Teoría de Juegos
Introducción

Semestre 2020-2

Índice
Unidad 1. Introducción

1.0. Introducción

¿Qué es la teoría de juegos?

- La Teoría de Juegos es una teoría matemática que estudia las características generales de las situaciones competitivas de manera formal y abstracta.
- Es útil para tomar decisiones en casos donde dos o mas personas que deciden se enfrentan en un conflicto de intereses.
- Así, estudia la toma de decisiones en interacción (ejemplos: el juego de ajedrez, la negociación política, las estrategias militares).

1.0. Introducción

¿Dónde se utiliza?

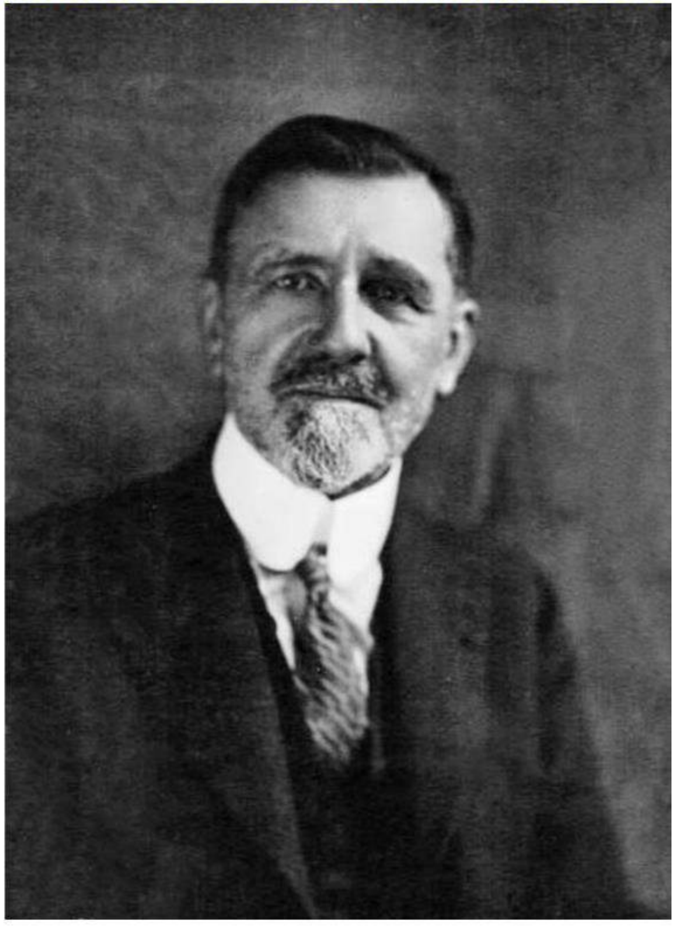
- En estrategias de conflicto, guerras de precios, decisiones de cartel, relaciones sindicato empresa, acuerdos y negociaciones políticas, económicas, militares, etc.

1.0. Introducción

- La noción mas antigua de un juego se encuentra en el Mabinogion, una colección de cuentos populares galeses (siglos XI-XIII)
- Hay un relato en el que dos reyes que están en guerra juegan al ajedrez, mientras que sus ejércitos batallan en las proximidades.
- Cada vez que un rey se come una pieza llega un mensajero para informar al otro que ha perdido un hombre importante o una división. Al final un rey da jaque al otro.

Émile Borel (1871 – 1956)

- En 1921 el matemático francés, EB, hizo públicos varios artículos sobre la théorie du jeu (“Game theory and left symetric core integral equations”) Borel usó el póquer como ejemplo, y analizó el problema del faroleo.
- Borel reparó en las posibles aplicaciones económicas y militares de la teoría de juegos
- Planteó las cuestiones esenciales de la teoría de juegos: ¿para que juegos existe la mejor estrategia, y de que manera puede uno buscar esa estrategia?
- Como matemático, era conocido por su trabajo fundación en las áreas de la teoría de la medida y la probabilidad



