

Introdução à Teoria dos Grafos

Edson Prestes

2020

Dedico este livro à minha família e amigos.

O importante é o ser e não o vir a ser; um não é o oposto do outro, havendo o oposto ou a oposição, cessa o ser. Ao findar o esforço para vir-a-ser, surge a plenitude do ser, que não é estático; não se trata de aceitação; o vir-a-ser depende do tempo e do espaço. O esforço deve cessar; disso nasce o ser que transcende os limites da moral e da virtude social, e abala os alicerces da sociedade. Esta maneira de ser é a própria vida, não mero padrão social.

Lá, onde existe vida, não existe perfeição; a perfeição é uma idéia, uma palavra; o próprio ato de viver e existir transcende toda forma de pensamento e surge do aniquilamento da palavra, do modelo, do padrão.

Jiddu Krishnamurti (1895-1986)

Prefácio

Este livro é resultado das minhas notas de aulas da cadeira de *Teoria dos Grafos e Análise Combinatória* que ministrei desde 2005 no Instituto de Informática na Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Ao longo dos anos, tenho observado a necessidade de um livro nesta área escrito em português com linguagem acessível. Assim nas minhas horas vagas detive-me a escrever este livro. Esta primeira versão demorou vários anos para ser finalizada devido aos meus inúmeros compromissos dentro e fora do País. Ela contou com o apoio dos meus alunos Renata Neuland e Gean Stein, à Jéssica Dagostini, Vinícius Lazzari no processo de revisão.

Espero que este livro motive os alunos da graduação em ciência da computação e também de áreas correlatas a se interessarem pela área de teoria dos grafos. É claro que esta área é muito mais ampla e densa do que o conteúdo discutido nas páginas seguintes, porém penso neste livro como um passaporte de entrada para esta área magnífica. Além das notas, este livro foi ancorado em obras magníficas listadas abaixo :

- F. Harary. **Graph Theory**. Addison-Wesley Publishing Company, 1969.
- J. A. Bondy e U.S.R. Murty. **Graph Theory with Applications**. Elsevier Science Ltd/North-Holland. 1979.
- J. Clark e D.A. Holton. **A First Look at Graph Theory**. World Scientific Pub Co Inc. 1991.
- D. West. **Introduction to Graph Theory**. Prentice-Hall, Inc. 1996.
- R. Diestel. **Graph Theory**. Springer-Verlag. 2005.
- J. M. Harris, J. L. Hirst e M. J. Mossinghoff. **Combinatorics and Graph Theory**. Springer Science+Business Media, LLC. 2005.
- J. Bang-Jensen e G. Gutin. **Digraphs - Theory, Algorithms and Applications** . Springer-Verlag. 2008.

Além de oferecer aos estudantes um livro com linguagem acessível, eu o ofereço como um presente a todos aqueles que precisam adquirir conhecimento nesta área e muitas vezes não possuem ou conhecimento básico adequado ou recursos financeiros. Por isso tentei ser o mais didático possível neste texto e escrevi este trabalho sob a política do Creative Commons. Acredito que qualquer pessoa mereça acesso ao conhecimento. Assim barreiras precisam ser quebradas e uma das formas de fazermos isso é através de publicações abertas. Já fui um estudante de graduação e sei a dificuldade que é adquirir uma obra na área.

Espero que apreciem o trabalho, e desfrutem dele sem moderação :)

Edson Prestes

Conteúdo

1	Fundamentação Teórica	1
1.1	Conceitos Básicos	2
1.2	Relação de Vizinhança	7
1.3	Matrizes de Adjacência e de Incidência	11
1.4	Passeios e Circuitos	13
1.5	Grafos Eulerianos e Hamiltonianos	18
1.6	Isomorfismo e Automorfismo	22
1.7	Aplicações	26
1.7.1	Associação de Tarefas	26
1.7.2	Robótica	27
1.7.3	Nichos Ecológicos	27
1.7.4	Rede de Telefonia Móvel	28
1.7.5	Reconhedores de sentenças	29
1.7.6	Redes Neurais Artificiais	29
1.8	Exercícios	30
2	Tipos de Grafos e Operações	35
2.1	Grafos Especiais	35
2.2	Operações com grafos	39
2.2.1	União	39
2.2.2	Junção	40
2.2.3	Intersecção	40
2.2.4	Produto	41
2.2.5	Complemento	41
2.2.6	Remoção	43
2.2.7	Contração	43
2.2.8	Supressão e Subdivisão	44
2.2.9	Decomposição	45

2.2.10	Operador Linha L	46
2.3	Exercícios	47
3	Conectividade	51
3.1	Relação de Vizinhança Estendida e Fechamento Transitivo . . .	52
3.2	Grafos Conexos e Desconexos	55
3.3	Vértice de Corte	56
3.4	Aresta de Corte	59
3.5	Conectividade em Dígrafos	61
3.6	Cálculo de Componentes	67
3.7	Exercícios	70
4	Relacionamentos V-A	73
4.1	Clique	73
4.2	Conjunto Independente	77
4.3	Cobertura de Vértices	81
4.4	Conjunto Dominante	84
4.5	Emparelhamento	88
4.6	Exercícios	94
5	Enumeração	97
5.1	Método de Maghout	97
5.2	Enumeração em Grafos	101
5.2.1	Coberturas de Vértices e Conjuntos Independentes . . .	101
5.2.2	Cliques	103
5.2.3	Conjuntos dominantes	104
5.2.4	Emparelhamentos	106
5.3	Enumeração em Dígrafos	111
5.3.1	Coberturas de Vértices e Conjuntos Independentes . . .	111
5.3.2	Coberturas de Fonte e Sumidouro	114
5.3.3	Cliques	115
5.3.4	Conjuntos Dominantes	116
5.3.5	Emparelhamentos	121
5.4	Exercícios	121
6	Árvores	125
6.1	Conceitos Básicos	125
6.2	Árvores Enraizadas	128

6.3	Árvores de Espalhamento	133
6.4	Exercícios	146
7	Planaridade	147
7.1	Multigrafos Planares	147
7.2	Teorema de Euler	150
7.3	Teorema de Kuratowski	154
7.4	Exercícios	154
8	Coloração	157
8.1	Grafos Coloríveis	157
8.2	Grafos Aresta-Coloríveis	162
8.3	Polinômio Cromático	163
8.4	O teorema das quatro cores	168
8.5	Exercícios	169

Capítulo 1

Fundamentação Teórica

A Teoria dos Grafos surgiu com os trabalhos de L. Euler, G. Kirchhoff e A. Cayley. O primeiro e mais famoso problema, chamado o *problema das pontes de Königsberg* foi enunciado por Euler em 1736. Na cidade de Königsberg (antiga Prússia), existiam sete pontes que cruzavam o rio Pregel estabelecendo ligações entre diferentes partes da cidade e as ilhas Kneiphof e Lomse (ver Figura 1.1). O problema consistia em determinar se era possível ou não fazer um passeio pela cidade começando e terminando no mesmo lugar, cruzando cada ponte exatamente uma única vez. Veremos na Seção 1.5 que a resposta para esta pergunta é *não*.

Problema das Pontes de Königsberg

A Teoria dos Grafos possui aplicação direta em áreas como física, química, engenharias, psicologia, etc. Em particular, ela é de fundamental importância aos cursos de Ciência e Engenharia da Computação. Isto se deve a inúmeros motivos, entre eles, o fato de servir de modelo matemático para alguns dos problemas mais importantes e difíceis da computação. Estes problemas estão associados à classe de problemas NP-Completo, cuja solução em tempo polinomial por uma máquina de turing determinística não é conhecida.

Vários problemas do mundo real podem ser analisados usando a Teoria dos Grafos, por exemplo, o escalonamento de processos pode ser visualizado como um aplicação direta do problema de coloração de grafos; o problema de reconhecimento de padrões pode ser visto como uma instância do problema de isomorfismo em grafos; o problema de roteamento é o problema de verificar se um grafo é Hamiltoniano ou não, e se for determinar o ciclo hamiltoniano de custo mínimo.

Este livro introduz a base teórica da área de Teoria dos Grafos, apresentando os principais conceitos (definições, propriedades, classes, teoremas) e

problemas. Exemplificaremos sempre que possível o uso destes conceitos em problemas do mundo real. Além disso, será dada ênfase ao aspecto combinatorial da área apresentando o uso da análise combinatória em problemas de enumeração e contagens.

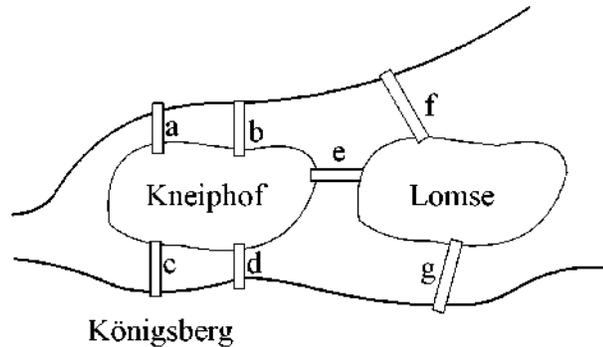


Figura 1.1: Pontes de Königsberg

1.1 Conceitos Básicos

Grafo Simples

Definição 1.1. Um grafo simples $G = (V, A)$ é uma estrutura discreta formada por um conjunto não vazio de vértices V e um conjunto de arestas $A \subseteq \mathcal{P}(V)$, onde $\mathcal{P}(V) = \{\{x, y\} : x, y \in V\}$ é o conjunto de todos os pares não ordenados¹ não necessariamente distintos gerados a partir de V . Cada aresta $\{x, y\} \in A$ é formada por um par de vértices distintos, i.e., $x \neq y$. Para cada par de vértices existe no máximo uma aresta associada.

Vértices Adjacentes

Dois vértices x e y são adjacentes se e somente se existe uma aresta $\{x, y\} \in A$. Neste caso, dizemos que a aresta $\{x, y\}$ é incidente aos vértices x e y . Quando um vértice não é adjacente a outro, dizemos que ele é um vértice *isolado*.

Multigrafo Pseudografo

Um grafo deixa de ser simples quando possui múltiplas arestas entre o mesmo par de vértices e/ou quando possui uma aresta, chamada *laço*, incidente a um par de vértices não distintos. Se o grafo possuir múltiplas arestas e não possuir laços então ele é chamado *multigrafo*, caso contrário, se ele possuir laços então é chamado de *pseudografo*. A existência de múltiplas

¹Um par não ordenado formado pelos vértices x e y é representado por $\{x, y\}$, onde $\{x, y\} = \{y, x\}$. Se $x = y$, então $\{x, y\} = \{x, x\} = \{x\}$.

arestas, leva à definição da função $\phi : A \rightarrow \mathcal{P}(V)$, chamada de *função de incidência* do grafo, que mapeia cada aresta ao par de vértices associado. Isto permite distinguir cada aresta individualmente. Baseado nisto, temos a seguinte definição que inclui multigrafos, pseudografos e grafos simples.

Definição 1.2. Um grafo $G = (V, A, \phi)$ é um conjunto não vazio de vértices V , um conjunto de arestas A , e uma função de mapeamento $\phi : A \rightarrow \mathcal{P}(V)$ que mapeia cada aresta a um par não ordenado formado pelos vértices de G . O número de vértices de G , denotado por $|V|$ indica a ordem de G , enquanto que o número de arestas, denotado por $|A|$, indica o tamanho de G^2 .

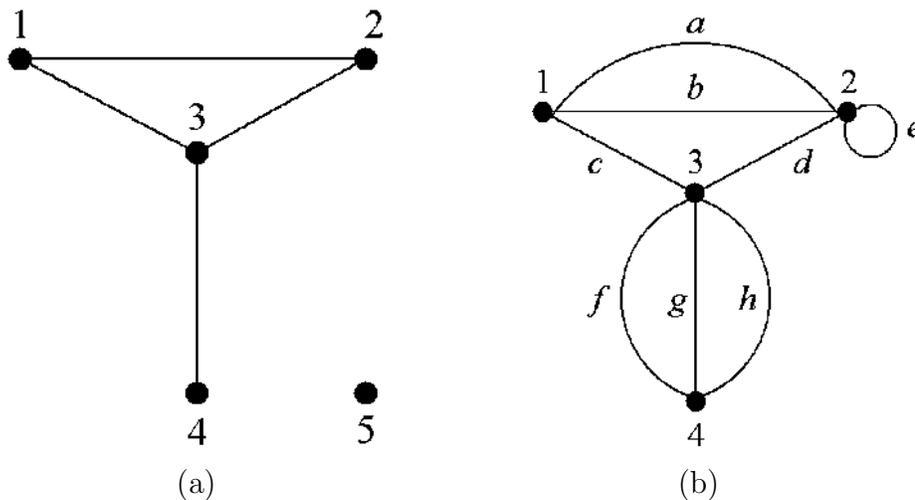


Figura 1.2: Exemplos de (a) grafo simples e (b) pseudografo

A Figura 1.2 mostra um (a) grafo simples e um (b) pseudografo, onde as linhas representam as arestas e os círculos escuros representam os vértices. Em (a), cada aresta une um par de vértices distintos e não existem múltiplas arestas unindo um mesmo par. Logo, cada aresta é representada pelos vértices os quais incide, por exemplo, a aresta unindo os vértices 1 e 2 é representada por $\{1, 2\}$. Assim, $\phi(\{1, 2\}) = \{1, 2\}$, i.e., $\phi(\{x, y\}) = \{x, y\}$, $\forall \{x, y\} \in A$. Em (b) existem múltiplas arestas unindo os vértices 1 e 2, e os vértices 3 e 4. Para distingui-las, as arestas são rotuladas com as letras de a a h . Observe que $\phi(f) = \phi(g) = \phi(h) = \{3, 4\}$ e $\phi(a) = \phi(b) = \{1, 2\}$, porém $f \neq g \neq h$

²Alguns autores usam $|G|$ e $\|G\|$ para indicar a ordem e o tamanho de G , respectivamente

Multiplicidade de Arestas

e $a \neq b$. Quando um dado par de vértices está associado a k arestas distintas, dizemos que ele possui multiplicidade igual a k , i.e., $\mu(x, y) = k$. Neste caso, a multiplicidade do par $\{3, 4\}$ é igual a $\mu(3, 4) = 3$, enquanto que a multiplicidade do par $\{1, 2\}$ é igual a $\mu(1, 2) = 2$. Em um grafo simples a multiplicidade de cada par de vértices é no máximo igual a 1. Em (a), existe um vértice isolado representado pelo vértice 5, enquanto que em (b), existe um laço representado pela aresta e . Se (b), não possuísse o laço e , então seria um multigrafo. A existência de laço indica que o grafo é um pseudografo. Neste livro iremos apenas distinguir o grafo simples dos demais grafos, que serão chamados apenas por grafos.

Para este exemplo, o grafo da Figura 1.2(a) é representado por $G_a = (V_a, A_a, \phi_a)$ ou apenas por $G_a = (V_a, A_a)$, pois como ele é simples, a função $\phi_a(\cdot)$ se torna a função identidade podendo ser suprimida. Os conjuntos de vértices e arestas são definidos por $V_a = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $A_a = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{3, 2\}, \{3, 4\}\}$, respectivamente. Por outro lado, o grafo da Figura 1.2(b) é definido por $G_b = (V_b, A_b, \phi_b)$ com $V_b = \{1, 2, 3, 4\}$, $A_b = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ e

$$\phi_b = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ \{1, 2\} & \{1, 2\} & \{1, 3\} & \{2, 3\} & \{2\} & \{3, 4\} & \{3, 4\} & \{3, 4\} \end{pmatrix}$$

Grafo Subjacente a Pseudografos e Multigrafos

Se retirarmos os laços e todas as múltiplas arestas entre cada par de vértice, mantendo apenas uma, transformaremos um pseudografo em um grafo simples. O mesmo pode ser feito no caso de multigrafos, porém não existem laços para serem removidos. O grafo simples encontrado é chamado de *grafo simples subjacente*, ou apenas, *grafo subjacente* ao multigrafo ou ao pseudografo. Realizando este procedimento no grafo da Figura 1.3(a), encontramos o grafo simples mostrado em (b).

As arestas de um grafo possuem a função de indicar o relacionamento entre os elementos que o grafo representa, que podem ser do mundo real ou não, de forma simétrica. Este relacionamento pode corresponder a uma propriedade espacial, comportamental, temporal ou outra. Em diversas situações esta relação não é simétrica, por exemplo, o sentido do fluxo de carros nas ruas de uma cidade. Se representarmos cada entrocamento (cruzamento) desta cidade como sendo um vértice em um grafo e o fluxo permitido como sendo a relação entre os entrocamentos, veremos que em diversas situações a ida de um entrocamento A para o entrocamento B não implica a volta, ou seja, a ida do entrocamento B para o entrocamento A . Nesta situação

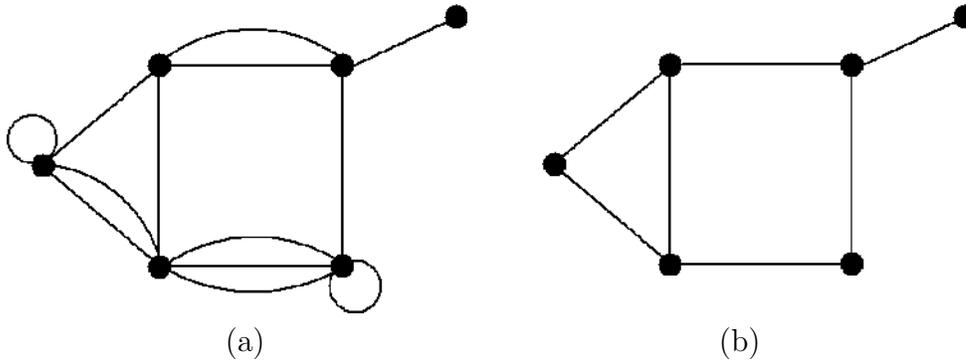


Figura 1.3: Exemplo de (a) pseudografo e seu (b) grafo simples subjacente.

precisamos ter uma forma de indicar esta restrição no grafo. Isto é feito determinando uma direção para cada aresta.

A inserção desta informação faz com que o grafo se torne orientado. Associando pares ordenados de vértices às arestas do grafo, teremos um *grafo direcionado* ou *dígrafo*. Cada par ordenado³ (x, y) define um arco com origem em (ou adjacente em) x e destino em (ou adjacente para) y , ou seja, $(x, y) \neq (y, x)$. É comum dizermos que o vértice x domina y , e que o vértice y é dominado por x . De forma similar ao exposto anteriormente para grafos, um dígrafo pode conter laços e múltiplos arcos entre um mesmo par ordenado de vértices. Quando um dígrafo não possui laços tão pouco múltiplos arcos entre um mesmo par ordenado de vértices, ele é chamado *dígrafo simples* ou *grafo direcionado simples*. Quando um dígrafo possui múltiplos arcos de um vértice a outro, então ele é chamado de *multigrafo direcionado*. Quando k arcos têm origem no vértice x e destino no vértice y , então dizemos que o arco (x, y) tem multiplicidade igual a k , i.e., $\mu(x, y) = k$. Em pseudografos e multigrafos, $\mu(x, y) = \mu(y, x)$, o que não é garantido nos casos de multigrafos direcionados. Quando o dígrafo não possui laços, múltiplas arestas entre um mesmo par ordenado de vértices, nem pares simétricos de arcos então ele é chamado de *grafo orientado*. Quando laços são permitidos laços, o dígrafo é chamado de *pseudografo direcionado*.

Definição 1.3. Um dígrafo $D = (V_d, A_d, \phi_d)$ é um conjunto não vazio de vértices V_d , um conjunto de arcos A_d , e uma função de mapeamento $\phi_d : A_d \rightarrow V_d \times V_d$ que mapeia cada arco a um *par ordenado* formado pelos

³Um par ordenado formado pelos vértices x e y é representado de maneira tradicional por (x, y) , onde, $(x, y) \neq (y, x)$.

Dominância

**Dígrafo Simples
Multigrafo Direcionado**

**Grafo Orientado
Pseudografo Direcionado**

vértices de D . De forma similar à definição usada para grafos, o número de vértices de D , denotado por $|V_d|$ indica a ordem de D , enquanto que o número de arcos, denotado por $|A_d|$, indica o tamanho de D^4 .

A Figura 1.4(a) ilustra um *grafo orientado*, enquanto que (b) ilustra um *pseudografo direcionado*. (b) possui múltiplos arcos entre um mesmo par ordenado, entre eles podemos destacar, os arcos a e b que têm origem no vértice 1 e destino no vértice 2. Além disso, ele possui o laço e . Se este dígrafo não possuísse os arcos b , g e e , ele seria classificado como *dígrafo simples*. Se removêssemos desse dígrafo simples o arco h ou f , estaríamos eliminando o único par simétrico existente, e este dígrafo passaria a ser um *grafo orientado*. Neste livro iremos apenas distinguir o grafo orientado dos demais dígrafos, os quais serão chamados apenas por dígrafos.

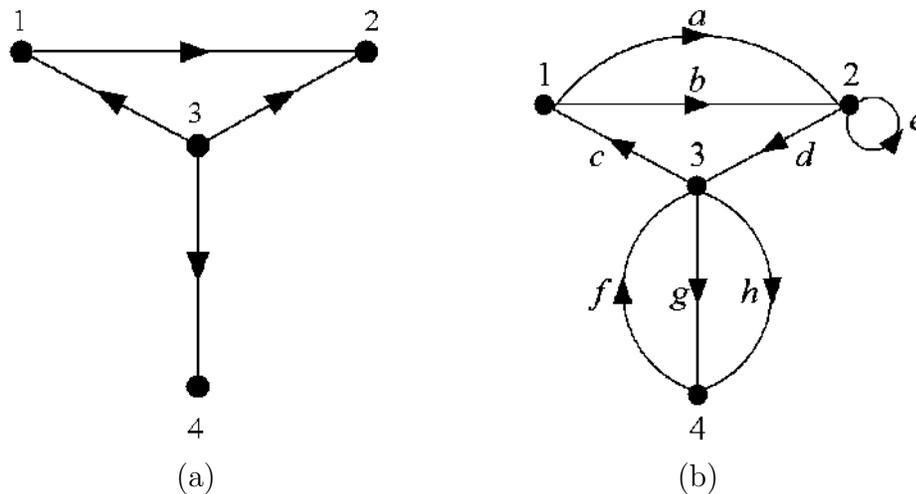


Figura 1.4: Exemplos de (a) dígrafo simples e (b) pseudografo direcionado

Grafo Subjacente ao Dígrafo

De forma similar aos grafos, um dígrafo possui um *grafo subjacente*. Ele é obtido substituindo cada arco por uma aresta, i.e., removendo a orientação de cada arco. Por exemplo, a Figura 1.2(b) mostra o grafo subjacente ao dígrafo ilustrado na Figura 1.4(b).

Definição 1.4. Um grafo $G_1 = (V_1, A_1)$ é um *subgrafo* de $G_2 = (V_2, A_2)$, denotado por $G_1 \subseteq G_2$ se e somente se $V_1 \subseteq V_2$ e $A_1 \subseteq A_2$. Neste caso

⁴Alguns autores usam $|D|$ e $\|D\|$ para indicar a ordem e o tamanho de D , respectivamente

G_2 é *supergrafo* de G_1 . (definição similar para sub- e superdígrafos, porém considerando a orientação dos arcos).

