x + y + z = 6 \\ 3x + y + z = 4 \end{cases}$

3) Discuta e resolva os sistemas homogêneos:

$a)\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - 2y - 3z = 0 \\ x - 4y - z = 0 \end{cases}$ $\quad b)\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - 3y + 7z = 0 \\ 2x - 3y + 5z = 0 \end{cases}$

4) Determine os valores de k para que o sistema $\begin{cases} x - y + z = -5 \\ x - y + k^2 z = 2 \\ x - y - z = 3 \end{cases}$ não tenha solução.

5) Discuta e resolva os sistemas abaixo para os diversos valores de m e n.

a) $\begin{cases} mx - 2y + z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ $\quad$ b) $\begin{cases} -4x + 3y = 2 \\ 5x - 4y = 0 \\ 2x - y = n \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + nz = 3 \\ x + ny + 3z = 2 \end{cases}$ $\quad$ d) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = 2 \\ 3y = m \end{cases}$

e) $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + my = n \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + ny - 8z = 1 \\ 2x + 6y + mz = 0 \end{cases}$

6) Quando se faz uso do computador é comum adotar o Método de Gauss para resolução de sistemas de equações lineares, pois este método exige um número menor de operações. O Método de Gauss consiste em reduzir a matriz ampliada do sistema a uma matriz que só difere da matriz escada, dada no *§ 1.7*, pela segunda condição. Após reduzir a matriz ampliada a uma matriz dessa forma por meio de operações elementares e observando as condições *1), 3)* e *4),* obtém-se as soluções do sistema por substituição.

Exemplo: Resolva o sistema $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix} \underset{\rightarrow}{L_2 \to L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & -14 \end{bmatrix} \underset{\rightarrow}{L_2 \to -\frac{1}{7} L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Escrevendo o sistema associado, temos:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ y = 2 \end{cases}$$

Assim, por substituição, obtemos a solução do sistema: $x + 4 = 5 \Rightarrow x = 1$. Portanto, a solução do sistema é $x = 1$ e $y = 2$.

Discuta e resolva os sistemas abaixo pelo Método de Gauss.

a) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3x - 2y - 12z = 0 \\ 2x - 3y + 5z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y - az = 0 \\ ax + y - z = 2 - a \\ x + ay - z = -a \end{cases}$

1.10 - DETERMINANTES

Dada uma matriz quadrada $A_n = (a_{ij})_n$, indiquemos por A_{ij} a matriz quadrada de ordem $n - 1$ obtida da matriz A suprimindo-se a i-ésima linha e a j-ésima coluna.

Exemplos:

1) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \\ 4 & 8 & 6 \end{bmatrix}$, então $A_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, $A_{13} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$,..., etc.

2) Se $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, então $B_{11} = [4]$, $B_{12} = [-3]$, $B_{22} = [0]$

A toda matriz quadrada $A = (a_{ij})_n$ está associada um número real chamado ***determinante de A*** , que será denotado por ***det A*** ou $|A|$ ou

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

e será assim definido:

Se $n = 1$ então $A = (a)$ e $det\ A = a$. Se $n \geq 2$ então $A = (a_{ij})_n$, e

$$det\ A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\ det\ A_{ij}$$

para qualquer $i = 1 ,..., n$ fixado de modo arbitrário. Da mesma forma, temos

$$det\ A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\ det\ A_{ij}$$

para qualquer $j = 1 ,..., n$ fixado de modo arbitrário. A expressão acima chama-se desenvolvimento de Laplace.

Vejamos alguns casos particulares. Se $n = 2,$ então

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

e se fixarmos $i = 2,$ o determinante de A será igual a:

$$det\ A = \sum_{j=1}^{2} (-1)^{2+j} a_{2j}\, det\, A_{2j} = (-1)^{2+1} a_{21}\ det\ A_{21} + (-1)^{2+2} a_{22}\, det\, A_{22}$$

$$det\ A = -a_{21}|a_{12}| + a_{22}|a_{11}| = -a_{21}a_{12} + a_{22}a_{11} \quad \Rightarrow \quad det\ A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Fixando $j = 1$:

$$det\ A = |A| = a_{11}|a_{22}| - a_{21}|a_{12}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Analogamente se $i = 1$ ou $j = 2$. Neste caso, temos o algoritmo prático: o determinante da matriz A será igual ao produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da outra diagonal.

Se A é uma matriz de ordem 3 e fixando $i = 1$, obtemos, para $n = 3:$

$$|A| = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} a_{ij}|A_{ij}| = (-1)^{1+1} a_{11}|A_{11}| + (-1)^{1+2} a_{12}|A_{12}| + (-1)^{1+3} a_{13}|A_{13}|$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Fixando outros valores para i ou j obtemos o mesmo resultado. Assim chegamos ao algoritmo prático conhecido como **Regra de Sarrus** . O determinante de uma matriz de ordem 3 é obtido da seguinte maneira:

a) repetem-se as duas primeiras colunas à direita da $3^{\underline{a}}$ coluna;

b) faz-se a soma dos produtos dos elementos situados na diagonal principal e em suas paralelas, menos a soma dos produtos dos elementos situados na outra diagonal e em suas paralelas:

$$det\ \ A = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}\Bigg| =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Exemplos:

1) Dada $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, calcule o seu determinante. Fixemos $i = 1$. Então o determinante de B será:

$$|B| = \sum_{j=1}^{2} (-1)^{1+j} a_{1j} |B_{1j}| = (-1)^{1+1} 0|4| + (-1)^{1+2} (-1)|-3| = -3$$

Usando a Regra de Sarrus, podemos, também, calcular o determinante da matriz B. Tem-se:

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 3 = -3$$

2) Calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Fixemos $j = 2$. Então

$$|A| = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+2} a_{i2} |A_{i2}| = -0|A_{12}| + (-3)|A_{22}| - 0|A_{32}| = -3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -3(4) = -12$$

Observação:

A fixação do índice i ou j é arbitrária. Por economia de cálculos, aconselha-se escolher aquele i (ou j) correspondente à linha (ou coluna) que contém a maior quantidade de zeros. No exemplo 2) acima as escolhas mais "econômicas" são: $i = 3$ ou $j = 2$.

1.10.1. - Propriedades dos determinantes

1ª) Se uma matriz quadrada *A*, de ordem *n*, tem uma linha (coluna) nula seu determinante é nulo. Basta fixar a linha (coluna) nula para o cálculo do determinante de *A*.

2ª) Permutando-se duas linhas (colunas) da matriz *A* seu determinante muda de sinal.

3ª) Se uma matriz A tem duas linhas (colunas) iguais seu determinante é nulo. Decorre da propriedade anterior, permutando-se as linhas (colunas) iguais.

4ª) Multiplicando-se uma linha (coluna) de uma matriz A por uma constante k seu determinante fica multiplicado por k. Basta fixar essa linha (coluna).

5ª) $det\,(AB) = (det\,A)(det\,B).$

6ª) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i1} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1.11 - SISTEMAS LINEARES HOMOGÊNEOS

Um sistema de m equações lineares a n variáveis é dito *homogêneo* quando todos os termos independentes são nulos, isto é,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Matricialmente, temos $\boldsymbol{AX = 0}$

Um sistema homogêneo é sempre compatível, admitindo pelo menos a solução trivial, $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots\ ,\ x_n = 0.$ Isto se deve ao fato dos termos independentes serem todos nulos e portanto a matriz ampliada terá sempre o mesmo posto da matriz dos coeficientes. Se esse posto for igual ao número de variáveis o sistema será determinado, só possuindo a solução trivial. Se o posto for diferente do número de variáveis, o sistema será indeterminado possuindo infinitas soluções, inclusive a solução trivial.

No caso de um sistema linear homogêneo de n equações a n incógnitas cabem as seguintes observações:

1) Seja A uma matriz quadrada $n \times n$, seja B sua matriz equivalente na forma escada. Temos $det\,B = k\,.\,det\,A$, onde $k \neq 0$.

De fato, ao fazermos o escalonamento de A usamos apenas as operações elementares (permutar linhas, multiplicar linha por constante não nula, substituir uma linha por uma sua combinação linear com outra linha), de modo que os respectivos determinantes, em cada processo, ou não se alteram ou ficam multiplicados por uma constante não nula (veja as propriedades 2ª), 4ª), 5ª) e 6ª) dos determinantes). Como conseqüência, segue a afirmação: “O escalonamento não altera a nulidade do determinante de uma matriz quadrada”, isto é,

$$det\,A = 0 \iff det\,B = 0.$$

2) Sejam A a matriz dos coeficientes de um sistema homogêneo $n \times n$, e B sua matriz equivalente na forma escada. Da 1ª propriedade de determinantes segue:

a) $det\ B \neq 0$ se, e somente se, o posto de B é igual ao número de incógnitas.

b) $det\ B = 0$ se, e somente se, o posto de B é menor que o número de incógnitas.

Da observação 1) segue que o $det\ A \neq 0$ se, e somente se, o posto de A é igual ao número de incógnitas e portanto teremos um sistema compatível e determinado.

Assim, como um sistema $AX = 0$ é sempre compatível, temos:

a) Se $det\ A \neq 0$, o sistema só admite a solução trivial $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.

b) Se $det\ A = 0$, o sistema admite infinitas soluções, que devem ser obtidas pelo processo usual de escalonamento.

1.11.1 - Exercícios resolvidos

1) Discutir e resolver o sistema $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases}$

Solução: Trata-se de um sistema homogêneo 3×3. Pela observação 2) vem que $det\ A = 1$ que é diferente de zero. Logo, o sistema só admite solução trivial $x = y = z = 0$. Se quisermos comprovar por escalonamento teremos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \to L_2 - L_1 \\ \to \\ L_3 \to L_3 + L_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \to L_1 - L_2 \\ \to \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_1 \to L_1 + 3L_3 \\ \to \\ L_2 \to L_2 - 2L_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, temos $p_c = p_a = n = 3$. Logo o sistema é compatível e determinado, isto é, admite como solução a trivial, ou seja, $x = 0, y = 0$, $z = 0$.

2) Discutir e resolver o sistema $\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ -x + y + 3z = 0 \end{cases}$

Solução: Trata-se de um sistema linear homogêneo cujo determinante é igual a zero. Portanto, o sistema admite infinitas soluções, obtidas através de escalonamento:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ \to \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ \to \\ L_3 \to L_3 + L_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} L_2 \to -L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \to L_1 - L_2 \\ \to \\ L_3 \to L_3 - 2L_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Temos então que $p_c = 2, p_a = 2,\ n = 3\ \ e\ \ n - p = 1$. Logo, o sistema é compatível e indeterminado, com grau de liberdade igual a *1*. Assim, o sistema associado é:

$$\begin{cases} x\ -\ 2z\ =\ 0 \\ y\ +\ \ z\ =\ 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad x\ =\ 2z,\ y\ =\ -z,\ \forall z\ \in\ \Re.$$

3) Discuta e resolva o sistema $\begin{cases} x - \ \ y - \ \ z = 0 \\ 2x + \ \ y + 2z = 0 \\ 3x + 2y + 3z = 0 \\ x + \ \ y + \ z = 0 \end{cases}$

Solução: Trata-se de um sistema homogêneo não quadrado (4 × 3). É um sistema compatível (pois é homogêneo) mas sua(s) solução(ões) deve(m) ser obtida(s) por escalonamento:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - 3L_1 \\ \to \\ L_4 \to L_4 - L_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_4 \to \frac{1}{2} L_2 \\ \to \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_1 \to L_1 + L_2 \\ L_3 \to L_3 - 5L_2 \\ \to \\ L_4 \to L_4 - 3L2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \to L_2 - L_3 \\ \to \\ L_4 \to L_4 - L_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Temos então que $p_c\ =\ p_a\ =\ n\ =\ 3$ e portanto o sistema é compatível e determinado, tendo apenas a solução trivial $x\ =\ 0,\ y\ =\ 0\ \ \ e\ \ \ z\ =\ 0.$

4) Discuta e resolva o sistema $\begin{cases} 3x + y + 3z + t = 0 \\ x + y + 2z - t = 0 \\ x - y - z - 5t = 0 \end{cases}$

Solução: Trata-se de um sistema homogêneo não quadrado (*3 x 4*); é portanto compatível, mas sua(s) solução(ões) deve(m) ser obtida(s) por escalonamento:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ \to \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \to L_2 - 3L_1 \\ \to \\ L_3 \to L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_2 \to \frac{1}{2} L_2 \\ \to \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \to L_1\ -\ L_2 \\ \to \\ L_3 \to L_3\ +\ 2L_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_3 \to -\frac{1}{8} L_3 \\ \to \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\ 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1\ \to\ L_1\ -\ L_3 \\ \to \\ L_2\ \to\ L_2\ +\ 2L_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Temos então que $p_c = p_a = 3,\ n = 4\ e\ n - p = 1$ e portanto o sistema é compatível e indeterminado, tendo infinitas soluções. Logo o sistema associado é:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2} z = 0 \\ y + \frac{3}{2} z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2}z,\ y = -\frac{3}{2}z,\ \ z \in \Re,\ t = 0.$$

1.11.2 - Exercícios propostos

1) Discutir e resolver os sistemas:

$a)\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - 2y - 3z = 0 \\ x + 4y - z = 0 \end{cases}$ $\qquad b)\begin{cases} 3x + 2y - 12z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 2x - 3y + 5z = 0 \end{cases}$

$c)\begin{cases} 2x + 5y - 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x - 7y - 7z = 0 \end{cases}$ $\qquad d)\begin{cases} 4x + 3y - z + t = 0 \\ x - y + 2z - t = 0 \end{cases}$

2) Verifique se o ponto $A = (1,2,3)$ é solução do sistema $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - 3y + 7z = 0 \\ 2x - 3y + 5z = 0 \end{cases}$. O sistema tem solução única? Em caso negativo, obtenha outra(s) solução(ões) do sistema..

3) Determine os valores de k para que o sistema $\begin{cases} 3x + 6y + 3z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ x + ky + z = 0 \end{cases}$

a) seja compatível e determinado.

b) seja compatível e indeterminado.

c) seja incompatível.

Nos casos em que houver solução, determine-a.

4) Determine os valores de a para que o sistema $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ x + ay - 6z = 0 \end{cases}$ tenha infinitas soluções, e obtenha sua solução geral.

5) Discutir o sistema homogêneo $\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ 2x - 4y + z = 0 \\ 5x - 7y + 5z = 0 \end{cases}$

6) Determine o(s) valor(es) de a, para que o sistema $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \\ \frac{a}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} = 0 \\ \frac{5}{x} - \frac{1}{y} + \frac{4}{z} = 0 \end{cases}$

a) seja indeterminado
b) seja impossível.

7) Para que valores de m o sistema $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + my + z = 2 \\ 2x + my + (m-1)z = 3 \end{cases}$ é determinado?

8) Discutir o sistema $\begin{cases} mx + y = 1 - m \\ x + my = 0 \end{cases}$.

9) Para que valores de *k* o sistema $\begin{cases} x + y = k \\ x + y = sen k \end{cases}$

a) é indeterminado?

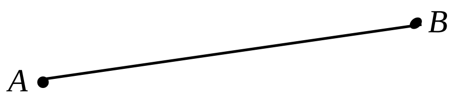
b) é incompatível?

V E T O R E S

Neste capítulo estudaremos conceitos e regras do Cálculo Vetorial, visando sua utilização na Geometria Analítica.

2.1 - INTRODUÇÃO

Consideremos dois pontos *A* e *B*. ***Segmento orientado AB*** é um segmento de reta determinado por estes pontos, considerados numa certa ordem. O ponto *A* chama-se *origem* ou *ponto inicial* e o ponto *B, extremidade* ou *ponto final.*



Dois segmentos orientados *AB* e *CD* são ***coincidentes*** se possuem os mesmos pontos inicial e final, isto é, $AB = CD \Leftrightarrow A = C$ e $B = D$. Note que, se $A \neq B$, $AB \neq BA$.

Um segmento orientado *AB* é ***nulo*** quando o ponto inicial coincide com o ponto final, ou seja, $A = B$.

Dois segmentos orientados *AB* e *CD* são ***opostos*** quando $AB = DC$. Assim, *AB* e *BA* são segmentos orientados opostos.

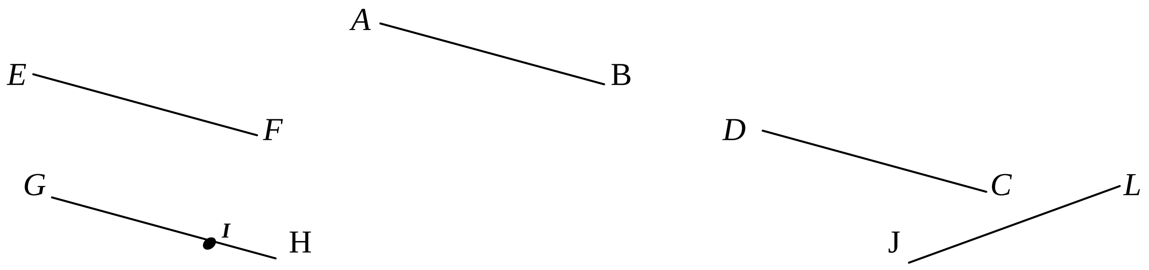
O ***comprimento*** de um segmento orientado é a sua medida em relação a certa unidade de comprimento. O segmento orientado nulo tem comprimento zero. Note que o comprimento de um segmento orientado qualquer é sempre um número real positivo ou nulo.

Dois segmentos orientados *AB* e *CD*, não nulos, têm a mesma direção se estão situados sobre retas suportes paralelas ou coincidentes. Só neste caso podemos comparar seus sentidos. Observe que segmentos orientados opostos têm sentidos contrários.

Exemplos

segmento orientado *AB*
A - origem; *B* - extremidade

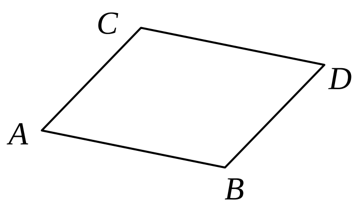
segmento orientado nulo
P - origem e extremidade



Os segmentos orientados *AB, CD, EF, GH* têm a mesma direção. Os segmentos *AB, CD, GH* e *JL* têm o mesmo comprimento. Os segmentos *AB* e *GH* têm a mesma direção, o mesmo comprimento e o mesmo sentido. Note que o segmento nulo *I* está sobre a mesma reta suporte do segmento *GH*. No entanto, eles têm a mesma direção, pois o segmento nulo não tem direção e nem sentido definidos. Os segmentos *JL* e *AB* têm o mesmo comprimento, mas não podemos comparar seus sentidos, pois eles não têm a mesma direção.

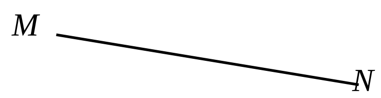
Dois segmentos orientados não nulos *MN* e *PQ* são ***equipolentes*** se têm a mesma direção, o mesmo comprimento e o mesmo sentido. Neste caso, denotaremos por *MN* ~ *PQ*.

Todos os segmentos nulos são equipolentes. Na figura anterior temos *AB* ~ *GH* e *AB* ~ *DC*. Assim, segmentos equipolentes estão contidos na mesma reta suporte ou em retas paralelas.



AB ~ *CD*

AC ~ *BD*



MN não é eqüipolente a *AB*

EF ~ *GH*

Vemos, então, que dois segmentos equipolentes não nulos e não colineares determinam um paralelogramo, isto é, um quadrilátero que tem os lados dois a dois paralelos e de iguais comprimentos, como *ABCD*.

2.1.1 - Propriedades da eqüipolência

1) Reflexiva: *AB* ~ *AB*

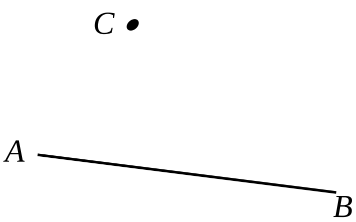
2) Simétrica: Se *AB* ~ *CD*, então *CD* ~ *AB*

3) Transitiva: Se *AB* ~ *CD* e *CD* ~ *PQ* , então *AB* ~ *PQ*

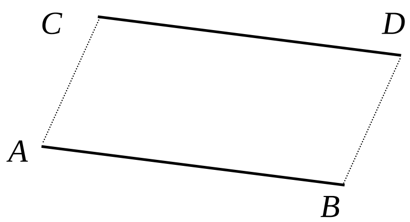
4) Se *AB* ~ *CD* , então *BA* ~ *DC*

5) Se *AB* ~ *CD*, então *AC* ~ *BD* (paralelogramo)

6) Dado um segmento orientado *AB* e um ponto qualquer *C*, existe um único ponto *D* tal que *AB* ~ *CD*



Dados *A*, *B* e *C* ....



existe um único D tal que *AB* ~ *CD*.

Toda relação que satisfaz as três primeiras propriedades (reflexiva, simétrica, transitiva) chama-se relação de equivalência. Assim, a equipolência é uma relação de equivalência no conjunto dos segmentos orientados.

A propriedade 6) assegura que dado um segmento orientado AB podemos obter um outro segmento orientado, equipolente a AB, com origem em qualquer ponto do espaço.

2.2 - VETORES

Chama-se ***vetor*** determinado por um segmento orientado *AB* ao conjunto de todos os segmentos equipolentes a *AB*. As propriedades 1), 2), 3) e 6) da equipolência mostram que um mesmo vetor pode ser determinado por uma infinidade de segmentos equipolentes, cada um deles chamado um representante desse vetor. Logo, se *AB* ~ *CD*, então $\vec{AB} = \vec{CD}$.

Representaremos um ***vetor*** por um segmento nulo ou por um segmento que tenha uma direção, um comprimento e um sentido bem definidos, e que pode estar localizado em qualquer ponto do espaço tridimensional (Propriedade 6). Um vetor será denotado por um seu representante $\vec{AB}$ ou simplesmente por uma letra minúscula encimada por uma seta $\vec{a}$, desde que isto não cause confusão.

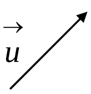
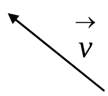
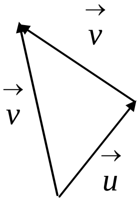
Note que $\vec{AB}$ e $\vec{u}$ representam o mesmo vetor. Eles têm a mesma direção, o mesmo comprimento e o mesmo sentido, estando apenas seus representantes localizados em pontos diferentes.

Iniciaremos agora o estudo das operações com vetores, começando com a Adição de vetores e Multiplicação de um vetor por escalar. Em seguida, trataremos dos produtos entre vetores.

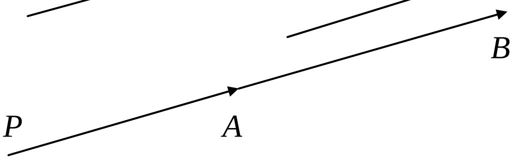
2.2.1 - Adição de vetores

A *soma* de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o vetor $\vec{u} + \vec{v}$ assim obtido: traçamos o vetor $\vec{u}$ a partir de um ponto arbitrário *P* e em seguida o vetor $\vec{v}$ a partir do ponto final de $\vec{u}$. A soma $\vec{u} + \vec{v}$ será o vetor que terá ponto inicial coincidindo com o ponto inicial de $\vec{u}$ e ponto final coincidindo com o ponto final de $\vec{v}$. Se $\vec{u} = \vec{AB}$ e $\vec{v} = \vec{BC}$, então $\vec{u} + \vec{v} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.

Exemplos:

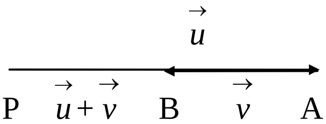
1) A soma de $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ será $\vec{u} + \vec{v}$ 

2) A soma de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ será



$\vec{u} = \vec{PA}; \quad \vec{v} = \vec{AB}; \quad \vec{u} + \vec{v} = \vec{PB}$

3) A soma de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ será

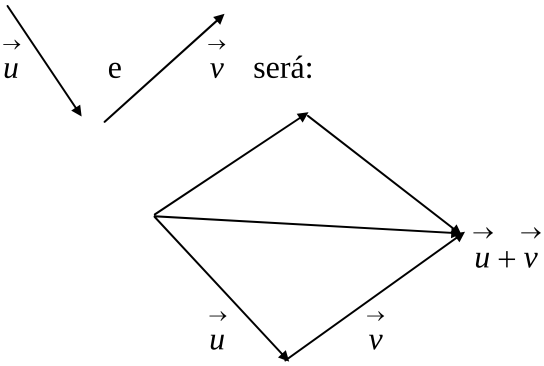


$\vec{u} = \vec{PA}; \vec{v} = \vec{AB}; \quad \vec{u} + \vec{v} = \vec{PB}$

Observação: Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não tiveram a mesma direção, a soma entre eles pode ser obtida através da **regra do paralelogramo**. O vetor $\vec{u} + \vec{v}$ será representado pela diagonal maior do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$, com a mesma origem.

Exemplo:

1) A soma de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ será:



2.2.2 - Propriedades da adição de vetores

1) Associativa: Dados três vetores quaisquer $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$ tem-se $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ *.(fig. 03)*

2) Comutativa: Dados dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ quaisquer, tem-se $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$. *(fig. 04)*

3) Elemento neutro: Dado um vetor $\vec{a}$ qualquer, existe um vetor $\vec{0}$, chamado de vetor nulo, tal que $\vec{0} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

4) Simétrico: Dado qualquer vetor $\vec{a}$, existe o vetor $-\vec{a}$ tal que $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

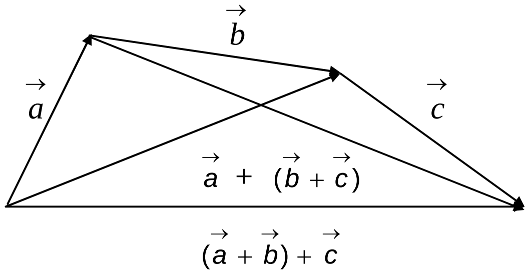


fig. 03

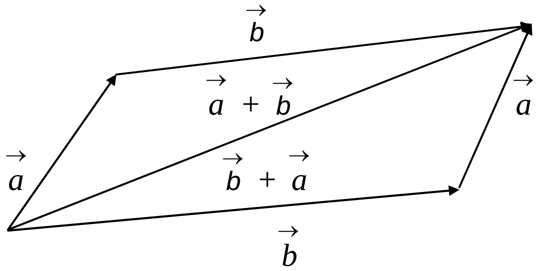
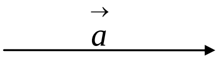


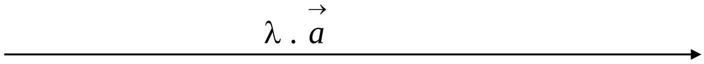
fig. 04

2.2.3 - Multiplicação por escalar

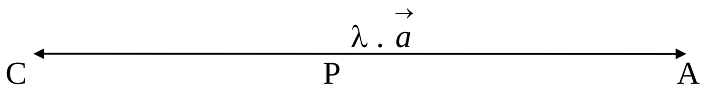
Dado um vetor $\vec{a}$ e um escalar λ real, multiplicando-se λ por $\vec{a}$ obtém-se o vetor $\lambda\vec{a}$, que terá a mesma direção do vetor $\vec{a}$ e seu comprimento é um múltiplo $|\lambda|$ do comprimento de $\vec{a}$. O vetor $\lambda\vec{a}$ terá o mesmo sentido de $\vec{a}$ se λ > 0 e sentido contrário de $\vec{a}$ se λ < 0. Se λ = 0, então $\lambda\vec{a} = \vec{0}$.

Exemplos:

1) Dado o vetor  e $\lambda = 3$ então $\lambda\vec{a}$ será:

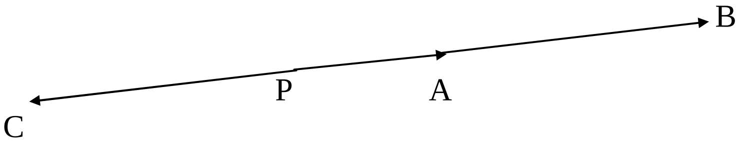


2) Se λ = -2 ,



$$\vec{PA} = \vec{a} \qquad \vec{PC} = -\,2\vec{a}$$

3) De um modo geral, tem - se:



$$\vec{PA} = \vec{v},\;\; \vec{PB} = x.\,\vec{v},\;\; se\;\; x > 0\;\; e\;\; \vec{PC} = y.\,\vec{v},\;\; se\;\; y < 0.$$

2.2.4 - Propriedades da multiplicação por escalar

Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são vetores e $\lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então

1) $\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\,\vec{a} + \lambda\,\vec{b}$

2) $(\alpha+\beta)\,\vec{a} = \alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{a}$

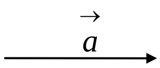
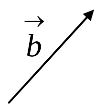
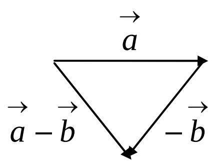
3) $\alpha(\beta\,\vec{a}) = (\alpha\beta)\,\vec{a}$

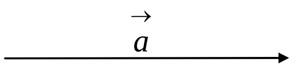
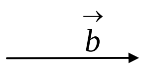
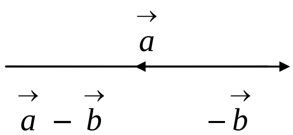
4) $1\vec{a} = \vec{a}$

Observação : Dados os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, a **diferença** entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é o vetor

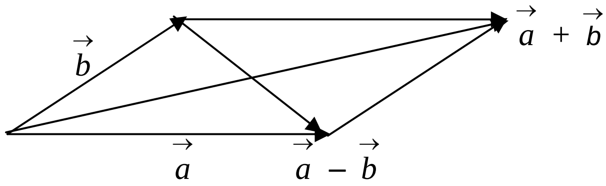
$$\vec{c} = \vec{a} + (-\,\vec{b}\,) = \vec{a} - \vec{b}\,.$$

Exemplos:

1) A diferença entre  e  será 

2) A diferença entre  e  será 

Geometricamente, podemos representar também a diferença entre dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ não paralelos, pela lei do paralelogramo. (ver figura abaixo)

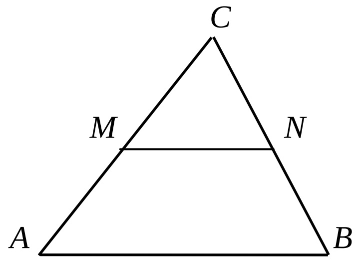


2.2.5 - Exercícios resolvidos

1) Dado um triângulo qualquer *ABC*, seja *M* o ponto médio de *AC* e *N* o ponto médio de *BC*. Demonstre que *MN* é paralelo a *AB*, e $\vec{MN} = \frac{1}{2}\vec{AB}$.

Solução: Sejam M e N os pontos médios de AC e BC respectivamente. Então:

$$\vec{AM} = \vec{MC} = \frac{1}{2}\vec{AC}, \vec{BN} = \vec{NC} = \frac{1}{2}\vec{BC}.$$



Da figura ao lado, vemos que:

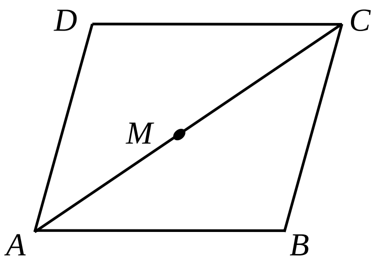
$$\vec{MN} = \vec{MC} + \vec{CN} = \frac{1}{2}\vec{AC} - \frac{1}{2}\vec{BC} =$$

$$= \frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{CB} = \frac{1}{2}\left(\vec{AC} + \vec{CB}\right) = \frac{1}{2}\vec{AB}$$

Assim $\vec{MN}$ é um múltiplo de $\vec{AB}$ e, portanto, esses dois vetores tem a mesma direção. Como *M* não pertence ao lado *AB* do triângulo *ABC*, conclui-se que $\vec{MN}$ é paralelo a $\vec{AB}$.

2) Mostre que as diagonais de um paralelogramo cortam-se ao meio.

Solução: Se *ABCD* é um paralelogramo, temos: $\vec{AB} = \vec{DC}$ e $\vec{AD} = \vec{BC}$. Se *M* é ponto médio da diagonal *AC* do paralelogramo, então $\vec{AM} = \vec{MC}$ e $\vec{DA} = \vec{CB}$ Devemos mostrar que *M* é também, o ponto médio da diagonal *DB*, isto é, $\vec{MB} = \vec{DM}$. De fato, $\vec{DM} = \vec{DA} + \vec{AM} = \vec{CB} + \vec{MC} = \vec{MB}$, como queríamos.

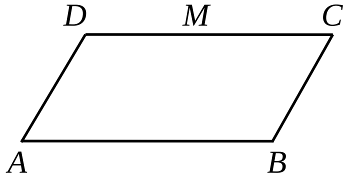


2.2.6 - Exercícios propostos

1) Dado o paralelogramo *ABCD*, onde *M* é o ponto médio do lado *DC*, completar:

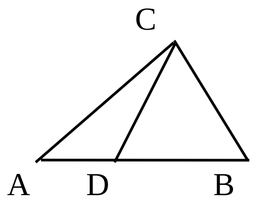
$a)\ \vec{AD} + \vec{AB} =$ $\qquad$ $c)\ \vec{AC} - \vec{BC} =$

$b)\ \vec{BA} + \vec{DA} =$ $\qquad$ $d)\ \vec{BM} - \frac{1}{2}\vec{DC} =$

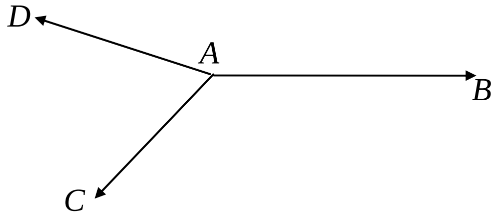


2) Provar que os pontos médios dos lados de um quadrilátero qualquer são vértices de um paralelogramo. (Sugestão: Use o exemplo 1)).

3) Na figura ao lado $\vec{DB} = 2\vec{AD}$. Exprimir $\vec{CD}$ em função de $\vec{AC}$ e $\vec{BC}$.

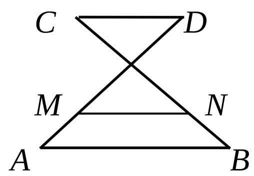


4) Na figura ao lado $\vec{AB}, \vec{AC}$ e $\vec{AD}$ estão no mesmo plano. Construir, graficamente, com origem em *A*, o vetor $\vec{v}$ tal que $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} + \vec{v} = \vec{0}$

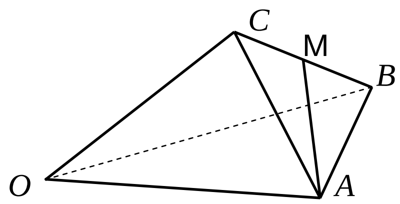


5) Na figura ao lado, $\vec{MA} + \vec{MD} = \vec{0}$ e $\vec{NB} + \vec{NC} = \vec{0}$.

Escrever o vetor $\vec{AB} + \vec{DC}$ em função de $\vec{NM}$.



6) Dado o tetraedro *OABC* da figura ao lado, em que $\vec{0A} = \vec{a}$, $\vec{0B} = \vec{b}$ e $\vec{0C} = \vec{c}$ e *M* é o ponto médio do lado *BC*, escrever o vetor $\vec{AM}$ em função de $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.



7) Verificar as propriedades da multiplicação por escalar para $\lambda < 0$.

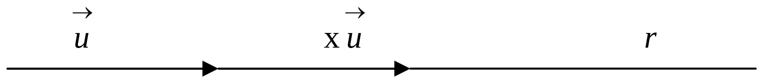
2.3 - DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR

Vamos agora analisar como se comportam alguns vetores em conjunto, quanto ao seu direcionamento.

2.3.1 - Dois vetores

Dois vetores do espaço tridimensional são ditos ***linearmente dependentes*** **(L.D.)** se podem ser representados na mesma reta. Caso contrário, eles serão ***linearmente independentes*** **(L.I.)**

Se o vetor $\vec{u}$ é não nulo, para qualquer escalar *x* o vetor $\vec{v} = x\vec{u}$ é dito ***combinação linear*** de $\vec{u}$. Para cada valor de $x \in \Re$, o vetor $x\vec{u}$ é *colinear* com o vetor $\vec{u}$. Logo o vetor $\vec{u}$ gera uma reta *r*.

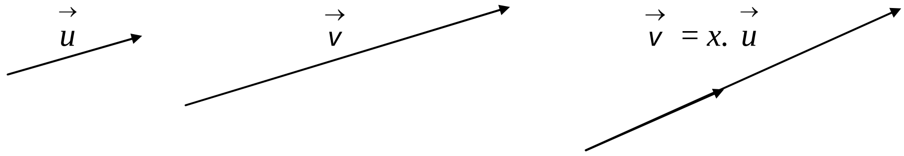


Note que um vetor $\vec{u} \neq \vec{0}$ é L.I. . Assim, dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são L.D., se um deles for combinação linear do outro, isto é, se existir um $x \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v} = x\,\vec{u}$ $(ou\; \vec{u} = x\,\vec{v})$.

Exemplos:

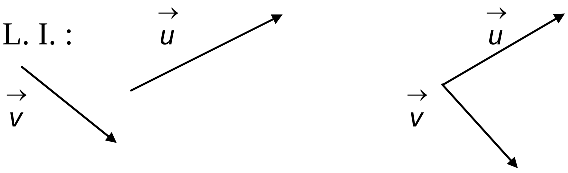
1) Os pares de vetores abaixo são L.D. :

a)



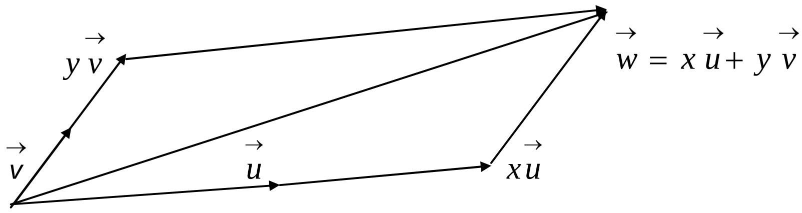
b)

2) Os vetores $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ são L. I. :

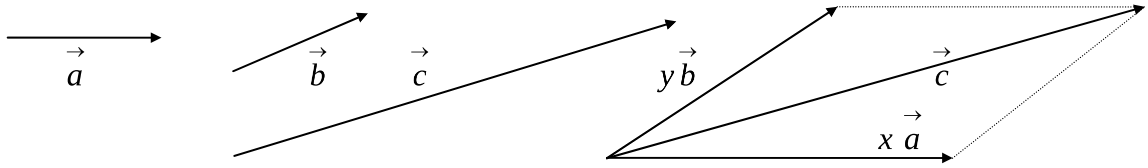


Observação : Se um dos vetores considerados $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ for nulo, então eles serão *L.D.* De fato, se $\vec{u} = \vec{0}$, basta tomar $x = 0$ e teremos $\vec{u} = x\,\vec{v}$ ou $\vec{0} = 0\,\vec{v}$.

Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ um vetor $\vec{w}$ é dito *combinação linear* de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ se existirem escalares $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{w} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ forem vetores *L.I.* (isto é, não colineares) todos os vetores que são combinações lineares de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ estão no mesmo plano de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Reciprocamente, todo vetor $\vec{w}$ do plano que contém $\vec{u}$ e $\vec{v}$ pode ser escrito como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Dizemos então que dois vetores *L.I* geram um plano.



Dados $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$ vetores coplanares, com $\vec{a}$ e $\vec{b}$ *L.I.*, para se obter $\vec{c}$ graficamente como combinação linear de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ tomamos um ponto *P* qualquer e nele localizamos os vetores $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$. Pela extremidade de $\vec{c}$ traçamos a reta paralela ao vetor $\vec{a}$ até cortar a reta que contém o vetor $\vec{b}$ e pela extremidade de $\vec{c}$ traçamos a reta paralela ao vetor $\vec{b}$ até cortar a reta que contém o vetor $\vec{a}$. Dessa forma obtemos o vetor $y\vec{b}$ é colinear com $\vec{b}$ e $x\vec{a}$ é colinear com $\vec{a}$. Pela regra do paralelogramo, $\vec{c}$ se escreve como combinação linear de $\vec{a}$ *e* $\vec{b}$, isto é, $\vec{c} = x\,\vec{a} + y\,\vec{b},\ x, y \in \mathbb{R}.$



Sendo $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, os vetores $x\vec{a}$ e $y\vec{b}$ são ditos **componentes** de $\vec{c}$ nas direções $\vec{a}$ e $\vec{b}$, respectivamente. Os escalares $x, y \in \mathbb{R}$ são ditos **coordenadas** de $\vec{c}$ em relação aos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, respectivamente.

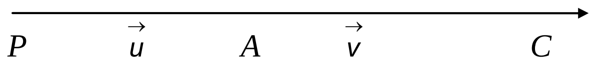
Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são vetores L.I., qualquer outro vetor $\vec{c}$ do plano gerado por $\vec{a}$ e $\vec{b}$ se escreve de maneira única como combinação linear de $\vec{a}$ e $\vec{b}$, isto é, tem **um único** par de coordenadas em relação $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

2.3.2 - Três vetores

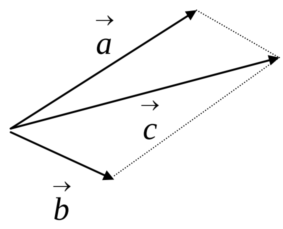
Três vetores do espaço tridimensional são ditos **linearmente dependentes (*L.D*)** se eles forem coplanares. Caso contrário eles serão ditos **linearmente independentes (*L.I.*)**. Assim, três vetores serão *L.D.* se um deles puder ser escrito como combinação linear dos outros. Eles serão *L. I.* quando for impossível escrever uma tal combinação.

Exemplos

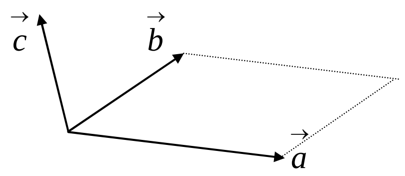
1) Os três vetores abaixo são *L. D.*.

a) 

$\vec{PA} = \vec{u}$; $\vec{AC} = \vec{v}$; $\vec{PC} = \vec{w}$.

b) 

2) Os vetores $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$ ao lado, são linearmente independentes *(LI)*.

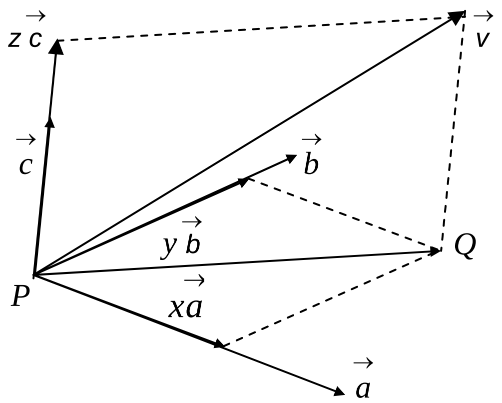


Observação : Dados três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, se um deles for nulo então $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, serão *L.D.*. De fato, se $\vec{u} = \vec{0}$, então sempre poderemos escrever $\vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w}$ bastando para isto, tomarmos $x = y = 0$, ou seja, $\vec{0} = 0\vec{v} + 0\vec{w}$.

Dados três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, dizemos que um vetor $\vec{a}$ é dito ***combinação linear*** de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, se existirem escalares $x, y, z \in \Re$ tais que $\vec{a} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$. Se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, forem *L.I*, então eles *geram* o espaço tridimensional, isto é, qualquer vetor $\vec{a}$ pode ser escrito como combinação linear de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, e reciprocamente, podemos obter qualquer outro vetor $\vec{b}$

partindo-se de $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$, mediante escolha conveniente de escalares: $m\vec{u}+n\vec{v}+l\vec{w}=\vec{b}$. Se $\vec{a}=x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w}$, os vetores $x\vec{u}$, $y\vec{v}$ e $z\vec{w}$ chamam-se ***componentes*** de $\vec{a}$ em relação aos vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$. Os escalares *x, y* e *z* são as *coordenadas* de $\vec{a}$ em relação a $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$, respectivamente.

Dados três vetores linearmente independentes $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$, as coordenadas de um vetor qualquer $\vec{v}$, em relação a $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$, são obtidas graficamente da seguinte maneira: Escolhemos um ponto *P* qualquer como origem dos vetores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ e $\vec{v}$. Pela extremidade de $\vec{v}$ traçamos uma reta paralela a um dos vetores $\vec{a}, \vec{b}$ ou $\vec{c}$, por exemplo $\vec{c}$, até encontrar o plano determinado pelos outros dois vetores (no caso, $\vec{a}$ e $\vec{b}$) no ponto Q, obtendo o vetor $\vec{PQ}$ (ver figura abaixo). Os vetores $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{PQ}$ são coplanares. Então podemos obter graficamente $\vec{PQ}$ como combinação linear de $\vec{a}$ e $\vec{b}$, $\vec{PQ}=x\vec{a}+y\vec{b}$. Os vetores $\vec{v}, \vec{c}$ e $\vec{PQ}$ são coplanares, e, portanto, podemos obter $\vec{v}$ como combinação linear de $\vec{PQ}$ e $\vec{c}$, ou seja, $\vec{v}=\vec{PQ}+z\vec{c}$. Logo, $\vec{v}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$.



2.3.3 - Teorema

Os vetores $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$ do espaço tridimensional são linearmente independentes se, e somente se, a equação $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0}$, com *x, y, z* $\in \mathbb{R}$, só possui a solução nula *x = 0, y = 0, z = 0.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Suponhamos que os vetores $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$ sejam *L.I.* (isto é, não nulos e não coplanares) e formemos a combinação linear $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0}$, com *x, y, z* $\in \mathbb{R}$. Se um dos coeficientes *x, y* ou *z* fosse não nulo, por exemplo, se $x \neq 0$, poderíamos escrever $\vec{a}=-\frac{y}{x}\vec{b}-\frac{z}{x}\vec{c}$ e assim o vetor $\vec{a}$ seria combinação linear de $\vec{b}$ e $\vec{c}$, isto é, $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$

seriam coplanares, logo *L.D.*, contra a hipótese. Logo nenhum dos coeficientes pode ser não nulo e a única solução é $x = 0, y = 0,$ e $z = 0$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que a equação $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$ (*) só possua a solução nula $x = 0$, $y = 0, z = 0$ e mostremos que $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$ são não nulos, não colineares e não coplanares.

i) De fato, os vetores $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$ são não nulos, pois se um deles fosse nulo, por exemplo, $\vec{c} = \vec{0}$, teríamos $0\vec{a} + 0\vec{b} + z\vec{0} = \vec{0}$, $\forall z \in \mathbb{R}$, e, portanto, a equação (*) teria uma solução não nula $x = 0, y = 0, z \neq 0$, contrariando a hipótese.

ii) Se $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$ fossem colineares, existiriam escalares não nulos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{a} = \alpha\vec{c}$, $\vec{b} = \beta\vec{c}$. Substituindo na equação (*), obtemos:

$$x\alpha\vec{c} + y\beta\vec{c} + z\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow (x\alpha + y\beta + z)\vec{c} = \vec{0}$$

donde $x\alpha + y\beta + z = 0$, pois $\vec{c} \neq \vec{0}$ (por i), e então $z = -(x\alpha + y\beta)$

Assim a equação (*) poderia ter uma solução não nula $x \neq 0, y \neq 0, z = -(x\alpha + y\beta)$, com $\alpha \neq 0$, contra a hipótese. Logo $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$ são não colineares.

iii) Se $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$ fossem coplanares e não colineares então um desses vetores, por exemplo, $\vec{b}$, seria combinação linear dos outros dois, isto é, existiriam escalares, não todos nulos, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{b} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{c}$. Assim, a equação *(1)* ficaria:

$$(x + y\alpha)\vec{a} + (y\beta + z)\vec{c} = \vec{0} \qquad (2)$$

Se $\vec{a}$ e $\vec{c}$ fossem colineares, então $\vec{a} = \lambda\vec{c}, \lambda \neq 0$, e a equação *(2)* ficaria

$$(x\lambda + y\alpha\lambda)\vec{c} + (y\beta + z)\vec{c} = \vec{0}$$

onde $x\lambda + y\alpha\lambda + y\beta + z = 0$ ou $z = -(x\lambda + y\alpha\lambda + y\beta)$ e a equação *(1)* teria uma solução não nula, contrariando novamente a hipótese. Logo, $\vec{a}$ e $\vec{c}$ não são colineares, e portanto são *L.I.* Se na equação *(2)* um dos coeficientes fosse não nulo, por exemplo, se $x + y\alpha \neq 0$, teríamos $\vec{a} = -\dfrac{(y\beta + z)}{x + y\alpha}\vec{c}$ e $\vec{a}$ e $\vec{c}$ seriam *L.D.*, absurdo. Logo em *(2)* temos $x + y\alpha = 0$ e $y\beta + z = 0$.