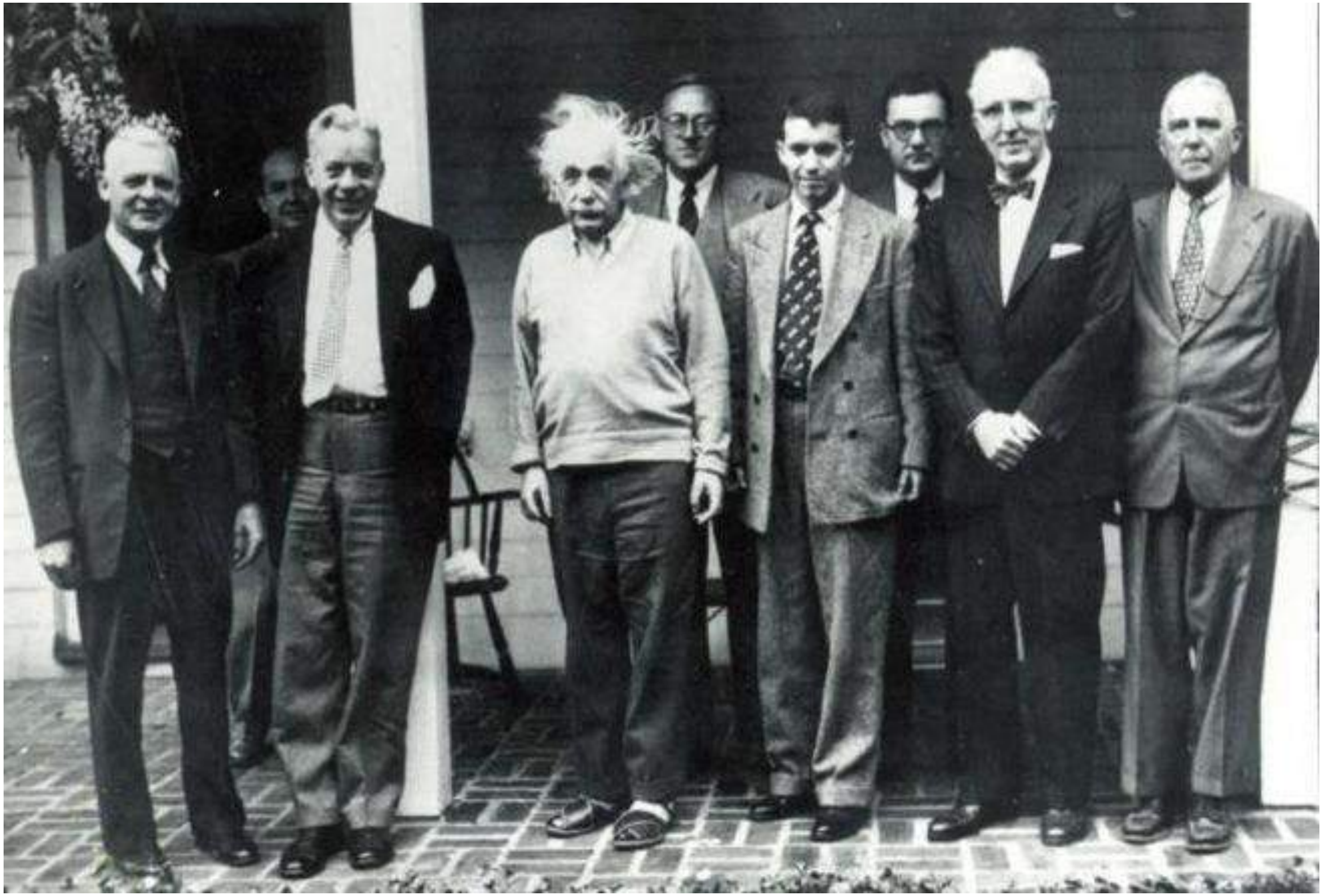
Antoine A. Cournot (1801-1877)

- Estudió en la Escuela Normal Superior de París donde se licenció en Ciencias en 1823. Catedrático de Análisis Matemático en la Universidad de Lyon en 1834.
- Se considera a Cournot como el matemático que comenzó la sistematización formal de la economía.
- Fue el primero en utilizar funciones matemáticas para describir conceptos económicos como la demanda, la oferta o el precio.
- Analizó los mercados monopolistas, estableciendo el punto de equilibrio del monopolio, llamado el punto de Cournot. También estudió el duopolio y el oligopolio.
- Sus aportes tuvieron mucha influencia sobre Jevons, Walras y Marshall, de los que puede ser considerado un precursor. Contribuyó notablemente a la ciencia estadística.
- La investigación de los principios matemáticos de la teoría de la riqueza, 1838