Se G_1 é subgrafo de G_2 , então G_2 é *supergrafo* de G_1 . Quando $G_1 \neq G_2$, então G_1 é um subgrafo próprio de G_2 . Quando $V_1 = V_2$, então G_1 é chamado de **Subgrafo e Subdígrafo de Espalhamento** ou *subgrafo gerador* ou *subgrafo de espalhamento* de G_2 . Para um dígrafo D_1 , um subdígrafo D_2 que contém um conjunto de vértices igual ao conjunto de vértices do dígrafo original é chamado de **Subdígrafo de Espalhamento** ou **Fator** do dígrafo.

Considerando um grafo $G = (V, A)$ e um subconjunto não vazio $S_v \subseteq V$, um subgrafo de G induzido por S_v , denotado por $G[S_v]$, é aquele que tem como conjunto de vértices S_v e como conjunto de arestas todas as arestas de G que possuam ambas extremidades em S_v . Se $S_a \subseteq A$ é um subconjunto não vazio de arestas, $G[S_a]$ é um subgrafo de G induzido por S_a que tem como conjunto de arestas S_a e como conjunto de vértices as extremidades das arestas de S_a (Os mesmo conceitos se aplicam aos dígrafos, porém temos a expressão dígrafo induzido). A Figura 1.5 ilustra (a) um grafo G e os subgrafos induzidos (b) $G[S_v]$ e (c) $G[S_a]$, assumindo $S_v = \{0, 4, 5, 6\}$ e $S_a = \{\{0, 4\}, \{0, 5\}, \{0, 1\}, \{2, 6\}\}$. **Grafo Induzido**

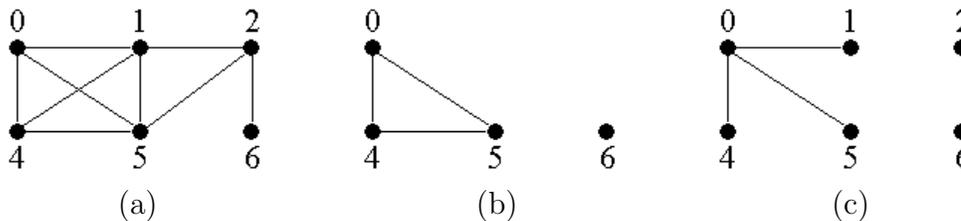


Figura 1.5: Exemplo de grafo induzido por vértices e por arestas. (a) grafo G , (b) grafo induzido $G[S_v]$ por um conjunto de vértices S_v e (c) grafo induzido $G[S_a]$ por um conjunto de arestas S_a

1.2 Relação de Vizinhaça

Tanto as arestas de um grafo quando os arcos de um dígrafo definem uma relação de vizinhaça entre os vértices. Para um grafo $G = (V, A, \phi)$, o conjunto de vértices adjacentes a um vértice $v \in V$ é definido pela função multivalorada de vizinhaça, $\tau : V \rightsquigarrow 2^V$,

$$\tau(v) = \{w : \{v, w\} = \phi(e) \wedge e \in A\}$$

Função Multivalorada de Vizinhaça

onde v pode ou não ser igual a w . Quando $v = w$ teremos $v \in \tau(v)$. O conjunto 2^V é chamado conjunto das partes e contém todos os subconjuntos que podem ser formados usando os elementos de V . Se $V = \{1, 2, 3\}$ então $2^V = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$. Portanto $|2^V| = 2^{|V|}$. Para um dígrafo $D = (V_d, A_d, \phi_d)$, as funções multivaloradas de vizinhança direta $\tau^+ : V_d \rightsquigarrow 2^{V_d}$ e inversa $\tau^- : V_d \rightsquigarrow 2^{V_d}$ são definidas por

$$\tau^+(v) = \{w : (v, w) = \phi_d(e) \wedge e \in A_d\}$$

e

$$\tau^-(v) = \{w : (w, v) = \phi_d(e) \wedge e \in A_d\}.$$

A função $\tau^+(v)$ retorna todos os vértices atingíveis diretamente a partir de v através dos arcos que têm origem em v , enquanto que $\tau^-(v)$ retorna todos os vértices que atingem diretamente v através dos arcos que têm como destino v . Lembrando que $\phi(e) = e$ (ou $\phi_d(e) = e$) para o caso de não existirem múltiplas arestas(ou arcos) entre um mesmo par de vértices.

A quantidade de vizinhos de um vértice permite determinar o que é chamado grau de um vértice. Para um grafo simples, o grau de qualquer vértice v , denotado por $d(v)$, é definido por $d(v) = |\tau(v)|^5$. Para um grafo qualquer $G = (V, A)$, o grau de um vértice v é definido pela quantidade n de arestas que unem v aos outros vértices do grafo(exceto ele próprio) e pela quantidade p de laços em v , ou seja,

$$d(v) = n + 2p.$$

Quando um vértice v é isolado, ou seja, $\tau(v) = \emptyset$, seu grau $d(v) = 0$. A partir daí, podemos definir o menor e maior graus dentre todos os seus vértices como, respectivamente,

$$\Delta(G) = \max_{v \in V} d(v) \text{ e } \delta(G) = \min_{v \in V} d(v).$$

Note que

$$\delta(G) \leq d(v) \leq \Delta(G), \quad \forall v \in V.$$

Na Figura 1.2(a),

$$d(1) = 2, d(2) = 2, d(3) = 3, d(4) = 1, d(5) = 0, \delta(G) = 0 \text{ e } \Delta(G) = 3.$$

Enquanto que na Figura 1.2(b),

$$d(1) = 3, d(2) = 5, d(3) = 5, d(4) = 3, \delta(G) = 3 \text{ e } \Delta(G) = 5.$$

⁵O grau de um vértice é denotado por d devido a palavra grau ser em inglês chamada degree.

Funções Multi-valoradas de Vizinhança Direta e Inversa

Grau

**Menor Grau
Maior Grau**

Teorema 1.1 (Handshaking Problem). Para um grafo $G=(V,A)$, temos

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|A|$$

Em um dígrafo qualquer, cada vértice v possui um grau de entrada, $d^-(v)$, e um grau de saída, $d^+(v)$. O grau de entrada de um vértice v é o definido pelo número de arcos que possuem como destino v (incluindo o laço) enquanto que o grau de saída é o número de arcos que possuem como origem v (incluindo o laço). Um laço em vértice v é contado uma única vez no grau de entrada de v e uma única vez no grau de saída de v . Para dígrafos simples (e grafos orientados), podemos usar as funções de vizinhança $\tau^-(v)$ e $\tau^+(v)$ para calcular os graus de saída e de entrada de cada vértice. Neste caso, para qualquer vértice v temos $d^-(v) = |\tau^-(v)|$ e $d^+(v) = |\tau^+(v)|$.

Graus de Entrada e de Saída

De forma similar ao exposto anteriormente, podemos definir para um dígrafo D os graus de entrada máximo e mínimo, $\Delta^-(D)$ e $\delta^-(D)$, respectivamente, e os graus de saída máximo e mínimo, $\Delta^+(D)$ e $\delta^+(D)$, respectivamente. Na Figura 1.4(a), o dígrafo tem

$$d^-(1) = 1, d^-(2) = 2, d^-(3) = 0, d^-(4) = 1, \delta^-(D) = 0, \Delta^-(D) = 2,$$

$$d^+(1) = 1, d^+(2) = 0, d^+(3) = 3, d^+(4) = 0, \delta^+(D) = 0, \Delta^+(D) = 3.$$

Enquanto que na Figura 1.4(b), o dígrafo tem

$$d^-(1) = 1, d^-(2) = 3, d^-(3) = 2, d^-(4) = 2, \delta^-(D) = 1, \Delta^-(D) = 3$$

$$d^+(1) = 2, d^+(2) = 2, d^+(3) = 3, d^+(4) = 1, \delta^+(D) = 1, \Delta^+(D) = 3.$$

Teorema 1.2. Para um dígrafo $D = (V_d, A_d)$ temos

$$\sum_{v \in V_d} d^-(v) = \sum_{v \in V_d} d^+(v) = |A_d|$$

Quando um vértice v de um dígrafo possui grau $d^-(v) = 0$, ele é chamado de *vértice fonte* e quando ele possui grau de saída $d^+(v) = 0$, ele é chamado de *vértice sumidouro*. A Figura 1.4(a) mostra um vértice fonte representado pelo vértice 3 e dois vértices sumidouros representados pelos vértices 2 e 4. Se este dígrafo está associado à uma rede de transmissão de dados, podemos relacionar o vértice fonte a um emissor que não é receptor, pois

Vértices Fonte e Sumidouro

ele apenas emite informações sem ter a capacidade de recebê-las de volta. Por outro lado, o vértice sumidouro é um receptor que não é emissor, ou seja, ele apenas recebe informações, porém sem ser capaz de propagá-la adiante para outros computadores. Os outros vértices conseguem tanto receber informações quanto propagá-la adiante.

Seqüência de Graus

A seqüência não crescente $d(G) = d_1, d_2, \dots, d_n$, com $d_i \geq d_j$ para $j \geq i$ formada pelo grau dos vértices de um grafo G de n vértices é chamada de *Seqüência de Graus*. Cada grafo possui uma única seqüência de graus, porém uma mesma seqüência pode estar associada a grafos distintos. A Figura 1.6 mostra dois grafos distintos estruturalmente com a mesma seqüência de graus igual a 4, 3, 2, 2, 1. Tanto a soma dos elementos desta seqüência quanto a quantidade de valores ímpares são pares.

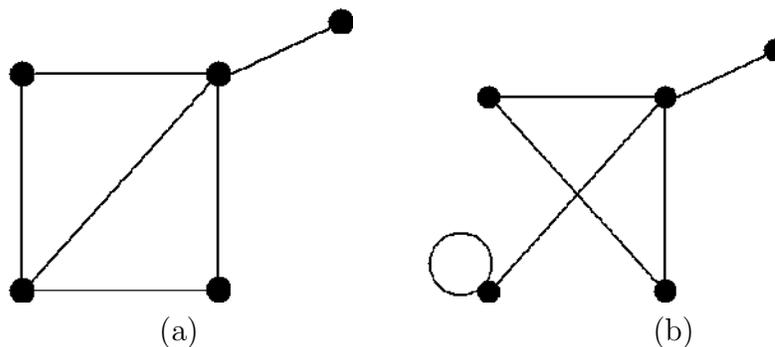


Figura 1.6: Grafos com mesma seqüência de graus.

Teorema 1.3. Toda seqüência não negativa d_1, d_2, \dots, d_n é uma seqüência de graus de um grafo (simples ou não) se e somente se $\sum_{i=1}^n d_i$ é par.

Existem seqüências que podem não estar associados a grafos simples. Por exemplo, com a seqüência 3, 3, 3, 1 não é possível construir um grafo simples, mesmo tendo a soma de seus termos um valor par (Verifique!). Se a seqüência permitir a construção de um grafo simples então ela é chamada *seqüência gráfica*. Para verificar se uma dada seqüência é gráfica ou não usamos o seguinte Teorema .

Seqüência Gráfica

Teorema 1.4 ([1]). Para $n > 1$, uma seqüência d de *inteiros* com n elementos é uma *seqüência gráfica* se e somente se d' é uma *seqüência gráfica*, onde d' é obtido a partir de d removendo seu maior elemento Δ e subtraindo 1 de seus

Δ maiores elementos seguintes. Assumimos que a única seqüência gráfica com 1 elemento é $d_1 = 0$.

A aplicação do Teorema 1.4 na seqüência $s_1 = 3, 3, 3, 1$ leva aos seguintes passos. Inicialmente removemos o maior elemento $\Delta_1 = 3$ e subtraímos de 1 os Δ_1 maiores elementos seguintes. Isto resulta na seqüência $s_2 = 2, 2, 0$. Em s_2 , repetimos o processo, removendo o maior elemento $\Delta_2 = 2$, e subtraindo de 1 os Δ_2 maiores elementos seguintes. Isto resulta na seqüência $s_3 = 1, -1$, que não corresponde a uma seqüência gráfica, já que um dos requisitos para que uma seqüência seja gráfica é que ela seja formada apenas por valores não negativos.

1.3 Matrizes de Adyacência e de Incidência

Um grafo $G = (V, A)$, com $|V| = n$ e $|A| = m$, pode ser representado usando dois tipos de matriz, chamados de matriz de adyacência e matriz de incidência. A matriz de adyacência é uma matriz $M = [m_{i,j}]$ simétrica $n \times n$ que armazena o relacionamento entre os vértices do grafo. Cada entrada $m_{i,j}$ é igual a

$$m_{i,j} = \begin{cases} 0 & , \text{ se } i \text{ não é adjacente a } j \\ m & , \text{ se } i \text{ é adjacente a } j \text{ (com } i \neq j), m \text{ corresponde à quantidade} \\ & \text{de arestas conectando } i \text{ e } j. \\ p & , \text{ se } i = j, p \text{ é a quantidade de laços incidentes ao vértice } i. \end{cases}$$

Por outro lado, a matriz de incidência $B = [b_{i,j}]$ é uma matriz $n \times m$, que associa os vértices às arestas de G . Cada entrada $b_{i,j}$ relaciona o vértice i à aresta j assumindo os seguinte valores

$$b_{i,j} = \begin{cases} 0 & , \text{ se } j \text{ não é incidente em } i \\ 1 & , \text{ se } j \text{ é ou não um laço e } i \text{ é uma de suas extremidades.} \end{cases}$$

As matrizes de adyacência e de incidência para o grafo da Figura 1.2(b) são mostradas nas Tabelas 1.1 e 1.2.

De forma similar, um dígrafo D pode ser representado usando matrizes de incidência e de adyacência. A matriz de adyacência é uma matriz $A = [a_{i,j}]$, não necessariamente simétrica, onde cada entrada $a_{i,j}$ é igual a

$$a_{i,j} = \begin{cases} 0 & , \text{ se } i \text{ não é adjacente a } j \\ m & , \text{ onde } m \text{ é a quantidade de arcos com origem em } i \text{ e destino em } j \end{cases}$$

	1	2	3	4
1	0	2	1	0
2	2	1	1	0
3	1	1	0	3
4	0	0	3	0

Tabela 1.1: Matriz de Adjacência do grafo da Figura 1.2(b).

	a	b	c	d	e	f	g	h
1	1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	1	0	1	1	0	0	0
3	0	0	1	1	0	1	1	1
4	0	0	0	0	0	1	1	1

Tabela 1.2: Matriz de incidência do grafo da Figura 1.2 (b)

A matriz de adjacência para o dígrafo da Figura 1.4(b) é mostrada na tabela 1.3

	1	2	3	4
1	0	2	0	0
2	0	1	1	0
3	1	0	0	2
4	0	0	1	0

Tabela 1.3: Matriz de Adjacência do dígrafo da Figura 1.4(b).

Por sua vez, na matriz de incidência $B = [b_{i,j}]$ cada entrada b_{ij} relaciona o vértice i à aresta j assumindo os valores

$$b_{i,j} = \begin{cases} -1 & , \text{ se } j \text{ tem origem em } i. \\ 0 & , \text{ se } j \text{ não é incidente em } i \\ 1 & , \text{ se } j \text{ tem destino em } i. \end{cases}$$

A matriz de incidência para o dígrafo da Figura 1.4(b) é mostrada na Tabela 1.4

	a	b	c	d	e	f	g	h
1	-1	-1	1	0	0	0	0	0
2	1	1	0	-1	1	0	0	0
3	0	0	-1	1	0	1	-1	-1
4	0	0	0	0	0	-1	1	1

Tabela 1.4: Matriz de incidência do dígrafo da Figura 1.4 (b)

Muitas vezes a matriz de adjacência do grafo é esparsa, ou seja, a maioria dos seus elementos é igual a 0. Neste caso, para um grafo que possui n vértices, estaríamos utilizando um espaço de armazenamento proporcional a n^2 , sendo que apenas uma pequena quantidade de memória, associadas às arestas do grafo, estaria efetivamente sendo usada. Para resolver este problema, podemos representar a matriz de adjacência na forma de uma lista de adjacência, onde cada elemento desta lista possui referência a um vértice do grafo e um ponteiro para uma sub-lista contendo todos os vértices adjacentes associados. Se considerarmos que a maior sub-lista possui tamanho igual a $c \ll n$ (ou seja, c é muito menor que n), então no máximo estaremos usando um espaço de armazenamento proporcional a cn , que é muito menor que n^2 . Entretanto, se a matriz não for esparsa, ou seja, $\delta(G) \geq n/2$, então a lista de adjacência não é uma boa escolha. Pois neste caso, a verificação da adjacência entre dois vértices u e v consistirá em realizar uma busca linear na sub-lista associada a um dos dois vértices. Se o grafo é muito denso, por exemplo um K_n , isto envolverá no máximo n comparações. Por outro lado, esta verificação em uma matriz de adjacência consiste em apenas checar a entrada correspondente. Se a entrada for igual a 0 então os vértices não são adjacentes, caso contrário são adjacentes. Estes aspectos relacionados à eficiência valem também para dígrafos.

1.4 Passeios e Circuitos

Definição 1.5. Em um grafo, um **passeio** entre os vértices v e w é uma seqüência alternada de vértices e arestas $v = v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, \dots, a_n, v_n = w$ que começa em v e termina em w , de forma que cada aresta a_i é incidente aos vértices v_{i-1} e v_i . Tanto as arestas quanto os vértices podem ou não ser distintos. Se apenas as arestas forem distintas, então o passeio é chamado

de **trilha**. Se tanto as arestas quando os vértices forem distintos então, ele é chamado de **caminho**. Observe que

$$\text{caminhos} \subset \text{trilhas} \subset \text{passeios}$$

Passeio Fechado
Circuito
Ciclo

Se os vértices de origem e destino forem o mesmo, então o passeio é chamado de **passeio fechado**; a trilha é chamada de **circuito**; enquanto que o caminho é chamado apenas de **ciclo**. Em um grafo simples, um ciclo é descrito apenas por seus vértices já que a ordem dos vértices define exatamente que aresta foi visitada. Um dígrafo possui conceitos similares com a restrição de que orientação dos arcos deve ser obedecida.

É possível entre um mesmo par de vértices em um grafo G existirem diversos passeios, trilhas e caminhos. Considerando o grafo da Figura 1.2(b), entre os vértices 1 e 2 podemos ter os seguintes:

- *Passeios:* $(1, c, 3, d, 2)$, $(1, c, 3, g, 4, h, 3, g, 4, f, 3, d, 2)$, ...
- *Trilhas:* $(1, c, 3, d, 2)$, $(1, c, 3, g, 4, h, 3, d, 2)$, ...
- *Caminhos:* $(1, c, 3, d, 2)$, $(1, b, 2)$, ...

Dois caminhos entre um par de vértices u e v são vértice-disjuntos (ou apenas disjuntos) se eles compartilharem apenas os vértices u e v e nenhuma aresta. De forma similar, dois caminhos entre u e v são chamados aresta-disjuntos se eles não compartilharem aresta (Definição similar se aplica aos dígrafos). Estes conceitos são importantes quando estivermos analisando a conectividade de grafos no Capítulo 3.

Definição 1.6. Em um dígrafo, um **passeio direcionado** entre os vértices v e w é uma seqüência alternada de vértices e arcos $v = v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, \dots, a_n, v_n = w$ que começa em v e termina em w , de forma que cada arco a_i tenha origem em v_{i-1} e destino em v_i . Se apenas as arcos forem distintos, então o passeio direcionado é chamado de **trilha direcionada**. Se tanto os arcos quando os vértices forem distintos então, ele é chamado de **caminho direcionado**. Note que

$$\text{caminhos direcionados} \subset \text{trilhas direcionadas} \subset \text{passeios direcionados}$$

Passeio Direci-
onado Fechado,
Circuito Dire-
cionado, Ciclo
Direcionado

Se os vértices de origem e destino forem o mesmo, então o passeio direcionado é chamado de **passeio direcionado fechado**; a trilha é chamada de

This work is licensed under CC BY-NC-SA 4.0. To view a copy of this license, visit <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0>

circuito direcionado, enquanto que o caminho é chamado apenas de **ciclo direcionado**.

Além destas classificações, temos a noção de semi-caminho, semi-passeio e semi-trilha. Se considerarmos a seqüência alternada de vértices e arcos $v = v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, \dots, a_n, v_n = w$ que começa em v e termina em w , um *semi-passeio* é aquele onde o arco a_i tem origem em v_{i-1} e destino em v_i ou tem origem em v_i e destino em v_{i-1} . Se apenas os arcos forem distintos, então o semi-passeio é chamado de *semi-trilha*. Se tanto os arcos quanto os vértices forem distintos então, ele é chamado de *semi-caminho*. Note que não precisamos enfatizar que eles são direcionados, já que estes conceitos se aplicam apenas aos dígrafos. Podemos pensar que em todos os casos, estamos desconsiderando a orientação dos arcos e focando apenas nos caminhos, passeios e trilhas no grafo subjacente ao dígrafo. Analogamente, podemos definir *semi-passeio fechado*, *semi-circuito* e *semi-ciclo*.

Semi-Passeio

Semi-Trilha

Semi-Caminho

Em vários momentos, passeios, caminhos e trilhas, direcionadas ou não, serão chamadas de *passeio de espalhamento*, *caminho de espalhamento* e *trilha de espalhamento*, respectivamente. Isto ocorrerá quando estiverem sendo considerados todos os vértices do dígrafo ou grafo. Por exemplo, na Figura 1.2(b), o caminho $1, a, 2, d, 3, g, 4$ possui todos os vértices do grafo sendo, portanto, um caminho de espalhamento. Passeio fechado, circuito, e ciclo, direcionado ou não, são de espalhamento, quando considerarem todos os vértices do grafo ou dígrafo.

Passeio de Espalhamento, Caminho de Espalhamento, Trilha de Espalhamento

O comprimento de um passeio(ou passeio direcionado) é igual a quantidade de arestas(ou arcos) entre os vértices inicial e final. Um caminho(ou caminho direcionado) com n vértices possui $n - 1$ arestas, logo seu comprimento é igual a $n - 1$. Por conseguinte, um ciclo(ou ciclo direcionado) composto por n vértices possui comprimento exatamente igual a n .

Em grafos simples, os ciclos devem ter comprimento ≥ 3 , enquanto que em multigrafos, este comprimento deve ser ≥ 2 , pois podem existir múltiplas arestas entre um mesmo par de vértices. Em pseudografos, laços são ciclos especiais de comprimento igual a 1 chamados de *ciclos simples*. Para que haja um ciclo, que não seja simples, o número de vértices tem que ser igual ao número de arestas.

O comprimento do menor ciclo pertencente a um grafo G é chamado *cintura* e denotado por $g(G)$. Enquanto que o comprimento do maior ciclo é chamado de *circunferência* sendo denotado por $c(G)$. Um grafo que não possui ciclos, como por exemplo árvores, tem $g(G) = \infty$ e $c(G) = 0$. Uma

Cintura

Circunferência

Corda

aresta ou arco que une dois vértices em um ciclo, mas que não pertence ao ciclo é chamada *corda*.