Portanto, $x = -y\alpha$ $z = -y\beta$, com $\vec{b} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{c}$ e a equação *(1)* teria então uma solução não nula, contra a hipótese. Logo, os vetores $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$ não podem ser coplanares, e portanto são *L.I.*

Definição: Uma ***base*** do espaço tridimensional é um conjunto de três vetores { $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ } linearmente independentes.

Observação: Qualquer vetor $\vec{v}$ pode ser escrito, de maneira única, como combinação linear dos vetores de uma base { $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ }. Deixamos esta verificação a cargo do leitor.

2.3.4 - Exercícios resolvidos

1) Que condições devem satisfazer os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, para que os vetores $\vec{a}+\vec{b}$ e $\vec{a}-\vec{b}$ sejam linearmente dependentes ?

Solução: Os vetores $\vec{a}+\vec{b}$ e $\vec{a}-\vec{b}$ serão *L.D.* se forem colineares, isto é, se existir $x \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{a}+\vec{b} = x(\vec{a}-\vec{b}) \Rightarrow (1-x)\vec{a} + (1+x)\vec{b} = \vec{0}$. Se $x = 1$, então $\vec{b}=\vec{0}$ e $\vec{a}$ é qualquer vetor. Se $x = -1$, então $\vec{a}=\vec{0}$ e $\vec{b}$ é qualquer vetor. Se $x \neq \pm 1$, então $\vec{a}=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)\vec{b}$, isto é, $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são colineares. Logo, $\vec{a}+\vec{b}$ e $\vec{a}-\vec{b}$ serão colineares se $\vec{a}=\vec{0}$, ou $\vec{b}=\vec{0}$, ou se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ forem colineares.

2) Se { $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ } é uma base, mostre que { $\vec{a}+\vec{b}, 2\vec{a}-3\vec{b}-\vec{c}, \vec{b}+2\vec{c}$ } também é uma base.

Solução: Os vetores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ formarão uma base se forem *L.I*, e estes vetores serão *LI* se a equação $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0}$ só admitir a solução trivial $x = y = z = 0$. Portanto, os vetores $\vec{a}+\vec{b}, 2\vec{a}-3\vec{b}-\vec{c}, \vec{b}+2\vec{c}$ serão linearmente independentes se

$$m(\vec{a}+\vec{b})+n(2\vec{a}-3\vec{b}-\vec{c})+p(\vec{b}+2\vec{c})=\vec{0} \qquad (*)$$

implicar em $m = n = p = 0$. De (*) obtemos um sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} m + 2n = 0 \\ m - 3n + p = 0 \\ -n + 2p = 0 \end{cases}$$

cujo determinante da matriz principal do sistema é igual a $-12 \neq 0$. Assim o sistema acima só admite a solução trivial $m = n = p = 0$. Logo a equação (*) só admite a solução $m = n = p = 0$ e portanto os vetores $\vec{a}+\vec{b}, 2\vec{a}-3\vec{b}-\vec{c}, \vec{b}+2\vec{c}$ são *L.I.*, e assim formam uma base.

2.3.5 - Exercícios propostos

1) Considere a equação $x_1\vec{a}+y_1\vec{b}+z_1\vec{c}=x_2\vec{a}+y_2\vec{b}+z_2\vec{c}$

i) mostre que se $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$ são *L.I.* então $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$.

ii) mostre que se $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$ são *L.D.*, então não podemos concluir que $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$.

2) Sejam $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$ vetores que representam as arestas de um paralelepípedo. Expresse cada uma das quatro diagonais internas como combinação linear de $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$.

3) Suponha que $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$ sejam *L.I.*. Como devem ser os escalares *x*, $y \in \mathbb{R}$ de modo que o vetor $\vec{AD} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$ seja paralelo ao vetor $\vec{AB}$, mas de sentido contrário?

4) Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas: justificando suas respostas. Tente representar graficamente cada situação.

a) Dois vetores $\vec{AB}$ e $\vec{CD}$ são iguais se, e somente se, $A = C$ e $B = D$.
b) Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ podem ser paralelos, mas não colineares.
c) Se $\vec{u} = \vec{0}$, então os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são coplanares, quaisquer que sejam os vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$.
d) Se $\vec{v} = \vec{0}$, então os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são colineares, quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}$ *e* $\vec{w}$.
e) Três vetores são *L.D.* se, e somente se, forem colineares.

2.4- SISTEMAS DE COORDENADAS NO ESPAÇO

Tomemos no espaço um ponto *O*, que chamaremos de origem, e por este ponto trace três retas mutuamente perpendiculares. Se atribuirmos a cada uma dessas retas uma orientação ou sentido de percurso, teremos três eixos coordenados, cujas partes positivas correspondem ao sentido indicado pelas retas, e que se chamarão, eixo dos *x*, eixo dos *y* e eixo dos *z*, respectivamente, os quais denotaremos por *0x*, *0y* e *0z*. Um ponto *P* qualquer do espaço tridimensional será indicado por suas coordenadas sobre os eixos *0x*, *0y* e *0z*. Observe que a cada ponto *P* do espaço podemos associar um vetor $\vec{OP}$ e a cada vetor $\vec{v}$ está associado um ponto do espaço, a saber, seu ponto final. (ver figura 01)

Um vetor é **unitário** quando seu comprimento igual a *1*, na unidade de medida de comprimento adotada. Sejam $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$ vetores unitários no sentido positivo dos eixos *0x*, *0y* e *0z*, respectivamente. Observe que $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$ são *L.I* e portanto formam uma base para o espaço tridimensional, chamada de *base canônica*. Logo, qualquer vetor $\vec{v} = \vec{OP}$ pode ser escrito como combinação linear destes vetores, isto é, $\vec{v} = \vec{OP} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$. Podemos também identificar o vetor $\vec{v}$ por $\vec{v} = (x, y, z)$ ou $P = (x, y, z)$. Desse modo, podemos definimos

$$\mathbb{R}^3 = \{P = (x, y, z), x, y, z \in \mathbb{R}^3\} \text{ ou } \mathbb{R}^3 = \left\{\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, x, y, z \in \mathbb{R}\right\}$$

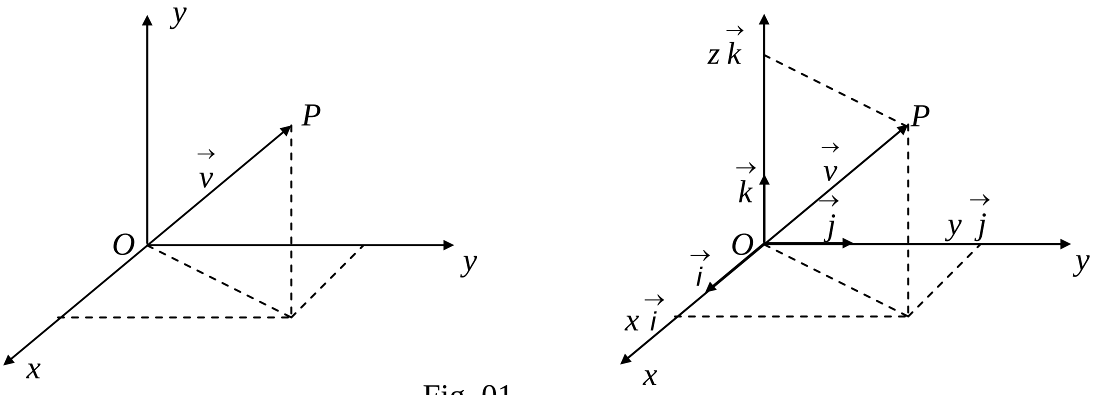
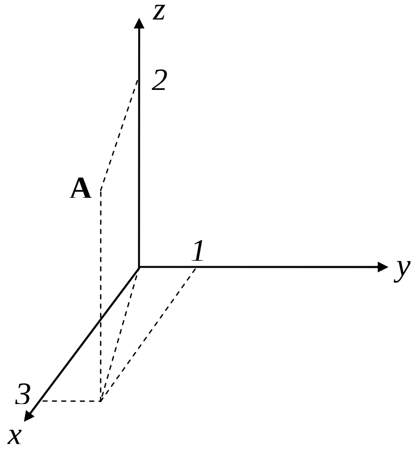
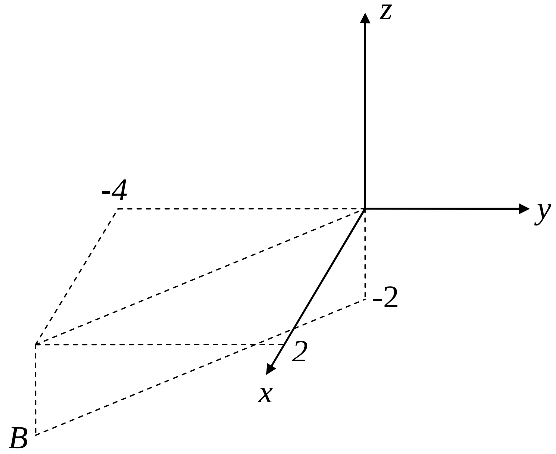


Fig. 01

Exemplos:

1) Vamos marcar pontos $A = (3, 1, 2)$ e $B = (2, -4, -2)$.





2.4.1 - Operação com vetores (enfoque analítico)

Considere os vetores $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ e $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ e o escalar $x \in \mathbb{R}^3$. Definimos a soma entre estes vetores como sendo o vetor

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\vec{i} + (a_2 + b_2)\vec{j} + (a_3 + b_3)\vec{k}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ a_3 + b_3)$$

e a multiplicação do vetor $\vec{a}$ pelo escalar x, como sendo

$$x\vec{a} = (xa_1)\vec{i} + (xa_2)\vec{j} + (xa_3)\vec{k} \quad \text{ou} \quad x\vec{a} = (xa_1,\ xa_2,\ xa_3)$$

Essas definições decorrem das propriedades geométricas das operações envolvidas. Por outro lado, analiticamente, as propriedades são facilmente demonstradas usando propriedades conhecidas dos números reais.

Exemplos:

1) Sejam $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ **e** $\vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 3\vec{k}$ vetores. Calcule $\vec{a} + \vec{b}$ **,** $\frac{1}{2}\vec{b}$ **e** $2\vec{a} - 3\vec{b}$ **.**

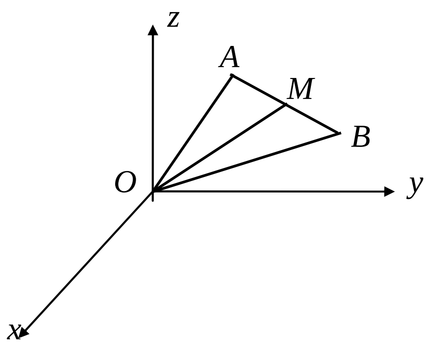
Solução: Temos que

$$\vec{a}+\vec{b}=(3+2)\,\vec{i}+(1-4)\,\vec{j}+(2-3)\,\vec{k}=5\,\vec{i}-3\,\vec{j}-\vec{k} \quad \text{ou} \quad \vec{a}+\vec{b}=(5,-3,-1)$$

e $\quad \frac{1}{2}\vec{b}=\left(\frac{1}{2}.2\right)\vec{i}+\left(\frac{1}{2}(-4)\right)\vec{j}+\left(\frac{1}{2}(-3)\right)\vec{k}=\vec{i}-2\,\vec{j}-\frac{3}{2}\vec{k} \quad$ ou $\quad \frac{1}{2}\vec{b}=\left(1,-2,-\frac{3}{2}\right).$

Da mesma forma $2\,\vec{a}-3\,\vec{b}=14\,\vec{j}+13\,\vec{k}$ ou $2\,\vec{a}-3\,\vec{b}=(0,14,13)$.

2) Sendo $A=(a_1, a_2, a_3)$ e $B=(b_1, b_2, b_3)$., encontre as coordenadas do ponto médio de AB.



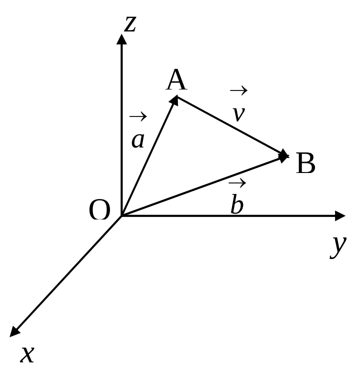
Solução: Seja M o ponto médio de AB. Os pontos A, B e M determinam os vetores $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OM}$, que têm as mesmas coordenadas dos pontos A, B e M, respectivamente. Da figura ao lado temos que $\vec{OM}=\vec{OA}+\vec{AM}$ e $\vec{OM}=\vec{OB}+\vec{BM}$.

Somando membro a membro e lembrando que $\vec{AM}=\vec{MB}=-\vec{BM}$, obtemos:

$$2\vec{OM}=\vec{OA}+\vec{OB} \Rightarrow \vec{OM}=\frac{1}{2}(\vec{OA}+\vec{OB})=\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)\vec{i}+\left(\frac{a_2+b_2}{2}\right)\vec{j}+\left(\frac{a_3+b_3}{2}\right)\vec{k}$$

Logo, $M=\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \frac{a_3+b_3}{2}\right)$.

2.4.2 - Vetor determinado por dois pontos



Dados dois pontos A e B do $\mathbb{R}^3$, o segmento AB determina o vetor $\vec{AB}=\vec{v}$. Considerando o sistema de eixos ortogonais $Oxyz$, os pontos A e B terão as coordenadas $A=(a_1, a_2, a_3)$ e $B=(b_1, b_2, b_3)$. O ponto A determina o vetor $\vec{OA}=\vec{a}$, e o ponto B, o vetor $\vec{OB}=\vec{b}$. Logo o vetor $\vec{AB}=\vec{v}$ será dado por

$$\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA} \Rightarrow \vec{v}=\vec{b}-\vec{a} \Rightarrow \vec{AB}=(b_1-a_1)\,\vec{i}+(b_2-a_2)\,\vec{j}+(b_3-a_3)\,\vec{k}$$

Exemplo:

1) As coordenadas do vetor $\vec{PQ}$ determinado pelos pontos $P=(1,6,-1)$ e $Q=(2,-5,-1)$ são $(1,-11,0)$. Então $\vec{PQ}=\vec{i}-11\vec{j}$.

Observação: Quando se pede as coordenadas de um vetor do $\mathbb{R}^3$, sem especificar a base, subentende-se que se trata da base canônica $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$

2.4.3 - Dependência e Independência Linear em $\mathbb{R}^3$

Sejam $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ e $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ vetores. Do Teorema *2.3.3* tem-se que esses vetores serão *L.I.* se, e somente se, a equação $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$ tiver apenas a solução nula, isto é, $x = y = z = 0$. Então:

$$x(a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) + y(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) + z(c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}) = \vec{0} \Rightarrow$$

$$(a_1x + b_1y + c_1z)\vec{i} + (a_2x + b_2y + c_2z)\vec{j} + (a_3x + b_3y + c_3z)\vec{k} = \vec{0}$$

Como $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$ são vetores *L.I.* em $\mathbb{R}^3$, obtemos o sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

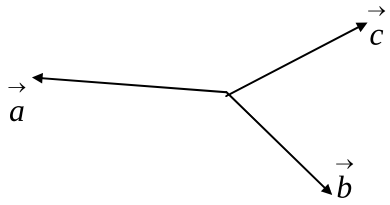
No capítulo *1* vimos que um sistema homogêneo sempre tem solução e esta poderá ser obtida, por exemplo, por escalonamento. Se ele for compatível e determinado terá uma única solução, a solução trivial $x = y = z = 0$. Neste caso, a equação só terá a solução trivial e os vetores $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$ serão *L.I.* Se o sistema *(2)* for compatível e indeterminado, terá infinitas soluções e a equação terá outras soluções além da trivial e, portanto, os vetores $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$ serão *L.D.* Lembramos que um sistema homogêneo só admite a solução trivial (nula) se, e somente se, o determinante da matriz dos coeficientes do sistema é não nulo. Logo, podemos concluir que os vetores $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$ serão *L.I.* se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (*)$$

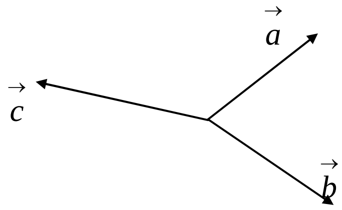
Observando os vetores dados $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$, vemos que $(*)$ é o determinante da matriz cujas colunas são formadas pelas coordenadas dos vetores dados. Esta é a maneira analítica de verificar se três vetores do $\mathbb{R}^3$ são *L.I.* ou *L.D.*, e, portanto, se formam ou não uma base de $\mathbb{R}^3$.

2.4.4 - Orientação no espaço

Uma base $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ será positiva quando o sentido de rotação de $\vec{a}$ para $\vec{b}$, de $\vec{b}$ para $\vec{c}$ e de $\vec{c}$ para $\vec{a}$, no plano que contém os respectivos vetores, for o sentido anti-horário, e negativa quando for o sentido horário. Na base canônica $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ notamos que o sentido de rotação de $\vec{i}$ para $\vec{j}$, de $\vec{j}$ para $\vec{k}$ e de $\vec{k}$ para $\vec{i}$, no plano respectivo, é o sentido anti-horário. Neste caso, dizemos que a base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ é uma **base positiva.**



base positiva $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$



base negativa $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$

Em *2.4.3*, para verificarmos se os vetores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ eram *L.I.* (isto é, formavam base do $\mathbb{R}^3$) obtivemos o sistema *(2)*, cuja matriz dos coeficientes é:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

Observe que as colunas da matriz *A* são as coordenadas dos vetores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nessa ordem, e estes vetores serão *L.I.* se, e somente se, o determinante de *A* for diferente de zero, isto é, $det\, A \neq 0$.

Consideremos a base canônica $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Temos que

$$\vec{i} = 1\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + 0\,\vec{k}$$

$$\vec{j} = 0\,\vec{i} + 1\,\vec{j} + 0\,\vec{k}$$

$$\vec{k} = 0\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + 1\,\vec{k}$$

Assim, a matriz dos coeficientes do sistema correspondentes *a (2)* é a identidade I_3 cujo determinante igual a *1* e, portanto positivo. Podemos então dizer que uma base $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ é positiva se o determinante da matriz dos coeficientes do sistema *(2)* for positivo, isto é, se $det\, A > 0$. Caso contrário será negativa, isto é, se $det\, A < 0$, $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ será uma base negativa.

Observe que estaremos sempre trabalhando com bases orientadas, isto é, tomando os vetores na ordem dada. Caso tomássemos esses mesmos vetores em outra ordem, e formássemos a matriz dos coeficientes do sistema obtido, obteríamos suas colunas em ordens diferentes o que poderia acarretar a troca de sinal do determinante e, portanto, a base poderia mudar ou não de sinal. Todas as bases de $\mathbb{R}^3$ ficam separadas em duas classes: as positivas e as negativas. Duas bases de uma mesma classe têm a mesma orientação, e duas bases de classes diferentes têm orientação oposta.

2.4.5 - Coordenadas de um vetor numa base

Sejam $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ e $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ vetores de uma base do $\Re^3$ e $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ um vetor qualquer do $\mathbb{R}^3$. Como já vimos, $\vec{v}$ pode ser escrito como combinação linear dessa base, isto é, $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$, sendo x, y e z suas coordenadas obtidas como segue. Então

$$v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k} = x\,(a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) + y\,(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) + z(c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k})$$

$$= (a_1x + b_1y + c_1z)\,\vec{i} + (a_2x + b_2y + c_2z)\,\vec{j} + (a_3x + b_3y + c_3z)\,\vec{k}$$

Sendo os vetores $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$ linearmente independentes, temos o sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = v_1 \\ a_2x + b_2y + c_2y = v_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = v_3 \end{cases}$$

que resolvido por um método conveniente, nos dá os valores de *x*, *y* e *z*, que são as coordenadas de $\vec{v}$ na base $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

2.4.6 - Exercícios resolvidos

1) Verificar se os vetores $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{c} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ são *L.I.* ou *L.D*

Solução: Três vetores de $\mathbb{R}^3$ são *L.I.* se forem não coplanares. Pelo teorema *2.3.3*, os vetores $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$ serão *L.I.* se, e somente se, a equação $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$ admite apenas a solução nula, $x = y = z = 0$. Caso contrário, eles serão *L.D.* Assim temos:

$$x(\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}) + y\,(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) + z(2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}) = \vec{0} \Rightarrow$$

$$(x+y+2z)\,\vec{i} + (3x+y+3z)\,\vec{j} + (x-y-z)\,\vec{k} = \vec{0}$$

Como $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ são *L.I.* temos:

$$\begin{cases} x+y+2z=0 \\ 3x+y+3z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema pelo método do escalonamento (deixamos a cargo do leitor), vemos que este sistema é compatível e indeterminado, tendo portanto, infinitas soluções. Logo a equação $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0}$ admite infinitas soluções, portanto uma solução não nula, e os vetores $\vec{a},\vec{b}$ e $\vec{c}$ são *L.D*. De outra maneira, vemos que o determinante da matriz dos coeficientes do sistema é nulo, ou seja,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

de onde podemos concluir que os vetores dados são *L.D*. .

2) Verificar se os vetores abaixo são *L.I.* ou *L.D*. .

$a)\ \vec{u}=-3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k};\ \vec{v}=6\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$

$b)\ \vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k};\ \vec{v}=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$

Solução: a) Dois vetores de $\mathbb{R}^3$ são *L.D*. se forem colineares, isto é, se um for múltiplo de outro. Caso contrário eles são *L.I*. Portanto, os vetores dados serão *LD* se existir $x\in\mathbb{R}$ tal que

$$-3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}=x(6\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}) \Rightarrow (6x+3)\vec{i}+(2x+1)\vec{j}+(-4x-2)\vec{k}=\vec{0}$$

Como $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ são vetores *L.I.*, pelo teorema *2.3.3* vem:

$$6x+3=0 \Rightarrow x=-\tfrac{1}{2}$$

$$2x+1=0 \Rightarrow x=-\tfrac{1}{2}$$

$$-4x-2=0 \Rightarrow x=-\tfrac{1}{2}$$

Logo os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são *L.D*., ou seja, $\vec{u}=x\vec{v}$, com $x=-\tfrac{1}{2}$.

b) Analogamente, se $\vec{u}=x\vec{v}$, temos:

$$2\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k}=x(\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}) \Rightarrow (x-2)\vec{i}+(x+3)\vec{j}+(2x+1)\vec{k}=\vec{0} \Rightarrow$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

$$x+3=0 \Rightarrow x=-3$$

$$2x+1=0 \Rightarrow x=-\tfrac{1}{2}$$

Como nas três equações obtemos resultados diferentes para *x*, concluímos que não existe $x\in\mathbb{R}$ tal que $\vec{u}=x\vec{v}$, isto é, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são *L.I*. .

3) Sejam $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$ e $\vec{c} = \vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$ vetores. O conjunto $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ é base para o $\mathbb{R}^3$? É positiva ou negativa? Se $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ for uma base, determinar as coordenadas de $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 12\vec{k}$ nessa base.

Solução: O conjunto $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ será uma base de $\mathbb{R}^3$ se os vetores $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$ forem *L.I.*. Como no exercício *1)*, obtemos o sistema homogêneo

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - 2y - 3z = 0 \\ x + 4y - z = 0 \end{cases}$$

Como $det\ A = 36 \neq 0$, o sistema só admite a solução trivial $x = y = z = 0$. Logo os vetores dados são *L.I.*, e portanto $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ é base para o $\mathbb{R}^3$. Como $det\ A > 0$, $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ é uma base positiva. Vamos, agora, determinar as coordenadas de $\vec{v}$ nessa base. Para isto, precisamos encontrar escalares *x*, *y* e *z* reais tais que $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$. Então, temos:

$$3\vec{i} + 2\vec{j} + 12\vec{k} = x(2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) + y(-\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}) + z(\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}) \Rightarrow$$

$$(2x - y + z - 3)\vec{i} + (x - 2y - 3z - 2)\vec{j} + (x + 4y - z - 12)\vec{k} = \vec{0}$$

Como $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ são *L.I.*, o teorema *2.3.3.* nos diz que os coeficientes na equação acima são nulos, o que nos dá o sistema

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - 2y - 3z = 2 \\ x + 4y - z = 12 \end{cases}$$

Resolvendo por escalonamento obtemos a solução $x = 3$, $y = 2$, $z = -1$, que serão as coordenadas de $\vec{v}$ na base $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, isto é, $\vec{v} = 3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$.

4) Verifique se os pontos $A = (3, 1, 2)$, $B = (2, 3, 0)$ e C = (2, 2, 1) são vértices de um triângulo.

Solução: Três pontos serão vértices de um triângulo se eles forem não colineares. Fixando um dos pontos dados, por exemplo *A*, obteremos os vetores $\vec{AB} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ e $\vec{AC} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$. Os pontos *A*, *B* e *C* serão não colineares se, e somente se, os vetores $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$ forem não colineares (*L.I.*), isto é, não existir $x \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{AB} = x.\vec{AC}$. Então, temos $-\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k} = x(-\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$ donde concluímos das equações encontradas que $x = 1$, $x = 2$

$e\ x = 2$. Logo, não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{AB} = x.\vec{AC}$, isto é, $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$ são *L.I.*, e portanto os pontos *A, B* e *C* são vértices de um triângulo.

5) Determine se os pontos abaixo podem ser vértices de um paralelogramo.

a) $A = (3, 2, 0)$, $B = (1, 2, 0)$, $C = (2, 0, 2)$, $D = (0, 2, 1)$

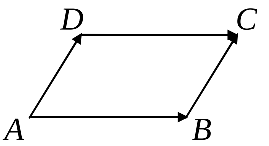
b) $A = (2, 4, 1)$, $B = (1, 2, 0)$, $C = (2, 3, -2)$, $D = (0, -1, -4)$

c) $A = (3, 3, 2)$, $B = (3, 2, 1)$, $C = (3, 2, 2)$, $D = (3, 1, 1)$.

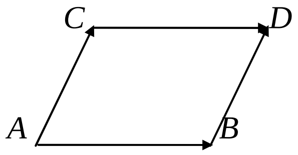
Solução: Um paralelogramo é um quadrilátero que tem os lados opostos paralelos e de iguais comprimentos. Assim, devemos verificar se os pontos dados são coplanares, e se satisfazem às condições acima.

a) Fixando um dos pontos, teremos os vetores $\vec{AB} = -2\vec{i}, \vec{AC} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ e $\vec{AD} = -3\vec{i} + \vec{k}$. Como já vimos, $\vec{AB}, \vec{AC}$ e $\vec{AD}$ serão coplanares (*L.D.*) se a equação $x\vec{AB} + y\vec{AC} + z\vec{AD} = \vec{0}$ tiver pelo menos uma solução não nula. Como temos um sistema homogêneo, basta que o determinante principal seja nulo. Mas, o determinante principal do sistema é igual a *4* que é diferente de zero (verifique!) e portanto os vetores $\vec{AB}, \vec{AC}$ e $\vec{AD}$ são *L.I.* Logo os pontos *A, B, C* e *D* não são vértices de um paralelogramo.

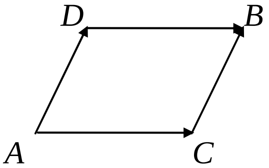
b) Temos que $\vec{AB} = -\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{AC} = -\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{AD} = -2\vec{i} - 5\vec{j} - 5\vec{k}$ cujo determinante é nulo. Logo os vetores $\vec{AB}, \vec{AC}$ e $\vec{AD}$ são *L.D.*, isto é, são coplanares. Vamos analisar as possíveis disposições de *A, B, C* e *D*.



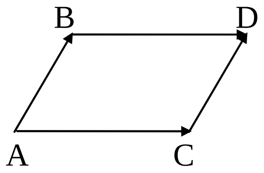
Neste caso, temos: $\vec{AB} = -\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{DC} = -4\vec{i} - 4\vec{j} - 8\vec{k}$. Então $\vec{AB} \neq \vec{DC}$ e, portanto, *ABCD* não é um paralelogramo.



Temos $\vec{AB} = -\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{CD} = 4\vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k}$. Então $\vec{AB} \neq \vec{DC}$ e, portanto, *ABDC* não é um paralelogramo.

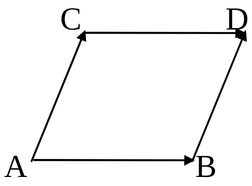


Temos $\vec{AC} = \vec{j} - 3\vec{k}$ e $\vec{DB} = -2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$. Então $\vec{AC} \neq \vec{DB}$ e, portanto, *ACBD* não é um paralelogramo.



Temos $\vec{AC} = \vec{j} - 3\vec{k}$ e $\vec{BD} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$. Então $\vec{AC} \neq \vec{BD}$ e portanto, ACDB não é um paralelogramo.

c) Temos que $\vec{AB} = -\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{AC} = -\vec{j}$ e $\vec{AD} = -2\vec{j} - \vec{k}$. Como no item anterior, concluímos que os vetores $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ e $\vec{AD}$ são L.D. Então os pontos A, B, C e D são coplanares. Vamos analisar as disposições dos pontos A, B, C e D:



Neste caso, temos: $\vec{AB} = -\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{CD} = -\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{AC} = -\vec{j}$ e $\vec{BD} = -\vec{j}$. Então $\vec{AB} = \vec{CD}$, $\vec{AC} = \vec{BD}$, portanto *ABDC* é um paralelogramo. Observe que $\vec{AB}$ *e* $\vec{CD}$ são *L.I.*

2.4.7 - Exercícios propostos

1) Dados os vetores $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{c} = -2\vec{i} + 3\vec{k}$ e $\vec{d} = 6\vec{i} - 2\vec{j} + 10\vec{k}$, calcule: $\frac{1}{4}\vec{a}$; $3\vec{b} - 5\vec{a} + \vec{c}$; $-\vec{d} + \frac{1}{2}\vec{a}$; $\vec{b} - \vec{a}$.

02) Dado $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, determine um vetor $\vec{v}$ colinear com $\vec{u}$, de sentido contrário, e cujo comprimento seja o triplo do comprimento de $\vec{u}$. Esboce.

03) Marque num sistema de coordenadas os pontos $A = (2,3,4)$, $B = (-2,1,1)$, $C = (-2,-1,-2)$.

04) Esboce os vetores $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = -3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{d} = \vec{j} - 2\vec{k}$.

05) Calcule $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{BC}$, com $A = (2, 3, 4)$, $B = (-2, 1, 1)$, $C = (-2, -1, -2)$.

06) Considere o ponto $A = (1, 2, 3)$ e o vetor $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$. Determine o ponto *B* tal que $\vec{AB} = \vec{v}$.

07) Dados $P = (2, 1, 5)$ e $Q = (4, 3, 1)$, ache as coordenadas do ponto médio de $\overline{PQ}$.

08) Dados $\vec{u} = (3, -1, 2)$, $\vec{v} = (2, 4, -2)$, determine o vetor $\vec{w}$ tal que $3\vec{w} + 2\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v} + \vec{w}$.

09) Dados os pontos $A = (1, -2, 3)$, $B = (5, 2, 5)$ e $C = (-4, 2, 9)$ ache o ponto *D* tal que *ABCD* seja um paralelogramo.

10) Seja *ABCD* um paralelogramo e *G* o ponto de encontro das diagonais. Sabendo que $A = (2, -1, -5)$, $B = (-1, 3, 2)$, $G = (4, -1, 7)$, determine os vértices *C* e *D*.

11) Verifique se os vetores abaixo são *L. I.* ou *L. D.*:

a) $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{w} = 3\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}$

b) $\vec{u} = -14\vec{i} + 91\vec{j} + 56\vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} - 13\vec{j} - 8\vec{k}$

c) $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = 3\vec{i} + 12\vec{j} + \vec{k}$

d) $\vec{u} = (2, -1, 2)$, $\vec{v} = (1, 1, 1)$, $\vec{w} = (2, 0, 2)$.

12) Determine o valor de *m* para que os vetores

a) $\vec{u} = m\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = -\vec{i} + m\vec{j}$, $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ sejam coplanares.

b) $\vec{u} = m\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = 8\vec{i} + m\vec{j} + 2\vec{k}$ sejam paralelos.

13) Verifique se os pontos $A = (1, -1, 2)$, $B = (0, 1, 1)$ e $C = (2, -1, 3)$ são alinhados.

14) Determine dois números reais y e z tais que os pontos $A = (1, 2, 1)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (1, y, z)$ sejam colineares.

15) Verifique se os pontos abaixo são coplanares:

a) $A = (1, 1, 1)$, $B = (-2, -1, -3)$, $C = (0, 2, -2)$, $D = (-1, 0, -2)$.

b) $A = (1, 0, 2)$, $B = (-1, 0, 3)$, $C = (2, 4, 1)$, $D = (-1, -2, 2)$.

16) Verifique se os vetores $\vec{a} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ e $\vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$ podem representar os lados de um triângulo.

17) Os pontos $A = (1, 1, 0)$, $B = (3, 1, 0)$, $C = (1, 3, 0)$ podem ser vértices de um triângulo?

18) Os vetores $\vec{a} = 4\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ e $\vec{c} = -3\vec{i} + 9\vec{j} - \vec{k}$ são *L.I* ou *L.D.*? Eles formam uma base para o $\mathbb{R}^3$? É base negativa ou positiva? Se $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ for base, determine as coordenadas do vetor $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ em relação a esta base.

19) Sejam $\vec{u} = (0, 1, 1)$, $\vec{v} = (2, 1, 0)$ e $\vec{w} = (1, 0, 1)$. Verifique se $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é base positiva ou negativa. Obtenha as coordenadas de $\vec{a} = (3, 2, 2)$ na base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$

20) Seja $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ uma base. Verifique se $\{\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c},\ 2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c},\ \vec{b} + 5\vec{c}\}$ é base.

21) Escreva o vetor $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ como combinação linear dos vetores $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{c} = \vec{j} + 2\vec{k}$.

22) Sejam $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{v} = -\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$ vetores, onde $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são vetores *L. I.*. Mostre que o vetor $\vec{w} = 9\vec{a} + 15\vec{b} + 6\vec{c}$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e determine os coeficientes dessa combinação linear. Justifique detalhadamente sua resposta.

2.5 - PRODUTOS ENTRE VETORES – INTRODUÇÃO

Estudaremos três tipos de produtos entre vetores: ***o produto interno, o produto vetorial e o produto misto.*** Inicialmente veremos alguns conceitos necessários para as definições desses produtos.

2.5.1 - Norma de um vetor

Chama-se ***norma*** de um vetor $\vec{AB}$ ao comprimento do segmento AB.

Notação: norma de $\vec{AB} = \left\| \vec{AB} \right\|$; norma de $\vec{a} = \left\| \vec{a} \right\|$

Se $\vec{u}$ é um vetor tal que $\left\| \vec{u} \right\| = 1$, dizemos que $\vec{u}$ é um vetor unitário. Se $\vec{u}$ um vetor unitário na direção de $\vec{a}$ então existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{a} = \alpha \vec{u}$. Neste caso, definimos a norma de $\vec{a}$ como sendo o valor absoluto de α, ou seja, $\left\| \vec{a} \right\| = |\alpha|$.

2.5.2 - Propriedades da norma de vetores

1) $\left\| \vec{a} \right\| \geq 0$ e $\left\| \vec{a} \right\| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

Demonstração: Se $\left\| \vec{u} \right\| = 1$, então $\vec{a} = \alpha \vec{u}$ e $\left\| \vec{a} \right\| = |\alpha| \geq 0$. Agora, se $\left\| \vec{a} \right\| = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ e como $\vec{a} = \alpha \vec{u} \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$. Se $\vec{a} = \vec{0}$, teremos $\vec{a} = 0 \vec{u}$ e $\left\| \vec{a} \right\| = |0| = 0$.

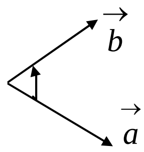
2) $\left\| x \vec{a} \right\| = |x| \left\| \vec{a} \right\|$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

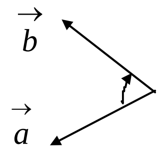
Demonstração: Se $\vec{a} = \alpha \vec{u}$, então $x \vec{a} = x(\alpha \vec{u}) = (x\alpha) \vec{u}$ e $\left\| x \vec{a} \right\| = |x\alpha| = |x| \left\| \vec{a} \right\|$.

2.5.3 - Ângulo entre vetores

O ângulo orientado entre os vetores não nulos $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é o menor ângulo entre dois representantes de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ com a mesma origem, e será denotado por $(\vec{a}, \vec{b})$. O ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$ será positivo se a rotação necessária para $\vec{a}$ se tornar colinear com $\vec{b}$ for no sentido anti-horário e será negativo se a rotação for no sentido horário.

Exemplos:





$\left(\vec{a},\vec{b}\right) > 0$ - sentido anti-horário $\qquad\qquad$ $\left(\vec{a},\vec{b}\right) < 0$ - sentido horário

Se $\vec{a}=0$ ou $\vec{b}=0$, o ângulo entre estes vetores não está definido. Daqui para frente nos referiremos simplificada mente a ângulo entre vetores, em vez de ângulo orientado entre vetores.

Observação: Da *Fig. 6,* podemos observar que, se $x > 0$, $\left(x\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{a},\vec{b}\right)$. Na *Fig. 7,* observa-se que, se $x < 0$, $\left(x\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{a},\vec{b}\right)-180^0$. De uma maneira semelhante, tem-se $\left(\vec{a},x\vec{b}\right)=\left(\vec{a},\vec{b}\right)$, se $x > 0$ e que $\left(\vec{a},x\vec{b}\right)=\left(\vec{a},\vec{b}\right)-180^0$, se $x < 0$.

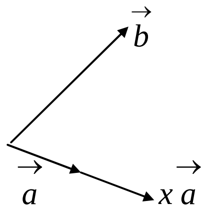


Fig.6

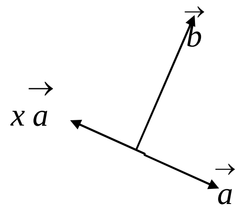


Fig.7

2.6 - PRODUTO INTERNO

Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vetores não nulos. O ***produto interno*** de $\vec{a}$ por $\vec{b}$ é o número real indicado por $\vec{a}\cdot\vec{b}$ e definido por

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left\|\vec{a}\right\|\left\|\vec{b}\right\|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$$

Se $\vec{a}=0$ $(ou\ \vec{b}=0)$ definimos $\vec{a}.\vec{b}=0.$ Como consequência da definição, obtemos uma maneira de calcular o ângulo entre vetores não nulos $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Então

$$\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left\|\vec{a}\right\|\left\|\vec{b}\right\|}\Rightarrow\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\arccos\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left\|\vec{a}\right\|\left\|\vec{b}\right\|}\ ,\ 0\le\left(\vec{a},\vec{b}\right)\le 180^0$$

Podemos também obter a norma de um vetor $\vec{a}$, a partir de um produto interno:

$$\vec{a}.\vec{a}=\left\|\vec{a}\right\|\left\|\vec{a}\right\|\cos\left(\vec{a},\vec{a}\right)\ \Rightarrow\ \left\|\vec{a}\right\|=\sqrt{\vec{a}.\vec{a}}$$

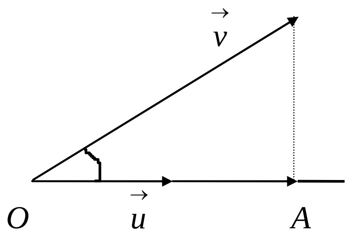
pois $(\vec{a},\vec{a})=0^0$ e $\cos(\vec{a},\vec{a})=1$.

2.6.1 - Interpretação geométrica. Projeção

A projeção de um vetor não nulo $\vec{v}$ sobre um vetor unitário $\vec{u}$, denotada por, $proj_{\vec{u}}\vec{v}$, é o vetor

$$proj_{\vec{u}}\vec{v} = \vec{0A} = \left[\left\|\vec{v}\right\| cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)\right]\vec{u} =$$

$$= \left[\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\| cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)\right]\vec{u} = \left(\vec{u}\,.\,\vec{v}\right)\vec{u}$$



O valor algébrico da projeção de um vetor $\vec{v}$ sobre um vetor unitário $\vec{u}$ é a norma de sua projeção:

$$\left\| proj_{\vec{u}}\vec{v}\right\| = \left|\left\|\vec{v}\right\| cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)\right| = \left|\vec{u}\,.\,\vec{v}\right|$$

Assim, geometricamente, o módulo do produto interno de um vetor unitário $\vec{u}$ por um vetor não nulo $\vec{v}$ representa o comprimento do vetor projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

2.6.2 - Propriedades do produto interno

1) $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$

Demonstração: De fato,

$$\vec{a}.\vec{b} = \left\|\vec{a}\right\|\left\|\vec{b}\right\| cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \left\|\vec{b}\right\|\left\|\vec{a}\right\| cos\left(\vec{b},\vec{a}\right) = \vec{b}.\vec{a}, \text{ pois } cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = cos\left(\vec{b},\vec{a}\right).$$

2) $x\left(\vec{a}.\vec{b}\right) = \left(x\,\vec{a}\right).\vec{b} = \vec{a}.\left(x\,\vec{b}\right)$, com $x \neq 0$

Demonstração: De fato, se $x > 0$, temos:

$$x\left(\vec{a}.\vec{b}\right) = x\left\|\vec{a}\right\|\left\|\vec{b}\right\| cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \left\|x\,\vec{a}\right\|\left\|\vec{b}\right\| cos\left(x\,\vec{a},\vec{b}\right) = \left(x\,\vec{a}\right).\vec{b}$$

Se $x < 0$

$$x\left(\vec{a}.\vec{b}\right) = x\left\|\vec{a}\right\|\left\|\vec{b}\right\| cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = -\,x\left\|\vec{a}\right\|\left\|\vec{b}\right\|\left(-\,cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right) =$$

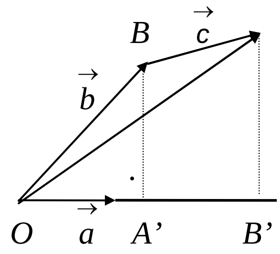
$$= |x|\left\|\vec{a}\right\|\left\|\vec{b}\right\|\left(cos\left(x\,\vec{a},\vec{b}\right)\right) = \left\|x\,\vec{a}\right\|\left\|\vec{b}\right\|\left(cos\left(x\,\vec{a},\vec{b}\right)\right) = (x\,\vec{a}).\vec{b}\,.$$

3) $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$

Demonstração: Se $\vec{a} = \vec{0}$ a propriedade é trivial. Consideremos dois casos:

1⁰ caso: Suponhamos que $\vec{a}$ é um vetor unitário, isto é, $\left\|\vec{a}\right\| = 1$. Observe que os vetores $\vec{OA'}$ e $\vec{OB'}$ são colineares, logo $\left\|\vec{OB'}\right\| = \left\|\vec{OA'}\right\| + \left\|\vec{A'B'}\right\|$. Mas

$$\left\|\vec{OB'}\right\| = \left\|\vec{b}+\vec{c}\right\| cos\left(\vec{a}, \vec{b}+\vec{c}\right) = \left\|\vec{a}\right\| \left\|\vec{b}+\vec{c}\right\| cos\left(\vec{a}, \vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}.\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$$



$$\left\|\vec{OA'}\right\| = \left\|\vec{b}\right\| \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \left\|\vec{a}\right\| \left\|\vec{b}\right\| \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \vec{a}.\vec{b}$$

$$\left\|\vec{A'B'}\right\| = \left\|\vec{c}\right\| \cos\left(\vec{a}, \vec{c}\right) = \left\|\vec{a}\right\| \left\|\vec{c}\right\| \cos\left(\vec{a}, \vec{c}\right) = \vec{a}.\vec{c}\ .$$

Logo $\vec{a}.\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$.

2⁰ caso: Consideremos o caso em que o vetor $\vec{a} \neq \vec{0}$ e é tal que $\left\|\vec{a}\right\| \neq 1$. Com isto, temos que o vetor $\vec{u} = \dfrac{\vec{a}}{\left\|\vec{a}\right\|}$ será unitário (e colinear com $\vec{a}$) pois $\left\|\dfrac{\vec{a}}{\left\|\vec{a}\right\|}\right\| = \dfrac{\left\|\vec{a}\right\|}{\left\|\vec{a}\right\|} = 1$. Então,

$$\vec{a}.\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \left\|\vec{a}\right\| \frac{\vec{a}}{\left\|\vec{a}\right\|}.\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \left\|\vec{a}\right\| \left[\frac{\vec{a}}{\left\|\vec{a}\right\|}.\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\right] =$$

$$= \left\|\vec{a}\right\| \left[\frac{\vec{a}}{\left\|\vec{a}\right\|}.\vec{b} + \frac{\vec{a}}{\left\|\vec{a}\right\|}.\vec{c}\right] = \left\|\vec{a}\right\| \frac{\vec{a}}{\left\|\vec{a}\right\|}.\vec{b} + \left\|\vec{a}\right\| \frac{\vec{a}}{\left\|\vec{a}\right\|}.\vec{c} = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}\,.$$

2.6.3 - Vetores perpendiculares

Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vetores não nulos. Dizemos que $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são ***perpendiculares*** se $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^0$ ou $(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\pi}{2} rd$. Neste caso, $\vec{a}.\vec{b} = 0$. Logo, $\vec{a}$ é perpendicular (ou ortogonal) a $\vec{b}$ se, e somente se, $\vec{a}.\vec{b} = 0$.

Notação: $\vec{a}$ perpendicular a $\vec{b}$: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Se $\vec{a}=\vec{0}$, então $\vec{a}.\vec{b}=0$, para todo vetor $\vec{b}$. Assim, consideraremos que o vetor nulo é perpendicular a todos os vetores do $\mathbb{R}^3$.