John Von Neumann (1903 – 1957)

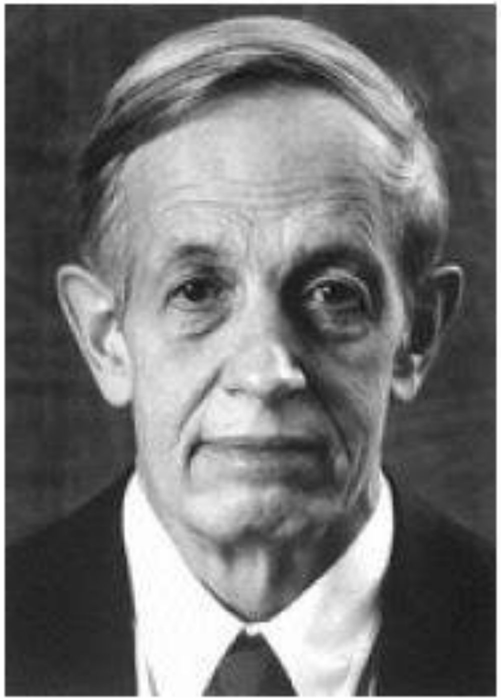
- Fue un matemático húngaro-estadounidense que realizó contribuciones fundamentales en física cuántica, análisis funcional, teoría de conjuntos, ciencias de la computación, economía, análisis numérico, cibernética, hidrodinámica, estadística y muchos otros campos.
- Desde la década de 1920 estuvo trabajando en la estructura matemática del póker y otros juegos, pero enseguida vio que sus teoremas podían ser aplicados a economía, política, relaciones internacionales, etc.
- No fue hasta 1944, cuando von Neumann y Morgensten publicaron su libro **Teoria de Juegos y Comportamiento Económico**, que incide en el desarrollo de la programación lineal y la teoría de la decisión estadística de Wald.
- John Von Neumann demostró matemáticamente que siempre hay un curso racional de acción para juegos de dos jugadores, con intereses completamente opuestos (uno gana y el otro pierde).
- Esta prueba es conocida como el **Teorema Minimax.**

John Von Neumann, Albert Einstein y Oskar Morgenstern



John F. Nash (1928 - 2015)

- John Forbes Nash Jr. fue un **matemático** estadounidense que recibió el Premio Nobel de Economía en 1994 por sus aportes a la teoría de juegos y los procesos de negociación, junto a Reinhard Selten y John Harsanyi.
- En 1949 escribió un artículo titulado Puntos de equilibrio en juegos de n-personas en el que definía el equilibrio de Nash.
- A los 21 años se doctoró con una tesis de menos de treinta páginas sobre juegos no cooperativos, bajo la dirección de Albert W. Tucker.



Premios Nobel a las contribucions de la Teoría de Juegos

- 2012. Alvin E. Roth and Lloyd S. Shapley
  - Por la teoría de las asignaciones estables y la práctica del diseño de mercado.
- 2005. Robert J. Aumann and Thomas C. Schelling
  - Por haber mejorado la comprensión del conflicto y la cooperación a través del análisis de teoría de juegos.
- 1996. James A. Mirrlees and William Vickrey
  - Por sus contribuciones fundamentales a la teoría económica de los incentivos bajo información asimétrica.
- 1994. John C. Harsanyi, John F. Nash Jr. and Reinhard Selten
  - Por su análisis pionero de equilibrio en la teoría de juegos no cooperativos.

Intuición: repartirse un pastel

- Muchas personas saben cual es la mejor forma de que dos niños caprichosos se repartan un trozo de pastel. No importa el cuidado que el padre tenga para cortarlo, uno de los niños (¡o incluso ambos!) pensará que se le ha dejado el trozo mas pequeño
- La solución consiste en que uno de ellos corte el pastel y el otro escoja el trozo que quiere. Gracias a la glotonería, será una partición justa
- El primer niño no podrá quejarse de que la división es injusta porque la ha hecho él. El segundo no podrá protestar, pues ha podido escoger el trozo que prefería
- ¿Cuál es la mejor estrategia?
- Esta discusión doméstica no sólo es un juego en el sentido dado por Von Neumann, sino que es prácticamente el ejemplo más simple posible del principio MINIMAX en el que se fundamenta la teoría de juegos