Entre um par de vértices v e w em um grafo(ou dígrafo) $G = (V, A)$, podem existir inúmeros caminhos. Cada caminho representa um subgrafo(ou subdígrafo) de G , ou seja, considerando $P_{v,w} = (V_p, A_p)$ um caminho entre os vértices v e w , temos $P_{v,w} \subseteq G$. O comprimento de $P_{v,w}$, denotado aqui por $|P_{v,w}|$ é igual ao seu número de arestas, i.e., $|P_{v,w}| = |A_p|$. Se não existe caminho entre v e w , então $|P_{v,w}| = \infty$. Usando esta notação, a distância entre v e w é igual a

$$d(v, w) = \min_{P_{v,w} \subseteq G} |P_{v,w}|$$

Note que a distância entre v e w é definida pelo comprimento do menor *caminho* entre v e w . Este cálculo é muito importante em áreas como a robótica, já que o robô deve sempre que possível se deslocar no ambiente seguindo o caminho de menor comprimento. A partir da informação de distância, podemos calcular o diâmetro de G por

Diâmetro

$$diam(G) = \max_{v,w \in V} d(v, w)$$

Excentricidade

que corresponde à distância entre os vértices mais afastados de G , e também a excentricidade de cada vértice v de G que informa a maior distância possível entre v e todos os outros vértices do grafo,

$$e(v) = \max_{w \in V} d(v, w).$$

Raio

Usando a informação sobre a excentricidade dos vértices é possível calcular o raio de G por

$$raio(G) = \min_{v \in V} e(v)$$

que indica o menor valor de excentricidade presente em um grafo considerando todos os seus vértices; e reescrever a expressão que define o diâmetro de G como

$$diam(G) = \max_{v \in V} e(v)$$

Centro de um Grafo

A partir daí, definimos um vértice v como sendo central quando seu valor de excentricidade é igual ao raio do grafo, i.e., $e(v) = raio(G)$. Por conseguinte, o centro de um grafo G , denotado por, $\mathcal{C}(G)$, é um subgrafo induzido pelos seus vértices centrais, i.e.,

$$\mathcal{C}(G) = G[V'], \text{ tal que } V' = \{v \in V : e(v) = raio(G)\}$$

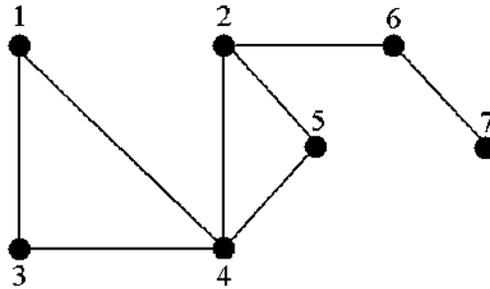


Figura 1.7: Grafo com $diam(G) = 4$, $raio(G) = 2$ e $\mathcal{C}(G) = G[\{2\}]$.

Como exemplo, considere o grafo G mostrado na Figura 1.7. Seus vértices possuem as seguintes excentricidades:

$$e(1) = 4, e(2) = 2, e(3) = 4, e(4) = 3, e(5) = 3, e(6) = 3 \text{ e } e(7) = 4.$$

O diâmetro e o raio deste grafo são iguais a $diam(G) = 4$ e $raio(G) = 2$, respectivamente. O centro é definido apenas pelo vértice 2, i.e., $\mathcal{C}(G) = G[\{2\}]$. Fazendo $G' = G - \{1, 4\}$, i.e., eliminando a aresta $\{1, 4\}$, o grafo passa a ter as seguintes excentricidades :

$$e(1) = 5, e(2) = 3, e(3) = 4, e(4) = 3, e(5) = 3, e(6) = 4 \text{ e } e(7) = 5.$$

O diâmetro e o raio de G' são iguais a $diam(G') = 5$ e $raio(G') = 3$, respectivamente. O centro é definido pelos vértices 2, 4 e 5, i.e., $\mathcal{C}(G) = G[\{2, 4, 5\}]$.

Estas informações podem ser utilizadas por um administrador de uma rede de computadores para saber quais são os nós centrais da rede que estão com sobrecarga de comunicação, ou os nós mais distantes a fim de aproximá-los através da inserção de outros pontos de comunicação. Note que uma rede ideal é aquela onde a comunicação entre pares de computadores ocorre diretamente. Em geral, redes com grandes diâmetros são mais lentas do ponto de vista de comunicação do que redes com baixos diâmetros. Entretanto, uma rede deste tipo é aceitável se a maioria dos seus computadores se comunicar através de conexões de curta distância. Portanto, convém avaliar uma rede não apenas pelo seu diâmetro, mas pela distância média entre pares de computadores. Isto leva ao *índice de Wiener* definido para um grafo $G = (V, A)$ por

$$W(G) = \sum_{u,v \in V} d(u, v)$$

**Índice
de Wiener**

Este valor não corresponde a uma distância média pois não está sendo dividido pelo número de pares possíveis dado por $\binom{|V|}{2}$. Entretanto, esta medida é válida pois para redes com mesmo número de nodos, a quantidade possível de pares é a mesma independente da topologia da rede. Logo, o número de pares pode ser suprimido do cálculo.

1.5 Grafos Eulerianos e Hamiltonianos

Problema das Pontes de Königsberg

Como visto anteriormente no início deste capítulo, o primeiro e mais famoso problema na área de Teoria dos Grafos é chamado o *problema das pontes de Königsberg*. Ele foi enunciado por Euler em 1736 e consistia em determinar se era possível ou não fazer um passeio pela cidade Königsberg começando e terminando no mesmo lugar, cruzando cada ponte exatamente uma única vez. A Figura 1.1 mostra as sete pontes que cruzavam o rio Pregel estabelecendo ligações entre diferentes partes da cidade e as ilhas Kneiphof e Lomse.

Circuito Euleriano

O grafo associado ao mapa mostrado na Figura 1.1 é ilustrado na Figura 1.8. Note que cada aresta é rotulada com uma das pontes mostradas na Figura 1.1 enquanto que os vértices de v_1 a v_4 estão associados às diferentes partes da cidade. O problema então consiste em determinar se é possível ou não fazer um circuito pelo grafo cruzando cada aresta uma única vez. Se isto for possível, então o grafo é chamado de *grafo euleriano* e ao circuito é dado o nome de *circuito euleriano*. A principal característica que define um multigrafo euleriano é dada pelo seguinte Teorema.

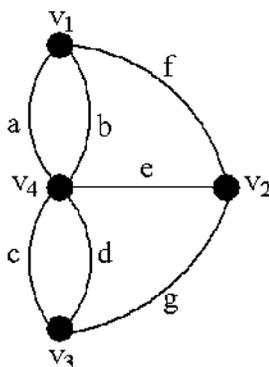


Figura 1.8: Multigrafo associado ao mapa mostrado na Figura 1.1.

Teorema 1.5 (Teorema dos Multigrafos Eulerianos). Um multigrafo conexo $G = (V, A)$ é Euleriano sse todos os vértices de G tiverem grau par.

Multigrafos Eulerianos

A demonstração deste teorema, deixada como exercício, além de mostrar que todo multigrafo Euleriano é um *multigrafo par*, i.e., possui todos os seus vértices com grau par, mostra também que todo multigrafo par pode ser decomposto em circuitos. O problema de verificar se um multigrafo possui ou não um circuito Euleriano está intimamente relacionado a outros problemas na área de teoria dos grafos, como o *problema do Carteiro Chinês*. Neste problema, o carteiro deve entregar cartas da forma mais eficiente possível visitando cada rua apenas uma única vez. Se o grafo subjacente à região de entrega das cartas for euleriano então qualquer circuito Euleriano escolhido será ótimo, porém se o grafo não for euleriano, o carteiro deverá encontrar um passeio fechado de custo mínimo revistando algumas das arestas do grafo.

Multigrafo Par

Problema do Carteiro Chinês

Se mudarmos sutilmente o problema e ao invés de tentarmos encontrar um circuito euleriano, tentarmos encontrar uma trilha euleriana, ou seja, uma trilha que começa em um vértice v e termina em um vértice u passando por cada aresta do multigrafo uma única vez, seremos levados ao seguinte teorema.

Teorema 1.6 (Teorema de Multigrafos Semi-Eulerianos). Um multigrafo conexo $G = (V, A)$ possui uma trilha euleriana e consequentemente é chamado de semi-euleriano sse tem no máximo dois vértices de grau ímpar.

Multigrafos Semi-Eulerianos

A Figura 1.9 ilustra em (a) um grafo euleriano e em (b) um grafo semi-euleriano. Em (b), as trilhas Eulerianas obrigatoriamente começam em um dos vértices de grau ímpar (vértices cinza), e terminam no outro vértice de grau ímpar (Verifique!).

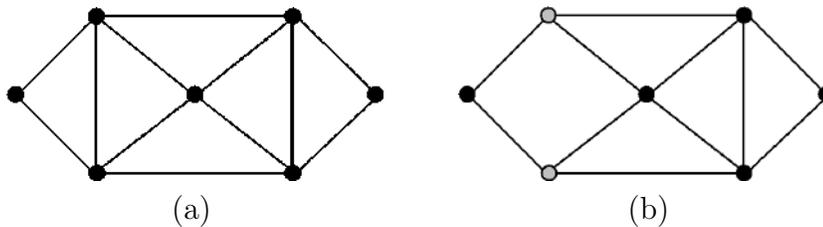


Figura 1.9: Exemplo de grafo (a) Euleriano e (b) Semi-Euleriano.

De forma similar aos multigrafos não direcionados, um multigrafo direcionado é euleriano se ele tiver um circuito direcionado euleriano. Note que

mostra um exemplo de grafo hamiltoniano, com o ciclo hamiltoniano destacado em vermelho. Este grafo foi a base do jogo chamado *Dodecaedro do Viajante* concebido por Sir. Hamilton.

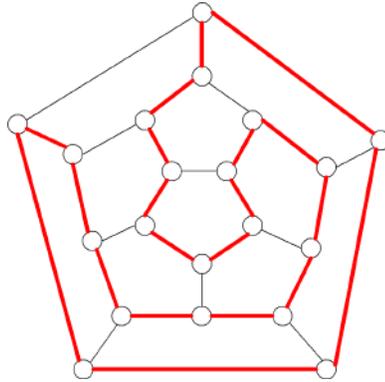


Figura 1.11: Grafo Hamiltoniano.

O problema do ciclo hamiltoniano está intimamente relacionado ao problema do caixeiro viajante, o qual consiste em encontrar um ciclo de custo mínimo que passe por uma série de cidades uma única vez retornando à cidade de partida. Observe que este problema é muito mais difícil do que simplesmente verificar se o grafo associado é hamiltoniano ou não, pois envolve a análise de todos os possíveis ciclos hamiltonianos em busca do ciclo de menor custo.

Problema do Caixeiro Viajante

Se o multigrafo em análise não contiver um ciclo hamiltoniano, mas contiver um *caminho hamiltoniano*, ou seja, um caminho que passe por todos vértices do multigrafo porém com o vértice de chegada diferente do vértice de destino então a este multigrafo é dado o nome de *multigrafo semi-hamiltoniano*. Para multigrafos ou pseudografos direcionados, o caminho hamiltoniano deve ser direcionado. A Figura 1.12 ilustra um grafo semi-hamiltoniano. O caminho destacado em vermelho é um caminho hamiltoniano. Se existisse uma aresta entre os vértices v e u , este grafo seria hamiltoniano. Este grafo também é semi-euleriano.

Multigrafo Semi-Hamiltoniano

Diferentemente dos grafos eulerianos, não existem condições necessárias e suficientes para caracterizar um grafo genérico como hamiltoniano ou não. Alguns resultados são apresentados abaixo

Teorema 1.8 ([2]). Um grafo $G = (V, A)$ com $|V| \geq 3$ é hamiltoniano se $\delta(G) \geq |V|/2$

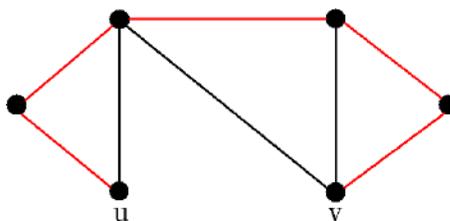


Figura 1.12: Grafo Semi-Hamiltoniano.

Teorema 1.9 ([3]). Um grafo $G = (V, A)$ com $|V| \geq 3$ é hamiltoniano se para todo par v e u de vértices não adjacente $d(v) + d(u) \geq |V|$.

1.6 Isomorfismo e Automorfismo

Muitas vezes nos deparamos com grafos diferentes mas que possuem a mesma estrutura, i.e., um poderia estar associado à relação ecológica de diferentes seres vivos enquanto outro poderia estar associado à relação entre átomos de um composto químico. A identificação e verificação se eles possuem ou não a mesma estrutura, i.e., se um pode ser mapeado no outro, é muito relevante para diversos tipos de problemas. Já que se este mapeamento existe então podemos dizer que estes grafos possuem as mesmas propriedades. Assim, se um grafo G com propriedades conhecidas consegue ser mapeado para um grafo D desconhecido, então podemos dizer que D possui as mesmas propriedades que G . Estas propriedades podem dizer respeito a aspectos relacionados à planaridade, coloração, cobertura de vértices, entre outros.

Definição 1.8. Dois grafos $G_1 = (V_1, A_1)$ e $G_2 = (V_2, A_2)$ são isomorfos, i.e., $G_1 \cong G_2$, se existe uma função bijetora $f : V_1 \rightarrow V_2$, tal que $(u, v) \in A_1$ sse $(f(u), f(v)) \in A_2$.

Grafos isomorfos apresentam as mesmas propriedades estruturais que preservam a adjacência entre seus vértices. Por exemplo, os grafos ilustrados na Figura 1.13 são diferentes entretanto apresentam as mesmas propriedades estruturais. A Tabela 1.5 mostra um possível mapeamento dos vértices de G_1 para os vértices de G_2 . Isso faz com que a aresta $(0, 5) \in A_1$ seja mapeada para a aresta $(e, d) \in A_2$, e a aresta $(0, 4) \in A_1$ seja mapeada para a aresta $(e, c) \in A_2$. Cada aresta em G_1 possui uma aresta correspondente em G_2

(Verifique!). Se pelo menos uma das aresta de G_1 não possuir uma correspondente em G_2 então a função escolhida não define o isomorfismo entre G_1 e G_2 . Notem que existem inúmeros mapeamentos possíveis. Outro mapeamento possível que garante o isomorfismo entre G_1 e G_2 é a partir desta tabela alterar as linhas 3 e 4, associando o vértice 2 ao vértice f e o vértice 3 ao vértice a .

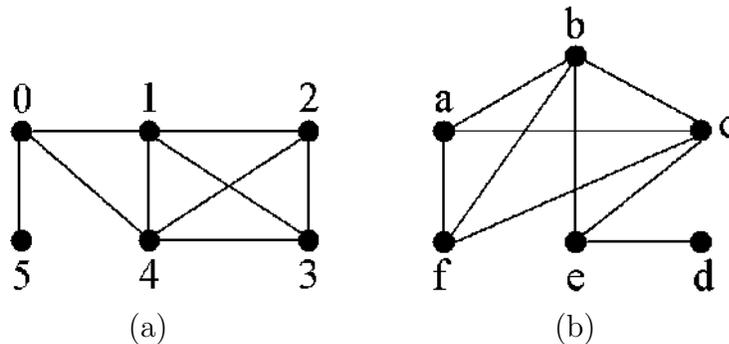


Figura 1.13: Exemplo de grafos isomorfos. O grafo (a) G_1 é isomórfico ao grafo (b) G_2 .

Assim entre os requisitos básicos para que dois grafos sejam isomorfos é que eles possuam a mesma quantidade de vértices e a mesma quantidade de arestas, i.e., $|V_1| = |V_2|$ e $|A_1| = |A_2|$. Porém verificar se dois grafos são ou não isomorfos nem sempre é uma tarefa trivial. Suspeita-se que este problema seja NP-Completo.

V_1	V_2
0	e
1	b
2	a
3	f
4	c
5	d

Tabela 1.5: Matriz de incidência do dígrafo da Figura 1.4 (b)

Um fato importante é que a função de isomorfismo define uma relação de equivalência possui as seguintes propriedades:

This work is licensed under CC BY-NC-SA 4.0. To view a copy of this license, visit <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0>

- Propriedade reflexiva. Uma permutação da identidade dos vértices de um grafo G_1 leva a um grafo G_2 que é isomorfo a G_1 , i. e., $G_1 \cong G_2$
- Propriedade simétrica. Sejam $G_1 = (V_1, A_1)$ e $G_2 = (V_2, A_2)$, se a função $f : V_1 \rightarrow V_2$ é uma função que define o isomorfismo entre G_1 e G_2 , então f^{-1} é a função inversa que define o isomorfismo entre G_2 e G_1 . Logo $(u, v) \in A_1$ sse $(f(u), f(v)) \in A_2$ e $(x, y) \in A_2$ sse $(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) \in A_1$.
- Propriedade Transitiva. Sejam $G_1 = (V_1, A_1)$, $G_2 = (V_2, A_2)$ e $G_3 = (V_3, A_3)$, e as funções $f : V_1 \rightarrow V_2$ e $h : V_2 \rightarrow V_3$ sejam funções que definam a relação de isomorfismo entre os grafos G_1 e G_2 ; e G_2 e G_3 , respectivamente. Como $(u, v) \in A_1$ sse $(f(u), f(v)) \in A_2$ e $(x, y) \in A_2$ sse $(h(x), h(y)) \in A_3$, se $(x, y) \in A_2$, então existe uma aresta $(u, v) \in A_1$ tal que $f(u) = x$ e $f(v) = y$. Logo, $(u, v) \in A_1$ sse $(h(f(u)), h(f(v))) \in A_3$. Portanto, a função composta $h \circ f$ define a relação de isomorfismo entre G_1 e G_3 , ou seja, $G_1 \cong G_3$.

Logo, a função de isomorfismo define uma classe de equivalência para um conjunto de grafos, onde dois grafos pertencem a mesma classe sse eles são isomorfos. Um exemplo de classe isomórfica é a classe chamada “grafos de Petersen”. Um grafo pertencente a esta classe é ilustrado na Figura 1.14(a). Este grafo possui vértices que estão associados a subconjuntos de dois elementos formado a partir do seguinte conjunto $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Dois vértices são adjacentes se seus subconjuntos correspondentes forem disjuntos, por exemplo, os vértices associados aos subconjuntos $\{1, 2\}$ e $\{3, 4\}$ são adjacentes. Note que o grafo da Figura 1.14(b) é isomorfo ao grafo (a). Grafos de Petersen são comumente usados como contra-exemplos em provas de teoremas devido às suas propriedades, as quais serão apresentadas mais adiante. Note que os grafos ilustrados na Figura 1.14 são formados por dois ciclos disjuntos de tamanho 5 destacados em preto e vermelho.

A noção de isomorfismo se aplica a multigrafos direcionados, porém ela é focada na multiciplidade dos arcos dos grafos envolvidos.

Grafo de Petersen

Isomorfismo de Multigrafos Direcionados

Definição 1.9. Dois multigrafos direcionados $M_1 = (V_1, A_1)$ e $M_2 = (V_2, A_2)$ são isomorfos, i.e., $M_1 \cong M_2$, se existe uma função bijetora $f : V_1 \rightarrow V_2$, tal que $\mu(u, v) = \mu(f(u), f(v))$, onde $(u, v) \in A_1$, $(f(u), f(v)) \in A_2$ e $\mu(u, v)$ é a multiplicidade do arco (u, v) .

Outro conceito associado ao isomorfismo é o *automorfismo*.

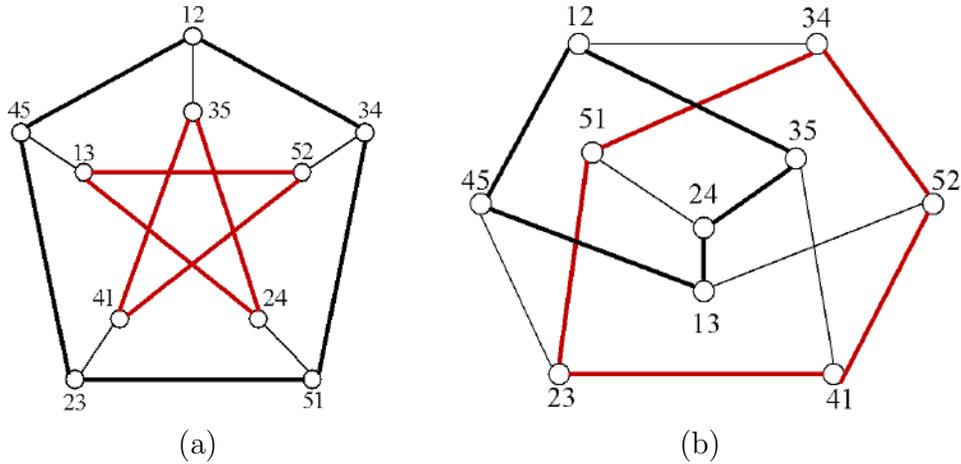


Figura 1.14: Grafo de Petersen. O grafo (a) G_1 é isomórfico ao grafo (b) G_2 .

Definição 1.10. Um automorfismo de um grafo $G = (V, A)$ é uma permutação dos vértices de G definida por uma função $f : V \rightarrow V$ de forma que para cada aresta $(v, u) \in A$ implica $(f(v), f(u)) \in A$. Ou seja, a permutação definida por f não muda a adjacência entre os vértices de G . **Automorfismo**

Considere um grafo $G = (V, A)$, ilustrado a partir de sua matriz de adjacência mostrada na Tabela 1.6, constituído do seguinte conjunto de vértices $V = \{1, 2, 3, 4\}$ e do seguinte conjunto de arestas $A = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$. Se permutarmos os vértices de V fazendo com que o vértice 1 passe a ser o vértice 4, e o vértice 2 passe a ser o vértice 3, teremos a matriz de adjacência ilustrada na Tabela 1.7. Reordenando as linhas e colunas desta matriz encontramos a matriz original mostrada na Tabela 1.6.

Se por ventura permutarmos apenas o vértice 1 com o vértice 4 mantendo os vértices 2 e 3 como estão não teremos um automorfismo de G . Esta permutação é ilustrada na Tabela 1.8. Se reordenarmos as linhas e colunas desta matriz não obteremos a matriz original mostrada na Tabela 1.6 (Verifique!). Embora este mapeamento leve a um grafo isomorfo ao grafo original, ele não define um automorfismo. Isto decorre do fato que o conjunto de arestas gerado é $\{(4, 2), (2, 3), (1, 3)\}$ o que é diferente do conjunto de arestas original, já que o vértice 4 não era adjacente ao vértice 2 no grafo original.

	1	2	3	4
1	0	1	0	0
2	1	0	1	0
3	0	1	0	1
4	0	0	1	0

Tabela 1.6: Matriz de adjacência do Grafo $G=(V,A)$, com $V = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$

	4	3	2	1
4	0	1	0	0
3	1	0	1	0
2	0	1	0	1
1	0	0	1	0

Tabela 1.7: Matriz de adjacência resultante da permutação dos vértices de grafo ilustrado na Tabela 1.6.

1.7 Aplicações

Esta seção apresenta alguns exemplos de aplicações do mundo real que envolvem Grafos.