2.6.4. - Exercícios resolvidos

1) Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são vetores quaisquer, mostre que $\left\|\vec{a} \pm \vec{b}\right\|^2 = \left\|\vec{a}\right\|^2 \pm 2\,\vec{a}.\vec{b} + \left\|\vec{b}\right\|^2$.

Solução: Temos que:

$$\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\|^2 = \left(\vec{a}+\vec{b}\right).\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \vec{a}.\vec{a}+\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b} = \left\|\vec{a}\right\|^2 + 2\,\vec{a}.\vec{b} + \left\|\vec{b}\right\|^2$$

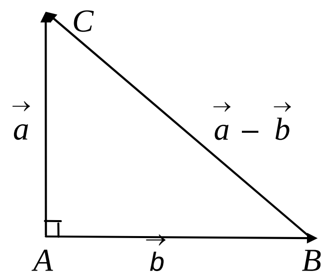
Da mesma forma, temos:

$$\left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|^2 = \left(\vec{a}-\vec{b}\right).\left(\vec{a}-\vec{b}\right) = \vec{a}.\vec{a}-\vec{a}.\vec{b}-\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b} = \left\|\vec{a}\right\|^2 - 2\vec{a}.\vec{b} + \left\|\vec{b}\right\|^2$$

2) Usando o Cálculo Vetorial, demonstre o Teorema de Pitágoras.

Solução: O Teorema de Pitágoras diz que, em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos. Consideremos o triângulo *ABC*. Temos: $\vec{AB}=\vec{b}$, $\vec{AC}=\vec{a}$ e $\vec{BC}=\vec{a}-\vec{b}$. Pelo exercício *1)*,

$$\left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|^2 = \left\|\vec{a}\right\| - 2\,\vec{a}.\vec{b} + \left\|\vec{b}\right\|^2.$$



Como *ABC* é um triângulo retângulo, então $\vec{a}.\vec{b}=0$ e $\left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|^2 = \left\|\vec{a}\right\|^2 + \left\|\vec{b}\right\|^2$, ou seja,

$$\left\|\vec{BC}\right\|^2 = \left\|\vec{AC}\right\|^2 + \left\|\vec{AB}\right\|^2.$$

2) Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são vetores quaisquer, demonstre a desigualdade de Schwarz:

$$\left|\vec{a}\,.\,\vec{b}\right| \le \left\|\vec{a}\right\|\left\|\vec{b}\right\|$$

Solução: Se $\vec{a}=\vec{0}$ (ou $\vec{b}=\vec{0}$), então $\vec{a}\,.\,\vec{b}=0$ e $\left\|\vec{a}\right\|=0$ (ou $\left\|\vec{b}\right\|=0$). Logo

$$\left|\vec{a}\,.\,\vec{b}\right| \le \left\|\vec{a}\right\|\left\|\vec{b}\right\|$$

Se $\vec{a}\neq\vec{0}$ (ou $\vec{b}\neq\vec{0}$), então $\left|\vec{a}\,.\,\vec{b}\right| = \left\|\vec{a}\right\|\left\|\vec{b}\right\|\left|cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right| \le \left\|\vec{a}\right\|\left\|\vec{b}\right\|$ pois $0 \le \left|cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right| \le 1.$

4) Os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ formam um ângulo de 45^0. Calcule o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sabendo que $\vec{u} = \vec{a},\ \vec{v} = \vec{a}+\vec{b},\ \left\|\vec{a}\right\| = 6,\ \left\|\vec{b}\right\| = 1.$

Solução: Sabemos que $cos\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \dfrac{\vec{u}\,.\,\vec{v}}{\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|}$. Agora,

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{a}\,.\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \left\|\vec{a}\right\|^2 + \vec{a}\,.\vec{b} = 36 + \vec{a}\,.\vec{b} \;\Rightarrow\; \vec{a}\,.\vec{b} = \left\|\vec{a}\right\|\left\|\vec{b}\right\|cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 6.1.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2}$$

Logo, $\vec{u}\,.\vec{v} = 36+3\sqrt{2}$, $\left\|\vec{u}\right\| = \left\|\vec{a}\right\| = 6$ e $\left\|\vec{v}\right\| = \left\|\vec{a}+\vec{b}\right\| = \sqrt{37+6\sqrt{2}}$ então

$$cos\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \frac{36+3\sqrt{2}}{6\sqrt{37+6\sqrt{2}}} = \frac{12+\sqrt{2}}{2\sqrt{37+6\sqrt{2}}} \quad\Rightarrow\quad \left(\vec{u},\vec{v}\right) = arc\,cos\left(\frac{12+\sqrt{2}}{2\sqrt{37+6\sqrt{2}}}\right)$$

2.6.5 - Exercícios propostos

1) Demonstre que as diagonais de um losango são perpendiculares.

3) Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são vetores quaisquer, mostre que:

a) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right).\left(\vec{a}-\vec{b}\right) = \left\|\vec{a}\right\|^2 - \left\|\vec{b}\right\|^2$

b) $\vec{a}\,.\,\vec{b} = \dfrac{1}{4}\left[\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\|^2 - \left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|^2\right]$

c) $\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\|^2 + \left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|^2 = 2\left(\left\|\vec{a}\right\|^2 + \left\|\vec{b}\right\|^2\right)$

d) $\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\| \leq \left\|\vec{a}\right\| + \left\|\vec{b}\right\|$ *(desigualdade triangular).*

3) Dados $\vec{a},\vec{b}$ e $\vec{c}$ tais que o ângulo entre dois quaisquer deles, nessa ordem é 60^0 determine $\left\|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right\|$, sabendo-se que $\left\|\vec{a}\right\| = 4,\ \left\|\vec{b}\right\| = 2,\ \left\|\vec{c}\right\| = 6.$

4) Sabendo-se que $\left\|\vec{a}\right\| = 11,\ \left\|\vec{b}\right\| = 23,\ \left\|\vec{a}-\vec{b}\right\| = 30,$ determine $\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\|$.

5) Os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são perpendiculares e $\left\|\vec{a}\right\| = 5,\ \left\|\vec{b}\right\| = 12.$ Calcule $\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\|$ e $\left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|$.

6) Que condições devem satisfazer os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ para que o vetor $\vec{a}+\vec{b}$ tenha a direção da bissetriz do ângulo formado por $\vec{a}$ e $\vec{b}$?

7) Os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são perpendiculares entre si, e $\left(\vec{c}, \vec{a}\right) = 60^0$, $\left(\vec{c}, \vec{b}\right) = 60^0$. Sabendo-se que $\left\|\vec{a}\right\| = 3, \left\|\vec{b}\right\| = 5, \left\|\vec{c}\right\| = 8$, calcule $\left(3\,\vec{a} - 2\,\vec{b}\right) . \left(\vec{b} + 3\,\vec{c}\right)$.

2.6.6 - Base ortonormal

Uma base $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ de $\mathbb{R}^3$ é dita ***base ortogonal*** se os seus vetores são dois a dois ortogonais, isto é, se $\vec{a}.\vec{b} = 0$, $\vec{a}.\vec{c} = 0$ e $\vec{b}.\vec{c} = 0$.

Uma base $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ de $\mathbb{R}^3$ é dita ***base ortonormal*** se for uma base ortogonal e se todos os seus vetores forem unitários, isto é, $\left\|\vec{a}\right\| = 1$, $\left\|\vec{b}\right\| = 1$ e $\left\|\vec{c}\right\| = 1$.

Exemplo: A base canônica do $\mathbb{R}^3$, $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ é ortonormal.

Teorema: Se $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$ são vetores não nulos tais que $\vec{a}.\vec{b} = 0$, $\vec{a}.\vec{c} = 0$ e $\vec{b}.\vec{c} = 0$ então $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ é base ortogonal.

Demonstração: O conjunto $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ será base se os vetores $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$ forem *L.I.*, isto é, se a equação $x\,\vec{a} + y\,\vec{b} + z\,\vec{c} = \vec{0}$ só tiver a solução trivial. Façamos, nessa equação, o produto interno por $\vec{a}$:

$$x\left(\vec{a}.\vec{a}\right) + y\left(\vec{a}.\vec{b}\right) + z\left(\vec{a}.\vec{c}\right) = \vec{a}.\vec{0}$$

Por hipótese, os vetores $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$ são não nulos e dois a dois ortogonais. Logo $x.\left\|\vec{a}\right\|^2 = 0$, donde $x = 0$. Fazendo, agora, o produto interno por $\vec{b}$, obtemos:

$$x\left(\vec{b}.\vec{a}\right) + y\left(\vec{b}.\vec{b}\right) + z\left(\vec{b}.\vec{c}\right) = \vec{b}.\vec{0}$$

Com um raciocínio semelhante ao anterior, temos $y.\left\|\vec{b}\right\|^2 = 0$ donde $y = 0$. Da mesma forma, fazendo o produto interno por $\vec{c}$ obtemos $z = 0$, e, portanto, os vetores $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$ são *L.I.*

Corolário: Se $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$ são vetores unitários $\vec{a}.\vec{b} = 0$, $\vec{a}.\vec{c} = 0$ e $\vec{b}.\vec{c} = 0$ então $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ é base ortonormal.

2.6.7 - Coordenadas de um vetor numa base ortonormal

Sejam $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ uma base ortonormal e $\vec{v}$ um vetor qualquer. Então, podemos escrever $\vec{v}$ como combinação linear dos vetores dessa base, isto é, existem escalares x, y e z tais que $\vec{v}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$.

Calculando o produto interno de $\vec{v}$ por $\vec{a},\vec{b}$ e $\vec{c}$ obtemos, respectivamente, $x = \vec{a}.\vec{v}$, $y=\vec{b}.\vec{v}$ e $z=\vec{c}.\vec{v}$. Assim, se $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ é uma base ortonormal então

$$\vec{v}=(\vec{a}.\vec{v})\vec{a}+(\vec{b}.\vec{v})\vec{b}+(\vec{c}.\vec{v})\vec{c}$$

Observação: Se $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ for uma base qualquer, um raciocínio análogo nos levará ao sistema

$$\begin{cases}(\vec{a}.\vec{a})x+(\vec{a}.\vec{b})y+(\vec{a}.\vec{c})z=\vec{a}.\vec{v}\\(\vec{b}.\vec{a})x+(\vec{b}.\vec{b})y+(\vec{b}.\vec{c})z=\vec{b}.\vec{v}\\(\vec{c}.\vec{a})x+(\vec{c}.\vec{b})y+(\vec{c}.\vec{c})z=\vec{c}.\vec{v}\end{cases}$$

cuja solução nos fornecerá as coordenadas de $\vec{v}$ na base $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$.

Podemos expressar o produto interno de dois vetores em função de suas coordenadas. Dados os vetores $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ e $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$ de acordo com as propriedades do produto interno temos:

$$\vec{a}.\vec{b}=\left(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}\right).\left(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}\right)=a_1b_1\left(\vec{i}.\vec{i}\right)+a_1b_2\left(\vec{i}.\vec{j}\right)+a_1b_3\left(\vec{i}.\vec{k}\right)+$$

$$+a_2b_1\left(\vec{j}.\vec{i}\right)+a_2b_2\left(\vec{j}.\vec{j}\right)+a_2b_3\left(\vec{j}.\vec{k}\right)+a_3b_1\left(\vec{k}.\vec{i}\right)+a_3b_2\left(\vec{k}.\vec{j}\right)+a_3b_3\left(\vec{k}.\vec{k}\right)$$

Como $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ é base ortonormal, vem :

$$\boxed{\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}$$

Além disso, conforme vimos em *2.8*,

$$\left\|\vec{a}\right\|=\sqrt{\vec{a}.\vec{a}}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

2.6.8 - Exercícios resolvidos

1) Ache um vetor unitário na direção e sentido de $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$.

Solução: Temos que $\left\|\vec{a}\right\| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14} \neq 1$, logo $\vec{a}$ não é unitário. Neste caso, o vetor pedido será $\vec{u} = \frac{1}{\left\|\vec{a}\right\|}\vec{a} = \frac{\vec{a}}{\left\|\vec{a}\right\|} \Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{14}}\left(2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}\right)$. É claro que $\left\|\vec{u}\right\| = 1$, pois

$$||\vec{u}|| = \frac{||\vec{a}||}{||\vec{a}||} = 1.$$

2) Dados $\vec{a} = (2,1,-2), \vec{b} = (3,3,0), \vec{c} = (-1,-2,-2)$ $\vec{d} = (2,3,1)$ calcule os ângulos $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$, $\left(\vec{a},\vec{c}\right)$ e $\left(\vec{b},\vec{d}\right)$

Solução: Temos que $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{6+3}{\sqrt{9}\sqrt{18}} = \frac{9}{9\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Então $\frac{\pi}{4}rd$ ou $\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 45^0$. Agora, $\cos\left(\vec{a},\vec{c}\right) = \frac{-2-2+4}{\sqrt{9}\ \sqrt{9}} = 0$. Então $\left(\vec{a},\vec{c}\right) = 90^0$ ou $\frac{\pi}{2}rd$, isto é, $\vec{a}$ e $\vec{c}$ são vetores ortogonais, e

$$\cos\left(\vec{b},\vec{d}\right) = \frac{6+9}{\sqrt{18}\ \sqrt{14}} = \frac{15}{6\sqrt{7}} \Rightarrow \left(\vec{b},\vec{d}\right) = \arccos\ \frac{15}{6\sqrt{7}}\ .$$

3) Dados os vetores $\vec{a} = \frac{1}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$, $\vec{b} = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}$ e $\vec{c} = -\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$, verifique se $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ formam uma base ortonormal. Calcule as coordenadas do vetor $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ em relação aos vetores $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$.

Solução: Vamos, inicialmente, verificar se os vetores são ortogonais e unitários: $\vec{a}.\vec{b} = \frac{2}{9} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = 0$. De uma forma semelhante mostra-se que $\vec{a}.\vec{c} = 0$ e $\vec{b}.\vec{c} = 0$. Agora, $\left\|\vec{a}\right\| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = 1$. De maneira análoga temos que $\left\|\vec{b}\right\| = 1$ e que $\left\|\vec{c}\right\| = 1$. Logo $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ é uma base ortonormal e as coordenadas de $\vec{v}$ são $\frac{7}{3}, \frac{5}{3}$ e $-\frac{5}{3}$ portanto, $\vec{v} = \frac{7}{3}\vec{a} + \frac{5}{3}\vec{b} - \frac{5}{3}\vec{c}$.

2.6.9 - Exercícios propostos

01) Determine um vetor unitário paralelo ao vetor $2\vec{a}-\vec{b}$, sendo $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$ e $\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$.

2) Determine o valor de x para que os vetores $\vec{a}=x\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$ e $\vec{b}=3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ sejam perpendiculares.

3) Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores tais que $\vec{u}\cdot\vec{v}=6$, $\left\|\vec{v}\right\|=3\sqrt{2}$ e $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\frac{\pi}{4}rd$. Calcule $\left\|\vec{u}\right\|$ e $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|$.

4) Ache o valor de x tal que $(x, 3, 1)\cdot(2, 1, 0) = 3$.

5) Ache um vetor unitário na direção da bissetriz do ângulo entre $\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$ e $3\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.

6) Os pontos $A = (1, 1, 0)$, $B = (3, 1, 0)$, $C = (1, 3, 0)$ são vértices de um triângulo? Este triângulo é retângulo? É isósceles ? Calcule seus ângulos.

7) Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores $L. D.$ Determine a projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

8) Determine a projeção de $3\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ na direção de $\vec{i}+5\vec{j}+4\vec{k}$.

9) Seja $\vec{v}\neq\vec{0}$ um vetor qualquer e α, β e γ os ângulos que $\vec{v}$ formam com os vetores da base canônica $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, respectivamente. Os ângulos α, β e γ são ditos **ângulos diretores de** $\vec{v}$ e $\cos\alpha, \cos\beta$ e $\cos\gamma$ são os **cossenos diretores** de $\vec{v}$. Determine a expressão de cada cosseno diretor de $\vec{v}$ e prove que $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

10) Um vetor $\vec{v}$ forma com os eixos $0x$ e $0y$ os ângulos $\alpha = 120^o$ e $\beta = 45^o$ respectivamente. Qual é o ângulo entre $\vec{v}$ e $0z$?

11) Um vetor $\vec{v}$ tem dois de seus ângulos diretores dados por $\alpha = 60^o$ e $\gamma = 120^o$. Calcule as coordenadas de $\vec{v}$, sabendo que $\left\|\vec{v}\right\|=2$.

12) Calcule os cossenos diretores de $\vec{v}=4\vec{i}+3\vec{j}+12\vec{k}$.

13) Dado $\vec{a} = (16, -15, 12)$, determine o vetor $\vec{b}$ paralelo a $\vec{a}$, de sentido oposto cuja norma é 75.

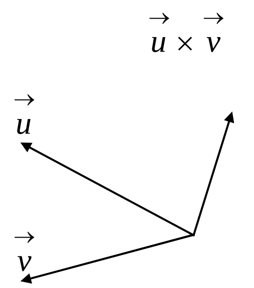
14) Sejam $\vec{a}=\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}\right)$, $\vec{b}=\frac{1}{\sqrt{`2}}\left(\vec{i}-\vec{k}\right)$ e $\vec{c}=\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}\right)$ vetores. Verifique se $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ é base ortonormal? Determine, caso seja possível, as coordenadas de $\vec{v}=3\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ em relação aos vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$.

15) Dados os vetores $\vec{u} = \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = 2\,\vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{w} = \vec{i} + \vec{k}$, verifique se $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$é base ortonormal. É possível escrever $\vec{a} = 3\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 2\,\vec{k}$ como combinação linear de $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$?

2.7 - PRODUTO VETORIAL

O ***produto vetorial*** de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é um vetor, denotado por $\vec{u} \times \vec{v}$, satisfazendo as seguintes condições:

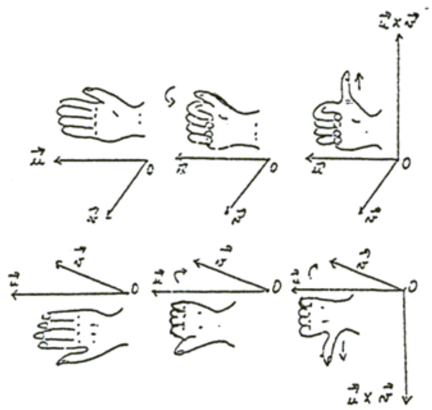
1) $\vec{u} \times \vec{v}$ é perpendicular a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ simultaneamente.



2) $\left\| \vec{u} \times \vec{v} \right\| = \left\| \vec{u} \right\| \left\| \vec{v} \right\| \left| sen\left(\vec{u}, \vec{v}\right) \right|$

3) o sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$ é tal que o terno ordenado $\left\{ \vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v} \right\}$ é positivo.

O sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$ também pode ser dado pela regra da mão direita. Tomando $\vec{u}$ e $\vec{v}$ com origem comum, coloca-se a mão direita aberta sobre o primeiro vetor $\vec{u}$, com os dedos apontando para a extremidade de $\vec{u}$, de modo que, ao se fechar a mão os dedos façam um movimento de rotação em direção ao segundo vetor $\vec{v}$. O sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$ é o sentido do dedo polegar distendido.



Observe que considerando apenas a condição 1) o vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ poderia ser qualquer vetor na direção da reta r perpendicular ao plano gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (ver *fig. 1 a seguir*). Considerando depois a condição 2) $\vec{u} \times \vec{v}$ poderia ainda ser um dos dois vetores sobre a reta r (ver *fig. 2*). Acrescentado-se a condição 3) $\vec{u} \times \vec{v}$ fica univocamente determinado (ver *fig. 3*).

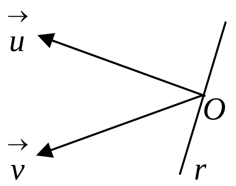


fig. 1

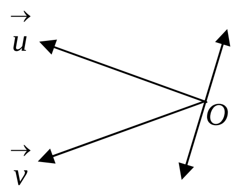


fig. 2

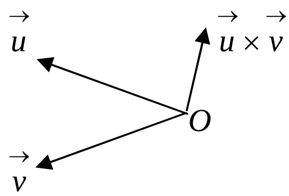


fig. 3

2.7.1 - Propriedades do produto vetorial

1) $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$, pois $sen\,(\vec{u}, \vec{u}) = 0$.

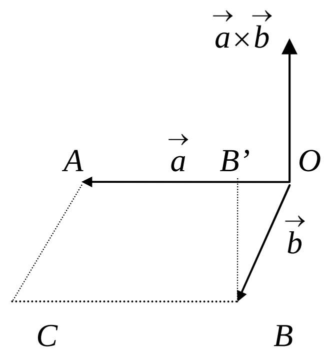
2) $\vec{v} \times \vec{u} = -(\vec{u} \times \vec{v})$, pela condição 3) da definição.

3) $x(\vec{u} \times \vec{v}) = (x\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (x\vec{v})$, $x \in \mathbb{R}$. (definição).

4) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$.

2.7.2 - Interpretação geométrica - Área

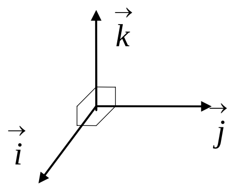
Dados $\vec{a}$ e $\vec{b}$ não nulos e não colineares, traçamos $\vec{a} \times \vec{b}$ graficamente. Note que os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ (que são L.I.) determinam um paralelogramo *OACB*, cuja base é $\left\| \vec{0A} \right\| = \left\| \vec{a} \right\|$, enquanto sua altura é $\left\| \vec{BB'} \right\| = \left\| \vec{b} \right\| .sen\left(\vec{a}, \vec{b} \right)$. Da condição 2) da definição de produto vetorial vem



$$área\ (0ACB) = \left\| \vec{a} \right\| \left\| \vec{b} \right\| \left| sen\left(\vec{a}, \vec{b} \right) \right| = \left\| \vec{a} \times \vec{b} \right\|$$

Assim, $\left\| \vec{a} \times \vec{b} \right\|$ representa geometricamente a área do paralelogramo determinado pelos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Observação: Considerando-se a base canônica $\{ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \}$ tem-se: $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$, $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$, $\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$ e $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$



2.7.3 - Vetores paralelos

Assim com o produto interno nos fornece uma condição de perpendicularismo entre vetores, o produto vetorial esclarece o paralelismo.

Teorema: Dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são *L.D.* se, e somente se, $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.

Demonstração: ($\Rightarrow$) Sejam e vetores não nulos e linearmente dependentes, isto é, paralelos (ou colineares). Então existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = x\,\vec{v}$, e

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(x\,\vec{v} \right) \times \vec{v} = x\left(\vec{v} \times \vec{v} \right) = \vec{0}$$

($\Leftarrow$) Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não nulos tais que $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$. Então temos:

$$\left\| \vec{u} \times \vec{v} \right\| = \left\| \vec{u} \right\| \left\| \vec{v} \right\| \left| sen\left(\vec{u}, \vec{v} \right) \right| = \left\| \vec{0} \right\| = 0$$

Logo, $sen\left(\vec{u}, \vec{v} \right) = 0$, e, portanto, os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares.

2.7.4 - Produto vetorial em coordenadas

Dados os vetores $\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}$ e $\vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}$, usando as propriedades do produto vetorial e a observação sobre a base canônica $\{ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \}$ vem:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k} \right) \times \left(v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k} \right) = u_1 v_1 \left(\vec{i} \times \vec{i} \right) + u_1 v_2 \left(\vec{i} \times \vec{j} \right) + u_1 v_3 \left(\vec{i} \times \vec{k} \right) +$$

$$+ u_2 v_1 \left(\vec{j} \times \vec{i} \right) + u_2 v_2 \left(\vec{j} \times \vec{j} \right) + u_2 v_3 \left(\vec{j} \times \vec{k} \right) + u_3 v_1 \left(\vec{k} \times \vec{i} \right) + u_3 v_2 \left(\vec{k} \times \vec{j} \right) + u_3 v_3 \left(\vec{k} \times \vec{k} \right).$$

Logo

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(u_2 v_3 - u_3 v_2 \right) \vec{i} + \left(u_3 v_1 - u_1 v_3 \right) \vec{j} + \left(u_1 v_2 - u_2 v_1 \right) \vec{k}$$

ou

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k} \qquad (1)$$

Lembrando o desenvolvimento de Laplace para determinantes, podemos representar o produto vetorial pelo (pseudo) determinante

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \qquad (2)$$

Desenvolvendo o “determinante” acima, segundo os elementos da primeira linha, obtemos $\vec{u} \times \vec{v}$ dado verdadeiramente em *(1)*. O “determinante” em *(2)* é apenas **simbólico**, pois sua primeira linha é formada por vetores, enquanto as demais linhas só contêm escalares.

2.7.5 - Exercícios resolvidos

1) Determine um vetor de norma 3 que seja ortogonal aos vetores $\vec{a} = (2, -1, 1)$ e $\vec{b} = (1, 0, -1)$

Solução: O vetor $\vec{a} \times \vec{b}$ é ortogonal a $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Usando *(2)* acima obtemos:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$$

Ora, $\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\| = \sqrt{1+9+1} = \sqrt{11} \neq 1$. Vamos então obter um vetor unitário na direção de $\vec{a}\times\vec{b}$:

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|} = \frac{1}{\sqrt{11}}(1,3,1)$$

Como $\vec{u}$ é unitário, paralelo a $\vec{a}\times\vec{b}$ e como $\vec{v}$ terá norma 3 e mesma direção de $\vec{a}\times\vec{b}$, então podemos escolher $\vec{v} = 3\,\vec{u}$ e portanto $\vec{v} = \frac{3}{\sqrt{11}}(1,3,1)$.

2) Verifique se os pontos $A = (1, 2, 1)$, $B = (3, 0, 4)$ e $C = (5, 1, 3)$ são vértices de um triângulo, e em caso afirmativo, calcule sua área.

Solução: Os pontos A, B, C serão vértices de um triângulo se $\vec{AB}$ *e* $\vec{AC}$ forem não colineares, isto é, *L. I.*. Sabe-se que os vetores $\vec{AB}$ *e* $\vec{AC}$ são *L. D.* se, e somente se, $\vec{AB}\times\vec{AC} = \vec{0}$. Ora, $\vec{AB} = 2\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$, $\vec{AC} = 4\,\vec{i} - \vec{j} + 2\,\vec{k}$, então

$$\vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ `2 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -\,\vec{i} + 8\,\vec{j} + 6\,\vec{k} \neq \vec{0}$$

Logo $\vec{AB}$ *e* $\vec{AC}$ não são *L.D.*, isto é, são *L. I.*, e *ABC* é um triângulo. Os vetores $\vec{AB}$ *e* $\vec{AC}$ determinam o paralelogramo *ABCD* cuja área é $\left\|\vec{AB} x \vec{AC}\right\|$ (veja interpretação geométrica do produto vetorial).

Como *área* $(\Delta ABC) = \frac{1}{2}$ *área* $(ABDC) = \frac{1}{2}\left\|\vec{AB}\times\vec{AC}\right\|$ segue-se que

$$\text{área } (\Delta ABC) = \frac{1}{2}\sqrt{1+64+36} = \frac{\sqrt{101}}{2}\quad.$$

Observação: Dados dois vetores não nulos $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$, temos :

a) $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ colineares $\Leftrightarrow \vec{u}\times\vec{v} = \vec{0}$

b) $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ ortogonais $\Leftrightarrow \vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$.

2.7.6 - Exercícios propostos

1) Dados os vetores $\vec{a} = 2\,\vec{i} + \vec{j} - 2\,\vec{k}$, $\vec{b} = 2\,\vec{i} - \vec{j} + 3\,\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + 2\,\vec{j} - \vec{k}$, calcule $\vec{a}\times\vec{b}$, $\vec{c}\times\vec{a}$ e $\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) + \left(\vec{c}\times\vec{b}\right)$.

2) Dados os vetores $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ e $\vec{v} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, determine um vetor unitário perpendicular $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

3) Ache um vetor $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} - z\vec{k}$ tal que $\vec{v}.\left(2\vec{i} + 3\vec{j}\right) = 6$ e $\vec{v} \times \left(2\vec{i} + 3\vec{j}\right) = 4\vec{k}$.

4) Calcule a área do paralelogramo que tem três vértices consecutivos nos pontos *A = (1, 0, 1), B = (2, 1, 3)* e *C = (3, 2, –5).*

5) Os pontos *A = (–1, –3, 4), B = (–2, 1, –4), C = (3, –11, 5)* são vértices de um triângulo? Esse triângulo é isósceles? É retângulo? É equilátero? Calcule sua área, e explique cada resposta.

6) Dados $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{v} = 4\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ determine uma base ortonormal positiva $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, com $\vec{a}$ paralelo a $\vec{u}$ e $\vec{b}$ paralelo a $\vec{v}$. Obtenha o vetor $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ como combinação linear dos vetores da base $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

7) Use o produto vetorial para determinar as condições que devem satisfazer os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ para que $\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{a} - \vec{b}$ sejam paralelos.

8) Determine os cossenos diretores de $\vec{u} \times \vec{v}$ sendo $\vec{u} = (2, -1, 3)$ e $\vec{v} = (4, 5, 1)$.

9) Sabendo que $\left\|\vec{a}\right\| = 3$, $\left\|\vec{b}\right\| = 5$, determine os valores de $m \in \mathbb{R}$ tal que os vetores $\vec{a} + m\vec{b}$ e $\vec{a} - m\vec{b}$ sejam: a) perpendiculares; b) paralelos.

10) Determine um vetor $\vec{c}$ sabendo que $\vec{c}$ é perpendicular aos vetores $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{c}.\left(\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}\right) = 100$.

2.8 - PRODUTO MISTO

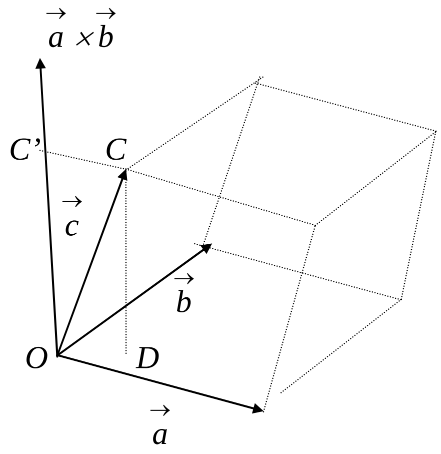
O ***produto misto*** de três vetores $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$ é o número real, denotado por $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]$, dado por

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}\,.$$

Observe que na expressão do produto misto não há necessidade de se escrever parêntesis, pois a única maneira dessa expressão ter significado é resolvendo primeiro o produto vetorial e em seguida o produto interno.

2.8.1 - Interpretação geométrica. Volume

Considere três vetores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ não coplanares. Então eles determinam um paralelepípedo, conforme figura ao lado.



O volume do paralelepípedo é o produto da área da base pela altura. Ora, a área da base é $\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\|$ e a altura é $\left\|\vec{DC}\right\| = \left\|\vec{OC'}\right\|$, então temos:

$$\left\|\vec{OC'}\right\| = \left\|\vec{c}\right\| \left|cos\left(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}\right)\right|$$

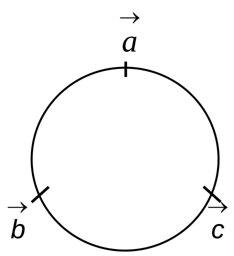
Assim, o volume do paralelepípedo será

$$V = \left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\| \left\|\vec{c}\right\| \left|cos\left(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}\right)\right| = \left|\vec{a} \times \vec{b} . \vec{c}\right| = \left|\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]\right|$$

isto é, o volume do paralelepípedo de arestas determinado por esses três vetores é o valor absoluto do produto misto desses vetores.

2.8.2 - Propriedades de produto misto

1) O produto misto não se altera se trocarmos ciclicamente a ordem dos vetores, no sentido convencionado positivo (anti-horário):



$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \left[\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\right] = \left[\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\right]$$

2) O produto misto muda de sinal se permutarmos dois vetores consecutivos:

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = -\left[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\right]$$

Essas propriedades são decorrentes das propriedades dos produtos interno e vetorial.

2.8.3 - Produto misto em coordenadas

Dados os vetores $\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$, $\vec{b} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}$, $\vec{c} = c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j} + c_3 \vec{k}$, para calcularmos o produto misto $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}$ é preciso inicialmente obter

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(a_2 b_3 - a_3 b_2\right) \vec{i} + \left(a_3 b_1 - a_1 b_3\right) \vec{j} + \left(a_1 b_2 - a_2 b_1\right) \vec{k}$$

Então

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 + a_1 b_2 c_3 - a_2 b_1 c_3$$

Por outro lado,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$$

Comparando os resultados, obtemos:

$$\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \qquad (3)$$

2.8.4 - Dependência linear e produto misto

Assim como o produto vetorial determina a dependência linear de dois vetores, o produto misto o faz para três vetores.

Teorema: Três vetores $\vec{a}, \vec{b}$ *e* $\vec{c}$ são linearmente dependentes se, e somente se, o produto misto entre eles for igual a zero.

Demonstração: (⇒) De fato, se $\vec{a}, \vec{b}$ *e* $\vec{c}$ forem *L. D.*, um deles será combinação linear dos outros, por exemplo, $\vec{a} = x\,\vec{b} + y\,\vec{c}$. Então $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]$ dado por *(3)*, será nulo (lembre-se das propriedades do determinante).

(⇐) Por outro lado, lembrando que geometricamente o produto misto representa o volume de um paralelepípedo gerado pelos vetores $\vec{a}, \vec{b}$ *e* $\vec{c}$ se $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right] = 0$, então o paralelepípedo tem volume nulo, e $\vec{a}, \vec{b}$ *e* $\vec{c}$ serão coplanares ou *L.D.*

Esse teorema nos fornece uma maneira simples de verificar a independência linear de três vetores (compare com **2.7.3**).

2.8.5 - Exercícios resolvidos

1) Verificar se os vetores $\vec{a} = \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\,\vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{c} = \vec{i} + \vec{k}$ formam base.

Solução: O conjunto { $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ } será base se, e somente se, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ forem L.I. Como

$$\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

os vetores dados são *L.I.* . Logo { $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ } é base.

2) Determine *x* tal que $\vec{a}$ = *(3, 5, 1)*, $\vec{b}$ = *(2, 0, 4)* e $\vec{c}$ = *(1, x, 3)* sejam coplanares.

Solução: Os vetores $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$ serão coplanares (ou *L. D.*) se $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = 0$. Calculando,

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & x & 3 \end{vmatrix} = -(10x + 10)$$

Logo,

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = 0 \ \ se \ \ x = -1$$

2.8.6 - Exercícios propostos

1) Dados $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{w} = -2\vec{j} - \vec{k}$ calcule $\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right], \left[\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}\right], \left[\vec{u}, \vec{w}, \vec{w}\right]$.

2) Os vetores $\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$, $2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$ e $4\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ são coplanares? Explique sua resposta.

3) Calcule o volume do paralelepípedo que tem um dos vértices no ponto $A = (2, 1, 6)$ e os três vértices adjacentes nos pontos $B = (4, 1, 3)$, $C = (1, 3, 2)$ e $D = (1, 2, 1)$.

4) Verifique, em cada caso, se os pontos são coplanares:

a) $A = (0, 2, -2)$, $B = (-1, 0, -2)$, $C = (-2, -1, -3)$, $D = (1, 1, 1)$

b) $A = (-1, 0, 3)$, $B = (-1, -2, 2)$, $C = (1, 0, 2)$, $D = (2, 4, 1)$

5) Determine x de modo que $\vec{a} = (1, x, 0)$, $\vec{b} = (-x, -1, 1)$, $\vec{c} = (1, 1, 1)$ não sejam coplanares.

6) Considere o triângulo cujos vértices são os pontos $A = (3, 2, 1)$, $B = (3, 2, 2)$, $C = (3, 3, 2)$. Determine:

a) Os ângulos do ΔABC.
b) O vetor projeção do menor lado sobre o maior lado.
c) A altura do triângulo, relativa ao maior lado.
d) A área do triângulo *ABC*
e) O volume do paralelepípedo gerado pelos vetores $\vec{AB}, \vec{AC}$ e $\vec{AB} \times \vec{AC}$.

7) Calcule o ângulo entre os vetores $2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ e $-\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$. Esses vetores são *L.I.* ou *L.D*?

8) Dados $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} + 3\vec{j}$, determine uma base ortonormal negativa $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, com $\vec{a}$ paralelo a $\vec{u}$ e $\vec{b}$ coplanar com $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

9) Dados $\vec{a} = 2x\vec{i} + 2x\vec{j} + x\vec{k}$, $\vec{b} = x\vec{i} - 2x\vec{j} + 2x\vec{k}$, $\vec{c} = 2x\vec{i} - x\vec{j} - 2x\vec{k}$, mostre que $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ é base ortogonal negativa se $x < 0$. Para que valor(es) de x, $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ será(ão) uma base ortonormal ? Ache as coordenadas de $\vec{v}$ na base ortonormal obtida, sendo $\vec{v}$ o vetor que na base canônica $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ tem coordenadas $(1, -2, -3)$.

10) Os vetores $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$ formam um terno ordenado positivo, e são perpendiculares entre si. Sabendo que $\left\|\vec{a}\right\| = 4$, $\left\|\vec{b}\right\| = 2$, $\left\|\vec{c}\right\| = 3$, calcule $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]$.

11) Os pontos *A = (4, 6, 2)*, *B = (1, 2, 1)*, *C = (3, 3, 3)*, *D = (7, 4, 3)* podem ser vértices de um paralelepípedo ? Em caso afirmativo, calcule o volume do sólido considerado, as coordenadas do ponto *E*, sendo *AE* uma diagonal interna.

12) Determine uma base ortonormal positiva a partir dos vetores $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$.

13) Dados os vetores $\vec{a} = (x, 2x, x)$, $\vec{b} = (-x, 0, x)$, $\vec{c} = (x, -x, x)$, Para que valores de x, $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ é base negativa? Para que valores de x, $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ é base ortogonal? Para que valores de x, $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ é base ortonormal?

14) Dados os vetores $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$ tais que o ângulo entre dois quaisquer deles, na ordem dada acima, é $\frac{\pi}{3} rd$ e sabendo que $\left\|\vec{a}\right\| = 4$, $\left\|\vec{b}\right\| = 2$, $\left\|\vec{c}\right\| = 6$ determine $\left\|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right\|$.

RETAS E PLANOS

Neste capítulo faremos o estudo da reta e do plano, suas relações métricas e diferentes posicionamentos, utilizando os conceitos e resultados do Cálculo Vetorial introduzidos no capítulo anterior.

3.1 - O PLANO

Basicamente, um plano fica determinado em três situações:

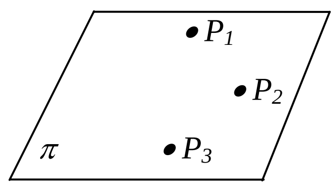
1ª) conhecendo-se três pontos não colineares;

2ª) conhecendo-se um ponto e dois vetores não colineares;

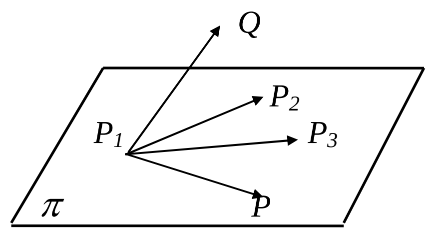
3ª) conhecendo-se um ponto e um vetor perpendicular ao plano.

Em cada caso, vejamos suas equações.

3.1.1 - Plano determinado por três pontos



Da geometria euclidiana sabemos que três pontos P_1, P_2 e P_3 , não colineares, determinam um plano π. Por outro lado, três pontos não colineares P_1, P_2 e P_3 determinam os vetores $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$, não colineares, logo *L. I.*.



Um ponto qualquer P pertence ao plano π se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{P_1P}$ pertence ao plano gerado pelos vetores $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$. Na figura ao lado, o ponto P pertence ao plano π determinado pelos pontos P_1, P_2 e P_3, pois $\overrightarrow{P_1P}$ pode ser expresso como combinação linear de $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$. O ponto Q não pertence ao plano π .

Assim, um ponto P qualquer pertence ao plano π determinado pelos pontos P_1, P_2 e P_3, se $\overrightarrow{P_1P}$ for combinação linear dos vetores não paralelos $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$, isto é,

$$\overrightarrow{P_1P} = p\,\overrightarrow{P_1P_2} + q\,\overrightarrow{P_1P_3} \quad \text{, com } p, q \in \Re.$$

Como $\overrightarrow{P_1P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_1}$, onde O é a origem de um sistema de eixos coordenados ortogonais, obtemos a ***equação vetorial*** do plano determinado pelos pontos P_1 ,P_2 e P_3

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + p\,\overrightarrow{P_1P_2} + q\,\overrightarrow{P_1P_3} \qquad (1)$$

Se $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$ e $P = (x, y, z)$, então podemos reescrever a equação *(1)* da seguinte maneira:

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} + p\,[(x_2-x_1)\vec{i} + (y_2-y_1)\vec{j} + (z_2-z_1)\vec{k}]$$
$$+\, q[\vec{i} + (y_3-y_1)\vec{j} + (z_3-z_1)\vec{k}]$$

ou

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = [x_1 + p(x_2-x_1) + q(x_3-x_1)]\vec{i} + [y_1 + p(y_2-y_1) + q(y_3-y_1)]\vec{j} +$$
$$+ [z_1 + p(z_2-z_1) + q(z_3-z_1)]\vec{k}$$

Como $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ é base do $\mathbb{R}^3$, vem

$$\begin{cases} x = x_1 + p(x_2-x_1) + q(x_3-x_1) \\ y = y_1 + p(y_2-y_1) + q(y_3-y_1) \\ z = z_1 + p(z_2-z_1) + q(z_3-z_1) \end{cases} \qquad (2)$$

Estas são as ***equações paramétricas*** do plano π. Os escalares p e q das equações *(1)* e *(2)* chamam-se *parâmetros* do ponto P. As equações *(1)* e *(2)* mostram que a cada ponto P do plano π corresponde um par de parâmetros $p, q \in \mathbb{R}$, e a cada par de números reais p, q corresponde um único ponto $P \in \pi$.

Usando o produto misto podemos também chegar a outro tipo de equação para o plano π determinado pelos pontos P_1, P_2 e P_3. Um ponto $P \in \pi$ se, e somente se, os vetores $\vec{P_1P}$, $\vec{P_1P_2}$, $\vec{P_1P_3}$ são *L. D.*, isto é, se, e somente se,

$$\left[\vec{P_1P}, \vec{P_1P_2}, \vec{P_1P_3}\right] = 0 \qquad (3)$$

Em coordenadas:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

Calculando o determinante acima, e fazendo

$$a = (y_2-y_1)(z_3-z_1) - (y_3-y_1)(z_2-z_1);$$
$$b = (x_3-x_1)(z_2-z_1) - (x_2-x_1)(z_3-z_1)$$
$$c = (x_2-x_1)(y_3-y_1) - (x_3-x_1)(y_2-y_1)$$
$$d = -(ax_1 + by_1 + cz_1)$$

obtém-se

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad (5)$$

que é a equação cartesiana do plano π.

Observações: 1) As equações paramétricas e vetorial do plano π determinado pelos pontos P_1, P_2 e P_3 teriam um aspecto diferente se considerássemos os vetores $\overrightarrow{P_2P_1}$, $\overrightarrow{P_2P_3}$ e $\overrightarrow{P_2P}$. A equação vetorial ficaria

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_2} + p'\overrightarrow{P_2P_1} + q'\overrightarrow{P_2P_3} \qquad (I)$$

onde consideramos os parâmetros *p'* e *q'*. As equações paramétricas ficariam:

$$\begin{aligned} x &= x_2 + p'(x_1 - x_2) + q'(x_3 - x_2) \\ y &= y_2 + p'(y_1 - y_2) + q'(y_3 - y_2) \\ z &= z_2 + p'(z_1 - z_2) + q'(z_3 - z_2) \end{aligned} \qquad (II)$$

As equações *(1)* e *(I)* ou *(2)* e *(II)*, representam o mesmo plano determinado pelos pontos P_1, P_2 e P_3, apesar do aspecto diferente. A equação cartesiana do plano π determinado por três pontos é sempre a mesma, qualquer que seja a ordem adotada para se considerar os pontos P_1, P_2 e P_3. Analogamente se considerássemos $\overrightarrow{P_3P_1}$, $\overrightarrow{P_3P_2}$ e $\overrightarrow{P_3P}$.

2) Se em vez dos pontos P_1, P_2 e P_3 tivéssemos tomado outros pontos do plano π, por exemplo, *A*, *B* e *C*, chegaríamos a equação do mesmo plano, mas usando coordenadas diferentes. Se um ponto *M* satisfaz (ou não) as equações obtidas de P_1, P_2 e P_3, então *M* satisfaz (ou não) as equações obtidas de *A*, *B* e *C* (apenas os parâmetros mudam em cada caso).

3) Para se obter um ponto de um plano dado por equações paramétricas, basta atribuir valores arbitrários aos parâmetros *p* e *q*, e calcular suas coordenadas *x, y* e *z*. Se o plano for dado por equação cartesiana, um ponto arbitrário do plano pode ser obtido atribuindo-se valores arbitrários a duas das variáveis e calculando-se o valor da terceira variável na equação dada.

Exemplo:

1) Obtenha as equações paramétricas e cartesiana do plano π que contém pontos $P_1 = (-1, 1, -2)$, $P_2 = (1, 2, 1)$ e $P_3 = (1, 4, 3)$. Verifique se os pontos $A = (-1, 3, 0)$ $B = (1, 1, -2)$ pertencem a esse plano. Obtenha um ponto *C* do plano, distinto dos pontos dados.

Solução: Fixando P_1, obtemos os vetores $\overrightarrow{P_1P_2} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ e $\overrightarrow{P_1P_3} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$ do plano. Assim, as equações paramétricas do plano ficam:

$$x = -1 + 2p + 2q; \quad y = 1 + p + 3q \ \text{ e } \ z = -2 + 3p + 5q, \ p, q \in \mathbb{R}.$$

Vejamos se o ponto $A = (-1,3,0) \in \pi$, isto é, se existem escalares *p* e *q* tais que

$$\begin{cases} -1 = -1 + 2p + 2q \\ 3 = 1 + p + 3q \\ 0 = -2 + 3p + 5q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2p + 2q = 0 \\ p + 3q = 2 \\ 3p + 5q = 2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos $p = -1$ e $q = 1$. Logo existem parâmetros p e q que correspondem ao ponto A, isto é, $A \in \pi$. Vejamos se o ponto $B = (1, 1, -2) \in \pi$:

$$\begin{cases} 1 = -1 + 2p + 2q \\ 1 = \ 1 + \ p + 3q \\ -2 = -2 + 3p + 5q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2p + 2q = 2 \\ p + 3q = 0 \\ 3p + 5q = 0 \end{cases}$$

Temos um sistema é impossível. Logo não existem parâmetros $p, q \in \mathbb{R}$ que correspondem ao ponto B, isto é, $B \notin \pi$. Para obtermos um ponto C distinto dos já citados, devemos escolher um par de parâmetros diferentes. Note que, ao ponto P_1 correspondem os parâmetros $p = 0$ e $q = 0$. Ao ponto P_2, correspondem $p = 1$ e $q = 0$, e ao ponto P_3, os parâmetros $p = 0$, $q = 1$. Tomando $p = 2$ e $q = 3$, as equações paramétricas de π nos fornecem o ponto $C = (9,12, 19) \in \pi$.