Teorías de la decisión

	Un Objetivo	Varios Objetivos
Un Decisor	Teoría de la Decisión Unipersonal	Teoría de la Decisión Multiobjetivo
Varios Decisores	**Teoría de Juegos Cooperativos**	**Teoría de Juegos No Cooperativos**

Toma de decisión vs. Estrategia

- Consideremos la diferencia existente entre un problema de toma de decisión vs. un problema de estrategia
- Un grupo de amigos se encuentra en un restaurante para comer. Previo a ordenar la comida se decide cómo se pagará la cuenta.
- Surgen dos alternativas:

  1. Cada uno paga lo consume: **problema de TOMA DE DECISIÓN**

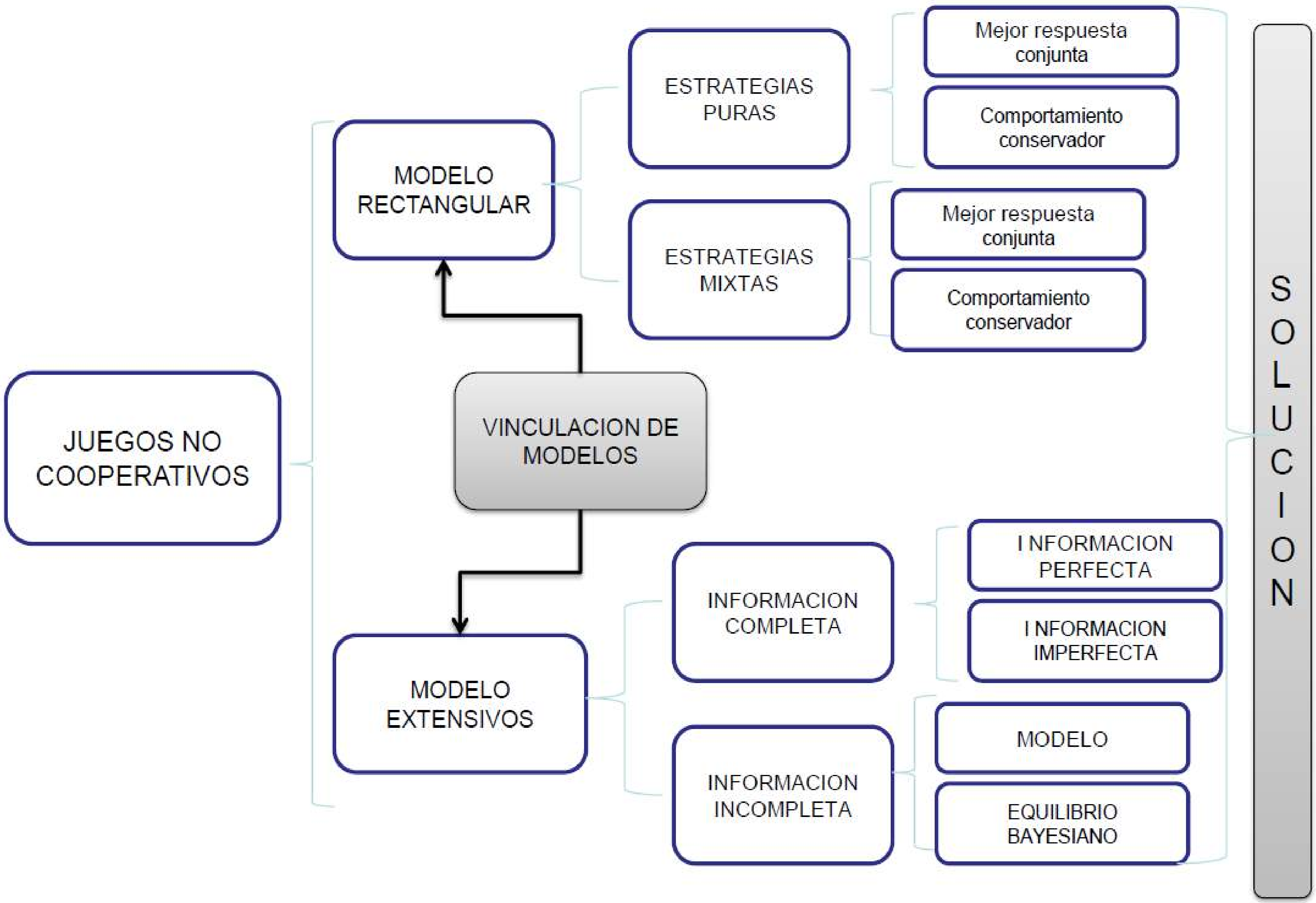
  2. Se suma lo comido por cada uno y se lo divide en partes iguales: **problema ESTRATÉGICO**