1.7.1 Associação de Tarefas

Uma empresa precisa distribuir um conjunto de n tarefas \mathbf{T} entre seus n empregados \mathbf{E} , considerando que cada empregado j consegue realizar cada tarefa i em um dado tempo m_{ij} . Qual é a melhor associação entre tarefa e empregado de forma a minimizar o tempo de realização de todas as tarefas. Uma instância do problema é mostrada no grafo da Figura 1.15(a). Para facilitar a visualização os tempos m_{ij} não foram apresentados. A Figura 1.15(b) mostra a associação escolhida através de arestas mais grossas.

Este problema é um típico problema de emparelhamento, onde tanto as tarefas quanto os empregados são os vértices do grafo, e as arestas correspondem a associação entre os empregados e as tarefas. Cada aresta é rotulada com o tempo de realização da tarefa pelo empregado ao qual está associada. O objetivo é encontrar a melhor associação entre tarefas e empregados

	4	2	3	1
4	0	1	0	0
2	1	0	1	0
3	0	1	0	1
1	0	0	1	0

Tabela 1.8: Matriz de adjacência resultante da permutação apenas dos vértices 1 e 4 de G .

de forma a minimizar a soma dos tempos de realização de todas as tarefas. Como não existem arestas entre os empregados nem entre as tarefas, temos dois conjuntos compostos por vértices não adjacentes entre si. Conjuntos com esta característica são chamados de *conjuntos independentes* e serão discutidos apropriadamente no Capítulo 4.2.

1.7.2 Robótica

Vários problemas da área de robótica estão associados às tarefas de navegação de robôs em ambientes do tipo escritório. Neste tipo de tarefa, o robô possui um mapa do ambiente e deve planejar um caminho que o leve de uma posição a outra evitando colisões com obstáculos. Entre os diversos tipos de mapas, existe o mapa topológico, que consiste em uma representação do ambiente utilizando grafos. A Figura 1.16(a) mostra um ambiente e seu grafo subjacente. Os vértices estão associados às grandes regiões do ambiente e as arestas indicam como navegar entre estas regiões. Neste exemplo, se o robô precisar ir da sala A até a sala G, ele pode seguir por vários caminhos, que podem ser visualizados através dos vértices e arestas do grafo associado. A Figura 1.16(b) mostra um caminho possível através de arestas mais grossas.

1.7.3 Nichos Ecológicos

Grafos podem ser usados para modelar o relacionamento competitivo entre diferentes espécies de animais em um ecossistema. A competição ocorre quando indivíduos de uma mesma espécie ou de espécies diferentes disputam por algum recurso, como por exemplo, alimento. Quando a competição é grande e desigual, uma espécie pode mudar seus hábitos, migrar para outra região ou até mesmo ser extinta. Logo, estudar o relacionamento entre as

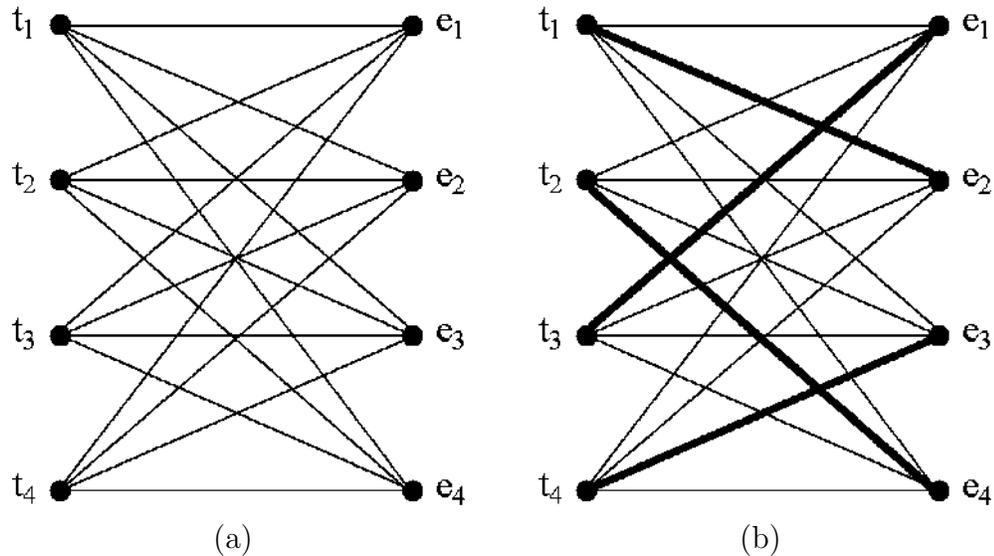


Figura 1.15: Associação de tarefas $t_i \in \mathbf{T}$ aos empregados $e_j \in \mathbf{E}$. (a) todas as associações (b) a associação escolhida, representada por arestas mais grossas.

espécies é fundamental para a preservação do ecossistema. Usando grafos, cada espécie pode ser modelada como um vértice e a competição entre duas espécies é indicada no grafo através de uma aresta entre os vértices correspondentes. A Figura 1.17 mostra um grafo que modela o relacionamento competitivo entre diferentes espécies do ecossistema de uma floresta.

1.7.4 Rede de Telefonia Móvel

Veremos no Capítulo 8 que um mapa pode ser desenhado no plano e colorido propriamente com apenas quatro cores, ou seja, regiões vizinhas possuem cores diferentes. Para que isto seja possível, as regiões do mapa são associadas aos vértices do grafo enquanto que a adjacência entre as regiões define as arestas entre os vértices correspondentes. A partir daí, cada vértice é colorido de forma que vértices adjacentes tenham cores distintas. Em um primeiro instante, pode-se pensar em usar uma cor diferente para cada vértice, porém problemas de coloração de grafos são problemas de otimização, onde a adição de uma nova cor implica aumento de custos. Logo, busca-se sempre a menor quantidade de cores possível.

Em 1982, o *Groupe Spécial Mobile* (GSM) foi criado para desenvolver um padrão a ser adotado pela telefonia móvel, e em 1991 surgiu a primeira rede GSM na Finlândia com o apoio da Ericsson. As redes GSM dividem as suas regiões de cobertura em células hexagonais. Cada célula possui uma torre de comunicação que gerencia a conexão dos celulares na sua área de cobertura. Os celulares por sua vez procuram células em sua vizinhança imediata de acordo com sua frequência de operação. Células adjacentes que possuem mesma frequência devem ser evitadas pois uma gera interferência no sinal da outra. Este fato faz com que o uso de coloração de grafos, em especial a coloração de mapas, tenha aplicabilidade direta. Por isso, as redes GSM usam apenas quatro frequências diferentes devido serem necessárias apenas quatro cores para colorir propriamente o mapa das regiões das células. Neste caso, as cores são representadas pelas frequências de operação.

1.7.5 Reconhedores de sentenças

Uma máquina teórica para reconhecer sentenças de uma linguagem, como autômatos finitos determinísticos ou finitos não determinísticos, é representada graficamente através de um dígrafo. Neste dígrafo os vértices representam os estados da máquina enquanto que os arcos representam as transições da máquina de um estado para o outro. Por exemplo, o dígrafo da Figura 1.18 representa um autômato finito determinístico capaz de reconhecer sentenças formadas pelos símbolos a e b com uma quantidade ímpar de a 's e uma quantidade ímpar de b 's. Os vértices são representados por S_1 , S_2 , S_3 e S_4 e os arcos têm origem e destino neste conjunto. Note que a seta que não possui origem em um destes estados e tem destino em S_1 , tem a função apenas de indicar o estado inicial da máquina, portanto não é um arco do dígrafo.

1.7.6 Redes Neurais Artificiais

Uma rede neural artificial é um modelo computacional utilizado na área de Inteligência Artificial para simular o funcionamento do cérebro humano. Ela é representada graficamente na forma de um dígrafo, onde cada vértice corresponde a um neurônio artificial e os arcos representam as conexões entre os neurônios, chamadas sinapses. As sinapses possuem um peso associado que pondera o sinal que flui entre os neurônios. Existem inúmeras formas de organização destes neurônios sendo a mais comum a estrutura multicamada mostrada na Figura 1.19. Nela a rede é organizada em camada de entrada,

camadas escondidas e camada de saída. Na figura, estas camadas são representadas pelas letras A, B e C, respectivamente. O sinal flui da camada de entrada até a camada de saída de acordo com a orientação das sinapses. Portanto, o padrão de entrada é fornecido para a rede na camada de entrada e a rede produz um padrão de saída. O padrão de entrada poderia ser a postura (x, y, θ) de um robô em um ambiente e a saída poderia ser a variação angular φ a ser aplicada em suas rodas dianteiras para fazê-lo atingir uma posição destino.

1.8 Exercícios

Exercício 1.1. *Mostre usando prova por indução que a soma total dos graus de todos os vértices de um grafo é sempre par*

Exercício 1.2. *Mostre que para qualquer grafo, o número de vértices com grau ímpar é par.*

Exercício 1.3. *Verifique se a seqüência de graus 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 1 é gráfica. Se for desenhe o grafo simples correspondente.*

Exercício 1.4. *Dado um grafo simples $G = (V, A)$, com $|V| = n$ qual é o significado de $\sum_{j=1}^n a_{i,j}$ para uma dada linha i da matriz de adjacência de G ?*

Exercício 1.5. *Sendo M a matriz de adjacência de um grafo G , qual é o significado combinatorial de M^2 , ou seja, do produto $M.M$?*

Exercício 1.6. *Mostre que todo passeio de v até w contém um caminho de v até w .*

Exercício 1.7. *Mostre que todo grafo G simples com um caminho de comprimento $\delta(G) \geq 2$ possui um ciclo de comprimento igual a no mínimo $\delta(G) + 1$.*

Exercício 1.8. *Mostre que se D é um dígrafo com $\delta^+(D) \geq 1$ (ou $\delta^-(D) \geq 1$), então D contém um ciclo.*

Exercício 1.9. *Mostre que um grafo G de raio $\text{raio}(G) \leq k$ e $\Delta(G) \geq 3$ tem um número de vértices inferior a $1 + \frac{\Delta(G)}{\Delta(G)-2}(\Delta(G) - 1)^k$.*

Exercício 1.10. *Mostre que com um conjunto de n vértices distintos é possível gerar $2 \binom{n}{2}$ grafos simples.*

Exercício 1.11. *Mostre que todo dígrafo acíclico (sem ciclos) possui vértice fonte e um vértice sumidouro.*

Exercício 1.12. *Mostre que um grafo simples $G = (V, A)$ com $\delta(G) > 0$ e $|A| < |V|$ possui pelo menos dois vértices de grau 1.*

Exercício 1.13. *Mostre que todo grafo com dois ou mais vértices tem pelo menos dois vértices de mesmo grau.*

Exercício 1.14. *Mostre que um multigrafo conexo $G = (V, A)$ é Euleriano sse o grau de todos os vértices de G for par.*

Exercício 1.15. *Mostre que dois vértices não adjacentes em um grafo de Petersen tem exatamente 1 vizinho em comum.*

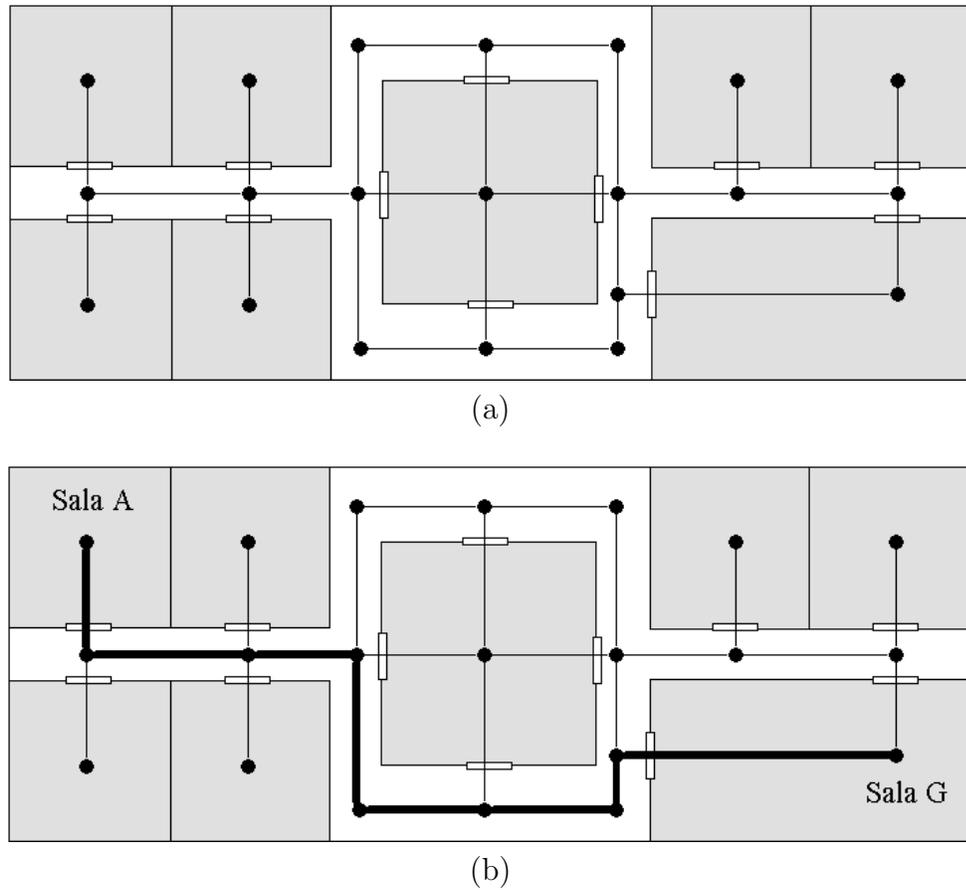


Figura 1.16: Mapa topológico de um ambiente do tipo escritório. (a) mostra o ambiente e o mapa topológico na forma de um grafo (b) destacada o caminho escolhido para ir da sala A até a sala G.

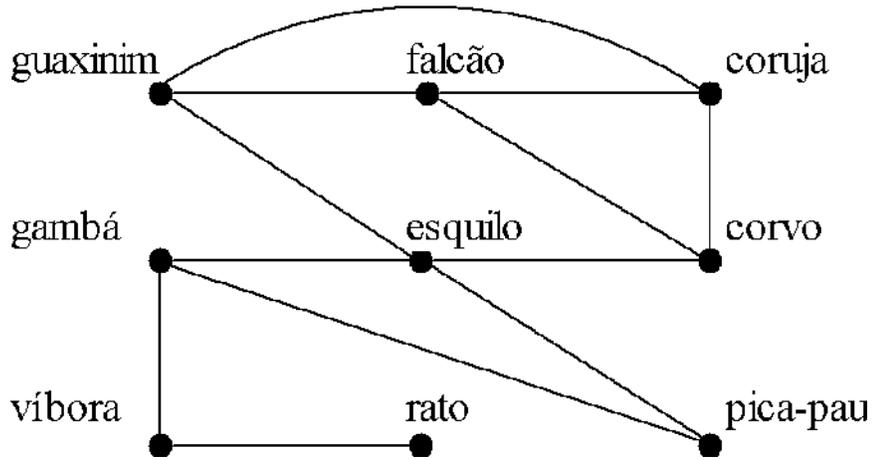


Figura 1.17: Relacionamento competitivo entre espécies. Figura traduzida do Livro [4].

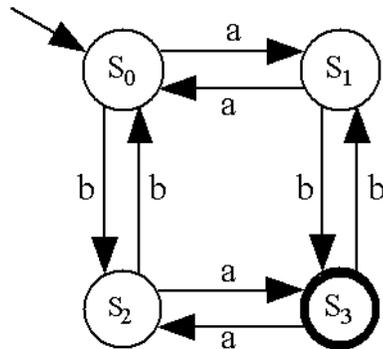


Figura 1.18: Representação gráfica de um autômato finito determinístico para reconhecer sentenças.

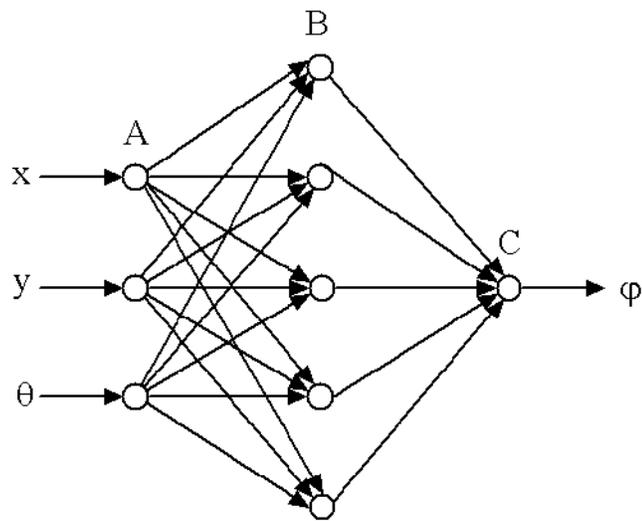


Figura 1.19: Rede neural multicamada composto por 1 camada de entrada, 1 camada oculta e 1 camada de saída.

Capítulo 2

Tipos de Grafos e Operações

Este capítulo apresenta diversos tipos especiais de grafos e a notação utilizada, algumas operações unárias e binárias e exemplos de aplicações. Inicialmente, apresentamos conceitos referentes a grafos completos, vazios, totalmente desconexo, entre outros. Em seguida, serão apresentadas algumas operações como complemento, união, remoção de vértices e arestas.

2.1 Grafos Especiais

Esta seção apresenta algumas classes de grafos comumente usados em diversas aplicações e também como contra-exemplos.

Grafo Trivial

Um grafo trivial é um grafo com 1 ou nenhum vértice. Quando o grafo não possui vértices, ele é chamado de *grafo vazio*. Este tipo de grafo é tipicamente usado como passo inicial em provas por indução e como contra exemplo em alguns tipos de problemas.

Grafo Vazio

Grafo Totalmente Desconexo

Um grafo totalmente desconexo não possui arestas unindo seus vértices.

Grafo Completo ou Totalmente Conexo

Um grafo completo com n vértices, denotado por K_n , é um grafo simples que possui uma aresta entre qualquer par de vértices. Devido a isto, este grafo possui exatamente $\frac{1}{2}n(n - 1)$ arestas. A Figura 2.1 mostra alguns

grafos completos com (a) 4 (b) 3 (c) 2 e (d) 1 vértices.

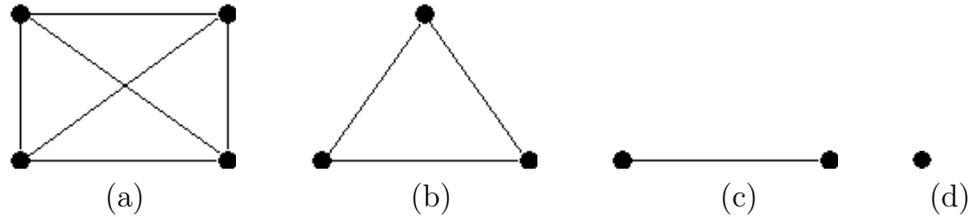


Figura 2.1: Grafos Completos (a) K_4 (b) K_3 (c) K_2 e (d) K_1 .

Dígrafo Completo Uma definição similar pode ser aplicada aos dígrafos. Um dígrafo é *completo* se para qualquer par de vértices x e y , como $x \neq y$ existem os dois arcos simétricos (x, y) e (y, x) . Vários autores usam a mesma notação de grafo completo para dígrafo completo, ou seja, K_n para um dígrafo ou grafo completo com n vértices. Neste livro adotaremos esta prática e enfatizaremos se K_n refere-se a um dígrafo ou a grafo. Um dígrafo é *semicompleto* se para cada par de vértices distintos x e y , existe ou o arco (x, y) ou o arco (y, x) ou ambos.

Grafo Regular

Um grafo $G = (V, A)$ é regular de ordem r se todos os seus vértices tiverem o grau r , ou seja, $\forall v \in V$,

$$\delta(G) = \Delta(G) = d(v) = r$$

Este tipo de grafo também é chamado de grafo r -regular. Note que todo grafo completo K_n é um grafo $(n - 1)$ -regular.

Grafo caminho

Um grafo $G = (V, A)$ é um grafo caminho, P_n , composto por n vértices se ele corresponder a exatamente um caminho de comprimento $n - 1$. Neste caso, os vértices inicial e final do caminho possuem grau igual a 1, enquanto que os demais possuem grau igual a 2.

Grafo Ciclo

Um grafo ciclo C_n , com $n \geq 3$, é composto por n vértices e n arestas que juntos formam um ciclo de tamanho n . Todos os vértices de C_n possuem grau igual a 2, logo, ele é um grafo 2-regular. A Figura 2.1(b) mostra um

grafo completo K_3 que é também um grafo ciclo C_3 . A Figura 2.2 mostra os grafos (a) C_4 , (b) C_5 e (c) C_6 .

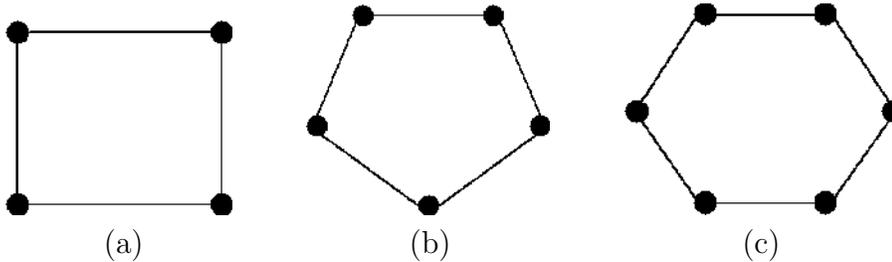


Figura 2.2: Grafos Ciclo (a) C_4 (b) C_5 e (c) C_6 .

Grafo Roda

Um grafo roda W_n , com $n \geq 3$, é igual ao grafo C_n adicionado de mais um vértice, o qual é adjacente a todos os demais. Um grafo W_n possui $n + 1$ vértices e $2n$ arestas, onde o vértice adicionado ao C_n possui grau igual a n e os demais vértices grau igual a 3. A Figura 2.3 mostra os grafos (a) W_4 e (b) W_5 .

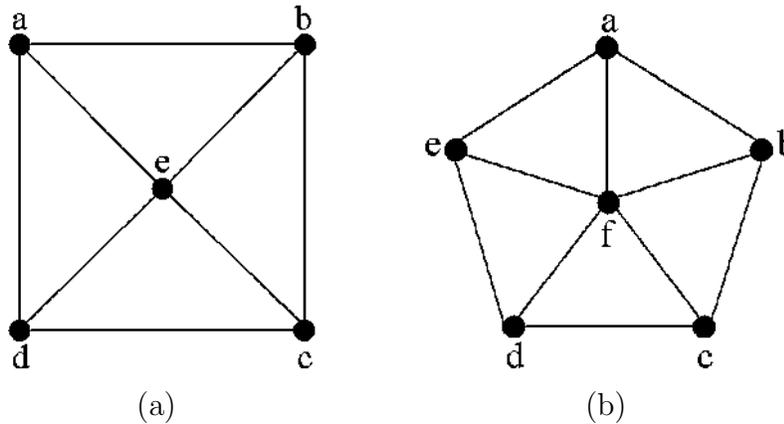


Figura 2.3: Grafos Roda (a) W_4 e (b) W_5 .