A equação cartesiana do plano π é dada por

$$\left[\overrightarrow{P_1P}, \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3} \right] = 0 .$$

Como $\overrightarrow{P_1P} = (x+1)\vec{i} + (y-1)\vec{j} + (z+2)\vec{k}$, $\overrightarrow{P_1P_2} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ e $\overrightarrow{P_1P_3} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$, vem que:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z+2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x + y - z - 2 = 0.$$

Vejamos se os pontos $A = (-1, 3, 0)$ e $B = (1, 1, -2)$ estão em π. Para que os pontos A e B pertençam ao plano, suas coordenadas devem satisfazer a equação do plano. Então:

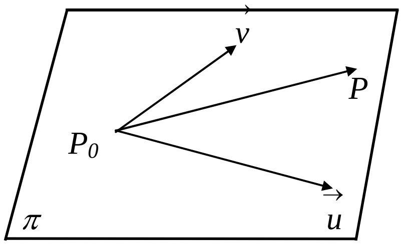
$$-1 + 3 - 0 - 2 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow A \in \pi.$$

$$1 + 1 + 2 - 2 = 0 \Rightarrow 2 = 0 \text{, absurdo! } B \notin \pi.$$

Para obtermos outro ponto de π, diferente de A e B, vamos atribuir, a duas variáveis, valores arbitrários, porém distintos dos valores já assumidos nos outros pontos. Por exemplo, se $x = 0$ e $y = 0$, vem da equação cartesiana $z = -2$ e, portanto, $D = (0, 0, -2) \in \pi$.

3.1.2 - Plano determinado por um ponto e dois vetores

Este caso é análogo ao **3.1.1**. Um ponto P_0 e dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não colineares sempre determinam um plano π. Um ponto $P(x, y, z)$ qualquer pertence ao plano π se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ for combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$,



isto é, se os vetores $\overrightarrow{P_0P}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são coplanares. Portanto, a ***equação vetorial*** do plano π será:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + p\vec{u} + q\vec{v} \qquad (1')$$

Se $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ e $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ obtemos as ***equações paramétricas*** do plano que contém vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e passa pelo ponto P_0.

$$\begin{cases} x = x_0 + pu_1 + qv_1 \\ y = y_0 + pu_2 + qv_2 \\ z = z_0 + pu_3 + qv_3 \end{cases} \qquad (2')$$

Usando o produto misto, podemos expressar o fato do ponto P pertencer ao plano π, ou seja, os vetores $\overrightarrow{P_0P}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ são *L. D.* e portanto

$$\left[\overrightarrow{P_0P}, \vec{u}, \vec{v}\right] = 0 \qquad (3')$$

Considerando as coordenadas de P_0, $\vec{u}$, $\vec{v}$, então temos que:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4')$$

Calculando o determinante obtemos a ***equação cartesiana*** do plano

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad (5)$$

onde $a = u_2v_3 - u_3v_2$, $b = u_3v_1 - u_1v_3$, $c = u_1v_2 - u_2v_1$ e $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$.

Exemplo:

1) Obtenha as equações cartesiana e paramétricas do plano que passa por $A = (1, 2, 3)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{v} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

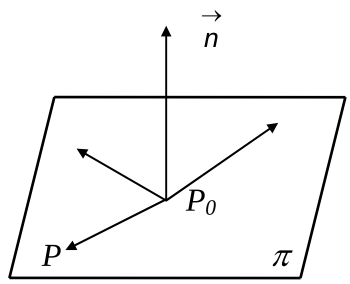
Solução: Vamos determinar a equação cartesiana do plano α. Para isto, temos que um ponto $P = (x, y, z) \in \alpha$ se, e somente se, $\overrightarrow{AP}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ forem *L.D.*, isto é, se, e somente se,

$$\left[\overrightarrow{AP}, \vec{u}, \vec{v}\right] = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 3y - 8z + 29 = 0$$

Vamos determinar agora às equações paramétricas de plano que passa pelo ponto A = $(1, 2, 3)$ e paralelo a $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{v} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ Então, teremos:

$$\begin{cases} x = 1 + p + 2q \\ y = 2 + 3p - 2q \\ z = 3 - p + q \end{cases}$$

3.1.3 - Plano que contém um ponto e é perpendicular a um vetor



Um vetor $\vec{n} \neq \vec{0}$ é **perpendicular** ou **normal** a um plano π se, e somente se, $\vec{n}$ for perpendicular a todos os vetores paralelos a π. Sejam $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto do plano π e $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ o vetor normal de π. Um ponto $P = (x, y, z)$ pertence ao plano π se, e somente se, $\overrightarrow{P_0P}$ for perpendicular a $\vec{n}$, isto é ,

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 \qquad (6)$$

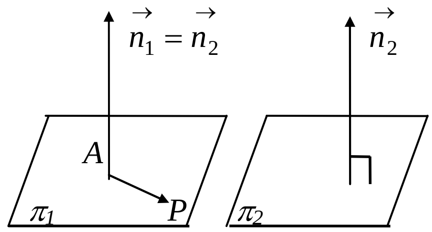
e esta é a ***equação normal*** do plano. Se $P = (x_0, y_0, z_0)$, $P = (x, y, z)$ e $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, então a equação normal do plano π será:

$$\left(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}\right) . \left((x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}\right) = 0 \;\Rightarrow\; ax + by + cz + d = 0$$

onde $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$. Observe que na equação cartesiana *(5)* os coeficientes de *x, y* e *z* são, respectivamente, as coordenadas de um vetor normal do plano π.

Exemplo:

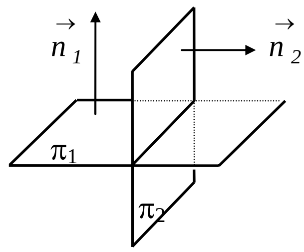
1) Determine a equação normal do plano π que passa pelo ponto $A = (1, 2, 3)$ e é paralelo ao plano π_1: $3x - y + 2z + 5 = 0$.



Solução: Chamaremos de π_1 o plano pedido e π_2 o plano dado. Como π_1 é paralelo a π_2 eles têm os mesmos vetores normais. Assim o vetor normal de π_1 será $\vec{n}_2 = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$. Seja $P = (x, y, z)$ um ponto qualquer de π_1. Como $\overrightarrow{AP} = (x-1)\vec{i} + (y-2)\vec{j} + (z-3)\vec{k}$, a equação normal de π_1 será

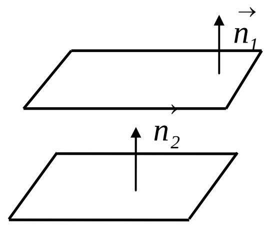
$$\vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \;\Rightarrow\; 3(x-1) - (y-2) + 2(z-3) = 0 \;\Rightarrow\; 3x - y + 2z - 7 = 0.$$

Observações:



1. Dois planos π_1 e π_2 são perpendiculares ou ortogonais se seus vetores normais forem ortogonais, isto é, $\vec{n}_1 . \vec{n}_2 = \vec{0}$.

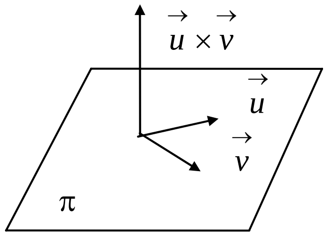
2. Para que dois planos π_1 e π_2 sejam paralelos é necessário, mas não suficiente, que tenham vetores normais paralelos, isto é, $\vec{n_1} = t\,\vec{n_2}$, $t \in \Re$ ou $\vec{n_1} \times \vec{n_2} = \vec{0}$



3.1.4 - Exercícios resolvidos

1) Determine um vetor unitário normal a um plano paralelo aos vetores $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{k}$.

Solução: Seja π plano dado. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos a π, então $\vec{u} \times \vec{v}$ será perpendicular (normal) a π. Portanto $\vec{w} = \dfrac{\vec{u} \times \vec{v}}{||\vec{u} \times \vec{v}||}$ é o vetor pedido. Então,



$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$$

donde, $||\vec{u} \times \vec{v}|| = \sqrt{9 + 25 + 1} = \sqrt{35}$. Então, um vetor unitário normal ao plano π será

$$\vec{w} = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{||\vec{u} \times \vec{v}||} = \frac{1}{\sqrt{35}}\left(3\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}\right)$$

2) Escreva as equações paramétricas do plano $3x - y + 2z + 6 = 0$.

Solução: Determinemos três pontos quaisquer A, B e C do plano dado. Fazendo $x = 0$ e $y = 0$ na equação do plano, obtemos $z = -3$ e teremos o ponto $A = (0, 0, -3)$. Da mesma forma, se $x = 0$ e $z = 0$, então $y = 6$ e teremos o ponto $B = (0, 6, 0)$. Se $y = 0$ e $z = 0$, então $x = -2$ e teremos o ponto $C = (-2, 0, 0)$. Fixando o ponto A teremos os vetores $\vec{AB} = 6\vec{j} + 3\vec{k}$ e $\vec{AC} = -2\vec{i} + 3\vec{k}$ do plano e, portanto suas equações paramétricas são: $x = -2q$; $y = 6p$ e $z = -3 + 3p + 3q$, $p, q \in \mathbb{R}$. Para verificarmos se as equações paramétricas estão corretas, basta substituirmos estas equações paramétricas na equação cartesiana dada. Assim teremos: $-6q - 6p - 6 + 6p + 6q + 6 = 0$ ou $0 = 0$. Poderíamos determinar de uma maneira mais simples, as equações paramétricas do plano. Basta fazermos $x = p$ e $y = q$ e substituindo na equação cartesiana dada, obtemos $3p - q + 2z + 6 = 0 \;\Rightarrow\; z = -3 - \frac{3}{2}p + \frac{1}{2}q$. Assim as equações paramétricas do plano : $x = p$, $y = q$ e $z = -3 - \frac{3}{2}p + \frac{1}{2}q$.

3) Seja π um plano de equações paramétricas são $x = 4 - p + 2q$, $y = 2 + p$ e $z = 3p - q$ Escreva a equação cartesiana do plano π

Solução: As equações paramétricas de um plano contém várias informações úteis $x = x_0 + pa_1 + qb_1$, $y = y_0 + pa_2 + qb_2$ e $z = z_0 + pa_3 + qb_3$. Por exemplo, um ponto P_0 do plano é dado pelos valores livres dos parâmetros p e q: $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, paralelos ao plano, são dados pelos coeficientes dos parâmetros p e q. Então, temos $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ e $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$. Para obtermos a equação cartesiana de um plano, precisamos conhecer um de seus pontos e dois vetores desse plano. Neste caso, temos $P_0 = (4,2,0)$ e os vetores $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{k}$. Se $P = (x, y, z)$ é um ponto qualquer do plano então

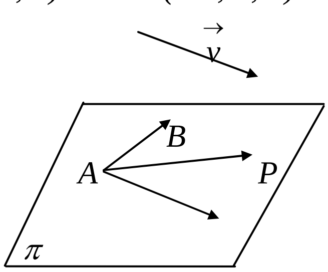
$$\left[\overrightarrow{P_0P}, \vec{a}, \vec{b}\right] = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-4 & y-2 & z \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 5y + 2z + 6 = 0.$$

4) Determine a equação do plano que passa pelo ponto $A = (1, 2, 0)$ e é perpendicular aos planos $3x - y - 2z - 3 = 0$ e $2x + y - 3z + 1 = 0$.

Solução: Chamemos de π_1 o plano de equação $3x - y - 2z - 3 = 0$ e de $\pi_2: 2x + y - 3z + 1 = 0$. Observe que eles admitem, respectivamente, como vetores normais $\vec{n_1} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ e $\vec{n_2} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$. Observe que $\vec{n_1}$ não é múltiplo de $\vec{n_2}$. Logo os planos π_1 e π_2 não são paralelos. Sejam π plano desejado e $\vec{n}$ o seu vetor normal. Como o plano π deve ser perpendicular aos planos dados π_1 e π_2 então $\vec{n}$ é paralelo ao vetor $\vec{n_1} \times \vec{n_2}$. Como $A \in \pi$ e se $P = (x, y, z)$ é um ponto qualquer do plano π, então sua equação fica :

$$(\vec{n_1} \times \vec{n_2}) \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ x-1 & y-2 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + y + z - 3 = 0.$$

5) Determine a equação do plano π que contém os pontos $A = (1, 2, 3)$ e $B = (-2, 0, 6)$ e é paralelo ao vetor $\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j}$.



Solução : Se $A, B \in \pi$, então eles determinam o vetor $\overrightarrow{AB} = -3\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ do plano π, não colinear com $\vec{v}$. Seja $P = (x, y, z)$ um ponto qualquer do plano. Então os vetores $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AB}$ e $\vec{v}$ são *L.D.*. Portanto, teremos $\left[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \vec{v}\right] = 0$.

Como $\overrightarrow{AP} = (x-1)\vec{i} + (y-2)\vec{j} + (z-3)\vec{k}$ então,

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -3 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 9x + 3y + 11z - 48 = 0$$

6) Determine o ângulo entre o vetor $\vec{u} = (1, -1, -3)$ e um vetor normal ao plano π cujas equações paramétricas são $x = 2 - 3p + 2q$, $y = 1 - 3p + q$ e $z = 3 + p - 2q$.

Solução: Analisando as equações paramétricas do plano, concluímos que os vetores $\vec{v} = (-3, -3, 1)$, $\vec{w} = (2, 1, -2)$ são paralelos ao plano dado e, portanto, seu vetor normal será

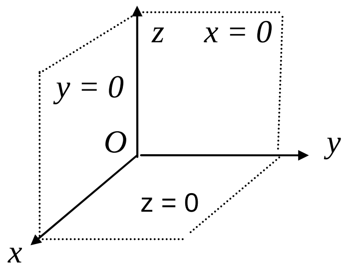
$$\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (5, -4, 3)$$

O ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v} \times \vec{w}$ é dado por

$$|cos\left(\vec{u}, \vec{v} \times \vec{w}\right)| = \frac{|\vec{u} \cdot \left(\vec{v} \times \vec{w}\right)|}{||\vec{u}|| \, ||\vec{v} \times \vec{w}||} = \frac{|5 + 4 - 9|}{\sqrt{11}\sqrt{50}} = 0 \Rightarrow \left(\vec{u}, \vec{v} \times \vec{w}\right) = 90^0$$

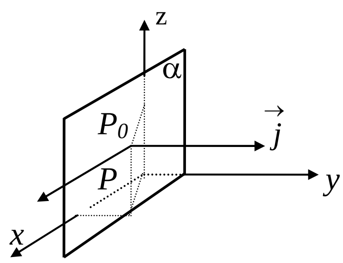
Logo os vetores $\vec{u}$ e $\vec{n}$ são perpendiculares entre si e o vetor $\vec{u}$ é paralelo ao plano dado .

7) Escreva as equações dos três planos coordenados:



Solução: Os planos coordenados são *x0y*, *x0z* e *y0z*. O plano coordenado *x0y*, plano *xy*, contém a origem $0 = (0, 0, 0)$ e é perpendicular ao vetor $\vec{k}$, se $P = (x, y, z) \in x0y$, então $\vec{k} \cdot \vec{OP} = 0 \Rightarrow z = 0$. O plano coordenado *x0z*, plano *xz*, contém a origem e é perpendicular ao vetor $\vec{j}$. Se $P = (x, y, z)$ é um ponto do plano *x0z*, então $j \cdot \vec{OP} = 0$ ou $y = 0$. O plano coordenado *y0z*, plano *yz*, cujo vetor normal é $\vec{i}$ tem equação é $x = 0$.

8) Escreva a equação do plano paralelo ao plano *x0z*, passando por $P_0 = (1, 2, 3)$.



Solução: Seja π o plano que passa por P_0 e é paralelo a *x0z* . Note que o plano π terá como vetor normal o vetor $\vec{j}$ e se $P = (x, y, z) \in \pi$, vem que $\vec{j} \cdot \vec{P_0P} = 0$. Como

$$\vec{P_0P} = (x - 1)\vec{i} + (y - 2)\vec{j} + (z - 3)\vec{k}$$

podemos concluir que a equação do plano π será $y - 2 = 0$ ou $y = 2$.

3.1.5 - Exercícios propostos

1) Escreva as equações paramétricas e cartesiana do plano determinado pelos pontos $A = (3, 1, 2)$, $B = (4, -1, -1)$ e $C = (2, 0, 2)$.

2) Ache a equação do plano que contém o ponto $A=(2, 1,-1)$ e é ortogonal ao vetor $\vec{v}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$. Os pontos $B = (-1, 1, 0)$ e $C = (0, 1, -1)$ pertencem a esse plano ? Justifique.

3) Escreva as equações paramétricas do plano que passa pelo ponto $P_0 = (1,2,2)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (2,1,-1)$ e $\vec{v} = (1,-1,-2)$. Obtenha outro ponto desse plano.

4) Escreva a forma normal e cartesiana do plano que contém os pontos $A = (2, -1, 3)$ e $B = (3, 1, 2)$ e é paralelo ao vetor $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}$.

5) Seja π o plano de equação $2x - y - 3z = -5$. Determine o valor de m para que o ponto $P_0 = (m, m+2, 2)$ pertença ao plano. Este plano passa pela origem? Como deveria ser a equação de um plano paralelo a esse, passando pela origem?

6) Obtenha um vetor unitário normal ao plano $3x - y + z = 4$. Escreva as equações paramétricas desse plano.

7) Obtenha um vetor de comprimento 15, normal ao plano $x = 2 - 3p - q$, $y = 1 + p - 2q$ e $z = -p - q$. Escreva a equação cartesiana do plano dado.

8) O ponto $A = (2, -1, -1)$ é o pé da perpendicular baixada da origem a um plano. Ache a equação desse plano.

9) Encontre um vetor de comprimento $2/3$ e que seja ortogonal ao plano que contém os pontos $M = (1, 0, 0)$, $N = (0, 2, 0)$ e $Q = (0, 0, 3)$. Escreva a equação cartesiana desse plano.

10) Descreva e esboce o plano $y = 3$.

11) Escreva a equação do plano que contém o eixo $0z$ e um vetor na direção da bissetriz do ângulo entre os vetores $\vec{i}$ e $\vec{j}$. Esboce o plano.

12) Determine uma base ortonormal negativa $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ tal que $\vec{a}$ seja normal ao plano $2x - 5y + 4z - 3 = 0$ e os vetores $\vec{b}$ e $\vec{c}$ sejam paralelos a esse plano.

13) Escreva as equações cartesiana e paramétricas do plano que passa pela origem e é paralelo ao plano $5x + 2y - 3z + 6 = 0$. O ponto $B = (1, 0, 1)$ pertence a esse plano?

14) Determine as equações paramétricas e cartesiana do plano que contém os pontos $A = (7, 2, -3)$ e $B = (5, 6, -4)$, e é paralelo ao eixo $0x$. O ponto médio de AB pertence a esse plano?

15) Determine a equação do plano que contém o ponto $A = (1, -2, 4)$ e é paralelo ao plano $x0z$. A origem pertence a esse plano? Esboce.

16) Dados os planos $2x + my + 3z - 5 = 0$ e $nx - 6y - 6z = 0$, determine os valores de m e n para que sejam paralelos.

17) Calcule os valores de m para que os planos $mx - 2y + z = 0$ e $mx + y + z - 1 = 0$ sejam perpendiculares.

18) Escreva a equação do plano que passa pelos pontos $A = (1,-1,-2)$ e $B = (3, 1, 1)$ e é perpendicular ao plano $x - y + 3z - 5 = 0$.

19) Escreva a equação do plano que passa pelo ponto $A = (1, 2, 3)$ e é perpendicular aos planos $2x - y + 3z = 0$ e $x + 2y + z - 1 = 0$.

20) Obtenha a equação do plano que passa pelo ponto $A = (2, 2, -1)$ e é paralelo aos eixos coordenados $0y$ e $0z$.

21) Quais pares, das equações abaixo, determinam planos paralelos ?

a) $4x - 6y + 10z - 14 = 0$ e $6x - 9y + 15z - 14 = 0$

b) $x = 1 - p + 2q$, $y = 3p - q$, $z = 2 + 2p - 2q$
$x = 4 + p$, $y = 1 + p - q$, $z = 1 - q$.

c) $4x + 2y - 4z = 0$ e $2x - 6z - 4 = 0$

d) $x - 3z + 2 = 0$ e $2x - 6z - 4 = 0$

22) Quais pares, das equações abaixo, determinam planos perpendiculares ?

a) $3x + 9y - 2z - 5 = 0$ e $x - y - 3z - 4 = 0$

b) $x - 3y - z - 9 = 0$ e $2x + y - z + 1 = 0$

c) $3x - 5y + z = 0$ e $x + 5z + 8 = 0$

23) Para que valores de m e n os pares de equações abaixo determinam planos paralelos ?

a) $2x + my + 2z = 0$ e $3x - y + n z - 2 = 0$

b) $mx + 3y - 2z - 1 = 0$ e $2x - 5y - n z = 0$

24) Determine os valores de m e n para que os pares de equações abaixo representem planos ortogonais :

a) $3x - 5y + mz - 3 = 0$ e $x + 3y + 2z - 5 = 0$

b) $2x + my + 3z = 1$ e $n x + y - 3z = 6$

c) $-2x + 7y - 3z = 0$ e $x + my + nz - 1 = 0$

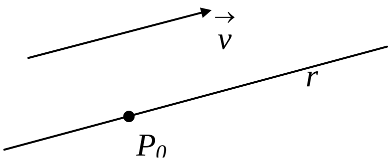
25) Indique um vetor paralelo ao plano $3x + 2y - z = 4$.

26) Escreva a equação do plano que passa pelo eixo $0z$ e pelo ponto $A = (4, 3, 1)$. Esboce o plano.

3.2 - A RETA

Basicamente, uma reta é determinada por um ponto e uma direção. Alguns casos particulares dessa situação serão estudados separadamente.

3.2.1 - Reta determinada por um ponto e uma direção



Dado um vetor $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ e um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, existe uma única reta r que passa por P_0 e tem a direção do vetor $\vec{v}$. Um ponto $P = (x, y, z)$ pertence à reta r se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ for paralelo ao vetor $\vec{v}$, isto é, se existir $t \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{P_0P} = t\vec{v}$. Como $\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}$, então:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R} \qquad (7)$$

Esta é a ***equação vetorial*** da reta que passa pelo ponto P_0 e é paralela ao vetor $\vec{v}$. Em coordenadas, a equação *(7)* fica :

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} + t(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k})$$
$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x_0 + at)\vec{i} + (y_0 + bt)\vec{j} + (z_0 + ct)\vec{k}$$

Como $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ são linearmente independentes, concluímos que

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \quad t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + ct \end{cases} \qquad (8)$$

Estas são as ***equações paramétricas*** da reta r que passa pelo ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$. O escalar t que aparece nas equações *(7)* e *(8)* chama-se *parâmetro* do ponto P. O vetor $\vec{v}$ que dá a direção da reta chama-se ***vetor diretor*** *da reta r.* A cada ponto P da reta r corresponde um valor do parâmetro t e a cada valor real do parâmetro t em *(7)* ou *(8)* corresponde um ponto P da reta r.

Se $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ é o vetor diretor de uma reta r e é tal que $a \neq 0, b \neq 0$ e $c \neq 0$, então de (8) vem:

$$t = \frac{x - x_0}{a}; \quad t = \frac{y - y_0}{b}; \quad t = \frac{z - z_0}{c}$$

Portanto,

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \qquad (9)$$

Estas são as ***equações simétricas*** da reta *r* que passa pelo ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ na direção do vetor $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$.

Exemplos:

1) Escreva as equações vetorial, paramétricas e simétricas da reta que passa pelo ponto $P_0 = (1, 2, 3)$ e é paralela ao vetor $\vec{v} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 5\vec{k}$. Verifique se os pontos $A = (5, 0, -3)$ e $B = (-1, 3, 2)$ pertencem a essa reta. Obtenha outro ponto *C* da reta distinto dos anteriores.

Solução: Se $P = (x, y, z) \in r$, então as equações vetorial, paramétricas e simétricas da reta *r* são, respectivamente :

$$\vec{OP} = \vec{OP_0} + t\vec{v}, \quad P_0 = (1, 2, 3); \; \vec{v} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 5\vec{k} \;, \; t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 - 5t \end{cases} \quad \text{e} \quad \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{-5} .$$

Vejamos se o ponto $A = (5, 0, -2)$ pertence à reta *r*. Substituindo suas coordenadas nas equações paramétricas de *r* , obtemos :

$$5 = 1 + 4t \quad \Rightarrow \quad t = 1$$
$$0 = 2 - 2t \quad \Rightarrow \quad t = 1$$
$$-2 = 3 - 5t \quad \Rightarrow \quad t = 1$$

Como ao ponto *A* corresponde o parâmetro $t = 1$ concluímos que *A* pertence a *r*. Vejamos se o ponto $B = (-1, 3, 2)$ pertence à reta *r* . Substituindo suas coordenadas nas equações paramétricas de *r*, temos :

$$-1 = 1 + 4t \;\Rightarrow\; t = -\tfrac{1}{2}$$
$$3 = 2 - 2t \;\Rightarrow\; t = -\tfrac{1}{2}$$
$$2 = 3 - 5t \;\Rightarrow\; t = \tfrac{1}{5}$$

Como não existe um valor do parâmetro *t* correspondendo ao ponto *B*, concluímos que $B \notin r$. Observe que o ponto $P_0 = (1, 2, 3)$ corresponde ao parâmetro $t = 0$. Para obter outro ponto *C* em *r*, distinto dos pontos *A* e P_0, basta atribuir a *t* um valor distinto dos já usados. Assim, para qualquer valor real de *t*, $t \neq 1$ e $t \neq 0$, teremos um ponto na reta. Tomemos, por exemplo, $t = -1$. Então, das equações paramétricas da reta *r*, obtemos $x = -3$, $y = 4$ e $z = 8$ e assim teremos o ponto $C = (-3, 4, 8) \in r$.

3.2.1.1- Reta situada em um plano coordenado

Se a reta *r* estiver contida em um dos planos coordenados, por exemplo, *x0y*, cuja equação é $z = 0$, qualquer ponto $P_0 \in r$ será do tipo $P_0 = (x_0, y_0, 0)$ e todo vetor de *r* se escreverá como $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + 0\vec{k}$. Assim, as equações paramétricas de *r* ficarão:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt\,, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = 0 \end{cases}$$

Observe que neste caso não podemos obter as equações simétricas de *r*, mas sim uma forma quase-simétrica, para $a \neq 0$ e $b \neq 0$,

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}\ ;\ z = 0.$$

Da expressão anterior tiramos:

$$y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0);\ z = 0$$

que é, no plano $z = 0$, a equação da reta que passa pelo ponto $P_0 = (x_0, y_0, 0)$ e tem como inclinação o número b/a. Além disso, da equação anterior, obtemos:

$$y = \frac{b}{a}x + \left(y_0 - \frac{b}{a}x_0\right),\ z = 0$$

Fazendo $m = \frac{b}{a}$, $n = y_0 - \frac{b}{a}x_0$, obtemos $y = mx + n$, com $z = 0$, que é a equação de uma reta no plano *x0y*. Equações análogas podem ser obtidas se *r* estivesse contida em um dos outros planos coordenados *x0z* ou *y0z* .

3.2.2 - Reta determinada por dois pontos

Dois pontos $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, com $P_1 \neq P_2$, determinam uma única reta, a reta *r* que passa por um desses pontos e tem a direção do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$. Dessa forma, recaímos na mesma situação de **3.2.1**. Então um ponto $P = (x, y, z)$ pertencerá à reta *r* determinada pelos pontos P_1 e P_2 se, e somente se,

$$\overrightarrow{P_1P} = t\overrightarrow{P_1P_2},\ t \in \mathbb{R}$$

ou seja,

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + t\overrightarrow{P_1P_2}\ ,\ t \in \mathbb{R} \qquad (7')$$

que será a *equação vetorial* dessa reta.

Se $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$, então

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t\,, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)t \end{cases} \qquad (8')$$

serão as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos P_1 e P_2. Se $x_2 - x_1 \neq 0$, $y_2 - y_1 \neq 0$ e $z_2 - z_1 \neq 0$, teremos as *equações simétricas* da reta que passa por P_1 e P_2:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad (9')$$

Para as equações *(7'), (8')* e *(9')* valem as mesmas considerações feitas sobre o parâmetro *t*, referentes as equações *(7), (8)* e *(9).*

3.2.3 - Reta determinada por dois planos

Sejam π_1 e π_2 dois planos não paralelos e não coincidentes, cujas equações são, respectivamente, $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Note que estes planos se cortam segundo uma reta *r*, indicada por

$$r: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

e cujas equações podem ser obtidas de duas maneiras.

1ª) Para escrevermos as equações da reta *r*, precisamos de um de seus pontos e do seu vetor diretor $\vec{v}$. Sejam $\vec{n_1} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$ e $\vec{n_2} = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$ vetores normais aos planos π_1 e π_2, respectivamente. Como a reta *r* está contida nos planos π_1 e π_2 então $\vec{v} \perp \vec{n_1}$ e $\vec{v} \perp \vec{n_2}$. Logo podemos considerar $\vec{v} = \vec{n_1} \times \vec{n_2}$, (ou $\vec{v}$ paralelo a $\vec{n_1} \times \vec{n_2}$). Vamos determinar um ponto da reta, isto é, um ponto $P_0 \in \pi_1 \cap \pi_2$. Para isso, tomemos as equações de π_1 e π_2:

$$\underset{(I)}{\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = -d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = -d_2 \end{cases}} \qquad \underset{(II)}{\begin{cases} b_1y + c_1z = -d_1 \\ b_2y + c_2z = -d_2 \end{cases}}$$

Um ponto P_0 pertencerá a reta r se satisfizer o sistema *(I)* acima. Por exemplo, fazendo $x = 0$, obtemos o sistema *(II)*, que resolvido nos dará o ponto $P = (0, y, z)$. A reta $r = \pi_1 \cap \pi_2$ será a reta que passa pelo ponto P_0, na direção do vetor $\vec{v} = \vec{n_1} \times \vec{n_2}$.

2ª) As equações dos planos π_1 e π_2 formam um sistema de equações lineares, que resolvido nos dará a reta

$$r: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = -d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = -d_2 \end{cases}$$

Exemplo:

1) Escrever as equações paramétricas da reta dada pela interseção dos planos $x + 2y - z + 1 = 0$ e $2x - y - z - 4 = 0$

Solução: Conforme vimos acima, há duas maneiras de resolver esse problema. Usaremos a 2ª forma. Consideremos, então, o sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ 2x - y - z = 4 \end{cases}$$

Usando escalonamento, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & -6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1/5 & -6/5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3/5 & 7/5 \\ 0 & 1 & -1/5 & -6/5 \end{bmatrix}$$

Portanto, $x - \frac{3}{5}z = \frac{7}{5}$; $y - \frac{1}{5}z = -\frac{6}{5}$, $t \in \mathbb{R}$. Tomando z como parâmetro, isto é, fazendo $z = t$, obtemos as equações paramétricas de r,

$$x = \frac{7}{5} + \frac{3}{5}t; \quad y = \frac{-6}{5} + \frac{1}{5}t; \quad z = t, \ t \in \mathbb{R}. \qquad (*)$$

A reta r é paralela ao vetor $\vec{v} = \frac{3}{5}\vec{i} + \frac{1}{5}\vec{j} + \vec{k}$ e passa pelo ponto $P_1 = (7/5, -6/5, 0)$.

2ª maneira: Tomemos os vetores normais aos planos π_1 e π_2, respectivamente, $\vec{n_1} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{n_2} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$. Então

$$\vec{v} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - \vec{j} - 5\vec{k}$$

é um vetor diretor de r. Vamos determinar o ponto P_0. Fazendo, por exemplo, $y = 0$, no sistema acima e usando escalonamento, obtemos:

$$\begin{cases} x - z = -1 \\ `2x - z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{cases} x = 5 \\ z = 6. \end{cases}$$

Logo, $P_0 = (5,0,6)$ e as equações paramétricas de r são: $x = 5 - 3t$, $y = -t$, $z = 6 - 5t$, $t \in \mathbb{R}$.(**)

Note que chegamos às equações paramétricas distintas das já obtidas na resolução anterior. As equações (**) expressam uma reta que passa pelo ponto $P_0 = (5,0,6)$, e tem a direção do vetor $\vec{u} = -3\vec{i} - \vec{j} - 5\vec{k}$, enquanto as equações (*) expressam uma reta que passa pelo ponto $P_1 = (7/5, -6/5, 0)$, com vetor diretor $\vec{v} = \frac{3}{5}\vec{i} + \frac{1}{5}\vec{j} + \vec{k}$. Logo as retas equacionadas em (*) e (**) tem a mesma direção. Além disso, se em (*) fizermos $t = 6$ obteremos o ponto *(5, 0, 6)*, usado em (**) e, se em (**) fizermos $t = 6/5$ obteremos o ponto *(7/5, -6/5, 0)*, usado em (*). Logo (*) e (**) são duas expressões diferentes da mesma reta.

Observações:

1) Sejam r_1 *e* r_2 duas retas, com vetores diretores $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$, respectivamente. Então:

a) r_1 *e* r_2 serão perpendiculares se os seus vetores diretores forem ortogonais, isto é, $\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = 0$.

b) r_1 *e* r_2 serão paralelas se os seus vetores diretores forem paralelos, isto é, se $\vec{v_1} \times \vec{v_2} = \vec{0}$ ou $\vec{v_1} = m\,\vec{v_2},\ m \in \mathbb{R}$.

3.2. 4 - Exercícios resolvidos

1) Obter as equações paramétricas da reta dada por $x + 1 = \frac{2y-3}{5} = \frac{2-z}{4}$.

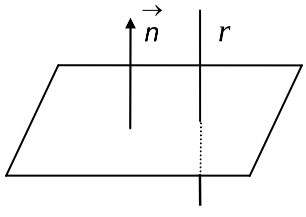
Solução: Recordemos que as equações simétricas de uma reta que passa por um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e é paralela ao vetor $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, são: $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$.

As equações da reta dada não estão exatamente nessa forma, mas podemos reescrevê-las, obtendo:

$$x + 1 = \frac{2(y - 3/2)}{5} = \frac{(z-2)}{-4} \Rightarrow \frac{x+1}{1} = \frac{y - 3/2}{5/2} = \frac{z-2}{-4}$$

Logo, $P_0 = (-1, \frac{3}{2}, 2)$, $\vec{v} = \vec{i} + \frac{5}{2}\vec{j} - 4\vec{k}$ e as equações paramétricas da reta dada são: $x = -1 + t,\ y = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}t,\ z = 2 - 4t,\ t \in \mathbb{R}$.

2) Escreva as equações da reta que contém o ponto $A = (-2, 1, 0)$ e é perpendicular ao plano $2x + 3y - z = 4$.



Solução: Se a reta r é perpendicular ao plano π, então r tem a direção do vetor normal de π, que é $\vec{n} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$. Então, as equações paramétricas da reta r que passa pelo ponto A e tem vetor diretor $\vec{n}$ são: $x = -2 + 2t,\ y = 1 + 3t,\ z = -t,$

$t \in \mathbb{R}$ e as equações simétricas são $\frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{3} = -z$.

3) Escreva as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $P_0 = (1, -1, 1)$ e é paralela à reta interseção dos planos $3x - y + z = 0$ e $x + 2y - z = 0$

Solução: Para escrever as equações de uma reta precisamos de um ponto $P_0 = (1, -1, 1)$ e do vetor diretor dessa reta. Se a reta r é paralela à reta r_1, interseção dos planos π_1 e π_2, então r tem a mesma direção de r_1. Sendo $\vec{n_1} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{n_2} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ vetores normais π_1 e π_2, respectivamente, a reta r terá como um vetor diretor

$$\vec{v} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k}$$

Então as equações paramétricas da reta r serão: $x = 1 - t$, $y = -1 + 4t$, $z = 1 + 7t$, $t \in \mathbb{R}$.

4) Escreva a equação da reta que passa pelo ponto $A = (1, -3, 2)$ e é paralela à reta $\frac{x-3}{4} = -(y+2);\ z = 9$. O ponto $M = (-1, -1, 9)$ pertence a essa reta?

Solução: Chamemos de r a reta pedida e de r_1 a reta dada. Como r é paralela a r_1, então r terá como vetor diretor $\vec{v} = 4\vec{i} - \vec{j}$. Logo as equações paramétricas e simétricas de r, respectivamente, são: $x = 1 + 4t$, $y = -3 - t$ e $z = 2$, $t \in \mathbb{R}$ e $\frac{x-1}{4} = -(y+3);\ z = 2$. Vejamos se M está em r: $-1 = 1 + 4t$, $-1 = -3 - t$, $9 = 2$. absurdo! Logo o ponto $M \notin r$.

5) Escreva as equações dos eixos coordenados.

Solução : Os eixos coordenados $0x$, $0y$ e $0z$ passam pela origem $0 = (0, 0, 0)$ e tem como vetores diretores, respectivamente, os vetores $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$. Suas equações paramétricas são:

Eixo OX	Eixo OY	Eixo OZ
$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$	$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$	$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

3.2.5 - Exercícios propostos

1) Escreva as equações paramétricas e simétricas da reta que passa pelo ponto $A = (1, 2, 2)$ cujo vetor diretor é $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

2) Escreva as equações da reta que passa pelos pontos $P_1 = (1,2,3)$ e $P_2 = (5,0,6)$ Verifique se os pontos $P_3 = (9,-2,9)$ e $P_4 = (9,2,-3)$ pertencem a essa reta.

3) Escreva as equações paramétricas e simétricas da reta cuja equação vetorial é $\vec{OP} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} + t(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}),\ t \in \mathbb{R}$.

4) Obtenha as equações paramétricas da reta $x - 1 = \dfrac{5y+4}{2} = -6z + 9$.

5) Obtenha a reta $x = 2 - s,\ y = 4,\ z = 3s$ na sua forma simétrica.

6) Determine as equações da reta que passa pelo ponto $A = (1, -1, 2)$ e pelo ponto médio do segmento BC, onde $B = (-1, 0, 1)$ e $C = (5, 2, 1)$.

7) Obtenha, em cada caso, um vetor unitário paralelo à reta dada.

a) $x = 1 - 2t,\ y = -5 + t,\ z = 2 + 4t$ b) $x - 1 = -\dfrac{z}{7};\ y = 3$.

8) A reta r passa pelo ponto $P_0 = (1,2,5)$ e é paralela à reta que contém os pontos $A = (3, 0, 1)$ e $B = (-1, 2, 1)$. Escreva suas equações.

9) Determine as equações da reta que passa pela origem e é ortogonal às retas $r_1 : x = t + 2,\ y = 5t + 3,\ z = 6t + 5$ e $r_2 : x = 1 + 3s,\ y = s,\ z = -7 + 2s$.

10) Obtenha as equações da reta dada pelos planos $x + y + z = 0$ e $2x + 3y - z - 4 = 0$.

11) Escreva a equação da reta passa pelo ponto $C = (-1, 1, 0)$ e é paralela aos planos $3x + 3y + z + 1 = 0$ e $x + y - z = 0$.

12) Escreva a equação do plano que contém o ponto $A = (2, 3, 0)$ e é perpendicular à reta $y = 2;\ \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{z}{4}$.

13) O plano π contém o ponto $Q = (2, 1, 2)$ e é perpendicular à reta que passa pela origem e por Q. Escreva sua equação.

14) Decomponha o vetor $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ na soma dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{w}$ tal que $\vec{u}$ seja paralelo à reta $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{-3} = z + 1$ e $\vec{w}$ seja perpendicular a essa reta.

15) Escreva as equações do plano que contém a reta $x = 1 + 8\lambda,\ y = 5 - 6\lambda,\ z = -1 - 2\lambda$ e a reta interseção dos planos $x + y + z = 2$ e $2x + 3y - z = 4$.

16) Obtenha uma base ortonormal positiva $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ tal que $\vec{a}$ seja paralelo a $\vec{u}$ e $\vec{b}$ ortogonal a $\vec{v}$, onde $\vec{u}$ o vetor normal do plano $2x + y - 3z + 2 = 0$ e $\vec{v}$ um vetor paralelo à reta $x - 4 = \dfrac{1-y}{2};\ z = 4$.

17) Determine as equações da reta r que passa pelo ponto $A = (1, 2, -1)$ e é perpendicular ao vetor $\vec{v} = \vec{j} + \vec{k}$ e paralela ao plano $x + y - 5 = 0$.

18) Dê as equações da reta que contém o ponto $M = (2, -1, 3)$ e é perpendicular ao plano $3x + y - 2z = 9$.

3.3 - POSIÇÕES RELATIVAS, INTERSEÇÕES, ÂNGULOS

Conhecidas as equações de retas e planos, analisaremos as posições relativas, as interseções e os ângulos entre essas figuras geométricas. São quatro casos a serem considerados: duas retas, dois planos, uma reta e um plano, três planos.

3.3.1 - Duas retas

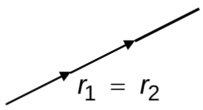
Dadas duas retas r_1 *e* r_2, uma das seguintes situações ocorre:

a) as retas r_1 e r_2 têm a mesma direção e pelo menos um ponto em comum. Neste caso, elas são *coincidentes*. (Prove isto.)

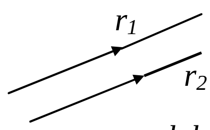
b) as retas r_1 e r_2 têm a mesma direção e nenhum ponto em comum. Neste caso r_1 e r_2 são ditas *paralelas* e determinam um plano.

c) as retas r_1 e r_2 têm direções diferentes e um ponto em comum. Neste caso r_1 e r_2 são ditas *concorrentes* e também determinam um plano.

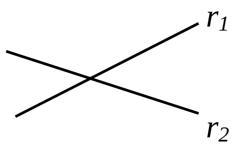
d) as retas r_1 e r_2 têm direções diferentes e nenhum ponto em comum. Neste caso r_1 e r_2 são ditas *reversas*, e não existe plano que as contenha simultaneamente. As figuras abaixo ilustram cada caso.



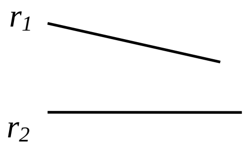
coincidentes



paralelas



concorrentes



reversas

Em qualquer uma das situações descritas a posição relativa das retas r_1 e r_2 depende de seus respectivos vetores diretores. Sejam $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ os vetores diretores das retas r_1 e r_2, respectivamente.

i) Se $\vec{v_1} \times \vec{v_2} = \vec{0}$, então $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ serão *L. D.* e as retas r_1 e r_2 serão coincidentes ou paralelas. Tomemos um ponto arbitrário $P_1 \in r_1$. Se $P_1 \in r_2$, então as retas r_1 e r_2 serão coincidentes. Se $P_1 \notin r_2$, as retas r_1 e r_2 serão paralelas.

ii) Se $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \neq \vec{0}$, então $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ serão *L. I.* e as retas r_1 e r_2 serão concorrentes ou reversas. Tomemos pontos arbitrários $P_1 \in r_1$ e $P_2 \in r_2$.

a) Se $\left[\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \right] = 0$ então r_1 e r_2 serão coplanares, logo concorrentes. Neste caso, as retas r_1 *e* r_2 terão um ponto em comum, cuja obtenção descreveremos na seção 3.3.2.

b) Se $\left[\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \right] \neq 0$ então r_1 e r_2 serão não coplanares, logo reversas.

3.3.2 - Interseção de duas retas

Dadas duas retas r_1 e r_2 de equações

$$r_1 : \begin{cases} x = x_1 + a_1 t \\ y = y_1 + b_1 t \\ z = z_1 + c_1 t \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x = x_2 + a_2 s \\ y = y_2 + b_2 s \\ z = z_2 + c_2 s \end{cases}$$

seus pontos comuns, caso existam, serão obtidos resolvendo o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} x_1 + a_1 t = x_2 + a_2 s \\ y_1 + b_1 t = y_2 + b_2 s \\ z_1 + c_1 t = z_2 + c_2 s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 t - a_2 s = x_2 - x_1 \\ b_1 t - b_2 s = y_2 - y_1 \\ c_1 t - c_2 s = z_2 - z_1 \end{cases}$$

cuja resolução nos leva a três possíveis situações:

1) sistema compatível e determinado, com solução única: $\{P_0 = (x_0, y_0, z_0)\} = r_1 \cap r_2$, isto é, r_1 e r_2 são concorrentes.

2) sistema compatível e indeterminado, com infinitas soluções. Então r_1 e r_2, são coincidentes.

3) sistema incompatível (não há ponto comum). Então $r_1 \cap r_2 = \varnothing$. Neste caso, r_1 e r_2 são paralelas ou reversas.

3.3.3 - Ângulo entre retas

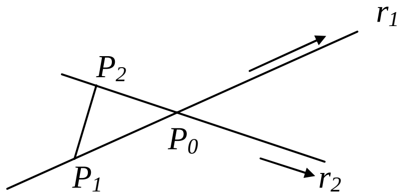
O ângulo (orientado) entre duas retas r_1 e r_2, denotado por (r_1, r_2), é determinado por seus vetores diretores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, respectivamente. Lembrando que se $\vec{v}$ é um vetor diretor de uma reta então $-\vec{v}$ também é vetor diretor dessa reta, tomamos

$$(r_1, r_2) = (\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \arccos \frac{\left| \vec{v}_1 . \vec{v}_2 \right|}{\left\| \vec{v}_1 \right\| \left\| \vec{v}_2 \right\|}$$

Exemplos:

1) Determinar a posição relativa dos pares de retas abaixo, sua interseção (caso exista) e seu ângulo. Se as retas forem coplanares escrever a equação do plano que as contém. Se as retas forem reversas, escrever a equação do plano que contém uma delas e é paralelo à outra .

1) $r_1: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z-5}{4}$; $\quad r_2: \; x = 7+3t, \; y = 2+2t, \; z = 1-2t$



Solução: Os vetores diretores das retas r_1 e r_2 são, respectivamente, $\vec{v_1} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ e $\vec{v_2} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$. Ora, $\vec{v_1} \times \vec{v_2} = -2\vec{i} + 16\vec{j} + 13\vec{k} \neq 0$. Então r_1 *e* r_2 têm direções diferentes, sendo concorrentes ou reversas. Tomemos os pontos $P_1 = (1, -2, 5) \in r_1$, $P_2 = (7, 2, 1) \in r_2$. Então $\vec{P_1P_2} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k}$. O produto misto entre $\vec{P_1P_2}, \vec{v_1}$ *e* $\vec{v_2}$ é igual a zero (Verifique!). Logo $\vec{P_1P_2}$, $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ são coplanares e, portanto as retas r_1 e r_2 são concorrentes. (coplanares e com direções diferentes). O ponto de interseção $\{P_0\} = r_1 \cap r_2$ é obtido a partir da solução do sistema

$$\begin{array}{rcl} 1 + 2s = 7 + 3t & & 2s - 3t = 6 \\ -2 - 3s = 2 + 2t & ou & -3s - 2t = 4 \\ 5 + 4s = 1 - 2t & & 4s + 2t = -4 \end{array}$$

que é compatível e determinado, com solução $s = 0$ e $t = 2$. Se fizermos $s = 0$ em r_1 obtemos: $x = 1$, $y = -2$, $z = 5$. Se fizermos $t = -2$ em r_2, obtemos $x = 1$, $y = -2$, $z = 5$. Logo $r_1 \cap r_2 = \{P_0\} = (1, -2, 5)$, e o ângulo entre $r_1 \cap r_2$ será:

$$\left| cos(\vec{v_1}, \vec{v_2}) \right| = \frac{|6 - 6 - 8|}{\sqrt{29}\sqrt{17}} = \frac{8}{\sqrt{29}\sqrt{17}} \Rightarrow (r_1, r_2) = arc\cos\frac{8}{\sqrt{29}\sqrt{17}}.$$

Note que as retas concorrentes r_1 e r_2 determinam o plano que passa pelo ponto P_0 e é paralelo aos vetores $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$. Se $P = (x, y, z)$ é um ponto qualquer desse plano, então

$$\left[\vec{P_0P}, \vec{v_1}, \vec{v_2}\right] = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-5 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x - 16y - 13z + 31 = 0.$$

é a equação do plano que contém as retas r_1 *e* r_2.