Teoría de Juegos Clásica

- Tradicionalmente la Teoría de Juegos clásica se ha dividido en dos ramas: **Teoría Cooperativa y No Cooperativa.**
- Los **juegos cooperativos** tienen un papel normativo, buscan los resultados "equitativos", "justos" que conseguirían agentes "racionales" y "bien informados". Los diversos conceptos de solución que hay en la teoría que los estudia se establecen con conjuntos de axiomas que responden a una forma de entender esas propiedades de racionalidad, justicia y equidad.
- Los **juegos no cooperativos**, en cambio, son un marco teórico adecuado para estudiar si hay una "ley" interna en el conflicto que se estudia, y pueden resultar un importante instrumento de análisis razón por la que nos centraremos en los juegos no cooperativos.

Teoría de Juegos Clásica

- La **Teoría de Juegos No Cooperativa** asume que **no hay lugar para comunicación, correlación o acuerdos entre los jugadores,** de no ser explícitamente estipulados por las reglas del juego.
- Le interesa describir recomendaciones para que ninguno de los jugadores tenga incentivos para unilateralmente desviarse (esto es, si los demás siguen las recomendaciones, y yo me muevo, pierdo).
- Esta idea corresponde al concepto de **Equilibrio de Nash:** el concepto más importante en **Teoría No Cooperativa** y su estudio formal (John Nash, 1950) marcó un hito en el tema, y que le terminó dando a Nash el premio Nobel de Economía en 1994 por su "análisis pionero del equilibrio en la teoría de los juegos no cooperativos".


JUEGOS NO COOPERATIVOS
MODELO RECTANGULAR
ESTRATEGIAS PURAS
Mejor respuesta conjunta
Comportamiento conservador
ESTRATEGIAS MIXTAS
Mejor respuesta conjunta
Comportamiento conservador
VINCULACION DE MODELOS
MODELO EXTENSIVOS
INFORMACION COMPLETA
I NFORMACION PERFECTA
I NFORMACION IMPERFECTA
INFORMACION INCOMPLETA
MODELO
EQUILIBRIO BAYESIANO
SOLUCION

1.1. Concepto de juego

- Un juego es cualquier situación de **decisión** caracterizada por una **interdependencia estratégica**, gobernada por **reglas** y con un **resultado definido**.
- El resultado que obtiene una empresa depende no sólo de la estrategia que elige, sino también de las estrategias que eligen los competidores guiados por sus propios intereses.

1.1. Concepto de juego (2)

- La solución de un juego debería indicar a cada jugador qué resultado esperar y cómo alcanzarlo.
- Los participantes de un juego intentan obtener el mejor resultado para sus intereses. Por lo tanto un juego es un problema de maximización, uno para cada jugador.
- La teoría de juegos, como cualquier otra teoría general, provee vinculaciones: muestra cómo situaciones aparentemente diversas tienen la misma estructura lógica.

1.1. Concepto de juego (3)

- La interdependencia genera muchas veces competencia entre los participantes del juego, pero los jugadores también pueden tener algunos intereses compartidos.
- Un juego puede ser comparado con la división de un pastel cuyo tamaño puede aumentar o reducirse como resultado de acciones de los jugadores.
- Los jugadores tienen un interés común en agrandar el pastel, pero tendrán intereses en conflicto al momento de acordar la división del pastel.

1.1. Concepto de juego (4)

Un juego consiste en:

- Al menos dos jugadores
- Un conjunto de estrategias para cada jugador
- Una relación de preferencia sobre posibles resultados

El jugador es generalmente una entidad:

- Individuo, compañía, nación, animal, etc.

Las estrategias:

- Acciones que un jugador selecciona a seguir.

Las salidas:

- Determinadas por la mutua selección de estrategias.

Relación de preferencia:

- Modelada como la utilidad (pago) de un conjunto de salidas.