Grafo Estrela

This work is licensed under CC BY-NC-SA 4.0. To view a copy of this license, visit <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0>

Um grafo estrela S_n , com $n > 1$, é igual a um grafo W_n sem as arestas que compõem o grafo C_n . Um grafo S_n possui $n+1$ vértices e n arestas, onde o vértice central possui grau igual a n , enquanto que os demais vértices grau possuem igual a 1. A Figura 2.4 mostra os grafos (a) S_3 e (b) S_5 .

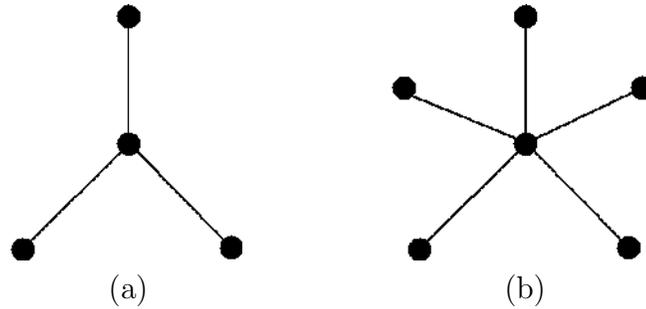


Figura 2.4: Grafos Estrela (a) S_3 e (b) S_5 .

Grafo k-cubo

Um grafo k-cubo, ou hipercubo k-dimensional, denotado por Q_k , é um grafo cujos vértices são formados por seqüências binárias de tamanho k . Dois vértices são adjacentes neste grafo se suas seqüências correspondentes diferirem em apenas uma posição. Além disso, ele é um grafo regular de grau k . A Figura 2.5 mostra (a) um grafo Q_1 (b) um grafo Q_2 e (c) um grafo Q_3 .

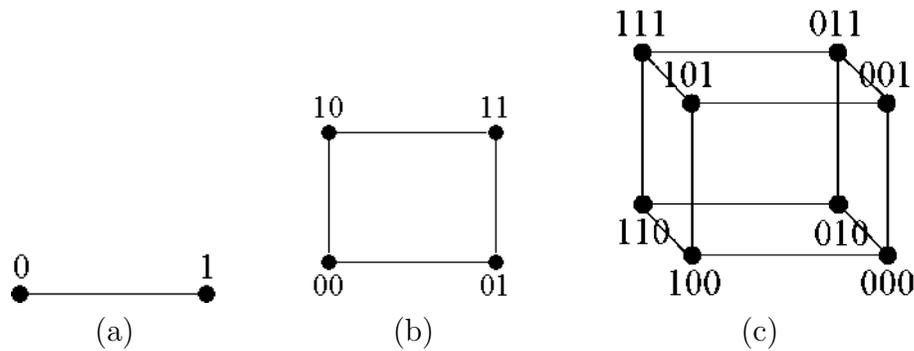


Figura 2.5: Grafos k-Cubo (a) Q_1 (b) Q_2 e (c) Q_3 .

2.2 Operações com grafos

Em diversos momentos, é necessário realizar algumas operações em grafos isolados ou pares de grafos. Elas podem ser desde operações para remoção de vértice/aresta até contrações. Abaixo, apresentamos as operações comumente utilizadas. Nas definições, utilizaremos os seguintes grafos $G = (V, A, \phi)$, $G_1 = (V_1, A_1, \phi_1)$ e $G_2 = (V_2, A_2, \phi_2)$. Como na maioria das vezes, a função de incidência ϕ destes grafos será a função identidade, então ela será omitida por conveniência.

2.2.1 União

Dados dois grafos (ou dígrafos) G_1 e G_2 , definimos a operação de união por $G_1 \cup G_2$. O grafo resultante $G = (V_1 \cup V_2, A, \phi)$, tem seu conjunto de vértices oriundo da união dos conjuntos de vértices dos grafos originais. Por outro lado, o conjunto de arestas A inicialmente é igual a A_1 , i.e., $A = A_1$ e $\phi(e) = \phi_1(e) \forall e \in A_1$. Cada aresta $e' \in A_2$ deve analisada cuidadosamente antes de ser inserida em A , pois uma aresta rotulada e' pode pertencer tanto a A_2 quanto a A_1 com $\phi_1(e)$ pode ser diferente de $\phi_2(e)$. Sendo assim, para cada $e' \in A_2$, temos as seguintes situações

- se $e' \notin A$, adicionamos e' em A e assumimos $\phi(e') = \phi_2(e')$.
- se $e' \in A$ e $\phi(e') \neq \phi_2(e')$, criamos uma nova aresta em A para e' , por exemplo e'' e a adicionamos em A fazendo $\phi(e'') = \phi_2(e')$.

A Figura 2.6(c) ilustra a união de dois grafos (a) G_1 e (b) G_2 .

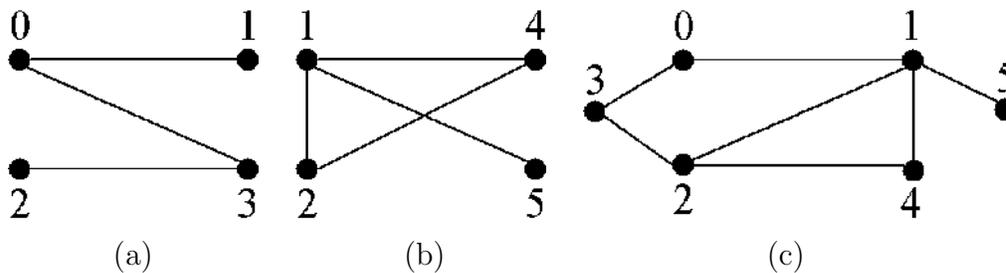


Figura 2.6: A aplicação da operação de união dos grafos (a) G_1 e (b) G_2 resulta no grafo (c) $G = G_1 \cup G_2$.

2.2.2 Junção

A operação de junção, representada por $+$ ou $*$, é efetuada em dois grafos G_1 e G_2 com conjuntos disjuntos de vértices e gera um novo grafo $G = G_1 + G_2$, onde $G = (V, A)$, $V = V_1 \cup V_2$ e $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, onde A_3 é formado por todos pares não ordenados $\{v, w\}$, onde $v \in V_1$ e $w \in V_2$. Note que $|V| = |V_1| + |V_2|$ e $|A| = |A_1| + |A_2| + |V_1||V_2|$. A Figura 2.7 ilustra a junção dos grafos G_1 e G_2 produzindo o grafo G . As arestas mais grossas em (c) são as arestas novas, enquanto que as arestas mais finas são as arestas originais de G_1 e G_2 .

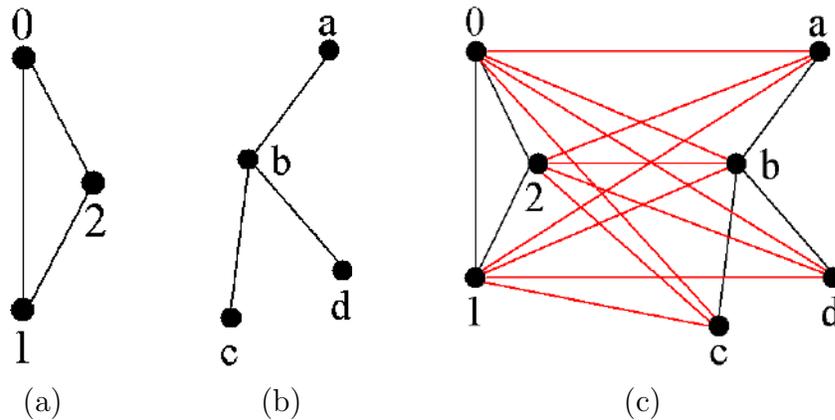


Figura 2.7: A aplicação da operação de junção os grafos (a) G_1 e (b) G_2 resulta no grafo (c) $G = G_1 + G_2$.

2.2.3 Intersecção

A intersecção de dois grafos G_1 com G_2 é denotada por $G_1 \cap G_2$ e gera um grafo $G = G_1 \cap G_2$, onde $G = (V_1 \cap V_2, A_1 \cap A_2)$. Note que G possui conjuntos de vértices e de arestas que pertencem tanto a G_1 quanto a G_2 . Se $G = \emptyset$ então G é um grafo trivial (ver Seção 2.1), caso contrário se $V_1 \subset V_2$ e $A_1 \subset A_2$, então $G = G_1$, tendo G_1 como subgrafo de G_2 . A Figura 2.8 ilustra a intersecção de G_1 e G_2 produzindo $G = G_1 \cap G_2$.

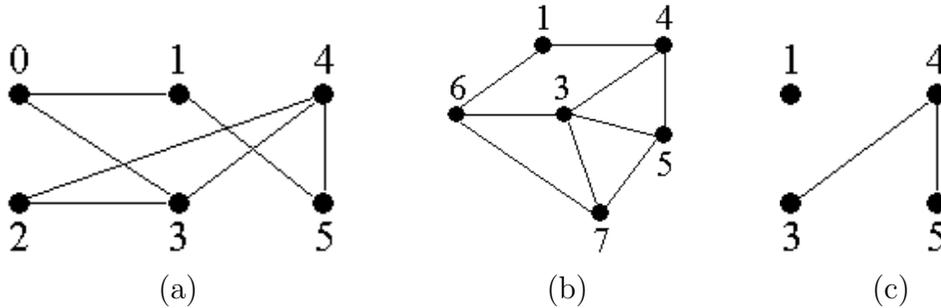


Figura 2.8: Operação de intersecção dos grafos (a) G_1 e (b) G_2 resulta no grafo (c) $G = G_1 \cap G_2$.

2.2.4 Produto

O produto de dois grafos, G_1 e G_2 , é denotado por $G_1 \times G_2$ e gera um grafo $G = G_1 \times G_2$, onde $V = V_1 \times V_2$ é o conjunto de todos os pares formados pelos vértices de V_1 e V_2 e A é o conjunto de arestas geradas da seguinte maneira. Considere $p_i = (u_i, w_i)$ e $p_j = (u_j, w_j)$ dois vértices do conjunto V , i.e., $p_i, p_j \in V$, onde $u_i, u_j \in V_1$ e $w_i, w_j \in V_2$. Eles são adjacentes se $u_i = u_j$ e $(w_i, w_j) \in A_2$ ou $w_i = w_j$ e $(u_i, u_j) \in A_1$. O grafo G resultante possui $|V| = |V_1||V_2|$ vértices e $|A| = |V_1||A_2| + |V_2||A_1|$ arestas.

A Figura 2.9 mostra (c) o grafo resultante do produto dos grafos (a) e (b). Note que os vértices em (c) são os pares ordenados dos vértices dos grafos (a) e (b), enquanto que as arestas foram geradas a partir da análise dos componentes dos pares associados às suas extremidades. Por exemplo, a aresta $\{(u_1, w_1), (u_1, w_2)\}$ existe pois os primeiros componentes dos pares (u_1, w_1) e (u_1, w_2) são iguais e existe aresta entre w_1 e w_2 no grafo mostrado em (b).

2.2.5 Complemento

O complemento de um grafo $G = (V, A)$, denotado por $\bar{G} = (V, A_1)$ é um grafo cujo conjunto de vértices é o mesmo de G , e com um conjunto de arestas definido da seguinte maneira $A_1 = \{\{u, v\} : (\{u, v\} \in \mathcal{P}(V) - A) \wedge (u \neq v)\}$, ou seja, o conjunto A_1 é formado por todas as arestas que correspondem aos pares não ordenados que não pertencem ao conjunto de arestas de G e não correspondem a laços. O complemento de um grafo K_n é um grafo com n vértices totalmente desconexo, e o complemento de um grafo desconexo de n

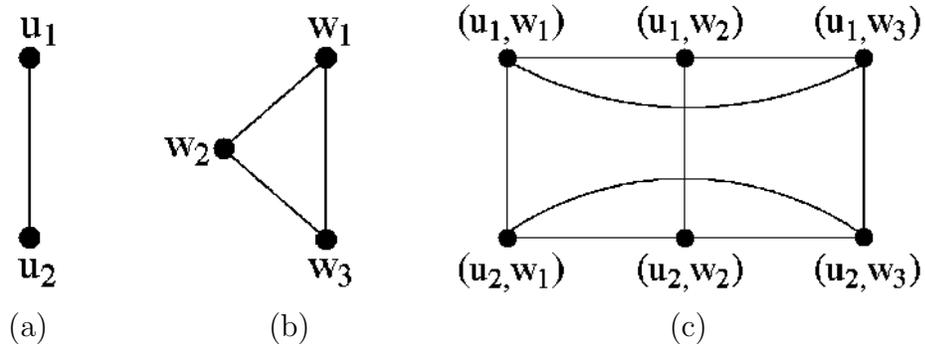


Figura 2.9: Operação de produto. (c) mostra o resultado do produtos dos grafos em (a) e (b).

vértices é um grafo completo K_n . O complemento dos grafos mostrados nas Figuras 2.8(b) e (c) é apresentado nas Figuras 2.10 (a) e (b), respectivamente.

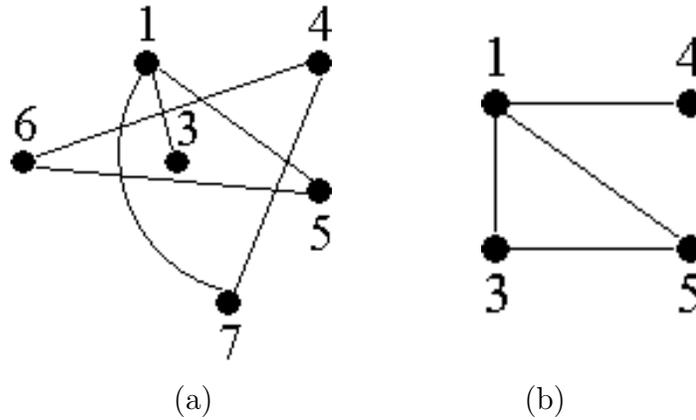


Figura 2.10: Operação de complemento. (a) e (b) mostram o complemento dos grafos das Figuras 2.8(b) e (c), respectivamente.

Quando um grafo é isomórfico ao seu complemento, então ele é chamado de grafo *autocomplementar*. Grafos Isomórficos são discutidos em detalhes no Capítulo 1.6. Porém podemos adiantar informalmente, que dois grafos são isomórficos se eles possuem a relação de adjacência (estrutural) entre seus vértices. Figura 2.11(a) mostra um grafo G autocomplementar, e (b) seu complemento, \bar{G} . Observe que tanto G quanto \bar{G} correspondem a um C_5 .

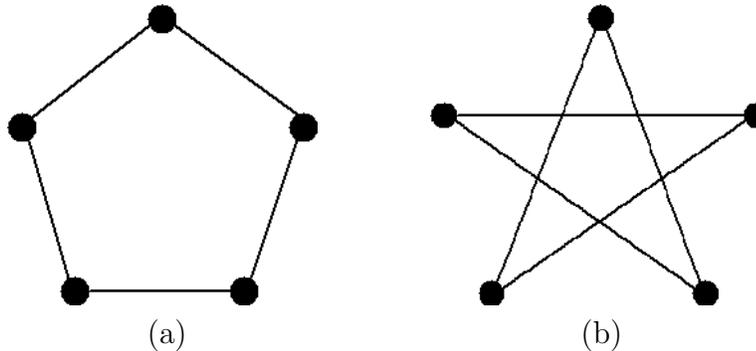


Figura 2.11: Grafo autocomplementar. (a) grafo exemplo e (b) seu complemento.

2.2.6 Remoção

A operação de **remoção** aplicada a um grafo $G = (V, A)$ retira ou um conjunto de arestas ou um conjunto de vértices e as arestas incidentes neste conjunto. Para um grafo G , a remoção de um vértice v , representada por $G - v$, causa a remoção tanto de v quanto das arestas incidentes a v . Enquanto que a operação $G - e$, com $e = \{u, v\}$, leva à retirada da aresta $\{u, v\}$.

Seja $S_v \subseteq V$, então $G_1 = G - S_v$ é o grafo resultante da retirada de todos os vértices $v \in S_v$ e de suas arestas incidentes. Logo, $G_1 = (V_1, A_1)$ onde $V_1 = V - S_v$ e $A_1 = \{(u, w) \in A : u, w \in V_1\}$. Observe que $G_1 = G[V - S_v]$, ou seja, G_1 é o subgrafo de G induzido por $V - S_v$.

Seja $S_a \subseteq A$, então $G_2 = G - S_a$ é o grafo resultante da retirada das arestas $a \in S_a$. Logo, $G_2 = (V_2, A_2)$ onde $V_2 = V$ e $A_2 = A - S_a$, i.e., $G_2 = G[A - S_a]$ é o subgrafo de G induzido por S_a . A Figura 2.12 ilustra (a) um grafo G e os grafos (b) $G - S_v$ e (c) $G - S_a$, onde $S_v = \{1, 2\}$ e $S_a = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{4, 5\}, \{2, 5\}\}$. Note que os grafos (b) e (c) correspondem aos grafos induzidos $G[V - S_v]$ e $G[A - S_a]$, respectivamente.

2.2.7 Contração

Uma operação de contração, também chamada de arco-contração, em um grafo G afeta uma aresta a , em particular, a transformando em um novo vértice v . Esta operação é representada por G/a e consiste na remoção da aresta $a = \{u, w\}$ e de seus vértices u e w e subsequente inserção de um novo

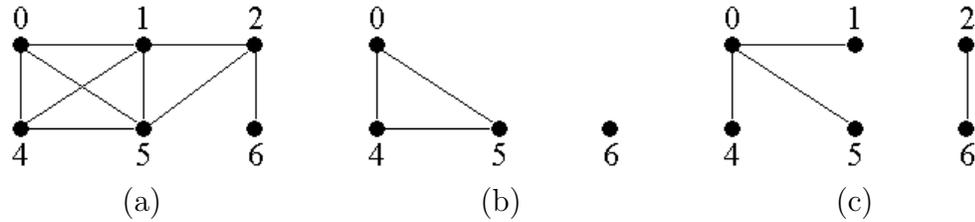


Figura 2.12: Exemplo da aplicação da operação de remoção. (a) grafo G , (b) grafo $G - S_v$ e (c) grafo $G - S_a$, onde $S_v = \{1, 2\}$ e $S_a = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{4, 5\}, \{2, 5\}\}$.

vértice v e re-ligação das arestas incidentes tanto a u quanto a w em G a este novo vértice. Esta operação é particularmente importante para verificar a planaridade de certos grafos e para o cálculo do número de árvores de espalhamento de um grafo, como será discutido adiante no Capítulo 7 e 6.3. Dependendo do grafo e da aresta escolhida é possível que um grafo simples passe a ser multigrafo, ou um multigrafo passe a ser pseudografo.

A Figura 2.13 ilustra (a) um grafo G e (b) a operação arco-contracção G/a aplicada à aresta a . A aresta a deu origem ao vértice v , e todas as arestas incidentes às extremidades de a são agora incidentes em v . Enquanto G é simples, G/a é um multigrafo. (c) mostra a operação de arco-contracção no grafo G/a aplicada à aresta b , produzindo $(G/a)/b$. A aresta b deu origem ao vértice m e a um laço. O multigrafo G/a passou a ser um pseudografo $(G/a)/b$.

2.2.8 Supressão e Subdivisão

A operação de supressão de um vértice é realizada apenas em vértices de grau 2 e consiste no seguinte processo. Seja $G = (V, A)$ um grafo qualquer e v um vértice adjacente a dois vértices u e w . A operação de supressão de v , remove v do conjunto V e cria uma aresta entre u e w produzindo um novo grafo $G' = (V', A')$. O grafo G' é chamado grafo reduzido de G ou grafo homeomorficamente reduzido de G . Ele possui $V' = V - v$ e $A' = A - A_1 + \{u, w\}$, com $A_1 = \{(v, u), (v, w)\}$.

A operação inversa é chamada subdivisão de arestas. Ela consiste em inserir vértices de grau 2 nas arestas do grafo criando subdivisões de arestas. Esta operação funciona da seguinte maneira. Seja $G = (V, A)$ um grafo qualquer, v um vértice novo e uma aresta $a = \{u, w\}$. A operação de sub-

Grafo Homeo-
morficamente
Reduzido
Subdivisão de
Grafo

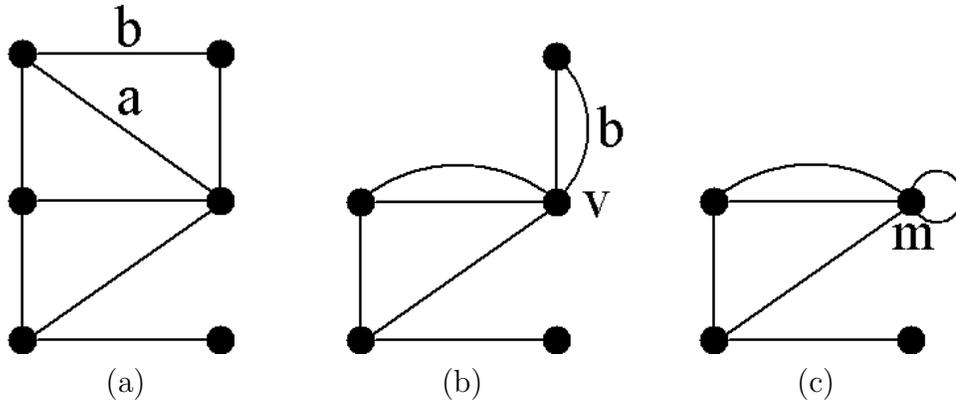


Figura 2.13: Operação de arco-contracção aplicada (a) ao grafo G na aresta a , resultado em (b) no grafo G/a . A figura (c) mostra o resultado da operação $(G/a)/b$.

divisão de a , remove a aresta a , i.e., $G - \{u, w\}$, e cria duas novas arestas $\{u, v\}$ e $\{v, w\}$, produzindo um novo grafo $G' = (V', A')$. Este grafo possui $V' = V \cup \{v\}$ e $A' = A - \{u, w\} + A_1$, com $A_1 = \{(v, u), (v, w)\}$. Logo, dizemos que G' é uma subdivisão de G .

As Figuras 2.14(a) e (b) ilustram os resultados das operações de subdivisão e de supressão, respectivamente. (a) é subdivisão de (b) obtida a partir da subdivisão da aresta $\{4, 3\}$ de (b). Enquanto que (b) é um grafo reduzido de (a), obtido a partir da supressão do vértice 7.

2.2.9 Decomposição

A operação de decomposição de um grafo G gera um conjunto de subgrafos G_1, G_2, \dots tal que cada aresta de G aparece exatamente uma única vez em um único subgrafo, ou seja, considerando que o conjunto de arestas do grafo G_i é A_i , temos $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$. Os subgrafos gerados podem compartilhar vértices, entretanto não podem compartilhar arestas. Em algumas áreas, a decomposição é uma ferramenta útil, pois é possível isolar cada parte do grafo, estudá-las separadamente e em seguida combinar os resultados obtidos.

O grafo 3-cubo, Q_3 , mostrado na Figura 2.15(a) é decomposto em 4 caminhos P_4 ilustrados em (b). Estes caminhos são mostrados através de arestas grossas e finas. Considerando apenas os vértices temos os caminhos $(1, 2, 6, 5)$, $(3, 1, 5, 7)$, $(2, 4, 8, 6)$ e $(8, 7, 3, 4)$.