2) $r_1: \dfrac{x-2}{6} = \dfrac{y+1}{4} = \dfrac{z-3}{-4}$; $\; r_2: \dfrac{x-1}{9} = \dfrac{y-2}{6} = \dfrac{z+3}{-6}$

Solução: Os vetores diretores das retas r_1 e r_2 são, $\vec{v_1} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{v_2} = 9\vec{i} + 6\vec{j} - 6\vec{k}$, respectivamente. Temos que $\vec{v_1} \times \vec{v_2} = \vec{0}$. Então $\vec{v_1}$ é paralelo a $\vec{v_2}$ e nesse caso as retas r_1 e r_2 serão paralelas ou coincidentes. Tomemos um ponto $P_1 = (2, -1, 3) \in r_1$ e vejamos se $P_1 \in r_2$:

$$\frac{2-1}{9}=\frac{-1-2}{6}=\frac{3+3}{-6} \Rightarrow \frac{1}{9}=\frac{-1}{2}=-1, \ \ absurdo!$$

Logo, $P_1 \notin r_2$ e portanto as retas r_1 e r_2 são paralelas, não havendo interseção entre elas. Além disso, seu ângulo, $(r_1, r_2) = 0^0$. As retas r_1 e r_2 determinam um plano π assim obtido: considere os pontos $P_1 = (2, -1, 3)$ e $P_2 = (1, 2, -3)$ pertencentes às retas r_1 e r_2, respectivamente. O plano π é aquele que contém P_1 e é paralelo aos vetores $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\vec{v_1}$. Então, $P = (x, y, z) \in \pi$ se, e somente se,

$$\left[\overrightarrow{P_1P}, \vec{v_1}, \overrightarrow{P_1P_2}\right] = 0 \Rightarrow 6x - 20y - 11z + 1 = 0.$$

3) $r_1: x = -2 + 2t, \ y = -3t, \ z = 1 + 4t; \ r_2: x = 3 + s, \ y = 1 + 4s, \ z = 2s$

Solução: Os vetores diretores das retas r_1 e r_2 são, respectivamente, $\vec{v_1} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ e $\vec{v_2} = \vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$. Então $\vec{v_1} \times \vec{v_2} = -22\vec{i} + 11\vec{k} \neq \vec{0}$ e, portanto os vetores $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ são *L.I.*. Assim, as retas r_1 e r_2 não têm a mesma direção, isto é, elas serão concorrentes ou reversas. Vejamos se elas se interceptam:

$$\begin{array}{rcl} -2 + 2t = 3 + s & & s - 2t = -5 \\ -3t = 1 + 4s & \Rightarrow & 4s + 3t = -1 \\ 1 + 4t = 7 + 2s & & 2s - 4t = -6 \end{array}$$

Resolvendo o sistema, vemos que o sistema é incompatível. Logo, não existe ponto comum entre r_1 e r_2, isto é, as retas são reversas, e não existe plano que as contenham. Assim $r_1 \cap r_2 = \emptyset$. Determinemos, agora, o ângulo entre as retas r_1 e r_2:

$$\left|\cos(\vec{v_1}, \vec{v_2})\right| = \frac{|2 - 12 + 8|}{\sqrt{29}\sqrt{21}} = \frac{2}{\sqrt{29}\sqrt{21}} \Rightarrow (r_1, r_2) = \arccos\frac{2}{\sqrt{29}\sqrt{21}}.$$

Vamos obter o plano π que contém r_1 e é paralelo a r_2. Observe que o plano contém os vetores diretores de r_1 e r_2. Portanto, se $P_1 = (-2, 0, 1) \in r_1$ e $P = (x, y, z) \in \pi$, então

$$\left[\overrightarrow{P_1P}, \vec{v_1}, \vec{v_2}\right] = 0 \Rightarrow 2x - z + 5 = 0.$$

que é a equação cartesiana do plano π que contém a reta r_1 e é paralelo à reta r_2.

4) $r_1: x = 2 + 6t, y = -1 + 4t, \ z = 3 - 4t; \ \ r_2: x = 8 + 9s, y = 3 + 6s, z = -1 - 6s$

Solução: Temos que os vetores diretores de r_1 e r_2, são, respectivamente, $\vec{v_1} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k}$ e $\vec{v_2} = 9\vec{i} + 6\vec{j} - 6\vec{k}$. Note que $\vec{v_1} \times \vec{v_2} = \vec{0}$, donde concluímos que $\vec{v_1}$ é paralelo a $\vec{v_2}$ e, portanto r_1 e r_2 serão paralelas ou coincidentes. Seja $P_2 = (8, 3, -1) \in r_2$ e vejamos $P_2 \in r_1$:.

$$\begin{aligned} 8 &= 2 + 6t \\ 3 &= -1 + 4t \quad \Rightarrow \quad t = 1 \quad \Rightarrow P_2 \in r_1 \\ -1 &= 3 - 4t \end{aligned}$$

Logo $P_2 \in r_1$ e como as retas têm a mesma direção, elas serão coincidentes.

3.3. 4 - Dois planos

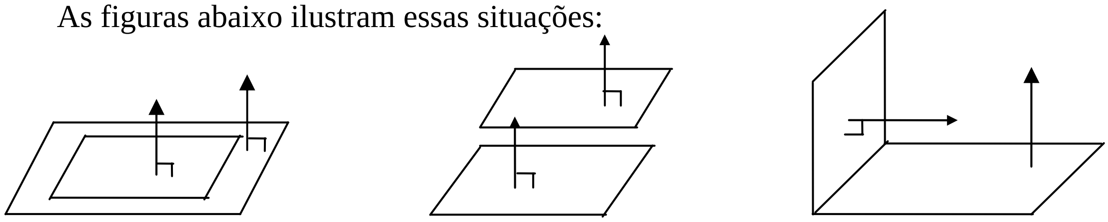
Dados dois planos π_1 e π_2 uma das seguintes situações ocorre:

a) π_1 e π_2 são coincidentes - seus vetores normais são paralelos e os planos têm um ponto comum.

b) π_1 e π_2 são paralelos - seus vetores normais são paralelos e os planos não têm ponto comum.

c) π_1 e π_2 são concorrentes - seus vetores normais não são paralelos e os planos se interceptam ao longo de uma reta.

As figuras abaixo ilustram essas situações:



(a) *coincidentes*   *(b)* *paralelos*   *(c)* *concorrentes*

A determinação da posição relativa de dois planos π_1 e π_2, depende de seus vetores normais. Sejam $\vec{n_1}$ e $\vec{n_2}$ vetores normais dos planos π_1 e π_2, respectivamente.

i) Se $\vec{n_1} \times \vec{n_2} = \vec{0}$, então $\vec{n_1}$ e $\vec{n_2}$ são paralelos e os planos π_1 e π_2 serão paralelos ou coincidentes. Tomemos um ponto arbitrário $P_1 \in \pi_1$. Se $P_1 \notin \pi_2$ então π_1 e π_2 serão paralelos. Se $P_1 \in \pi_2$, então os planos serão coincidentes, $\pi_1 \equiv \pi_2$.

ii) Se $\vec{n_1} \times \vec{n_2} \neq \vec{0}$, então $\vec{n_1}$ e $\vec{n_2}$ não são paralelos e os planos π_1 e π_2 serão concorrentes.

3.3.5 - Interseção de dois planos

Dados os planos de equações $a_1x + b_1y + c_1z = -d_1$ e $a_2x + b_2y + c_2z = -d_2$, a interseção entre eles é dada pela resolução do sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = -d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = -d_2 \end{cases}$$

Temos três possibilidades na resolução deste sistema:

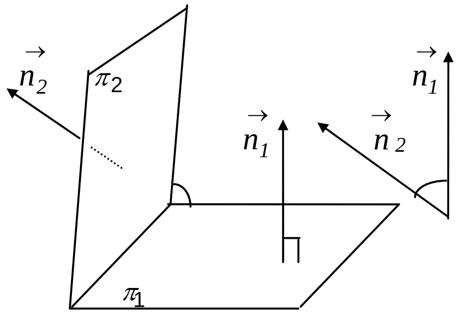
1) Sistema compatível e indeterminado, com grau de liberdade *1*. Neste caso os planos serão concorrentes e sua interseção será uma reta.

2) Sistema compatível e indeterminado, com grau de liberdade 2. Neste caso os planos serão coincidentes.

3) Sistema incompatível. Neste caso os planos serão paralelos.

3.3. 6 - Ângulo entre planos

O ângulo (orientado) entre dois planos π_1 e π_2 é determinado pelos seus respectivos vetores normais $\vec{n_1}$ e $\vec{n_2}$. Aqui também observamos que $\vec{n}$ é um vetor normal a um plano então $-\vec{n}$ também é um vetor normal a esse plano. Logo,



$$(\pi_1, \pi_2) = arccos \left| cos\ (\vec{n_1}, \vec{n_2}) \right| = arccos \frac{\left| \vec{n_1} \cdot \vec{n_2} \right|}{\left\| \vec{n_1} \right\| \left\| \vec{n_2} \right\|}$$

Exemplos:

1) Determinar a posição relativa dos planos dados, sua interseção, caso exista, e seu ângulo.

1.1) $\pi_1 : 2x + 3y + 3z - 5 = 0$ e $\pi_2 : -4x - 6y - 6z + 2 = 0$

Solução: Sejam $\vec{n_1} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$ e $\vec{n_2} = -4\vec{i} - 6\vec{j} - 6\vec{k}$ os vetores normais dos planos dados, respectivamente. Temos que $\vec{n_1} \times \vec{n_2} = \vec{0}$. Assim $\vec{n_1}$ é paralelo a $\vec{n_2}$ e, portanto os planos dados podem ser paralelos ou coincidentes. Seja $P_2 = (1/2, 0, 0) \in \pi_2$ e note que $P_2 \notin \pi_1$. Logo π_1 é paralelo e π_2 e $(\pi_1, \pi_2) = 0^0$. Observe que este problema também pode ser resolvido através do sistema de duas equações e três incógnitas

$$\begin{cases} 2x + 3y + 3z = 5 \\ 4x + 6y + 6z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 6 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 3/2 & 5/2 \\ 4 & 6 & 6 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 3/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

Logo o sistema é incompatível, isto é, não possui solução e, portanto os planos π_1 *e* π_2 são paralelos.

1.2) $\pi_1 : 3x - y + 3z - 9 = 0$ e $\pi_2 : 2x - \frac{2}{3}y + 2z = 6$

Solução: Os vetores normais dos planos dados são, $\vec{n}_1 = 3\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ e $\vec{n}_2 = 2\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + 2\vec{k}$, respectivamente. Então $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{0}$ e, portanto, $\vec{n}_1$ é paralelo a $\vec{n}_2$. Tomemos, por exemplo, $P_1 = (0,0,3) \in \pi_1$, verifique que $P_1 \in \pi_2$ e conclua que $\pi_1 \equiv \pi_2$. Se tivéssemos iniciado a resolução pela discussão do sistema :

$$\begin{cases} 3x - y + 3z = 9 \\ 2x - \frac{2}{3}y + 2z = 6 \end{cases}$$

teríamos

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 & 9 \\ 2 & -2/3 & 2 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 1 & 3 \\ 2 & -2/3 & 2 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Temos $p_a = p_c = 1$ e $n - p = 2$, logo o sistema é compatível e indeterminado, com grau de liberdade 2. Assim os planos π_1 e π_2 são coincidentes.

1.3) $\pi_1 : 6x + 3y - 2z = 0$ e $\pi_2 : x + 2y + 6z = 12$

Solução: Se $\vec{n}_1 = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ e $\vec{n}_2 = \vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}$ são os vetores normais dos planos dados, e como $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = 22\vec{i} - 38\vec{j} + 9\vec{k} \neq \vec{0}$, então os planos π_1 e π_2 são concorrentes. Também chegaríamos a esta mesma conclusão pela análise do sistema:

$$\begin{cases} 6x + 3y - 2z = 0 \\ x + 2y + 6z = 12 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 12 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 12 \\ 6 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 12 \\ 0 & -9 & -38 & -72 \end{bmatrix} \rightarrow$$
$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 12 \\ 0 & 1 & 38/9 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -22/9 & -4 \\ 0 & 1 & 38/9 & 8 \end{bmatrix}$$

Temos $p_a = p_c = 2$ e $n - p = 3 - 2 = 1$, logo o sistema é compatível e indeterminado, com grau de liberdade 1. Obtemos assim o sistema associado :

$$\left\{ x - \frac{22}{9}z = -4;\ y + \frac{38}{9}z = 8,\ \forall z \in \mathbb{R}. \right.$$

que representa a reta interseção de π_1 e π_2: $x = -4 + \frac{22}{9}t;\ y = 8 - \frac{38}{9}t;\ z = t,\ \forall t \in \mathbb{R}.$

O ângulo entre os planos π_1 e π_2 será $\left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = 0 \Rightarrow (\pi_1, \pi_2) = 90^0$.

3.3.7 - Uma reta e um plano

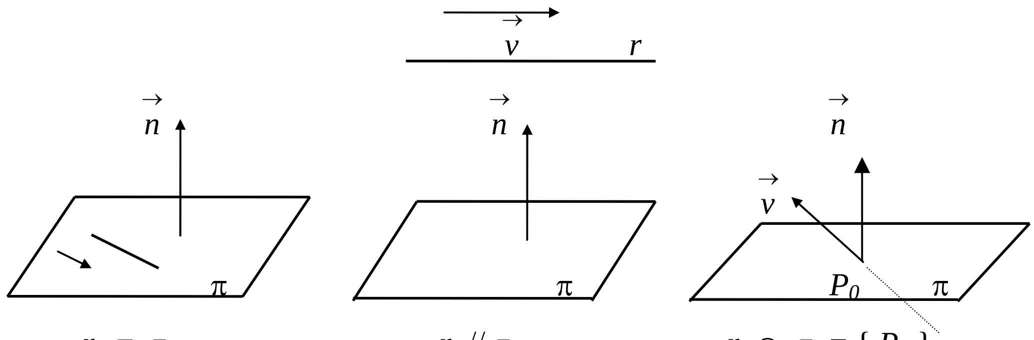
Dada uma reta r com vetor diretor $\vec{v}$ e um plano π com vetor normal $\vec{n}$, uma das seguintes situações ocorre:

a) r está contida em π ($r \subset \pi$) e portanto todos os pontos de r pertencem a π;

b) r é paralela a π ($r \,//\, \pi$) e nenhum ponto de r pertence a π;

c) r e π são concorrentes e apenas um dos pontos de r pertence a π.

As figuras, a seguir, ilustram essas situações :



$r \subset \pi$ — *fig. (a)* $r \,//\, \pi$ — *fig. (b)* $r \cap \pi = \{ P_0 \}$ — *fig. (c)*

Seja $\vec{v}$ o vetor diretor da reta r *e* $\vec{n}$ o vetor normal do plano π. Então:

i) Se $\vec{v} \,.\, \vec{n} = 0$, tomemos um ponto $P \in r$. Se $P \in \pi$ então $r \subset \pi$. Se $P \notin \pi$ então $r \,//\, \pi$.

ii). Se $\vec{v} \,.\, \vec{n} \neq 0$, então $r \cap \pi = \{P_0\}$.

3.3.8 - Interseção de uma reta e um plano

Seja π um plano de equação cartesiana $ax + by + cz + d = 0$ e r uma reta cujas equações paramétricas são $x = x_0 + a't$, $y = y_0 + b't$, $z = z_0 + c't$. Vamos determinar a interseção do plano π com a reta r , isto é, queremos os pontos comuns entre a reta r e o plano π. Desta forma, substituindo as equações paramétricas da reta na equação do plano, obtemos:

$$a(x_o + a't) + b(y_o + b't) + c(z_o + c't) + d = 0$$

ou

$$(aa' + bb' + cc')t + (ax_0 + by_0 + cz_0 + d) = 0 \qquad (*)$$

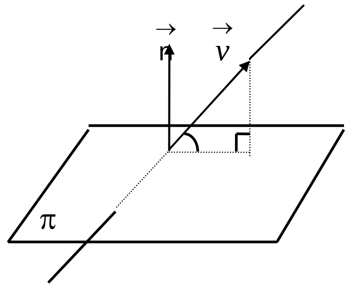
Estudemos as soluções dessa equação.

1. Se a equação *(*)* acima for satisfeita para um único valor de t, obteremos, com este valor, um único ponto de interseção de r e π. *(fig. (c))*.

2. Se a equação *(*)* for satisfeita para todo valor de t, então todos os pontos de r estão no plano π, isto é, $r \subset \pi$. *(fig. (a))*.

3. Se a equação *(*)* não tiver solução, então nenhum ponto de r que está em π, isto é, $r \cap \pi = \varnothing$, e $r // \pi$. *(fig. (b)).*

3.3.9 - Ângulo entre reta e plano



O ângulo entre uma reta r e um plano π é, por definição, o ângulo entre a reta r e sua projeção ortogonal sobre o plano π. Se a reta r tem vetor diretor $\vec{v}$ e o plano π tem vetor normal $\vec{n}$, então o ângulo entre a reta r e o plano π será $(r, \pi) = 90^0 - (\vec{v}, \vec{n})$, onde

$$\left(\vec{v}, \vec{n}\right) = arccos \frac{\left|\vec{v} \,.\, \vec{n}\right|}{\left\|\vec{v}\right\| \left\|\vec{n}\right\|}$$

Exemplos:

1) Determine, em cada caso, a posição relativa, sua interseção (caso exista) e o ângulo entre a reta r e o plano π.

1.1) r: $x = -2+3t$, $y = 1-4t$, $z = -5+4t$ e π: $4x-3y-6z=5$.

Solução: Para determinar a da interseção entre a reta r e o plano π, substituímos as equações da reta r na equação do plano π, obtendo:

$$-8 + 12t - 3 + 12t + 30 - 24t = 5 \Rightarrow 0\, t = 14$$

Note que esta equação não tem solução. Assim r e π não tem pontos em comum, isto é $r // \pi$. Logo, o ângulo entre r e π é 0^0. Observe que, neste caso, o vetor diretor de r é perpendicular ao vetor normal de π. De fato, como $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$ e $\vec{n} = 4\vec{i} - 3\vec{j} - 6\vec{k}$ então $\vec{v} \,.\, \vec{n} = 12 + 12 - 24 = 0$.

1.2) r: $x = 0$, $y = -t$, $z = -1+t$ e π: $2x - y - z = 1$.

Solução: Vamos resolver este problema através da análise da posição relativa entre o vetor diretor $\vec{v}$ da reta r e o vetor normal $\vec{n}$ do plano π. Tem-se $\vec{v} = -\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{n} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{v} \cdot \vec{n} = 1 - 1 = 0$. Portanto r é paralela a π ou está contida em π. Tomemos um ponto qualquer da reta r, por exemplo, $P_0 = (0, 0, -1)$ e vejamos se $P_0 \in \pi$, isto é, vejamos se P_0 satisfaz a equação do plano π: $2.0 - 0 - (-1) = 1$. Logo $P_0 \in \pi$ e, portanto, $r \subset \pi$. Isto significa que a equação da interseção entre r e π tem infinitas soluções. De fato, substituindo as equações de r na equação do plano π obtemos uma identidade, válida para todo $t \in \mathbb{R}$.

1.3) $r:\ x - 1 = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{6}$; $\pi: 2x + 3y + z - 3 = 0$.

Solução: Vamos determinar a interseção entre r e π. Tomando as equações paramétricas de r, $x = 1 + t,\ y = -1 - 2t,\ z = 6t$, e substituindo na equação do plano, obtemos:

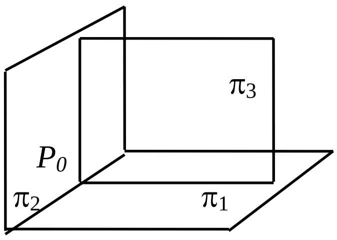
$$2 + 2t - 3 - 6t + 6t - 1 = 0 \ \Rightarrow\ t = 2.$$

Em r , fazendo $t = 2$, obtemos $x = 3,\ y = -5,\ z = 12$. Logo, $r \cap \pi = \{P_0 = (3, -5, 12)\}$, isto é, r e π são concorrentes e se interceptam no ponto $(3, -5, 12)$. Para o cálculo do ângulo entre r e π, temos $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{n} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$, assim

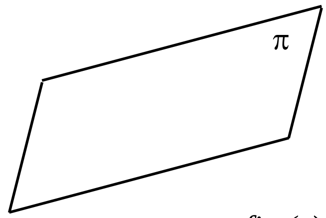
$$\left|\cos\left(\vec{n}, \vec{v}\right)\right| = \frac{|2-6+6|}{\sqrt{41}\,\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{41}\,\sqrt{14}} \ \Rightarrow\ (r, \pi) = 90^0 - \arccos\frac{2}{\sqrt{41}\,\sqrt{14}}\ .$$

3.3.10 - Três planos

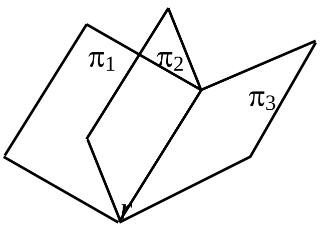
Dados três planos π_1, π_2, π_3, a interseção entre eles poderá ser um ponto, uma reta, um plano ou ser vazia, conforme ilustraremos abaixo.



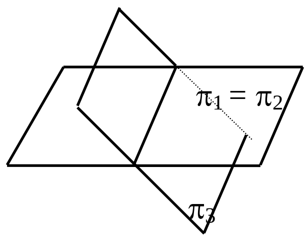
$\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \{ P_0 \}$ - *fig (a)*



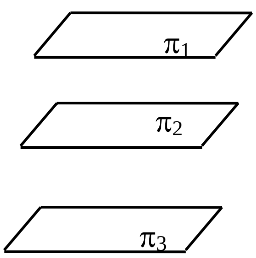
$\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \pi$ - *fig (c)*



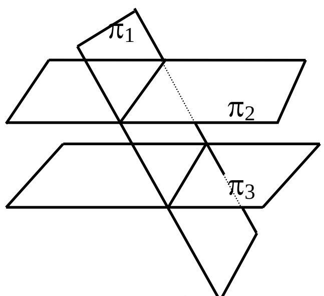
$\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = r$ - *fig (b₁)*



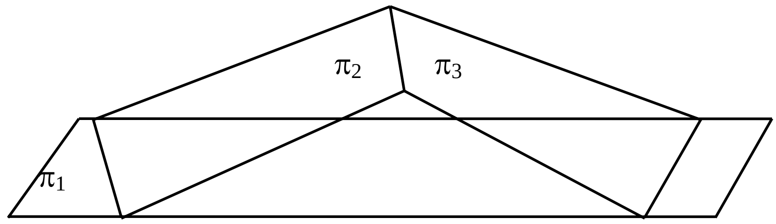
$\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = r$ - *fig* (b_2)



$\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \varnothing$ - *fig* (d_1)



$\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \varnothing$ - *fig* (d_2)



$\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \varnothing$ - *fig (d₃)*

Para determinar qual dessas situações ocorre, devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = -d_1 & - \text{ plano } \pi_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = -d_2 & - \text{ plano } \pi_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = -d_3 & - \text{ plano } \pi_3 \end{cases}$$

que admite a seguinte discussão:

a) sistema **compatível e determinado**, portanto com uma única solução $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, isto é, $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \{P_0 = (x_0, y_0, z_0)\}$ - *fig. (a).*

b) sistema **compatível e indeterminado**, com grau de liberdade ***1:*** a interseção é uma reta, isto é, $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = r$ - *figs* (b_1) e (b_2)

c) sistema **compatível e indeterminado**, com grau de liberdade ***2:*** a interseção é um plano, isto é, $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \pi_1$ - *fig. (c)*

d) sistema **incompatível**, não existe interseção, isto é $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \varnothing$ - *figs.* (d_1) , (d_2) e (d_3).

Nos casos *(a)* e *(b)* os planos são concorrentes. No caso *(c)* eles são coincidentes.

Exemplos:

1) Determine a posição relativa dos planos abaixo:

a) $2x + y - 2z - 10 = 0$, $3x + 2y + 2z - 1 = 0$, $5x + 4y + 3z - 4 = 0$.

Solução : Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} 2x + \ \ y - 2z = 10 \\ 3x + 2y + 2z = 1 \\ 5x + 4y + 3z = 4 \end{cases}$$

obtemos, por escalonamento,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Temos um sistema compatível e determinado, portanto $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \{P_0 = (1, 2, -3)\}$

b) $x + 2y - 3z - 6 = 0$, $2x - y + 4z - 2 = 0$, $4x + 3y - 2z - 14 = 0$.

Solução : Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} x+2y-3z=6 \\ 2x-\ \ y+4z=2 \\ 4x+3y-2z=14 \end{cases}$$

obtemos, por escalonamento :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 14 \end{bmatrix} \to\cdots\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Trata-se de um sistema compatível e indeterminado, com grau de liberdade *1*. Temos, então, o sistema associado:

$$\begin{cases} x+\ \ z=2 \\ y-2z=2 \end{cases}$$

Isso representa a reta $x = 2-t, y = 2+2t, z = t,\ \forall t \in \mathbb{R}$. Logo $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = r$.

c) $x + y - z - 1 = 0$, $2x + 3y - 3z - 3 = 0$, $x - 3y + 3z - 2 = 0$.

Solução: Temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x+\ y-\ z=1 \\ 2x+3y-3z=3 \\ x-3y+3z=2 \end{cases}$$

Escalonando o sistema, obtemos :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \to\cdots\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Trata-se de um sistema incompatível. Assim os três planos não tem ponto em comum, isto é, $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \varnothing$. Se quiséssemos obter a configuração dos planos, deveríamos estudar a posição de seus vetores normais . Ora, nenhum par dos planos dados é formado por planos paralelos, pois

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{j} + \vec{k} \neq \vec{0}\,,\quad \vec{n}_1 \times \vec{n}_3 = -4\vec{j} - 4\vec{k} \neq \vec{0} \quad e \quad \vec{n}_2 \times \vec{n}_3 = -9\vec{j} - 9\vec{k} \neq \vec{0}$$

Observe a última figura (d_3) .

3.3.11 - Exercícios propostos

1) Determine se as retas abaixo são paralelas, coincidentes, concorrentes ou reversas. Calcule seu ponto de interseção (se existir), e o ângulo entre elas:

a) $r_1 : x = 1, y = t, z = 1;\quad r_2 : x = s, y = 0, z = 1$

b) $r_1:\ x-3=\dfrac{z-2}{7}\ ;\ y=4\ ;$ $\quad r_2\ :\dfrac{x-6}{2}=\dfrac{z-4}{14}\ \ ; y=8$

c) $r_1: x = 1+3t, y = 2+5t, z = 1+7t$ $\quad r_2: x = 7+6s, y = 12+10s, z = 6+14s$

d) $r_1:\ x+1=\dfrac{y-1}{2}\ ,\ z=5\ ;$ $\quad r_2:\ x=1+4n,\ y=5+2n,\ z=2+3n$

e) $r_1:\ x=1,\ y=3-s,\ z=5+2s$ $\quad r_2:\ x=5t-4, y=2t+3,\ z=3t-2.$

2) Determine as posições relativas das retas r e os planos π abaixo. Obtenha seu ponto comum (se existir) e seu ângulo :

a) $r: x=-8+15t,\ y=5-9t,\ z=0\ \ e\ \ \pi: 3x+5y-1=0$

b) $r\ : x-3=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-2}{4}\quad e\quad \pi\ : x=5-2p,\ y=1-p+4q, z=2+p-2q$

c) $r\ :\ x=2-s,\ y=1+2s,\ z=1+s\quad e\quad \pi\ :\ x=1-p-4q,\ y=-2+2p-8q, z=1+p-q$

d) $r\ :\ \vec{OP}=(1,2,3)+t(2,-1,1)\ \ e\ \ \pi: x-2y-4z+5=0.$

3) Determine a posição relativa dos planos abaixo, sua interseção e ângulo :

a) $2x+y-z-1=0$ e $3x-5y+z=4$

b) $x+2y+3z=1$ e $2x+4y=2-6z$

c) $2x-2y+6z=6$ e $x=-3p-q, y=-q\ ,\ z=p$

d) $3x+6y=27-3z$ e $2x+4y+2z=14.$

4) Discuta e determine a interseção dos planos :

a) $x+y+z=0,\ x+2y+z-1=0,\ x+y+3z-2=0$

b) $x+y-4z=0,\ x-y=0, x+2y-6z=0$

c) $x+2y-z=0, 2x+4y-2z=1, 3x-y+z=2$

d) $x+2y+z=0, 2x+4y-z+1=0, x+2y=0$

5) Achar as interseções da reta $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{5}=2-z$ com os planos coordenados. Essa reta intercepta algum eixo coordenado?

6) Ache as interseções do plano $3x+2y-z=5$ com os planos e os eixos coordenados.

7) Escreva a equação do plano que contém as retas :

a) $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{2}=z\quad e\quad \dfrac{x-2}{5}=y-1=\dfrac{z}{3}$

b) $x=2+3t, y=1+2t, z=1\ \ e\ \ \dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-1}{2}=z+1$

8) Dada a reta $r:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{m}=\dfrac{z+3}{2}$ e o plano $\pi: x-3y+6z+7=0$, determine os valores de m para que :

a) r seja paralela a π.

b) r esteja contida em π.

c) r intercepte π em um ponto.

9) Determine os valores de *m* e *c* para que a reta $\frac{x-2}{m}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-5}{-3}$ e o plano $3x - 2y + cz + 1 = 0$ sejam perpendiculares e obtenha sua interseção.

10) Dada a reta $r_1: \ x = 2 + 3t, y = t, \ z = -t,$ escreva as equações uma de uma reta r_2 de modo que:

a) r_1 e r_2 sejam reversas. b) r_1 e r_2 sejam concorrentes.

3.4 - DISTÂNCIAS

Vamos agora estudar a distância entre pontos, retas e planos.

3.4.1 - Distância entre dois pontos

Dados dois pontos $P_1 = (x_1, \ y_1, \ z_1)$ e $P_2 = (x_2, \ y_2, \ z_2)$ a distância entre eles, indicada por $d(P_1, P_2)$, é o comprimento do segmento P_1P_2. Então

$$d(P_1, \ P_2) = \left\| \overrightarrow{P_1P_2} \right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Exemplo:

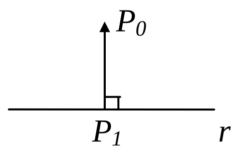
1) A distância entre os pontos $A = (1, 2, 3)$ e $B = (-2, 1, 1)$ é:

$$d(A, B) = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$$

3.4.2 - Distância de um ponto a uma reta

Dado um ponto P_0 e uma reta r, a distância de P_0 a r, indicada por $d(P_0, r)$, é igual a distância de P_0 a P_1, onde $P_1 \in r$ é o pé da perpendicular baixada de P_0 a r.

Portanto, $d(P_0, r) = \left\| \overrightarrow{P_0P_1} \right\|$

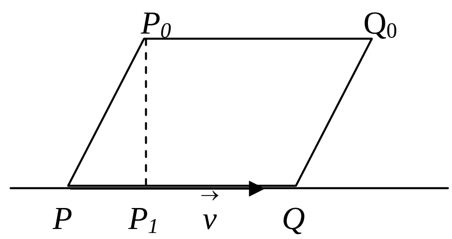


Observe que $P_0 \in r$ se e somente se $d(P_0, \ r) = 0$. Suponhamos que $P_0 \notin r$. Sejam P um ponto qualquer da reta r e $\vec{v}$ seu vetor diretor. Como $P_0 \notin r$, os vetores $\vec{v}$ e $\overrightarrow{PP_0}$ são *L.I.* . Logo geram um paralelogramo. Ora, por um lado, a área do paralelogramo PQQ_0P_0 é igual a $\left\| \vec{v} \right\| . \left\| \overrightarrow{P_1P_0} \right\|$. Por outro lado, a área deste mesmo paralelogramo é igual a $\left\| \vec{v} \times \overrightarrow{PP_0} \right\|$.

Logo $\left\| \vec{v} \right\| . \left\| \overrightarrow{P_1P_0} \right\| = \left\| \vec{v} \times \overrightarrow{PP_0} \right\|$.

Assim,

$$\left\| \overrightarrow{P_1P_0} \right\| = \frac{\left\| \vec{v} \times \overrightarrow{PP_0} \right\|}{\left\| \vec{v} \right\|}$$



ou seja,

$$d(P_0, r) = \frac{\|\vec{v} \times \overrightarrow{PP_0}\|}{\|\vec{v}\|}$$

onde P é um ponto qualquer da reta r e $\vec{v}$ é um vetor diretor de r .

Observação : 1) Esta fórmula vale para o caso de P_0 pertencer a r, pois nesta situação os vetores $\vec{v}$ e $\overrightarrow{PP_0}$ serão paralelos e assim seu produto vetorial é o vetor nulo e portanto a distância de P_0 a r é zero.

Exemplos:

1) Determine as distâncias dos pontos $A = (1, -1, 4)$ e $B = (6, -3, -1)$ à reta r cujas equações simétricas são $\frac{x-2}{4} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{-2}$.

Solução: Temos que o vetor diretor da reta r é $\vec{v} = 4\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$. Seja $P = (2, 0, 1)$ um ponto de r. Então,

$$\vec{v} \times \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 11\vec{i} + 10\vec{j} + 7\vec{k}$$

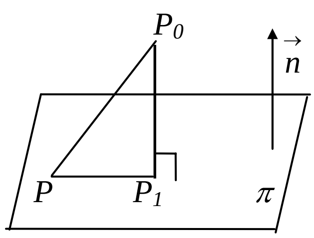
Logo, $\|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}\| = \sqrt{270}$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{29}$ e $d(A, r) = \frac{\|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{\sqrt{270}}{\sqrt{29}}$. Como

$$\vec{v} \times \overrightarrow{BP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & -2 \\ -4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

podemos concluir que $d(B, r) = 0$, ou seja, $B \in r$.

3.4.3 - Distância de um ponto a um plano

Dado um ponto P_0 e um plano π, a distância de P_0 a π , que indicaremos por $d(P_0, \pi)$, é igual a distância de P_0 a P_1, onde P_1 é o pé da perpendicular baixada de P_0 a π, ou seja ,



$$d(P_0, \pi) = \left\| \overrightarrow{P_0P_1} \right\|$$

Observe que $P_0 \in \pi$ se, e somente se, $d(P_0, \pi) = 0$. Suponhamos que $P_0 \notin \pi$. Seja P um ponto qualquer do plano π e $\vec{n}$ o seu vetor normal. Como $\overrightarrow{P_0P_1}$ é paralelo a $\vec{n}$,

$$\|\overrightarrow{P_0P_1}\| = \|proj_{\vec{n}}\, \overrightarrow{P_0P}\| = \left\| \frac{(\vec{n}.\overrightarrow{P_0P}).\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \right\| = \frac{|\vec{n}.\overrightarrow{P_0P}|}{\|\vec{n}\|} \Rightarrow d(P_0, \pi) = \frac{|\vec{n}.\overrightarrow{P_0P}|}{\|\vec{n}\|}.$$

Se $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $ax + by + cz + d = 0$ é a equação do plano π, o vetor normal de π será $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, e se $P = (x, y, z) \in \pi$, então:

$$d(P_0, \pi) = \frac{|\overrightarrow{P_0P}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$
$$= \frac{|ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Como $ax + by + cz = -d$, então

$$d(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Exemplo:

1) As distâncias dos pontos $R = (1, 1, -1)$ e $S = (1, 1, 1)$ ao plano $2x - y + z = 2$ são $d(R, \pi) = \dfrac{|2 - 1 - 1 - 2|}{\sqrt{6}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$ e $d(S, \pi) = \dfrac{|2 - 1 + 1 - 2|}{\sqrt{6}} = 0$, donde se pode concluir que $S \in \pi$.

3.4.4 - Distância de uma reta a um plano

Sejam r e π, respectivamente, uma reta e um plano quaisquer. A distância de r a π, que indicaremos por $d(r, \pi)$, é o comprimento do menor segmento PQ, onde $P \in r$ e $Q \in \pi$.

Assim há dois casos a considerar:

a) Se $r \subset \pi$ ou se r intercepta π então $d(r, \pi) = 0$. *(Fig. 1)*

b) Se $r \mathbin{//} \pi$ então $d(r, \pi) = d(P_0, \pi)$, onde P_0 é um ponto qualquer de r. *(Fig. 2)*

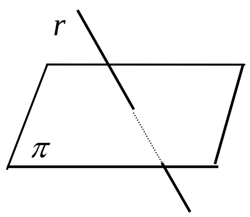


Fig. 1

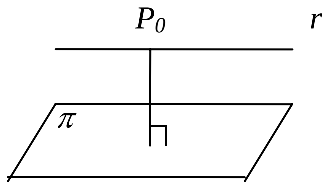


Fig. 2

3.4.5 - Distância entre duas retas

Sejam r_1 e r_2 duas retas quaisquer. A distância entre r_1 e r_2, que indicaremos por $d(r_1, r_2)$, é o *menor* comprimento do segmento PQ, com $P \in r_1$, $Q \in r_2$.

Aqui há três casos a considerar:

a) Se r_1 e r_2 são concorrentes ou se $r_1 \equiv r_2$, então $d(r_1, r_2) = 0$.*(fig. 1)*

b) Se $r_1 \mathbin{//} r_2$, então $d(r_1, r_2) = d(P_1, r_2)$, onde P_1 é um ponto qualquer de r_1. Da mesma forma, $d(r_1, r_2) = d(r_1, P_2) = d(P_2, r_1)$, onde $P_2 \in r_2$. *(fig. 2)*

c) Se r_1 e r_2 são reversas, a distância entre r_1 e r_2 é igual ao comprimento da perpendicular P_2P (*fig. 3)*. Vamos determinar essa distância. Para isto, sejam $\vec{v_1}$ *e* $\vec{v_2}$ vetores diretores de r_1 e r_2, respectivamente, e tomemos pontos arbitrários $P_1 \in r_1$ *e* $P_2 \in r_2$. Os vetores $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ geram um paralelepípedo cujo plano que contém a base desse paralelepípedo é paralelo à reta r_2 e contém a reta r_1. Então

d(r₁, r₂) = d(r₂, plano que contém a base) = $\left\| \overrightarrow{P_2P} \right\|$ *= altura do paralelepípedo.*

O volume do paralelepípedo pode ser obtido de duas maneiras: como produto da área da base pela altura, e como o produto misto, em valor absoluto, dos vetores determinados pelas arestas, ou seja:

$$V = \|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}\| . \|\overrightarrow{PP_2}\| \quad \text{e} \quad V = |\overrightarrow{P_1P_2} . \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}|$$

Das equações anteriores, podemos concluir que:

$$\|\overrightarrow{P_2P}\| = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} . \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}|}{\|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}\|} \Rightarrow d(r_1, r_2) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} . \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}|}{\|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}\|}$$

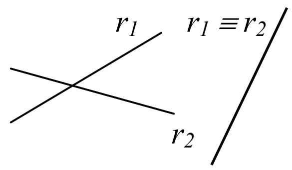


fig. 1

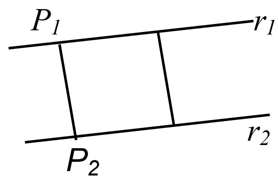


fig. 2

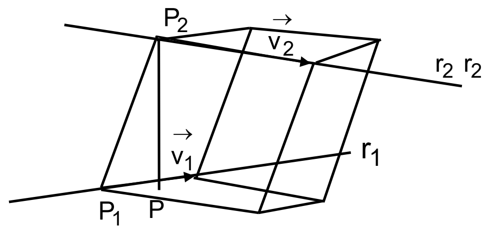


fig. 3

Exemplo:

1) Vamos calcular a distância entre as retas $r_1 : x = 1 - 2t;\ y = 2 + t;\ z = 3 - t$ e $r_2 : x = -1 + s;\ y = 1 - s,\ z = 4 + 2s$. Observe que essas retas são reversas (Prove isto). Dessa forma, tomemos, por exemplo, pontos arbitrários $P_1 = (1, 2, 3)$ em r_1 e $P_2 = (-1, 1, 4)$ em r_2 de modo que $\overrightarrow{P_1P_2} = (-2, -1, 1)$. Sendo $\vec{v_1} = -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{v_2} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ os vetores diretores de r_1 e r_2, respectivamente, temos:

$$\vec{v_1} \times \vec{v_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$$

Logo

$$d(r_1, r_2) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} . \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}|}{\|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}\|} = \frac{|-2-3+1|}{\sqrt{9+1+1}} = \frac{4}{\sqrt{11}}$$

3.4.6 - Distância entre dois planos

Sejam π_1 e π_2 dois planos quaisquer. Se $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \varnothing$ então $d(\pi_1, \pi_2) = 0$ *(Fig a)*. Se π_1 é paralelo a π_2, então $d(\pi_1, \pi_2) = d(P_1, \pi_2)$ onde P_1 é um ponto qualquer de π_1 *(Fig b)*.

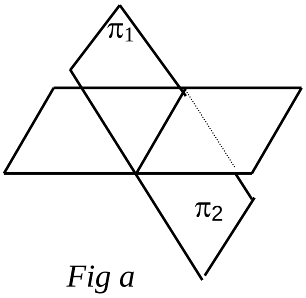


Fig a

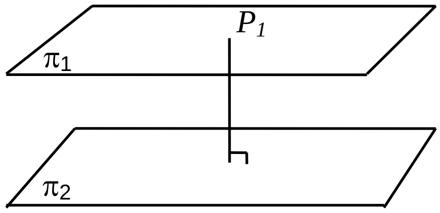


Fig b

3.4.7 - Exercícios Resolvidos

1) Ache a distância entre as retas $r_1: \dfrac{x-3}{6} = \dfrac{y+4}{4} = \dfrac{z-1}{-4}$ e $r_2: \dfrac{x-1}{9} = \dfrac{y-1}{6} = \dfrac{z+3}{-6}$.

Solução**:** Em primeiro lugar precisamos determinar a posição relativa dessas retas, cujas equações paramétricas são: $r_1: x=3+6t, y=-4+4t, z=1-4t$ e $r_2: x=1+9s, y=1+6s, z=-3-6s$. Assim obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 3+6t = 1+9s \\ -4-4t = 1+6s \\ 1-4t = -3-6s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6s-9t = -2 \\ 4t-6s = 5 \\ -4t+6s = -4 \end{cases}$$

Resolvendo por escalonamento o sistema acima, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 6 & -9 & -2 \\ 4 & -6 & 5 \\ -4 & 6 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 + L_2} \begin{bmatrix} 6 & -9 & -2 \\ 4 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe que o sistema é incompatível e, portanto as retas r_1 e r_2 são paralelas ou reversas. Como o produto vetorial entre os vetores diretores das retas dadas é nulo (Verifique), as retas possuem a mesma direção. Logo as retas r_1 e r_2 são paralelas. Seja $P_1 = (3, -3, 1) \in r_1$. Então

$$d(r_1, r_2) = d(P_1, r_2) = \frac{\left\| \vec{v_2} \times \overrightarrow{P_1P_2} \right\|}{\left\| \vec{v_2} \right\|}$$

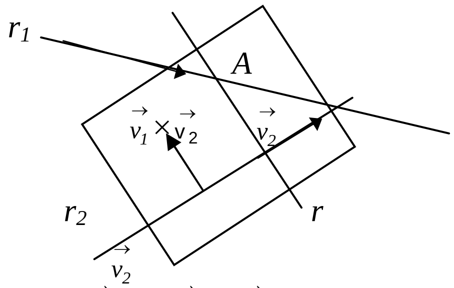
onde $\vec{v_2} = 9\vec{i} + 6\vec{j} - 6\vec{k}$, $P_2 = (1, 1, -3) \in r_2$, $\overrightarrow{P_1P_2} = -2\vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{k}$. Logo $d(r_1, r_2) = \dfrac{\sqrt{621}}{\sqrt{17}}$.

2) Escreva as equações da reta r que intercepta ortogonalmente às retas r_1 : $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z-1}{4}$

e r_2 : $x - 3 = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-7}{2}$.

Solução**:** Vamos determinar a posição relativa das retas r_1 e r_2. Sejam $P_1 = (-2, 0, 1) \in r_1$, $P_2 = (3, 1, 7) \in r_2$, $\vec{v_1} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ e $\vec{v_2} = \vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$ os vetores diretores das retas r_1 e r_2, respectivamente. Temos que $\overrightarrow{P_1P_2} = 5\vec{i} + \vec{j} + 6\vec{k}$ e que $\left[\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{v_1}, \vec{v_2}\right] = -44 \neq 0$ e, portanto as retas r_1 e r_2 são reversas. Observe que a direção da reta procurada é a direção do vetor $\vec{v_1} \times \vec{v_2}$ que é ortogonal às duas retas dadas, isto é, $\vec{v_1} \times \vec{v_2}$ é o vetor diretor da reta procurada. Vamos agora, determinar um ponto dessa reta. Sejam α o plano que passa por P_2 e contém os vetores $\vec{v_2}$ e $\vec{v_1} \times \vec{v_2}$, e A o ponto de interseção da reta r_1 com o plano α. A reta procurada passará pelo ponto A e terá a direção de $\vec{v_1} \times \vec{v_2}$. Assim, temos:

$$\vec{v_1} \times \vec{v_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -22\vec{i} + 11\vec{k};$$



Logo, a equação do plano α, contendo P_2 e os vetores $\vec{v_2}$ e $\vec{v_1} \times \vec{v_2}$ é

$$\left[\overrightarrow{P_2P}, \vec{v_2}, \vec{v_1} \times \vec{v_2}\right] = 0$$

onde $P = (x, y, z)$ é um ponto qualquer do plano α. Então

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-7 \\ 1 & 4 & 2 \\ -22 & 0 & 11 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha : 4x - 5y + 8z - 63 = 0.$$

Escrevendo as equações paramétricas de r_1, $x = -2 + 2t$, $y = 3t$, $z = 1 + 4t$, e substituindo na equação do plano α, obtemos: $-8 + 8t + 15t + 8 + 32t = 63 \Rightarrow t = 63/55$. Substituindo o valor de t nas equações paramétricas de r_1, temos: $x = 16/55$, $y = -189/55$ $z = 307/55$. Portanto o ponto de interseção entre a reta r_1 e o plano α será: $A = \left(16/55, -189/55, 307/55\right)$ e a equação da reta r, que passa por A e tem a direção de $\vec{v_1} \times \vec{v_2}$ é: $x = 16/55 - 22s$, $y = -189/55$ e $z = 307/55 + 11s$, $s \in \mathbb{R}$.