1.1. Concepto de juego (5)

- La ***solución de un juego debería indicar a cada jugador qué*** resultado esperar y cómo alcanzarlo.
- Los ***participantes de un juego intentan obtener el mejor resultado para sus intereses. Por lo tanto un juego es un*** problema de maximización, uno para cada jugador, determinado por la mutua selección de estrategias.
- La ***interdependencia genera muchas veces competencia entre*** los participantes del juego, pero ***los jugadores también pueden tener algunos intereses compartidos.***
- Un juego puede ser comparado con la ***división de un pastel*** cuyo tamaño puede aumentar o reducirse como ***resultado de acciones de los jugadores.***
- **Los jugadores tienen un interés común en agrandar el pastel,** pero tendrán ***intereses en conflicto al momento de acordar la división del pastel.***

1.1. Estrategia

- En la teoría de juegos una estrategia es un concepto muy importante, con un sentido mas concreto que el que se le da habitualmente.
- Es un plan muy especifico.
- Es la descripción **completa** de una forma determinada de jugar, independientemente de lo que hacen los demás jugadores y de la duración de un juego.
- Existen estrategias puras y mixtas (definición).

1.2. Conducta racional y la información

- La teoría de juegos considera que los jugadores son racionales y solo les interesa ganar.
- Se supone que los jugadores tienen un conocimiento total y una comprensión absoluta de las reglas, además de una memoria perfecta que les permite recordar todas las jugadas anteriores.

Racionalidad estratégica

- En teoría de juegos la racionalidad significa que **cada jugador hace lo mejor que puede dada la información con que cuenta al momento de tomar la decisión**. Ser racional significa no cometer el mismo error en forma consistente.
- Dada la interdependencia entre jugadores, una decisión racional debe basarse en una predicción de la respuesta de otros jugadores. Al ponerse uno en los zapatos del otro y predecir entonces la acción que el otro tomaría, se puede elegir el mejor curso de acción propio.

Información perfecta e imperfecta

- Un jugador tiene información perfecta si conoce exactamente lo que ocurre cada vez que toma una decisión.
- Un juego tiene información perfecta si cada jugador tiene información perfecta.
  - Ej. Juego de tres en línea
- Juego de información perfecta con azar
  - ej. Juego del duelo
- Si algún jugador no tiene información perfecta, el juego es de información imperfecta.

Juegos con información imperfecta

- La **información es imperfecta** si el jugador, en el momento de tomar una decisión, no sabe dónde está en el juego.
- Juegos con información no perfecta
  - El padre y sus tres hijos
  - El juego de piedra papel y tijeras tiene información no perfecta pero no azar
- Juegos con información no perfecta con azar
  - Poker simplificado

Juegos con información imperfecta (2)

- Para poder incluir información imperfecta en un juego necesitamos un mecanismo para representar el azar y otro que muestre los efectos del azar sobre el juego.
  - Un conjunto de información asignado al azar significa que es el azar el que debe realizar su jugada.
  - Las ramas que parten de un nodo de azar representan probabilidades.
  - Cualquier conjunto de información que contiene más de un nodo refleja que el jugador tiene información imperfecta.

Juegos con información imperfecta (3)

- Un jugador no sabe en qué nodo estará cuando le corresponda hacer su jugada. Lo único que conoce son las probabilidades con que se llega a cada uno de esos nodos.
- Aunque la información sea imperfecta, se hace necesario tomar una decisión.
- Para solucionar su problema de decisión, un jugador debe comparar la utilidad esperada de las alternativas a su disposición.

Juegos con información imperfecta (3)

- Muchas decisiones deben tomarse sin tener conocimiento completo de sus consecuencias.
- Los tomadores de decisiones deben decidir no solamente acerca de cuáles riesgos son aceptables sino también acerca de la manera en que las incertidumbres que enfrentan los otros jugadores pueden afectar sus decisiones.
- La dispersión de información introduce un papel para estrategias ofensivas y defensivas: cómo aprovechar cualquier ventaja informativa propia y cómo limitar las ventajas de información de otros.