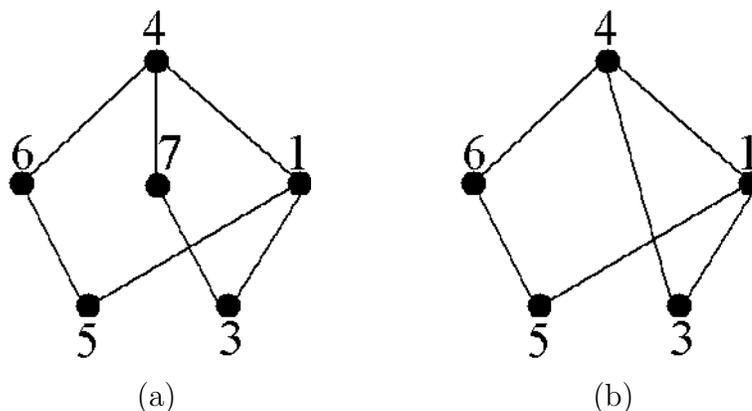


Figura 2.14: Operações de Supressão e Subdivisão. (a) é uma subdivisão do grafo em (b), e (b) é um grafo reduzido de (a).

2.2.10 Operador Linha L

Para facilitar a solução de certos problemas, convém realizar o mapeamento das linhas do grafo para vértices e vice-versa. Este mapeamento é realizado pelo operador L , o qual recebe como operando um grafo(ou um dígrafo) e retorna um novo grafo (ou dígrafo), chamado grafo linha (ou dígrafo linha).

Grafo Linha Dígrafo Linha

Dado um grafo $G = (V, A)$, o grafo linha $L(G) = (V_L, A_L)$ correspondente é construído da seguinte maneira. Cada aresta $\{v, u\} \in A$ dá origem a um vértice vu em $L(G)$, i.e., um vértice $vu \in V_L$ se e somente se $\{v, u\} \in A$. A adjacência entre os vértices em $L(G)$ é definida da seguinte maneira. Dois vértices distintos $uv, xw \in V_L$ são adjacentes se as arestas correspondentes em G são adjacentes, i.e., $\{u, v\} \cap \{x, w\} \neq \emptyset$.

A Figura 2.16(a) mostra um grafo simples G composto de arestas com rótulos $a - f$, enquanto que (b) mostra o grafo linha $L(G)$ correspondente. Cada aresta em (a) é mapeada para um vértice em (b). A adjacência dos vértices em $L(G)$ é dada pela adjacência das arestas em G . Por exemplo, o vértice a em $L(G)$ é adjacente aos vértices b, e, f , pois em G a aresta a é adjacente às arestas b, e, f , ou seja, ela compartilha vértices com as arestas b, e, f . O mesmo ocorre com o vértice c em $L(G)$. Ele é adjacente aos vértices b, d, f , pois a aresta c no grafo G compartilha vértices com as arestas b, f, d .

Um dígrafo linha é construído a partir de idéias similares levando em consideração a orientação dos arcos do dígrafo original. Dado um dígrafo $D = (V, A)$, o dígrafo linha $L(D) = (V_L, A_L)$ correspondente é construído da

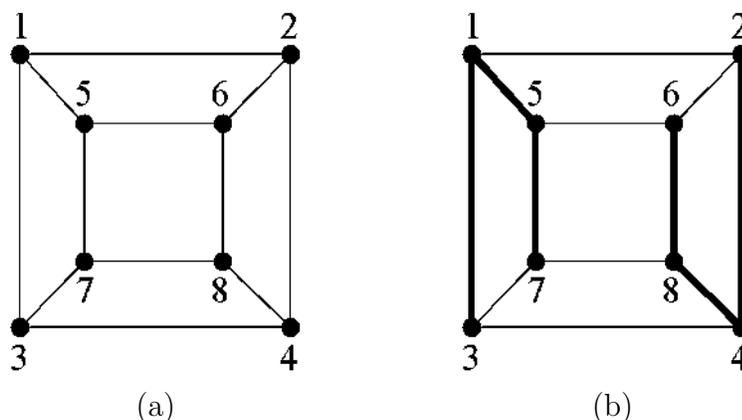


Figura 2.15: Decomposição do (a) grafo Q_3 em (b) quatro grafos P_4 .

seguinte maneira. Cada arco $(v, u) \in A$ dá origem a um vértice vu em $L(D)$ e existe um arco com origem em $vu \in A_L$ e destino em $xw \in A_L$ se e somente se para os arcos correspondentes (v, u) e (x, w) em D , $u = x$, ou seja, se o vértice destino u do arco (v, u) for igual ao vértice origem do arco (x, w) .

A Figura 2.17(a) mostra um dígrafo simples $D = (V, A)$ composto de arestas com rótulos $a - f$, enquanto que (b) mostra o dígrafo linha $L(D) = (V_L, A_L)$ correspondente. Cada arco em (a) é mapeado para um vértice em (b). A adjacência entre os vértices em $L(D)$ é dada considerando a orientação dos respectivos arcos.

Grafos Linha são importantes em diversos problemas, como o problema de coloração de arestas. Para colorir as arestas de um grafo G podemos usar as técnicas padrão de coloração de vértices porém no grafo $L(G)$. O cálculo dos emparelhamento maximais segue a mesma idéia. Para encontrar os emparelhamentos maximais de um grafo G , podemos empregar o método para encontrar os conjuntos independente em $L(G)$. Estes problemas serão discutidos nas Seções 4.5 e 8, sobre emparelhamento e coloração, respectivamente.

2.3 Exercícios

Exercício 2.1. *Determine o número de arcos de um dígrafo completo K_n .*

Exercício 2.2. *Mostre que um grafo K_n possui $\frac{1}{2}n(n - 1)$ arestas.*

Exercício 2.3. *Determine quantas arestas e quantos vértices possui um Q_k .*

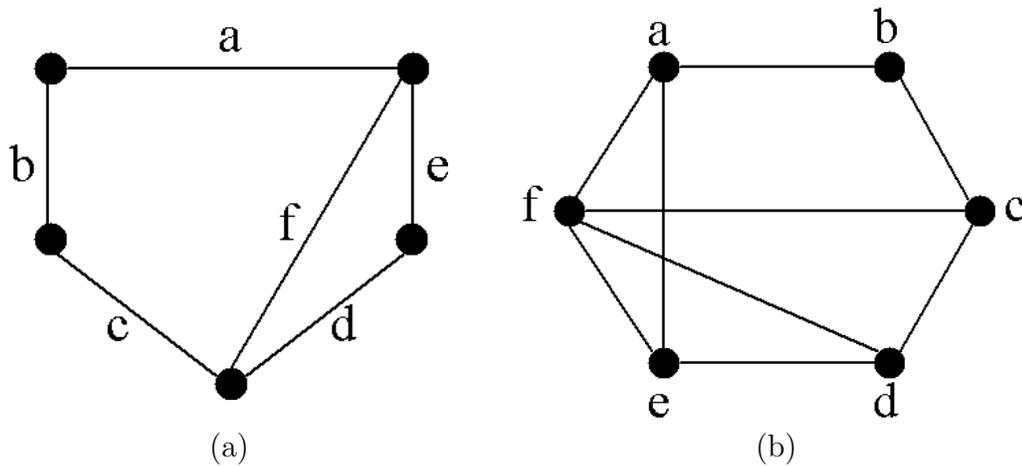


Figura 2.16: Grafo linha (b) $L(G)$ do grafo G em (a).

Exercício 2.4. *Determine o grafo resultante da operação $K_2 + K_3$.*

Exercício 2.5. *Determine o grafo resultante da operação de arco contração na aresta $\{4, 7\}$ no grafo na Figura 2.14(a). Em seguida o compare com o grafo mostrado na Figura 2.14(b).*

Exercício 2.6. *Mostre que o número máximo de aresta entre todos os p vértices de um grafo com nenhum triângulo é $\lfloor p^2/4 \rfloor$*

Exercício 2.7. *Dado um grafo $G(V, A)$, mostre que para qualquer vértice v , $d_G(v) + d_{\bar{G}}(v) = n - 1$, onde $d_G(v)$ é o grau do vértice v no grafo G .*

Exercício 2.8. *Prove ou refute : Se todo vértice de um grafo simples $G = (V, A)$, com $|V| = n$, tiver grau 2, então G é um grafo C_n .*

Exercício 2.9. *Mostre que se G é um grafo simples então $\text{diam}(G) \geq 3$ implica $\text{diam}(\bar{G}) \leq 3$.*

Exercício 2.10. *Mostre que $K_{n+p} = K_n + K_p$, i.e., a junção de dois grafos completos K_n e K_p é um grafo completo K_{n+p} .*

Exercício 2.11. *Mostre que o complemento de um caminho de comprimento 3 é um caminho de comprimento 3.*

Exercício 2.12. *Mostre que para qualquer Grafo G com 6 vértices, G ou \bar{G} possui um triângulo.*

Exercício 2.13. *Prove que $G \cong H$ sse $\bar{G} \cong \bar{H}$.*

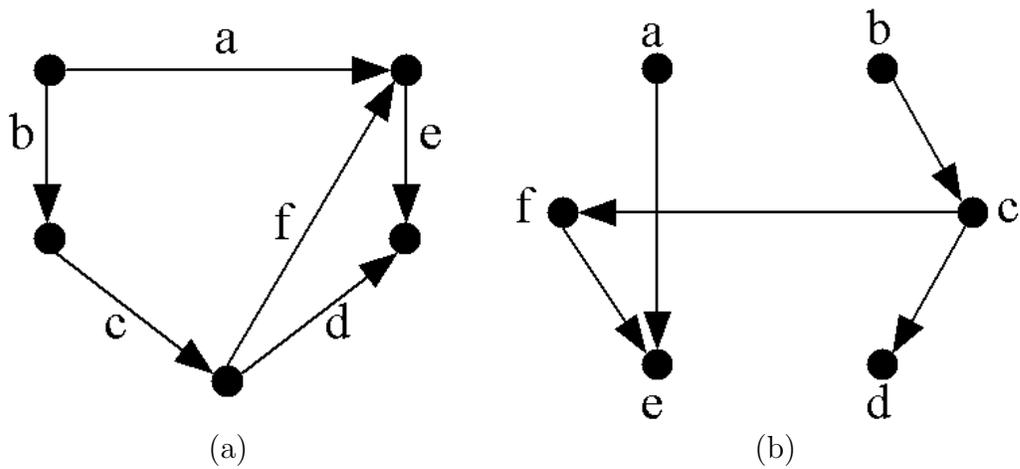


Figura 2.17: Dígrafo linha (b) $L(D)$ do dígrafo D em (a).

Capítulo 3

Conectividade

Em vários problemas do mundo real é necessário verificar se existe ou não pelo menos um caminho entre um par de vértices u e v . Se este caminho existe e caso venha a ser bloqueado, é possível ir de u para v (ou o contrário) através de um caminho alternativo? Se sim, por quantos caminhos alternativos? Responder estas e outras perguntas deste tipo é do interesse de diversas áreas, entre elas robótica e redes de computadores. Na robótica móvel, existem diversos algoritmos baseados em busca em grafos que encontram um caminho ou o caminho mais curto entre duas posições desejadas a partir de um mapa dado, como discutido na Seção 1.7.2. Algoritmos, como estes, podem ser utilizados para planejar caminhos para robôs não-tripulados aéreos ou aquáticos; ou na área de redes de computadores, para a transmissão de dados entre computadores geograficamente distante.

Nos exemplos acima, comentamos brevemente apenas a descoberta de caminhos entre dois pontos, porém de igual importância é considerarmos esta descoberta de caminhos quando ocorrem falhas. Por exemplo, se o caminho que um robô está seguindo estiver bloqueado por um obstáculo móvel, é possível atingir a posição desejada por um caminho alternativo? Se durante a transmissão de um pacote, um computador, que faz parte do caminho que o pacote deverá seguir, falhar, este pacote será perdido ou seguirá por um caminho alternativo? Notem que em ambos os casos, é importante sabermos se existem ou não vários caminhos entre qualquer par de vértices e se não existirem, quais pares de vértices poderão ser afetados caso surja algum imprevisto? No caso da rede de computadores, a falha em um computador pode fazer com que uma parte da rede não se comunique mais com a(s) outra(s). Este seria o mesmo caso de um rompimento de um cabo de fibra ótica que

liga dois servidores. Identificar o(s) computador(es) que gera(m) esta desconexão é extremamente importante, pois é possível tomar uma providência de forma a aumentar a tolerância a este tipo de falha. No caso de um robô móvel, este poderá ficar parado economizando energia ou retornar ao seu ponto de partida. Este capítulo apresenta os aspectos teóricos subjacentes aos questionamentos apresentados.

3.1 Relação de Vizinhança Estendida e Fechamento Transitivo

Na Seção 1.2 definimos as funções multivaloradas τ , τ^+ e τ^- , onde a função τ permite calcular os vértices vizinhos a um dado vértice em um grafo, enquanto que as funções τ^+ e τ^- permitem determinar os vértices atingíveis e que atingem um dado vértice em um dígrafo, respectivamente. Estas funções podem ser estendidas para considerar ao invés de um único vértice um subconjunto de vértices.

Dados um grafo $G = (V, A)$ e um dígrafo $D = (V_d, A_d)$, definimos a extensão das funções multivaloradas τ , τ^+ e τ^- , como

$$\Gamma(S) = \bigcup_{v \in S} \tau(v), \quad \Gamma^+(S_d) = \bigcup_{v \in S_d} \tau^+(v) \text{ e } \Gamma^-(S_d) = \bigcup_{v \in S_d} \tau^-(v)$$

Funções Estendidas de Vizinhança em Grafos e Dígrafos

onde S e S_d são subconjuntos não-vazio de vértices, $S \subseteq V$, $S_d \subseteq V_d$; $\Gamma : 2^V \rightsquigarrow 2^V$ é a função estendida de vizinhança; $\Gamma^+ : 2^{V_d} \rightsquigarrow 2^{V_d}$ é a função estendida de vizinhança direta; e $\Gamma^- : 2^{V_d} \rightsquigarrow 2^{V_d}$ é a função estendida de vizinhança inversa. A função $\Gamma(S)$ mapeia S para o conjunto de vértices vizinhos aos vértices $v \in S$, enquanto que as funções $\Gamma^+(S_d)$ e $\Gamma^-(S_d)$ mapeiam S_d para o conjunto dos vértices *atingíveis a partir de* e *que atingem* os vértices $v_d \in S_d$, respectivamente. Por definição $\Gamma(\emptyset) = \Gamma^+(\emptyset) = \Gamma^-(\emptyset) = \emptyset$.

Estas funções podem ser aplicadas sucessivamente para calcular os vizinhos de um vértice v a uma dada distância. Por exemplo, a composição $\Gamma(\Gamma(\{v\})) = \Gamma^2(\{v\})$ fornece todos os vértices atingíveis por um passeio de comprimento 2 a partir de v , enquanto que $\Gamma^n(\{v\})$, retorna todos os vértices atingíveis por um passeio de comprimento n . Analogamente, podemos aplicar sucessivamente as funções Γ^+ e Γ^- . Por exemplo, $\Gamma^{+n}(\{v\})$ fornece todos os vértices atingíveis por um *passeio direcionado* de comprimento n a partir de v , enquanto que $\Gamma^{-n}(\{v\})$ retorna todos os vértices que atingem v através de um passeio direcionado de comprimento n .

3.1 Relação de Vizinhança Estendida e Fechamento Transitivo 53

Considere o grafo da Figura 3.1(a) e os seguintes conjuntos de vértices $V_1 = \{1\}$, $V_2 = \{2, 3\}$ e $V_3 = \{3, 4\}$. Abaixo são listados os resultados da aplicação da função Γ nestes conjuntos.

$$\begin{aligned}\Gamma(V_1) &= \Gamma(\{1\}) = \tau(1) = \{5\}; \\ \Gamma(V_2) &= \Gamma(\{2, 3\}) = \tau(2) \cup \tau(3) = \{5, 6\} \cup \{5, 4\} = \{4, 5, 6\} \\ \Gamma(V_3) &= \Gamma(\{3, 4\}) = \tau(3) \cup \tau(4) = \{5, 4\} \cup \{3, 6\} = \{3, 4, 5, 6\}\end{aligned}$$

Usando o resultado anterior, calculamos Γ^2 para cada conjunto novamente

$$\begin{aligned}\Gamma^2(V_1) &= \Gamma(\Gamma(V_1)) = \Gamma(\{5\}) = \{1, 2, 3, 6\}; \\ \Gamma^2(V_2) &= \Gamma(\Gamma(V_2)) = \Gamma(\{4, 5, 6\}) = \tau(4) \cup \tau(5) \cup \tau(6) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ \Gamma^2(V_3) &= \Gamma(\Gamma(V_3)) = \Gamma(\{3, 4, 5, 6\}) = \tau(3) \cup \tau(4) \cup \tau(5) \cup \tau(6) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\end{aligned}$$

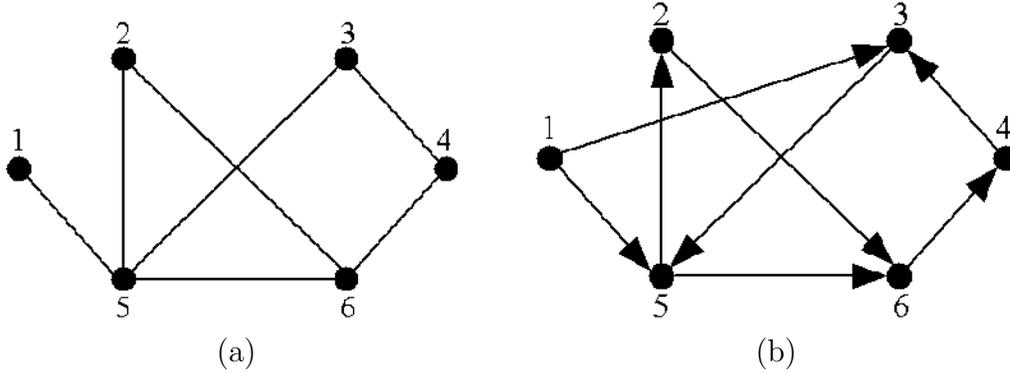


Figura 3.1: Aplicação da função multivalorada no grafo em (a) e no dígrafo em (b).

Para o dígrafo da Figura 3.1(b), encontramos os resultados abaixo para a aplicação das funções Γ^+ e Γ^- nos conjuntos de vértices $V_1 = \{1\}$, $V_2 = \{2, 3\}$ e $V_3 = \{3, 4\}$.

$$\begin{aligned}\Gamma^+(V_1) &= \tau^+(1) = \{3, 5\} \\ \Gamma^+(V_2) &= \tau^+(2) \cup \tau^+(3) = \{6\} \cup \{5\} = \{5, 6\} \\ \Gamma^+(V_3) &= \tau^+(3) \cup \tau^+(4) = \{5\} \cup \{3\} = \{3, 5\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^-(V_1) &= \tau^-(1) = \emptyset \\ \Gamma^-(V_2) &= \tau^-(2) \cup \tau^-(3) = \{5\} \cup \{1, 4\} = \{1, 4, 5\} \\ \Gamma^-(V_3) &= \tau^-(3) \cup \tau^-(4) = \{1, 4\} \cup \{6\} = \{1, 4, 6\}\end{aligned}$$

A aplicação das funções Γ^{+2} e Γ^{-2} nos conjuntos V_1 , V_2 e V_3 resulta em $\Gamma^{+2}(V_1) = \Gamma^+(\{3, 5\}) = \tau^+(3) \cup \tau^+(5) = \{2, 5, 6\}$

$$\begin{aligned}\Gamma^{+2}(V_2) &= \Gamma^+(\{5, 6\}) = \tau^+(5) \cup \tau^+(6) = \{2, 4, 6\} \\ \Gamma^{+2}(V_3) &= \Gamma^+(\{3, 5\}) = \tau^+(3) \cup \tau^+(5) = \{2, 5, 6\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^{-2}(V_1) &= \Gamma^-(\emptyset) = \emptyset; \\ \Gamma^{-2}(V_2) &= \Gamma^-(\{1, 4, 5\}) = \tau^-(1) \cup \tau^-(4) \cup \tau^-(5) = \{1, 3, 6\} \\ \Gamma^{-2}(V_3) &= \Gamma^-(\{1, 4, 6\}) = \tau^-(1) \cup \tau^-(4) \cup \tau^-(6) = \{2, 5, 6\}\end{aligned}$$

Função de Fechamento Transitivo

A partir das funções estendidas de vizinhança para grafos e dígrafos, podemos definir a função de fechamento transitivo $\hat{\Gamma} : V \rightsquigarrow 2^V$ para grafos, e as funções de fechamento transitivo direto $\hat{\Gamma}^+ : V_d \rightsquigarrow 2^{V_d}$ e inverso $\hat{\Gamma}^- : V_d \rightsquigarrow 2^{V_d}$ para dígrafos. Dado um vértice v , a função $\hat{\Gamma}(v)$ é definida por

$$\hat{\Gamma}(v) = \{v\} \cup \Gamma(\{v\}) \cup \Gamma^2(\{v\}) \cup \dots \cup \Gamma^n(\{v\}) \cup \dots$$

e retorna todos os vértices que são atingíveis a partir de v através de um passeio de qualquer comprimento. A função $\hat{\Gamma}^+(v)$ é definida por

$$\hat{\Gamma}^+(v) = \{v\} \cup \Gamma^+(\{v\}) \cup \Gamma^{+2}(\{v\}) \cup \dots \cup \Gamma^{+n}(\{v\}) \cup \dots$$

e retorna o conjunto de todos os vértices que v consegue atingir a partir de um passeio direcionado de qualquer comprimento. Enquanto que a função $\hat{\Gamma}^-(v)$ é definida por

$$\hat{\Gamma}^-(v) = \{v\} \cup \Gamma^-(\{v\}) \cup \Gamma^{-2}(\{v\}) \cup \dots \cup \Gamma^{-n}(\{v\}) \cup \dots$$

e retorna todos os vértice que atingem v através de um passeio direcionado de qualquer comprimento.

Aplicando a função $\hat{\Gamma}$ no vértice 1 do grafo ilustrado na Figura 3.1(a), temos

$$\hat{\Gamma}(1) = \{1\} \cup \Gamma(\{1\}) \cup \Gamma^2(\{1\}) \cup \dots = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Observe que temos $\hat{\Gamma}(v) = V$ para todo $v \in V$.

A função $\hat{\Gamma}^+$ quando aplicada aos vértices do dígrafo ilustrado na Figura 3.1(b) resulta em

$$\hat{\Gamma}^+(1) = \{1\} \cup \Gamma^+(\{1\}) \cup \Gamma^{+2}(\{1\}) \cup \dots = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\hat{\Gamma}^+(2) = \hat{\Gamma}^+(3) = \hat{\Gamma}^+(4) = \hat{\Gamma}^+(5) = \hat{\Gamma}^+(6) = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

Como todos os vértices com exceção do vértice 1 estão dentro de um ciclo direcionado, um pode atingir o outro dentro do ciclo através de um caminho

direcionado. Em relação à função $\hat{\Gamma}^-$, sua aplicação nos vértices do dígrafo da Figura 3.1(b) resulta em

$$\hat{\Gamma}^-(1) = \{1\} \cup \Gamma^-(\{1\}) \cup \Gamma^{-2}(\{1\}) \cup \dots = \{1\}$$

$$\hat{\Gamma}^-(2) = \hat{\Gamma}^-(3) = \hat{\Gamma}^-(4) = \hat{\Gamma}^-(5) = \hat{\Gamma}^-(6) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

De forma similar ao apresentado anteriormente, com exceção do vértice 1, todos os vértices são atingíveis a partir dos demais vértices do dígrafo. Em um dígrafo se v é um vértice fonte então $\hat{\Gamma}^-(v) = \{v\}$, enquanto que se v for um vértice sumidouro, temos $\hat{\Gamma}^+(v) = \{v\}$.