3.4.8 – Exercícios Propostos

1) Determine a distância entre as retas dadas no exercício 1 da seção **3.3.11.**
2) Determine a distância entre as retas e os planos dados no exercício 2 da seção **3.3.11.**
3) Determine a distância entre os planos dados no exercício 3 da seção **3.3.11.**
4) Ache a distância do ponto $A = (1, 2, 2)$ ao plano determinado pelos pontos $B = (-1, 0, 0)$, $C = (1, 0, 1)$ e $D = (-2, 3, 0)$.
5) Calcule a distância do ponto $D = (-2, 3, 0)$ à reta que passa por $P_0 = (1, 2, 5)$ e é paralela à reta que contém os pontos $A = (3, 0, 1)$ e $B = (-1, 2, 1)$.
6) Determine a equação da reta r que intercepta as retas r_1 e r_2 ortogonalmente:

   a) $r_1 : x = 2 + t\ , y = 3 + 5t\ , z = 5 + 6t\ ;\ r_2 : x = 1 + 3s\ , y = s\ , z = -7 + 2s$

   b) r_1 passa pelos pontos $A = (1, 0, 0)$ e $B = (0, 2, 0)$; $r_2 : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-4}{3}$
7) Determine um ponto simétrico ao ponto $A = (1, 2, -1)$, em relação a:

   a) à origem

   b) ao ponto $B = (3, 1, 1)$

   c) à reta $x = 1 + t, y = t, z = 1$

   d) ao plano $2x + y - z + 1 = 0$
8) Calcule a distância entre a interseção dos planos $x + y - z = -2$ e $2x - y + z = 5$, $x + y = 2z - 4$ e a reta $x = 1 + 2t, y = -t, z = 2 - 3t$.
9) Mostre que os planos $x + 2y - z = 1$ e $2x - y + z = 0$ se interceptam segundo uma reta r. Ache a equação de uma reta que passa pelo ponto $A = (1, 0, 1)$ e intercepta a reta r ortogonalmente.
10) Escreva as equações da reta que pertence ao plano $x - y + z = 7$, contém o ponto $(3, -3, 1)$ e é ortogonal à reta $x = 1 + t, y = 1 + 2t, z = 1 + 3t$.
11) Mostre que os planos $x + y - z = 0$ e $2x - y + 3z - 1 = 0$ se interceptam segundo uma reta r. Ache a equação do plano π que passa pelo ponto $B = (1, 0, -1)$ e contém a reta r.
12) Determine as equações da reta que passa pelo ponto $B = (1, -2, 1)$ e intercepta as retas reversas $r_1 : x = t - 1, y = 2t - 3, z = t$ e $r_2 : x = s - 2, y = 1 + s, z = s$.

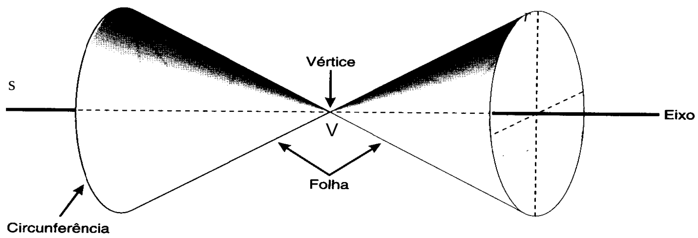
CÔNICAS E QUÁDRICAS

Estudaremos as curvas e superfícies que podem ser expressas por equações do segundo grau. São as curvas ditas *cônicas* e as superfícies *quádricas*.

4.1 - CÔNICAS

Usaremos genericamente o termo *cônicas* para identificar as seguintes curvas planas: *a circunferência, elipse, hipérbole e parábola*. Elas são chamadas de *seções cônicas* ou simplesmente *cônicas*, porque podem ser obtidas a partir da interseção de um plano com um cone, como é descrito a seguir.

Um *cone circular C* é a superfície obtida pela rotação de uma reta *r*, chamada geratriz, em torno de uma reta fixa *s*, chamada eixo de rotação, que se cortam em um ponto *V* chamado vértice do cone.



Esta superfície será estudada com mais detalhes no final deste capítulo.

Suponha que um plano π intercepte um cone *C*, sem passar pelo vértice do cone. Uma das seguintes situações ocorrerá:

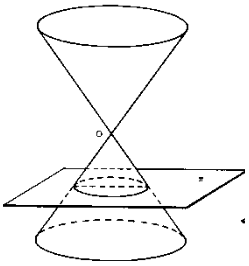
a) O plano π corta apenas uma folha do cone, e é perpendicular ao eixo de rotação. Neste caso, a curva interseção é uma *circunferência*. *(Fig. 1)*

b) O plano π corta apenas uma folha do cone, mas é inclinado em relação ao eixo de rotação e a geratriz do cone. Neste caso a curva interseção é uma *elipse*. *(Fig. 2)*

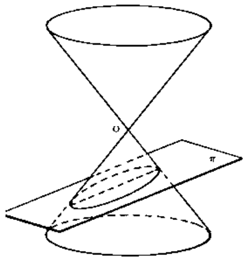
c) O plano π corta apenas uma folha do cone, e é paralelo à geratriz. Neste caso a curva interseção é uma *parábola*. *(Fig. 3)*

d) O plano π corta as duas folhas do cone, e é paralelo ao eixo de rotação. Neste caso a curva interseção é uma *hipérbole*. *(Fig. 4)*

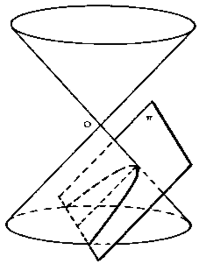
As figuras a seguir ilustram essas situações.



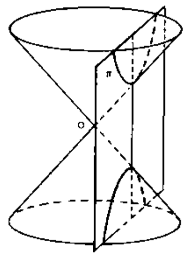
(Fig. 1)



(Fig. 2)

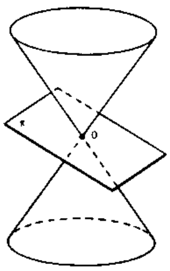


(Fig. 3)

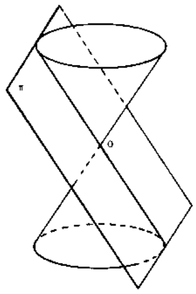


(Fig. 4)

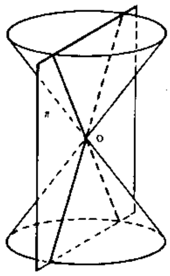
Se o plano π passar pelo vértice *V* do cone, teremos as cônicas degeneradas.



um ponto



uma reta



duas retas

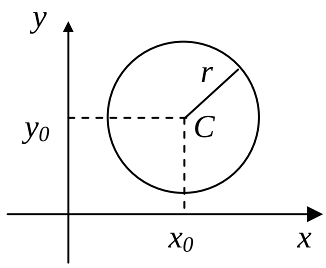
A seguir, faremos um estudo mais detalhado de cada um dessas curvas, utilizando suas propriedades características para obter suas equações. Por simplicidade vamos considerá-las no plano coordenado *x0y*, isto é, $z = 0$. Obteríamos resultados análogos nos planos coordenados $y = 0$ ou $x = 0$.

4.1.1- Circunferência

Chama-se *circunferência* ao conjunto de pontos $P = (x, y)$ do plano cuja distância a um ponto fixo $C = (x_0, y_0)$ é constante. O ponto fixo *C* chama-se *centro*, e a distância constante *r*, chama-se *raio*.

Vetorialmente, a equação da circunferência é:

$$d(C,P) = r \quad \text{ou} \quad \left\| \overrightarrow{CP} \right\| = r$$



Em coordenadas,

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r \Rightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Temos assim a equação da circunferência de centro $C = (x_0, y_0)$ e raio *r*.

Exemplos:

1) A equação de uma circunferência de centro $C = (-2, 1)$ e raio 3 é $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$.

2) O centro e o raio da circunferência de equação $x^2 + y^2 - \frac{2}{3}x + 2y - \frac{8}{9} = 0$ são obtidos por completamento de quadrados:

$$x^2 - \frac{2}{3}x = x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} - \frac{1}{9} = (x - \frac{1}{3})^2 - \frac{1}{9}; \qquad y^2 + 2y = y^2 + 2y + 1 - 1 = (y+1)^2 - 1$$

Logo, a equação fica:

$$(x - \frac{1}{3})^2 - \frac{1}{9} + (y+1)^2 - 1 - \frac{8}{9} = 0 \quad \Rightarrow \quad (x - \frac{1}{3})^2 + (y+1)^2 = 2$$

de onde vemos que o centro é o ponto $C = (\frac{1}{3}, -1)$ e seu raio é $r = \sqrt{2}$.

4.1.2- Elipse

Chama-se ***elipse*** ao conjunto de pontos $P = (x, y)$ do plano cartesiano tais que a soma das distâncias de P a dois pontos fixos F_1 e F_2, do mesmo plano, é constante. Os pontos fixos F_1 e F_2 são chamados de ***focos*** da elipse. A distância entre os focos F_1 e F_2 chama-se ***distância focal*** e será indicada por **2*c*.** Chama-se ***centro*** da elipse ao ponto médio C entre os focos F_1 e F_2.

Os elementos PF_1 e PF_2 que ligam um ponto qualquer P da elipse aos focos F_1 e F_2 chamam-se ***raios focais***. A soma dos raios focais será indicada por ***2a***. Segue-se da desigualdade triangular que $2c \leq 2a$ ou $c \leq a$. Se $c = a$, a elipse se reduz ao segmento F_1F_2 (Prove!). Se $F_1 = F_2$, isto é, c = 0, a elipse se reduz a uma circunferência de centro $C = F_1 = F_2$ e raio a.

Uma elipse tem dois eixos: *o* ***eixo maior*** ou ***eixo focal*** que é o segmento interno à elipse e contém os focos, e o ***eixo menor*** ou ***eixo transverso*** que é o eixo interno à elipse passando pelo seu centro e perpendicular ao eixo focal e assim o centro da elipse é o ponto médio de seus eixos.

Elementos da Elipse

C	-	centro
F_1, F_2	-	focos
A_1A_2	-	eixo focal ou eixo maior
B_1B_2	-	eixo transverso ou eixo menor
PF_1, PF_2	-	raios focais
A_1, A_2, B_1, B_2	-	vértices
$d(F_1, F_2)$	-	distância focal (2c)

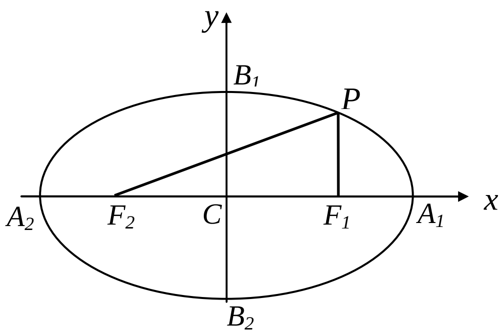


fig. 3

A equação geral da elipse de focos F_1 e F_2 cuja soma dos raios focais é igual a $2a$ é:

$$\left\| \overrightarrow{PF_1} \right\| + \left\| \overrightarrow{PF_2} \right\| = 2a. \qquad (2)$$

Dadas as coordenadas do ponto *P*, a equação acima se reduz a uma expressão relativamente simples desde que sejam dados os focos em posições particulares, como veremos a seguir.

1) Equação da elipse com focos sobre um dos eixos coordenados e centro na origem do sistema .

Consideremos inicialmente os focos sobre o eixo $0x$. Então, como $C \equiv O$ é o ponto médio entre os focos, teremos $F_1 = (c, 0)$, $F_2 = (-c, 0)$, pois $2c$ é a distância focal. Se $P = (x, y)$ é um ponto qualquer da elipse, da equação *geral (2)* vem:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

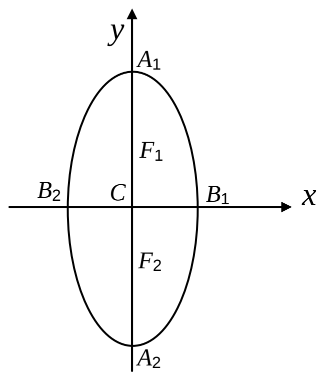
Racionalizando e agrupando os termos convenientemente, obtemos:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2 y^2 = (a^2 - c^2)a^2$$

Como $c < a$, temos $a^2 - c^2 > 0$ e chamando de $b^2 = a^2 - c^2$, vem

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (3)$$

Observe que se o ponto $P = (x, y)$ pertence à elipse, também pertencerão a ela os pontos $(-x, -y)$, $(x, -y)$ e $(-x, y)$. Concluímos que a elipse é uma curva simétrica em relação ao centro e aos eixos focal e transverso. Como tomamos o eixo focal sobre $0x$ e $C \equiv 0$, o eixo transverso estará sobre $0y$ e os vértices da elipse, pontos de interseção da elipse com seus eixos focal e transverso, serão: $A_1 = (a, 0)$ e $A_2 = (-a, 0)$, obtidos de *(3)* fazendo $y = 0$, e fazendo $x = 0$ em *(3)* obtém-se $B_1 = (0, b)$ e $B_2 = (0, -b)$. O número $e = c/a$ é chamado ***excentricidade*** da elipse. Note que na elipse a excentricidade é sempre menor que *1*, pois $c < a$. Observando a figura *3*, podemos concluir que a medida do eixo maior será $\left\| \overrightarrow{A_1A_2} \right\| = 2a$ e a do eixo menor $\left\| \overrightarrow{B_1B_2} \right\| = 2b$.



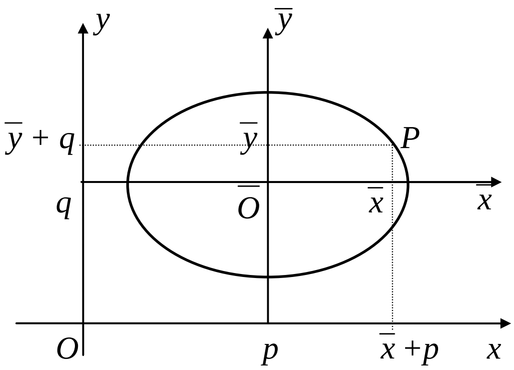
Se os focos estivessem sobre o eixo coordenado $0y$ e o centro ainda coincidisse com a origem do sistema, os focos teriam coordenadas $F_1 = (0, c)$ e $F_2 = (0, -c)$ e de modo análogo ao que foi feito acima a equação geral da elipse nos levaria à expressão:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \qquad a > b \qquad (4)$$

Neste caso os vértices são: $B_1 = (b, 0)$, $B_2 = (-b, 0)$, $A_1 = (0, a)$ e $A_2 = (0, -a)$, o eixo menor $\left\| \overrightarrow{B_1B_2} \right\| = 2b$, o eixo maior $\left\| \overrightarrow{A_1A_2} \right\| = 2a$ e excentricidade $e = \dfrac{c}{a}$.

2) Equação da elipse com centro em *C = (p , q)* e focos sobre uma reta paralela ao eixo coordenado *0x* , passando por *C* .

Faremos de início uma translação de eixos. Pelo ponto $C = (p, q)$, centro da elipse, consideremos outro sistema de eixos, $\overline{O}\overline{x}$ paralelo a Ox e $\overline{0}\overline{y}$ paralelo a $0y$. Seja P um ponto de coordenadas (x, y) no sistema XOY e $(\bar{x}, \bar{y})$ no sistema $\overline{XOY}$. Vejamos relações entre as coordenadas do ponto P:



$$x = p + \bar{x} \Rightarrow \bar{x} = p - x \quad \text{e} \quad y = q + \bar{y} \Rightarrow \bar{y} = q - y$$

Essas relações permitem a passagem de um sistema para outro sistema, isto é, nos permitem fazer uma translação de eixos. Voltemos ao problema para determinar a equação de uma elipse de centro do ponto $C = (p, q)$ e focos sobre a reta $y = q$. Observe que nesse novo sistema $\overline{XOY}$ teremos a mesma situação descrita em 1), com focos $\bar{F}_1 = (c, 0)$, $\bar{F}_2 = (-c, 0)$ e, portanto a equação da elipse será:

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1 .$$

Utilizando a translação de eixos, teremos

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1 \qquad (5)$$

que é a equação da elipse de centro $C = (p , q)$ e focos $F_1 = (p + c, q)$ e $F_2 = (p - c, q)$. Se os focos estiverem sobre a reta x = p e centro $C = (p , q)$, a equação da elipse será:

$$\frac{(x-p)^2}{b^2} + \frac{(y-q)^2}{a^2} = 1 \qquad (6)$$

Observações:

1) O caso 2) engloba o caso 1) quando se tem $C = (0, 0)$.

2) Se $a = b = r$, obtemos de 2) a equação da circunferência de centro $C = (p, q)$ e raio r. De $b^2 = a^2 - c^2$ vem $c = 0$, como já foi vimos, e portanto a excentricidade da circunferência é nula.

Exemplos:

1) A elipse cujos focos são os pontos $F_1 = (3 , 0)$, $F_2 = (-3, 0)$ e cuja soma dos raios focais é *10* pode ser assim descrita.

Solução: Conforme vimos acima, a posição do centro e dos focos da elipse é fundamental para se escrever sua equação. Como o centro é o ponto médio entre os focos, temos aqui $C = (0, 0)$. Além disso, os focos F_1 e F_2 estão sobre o eixo $0x$ e portanto a equação desta elipse será do tipo dada em (3):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\text{, com } a > b.$$

Como $2a = 10$, tem-se $a = 5$ e das coordenadas dos focos tiramos $c = 3$. Além disso $b^2 = a^2 - c^2$, donde $b = 4$. Logo, temos uma elipse de equação

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

com excentricidade $e = 3/5$. Seus vértices são obtidos fazendo $x = 0$, o que dá $y = \pm 4$ e fazendo y = 0 obtemos $x = \pm 5$. Logo, os vértices são $A_1 = (5, 0)$, $A_2 = (-5, 0)$, $B_1 = (0, 4)$, $B_2 = (0, -4)$. Assim eixo maior está sobre o $0x$, com $\|\overrightarrow{A_1A_2}\|=10$ e o eixo menor sobre $0y$ e $\|\overrightarrow{B_1B_2}\|=8$.

2) Escrever a equação, descrever e esboçar a elipse de focos $F_1 = (2, 3)$, $F_2 = (2, -5)$ e eixo maior de comprimento 10.

Solução: O centro da elipse é o ponto médio dos focos: $C=(2,-1)$. Façamos uma translação de eixos, passando a usar um novo sistema de eixos, $\overline{x0y}$, com $\overline{0x}\,//\,0x$, $\overline{0y}\,//\,0y$ e $\overline{0}\equiv C=(2,-1)$, isto é, $x=\overline{x}+2 \Rightarrow \overline{x}=x-2$ e $y=\overline{y}-1 \Rightarrow \overline{y}=y+1$. Ora, $2c=\|\overrightarrow{F_1F_2}\|=8$, logo $c = 4$. Assim, no sistema $\overline{x0y}$ temos $F_1 = (0, 4)$, $F_2 = (0, -4)$ e portanto o eixo focal está sobre $\overline{0y}$. Como $2a = 10$, vem $a = 5$, logo $b=\sqrt{a^2-c^2}=3$. Então, no sistema auxiliar $\overline{x0y}$, temos a equação da elipse, do tipo dada *(4)*.

$$\frac{\overline{x}^2}{9}+\frac{\overline{y}^2}{25}=1$$

Podemos obter os vértices da elipse, fazendo: $\overline{y}=0 \Rightarrow \overline{x}=\pm 3$, donde $\overline{B}_1=(3,0)$, $\overline{B}_2=(-3,0)$ e $\overline{x}=0 \Rightarrow \overline{y}=\pm 5$, donde $\overline{A}_1=(0,5)$, $\overline{A}_2=(0,-5)$. Além disso, temos que a excentricidade da elipse é $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$, seu eixo menor sobre $\overline{0x}$ e $\|\overrightarrow{B_1B_2}\|=6$ e, seu eixo maior sobre $\overline{0y}$, com $\|\overrightarrow{A_1A_2}\|=10$. Observe que este estudo da elipse foi feito em relação ao sistema auxiliar $\overline{x0y}$ cuja origem $\overline{0}$ coincide com o centro da elipse. No entanto, o uso deste sistema tem como finalidade facilitar a obtenção de todos os elementos da elipse, cuja descrição deve ser feita no sistema de eixos dado inicialmente, isto é, $x0y$. Voltando a esse sistema através das fórmulas de mudança de coordenadas, obtemos a equação da elipse

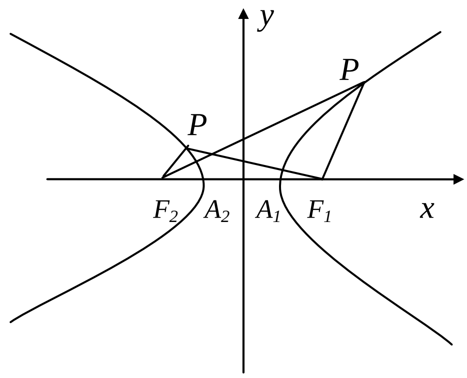
$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{25}=1$$

que tem como excentricidade $e = 4/5$ e cujos vértices são $A_2=(0+2,-5-1)=(2,-6)$, $A_1=(0+2,5-1)=(2,4)$, $B_2=(-3+2,0-1)=(-1,-1)$, $B_1=(3+2,0-1)=(5,-1)$. O eixo focal, que se situava sobre $\overline{0y}$, de equação $\overline{x}=0$, passa a estar sobre a reta $x - 2 = 0$ ou $x = 2$, enquanto o eixo transverso que se situava em $\overline{y}=0$ e passa a estar sobre a reta $y = -1$. Fica a cargo o leitor o esboço do gráfico da elipse.

4.1.3 - Hipérbole

Chama-se ***hipérbole*** ao conjunto de pontos $P = (x, y)$ do plano, tais que o módulo da diferença das distâncias de P a dois pontos fixos F_1 e F_2 do mesmo plano, é constante. Os pontos F_1 e F_2 denominamos de focos, cujo ponto médio é o centro. A distância entre os focos é a distância focal, indicada por $2c$, e PF_1, PF_2 os raios focais da hipérbole. A diferença dos raios focais será indicada por $2a$.

A hipérbole tem um eixo focal que contém os focos e um eixo transverso perpendicular ao eixo focal e passando pelo centro, mas que não corta a hipérbole. Ele também é chamado de eixo imaginário. A hipérbole tem apenas dois vértices A_1 e A_2, que são os pontos de interseção da hipérbole com o eixo focal.



A hipérbole é uma curva com dois ramos e conforme o ramo em que esteja o ponto P diferença dos raios focais será $2a$ ou $-2a$. Portanto, a equação geral da hipérbole de focos F_1 e F_2 é:

$$\left| \left\| \vec{PF_1} \right\| - \left\| \vec{PF_2} \right\| \right| = 2a \qquad (7)$$

Dadas as coordenadas do ponto P, a equação acima se reduz a uma expressão relativamente simples, desde que sejam dados os focos em posições particulares, como veremos a seguir.

1) Equação da hipérbole com focos sobre um dos eixos coordenados e centro na origem.

Consideremos inicialmente os focos sobre o eixo $0x$. Sendo o centro $C \equiv O$, o ponto médio entre os focos, temos $F_1 = (c, 0)$, $F_2 = (-c, 0)$, com $2c$ a distância focal. Se $P = (x, y)$ é um ponto qualquer da hipérbole, da equação geral (7) vem :

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

Racionalizando, obtemos:

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Ora,

$$\left| \left\| \vec{PF_1} \right\| - \left\| \vec{PF_2} \right\| \right| \le \left\| \vec{F_1F_2} \right\| \Rightarrow 2a < 2c \Rightarrow a < c$$

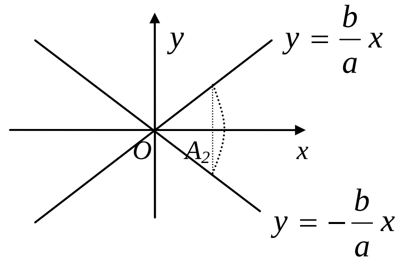
Tomando então $b^2 = c^2 - a^2$, vem

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (8)$$

Observe que se o ponto (x, y) pertence à hipérbole, os pontos $(-x, -y)$, $(-x, y)$ e $(x, -y)$ também pertencerão. Assim, a hipérbole é simétrica em relação à origem e aos eixos coordenados. Aqui o eixo focal estará sobre $0x$ e o eixo imaginário sobre $0y$. Os vértices são obtidos da *(8)* fazendo $y = 0$, obtemos $x = \pm a$. Logo $A_1 = (a, 0)$ e $A_2 = (-a, 0)$ são os vértices. Verificamos que de *(8)* observa-se que a hipérbole não corta o eixo transverso, pois se $x = 0$, vem $y^2 = -b^2$, o que é um absurdo. Da equação *(8)* também obtemos:

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 < \frac{x^2}{a^2}$$

Se $x > 0$, tem-se $-\frac{b}{a}x < y < \frac{b}{a}x$ e se $x < 0$, tem-se $\frac{b}{a}x < y < -\frac{b}{a}x$, isto é, para $x > 0$ a hipérbole situa-se acima da reta $y = -\frac{b}{a}x$ e abaixo da reta $y = \frac{b}{a}x$. Para $x < 0$ a hipérbole situa-se acima da reta $y = \frac{b}{a}x$ e abaixo da reta $y = -\frac{b}{a}x$. As retas $y = \pm\frac{b}{a}x$ são chamadas de ***assíntotas*** da hipérbole. Isto significa que, quando $|x|$ se torna arbitrariamente grande os ramos da hipérbole tendem a se confundir com as retas acima.



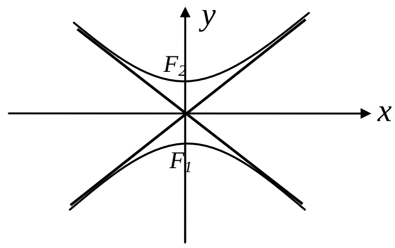
Geometricamente as assíntotas da hipérbole podem ser obtidas marcando sobre o eixo focal os focos $F_1 = (c, 0)$ e $F_2 = (-c, 0)$ e os vértices $A_1 = (a, 0)$ e $A_2 = (-a, 0)$, $a < c$, levantando por um dos vértices, por exemplo A_2, uma perpendicular ao eixo focal e interceptando-a por um arco de circunferência de centro C e raio c. As assíntotas são as retas que passam por C e pelos pontos acima obtidos. A *excentricidade* da hipérbole é o valor $e = \frac{c}{a} > 1$.Se os focos estivessem sobre o eixo coordenado Oy e o centro ainda coincidisse com a origem do sistema, os focos teriam coordenadas $F_1 = (0, c)$, $F_2 = (0, -c)$ e a equação geral da hipérbole nos levaria à expressão

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \qquad (9)$$

onde $2a$ é a diferença dos raios focais.

Observe que nesta hipérbole o eixo focal está sobre o eixo Oy. Portanto, a hipérbole só corta o eixo $0y$, nos vértices obtidos fazendo $x = 0$, donde $y = \pm a$ e, portanto $B_1 = (0, a)$ e $B_2 = (0, -a)$.

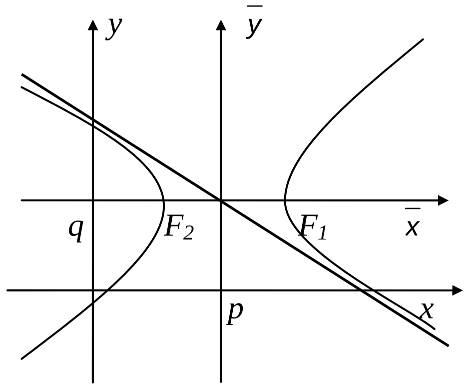
Se fizéssemos $y = 0$ chegaríamos ao absurdo $x^2 = -b^2$. Aqui as assíntotas seriam $y = \pm \frac{a}{b} x$ como se pode constatar graficamente na figura ao lado.



2) Equação da hipérbole de centro *C = (p, q)* e focos sobre uma reta paralela ao eixo coordenado *0x* , passando por *C* .

Neste caso, de modo análogo como tratamos a elipse, a mudança de coordenadas $x = p + \bar{x} \Rightarrow \bar{x} = x - p$ e $y = q + \bar{y} \Rightarrow \bar{y} = y - q$ nos fornece a equação da hipérbole de centro $C = (p, q)$ e cujos focos são $F_1 = (p + c, q)$, $F_2 = (p - c, q)$:

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1 \qquad (10)$$



Exemplo:

1) Encontre a equação da hipérbole cujos focos são $F_1 = (0, 4)$ e $F_2 = (0, -4)$ e a diferença dos raios focais é 6.

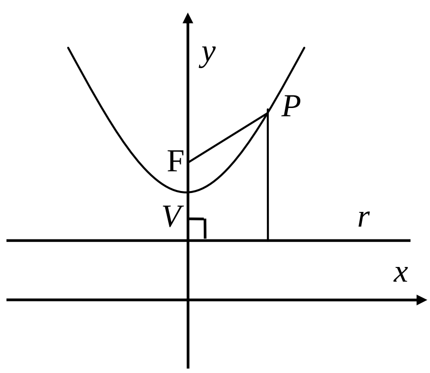
Solução: Examinando as coordenadas de F_1 e F_2 verificamos que os focos estão sobre o eixo $0y$. Assim o centro será $C = (0, 0)$ e $c = 4$. Como $2a = 6$, então $a = 3$ e $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{7}$. Logo, a equação da hipérbole é do tipo (9):

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} = 1$$

A hipérbole tem como vértices os pontos $A_1 = (0, 3)$, $A_2 = (0, -3)$, obtidos fazendo-se $x = 0$ na equação acima, como assíntotas as retas $y = \pm \frac{3}{\sqrt{7}} x$, e excentricidade $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{3} > 1$.

4.1. 4 - Parábola

Consideremos em um plano, uma reta r e um ponto F, não pertencente à reta r. Chama-se *parábola* ao conjunto de pontos $P = (x, y)$ do plano, equidistantes de um ponto fixo F e de uma reta fixa r. O ponto fixo F chama-se *foco* e reta fixa r chama-se *diretriz* da parábola. Uma parábola tem apenas um eixo, chamado eixo focal, que é a reta que contém o foco F e é perpendicular à reta diretriz r.



O vértice da parábola, denotado por V, é o ponto de interseção entre a parábola e seu eixo focal. Como V pertence à parábola ele está a igual distância do foco F e da diretriz r. A equação geral de uma parábola de foco F e diretriz r é:

$$\left\| \vec{PF} \right\| = d(P, r) \qquad (11)$$

Em função das coordenadas do ponto P a equação acima se reduz a uma expressão simples, desde que seja dado o foco em posições particulares, como veremos a seguir.

1) Equação da parábola como foco sobre um dos eixos coordenados e vértice na origem do sistema.

Consideremos o foco F da parábola sobre o eixo $0x$, $F = (c, 0)$, com $c > 0$. O eixo focal será o eixo coordenado $0x$ e a diretriz será uma reta paralela ao eixo $0y$ passando pelo ponto $(-c,0)$, pois o foco e a diretriz são simétricos em relação ao vértice, de equação $x = -c$, (veja *Fig. 1).* Se $P = (x, y)$ é um ponto qualquer da parábola e $M = (-c, y)$, então da equação geral vem

$$\left\| \vec{PM} \right\| = \left\| \vec{PF} \right\| \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Racionalizando, obtemos $y^2 = 4cx$. Se o foco fosse $F = (-c, 0)$, conforme *Fig. 2*, a diretriz r seria a reta perpendicular a $0x$ de equação $x = c$ e teríamos a parábola de equação, $y^2 = -4cx$.

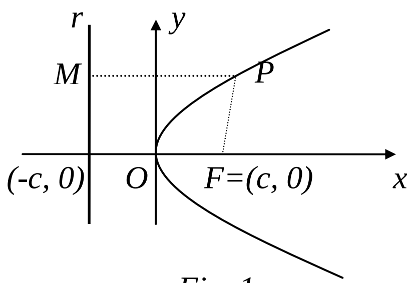


Fig. 1

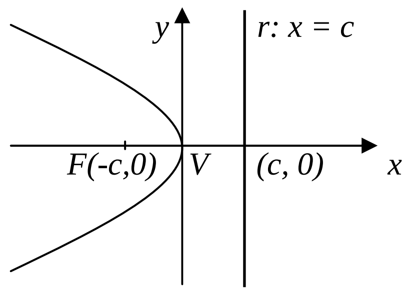
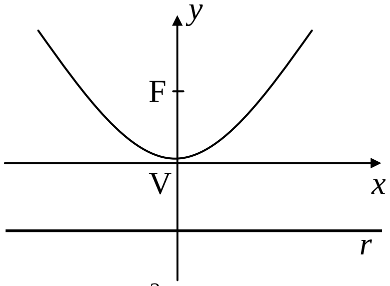


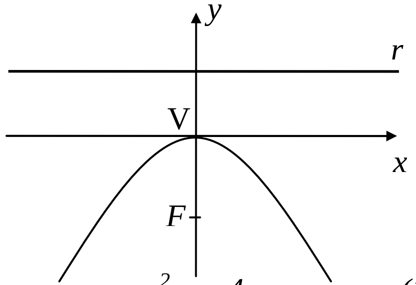
Fig. 2

Observe que, se o ponto $P = (x, y)$ pertence à parábola, o ponto $(x , -y)$ também a ela pertencerá, o que significa que a parábola é simétrica em relação a seu eixo focal.

Se o foco estivesse sobre o eixo coordenado $0y$ e o vértice ainda coincidisse com a origem do sistema, teríamos $F = (0, c)$ ou $F = (0,-c)$ e a diretriz interceptaria perpendicularmente o eixo focal $0y$ no ponto $(0, -c)$ ou $(0, c)$ respectivamente. Teríamos então as parábolas:



$x^2 = 4cy$



$x^2 = -4cy$ (13)

2) Equação da parábola com vértice *V = (p , q)* e foco sobre uma reta paralela ao eixo *0x*

Faremos, inicialmente, uma translação de eixos obtida através das fórmulas $x = p + \overline{x} \Rightarrow \overline{x} = x - p$ e $y = q + \overline{y} \Rightarrow \overline{y} = y - q$. Utilizando o sistema de eixos auxiliares $\overline{x0y}$, com $\overline{0} \equiv V$, teremos a situação descrita anteriormente, obtendo assim

$$\overline{y}^2 = 4c\overline{x} \quad \text{ou} \quad \overline{y}^2 = -4c\overline{x}$$

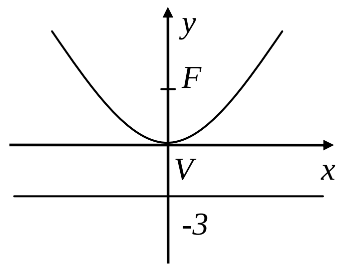
conforme o foco *F* esteja à direita ou à esquerda de *V*. Voltando ao sistema de eixos *x0y*, teremos

$$(y - q)^2 = 4c(x - p) \quad \text{ou} \quad (y - q)^2 = -4c(x - p)$$

Observamos que, qualquer que seja a posição da parábola, ela é simétrica em relação ao seu eixo de simetria e tem a concavidade voltada para a parte do eixo focal que contém o foco.

Exemplo:

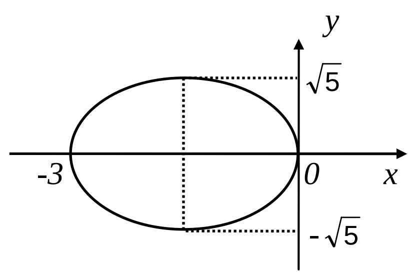
1) Escreva a equação da parábola de foco $F=(0,3)$ e cuja diretriz é a reta $y = -3$.



Solução: Examinando as coordenadas do foco e a equação da reta diretriz, observamos que o foco está sobre o eixo *0y* e a diretriz é uma reta perpendicular a *0x*. Assim, o eixo focal será o eixo *0y*, que cortará a reta diretriz no ponto *(0, -3)*. O vértice da parábola será o ponto médio entre *(0, -3)* e *F = (0, 3)*, isto é, *V = (0, 0)*. Então $c = 3$ e a equação da parábola será $x^2 = 12y$.

4.1.5 - Exercícios resolvidos

1) Obtenha a equação da elipse que tem o centro em $C = (-3, 0)$, um foco em $F = (-1, 0)$ e é tangente ao eixo *0y*.



Solução: Examinando as coordenadas do centro e do foco dadas, vemos que elas têm a mesma ordenada. Logo estão situados sobre a mesma reta horizontal, $y = 0$, isto é, o eixo *0x*. Assim, a elipse terá eixo focal *0x*, centro no ponto *(–3, 0)*, e portanto sua equação será do tipo dada em (5).

Além disso, sendo tangente a *0y*, terá gráfico do tipo descrito acima. A distância focal será $c = d(F, C) = 2$. Um dos vértices será *(0, 0)* e assim a equação da elipse nos fornece

$$\frac{9}{a^2} = 1 \Rightarrow a = 3; b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$$

e obteremos finalmente

$$\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

2) Escreva a equação da hipérbole de centro em $C=(-2,1)$, eixo focal paralelo a *0x*, e que passa pelos pontos *(0, 2)* e *(–5, 6).*

Solução: De acordo com a posição do eixo focal e do centro, a equação da hipérbole será do tipo

$$\frac{(x+2)^2}{a^2}-\frac{(y-1)^2}{b^2}=1.$$

Como os pontos *(0, 2)* e *(–5, 6)* pertencem à hipérbole, teremos:

$$\begin{cases}\dfrac{4}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}=1\\ \dfrac{9}{a^2}-\dfrac{25}{b^2}=1\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}4\alpha^2-\beta^2=1\\ 9\alpha^2-25\beta^2=1\end{cases}$$

com $\alpha=1/a$ e $\beta=1/b$. Resolvendo este sistema obtemos como solução: $\alpha^2=24/91$, $\beta^2=5/91$. Logo, $a^2=91/24$, $b^2=91/5$ e a equação da hipérbole fica

$$\frac{(x+2)^2}{\frac{91}{24}}-\frac{(y-1)^2}{\frac{91}{5}}=1\ \Rightarrow\ 24x^2-5y^2+96x+10y=0.$$

3) Identifique, descreva e esboce as curvas :

a) $y^2+8x+4y-20=0$ b) $4x^2-9y^2-16x-18=29$

Solução:a) Por completamento de quadrados, verificamos que

$$y^2+4y=(y+2)^2-4.$$

Logo,

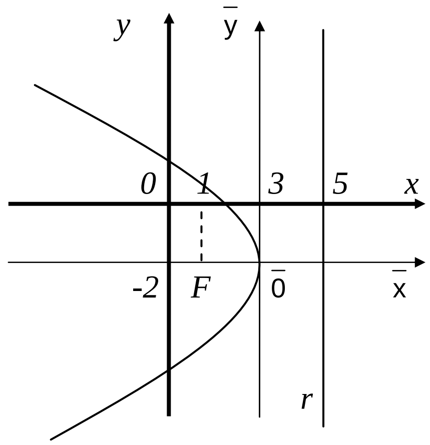
$$y^2+8x+4y-20=(y+2)^2+8x-24=0\Rightarrow(y+2)^2=-8(x-3)$$

Fazendo a mudança de variáveis $\bar{x}=x-3$ e $\bar{y}=y+2$, temos $\bar{y}^2=-8\bar{x}$.

Consideremos então um novo sistema de eixos cartesianos $\overline{x0y}$, com $\bar{0}\equiv(3,-2)$, $\overline{0x}$ e $\overline{0y}$ paralelos a $0x$ e $0y$, respectivamente. A parábola dada tem vértice $V\equiv\bar{0}$, eixo focal (ou de simetria) sobre *0x*. Comparando sua equação acima com a forma padrão $\bar{y}^2=4c\bar{x}$, temos *4c = –8*, donde *c = –2*, isto é, o foco $\bar{F}=(-2,0)$, a concavidade é voltada para a parte negativa do eixo $\overline{0x}$, e a diretriz é a reta *r* de equação $\bar{x}=2$. Voltando ao sistema *x0y* pelas fórmulas $\bar{x}=x-3$ e $\bar{y}=y+2\Rightarrow x=\bar{x}+3$ e $y=\bar{y}-2$, temos:

$$(y+2)^2=-8(x-3)$$

Assim, teremos: $V=(3,-2)$; $c=-2$; $F=(1,-2)$, diretriz *r: x = 5* e eixo focal a reta *y = -2.*



b) $4x^2 - 9y^2 - 16x - 18y = 29$

Por completamento de quadrado temos:

$$4x^2 - 16x = 4(x^2 - 4x + 4 - 4) = 4(x-2)^2 - 16$$

$$-9y^2 - 18y = -9(y^2 + 2y + 1 - 1) = -9(y+1)^2 + 9$$

Logo,

$$4x^2 - 9y^2 - 16x - 18y = 4(x-2)^2 - 16 - 9(y+1)^2 + 9 = 29 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

Fazendo a mudança de variáveis , $\overline{x} = x - 2$ e $\overline{y} = y + 1$, obtemos

$$\frac{\overline{x}^2}{9} - \frac{\overline{y}^2}{4} = 1$$

Assim, tomando-se um novo sistema de eixos com origem em $\overline{0} = (2, -1)$ e eixos $\overline{0x}$ paralelo a $0x$ e $\overline{0y}$ paralelo $0y$, vemos que a equação acima representa uma hipérbole de centro $C \equiv \overline{O}$, focos sobre $\overline{0x}$ (pois não corta o eixo $\overline{0y}$). Portanto temos: $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$, $b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$ e $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13}$. Então $F_1 = (\sqrt{13}, 0)$ e $F_2 = (-\sqrt{13}, 0)$. Para obter os vértices, fazemos, na equação $\overline{y} = 0 \Rightarrow \overline{x} = \pm 3$, donde $\overline{A_1} = (3, 0)$, $\overline{A_2} = (-3, 0)$. Assim teremos como assíntotas as retas $\overline{y} = \pm \frac{2}{3}\overline{x}$ e como excentricidade $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3} > 1$. Voltando, agora, ao sistema *x0y* e usando as equações de mudança de variáveis $\overline{x} = x - 2$ e $\overline{y} = y + 1 \Rightarrow x = \overline{x} + 2$ e $y = \overline{y} - 1$, temos a equação da hipérbole

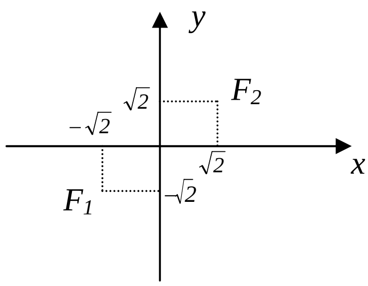
$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

cujo centro é o ponto $C = (2,-1)$ e focos nos pontos $F_1 = (2 + \sqrt{13}, -1)$, $F_2 = (2 - \sqrt{13}, -1)$.

Além disso, seus vértices são os pontos $A_1 = (5,-1), A_2 = (-1,-1)$ e suas assíntotas são as retas $(y + 1) = \pm \frac{2}{3}(x - 2) \Rightarrow 3y + 2x + 7 = 0$ e $3y + 2x - 1 = 0$. Esboce o gráfico.

4) Escreva a equação da hipérbole de focos $F_1 = (\sqrt{2}, \sqrt{2}), F_2 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ e tal que se semi-eixo focal vale $\sqrt{2}$.

Solução: Note que os focos não se situam em nenhum dos eixos coordenados, nem sobre alguma reta paralela a um dos eixos coordenados. Isto significa que a equação da curva pedida deve ser obtida diretamente de sua definição. Se $P = (x, y)$ é um ponto da hipérbole, então



$$\left| \left\| \overrightarrow{PF_1} \right\| - \left\| \overrightarrow{PF_2} \right\| \right| = 2a$$

Como $a = \sqrt{2}$, temos:

$$\sqrt{(x+\sqrt{2})^2 + (y+\sqrt{2})^2} - \sqrt{(x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{2}.$$

Esta é uma equação irracional, que deve ser resolvida por quadraturas:

$$\left[\sqrt{(x+\sqrt{2})^2 + (y+\sqrt{2})^2}\right]^2 = \left[2\sqrt{2} + \sqrt{(x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2}\right]^2 \Rightarrow$$

$$4\sqrt{2}\sqrt{(x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2} = 4\sqrt{2}\,x + 4\sqrt{2}\,y - 8 \quad \Rightarrow$$

$$\left[\sqrt{2}\sqrt{(x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2}\right]^2 = \left[\sqrt{2}\,x + \sqrt{2}y - 2\right]^2$$

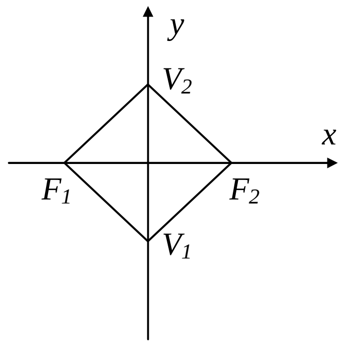
$$4xy = 4 \Rightarrow xy = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$$

5) Calcule a área do quadrilátero que tem dois vértices nos focos da cônica $x^2 + 5y^2 = 20$ e os outros dois vértices coincidem com os extremos de seu eixo menor.

Solução: A cônica dada, cuja equação pode ser escrita na forma

$$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1$$

é uma elipse, de focos sobre o eixo $0x$, $F_1 = (4, 0)$, $F_2 = (-4, 0)$, $a = \sqrt{20}$, $b = 2$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ e vértices em



$V_1 = (0, 2)$ e $V_2 = (0, -2)$. Analisando o quadrilátero $F_1V_1F_2V_2$ e notamos que $\overrightarrow{F_1V_1} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$ e $\overrightarrow{V_2F_2} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$. Logo $\overrightarrow{F_1V_1} = \overrightarrow{V_2F_2}$. Da mesma forma, temos $\overrightarrow{F_1V_2} = 4\vec{i} - 2\vec{j}$ e $\overrightarrow{V_1F_2} = 4\vec{i} - 2\vec{j}$ o que implica $\overrightarrow{F_1V_2} = \overrightarrow{V_1F_2}$. Portanto, o quadrilátero é um paralelogramo cuja área é $\left\|\overrightarrow{F_1V_2} \times \overrightarrow{F_1V_1}\right\| = 16$.

6) Obtenha na parábola $y^2 = 16x$ os pontos cujos raios focais medem 13 unidades.