Información Completa e incompleta

- En los juegos de **información incompleta**, los jugadores del alcalde pueden no conocer algunos en formación sobre los otros jugadores, por ej. su "tipo", sus estrategias, pagos o preferencias.
- Por ej. el juego del dilema del prisionero

1.3. Juegos de suma cero y no cero, o Juegos de suma cero y suma variable

- Los juegos en que los intereses de los jugadores son contrapuestos se llaman juegos de suma cero
- Los juegos en que los intereses de los jugadores no se hallan totalmente contrapuestos se llaman juegos de **suma variable**
- La resolución de juegos de suma variable es más difícil que la resolución de juegos de suma cero

Juegos de suma cero y suma constante

- En un juego de suma cero, para cada posible resultado del juego la suma de las utilidades de los dos jugadores suma cero: lo que un jugador gana, el otro lo pierde

$$\mathrm{u}_1 + \mathrm{u}_2 = 0$$

- En un juego de suma cero no se crea valor, se redistribuye valor
- En un juego de suma constante la suma de las utilidades de los jugadores es una constante *k*

Transformando un juego de suma constante a suma cero

- Se transforman las utilidades absolutas de cada jugador en ventajas relativas al otro jugador:

$$u_1 + u_2 = k$$

$$v_1 = u_1 - u_2$$

$$v_2 = u_2 - u_1$$

$$v_1 + v_2 = 0$$

$$v_1 = 2u_1 - k$$

$$v_2 = 2u_2 - k$$

$$v_1 + v_2 = 0$$

Juegos de suma constante, dos jugadores

- Una estrategia dominante es al menos tan buena como cualquier otra estrategia ante cualquier contingencia y mejor al menos ante alguna contingencia
- Si hay una estrategia dominante no importa lo que haga el adversario: lo mejor para uno es jugar la estrategia dominante

Juegos de suma variable con dos jugadores

- En un juego de suma variable la suma de las utilidades de los jugadores es diferente según los resultados
- Se hace entonces necesario distinguir entre equilibrio y solución.
- Un resultado ha de ser un equilibrio (condición necesaria) antes de poder ser candidato a solución: si un resultado no es un equilibrio, algún jugador puede mejorar su situación si cambia su estrategia
- La condición suficiente para lograr una solución es que el equilibrio provenga de estrategias no dominadas desde el punto de vista de cada jugador
- Satisfacer condiciones suficientes no garantiza que haya una solución única

1.4. Juegos cooperativos y no cooperativos

- Tradicionalmente la Teoría de Juegos clásica se ha dividido en dos ramas:
  - **Teoría Cooperativa**
  - **No Cooperativa**

1.4. Juegos cooperativos y no cooperativos

- La Teoría de Juegos No Cooperativa asume que no hay lugar para comunicación, correlación o acuerdos entre los jugadores, de no ser explícitamente estipulados por las reglas del juego
- Le interesa describir recomendaciones para que ninguno de los jugadores tenga incentivos para unilateralmente desviarse (esto es, si los demás siguen las recomendaciones, y yo me muevo, pierdo)
- Esta idea corresponde al concepto de Equilibrio de Nash: el concepto más importante en Teoría No Cooperativa (1950)

Conflicto y Cooperación

- Los dos aspectos esenciales de cualquier situación estratégica son el conflicto y la cooperación
- Es poco usual que los objetivos de los participantes sean idénticos. También es inusual que la situación sea de conflicto puro (suma cero)
- En general hay algunas posibilidades de cooperación que generen una ganancia mutua resultante de la interacción.

Conflicto y Cooperación (2)

- En un juego de suma cero, las acciones de un jugador afectan la distribución pero no el tamaño del pastel
- La mayor parte de los juegos de negocios no son de suma cero: el tamaño del pastel queda determinado por las acciones de los jugadores, por lo que puede pasar que acciones individuales tendientes a lograr una porción mayor resulten en un menor tamaño del pastel

Conflicto y Cooperación (3)

- El juego de competencia entre empresas con un resultado ineficiente es bastante común
- Los jugadores no tienen incentivos para tomar en cuenta los efectos de sus decisiones sobre otros jugadores, por lo que se llega con frecuencia a resultados ineficientes
- Puede haber oportunidades de mutua ganancia provenientes de la interacción entre jugadores, pero la lógica de la situación implica que no se obtengan esas ganancias

Dilema de los prisioneros

- Un resultado es eficiente si no existe ningún otro resultado que proporcione a todos los jugadores una ganancia mayor.
- Todo juego en el que cada jugador tiene una estrategia dominante tiene una única solución que consiste en jugar esa estrategia dominante
- Cuando la solución resultante es ineficiente, se está frente a un problema tipo Dilema de los Prisioneros:
  - Los jugadores están presos de sus propias estrategias, a no ser que algo cambie en las reglas del juego.