3.2 Grafos Conexos e Desconexos

Um grafo não vazio é chamado *grafo conexo* se existe um caminho entre qualquer par de vértices, caso contrário, ele é chamado *grafo desconexo*. A Figura 3.2(a) mostra um exemplo de grafo conexo $G_1 = (V_1, A_1)$ onde existe um caminho¹ entre cada par de vértices, por exemplo, existe um caminho de comprimento 1 entre os vértices 1 e 2, um caminho de comprimento 3 entre os vértices 2 e 5, etc. Observe que a função de fechamento transitivo quando aplicada a qualquer vértice de G_1 retorna todo o seu conjunto de vértices, i.e., $\hat{\Gamma}(v) = V_1$, para todo $v \in V_1$. Por outro lado, o grafo $G_2 = (V_2, A_2)$ ilustrado na Figura 3.2(b) mostra que existem vértices que não são atingíveis a partir de outros, por exemplo, não existe caminho entre os vértices 1 e 5, tão pouco entre os vértices 2 e 6. Logo, este grafo é desconexo, pois para qualquer vértice $v \in V_2$, temos $\hat{\Gamma}(v) \neq V_2$.

Qualquer grafo $G = (V, A)$ possui um subgrafo $G[V']$, induzido² por um conjunto de vértices $V' \subseteq V$, que é conexo. Se V' não está contido propriamente em outro conjunto de vértices V'' de forma que o grafo, $G[V'']$, seja conexo, então $G[V']$ é um *subgrafo conexo maximal*, sendo chamado de *componente conexo* de G .

Grafo Conexo
Grafo Desconexo

Componente Conexos

Definição 3.1. Um **componente conexo** de um grafo G é um subgrafo conexo de G que não é um subgrafo próprio de outro subgrafo conexo de G .

¹Para que um grafo seja conexo é importante que exista um caminho de qualquer comprimento entre cada par de vértices

²O conceito de grafo induzido é apresentado na Seção 1.1

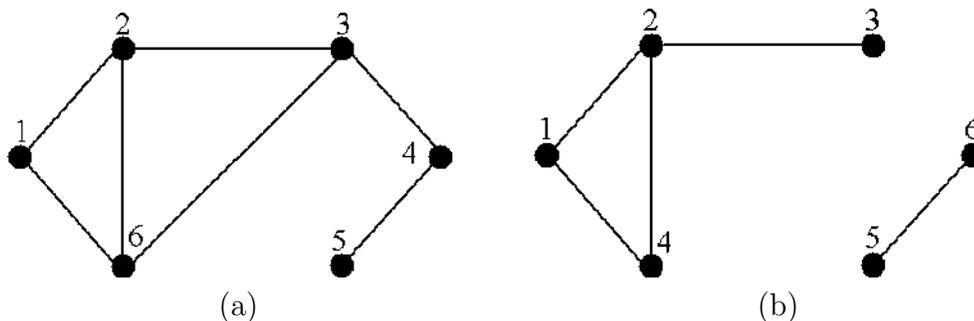


Figura 3.2: Conectividade: (a) grafo conexo e (b) grafo desconexo.

Considere o grafo $G_1 = (V_1, A_1)$ na Figura 3.2(a), o grafo induzido, $G_1[V']$, pelo conjunto de vértices $V' = \{1, 2\}$ é conexo. Porém, este grafo não é maximal, pois o grafo $G_1[V'']$ com $V'' = \{1, 2, 3\}$ é conexo, i.e., $G_1[V'] \subset G_1[V'']$. Entretanto $G_1[V'']$ ainda não é maximal pois o grafo $G_1[V_1]$ é conexo, i.e., o grafo G_1 induzido por todos os vértices de V_1 ainda é conexo. Logo, G_1 possui um único componente conexo que é o próprio grafo. Por outro lado, o grafo $G_2 = (V_2, A_2)$ na Figura 3.2(b) possui 2 componentes conexos, formados pelos grafos induzidos $G_2[V']$ e $G_2[V'']$, com $V' = \{1, 2, 3, 4\}$ e $V'' = \{5, 6\}$. Observe que $\hat{\Gamma}(v') = V', \forall v' \in V'$ e $\hat{\Gamma}(v'') = V'', \forall v'' \in V''$.

Dado um grafo G , podemos então particionar seu conjunto de vértices V em subconjuntos V_1, V_2, \dots, V_n tal que

$$\bigcup_i V_i = V \text{ e } V_i \cap V_j = \emptyset, \forall i \neq j$$

de forma que $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_n]$ sejam subgrafos conexos maximais de G . Cada $G[V_i]$ é um componente conexo e $\Omega(G) = n$ é o número de componentes conexos de G . Se G é um grafo conexo então $\Omega(G) = 1$, caso contrário se G é desconexo, então $\Omega(G) > 1$. Se G é um grafo vazio, então $\Omega(G) = 0$. Usando o exemplo anterior, temos $\Omega(G_1) = 1$ e $\Omega(G_2) = 2$.

3.3 Vértice de Corte

Em alguns grafos simples, a remoção de apenas um único vértice, chamado *vértice de corte*, faz com que o grafo se torne desconexo. Entretanto o aumento do número de componentes conexo não é condição necessária para que um vértice seja de corte. Formalmente, um vértice de corte é qualquer

vértice v de um grafo genérico G que permite particionar o conjunto de arestas de G em E_1 e E_2 de maneira que os grafos induzidos $G[E_1]$ e $G[E_2]$ por estes conjuntos tenham apenas v em comum. A Figura 3.3(a) mostra um grafo simples com os vértices de corte 4 e 5, enquanto que (b) mostra um pseudografo com os vértices de corte 2, 4, 5 e 6.

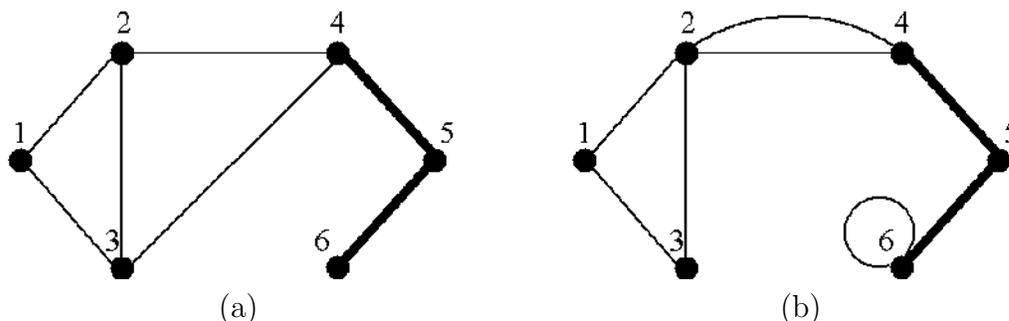


Figura 3.3: Conectividade. (a) grafo simples com os seguintes vértices de corte $\{4, 5\}$ e (b) pseudo grafo com os seguintes vértices de corte: $\{2, 4, 5, 6\}$.

Quando o grafo é simples, a remoção de um vértice de corte apenas aumenta o número de seus componentes conexos. Se o grafo é um pseudografo, esta remoção pode não resultar no aumento do número de componentes conexos. Por exemplo, a remoção do vértice 6 no grafo 3.3(b) não aumenta a quantidade de componentes conexo, porém este vértice permite particionar o conjunto de arestas em dois subconjuntos, um formado pelo laço em 6 e o outro formado pelas demais arestas, de maneira que tenham apenas o vértice 6 em comum. Para um grafo não trivial simples, um vértice v é chamado vértice de corte se e somente se $\Omega(G - v) > \Omega(G)$.

Quando um grafo não possui um vértice corte então ele é chamado *grafo não separável*. Um *bloco* de um grafo G é um subgrafo não separável maximal, i.e., este subgrafo não está contido propriamente em outro subgrafo não separável de G . Se todo o grafo é não separável então ele próprio é um bloco. O grafo da Figura 3.3(a) pode ser decomposto em 3 subgrafos, ilustrados na Figura 3.4, onde cada subgrafo é um bloco. Enquanto que o grafo da Figura 3.3(b) possui 4 blocos, ilustrados na Figura 3.5.

Teorema 3.1. Para um vértice v de um grafo simples conexo $G = (V, A)$, as seguintes afirmações são equivalentes:

1. o vértice v é um vértice de corte de G .

Vértice de Corte
× **Pseudografo**

Grafo não se-
parável
Bloco

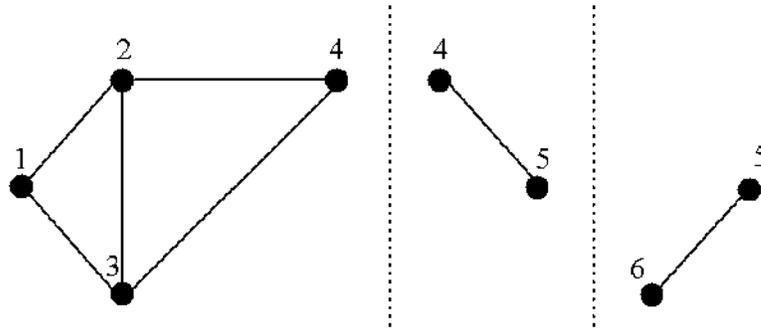


Figura 3.4: Blocos do grafo mostrado na Figura 3.3(a).

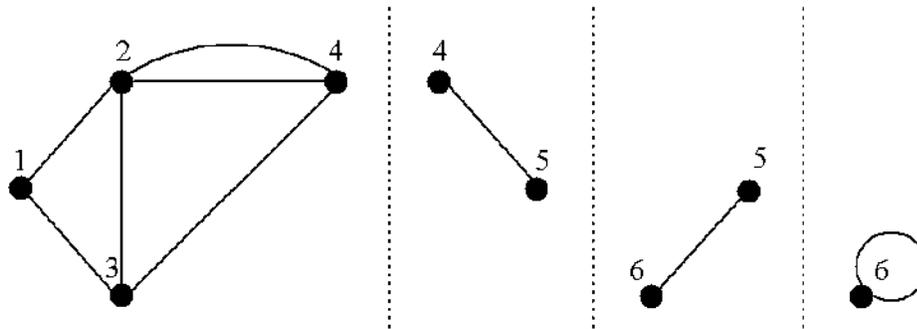


Figura 3.5: Blocos do grafo mostrado na Figura 3.3(b).

2. existem vértices w e u distintos de v tal que todo caminho entre w e u passa por v .
3. existe um particionamento do conjunto de vértices $V - v$ em dois subconjuntos V_1 e V_2 tal que qualquer caminho entre $u \in V_1$ e $w \in V_2$ passa obrigatoriamente pelo vértice v .

Alguns grafos não possuem vértice de corte, porém possuem um subconjunto de vértices cuja remoção resulta ou em um grafo desconexo ou em um grafo trivial. Para um grafo G , este subconjunto é chamado de *conjunto separador* de G . Um grafo é chamado k -conexo (ou k -vértice conexo) se o tamanho do menor conjunto separador é k . Neste caso, dizemos que a *conectividade de vértice* ou apenas *conectividade* do grafo, representada por $\kappa(G)$, é igual a k , i.e., $\kappa(G) = k$. Por definição $\kappa(G) = 0$, se o grafo G é trivial ou desconexo, e $\kappa(K_n) = n - 1$, $\forall n \geq 1$. Os conjuntos separadores que são minimais são comumente chamados de *conjunto de corte de vértices*,

Conjunto Separador Conectividade de Vértice

i.e., conjuntos separadores que não possuem um subconjunto próprio que é separador.

O grafo G ilustrado na Figura 3.3(a) possui vários conjuntos separadores, entre eles, temos, $V_1 = \{2, 3, 4\}$, $V_2 = \{3, 4\}$ e $V_3 = \{5\}$. Apenas o conjunto V_3 é um conjunto de corte de vértices, pois tanto V_1 quanto V_2 possuem subconjuntos próprios que são separadores. Por exemplo, V_1 possui dois subconjuntos $\{2, 3\}$ e $\{4\}$ que são separadores e também conjunto de corte de vértices, sendo que o último possui um vértice de corte. Eles têm tamanho 2 e 1, respectivamente. Por outro lado, V_2 possui o subconjunto $\{4\}$ que é separador e também de corte de vértices. A conectividade de vértice deste grafo é $\kappa(G) = 1$, pois o menor conjunto de corte de vértices tem tamanho igual a 1. Logo, este grafo é um grafo 1-conexo ou 1-vértice conexo.

Podemos definir a conectividade entre dois vértices não adjacentes u e v , denotada por $\kappa(u, v)$, como o menor número de vértices cuja remoção separa u de v , i.e., faz com que não exista um caminho entre u e v . Menger mostrou que esta conectividade está intimamente relacionada ao número de caminhos disjuntos que unem u e v no grafo. Baseado nisto temos abaixo uma das versões do Teorema do Menger.

Teorema 3.2 ([5]). Considere um grafo $G = (V, A)$ e dois vertices $u, v \in V$ não adjacentes, o número mínimo de vértices que separam u de v é igual a número máximo de caminhos disjuntos entre u e v em G .

A partir daí temos o seguinte teorema sobre conectividade de vértices de um grafo qualquer.

Teorema 3.3. Um grafo é k -vértice conexo se e somente se existem k caminhos disjuntos entre qualquer par de vértices.

Para um grafo que não é completo $G = (V, A)$, temos $\kappa(G) = \min \kappa(u, v)$ considerando todos os pares de vértices não adjacentes $u, v \in V$.

3.4 Aresta de Corte

Uma aresta a de um grafo G é chamada de *aresta de corte*, ou *ponte*, se sua remoção aumentar o número de componentes conexos de G , ou seja, $\Omega(G - a) > \Omega(G)$. A principal característica de uma aresta de corte é que ela não está contida nos ciclos de G . As Figuras 3.3(a) e (b) mostram as arestas de corte através de arestas mais grossas.

Conjunto de Corte de Vértices

Conectividade entre Vértices

Ponte

Teorema 3.4. Para uma aresta a de um grafo conexo $G = (V, A)$, as seguintes afirmações são equivalentes:

1. a aresta a é uma aresta de corte de G .
2. a aresta a não está contida nos ciclos de G .
3. existem vértices w e u distintos tal que todo caminho entre w e u passa por a .
4. existe um particionamento do conjunto de vértices V em dois subconjuntos V_1 e V_2 tal que qualquer caminho entre $u \in V_1$ e $w \in V_2$ passa obrigatoriamente pela aresta a .

De forma similar ao exposto para vértices de corte, alguns grafos não possuem aresta de corte, porém possuem um subconjunto de aresta cuja remoção resulta ou em um grafo desconexo ou em um grafo trivial. Para um grafo G , este conjunto é chamado de *conjunto desconector* de G . Portanto, um grafo é chamado k -aresta conexo se o tamanho do menor conjunto desconector é k . Neste caso, dizemos que a *conectividade de aresta* do grafo, representada por $\lambda(G)$, é igual a k , i.e., $\lambda(G) = k$. Por definição $\lambda(G) = 0$, se o grafo for trivial ou desconexo e $\lambda(G) = 1$ se o grafo for conexo e possuir uma aresta de corte. Os conjuntos desconectores minimais são chamados de *conjunto de corte de arestas*, i.e., conjuntos desconectores que não possuem um subconjunto próprio que é desconector.

O grafo G ilustrado na Figura 3.3(a) possui vários conjuntos desconectores, entre eles, temos, $D_1 = \{\{2, 4\}, \{3, 4\}, \{2, 3\}\}$, $D_2 = \{\{2, 4\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$ e $D_3 = \{\{5, 6\}\}$. Apenas o conjunto D_3 é um conjunto de corte de arestas, pois tanto D_1 quanto D_2 possuem subconjuntos próprios que são desconectores. Por exemplo, D_1 possui o subconjunto $\{\{2, 4\}, \{3, 4\}\}$ que é desconector e também um conjunto de corte de arestas de tamanho 2. D_2 possui dois subconjuntos $\{\{2, 4\}, \{3, 4\}\}$ e $\{\{4, 5\}\}$ que são desconectores. O primeiro tem tamanho igual a 2 enquanto o segundo tem tamanho igual a 1. Este último é composto por uma aresta de corte. A conectividade de aresta deste grafo é $\lambda(G) = 1$, pois o menor conjunto de corte de arestas tem tamanho igual a 1. Logo, este grafo é um grafo 1-aresta conexo.

Podemos definir a conectividade de aresta entre dois vértices u e v , denotada por $\lambda(u, v)$, como o menor número de arestas cuja remoção separa u de v , i.e., que faz com que u não seja atingido por v (vice-versa). De forma similar ao apresentado para vértices, a conectividade de aresta está intimamente

Conjunto Desconector
Conectividade de Aresta

Conjunto de Corte de Arestas

Conectividade de Aresta entre Vértices

relacionada ao número de caminhos aresta-disjuntos que unem vértices u e v . Baseado nisto temos o seguinte Teorema.

Teorema 3.5 ([5]). Considere um grafo $G=(V,A)$ e dois vertices distintos $v_1, v_2 \in V$, o número mínimo de arestas que separam v_1 de v_2 é igual a número máximo de caminhos aresta-disjuntos entre v_1 e v_2 em G .

A partir daí temos o seguinte teorema sobre conectividade de aresta de um grafo qualquer.

Teorema 3.6. Um grafo $G = (V, A)$ é k -aresta conexo se e somente se ele possuir no k caminhos aresta-disjuntos entre qualquer par de vértices.

Portanto para um grafo $G = (V, A)$ não trivial, temos $\lambda(G) = \min \lambda(u, v)$ para qualquer par de vértices distintos $u, v \in V$. A relação entre a conectividade de vértice, a conectividade de arestas e o menor grau de um grafo G é dada pelo seguinte Teorema.

Teorema 3.7 ([6]). Para qualquer grafo G ,

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$$

3.5 Conectividade em Dígrafos

Quanto à conectividade, um dígrafo pode ser classificado de três formas distintas:

- *fracamente conexo* ou fraco se seu grafo subjacente é conexo, ou seja, para cada par de vértices existe um semi-caminho. Note que todo dígrafo conexo é fracamente conexo. **Dígrafo Fracamente Conexo**
- *unilateralmente conexo* ou unilateral se para cada par v e u de vértices existe um caminho direcionado ou de v para u ou de u para v ou ambos. **Dígrafo Unilateralmente Conexo**
- *fortemente conexo* ou forte se existe um caminho direcionado entre cada par de vértices. **Dígrafo Fortemente Conexo**

Usando as funções de fechamento transitivo inverso e direto, um dígrafo $D = (V, A)$ é fortemente conexo se e somente se $\hat{\Gamma}^+(v) = \hat{\Gamma}^-(v) = V$, para todo $v \in V$. Ou seja, qualquer vértice pode atingir ou ser atingido pelos

demais vértices do dígrafo através de um caminho direcionado. A relação entre os diferentes tipos de dígrafos é a seguinte

dígrafos fortes \subset dígrafos unilaterais \subset dígrafos fracos.

De forma análoga aos grafos quantos aos componentes conexos, um dígrafo pode possuir três diferentes tipos de componentes:

Componente Forte
Componente Unilateral
Componente Fraco

- *componente forte* de um dígrafo é um subdígrafo forte maximal.
- *componente unilateral* de um dígrafo é um subdígrafo unilateral maximal.
- *componente fraco* de um dígrafo é um subdígrafo fraco maximal.

A Figura 3.6(a) mostra um dígrafo D e seus componentes fortes, delimitados por uma região pontilhada. Para cada componente forte é possível planejar um caminho entre qualquer par de vértices do componente. O subdígrafo formado pelos vértices 5 e 6 juntamente com os arcos $(5, 6)$ e $(6, 5)$ não formam um componente forte, mesmo existindo um caminho direcionado entre 5 e 6, e entre 6 e 5. Isto se deve ao fato de não ser maximal, pois ele é um subdígrafo próprio do subdígrafo formado pelos vértices 4, 5 e 6 e os arcos associados.

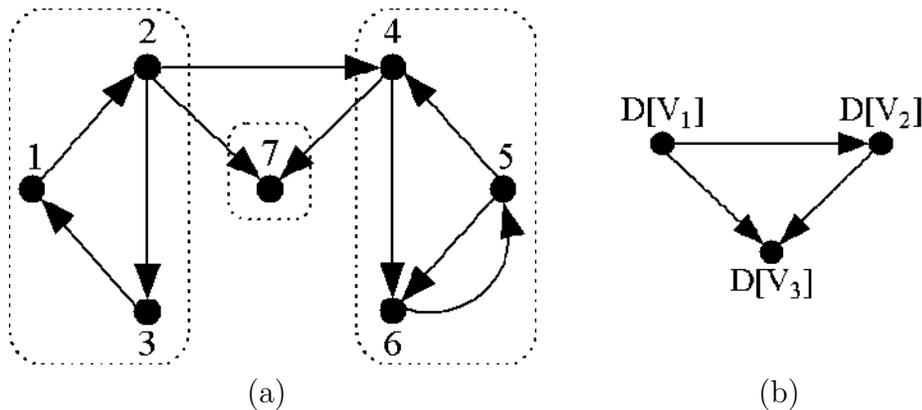


Figura 3.6: Componentes fortes de um dígrafo. (a) mostra um dígrafo e seus componentes fortes delimitados por uma região pontilhada. (b) mostra o dígrafo condensado de (a).

De todos os tipos de componentes, os componentes fortes são os mais importantes, pois eles permitem gerar um novo dígrafo através do processo

condensação

de *condensação* que mantém algumas das propriedades estruturais do dígrafo original. Por exemplo, um dígrafo $D = (V, A)$ pode ter seu conjunto de vértices particionado em V_1, V_2, \dots, V_n , com

$$\bigcup_i V_i = V \quad \text{e} \quad V_i \cap V_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j,$$

de forma que os subdígrafos induzidos $D[V_1], D[V_2], \dots, D[V_n]$ sejam os componentes fortes de D . Se aplicarmos a função de fechamento transitivo direto e inverso a um vértice $v \in V_i$ veremos que $\hat{\Gamma}^+(v)$ pode ou não ser igual $\hat{\Gamma}^-(v)$. Isto ocorre por que v pode atingir (e ser atingido por) vértices que não pertençam ao seu componente forte. Como em um componente forte qualquer vértice tem que atingir os demais, se calcularmos a interseção do resultado das funções de fechamento transitivo direto e inverso para $v \in V_i$ obtaremos V_i , i.e., veremos que $\hat{\Gamma}^+(v) \cap \hat{\Gamma}^-(v) = V_i$, para qualquer $v \in V_i$. Na Seção 3.6 veremos como calcular de forma sistemática os componentes fortes de dígrafos usando as funções de fechamento transitivo inverso e direto.