Solução: A equação da parábola nos mostra que ela é simétrica em relação ao eixo $0x$, passa pela origem (que será seu vértice) e é do tipo $y^2 = 4cx$. Temos então $4c = 16 \Rightarrow c = 4$. Logo $F = (4, 0)$ é seu foco. Se $P = (x, y)$ é um ponto da parábola de raio focal 13 então $d(P, F) = 13$, ou seja,

$$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 13 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 = 169$$

Ora, para os pontos (x, y) da parábola temos $y^2 = 16x$. Portanto.

$$x^2 - 8x + 16 + 16x = 169 \;\Rightarrow\; (x+4)^2 = 169$$

Esta equação admite duas raízes, $x = -17$ e $x = 9$, das quais apenas a segunda satisfaz ao problema, pois $y^2 = 16\,x > 0$. Então $x = 9$ e de $y^2 = 144$ vem $y = \pm\ 12$, o que fornece os pontos da parábola $A = (9,\ -12)$ e $B = (9\ ,\ 12)$, com raios focais 13.

4.1. 6 - Exercícios propostos

Os exercícios abaixo se referem ao plano $x0y$, isto é, $z = 0$.

1) Escreva as equações das circunferências, esboçando seus gráficos. Obtenha todos os seus elementos (centro, raio).

a) Centro $(-2\ ,\ 1)$ e raio 5.
b) Passa pelos pontos $(1,\ -2)$, $(1,\ 1)$, $(2,\ 3)$.
c) Um diâmetro é o segmento que une os pontos $(0,\ -1)$ e $(-2,\ -3)$.
d) Corta o eixo $0x$ nos pontos $(-1,\ 0)$ e $(3,\ 0)$ e o centro está a reta $y = x - 1$.

2) Escreva as equações das elipses abaixo, esboçando seus gráficos. Obtenha todos os seus elementos (focos, vértices, excentricidade, centro, eixos).

a) Focos $F_1 = (3,0),\ F_2 = (-3,0)$ e soma dos raios focais 12.
b) Dois vértices em $A_1\,(3,\ -4)$ e $A_2(3,\ 4)$ e distância focal 4.
c) Vértices $(-5,\ 0)$, $(5,\ 0)$, $(0,\ -4)$, $(0,\ 4)$
d) Focos sobre o eixo $0y$, distância focal 8 e excentricidade $2/3$,
e) Centro $(2\ ,\ -1)$ e passa pelos pontos $(-3,\ -1)$ e $(2,\ 3)$
f) Focos $(-2,\ -2)$ e $(2,\ 2)$ e soma dos raios focais 12.

3) Escreva as equações das hipérboles abaixo, esboçando seus gráficos. Obtenha todos os seus elementos (focos, vértices, excentricidade, centro, eixos).

a) Focos $F_1 = (2, -7),\ F_2 = (2, 5)$ e diferença dos raios focais 5.
b) Vértices $(2,\ -1)$ e $(2,\ 7)$ e excentricidade $3/2$
c) Vértices $(0\ ,\ -2)$ e $(0,\ 2)$, assíntotas $y = \pm\ 2x$ e não corta o eixo $0x$.
d) Focos $(-2\ ,\ 2)$ e $(2\ ,\ -2)$, e vértices $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ e $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

4) Escreva as equações das parábolas, esboçando seus gráficos. Obtenha todos os seus elementos (foco, vértices, eixo, diretriz).

a) Foco $(3\ ,\ 0)$ e diretriz $r:\ x + 3 = 0$
b) Foco $(0\ ,\ -2)$ e diretriz $r: y = 2$
c) Foco $(-2\ ,\ 0)$ e diretriz $r:\ x - 4 = 0$
d) Foco $(-4\ ,\ 1)$ e diretriz $y = 3$
e) Vértice $(2\ ,\ 0)$ e foco $(0\ ,\ 0)$
f) Vértice $(4\ ,\ -1)$, eixo focal $r: y + 1 = 0$ e passa pelo ponto $(3,\ -3)$.

5) Calcule a interseção da elipse de vértices $(\pm 5, 0)$, $(0, \pm 1)$ com a circunferência de centro na origem e raio 2.

6) Determine os comprimentos dos raios focais do ponto $(6, 5)$ sobre a curva $5x^2 - 4y^2 = 80$.

7) Uma circunferência centrada no ponto $(4, -1)$ passa pelo foco da parábola $x^2 + 16y = 0$. Mostre que esta circunferência é tangente à diretriz da parábola.

8) Identifique e esboce as curvas abaixo. Determine todos os seus elementos, conforme o caso (focos, vértices, centro, eixos, diretriz, excentricidade, assíntotas) :

a) $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{2} = 1$ b) $\dfrac{(x+3)^2}{36} + \dfrac{(y-2)^2}{16} = 1$ c) $\dfrac{(x-2)^2}{16} - \dfrac{(y-2)^2}{25} = 1$

d) $y^2 = -12x$ e) $y^2 - 4x + 2y + 9 = 0$ f) $x^2 - 4x - 5y - 11 = 0$

g) $x^2 + y^2 - 2x = 0$ h) $x^2 - 2y = 0$ i) $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$

j) $x^2 + y^2 + 4y = 0$ l) $2x^2 - 3y^2 = 6$ m) $5y^2 - x^2 + 20 = 0$

n) $x^2 - y^2 - 6x - 2y = 28$ o) $4x^2 + 4y^2 = 10$

9) Uma corda da circunferência $x^2 + y^2 = 25$ encontra-se sobre a reta $x - 7y + 25 = 0$. Determine o comprimento da corda.

10) Determine os valores de m e q para que a equação $x^2 + qy^2 + 2mx - 1 = 0$ represente :

a) uma circunferência; b) uma elipse; c) uma parábola; d) uma hipérbole;
e) uma reta; f) duas retas; g) um conjunto vazio; h) um ponto

11) Calcule a área do triângulo formado pela reta $9x + 2y - 24 = 0$ e pelas assíntotas da hipérbole $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$. Esboce.

12) Determine a equação da elipse cujos focos são os vértices da cônica $x^2 - y^2 - 4y = 8$ e dois de seus vértices são os focos da cônica dada.

13) Escreva a equação do lugar geométrico de um ponto que se move de modo que sua distância à reta $x + 3 = 0$ é sempre duas unidades maior do que sua distância ao ponto $(1, 1)$. Esboce.

14) A base de um triângulo é fixa, sendo seus extremos os pontos $(3, 0)$ e $(-3, 0)$. Determine e identifique a equação do lugar geométrico do vértice oposto à base, se o produto das inclinações dos lados variáveis é sempre igual a 4. Esboce.

15) Uma parábola tem como eixo focal o eixo imaginário da hipérbole $y^2 - 9x^2 - 6y = 0$. Passa pelos focos da cônica dada e corta o eixo dos x no ponto $(1,0)$. Escreva a equação dessa parábola.

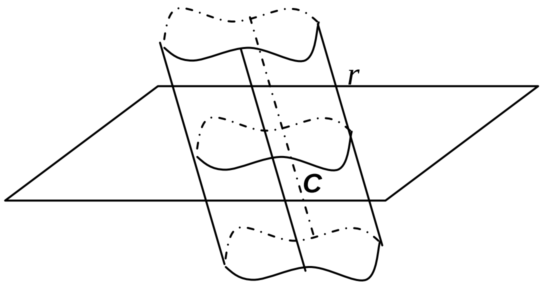
16) A elipse cujos focos são $(-3, 4)$ e $(5, 4)$ e a soma dos raios focais é 12 tem dois pontos cujos raios focais são todos iguais. Escreva a equação da reta que passa por esses dois pontos.

4.2 - AS QUÁDRICAS

Chamam-se ***quádricas*** as superfícies que podem ser representadas por equações do $2^{\underline{0}}$ grau nas três variáveis x , y e z . São elas: *as superfícies de revolução, as superfícies cônicas, as superfícies cilíndricas, a esfera, o elipsóide, dois tipos de parabolóides, dois tipos de hiperbolóides e o cone.* Estudaremos cada uma delas.

4.2.1 - Superfícies cilíndricas

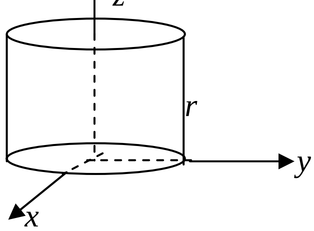
Chama-se ***superfície cilíndrica*** ou simplesmente ***cilindro***, à superfície gerada por uma reta *r* que se move, ao longo de uma curva ***C***, contida um plano perpendicular à reta *r*. A reta *r* chama-se ***geratriz*** do cilindro e a curva ***C*** chama-se ***diretriz***.



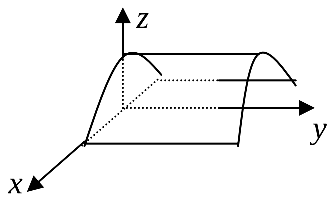
Aqui consideraremos apenas as superfícies cilíndricas cujas diretrizes *C* estão contidas em um dos planos coordenados. Assim, se a diretriz *C* estiver contida no plano *x0y*, isto é, $z = 0$, sua equação será uma expressão do tipo $f(x, y) = 0$ e $z = 0$. Um ponto $P = (x, y, z)$ pertencerá ao cilindro se, e somente se, suas coordenadas satisfizerem a equação $f(x, y) = 0$. Observe que neste caso a geratriz é uma reta *r* paralela ao eixo *0z*, que se transladará ortogonalmente sobre a curva *C*. Nessas condições, a equação do cilindro é $f(x, y) = 0$ (sem nenhum vínculo para a variável *z*). Se a diretriz *C* for uma cônica, obteremos os cilindros quádricos denominados cilindro circular, elíptico, hiperbólico e parabólico, conforme a diretriz for, respectivamente, uma circunferência, uma elipse, uma hipérbole, uma parábola.

Exemplos:

1) A equação $x^2 + y^2 = 1$ representa um *cilindro circular*, cuja diretriz é a circunferência $C: x^2 + y^2 = 1$, (uma cônica no plano *x0y*) e cuja geratriz é a reta *r* paralela ao eixo *0z*.



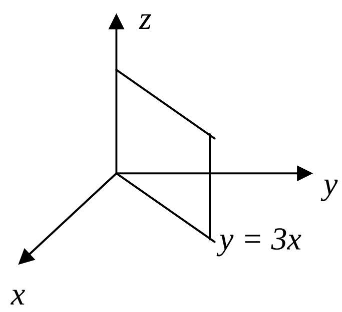
2) $z = 4 - x^2$ representa um *cilindro parabólico*, cuja diretriz é a parábola $C: z = 4 - x^2$, $y=0$ (uma cônica no plano *x0y*) , e cuja geratriz é a reta *r* paralela ao eixo *0y*.



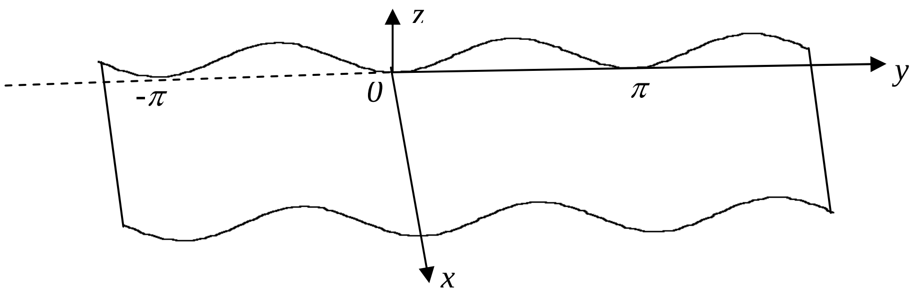
Observação: Se a curva diretriz não for uma cônica, por um processo análogo ao descrito no início deste tópico, obtemos uma superfície cilíndrica, mas que não será uma quádrica.

Exemplos:

1) A equação $3x - y = 0$ representa um cilindro plano, cuja diretriz é a reta C: $y = 3x$, $z = 0$, e cuja geratriz é uma reta paralela ao eixo $0z$. Esta é uma superfície cilíndrica, mas não é uma quádrica, pois na sua equação não aparece termo do segundo grau. Esta é outra maneira de caracterizar um plano sob certas condições.



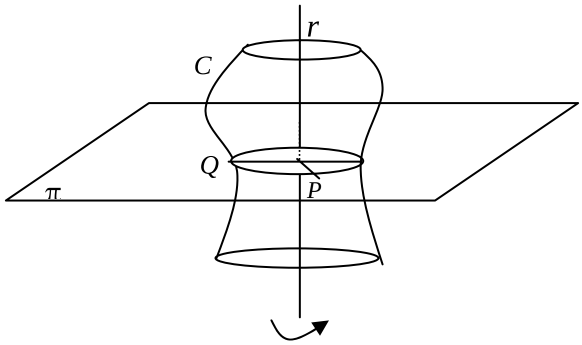
2) A equação $z = sen\ y$ representa uma superfície cilíndrica senoidal, cuja diretriz é a curva trigonométrica $z = sen\ y$, $x = 0$ e cuja geratriz é a reta r paralela ao eixo $0x$.



Esta é uma superfície cilíndrica, mas não é uma quádrica.

4.2.2 - Superfícies de revolução

Chama-se ***superfície de revolução*** à superfície gerada pela rotação (ou revolução) de uma curva plana C, chamada de *geratriz*, em torno de uma reta fixa r, dito *eixo de rotação*, situada no mesmo plano da curva C.



Se P é um ponto da superfície de revolução, traçando por P um plano π perpendicular ao eixo de rotação r, ele interceptará a superfície segundo uma circunferência de centro C sobre o eixo de rotação. Se Q é o ponto do plano π que pertence à curva geratriz C, então a equação geral da superfície de rotação é

$$\left\| \overrightarrow{PC} \right\| = \left\| \overrightarrow{QC} \right\|$$

Consideraremos apenas as superfícies de revolução cujas geratrizes estão contidas em um dos planos coordenados e cujos eixos de rotação são um dos eixos coordenados do plano em questão. Neste caso, expressamos a curva *C* por $y = f(z)$ e o ponto *Q* da curva *C* descreverá uma circunferência, de centro em *0z*, em um plano paralelo ao plano *x0y*, de equação $x^2 + y^2 = R^2$, onde o raio *R* é o valor da ordenada *y* do ponto *Q* de *C*. Como $y = f(z)$, vem $x^2 + y^2 = (f(z))^2$, que é a equação da superfície de revolução.

Exemplos:

1) A parábola $y^2 = 4cz, x = 0, c > 0$, está contida no plano *y0z*. Tomando, por exemplo, *0z* como eixo de rotação, cada um dos pontos *Q* da parábola descreverá uma circunferência em um plano paralelo ao plano *x0y*, dada por $x^2 + y^2 = R^2$ onde $R = y = f(z)$ de *C*. Como $y^2 = 4cz$, temos $x^2 + y^2 = 4cz$. Esta equação representa uma superfície de revolução chamada *parabolóide circular*, que estudaremos no §4. A geratriz é a parábola $y^2 = 4cz, x = 0$, sendo *0z* o eixo de revolução.(ver *Fig. 1*)

Observe que, estando a curva a *C* dada no plano *y0z*, poderíamos ter escolhido como eixo de rotação do eixo *0y*. Neste caso, ao fazermos a rotação, um ponto *Q* de *C* descreverá a circunferência $x^2 + z^2 = R^2$ em um plano paralelo a *x0z*, com $R = z = f(y)$ de *C*. Como $z = \dfrac{y^2}{4c}$ então $x^2 + z^2 = \dfrac{y^4}{16c^2}$ representa a superfície obtida. (observe que não é quádrica)

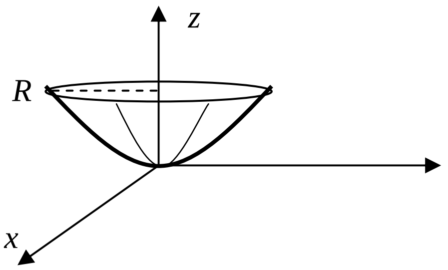


Fig. 1

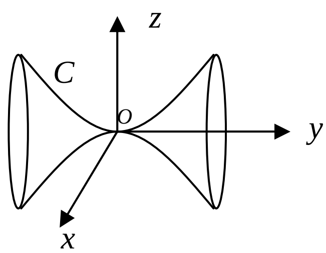


Fig. 2

2) A curva $z = my, x = 0$, é uma reta no plano *y0z*, que intercepta o eixo *0z* na origem. Tomando *0z* como eixo de rotação, cada ponto *Q* da reta dada descreverá uma circunferência em um plano paralelo ao plano *x0y*, de equação $x^2 + y^2 = R^2$. Aqui temos $R = y = f(z)$. Ora, de *C* temos $y = \dfrac{z}{m}$, donde a equação $x^2 + y^2 = \dfrac{z^2}{m^2}$, que representa um cone circular. *(Fig. 3)*

Poderíamos também ter escolhido *0y* como eixo de rotação. Neste caso, um ponto Q da reta C descreveria uma circunferência de equação $x^2 + z^2 = R^2$ e $R = z = f(y)$. Como em C, $z = my$, temos $x^2 + z^2 = m^2 y^2$ que é a equação de outro cone circular.

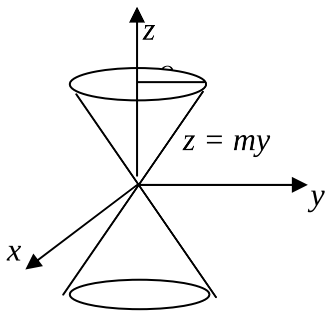


Fig. 3

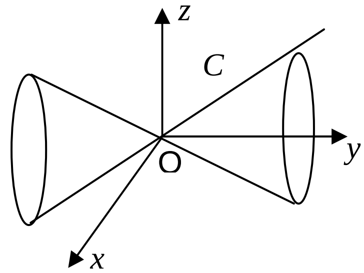


Fig. 4

Daremos um roteiro para identificar superfícies, a partir de uma equação dada. Nos restringiremos apenas aos casos de superfícies centradas na origem. Dada uma equação quadrática, identificaremos a superfície, que a mesma representa, seguindo as etapas abaixo..

1) Verificamos se a equação apresenta *no máximo uma* das três variáveis com expoente 1. Em caso afirmativo prosseguimos a pesquisa.

2) Determinamos as interseções da superfície com os três planos coordenados, obtendo curvas conhecidas.

3) A obtenção de duas curvas do mesmo tipo determina o nome genérico da quádrica.

4) O conhecimento da terceira curva-interseção qualifica a superfície.

5) Se ocorrer interseção vazia com algum plano coordenado e a equação só apresentar termos do $2^{\underline{0}}$ grau então a superfície terá duas folhas. Se a interseção com algum plano coordenado for vazia e a equação apresentar termo do $1^{\underline{0}}$ grau então é preciso fazer uma translação de eixos.

6) Determine as interseções da superfície com planos paralelos aos planos coordenados classificando as curvas obtidas.

7) Atenção especial deve ser dada as interseções da superfície com planos paralelos aos planos coordenados cujas interseções com a superfície resultou vazia ou pontual.

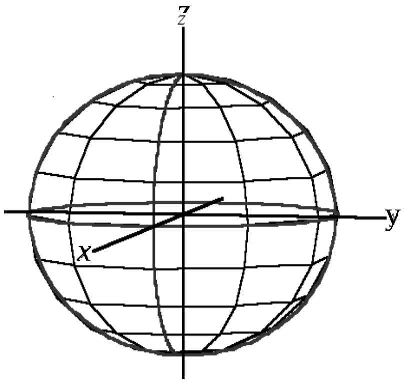
8) As interseções da superfície com os três eixos coordenados fornecem seus vértices (neste caso os eixos coordenados são os eixos da superfície).

9) Caso não se verifique a situação descrita no $1^{\underline{0}}$ item ou caso se verifique a segunda alternativa do item 5, após um conveniente ajuste ou completamento de quadrados fazemos uma translação de eixos, passando a operar, conforme necessário, com um novo sistema $\overline{Oxyz}$ dado por $\overline{x} = x - p$, $\overline{y} = y - q$, $\overline{z} = z - s$ e usamos então o roteiro acima exposto para classificar e localizar a superfície no novo sistema de eixos. Finalmente retornamos ao sistema de eixos

inicial pelas fórmulas $x = \overline{x} + p$, $y = \overline{y} + q$, $z = \overline{z} + s$ (processo análogo ao já desenvolvido com as cônicas)

4.2.3 - Esfera

A equação $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ representa uma ***esfera*** de centro na origem e raio r. A esfera é uma superfície simétrica em relação à origem, aos eixos e planos coordenados, isto é, se o ponto $P = (x, y, z)$ pertence à esfera, também os pontos $(-x, y, z)$, $(-x, -y, -z)$, $(x, -y, z)$, $(x, y, -z)$, $(-x, -y, z)$, $(-x, y, -z)$ e $(x, -y, -z)$ a ela pertencerão. As interseções com os planos coordenados são as circunferências $x^2 + y^2 = r^2$, com o plano $x0y$ $(z = 0)$, $x^2 + z^2 = r^2$, com o plano $x0z$ $(y = 0)$ e $y^2 + z^2 = r^2$, com o plano $y0z$ $(x = 0)$. Também são circunferências as interseções com planos paralelos aos planos coordenados. Se $|k| < r$, obtemos as circunferências $x^2 + y^2 = r^2 - k^2$, no plano $z = k$, $x^2 + z^2 = r^2 - k^2$ no plano $y = k$; $y^2 + z^2 = r^2 - k^2$, no plano $x = k$. Se $|k| > r$, as interseções com os planos $x = k$, $y = k$ e $z = k$ são vazias. As interseções da esfera com os eixos coordenados $0x$, $0y$ e $0z$ são os pontos $A_1 = (-r, 0, 0)$, $A_2 = (r, 0, 0)$, $B_1 = (0, -r, 0)$, $B_2 = (0, r, 0)$, $C_1 = (0, 0, -r)$ e $C_2 = (0, 0, r)$.



A equação

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 \qquad (*)$$

representa uma esfera de centro no ponto (x_0, y_0, z_0) e raio r. Fazendo a translação $\overline{x} = x - x_0$, $\overline{y} = y - y_0$, $\overline{z} = z - z_0$ obtemos

$$\overline{x}^2 + \overline{y}^2 + \overline{z}^2 = r^2$$

que é uma equação do tipo anterior . Da equação (*) vemos que a esfera é o conjunto de pontos $P = (x, y, z)$ do espaço $\Re^3$ cuja distância a um ponto fixo é constante.

Observação: Na equação de uma esfera, as três variáveis aparecem com expoente 2 e esses termos têm coeficientes iguais e positivos.

Exemplos:

1) A equação $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x + 8y + 2 = 0$ representa uma esfera. Completando os quadrados obtemos $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 4$, cujo centro é $C = (1, -2, 0)$ e raio $r = 2$.

2) A esfera de raio 1 e centro no ponto $(0, 1, 2)$ é dada pela equação $x^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 1$, ou seja, $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 4z + 4 = 0$

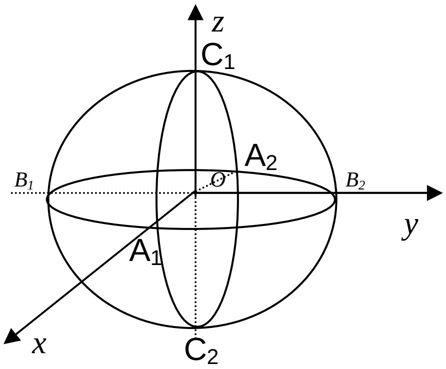
4.2.4 - Elipsóide

É a superfície representada pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

onde a, b e c são números reais positivos e representam os semi-eixos do elipsóide. A equação mostra que esta superfície é simétrica em relação à origem, aos planos e eixos coordenados.

As interseções com planos coordenados $x0y$, $x0z$, $y0z$ são, respectivamente, as elipses:



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ z=0;\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, y=0 \ \text{ e } \ \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ x=0$$

A interseção com o plano paralelo ao plano $x0y$, $z = k$, com $|k| < r$, é a elipse:

$$\frac{x^2}{a^2 d} + \frac{y^2}{b^2 d} = 1, \text{ com } d = 1 - \frac{k^2}{c^2}.$$

Analogamente para os planos paralelos aos outros planos coordenados. Se $|k| > c$, a interseção com o plano $z = k$ é vazia. Se $|k| > b$ ou se $|k| > a$, as interseções com os planos $y = b$ ou $x = a$ também serão vazias. Os vértices do elipsóide são os pontos de interseção com eixos coordenados: $A_1 = (a, 0, 0)$, $A_2 = (-a, 0, 0)$, $B_1 = (0, b, 0)$, $B_2 = (0, -b, 0)$, $C_1 = (0, 0, c)$ *e* $C_2 = (0, 0, -c)$. Se dois dos valores a, b e c são iguais, a interseção com o plano coordenado que relaciona esses números é uma circunferência e teremos um *elipsóide circular ou de revolução.*

Se $a = b = c$, as três interseções com os planos coordenados são circunferências, e teremos, portanto, uma esfera.

O elipsóide acima descrito está centrado na origem. Se, porém, seu centro fosse o ponto $C=(x_0, y_0, z_0)$, fazendo a translação de eixos $\bar{x} = x - x_0$, $\bar{y} = y - y_0$, $\bar{z} = z - z_0$ e utilizando o novo sistema de eixos $\overline{Oxyz}$, com $\bar{0} \equiv C, \overline{0x} // 0x, \overline{0y} // 0y, \overline{0z} // 0z$, obtemos o elipsóide:

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2}+\frac{\bar{y}^2}{b^2}+\frac{\bar{z}^2}{c^2}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$

Exemplo:

1) A equação $4x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 36 = 0$ representa um elipsóide. De fato, podemos reescrevê-la

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1$$

que é a forma canônica da equação do elipsóide (de centro na origem). Fazendo interseções com os planos coordenados obteremos:

1) com o plano $x0y$, isto é, $z = 0$, teremos a elipse: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$;

2) com o plano $x0z$, isto é, $y = 0$, teremos a elipse: $\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$;

2) com o plano $y0z$, isto é, $x = 0$, teremos a circunferência: $y^2+z^2=4$.

Como duas das interseções forneceram elipse, trata-se de um elipsóide. A última interseção mostra que se trata de um elipsóide circular ou de revolução.

4.2.5 - Parabolóides

São superfícies representadas por uma das equações

$$\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=cz\,,\ \pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{z^2}{b^2}=cy\,,\ \pm\frac{z^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=cx\,,$$

com $a>0, b>0, c\neq 0$. Observamos que o expoente de duas das variáveis é *2*, enquanto a terceira variável aparece apenas com expoente *1*. Se os termos quadráticos têm o mesmo sinal, trata-se de um *parabolóide elíptico* ou *parabolóide circular* ou *de revolução* quando $a = b$. Se os termos quadráticos têm sinais contrários temos um *parabolóide hiperbólico.* Estudaremos alguns destes casos.

4.2.5.1 - Parabolóide elíptico ou circular

Consideremos o parabolóide elíptico ou circular de equação

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz$$

com $a>0, b>0, c\neq 0$. É simétrica em relação aos planos coordenados $x0z$, $y0z$ e ao eixo $0z$. Se o ponto $P = (x, y, z)$ pertence à superfície, também os pontos $(-x, y, z)$, (x, y, z), $(x, -y, z)$ e $(-x, -y, z)$ a ela pertencerão. Não é simétrica em relação ao plano $x0y$, pois se (x, y, z) está na superfície, o mesmo não acontece com $(x, y, -z)$. O eixo $0z$ será o eixo de simetria.

Vamos analisar os casos em que $c > 0$. As interseções com os planos coordenados são:

1) $y = 0$ (plano *xz*), temos *parábola* $x^2=a^2cz$, com eixo de simetria $0z$.

2) $x = 0$ (plano *yz*), temos *parábola* $y^2=b^2cz$, com eixo de simetria $0z$.

3) $z = 0$ temos o ponto $(0, 0, 0)$, pois $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$, somente se, $x = 0$ e $y = 0$.

As interseções com planos paralelos aos planos coordenados são:

1) $z=k>0$, $\frac{x^2}{a^2ck}+\frac{y^2}{b^2ck}=1$ - temos uma elipse no plano *xy*.

2) $y = k,\ x^2 = a^2 c\left(z - \dfrac{k^2}{cb^2}\right)$ - temos uma parábola no plano *xz*.

3) $x = k,\ y^2 = b^2 c\left(z - \dfrac{k^2}{ca^2}\right)$ - temos novamente uma parábola, agora no plano *yz*.

Observe que no caso $z = k < 0$, o termo da direita da igualdade é positivo enquanto o termo da esquerda é negativo e portanto a interseção será vazia. Essas interseções explicam o nome da superfície, parabolóide elíptico.

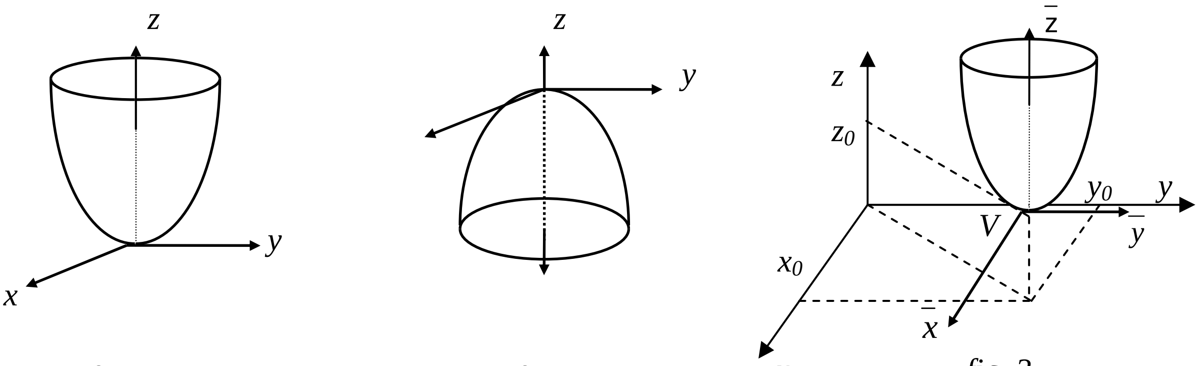


fig. 1 *fig. 2* *fig. 3*

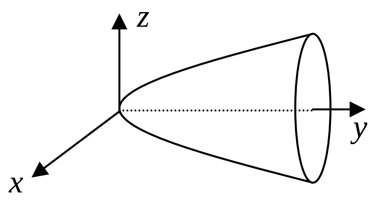
Caso $c < 0$, a mesma equação representa a superfície inteiramente contida na região $z \leq 0$, como mostra a *fig. 2*. Se em vez de elipse a interseção com um dos planos coordenados fosse uma circunferência, teríamos um parabolóide circular ou de revolução, e neste caso temos $a = b$. Observe que nos dois acima estudados o vértice do parabolóide é a origem do sistema. Se o vértice se situasse no ponto $V = (x_0, y_0, z_0)$, mudando para um novo sistema de eixos, $\overline{Oxyz}$, $\bar{0} \equiv V$, $\overline{0x} // 0x$, $\overline{0y} // 0y$, $\overline{0z} // 0z$ e $\bar{x} = x - x_0$, $\bar{y} = y - y_0$, $\bar{z} = z - z_0$ obteríamos:

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = c\bar{z} \Rightarrow \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = c(z - z_0)$$

As equações $\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = ax$ e $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = by$ representam parabolóides elípticos cujos eixos de simetria são, respectivamente, os eixos coordenados $0x$ e $0y$:

Exemplo:

1) A equação $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 4y$ representa um parabolóide elíptico. De fato, as interseções com os planos coordenados são as curvas $z^2 = 16y$, que é uma parábola no plano *y0z,*



tendo *0y* como eixo de simetria e $x^2 = 36y$, que também é uma parábola no plano *x0y*, tendo *0y* com eixo de simetria. Desse modo, temos um parabolóide com vértice na origem. As interseções com planos $y = k > 0$, são as *elipses* $\frac{x^2}{36k} + \frac{z^2}{16k} = 1$. Trata-se, portanto, de um parabolóide elíptico, tendo *0y* como eixo de simetria.

4.2.5.2 - Parabolóide hiperbólico

Vamos considerar a superfície de equação $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz$, com $a>0, b>0, c\neq 0$, onde fizemos esta distribuição de sinais por facilidade de desenho. Aqui as simetrias são apenas em relação aos planos *x0z*, *y0z* e ao eixo *0z*. Vamos analisar o caso em que $c > 0$, começando pelas interseções com os planos coordenados:

$1)\, x0z: y = 0,\ x^2 = -a^2cz$ - temos uma parábola com eixo de simetria *0z* e concavidade voltada para a parte negativa de *0z*.

$2)\, y0z: x=0, y^2=b^2cz$ - temos uma parábola com eixo de simetria *0z* e concavidade voltada para a parte positiva de *0z* .

$x0y: z = 0, y = \pm\frac{b}{a}x$ - neste caso temos duas retas

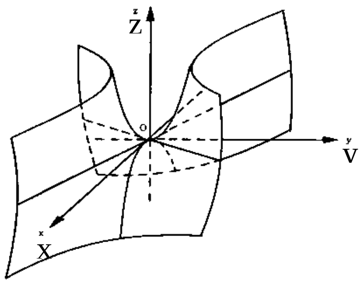


fig. 4

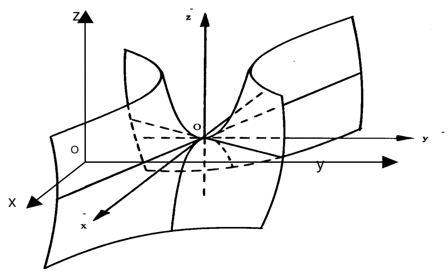


fig.5

Vejamos a interseção com planos paralelos ao plano *x0y*. Se $z=k$, temos a hipérbole, $-\frac{x^2}{a^2ck}+\frac{y^2}{b^2ck}=1$ (*fig. 4).* No caso em que $c < 0$, obteríamos a mesma figura, porém virada para baixo. Observe que nos dois casos acima estudados ($c > 0$ e $c < 0$) as duas parábolas interseções com os planos *x0z* e *y0z* tem seus vértices na origem.

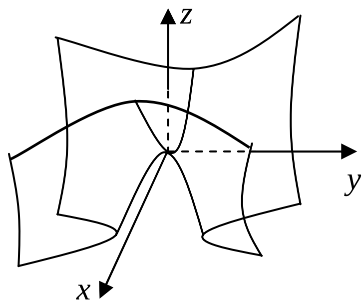
Caso esse vértice comum esteja no ponto $V=(x_0, y_0, z_0)$, mediante a translação $\bar{x} = x - x_0$, $\bar{y} = y - y_0$, $\bar{z} = z - z_0$, com $\bar{0} \equiv V$, $\overline{0x} \,//\, 0x$, $\overline{0y} \,//\, 0y$ e $\overline{0z} \,//\, 0z$, obtemos a equação do parabolóide hiperbólico (*fig. 5*)

$$-\frac{\bar{x}^2}{a^2}+\frac{\bar{y}^2}{b^2}=c\bar{z} \quad \text{ou} \quad -\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=c(z-z_0)$$

As equações $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = by$ e $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = ax$ também representam parabolóides hiperbólicos.

Exemplo:

1) A equação $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = z$ representa um parabolóide hiperbólico ou sela. De fato, as interseções com os planos coordenados são:



1) $x=0, y^2 = -9z$ - temos uma parábola no plano *y0z*, com a concavidade voltada para a parte negativa de *0z*, seu eixo focal.

2) $y=0, x^2 = 4z$ - temos uma parábola no plano *x0z* , com concavidade voltada para a parte positiva de *0z*, seu eixo focal.

3) $z=0,\ y = \pm\frac{3}{2}x$ - duas retas

4) $z = k^2 \neq 0,\ \frac{x^2}{4k^2} - \frac{y^2}{9k^2} = 1$ - hipérbole no plano paralelo a *x0y* e eixo focal paralelo a *0x*

5) $z = -k^2 \neq 0,\ \frac{y^2}{9k^2} - \frac{x^2}{4k^2} = 1$ - hipérbole no plano paralelo a *x0y* e eixo focal paralelo a *0y*.

Trata-se então de um parabolóide hiperbólico ou sela .

4.2.6 - Hiperbolóides

São superfícies representadas por uma das equações

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \pm 1, \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \pm 1$$

com $a, b, c > 0$. Aqui as três variáveis se apresentam com expoente 2. As equações com apenas um sinal negativo representam os *hiperbolóides de uma folha.* As equações com dois sinais negativos representam os *hiperbolóides de duas folhas*.

4.2.6.1 - Hiperbolóide de uma folha

Consideremos a superfície de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, com $a, b, c > 0$. Observamos que é uma superfície simétrica em relação à origem, aos planos e eixos coordenados. Vejamos suas interseções com os planos coordenados:

1) $x0z:\ y = 0,\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ - temos uma hipérbole com eixo focal $0x$

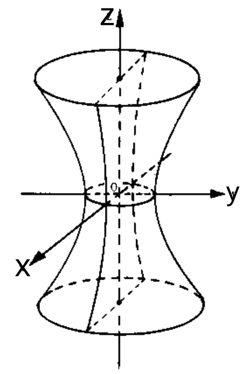
2) $y0z$: $x = 0, \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ - temos uma hipérbole com eixo focal *0y*.

3) $x0y$: $z = 0, \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ - temos uma elipse.

Vejamos as interseções com planos paralelos aos planos coordenados :

4) $y = k = \pm b,\ z = \pm \dfrac{c}{a} x$ - temos duas retas

5) $y = k \neq \pm b, \dfrac{x^2}{a^2\left(1 - \dfrac{k^2}{b^2}\right)} - \dfrac{z^2}{c^2\left(1 - \dfrac{k^2}{b^2}\right)} = 1$ - hipérbole



6) Analogamente para os planos $x = k$, isto é, teremos também duas retas e uma hipérbole na interseção dos planos $x = k = \pm a$ e $x = k \neq \pm a$, respectivamente, com o hiperbolóide.

7) $z = k, \dfrac{x^2}{a^2\left(1 + \dfrac{k^2}{c^2}\right)} + \dfrac{y^2}{b^2\left(1 + \dfrac{k^2}{c^2}\right)} = 1$ - elipse

Temos assim um hiperbolóide elíptico de uma folha. Se na equação dada tivermos $a = b$, a superfície intercepta o plano *x0y* e planos a eles paralelos segundo circunferências. Assim, teremos um hiperbolóide circular (ou de revolução) de uma folha. A variável que se apresenta com sinal diferente das outras indica o eixo de simetria da superfície. Nos casos descritos, as hipérboles têm centro na origem. Se, por acaso, elas fossem centradas no ponto $C = (x_0, y_0, z_0)$, fazendo a translação $\bar{x} = x - x_0$, $\bar{y} = y - y_0$, $\bar{z} = z - z_0$ e usando o sistema $\overline{0xyz}$, com $\bar{0} \equiv C$, $\overline{0x} // 0x$, $\overline{0y} // 0y$, $\overline{0z} // 0z$, obteríamos um hiperbolóide de uma folha de equação

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} - \frac{\bar{z}^2}{c^2} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

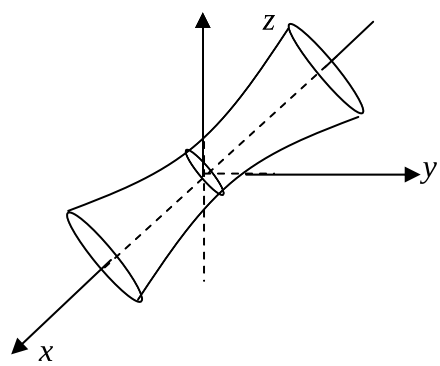
Exemplo:

1) A equação $-\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{4} = 1$ representa uma superfície com as seguintes características:

1) $y = 0, \dfrac{z^2}{4} - \dfrac{x^2}{9} = 1$ - hipérbole no plano *x0z*, com eixo focal *0z*.

2) $z = 0, \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{9} = 1$ - hipérbole no plano *x0y*, com eixo focal *0y*.

3) $x = 0, y^2 + z^2 = 4$ - circunferência no plano y0z de centro na origem e raio 2.



Temos então um hiperbolóide de uma folha, circular ou revolução

4.2.6.2 - Hiperbolóide de duas folhas

Vamos considerar a superfície de equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$, com $a\ ,\ b,\ c > 0$, onde a distribuição de sinais atende as conveniências do desenho. É simétrica em relação à origem, aos planos e eixos coordenados. Vejamos as interseções com os planos coordenados e as interseções com planos paralelos ao plano $x0y$:

1) $x0z:\ y = 0,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$ - vazia

2) $y0z : x = 0,\ \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ - hipérbole com eixo focal $0y$.

3) $x0y:\ z = 0,\ \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ - hipérbole com eixo focal $0y$.

4) $y = \pm b$ - temos os vértices $V_1 = (0, b, 0)$ e $V_2 = (0,-b, 0)$

5) $y = k, \left|k\right| > c,\ \frac{x^2}{a^2\left(\frac{k^2}{b^2} - 1\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(\frac{k^2}{b^2} - 1\right)} = 1$ - elipses

6) $y = k, \left|k\right| < c$ - vazia

Assim, a superfície tem duas folhas *(fig. 6)*, uma folha na região $y \le -b$ e a outra na região $y \ge b$. Portanto, temos um hiperbolóide elíptico de duas folhas. Se $a = b$, as interseções com os planos $y = k, \left|k\right| > b$, são circunferências e teremos então um hiperbolóide circular (ou de revolução) de duas folhas. A variável que se apresenta com sinal diferente das demais indica o eixo de simetria da superfície. Observe que as interseções com os planos coordenados $x0y$ e $y0z$ são hipérboles com centro na origem. Se elas fossem centradas no ponto $C=(x_0, y_0, z_0)$, fazendo a translação $\bar{x} = x - x_0$, $\bar{y} = y - y_0$, $\bar{z} = z - z_0$ e usando o sistema $\overline{0xyz}$, com $\bar{0} \equiv C$, $\overline{0x} // 0x$, $\overline{0y} // 0y$, $\overline{0z} // 0z$, obteríamos um hiperbolóide de duas folhas de equação *(fig. 7)*

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2} + \frac{\bar{z}^2}{c^2} = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = -1$$

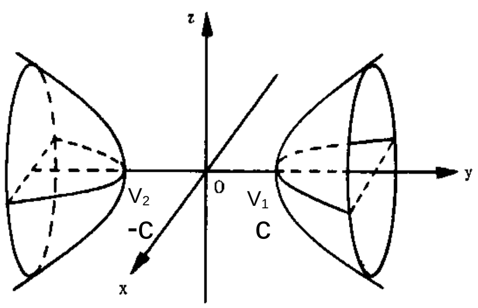


fig. 6

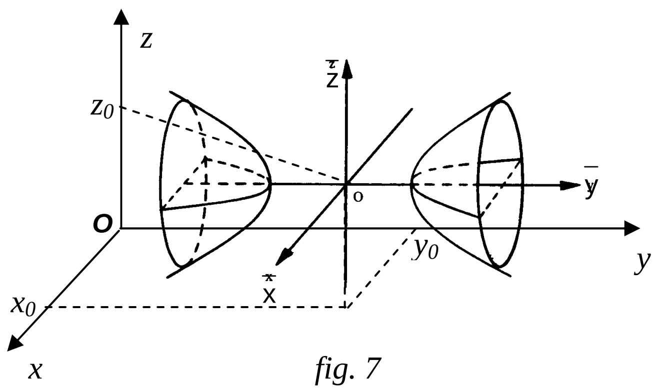


fig. 7

Exemplo:

1) Vamos classificar e esboçar a superfície de equação $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$.

Solução: De acordo com o que vimos no início deste parágrafo, nesta equação as três variáveis são quadráticas e existem dois sinais negativos. Devemos ter um hiperbolóide de duas folhas. Vejamos as interseções com os planos coordenados e com planos paralelos aos planos coordenados:

1) $y = 0, \frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1$ - hipérbole no plano $x0z$, com eixo focal $0x$.

2) $z = 0, \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ - hipérbole no plano $x0y$, com eixo focal $0x$.

3) $x=0, \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = -1$ - vazia

4) $x = k$, com $-2 < k < 2$, $\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = \frac{k^2}{4} - 1$. A interseção é vazia, pois $\frac{k^2}{4} - 1 < 0$.

4) $x = \pm 2 \Rightarrow y = 0$ e $z = 0$ - vértices $V_1 = (-2, 0, 0)$ e $V_2 = (2, 0, 0)$.

5) $x = k$, $k < -2$ ou $k > 2$, $\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = \frac{k^2}{4} - 1$ - elipses

Temos então um hiperbolóide elíptico de duas folhas.*(fig. 8)*

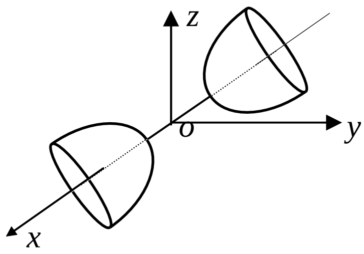


fig. 8

4.2.7 - Cone elíptico

É a superfície de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, com $a, b, c > 0$. É simétrica em relação à origem, aos planos e eixos coordenados. Vamos estudar as interseções com os planos coordenados e com planos paralelos aos planos coordenados:

1) $x0z:\ y = 0,\ z = \pm \frac{c}{a}x$ - duas retas

2) $y0z;\ x = 0,\ z = \pm \frac{c}{b}y$ - duas retas

3) x0y: z = 0, x = 0, y = 0 – um ponto $V = (0, 0, 0)$.

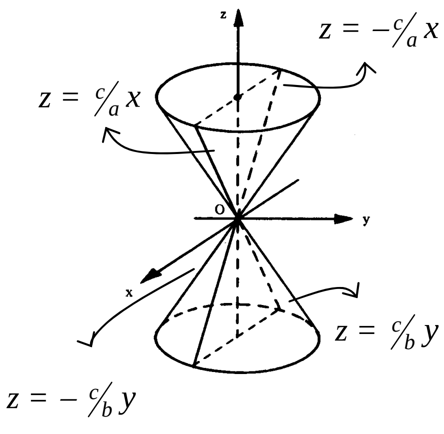


fig. 9

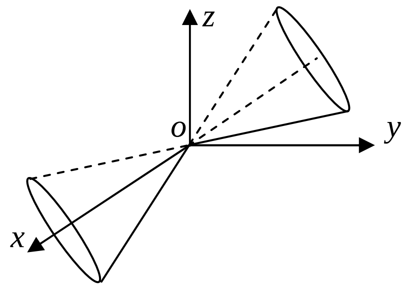
4) $z = k \neq 0,\ \frac{x^2}{\frac{a^2k^2}{c^2}} + \frac{y^2}{\frac{b^2k^2}{c^2}} = 1$ - elipses (circunferências se *a = b).*

Temos um cone elíptico ou de revolução com vértices na origem (*fig. 9*). A variável que aparece com sinal diferente das demais indica o eixo simetria. Se $a = b$ as interseções com os planos $z=k\neq 0$ são circunferências e teremos um cone circular (ou de revolução). Se o vértice do cone estiver no ponto $V=(x_0,y_0,z_0)$ e o eixo de simetria for a reta $z = z_0$ fazendo a translação $\overline{x} = x-x_0$, $\overline{y} = y-y_0$, $\overline{z} = z-z_0$, e usando o novo sistema de eixos $\overline{0xyz}$, com $\overline{0}\equiv V$, $\overline{0x}\,//\,0x$, $\overline{0y}\,//\,0y$, $\overline{0z}\,//\,0z$ obtemos a equação do cone

$$\frac{\overline{x}^2}{a^2}+\frac{\overline{y}^2}{b^2}-\frac{\overline{z}^2}{c^2}=0 \quad \text{ou} \quad \frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=0$$

Exemplo:

1) A equação $-x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=0$ representa um cone tendo como eixo de simetria, o eixo *0x*. De fato, analisando as interseções com os planos coordenados, obtemos:



1) $x=0,\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=0$ - um ponto: $V = (0, 0, 0)$

2) $y = 0, z = \pm 3x$ - duas retas no plano *x0z*.

3) $z = 0, y = \pm 2x$ - duas retas no plano x*0y*.

4) $x=k,\ \frac{y^2}{4k^2}+\frac{z^2}{9k^2}=1$ - elipses .

4.2.8 - Exercícios resolvidos

Nos exercícios abaixo, identifique, descreva e esboce as superfícies dadas.

1) $x^2+y^2+z^2-2z=0$

Solução: Todas as variáveis apresentam-se com a maior potência igual a 2, e esses termos têm coeficientes iguais. Além disso, uma das variáveis também apresenta um termo do 1º grau, e por completamento de quadrado, obtemos:

$$x^2+y^2+(z-1)^2=1$$

Trata-se de uma esfera de centro $C = (0, 0, 1)$ e raio 1(esboço do gráfico a cargo do leitor), cujas interseções com os planos coordenados são:

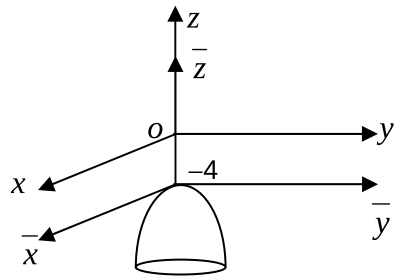
a) $x0y:\ z=0,\ x^2+y^2=0\ -\ V=(0,0,0)$ - um ponto

b) $x0z:\ y=0,\ x^2+(z-1)^2=1$ - uma circunferência

c) $y0z:\ x=0, y^2+(z-1)^2=1$ - circunferência

2) $x^2 + y^2 = -(4 - z)$

Solução: Fazendo $\bar{z} = 4 - z$, $\bar{x} = x$ e $\bar{y} = y$ vem que $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = -\bar{z}$, no sistema $\overline{x0y}$, onde $\bar{0} = (0, 0, 4)$ As interseções com os planos coordenados são:



a) $\overline{x0y}$: $\bar{y} = 0$, $\bar{x}^2 = -\bar{z}$ - parábola com foco em $\overline{0z}$ e concavidade voltada para a parte negativa de $\overline{0z}$.

b) $\overline{x0z}$: $\bar{x} = 0$, $\bar{y}^2 = -\bar{z}$ - parábola com foco em $\overline{0z}$ e concavidade voltada para a parte negativa de $\overline{0z}$.

Trata-se então de um parabolóide . Vejamos de que tipo :

c) $\overline{x0y}$: $\bar{z} = 0$, $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 0$ - um ponto $V = (0,0,0)$

d) $\bar{z} = k > 0$ - interseção vazia. Logo a superfície está situada na região $\bar{z} \leq 0$.

e) $\bar{z} = k < 0$, $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = (-k)$ - circunferência de raio $\sqrt{-k}$.

Concluímos que a superfície é um *parabolóide circular* ou de revolução, que corta o eixo *0z* no ponto *(0, 0, 4)* e tem a concavidade voltada para baixo.

3) $x^2 - y^2 + z^2 = -1$

Solução: As três variáveis se apresentam com expoente 2 e há dois sinais negativos e dois positivos. Portanto temos um hiperbolóide de duas folhas. Vejamos suas interseções com os planos coordenados :

a) $x0y$: $z = 0$, $y^2 - x^2 = 1$ - hipérbole com focos sobre o eixo *0y*.

b) $x0z$: $y = 0$, $x^2 + y^2 = -1$ - vazia

c) $y0z$: $x = 0$, $y^2 - z^2 = 1$- hipérbole com focos sobre o eixo *0y*.

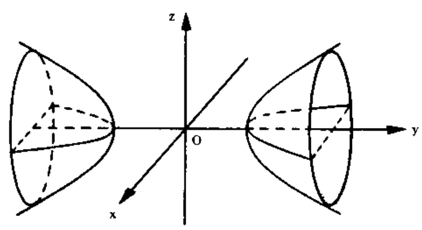


fig. 10

Interseções com planos paralelos ao plano *x0z*.

d) $y = q$, $x^2 + z^2 = q^2 - 1$

i) se $|q| < 1$, a interseção é vazia ;

ii) se $|q| = 1$, temos os pontos *(0 , -1, 0)* e *(0, 1, 0)*

iii) se $|q| > 1$, temos as circunferências $x^2 + z^2 = q^2 - 1$, de centro *(0, q, 0)* e raio $\sqrt{q^2 - 1}$.

Logo , trata-se de um hiperbolóide (ou de revolução) de duas folhas. (*fig. 10*)

4) $x^2 - y^2 + z^2 = 1$

Solução: As três variáveis apresentam expoente 2 e há apenas um sinal negativo. Portanto temos um hiperbolóide de uma folha. Vejamos as interseções com
os planos coordenados :

1) $x0y:\ z = 0,\ x^2 - y^2 = 1$ - hipérbole com vértices em $0x$

2) $x0z:\ x = 0,\ z^2 - y^2 = 1$ - hipérbole com vértices em $0z$

3) $x0y:\ y = 0,\ x^2 + z^2 = 1$ - circunferência de raio 1 e centro na origem.

Temos um hiperbolóide de uma folha circular. (*fig. 11*)

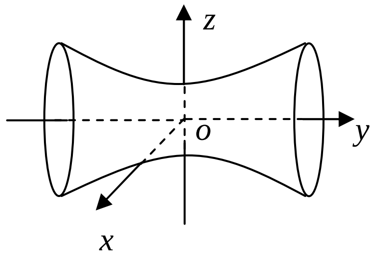


fig.11

5) $x^2 - y^2 + z^2 = 0$

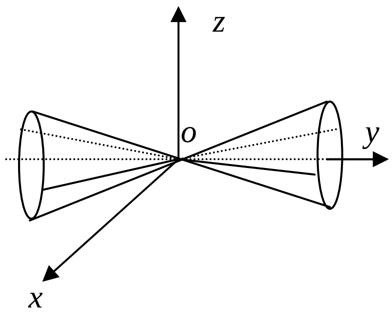
Solução: As três variáveis apresentam-se com potência 2, e só há um sinal negativo. No entanto, o termo independente é nulo. Trata-se de um cone (compare com os dois exercícios anteriores). Determinemos suas interseções com os planos coordenados e planos paralelos aos planos coordenados:

1) $x0y: z = 0, y = \pm x$ - duas retas

2) $y0z:\ x = 0,\ z = \pm y$ - duas retas

3) $x0z: y = 0, x^2 + z^2 = 0$ - um ponto V = (0 , 0, 0).

4) $y = k: x^2 + z^2 = k^2$ - circunferência de centro na origem e raio k.



Temos então um cone circular (ou de revolução) de vértice na origem e tendo $0y$ como eixo de revolução.

6) $x^2 - z^2 = y$

Solução: Observe que duas variáveis apresentam-se com potência 2 e uma tem potência 1. Trata-se de um parabolóide. Determinemos suas interseções com os planos coordenados e planos paralelos aos planos coordenados:

1) $x0y:\ z = 0,\ y = x^2$ - parábola com foco em 0y e concavidade voltada para a parte positiva do eixo $0y$.

2) $y0z:\ x = 0, y = -z^2$- parábola com foco em $0z$ e concavidade voltada para a parte negativa do eixo $0z$.

3) $x0z:\ y = 0, x^2 - z^2 = 0$ - duas retas $z = \pm x$.

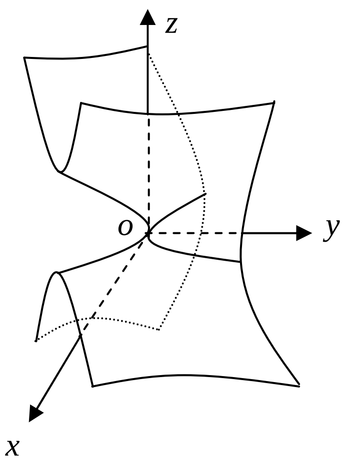


fig. 12

4) $y = k^2$, $\frac{x^2}{k^2} - \frac{z^2}{k^2} = 1$ - hipérbole

5) $y = -k^2$, $\frac{z^2}{k^2} - \frac{x^2}{k^2} = 1$ - hipérbole

Temos um parabolóide hiperbólico. *(fig. 12)*

7) Determine as possibilidades de interseção do hiperbolóide de uma folha $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ com o plano $x + mz = 1$, dependendo dos valores de m.

Solução: Da equação do plano temos $x = 1 - mz$. Substituindo na equação do hiperbolóide, vem que $y^2 + (m^2 - 1)z^2 - 2mz + 2 = 0$. Logo,

7.1) *Se* $m = \pm 1, y^2 = \pm 2z - 2$ - parábolas com foco no eixo $0z$.

7.2) Se $m \neq \pm 1$, obtemos a equação

$$y^2 + (m^2 - 1)\left(z - \frac{m}{m^2 - 1}\right)^2 = \frac{2 - m^2}{m^2 - 1} \qquad (*)$$

cujo segundo membro pode se anular, ser positivo ou negativo.

7.3) Se $\frac{2 - m^2}{m^2 - 1} = 0$, isto é, $m = \pm\sqrt{2}$, temos $y^2 + \left(z \mp \sqrt{2}\right)^2 = 0$. Isto só é possível se $y = 0$ e $z = \pm\sqrt{2}$. Como $x = 1 - mz$, obtemos quatro pontos: $(-1, 0, -\sqrt{2})$, $(-1, 0, \sqrt{2})$, $(3, 0, -\sqrt{2})$, $(3, 0, \sqrt{2})$.

7.4) Se $\frac{2 - m^2}{m^2 - 1} > 0$ teremos uma elipse, o que ocorrerá apenas se $2 - m^2 > 0$ e $m^2 - 1 > 0$ ou seja, $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$ e $m < -1$ ou $m > 1$. Portanto, se $-\sqrt{2} < m < -1$ ou $1 < m < \sqrt{2}$, teremos elipses. Se $2 - m^2 < 0$ e $m^2 - 1 < 0$, deveríamos ter $m < -\sqrt{2}$ ou $m > \sqrt{2}$ e $-1 < m < 1$, o que é impossível.

7.5) $\frac{2 - m^2}{m^2 - 1} < 0$ em duas situações :

7.5.1) $2 - m^2 > 0 \Rightarrow -\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$ e $m^2 - 1 < 0 \Rightarrow -1 < m < 1$. Logo $|m| < 1$ e teremos uma hipérbole que não corta eixo $0y$.

7.5.2) $2 - m^2 < 0 \Rightarrow m < -\sqrt{2}$ ou $m > \sqrt{2}$ e $m^2 - 1 > 0 \Rightarrow m < -1$ *ou* $m > 1$. Logo $|m| > \sqrt{2}$.

Esta situação, porém é impossível, pois teríamos que a expressão (*) seria positiva de um lado e negativa do outro, o que é um absurdo. Logo, se $|m| > \sqrt{2}$ a interseção é vazia .

Em resumo temos:

1) Se $m=1$ ou $m=-1$ teremos as parábolas $y^2=2(z-1)$ e $y^2=-2(z+1)$.

2) Se $m=\pm\sqrt{2}$ teremos quatro pontos: $(-1,0,\pm\sqrt{2})$ e $(3,0,\pm\sqrt{2})$.

3) Se $-\sqrt{2}<m<-1$ ou $1<m<\sqrt{2}$, temos uma elipse.

4) Se $|m|<1$, teremos uma hipérbole.

5) Se $|m|>\sqrt{2}$, a interseção é vazia.

6) Não existe m tal que a interseção seja circunferência.

7) Não existe m tal que a interseção seja duas retas.

8) Escreva as equações dos planos tangentes à esfera $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25$ e paralelo ao plano $4x+3z-17=0$.

Solução: Os planos pedidos, sendo paralelos ao plano $\pi: 4x+3z-17=0$, admitem um mesmo vetor normal, $\vec{n}=4\vec{i}+3\vec{k}$. A reta que passa pelo centro da esfera $C = (3, -2, 1)$ e é paralela a $\vec{n}$, cuja equação é $x=3+4t, y=-2,\ z = 1 + 3t$, intercepta a esfera em dois pontos pelos quais passam os planos procurados, normais a $\vec{n}$. Vamos determinar a interseção desta reta com a esfera. Então

$$(3+4t-3)^2+(-2+2)^2+(1+3t-1)^2=25 \quad \Rightarrow \quad t=\pm 1.$$

Se $t = 1$ obtemos $x = 7$, $y = -2$ e $z = 4$, ou seja, se $t = 1$ a reta intercepta a esfera no ponto $P_1 = (7, -2, 4)$. Se $t = -1$, obteremos o ponto $P_2 = (-1, -2, -2)$. Portanto a equação do plano que passa por P_1 e é normal a $\vec{n}$ será:

$$4(x + 1) + 3(z - 4) = 0 \text{ ou } 4x + 3z - 40 = 0.$$

A equação do plano que passa por P_2 e é normal a $\vec{n}$ será:

$$4(x + 1) + 3(z + 2) = 0 \text{ ou } 4x + 3z + 10 = 0.$$

Assim, os planos tangentes procurados são : $4x + 3z - 40 = 0$ e $4x + 3z + 10 = 0$.

4.2.9 - Exercícios propostos

1) Discuta, identifique e esboce as superfícies :

a) $y^2+z^2=4$

b) $9x^2-9y^2=36$

c) $x^2+4z^2=4z$

d) $x^2+8y=0$

e) $z=|y-2|$

f) $y=3$

2) Identifique, discuta e esboce as superfícies de equações :

a) $x^2+y^2+z^2=1$

f) $x^2-y^2+z^2=0$

l) $4y=x^2+2z^2$

b) $9x^2-4y^2=36+4z^2$ g) $x^2+y^2-4x-6y-18z+13=0$ m) $x^2-9y^2=9z^2$

c) $y^2-4x=0$ h) $x^2-9y^2=0$ n) $9x^2+4z^2+36y^2=0$

d) $x^2+z^2=4y^2$ i) $x^2=2-2z-8y^2$ o) $x^2-9y^2=9z^2$

e) $x^2-y^2+z=0$ j) $x^2-9y^2=9z$ p) $x^2-4=0$

3) Escreva a equação da esfera cuja diâmetro é o segmento que une os pontos *(1, 2, 3)* e *(2, -1, 0).*

4) A reta $y = 3x$, $z = 0$, gira em torno do eixo $0x$ determinando uma superfície. Escreva a equação dessa superfície e identifique.

5) Mostre que a equação $y^2-z^2=0$ representa dois planos que se interceptam. Esboce. Obtenha a interseção desses planos.

6) Obtenha as equações paramétricas da reta que contém o diâmetro da esfera $x^2+y^2+z^2+2x-6y+z=11$ que é perpendicular ao plano $5x-y+2z=17$.

7) Escreva as equações dos planos tangentes à superfície $x^2+y^2+z^2=9$ e paralelos ao plano $x + 2y + -2z + 15 = 0$.

8) Determine os valores de m para os quais a interseção do plano $x + my - 2 = 0$ com o parabolóide elíptico $\frac{x^2}{2}+\frac{z^2}{3}=y$ seja :

a) uma parábola b) uma circunferência c) uma elipse d) uma hipérbole

e) um ponto f) duas retas g) uma reta h) vazia

9) Determine condições sobre as constantes a, b e c de modo que a superfície $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ passe a ser obtida pela rotação, em torno do eixo $0x$, de uma hipérbole do plano $x0z$, com focos sobre o eixo $0z$. Identifique e esboce a superfície obtida e a curva geratriz.

10) Escreva a equação do cilindro circunscrito à esfera $x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z=3$, e cujas geratriz são paralelas ao eixo $0z$.

11) Determine a equação e identifique a superfície gerada pela rotação da reta $z = x, y = 2$ em torno da reta $x = 0$, $y = 2$.

12) Os cilindros $x^2+z^2+4x-6z+9=0$ e $y^2+z^2-2y-6z+6=0$ são circunscritos à mesma esfera. Determine a equação dessa esfera.

13) Uma esfera tem centro sobre o eixo $0z$ e no plano $2x - 3y + 4z = 6$, e é tangente ao plano $x0y$. Escreva sua equação.

14) Determine a equação da esfera cujo centro é o ponto $(3, 2, -2)$ e que é tangente ao plano $x + 3y - 2z + 1 = 0.$

Respostas dos Exercícios

Capítulo 1

Seção 1.3.7

1) $AB + C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 13 & 4 & 8 \\ 6 & -19 & -12 \end{bmatrix}$; $BC = \begin{bmatrix} -7 & -1 & 6 \\ 14 & -5 & 19 \end{bmatrix}$

$C.B$, $C.B^{t}.D - BA$, $AB + BA$ – não tem solução.

2) a) A, B e C são matrizes diagonais

2) b) $a = b = c = 0$

2) c) $x = \frac{1}{3}$, $y = 1$, $z = \frac{1}{2}$

2) d) $\alpha = -\frac{2}{3}$, $\beta = -3$, $\gamma = -\frac{1}{2}$

3) $x = 1$ ou $x = -2$ e $y = 3$ ou $y = -3$

4) $A = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$ 5) a) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ 5) b) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ 6) $A = \begin{bmatrix} a & a \\ -a & -a \end{bmatrix}$

Seção 1.9.2

1) $a = 4$, $b = 0$ e $c = 2$

2) a) $x = \frac{8}{3}$, $y = \frac{1}{3}$, $z = 0$

b) $x_1 = \frac{7}{2}x_3 + \frac{5}{2}$; $x_2 = -3x_3 - 2$, $x_3 \in \Re$

c) $x_1 = 2$; $x_2 = 1$

d) não tem solução

3) a) $x = y = z = 0$

b) $x = 2z$, $y = 3z$, $z \in \Re$

4) $k \in \Re$

5) a) Compatível e determinado se $m \neq 1$. Compatível e indeterminado se $m = 1$.

b) Compatível e determinado se $n = -6$. Incompatível se $n \neq -6$

c) Compatível e determinado se $n \neq 2$ e $n \neq -3$. Compatível e indeterminado se $n = 2$. Incompatível se $n = -3$.

d) Compatível e determinado se $m = 0$. Incompatível se $m \neq 0$

e) Compatível e determinado se $m \neq -2$ e $n \in \Re$.. Compatível e Indeterminado se $m = -2$, $n = 4$. Incompatível se $m = -2$ e $n \neq 4$

f) Compatível e indeterminado se $n = 3$ e $m \neq -16$ ou $n \neq 3$ e $m = -16$. Incompatível se $n = 3$ e $m = -16$

Seção 1.11.2

1) a) Compatível e determinado: $x = 0, y = 0, z = 0$.

b) Compatível e Indeterminado: $x = 2z, y = 3z, z \in \Re$

b) Compatível e determinado: $x = 0, y = 0, z = 0$.

d) Compatível e Indeterminado

2) $A = (1, 2, 3)$ não é solução. Solução do sistema: $x = 2z$, $y = 3z$, $z \in \Re$

3) Qualquer que seja o valor de k, o sistema será compatível e indeterminado. Se $k = 2$, as soluções do sistema serão: $x = -2y - z$, $y, z \in \Re$. Se $k \neq 2$, as soluções do sistema serão: $x = -z$, $z \in \Re$.

4) $a = 7$. Solução geral: $x = -z, y = z, z \in \Re$.

5) Solução: $y = -\frac{5}{6}z,\ x = -\frac{13}{6}z,\ z \in \Re$

6) $a = \frac{11}{5},\ z = -\frac{5}{6}x,\ y = 5x,\ x \in \Re$

7) $m \neq 1, m \neq 3$.

8) $m \neq \pm 1$, possível e determinado $m = 1$, possível e indeterminado $m = -1$, impossível

9) $|k| \leq 1$ - possível e indeterminado $|k| \geq 1$ - impossível

Capítulo 2

Seção 2. 4. 7

1) $\frac{1}{4}\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{4}\vec{j} + \frac{5}{4}\vec{k}$

$-5\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c} = -11\vec{i} + 2\vec{j} - 22\vec{k}$

$-\vec{d} + \frac{1}{2}\vec{a} = 5\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j} - \frac{15}{2}\vec{k}$

$\vec{b} - \vec{c} = -3\vec{i} - 5\vec{k}$

2) $\vec{v} = -6\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$

5) $\vec{AB} = -4\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$; $\vec{AC} = -4\vec{i} - 4\vec{j} - 6\vec{k}$; $\vec{BC} = -2\vec{j} - 3\vec{k}$

6) $B = (4, 6, 8)$

7) $(3, 2, 3)$

8) $\vec{w} = \frac{5}{2}\vec{i} + 2\vec{j} - \frac{5}{2}\vec{k}$

9) $D = (0, 6, 11)$

10) $C = (9, -5, 12)$ e $D = (6, -1, 19)$

11) a) *LI* b) *LD* c) *LI* d) *LD*

12) a) $m = 2$ ou $m = -1$ b) $m = 4$

13) Os pontos A, B e C não estão alinhados.

14) Os valores de y e z são tais que $y + 2z = 4$.

15) a) São coplanares b) Não são coplanares

16) Os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são lados de um triângulo.

17) *A, B* e *C* são vértices de um triângulo

18) $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ formam uma base negativa para o $\Re^3$. $\vec{v} = \frac{1}{13}\vec{i} + \frac{39}{91}\vec{j} + \frac{5}{91}\vec{k}$

19) $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ formam uma base negativa para o $\Re^3$. $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

21) $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{a} - 2\vec{b} + \frac{3}{2}\vec{c}$

22) $\vec{w} = 8\vec{u} + 7\vec{v}$

Seção 2.6.5

3) 10 4) 20 5) a) 13 b) 13

6) Normas iguais

7) $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{b} + 3\vec{c}) = -62$

Seção 2.6.9

1) $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{34}}\left(-3\,\vec{j} + 5\,\vec{k}\right)$

2) $x = -\frac{11}{3}$

3) $\left\|\vec{u}\right\| = 2$, $\left\|\vec{u} + \vec{v}\right\| = \sqrt{34}$

4) $x = 0$

5) $\vec{u} = \frac{\vec{u_1}}{\left\|\vec{u_1}\right\|}$, onde $\vec{u_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{14}} + \frac{3}{\sqrt{11}}\right)\vec{i} + \left(\frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{2}{\sqrt{14}}\right)\vec{j} + \left(\frac{3}{\sqrt{14}} - \frac{1}{\sqrt{11}}\right)\vec{k}$

6) A, B e C são vértices de um triângulo retângulo e isósceles. $\left(\vec{AB}, \vec{AC}\right) = 90^0$, $\left(\vec{AB}, \vec{BC}\right) = 45^0$ e $\left(\vec{CB}, \vec{CA}\right) = 45^0$

7) $proj_{\vec{u}}\,\vec{v} = \alpha\,\vec{u}$, $\alpha \in \Re$

8) $proj_{\vec{u}}\,\vec{v} = \frac{1}{21}\left(\vec{i} + 5\,\vec{j} + 4\,\vec{k}\right)$

9) $\cos\alpha = \frac{x}{\left\|\vec{v}\right\|}$, $\cos\beta = \frac{y}{\left\|\vec{v}\right\|}$, $\cos\gamma = \frac{z}{\left\|\vec{v}\right\|}$

10) $\gamma = 45^0$

11) $\vec{v} = \vec{i} + \sqrt{2}\,\vec{j} - \vec{k}$ ou $\vec{v} = \vec{i} - \sqrt{2}\,\vec{j} - \vec{k}$

12) $\cos\left(\vec{v}, \vec{i}\right) = \frac{4}{13}$, $\cos\left(\vec{v}, \vec{i}\right) = \frac{3}{13}$, $\cos\left(\vec{v}, \vec{i}\right) = \frac{12}{13}$

13) $\vec{b} = -48\,\vec{i} + 45\,\vec{j} - 36\,\vec{k}$

14). $\vec{v} = \frac{3\sqrt{6}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + 5\sqrt{3}\,\vec{k}$

15) $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}$ não é base ortonormal. $\vec{v} = \frac{1}{3}\vec{i} + \frac{4}{3}\vec{j} + \frac{5}{3}\vec{k}$

Seção 2.7.6

1) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{i} - 10\,\vec{j} - 4\,\vec{k}$ $\quad \vec{c} \times \vec{a} = -3\,\vec{i} - 3\,\vec{k}$ $\quad \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) + \left(\vec{c} \times \vec{b}\right) = \vec{0}$

2) $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{42}}\left(-3\,\vec{i} + 4\,\vec{j} - 4\,\vec{k}\right)$

3) $\vec{v} = \frac{24}{13}\vec{i} + \frac{10}{13}\vec{j}$

4) $A = 10\sqrt{12}$

5) A, B e C são vértices de um triângulo, que é isósceles. $A = 5\sqrt{185}$

6) $\vec{a} = \vec{u} = 2\,\vec{i} + \vec{j} + 3\,\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{v} = 4\,\vec{i} + \vec{j} - 3\,\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = -6\,\vec{i} + 18\,\vec{j} - 2\,\vec{k}$

$\vec{w} = \frac{26}{91}\vec{i} - \frac{7}{91}\vec{j} + \frac{4}{91}\vec{k}$

7) $\vec{a}$ e $\vec{b}$ devem ser paralelos

8) $\cos\left(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{i}\right) = -\frac{9}{\sqrt{138}}$, $\cos\left(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{j}\right) = \frac{5}{\sqrt{138}}$, $\cos\left(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{k}\right) = \frac{7}{\sqrt{138}}$

9) a) $m = \pm\frac{3}{5}$ b) $m = 0$, se $\vec{a}$ não é paralelo a $\vec{b}$ $\quad m \in \Re$, se $\vec{a}$ é paralelo a $\vec{b}$

10) $\vec{c} = 70\,\vec{i} + 50\,\vec{j} + 10\,\vec{k}$

Seção 2.8.6

1) $\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right] = -7$, $\left[\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}\right] = -7$, $\left[\vec{u}, \vec{w}, \vec{w}\right] = 0$

2) Os vetores dados não são coplanares, pois o produto misto é diferente de zero.

3) $V = 15\ u.v.$ 4) a) São coplanares 4) b) Não são coplanares

5) $x \neq 1$ ou $x \neq -2$

6) a) $\left(\vec{AB},\vec{BC}\right) = 90^0$, $\left(\vec{AB},\vec{AC}\right) = 45^0$ e $\left(\vec{CB},\vec{CA}\right) = 45^0$ b) $proj_{\vec{AC}}\ \vec{AB} = \frac{1}{2}\left(\vec{j} + \vec{k}\right)$

c) $h = \frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $Área(\Delta ABC) = \frac{1}{2}\ u.a.$ e) $V = 1\ u.v.$

7) O ângulo entre os vetores é 90^0 e, portanto, esses vetores são *LI.*

8) $\vec{a} = \frac{\vec{a_1}}{\left\|\vec{a}_1\right\|}$, onde $\vec{a}_1 = 2\,\vec{i} - \vec{j} + 2\,\vec{k}$, $\vec{b} = \frac{\vec{b_1}}{\left\|\vec{b}_1\right\|}$, onde $\vec{b}_1 = -11\,\vec{i} - 26\,\vec{j} - 2\,\vec{k}$ e $\vec{c} = \frac{\vec{c_1}}{\left\|\vec{c}_1\right\|}$, onde $\vec{c}_1 = -6\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 7\,\vec{k}$

9) $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}$ será base ortonormal se x = $\pm\ \frac{1}{3}$. $\vec{v} = -\frac{5}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{10}{3}\vec{c}$. 10) $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = 24\ u.v.$

11) *A, B, C* e *D* podem ser vértices de um paralelepípedo. *V = 24 u.v.. E = (3, –3, 3)*

12) Usando projeção: a base será composta pelos vetores $\left\{\vec{u}, \vec{w}, \vec{u} \times \vec{w}\right\}$, onde

$$\vec{w} = \vec{v} - proj_{\vec{u}}\ \vec{v} = \vec{v} - \left(\vec{v} \cdot \frac{\vec{u}}{\left\|\vec{u}\right\|}\right)\frac{\vec{u}}{\left\|\vec{u}\right\|} = \vec{v} - \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\left\|\vec{u}\right\|^2}\,\vec{u}\,\cdot$$

Usando produto vetorial: $\left\{\vec{u}, \vec{u} \times \vec{v}, \vec{u} \times \left(\vec{u} \times \vec{v}\right)\right\}$

13) A base será negativa se $x < 0$ e será ortogonal se $x \neq 0$. A base será ortonormal se $x \neq 0$ e tomarmos os seus respectivos vetores unitários.

14) $\left\|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right\| = 10$

Capítulo 3

Seção 3.1.5

1) Equações paramétricas: $\begin{cases} x = 3 + t - s \\ y = 1 - 2t - s \\ z = 2 - 3t \qquad s, t \in \Re \end{cases}$

Equação cartesiana: $\pi : x - y + z - 4 = 0.$

2) Equação cartesiana; $\pi : x - 2y + 3z + 3 = 0$. O ponto $B \in \pi$ e o ponto $C \notin \pi$.

3) Eqs. Paramétricas: $\begin{cases} x = 1 + 2p + q \\ y = 2 + p - q \\ z = 2 - p - 2q, \quad p, q \in \Re \end{cases}$ Fazendo $p = 1$ e $q = 0$ obteremos o ponto $(3, 3, 1)$ do plano.

4) Equação Cartesiana $\pi : -9x + y - 7z + 40 = 0$.

5) $m = 3$ e o plano não passa pela origem.
Equação cartesiana do plano que passa pela origem: $\pi : 2x - y - 3z = 0$.

6) Vetor normal unitário: $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{11}}(3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$

Equações paramétricas: $\begin{cases} x = 1 - p \\ y = -1 - 2p + q \\ z = p + q, \quad p, q \in \Re \end{cases}$

7) $\vec{v} = \frac{15}{\sqrt{62}}(-3\vec{i} - 2\vec{j} + 7\vec{k})$

Equação cartesiana: $\pi : -3x - 2y + 7z + 8 = 0$.

8) Equação cartesiana: $\pi : -2x + y + z + 6 = 0$.

9) $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{7}}(4\vec{i} + 2\vec{j} + \frac{4}{3}\vec{k})$

Equação cartesiana:$\pi : 6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

11) $\pi : x - y = 0$.

12) Base ortonormal negativa: $\left\{ \frac{1}{5\sqrt{3}}(2\vec{i} - 5\vec{j} + 4\vec{k}), \frac{1}{\sqrt{5}}(-2\vec{i} + \vec{k}), \frac{1}{3}(-\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}) \right\}$

13) Equações paramétricas: $\begin{cases} x = p + 2q \\ y = -p - 5q \\ z = p, \quad p, q \in \Re \end{cases}$

Equação cartesiana: $\pi : 5x + 2y - 3z = 0$. O ponto B não pertence ao plano.

14) Equações paramétricas: $\begin{cases} x = 7 - 2p + q \\ y = 2 + 4p \\ z = 3 - p, \quad p, q \in \Re \end{cases}$

Equação cartesiana: π : $-2y - 4z - 10 = 0$. O ponto médio $\left(6, 4, \frac{7}{2}\right)$ de AB pertence ao plano.

15) $\pi : y + 2 = 0$. A origem não pertence a esse plano.

16) $m = 3$ e $n = -4$.

17) $m = \pm 1$

18) $\pi : 9x - 3y - 4z - 20 = 0$.

19) $\begin{cases} x = 1 + 2p + q \\ y = 2 - p + 4q \\ z = 3 + 3p - q, \qquad p, q \in \Re \end{cases}$

20) $x = 2.$

21) a) paralelos b) paralelos c) não paralelos d) não paralelos

22) a) perpendiculares b) perpendiculares c) não perpendiculares

23) a) $L = 3$ e $m = -2/3$

b) $L = -10/3 \quad e \quad m = -6/5$

24) a) $m = 6$ b) $2L + m = 9$ c) $m = 1/2$

25) Qualquer vetor obtido a partir de pontos do plano é paralelo ao próprio plano: $\vec{v} = -\vec{i} - 3\vec{k}$

26) $\begin{cases} x = 4p \\ y = 3p \\ z = p + q, \qquad p, q \in \Re \end{cases}$ ou $3x - 4y = 0.$

Seção 3.2.5

1) $r: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + t, \ t \in \Re \end{cases}$ ou $\frac{x-1}{3} = 2 - y = z - 2$

2) $r: \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + 3t, \ t \in \Re \end{cases}$ ou $\frac{x-1}{3} = \frac{2-y}{2} = \frac{z-3}{3}$; $P_3 \in r,\ P_4 \notin r.$

3) $r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t, \ t \in \Re \end{cases}$ ou $x - 1 = 2 - y = z - 3$

4) $r: x = 1 + t,\ y = \frac{2t-4}{5},\ z = \frac{9-t}{6}$

5) $r: \begin{cases} x = 2 - s \\ y = 4 \\ z = 3s, \ s \in \Re \end{cases}$ ou $2 - x = \frac{z}{3};\ y = 4$

6) $r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 2t \\ z = 2 - 2t, \ t \in \Re \end{cases}$ ou $x - 1 = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-2}$

7) a) $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{21}}(-2\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k})$ b) $\vec{v} = \frac{1}{5\sqrt{2}}(\vec{i} - 7\vec{k})$

8) $r: \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2 + 2t \\ z = 2 - 2t, \ t \in \Re \end{cases}$ ou $\frac{x-1}{-4} = \frac{y-2}{2};\ z = 5$

9) $r: \begin{cases} x = 4t \\ y = 16t \\ z = -14t, \ t \in \Re \end{cases}$ ou $\frac{x}{4} = \frac{y}{16} = \frac{z}{-14}$

10) $r: \begin{cases} x = -4t \\ y = 1 + 3t \\ z = -1 + t, \ t \in \Re \end{cases}$ ou $\frac{x}{-4} = \frac{y-1}{3} = z + 1$

11) $r: \begin{cases} x = -1 - 4t \\ y = 1 + 4t \\ z = 0, \quad t \in \Re \end{cases}$

12) $\pi: 2x + 4z - 4 = 0.$

13) $\pi: 2x + y + 2z - 9 = 0.$

14) $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w} = \left(\frac{10}{7} \vec{i} + \frac{19}{14} \vec{j} + \frac{17}{14} \vec{k} \right) + \left(-\frac{3}{7} \vec{i} + \frac{9}{14} \vec{j} - \frac{3}{14} \vec{k} \right)$

15) $\pi: 8x - 5y - 17z + 16 = 0$

16) $\left\{ \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}, \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}, \frac{\vec{c}}{\|\vec{c}\|} \right\}$ é uma base ortonormal positiva, onde $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{v} = 6\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{v} = -6\vec{i} - 24\vec{j} - 12\vec{k}$

17) $r: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = -1 - t, \ t \in \Re \end{cases}$ ou $\frac{x-1}{-1} = y - 2 = \frac{z+1}{-1}$

18) $r: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 + t \\ z = 3 - 2t, \ t \in \Re \end{cases}$ ou $\frac{x-2}{3} = y + 1 = \frac{z-3}{-2}$

Seção 3.3.11

1) a) concorrentes, ponto de interseção $P = (1, 0, 1)$, $(r_1, r_2) = 90^0$

b) concorrentes, ponto de interseção $P = (1, 2, 2)$, $(r_1, r_2) = arccos\left(\frac{48}{\sqrt{3154}} \right)$

c) paralelas, $(r_1, r_2) = 0^0$ d) reversas, $(r_1, r_2) = arccos\left(\frac{8}{\sqrt{145}} \right)$

e) concorrentes, ponto de interseção $P = (1, 5, 1)$, $(r_1, r_2) = arccos\left(\frac{4}{\sqrt{190}} \right)$

2) a) coincidentes, $(r_1, r_2) = 0^0$ b) concorrentes, $P = \left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right)$, $(r, \pi) = 90^0$

c) paralelos, $(r, \pi) = 0^0$ d) paralelos, $(r, \pi) = 0^0$

3) a) concorrentes, interseção: $r: x = \frac{9}{13} + \frac{4}{13}t, \ y = -\frac{5}{13} + \frac{5}{13}t, \ z = t, \ t \in \Re$, $(\pi_1, \pi_2) = 90^0$

b) coincidentes, interseção: o próprio plano, $(\pi_1, \pi_2) = 0^0$

c) paralelos, $(\pi_1, \pi_2) = 0^0$ d) paralelos, $(\pi_1, \pi_2) = 0^0$

4) $P = (-2, 1, 1)$ b) $x = 2t,\ y = 2t,\ z = t$ c) não se interceptam d) não se interceptam

5) interseção com o plano coordenado $z = 0$: $P = (7, 9, 0)$

interseção com o plano coordenado $y = 0$: $P = \left(\frac{17}{5}, 0, \frac{9}{5}\right)$

interseção com o plano coordenado $x = 0$: $P = \left(0, -\frac{17}{2}, \frac{7}{2}\right)$

6) interseção com o plano coordenado $z = 0$: $x = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}t,\ y = t,\ z = 0$

interseção com o plano coordenado $y = 0$: $x = \frac{5}{3} + \frac{1}{3}t,\ y = 0,\ z = t$

interseção com o plano coordenado $x = 0$: $x = 0,\ y = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}t,\ z = t$

interseção com o eixo dos x: $P = \left(\frac{5}{3}, 0, 0\right)$

interseção com o eixo dos y: $P = \left(0, \frac{5}{2}, 0\right)$

interseção com o eixo dos z: $P = (0, 0, -5)$

7) a) $\begin{cases} x = 2 + 3p + 5q \\ y = 1 + 2p + q \\ z = p + 3q, \quad p, q \in \Re \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 2 + 3p + 3q \\ y = 1 + 2p + 2q \\ z = 1 + q, \quad p, q \in \Re \end{cases}$

8) a) $m = 5$ b) não tem solução c) $m \neq 5$

9) $n = -6$ e $c = 4$; interseção: $P\ (-1, 1, 1)$

10) $r_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = 0, \quad t \in \Re \end{cases}$ b) $r_2 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2t \\ z = 0, \quad t \in \Re \end{cases}$

Seção 3.4.9

1) a) 0 b) 0 c) 0 d) 2 e) 0

2) a) 0 b) 0 c) $\frac{3}{\sqrt{101}}$ d) $\frac{10}{\sqrt{21}}$

3) a) 0 b) 0 c) $\frac{3}{\sqrt{11}}$ d) $\frac{2}{\sqrt{6}}$

4) $d(A, \pi) = \frac{4}{\sqrt{46}}$ 5) $d(D, \pi) = \frac{3}{5}\sqrt{70}$

6) $r : \begin{cases} x = \frac{392}{117} + 4t \\ y = \frac{1141}{117} + 16t \\ z = \frac{1533}{117} - 14t, \quad t \in \Re \end{cases}$

7) a) $P = (-1, -2, 1)$ b) $P = (5, 0, 3)$ c) $P = \left(\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$ d) $P = (-3, 0, 1)$

8) $d = \sqrt{\frac{13}{14}}$

9) $x = 1 - \frac{4}{35}t,\ y = \frac{4}{35}t,\ z = 1 - \frac{4}{35}t,\ t \in \Re$

10) $x = 3 - 5t,\ y = -3 - 2t,\ z = 1 + 3t,\ t \in \Re$

11) $3x + 2z - 1 = 0$

12) $x = 1,\ y = -2 + 3t,\ z = 1 + t,\ t \in \Re$

Capítulo 4

Seção 4.1.6

1) a) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$

b) $\left(x - \frac{13}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{65}{4}$

c) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 2$, $C(-1, -2)$, $R = \sqrt{2}$

d) $(x - 1)^2 + y^2 = 4$, $C(1, -2)$, $R = 2$

2) a) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1;\ A = (\pm 6, 0),\ B = (0, \pm\sqrt{27}),\ C = (0, 0),\ e = 1/2$;

b) $\frac{(x-3)^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1;\ B = (\pm\sqrt{27}, 0), F = (3, \pm 2),\ C = (3, 0), e = 1/2$

c) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1;\ F = (\pm 3, 0),\ C = (0, 0), e = 3/5$

d) $\frac{x^2}{20} + \frac{(y - y_0)^2}{36} = 1$

e) $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1;\ A_1 = (7, -1),\ A_2 = (-3, -1), B_1 = (2, 3), B_2 = (2, -5),\ C = (2, -1),$
$F_1 = (5, -1),\ F_2 = (-2, -1),\ e = 3/5$

f) $8x^2 + 8y^2 - 2xy - 212 = 0.$

3) a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1;\ V = (\pm 3, 0),\ C = (0, 0), e = 5/3,\ y = \pm\frac{4}{3}x$

b) $\frac{(y+1)^2}{\frac{25}{4}} - \frac{(x-2)^2}{\frac{119}{4}} = 1;\ V_1 = \left(2, \frac{3}{2}\right), V_2 = \left(2, -\frac{7}{2}\right)\ C = (2, -1), e = 12/5,\ y = \pm\frac{5}{\sqrt{119}}x$

c) $\frac{(y-3)^2}{16} - \frac{(x-2)^2}{20} = 1;\ F_1 = (2, -3),\ F_2 = (2, 9),\ C = (2, 3), y = \pm\frac{1}{5}x$

d) $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1;\ F = (0, \pm\sqrt{5}),\ C = (0, 0), e = \sqrt{5}/2,\ y = \pm\frac{4}{3}x$

e) $xy - 4y - 2 = 0$

4) a) $y^2 = 12x$, $V = (0, 0)$

b) $x^2 = -8y$, $V = (0, 0)$

c) $y^2 = -12(x - 1)$, $V = (1, 0)$

d) $(x + 4)^2 = -4(y - 2)$, $V = (-4, 2)$

e) $y^2 = -8(x - 2)$. diretriz $x = 4$

f) $(y + 1)^2 = -4(x - 4)$, $F = (3, -1)$, diretriz $x = 5$

5) $x = \pm \frac{5}{\sqrt{8}}$, $y = \pm \sqrt{\frac{7}{8}}$

6) $d(P, F_1) = 13$, $d(P, F_2) = 5$

8) $x = \pm \sqrt{\frac{75}{24}}$, $y = \pm \sqrt{\frac{21}{24}}$

9) a) Elipse - $C(0, 0)$, $A = (\pm \sqrt{5}, 0)$, $B = (0, \pm\sqrt{2})$, $F = (\pm\sqrt{3}, 0)$, $e = \frac{\sqrt{15}}{5}$

b) Elipse - **C = (-3, 2),A = (-3 ± 6, 2), B = (-3, 2 ± 4),** $F = (-3 \pm \sqrt{20}, 2)$**,** $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$

c) Hipérbole - $C = (2, 2)$,$V = (2 \pm 4, 2)$, $F = (2 \pm \sqrt{41}, 2)$, $e = \frac{\sqrt{41}}{4}$, $y - 2 = \pm\frac{5}{4}(x - 2)$

d) Parábola - **V = (0, 0), F = (-3, 0), x = 3**

e) Parábola - **V = (2, -1), F = (3, -1), x = 1**

f) Parábola - V = (2, -3), F = (2, $-\frac{7}{4}$), y = $-\frac{17}{4}$

g) Circunferência - C = (1, 0), R = 1

h) Parábola - $\boldsymbol{V = (0, 0), F = (0, \frac{1}{2}), y = -\frac{1}{2}}$

i) Circunferência - C = (1, –3), R = 3

j) Circunferência - C = (–2, 0), R = 2

l) Hipérbole - $\boldsymbol{C = (0, 0), V = (\pm\sqrt{3}, 0)}$, $F = (\pm\sqrt{13}, 0)$, $e = \sqrt{\frac{13}{3}}$, $\boldsymbol{y = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}x}$

m) Hipérbole - $C = (0, 0)$,$V = (\pm\sqrt{20}, 0)$, $F = (\pm 2\sqrt{6}, 0)$, $e = \frac{\sqrt{30}}{5}$, $y = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}x$

n) Hipérbole - $C = (3, -1)$,$V = (3 \pm 6, -1)$, $F = (3 \pm 6\sqrt{2}, -1)$, $e = \sqrt{2}$, $y + 1 = \pm(x - 3)$

o) Circunferência - $C = (0, 0)$, $R = \sqrt{\frac{5}{2}}$

10) $5\sqrt{2}$

11) 1. Se $q = 0$, teremos um par de retas: $x = -m \pm \sqrt{1 + m^2}$, $m \in \Re$.

2. Se $q > 0$, teremos uma família de elipses: $\frac{(x+m)^2}{1+m^2} + \frac{(y-0)^2}{(1+m^2)/q} = 1, \; m \in \Re$

3. Se $q < 0$ ($q = -|q|$), teremos uma família de hipérboles: $\frac{(x+m)^2}{1+m^2} - \frac{(y-0)^2}{(1+m^2)/|q|} = 1, \; m \in \Re$

4. Um caso particular de 2) é: $q = 1$, $m \in \Re$, teremos a circunferência de centro em (–m, 0) e raio $\sqrt{1+m^2}$:

$$(x + m)^2 + y^2 = 1 + m^2$$

5. Um caso particular de 3) é: $q = -1$, $m \in \Re$, teremos a hipérbole eqüilátera $x^2 - y^2 = 1 + m^2$

12) A = 12.

13) $\frac{x^2}{8} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$

14) $(y-1)^2 = 4x$

15) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$ 16) $(y-3)^2 = -(x-10)$ 17) $x = 1;\ y = 4 + 2\sqrt{5} - 4\sqrt{5}t$

Seção 4.2.9

1) a) Cilindro Circular b) Cilindro Hiperbólico
c) Cilindro Elíptico d) Cilindro Parabólico
e) A união de dois semi-planos: $\begin{cases} \pi_1 : z = y-2,\ y \geq 2 \\ \pi_2 : z = -(y-2),\ y \leq 2 \end{cases}$ f) Plano paralelo ao plano *xOz*

2) a) Esfera de raio 1 b) Hiperbolóide de duas folhas
c) Cilindro Parabólico d) Cone
e) Parabolóide Hiperbólico f) Cone
g) Parabolóide Elíptico h) Um par de planos (Oz como interseção)
i) Parabolóide Elíptico j) Parabolóide Hiperbólico
l) Parabolóide Elíptico m) Cone
n) Um ponto 0) Cone
p) Um par de planos $x = \pm 2$

3) $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{19}{2}\right)^2$

4) Cone de equação $y^2 + z^2 = 9x^2$

5) Planos: $z = \pm y$, que se interceptam segundo o eixo Ox

6) $x = -1 + 5t, \quad y = 3 - t, \quad z = -\frac{1}{2} + 2t.$

7) $x + 2y - 2z \pm \sqrt{\frac{5}{3}} = 0$

8)

9) $a \neq 0,\ b = c = k \neq 0$; hiperbolóide de uma folha

10) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$

11) Cone Circular: $x^2 - (y-2)^2 + z^2 = 0$ - vértice: *(0, 2, 0)*

12) $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 4$

13) $x^2 + y^2 + z^2 - 3z = 0$

14) $(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = \frac{196}{14}$