Definição 3.2. Um dígrafo condensado $\mathcal{D}(D) = (\mathcal{V}(D), \mathcal{A}(D))$ do dígrafo D possui um conjunto de vértices $\mathcal{V}(D)$ associados aos componentes fortes de D e um conjunto de arcos $\mathcal{A}(D)$ onde existe um arco entre os vértices de $\mathcal{V}(D)$ se existir pelo menos um arco entre os vértices dos respectivos componentes em D . **Dígrafo Condensado**

A Figura 3.6(b) mostra o dígrafo condensado $\mathcal{D} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ do dígrafo D mostrado em (a), onde $\mathcal{V} = \{D[V_1], D[V_2], D[V_3]\}$ ³ e $\mathcal{A}(D) = \{(D[V_1], D[V_2]), (D[V_1], D[V_3]), (D[V_2], D[V_3])\}$. Existe um arco com origem em $D[V_1]$ e destino em $D[V_2]$, pois existe um arco com origem no vértice 2 e destino no vértice 4 em D .

Definição 3.3. Um dígrafo *inverso* $\mathcal{I}(D) = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ de um dígrafo $D = (V, A)$ é um dígrafo que possui os mesmos vértices de D e um arco $(v, w) \in \mathcal{A}$ se e somente se $(w, v) \in A$. **Dígrafo Inverso**

Se cada aresta de um grafo simples G é substituída por um arco e o dígrafo resultante D é forte então dizemos que D é uma *orientação forte* de G . Assim, um grafo é fortemente orientável, ou seja pode ser transformado em um dígrafo fortemente conexo, se ele tem uma orientação forte. Baseado nisto, temos o seguinte teorema.

³ $D[V_i]$ é apenas um rótulo que representa o subdígrafo induzido.

Teorema 3.8 ([7]). Um grafo conexo G é fortemente orientável se e somente se ele é conexo e não possui pontes.

Para que um grafo G conexo e sem pontes seja transformado em um dígrafo fortemente conexo D , devemos orientar suas arestas de forma a criar *ciclos direcionados*. Inicialmente, selecionamos um ciclo e orientamos suas arestas de maneira a produzir um ciclo direcionado. Se todas as arestas estiverem neste ciclo então G foi transformado em D , caso contrário devemos orientar as arestas restantes considerando a orientação feita anteriormente. Isto irá gerar um conjunto de ciclos onde um vértice de um ciclo pode alcançar qualquer vértice do mesmo ou de outro ciclo. A Figura 3.7(a) mostra um grafo conexo G sem pontes sendo transformado em (d) um dígrafo fortemente conexo D . Inicialmente, (b) um ciclo direcionado é construído definindo uma orientação para as arestas do ciclo (1, 2, 4, 7, 3) em (a). Em (c) construímos o novo ciclo direcionado (4, 7, 3, 6, 5) aproveitando a orientação dos arcos definida previamente. Finalmente em (d), orientamos as arestas restantes de forma a fechar ciclos direcionados.

A transformação exemplificada acima é apenas um simples exemplo, já que existem inúmeras maneiras de transformar G em D . Quando escolhemos uma orientação para as arestas de um grafo completo, o dígrafo resultante é chamado de *torneio*. A Figura 3.8 ilustra dois torneios obtidos orientando as arestas de um grafo K_5 . As diferenças entre estes torneios estão nos arcos entre os vértices 1 e 2, 1 e 4 e 2 e 3. Se o torneio possuir um ciclo direcionado de espalhamento então ele é chamado *torneio forte*. Os torneios apresentados na Figura 3.8 são fortes. Para (a), temos o seguinte ciclo de espalhamento (1, 5, 2, 3, 4, 1) enquanto que para (b) temos o ciclo (1, 3, 4, 5, 2, 1).

Para um torneio, o grau de saída de um vértice é chamado *escore* e a seqüência dos graus de saída de todos vértices define a *seqüência de escores*. A partir desta seqüência é possível determinar a seqüência de graus de entrada, pois para um vértice v , temos $\delta^+(v) + \delta^-(v) = n - 1$. Note que se eliminarmos a orientação dos arcos que têm origem e destino em v , temos $n - 1$ arestas incidentes a v . A seqüência de escore para o torneio ilustrado na Figura 3.8(a) é (3, 2, 1, 2, 2). Quando um vértice consegue alcançar qualquer vértice através de um caminho direcionado de comprimento no máximo igual a 2, então ele é chamado *vértice rei*.

Em relação à conectividade de vértices e arestas para grafos apresentada nas seções 3.3 e 3.4, os dígrafos possuem conceitos similares. Um conjunto separador é um conjunto de vértices de um dígrafo D que quando removido

Torneio

Torneio Forte

Seqüência de Escores

Vértice Rei

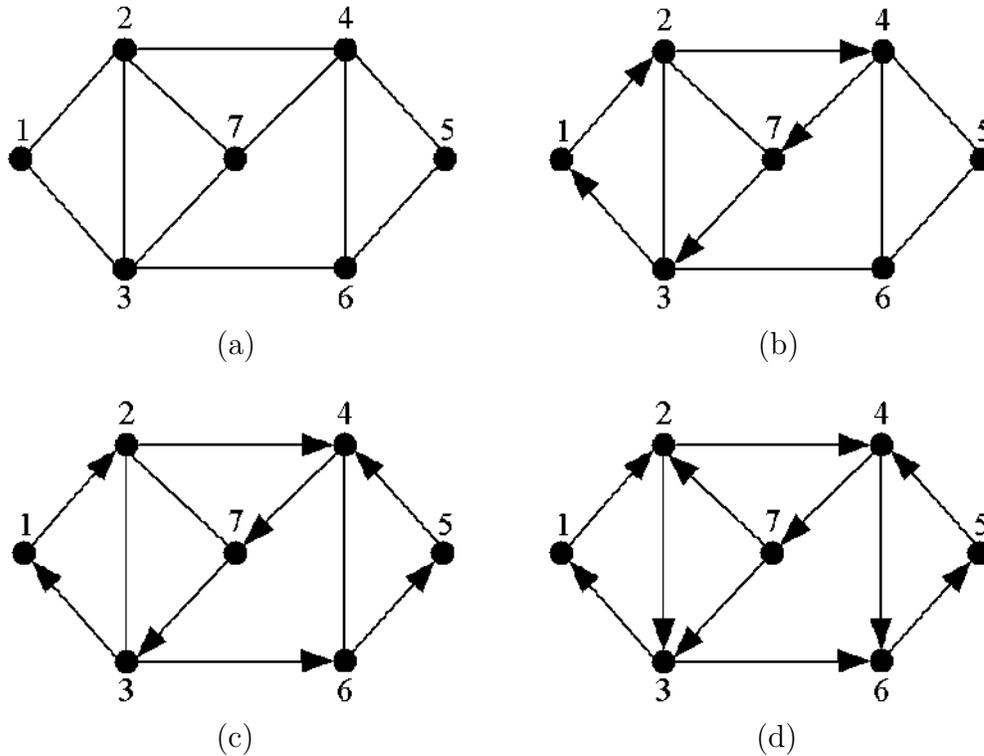


Figura 3.7: Transformação de (a) um grafo conexo sem pontes em (d) um dígrafo fortemente conexo. (b) e (c) são os passos intermediários.

faz com que D deixe de ser fortemente conexo. Um conjunto de corte de vértices de um dígrafo é o conjunto separador minimal, ou seja, que não possui subconjunto próprio que seja um conjunto separador. A *conectividade forte de vértice* de um dígrafo $D = (V, A)$, definido por $\kappa(D)$ corresponde ao menor conjunto de vértices $S \subseteq V$ tal que $D - S$ não é fortemente conexo ou tem apenas um vértice. Se $\kappa(D) = k$, então dizemos que D é um k -vértice conexo ou k -conexo. Analogamente ao conceito de grafos, um dígrafo completo K_n possui $\kappa(K_n) = n - 1$. Se um dígrafo D não é forte, então $\kappa(D) = 0$.

Um conjunto desconector é um conjunto de arcos de um dígrafo D que quando removido faz com que D deixe de ser fortemente conexo. Um conjunto de corte de arcos de um dígrafo é o conjunto desconector minimal, ou seja, que não possui subconjunto próprio que seja um conjunto separador. A *conectividade forte de arco* de um dígrafo $D = (V, A)$, definido por $\lambda(D)$ cor-

**Conectividade
Forte de Vértice**

**Conectividade
Forte de Arco**

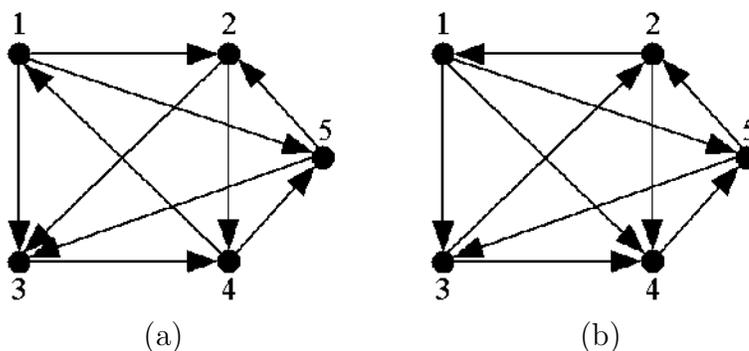


Figura 3.8: Exemplos de torneio forte para o grafo K_5 .

responde ao menor conjunto de corte $S \subseteq A$ tal que $D - S$ não é fortemente conexo. Se $\lambda(D) = k$, então dizemos que D é k -arco conexo. Se D não é forte, então $\lambda(D) = 0$.

Existe relação entre a conectividade de arco e vértices para dígrafos da mesma forma que para grafos. Esta relação é dada pela seguinte desigualdade.

Teorema 3.9 ([8]). Para qualquer dígrafo D ,

$$\kappa(D) \leq \lambda(D) \leq \min\{\delta^-(D), \delta^+(D)\}$$

As variações do Teorema de Menger para conectividade de vértice e arcos em dígrafos são apresentadas abaixo. De forma similar ao apresentado para grafos, estas conectividades estão intimamente relacionadas ao número de caminhos direcionados disjuntos e arco-disjuntos para qualquer par de vértices no dígrafo.

Teorema 3.10 ([5]). Considere um dígrafo $D = (V, A)$ e dois vértices $u, v \in V$ não adjacentes, o número mínimo de vértices que separam u de v , i.e., vértices cuja remoção elimina todos os caminhos direcionados de u para v , é igual a número máximo de caminhos direcionados disjuntos de u para v em D .

Teorema 3.11. Um dígrafo é k -vértice conexo se e somente se existem k caminhos direcionados disjuntos entre qualquer par de vértices.

Teorema 3.12 (Teorema de Menger(Dígrafos)[5]). Considere um dígrafo $D=(V,A)$ e dois vértices distintos $u, v \in V$, o número mínimo de arcos cuja

remoção separam u de v , i.e., vértices cuja remoção eliminam todos os caminhos direcionados de u para v , é igual a número máximo de caminhos direcionados arcos-disjuntos de u para v em D .

Teorema 3.13. Um dígrafo $D = (V, A)$ é k -arco conexo se e somente se ele possui k caminhos direcionados arco-disjuntos entre qualquer par de vértices.

Em um dígrafo, a conectividade entre dois vértices não adjacentes u e v , denotada por $\kappa(u, v)$, corresponde ao número máximo de caminhos direcionados disjuntos de u para v , enquanto que a conectividade de arco entre dois vértices u e v não adjacentes, denotada por $\lambda(u, v)$ é o número máximo de caminhos arco-disjuntos de u para v . Para qualquer dígrafo D , temos

$$\kappa(D) = \min \kappa(u, v) \text{ e } \lambda(D) = \min \lambda(u, v)$$

considerando todos os pares de vértices não adjacentes u e v .

**Conectividade
entre Vértices**

**Conectividade
de Arco entre
Vértices**

3.6 Cálculo de Componentes

Como comentado na seção anterior, as funções de fechamento transitivo podem ser utilizada para calcular os componentes conexos de grafos e os componentes fortes de dígrafos. O seu uso neste cálculo dá origem ao método chamado *Malgrange*. Inicialmente, será apresentada a aplicação do método em dígrafos e em seguida em grafos.

**Método
Malgrange**

Dado um dígrafo $D = (V, A)$ realizamos os seguintes passos:

- selecionamos um vértice $v_1 \in V$ e calculamos as funções de fechamento transitivo direto, $\hat{\Gamma}^+(v_1)$, e inverso, $\hat{\Gamma}^-(v_1)$, e em seguida calculamos a interseção destes resultados, ou seja, $\hat{\Gamma}^+(v_1) \cap \hat{\Gamma}^-(v_1)$. Esta interseção dá origem ao conjunto de vértices $V_1 \subseteq V$ que está associado ao primeiro componente forte $D[V_1]$.
- se $V_1 = V$ então o dígrafo é fortemente conexo tendo como componente forte ele próprio, i.e., $D[V_1] = D[V]$. Caso contrário, selecionamos um vértice $v_2 \in V - V_1$ e repetimos o processo calculando $\hat{\Gamma}^+(v_2) \cap \hat{\Gamma}^-(v_2)$. Isto dá origem ao segundo conjunto de vértices V_2 e conseqüentemente ao segundo componente forte $D[V_2]$.

- na i -ésima iteração, selecionamos

$$v_i \in V - \bigcup_{j=1}^{i-1} V_j$$

repetindo o processo descrito anteriormente.

- O método pára quando após a n -ésima iteração temos

$$\bigcup_{i=1}^n V_i = V.$$

Neste momento os dígrafos induzidos $D[V_1], D[V_2], \dots, D[V_n]$ correspondem a todos os componentes fortes de D .

A aplicação do método no dígrafo $D = (V, A)$ da Figura 3.9 é como segue. Sorteamos um vértice v_1 do conjunto V , por exemplo, $v_1 = 3$. Calculamos $\hat{\Gamma}^+(v_1)$ e $\hat{\Gamma}^-(v_1)$ que correspondem respectivamente a

$$\hat{\Gamma}^+(v_1) = \{2, 3, 6, 8, 9\} \text{ e } \hat{\Gamma}^-(v_1) = \{3, 5, 6\}$$

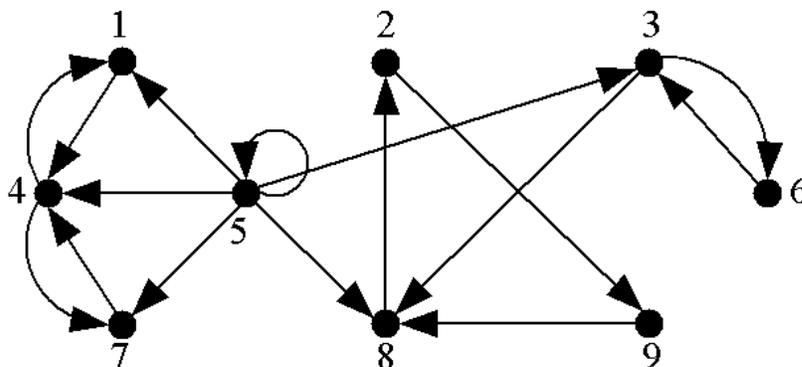


Figura 3.9: Dígrafo fracamente conexo com quatro componentes fortes.

A interseção destes resultados $\hat{\Gamma}^+(v_1) \cap \hat{\Gamma}^-(v_1) = V_1 = \{3, 6\}$ e $D[V_1]$ é o subdígrafo induzido pelos vértices em V_1 que corresponde ao primeiro componente forte de D . Como $V_1 \neq V$, então selecionamos o vértice v_2 do conjunto $V - V_1 = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9\}$, por exemplo $v_2 = 2$. Calculamos $\hat{\Gamma}^+(v_2)$ e $\hat{\Gamma}^-(v_2)$ que correspondem respectivamente a

$$\hat{\Gamma}^+(v_2) = \{2, 8, 9\} \text{ e } \hat{\Gamma}^-(v_2) = \{2, 3, 5, 6, 8, 9\}$$

O resultado da interseção $\hat{\Gamma}^+(v_1) \cap \hat{\Gamma}^-(v_1) = V_2 = \{2, 8, 9\}$ dá origem a $D[V_2]$ que é segundo componente forte de D . Selecionando v_3 do conjunto $V - (V_1 \cup V_2) = \{1, 4, 5, 7\}$, por exemplo $v_3 = 5$, temos $\hat{\Gamma}^+(v_3) = \{2, 3, 5, 6, 8, 9\}$, $\hat{\Gamma}^-(v_3) = \{5\}$ e $V_3 = \{5\}$, onde $D[V_3]$ é o terceiro componente forte. Repetindo o processo anterior, selecionamos v_4 de $V - (V_1 \cup V_2 \cup V_3) = \{1, 4, 7\}$, por exemplo, $v_4 = 1$, obtendo $\hat{\Gamma}^+(v_4) = \{1, 4, 7\}$ e $\hat{\Gamma}^-(v_4) = \{1, 4, 5, 7\}$. Logo temos $V_4 = \{1, 4, 7\}$ e o quarto componente forte $D[V_4]$. Como

$$V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4 = V,$$

o processo pára e temos $D[V_1], D[V_2], D[V_3], D[V_4]$ como os componentes fortes de D .

A aplicação do método de Malgrange em um grafo é sutilmente diferente da utilizada em dígrafos. Se analisarmos atentamente uma aresta $\{a, b\}$ em um grafo, ela tem a mesma funcionalidade que a presença de ambos os arcos (a, b) e (b, a) em um dígrafo. Portanto, em grafos é usada apenas a função de fechamento transitivo $\hat{\Gamma}$ ao invés das funções $\hat{\Gamma}^+$ e $\hat{\Gamma}^-$ usadas em dígrafos.

Considere um grafo $G = (V, A)$, realizamos os seguintes passos:

- selecionamos um vértice $v_1 \in V$ e calculamos a função de fechamento transitivo $\hat{\Gamma}(v_1)$. O conjunto de vértices resultante V_1 dá origem ao primeiro componente conexo $G[V_1]$.
- se $V_1 = V$ então o grafo é conexo tendo como único componente conexo, o próprio grafo. Caso contrário, selecionamos um vértice $v_2 \in V - V_1$ e repetimos o processo. Calculando $\hat{\Gamma}(v_2)$ que dá origem ao segundo conjunto de vértices V_2 e conseqüentemente ao segundo componente $G[V_2]$.
- na i -ésima iteração, selecionamos

$$v_i \in V - \bigcup_{j=1}^{i-1} V_j$$

repetindo o processo descrito anteriormente.

- O método pára quando após a n -ésima iteração temos

$$\bigcup_{i=1}^n V_i = V.$$

Neste momento os grafos induzidos $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_n]$ correspondem a todos os componentes de G .

A aplicação do método no grafo $G = (V, A)$ representado na Figura 3.10 é como segue. Sorteamos um vértice v_1 do conjunto V , por exemplo, $v_1 = 3$ e calculamos $\hat{\Gamma}(v_1)$. O conjunto resultante $V_1 = \{2, 3, 6, 8, 9\}$ dá origem ao primeiro componente $G[V_1]$ do grafo.

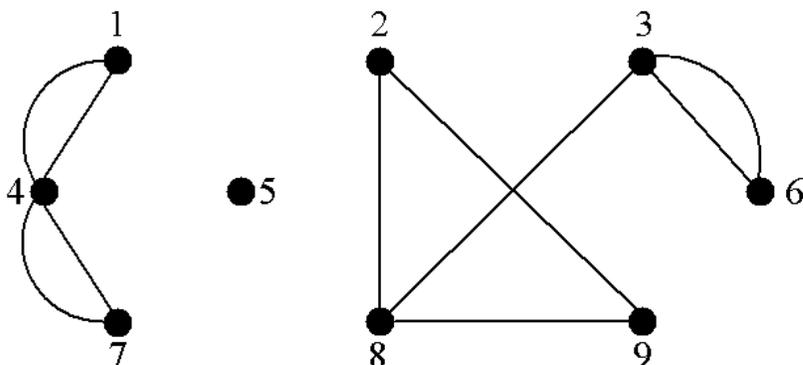


Figura 3.10: Grafo desconexo com três componentes conexos.

Como $V_1 \neq V$, selecionamos outro vértice v_2 do conjunto $V - V_1 = \{1, 4, 5, 7\}$, por exemplo $v_2 = 5$ e calculamos $V_2 = \hat{\Gamma}(v_2)$ dando origem ao conjunto $V_2 = \{5\}$ e portanto ao segundo componente $G[V_2]$. Repetindo o processo anterior, selecionamos $v_3 \in V - (V_1 \cup V_2) = \{1, 4, 7\}$, por exemplo, $v_3 = 4$ e calculamos $V_3 = \hat{\Gamma}(v_3)$, o que nos leva a $V_3 = \{1, 4, 7\}$ e ao terceiro componente $G[V_3]$. Como $V_1 \cup V_2 \cup V_3 = V$, o processo pára com $G[V_1]$, $G[V_2]$ e $G[V_3]$ como os componentes conexos de G .

3.7 Exercícios

Exercício 3.1. *Mostre que se $G = (V, A)$ é um grafo simples e $\delta(G) > \lceil |V|/2 \rceil - 1$ então G é conexo.*

Exercício 3.2. *A partir do grafo mostrado na Figura 3.2(a), determine os grafos induzidos pelo particionamento das arestas que possuam apenas o vértice 4 em comum. Faça o mesmo para Figura 3.2(b) considerando um a um os vértices 4, 5 e 6.*

Exercício 3.3. *Determine a conectividade de vértice e de aresta do grafo da Figura 3.2(b)*

Exercício 3.4. *Existe alguma relação entre conjunto de corte de arestas e conjunto de corte de vértices? Se sim, comente.*

Exercício 3.5. *Mostre que uma aresta é uma aresta de corte se e somente se ela não pertence aos ciclos do grafo.*

Exercício 3.6. *Mostre que se G possui p vértices e $\delta(G) \geq \lceil p/2 \rceil$, então $\lambda(G) = \delta(G)$.*

Exercício 3.7. *Mostre que para todos os grafos com p vértices e q arestas, a conectividade máxima é 0 quando $q < p - 1$ e é $\lceil 2q/p \rceil$, quando $q \geq p - 1$.*

Exercício 3.8. *Qual o significado de $\kappa(G) = 1$ para o grafo G subjacente a uma rede de computador?*

Exercício 3.9. *Quantas ruas bloqueadas são necessárias para fazer com que um robô partindo de uma posição p_1 não consiga atingir p_2 , considerando que o grafo subjacente G ao mapa do ambiente possui $\lambda(G) = 4$. Existe alguma situação onde uma quantidade de cruzamento de ruas menor que $\lambda(G)$ pode fazer o robô deixar de atingir seu objetivo? Se sim, desenhe um mapa que illustre esta situação.*

Exercício 3.10. *Mostre que se G é um grafo k -aresta conexo, com $k > 0$, e se A' é um subconjunto de arestas de G de tamanho k , então $\Omega(G - A') \leq 2$.*

Exercício 3.11. *Mostre que se G é um grafo r -regular com $\kappa(G) = 1$ então $\lambda(G) \leq \lceil r/2 \rceil$.*

Exercício 3.12. *Mostre que um dígrafo sem ciclos ou laços possui pelo menos um vértice fonte (ou sumidouro).*

Exercício 3.13. *Mostre que um dígrafo condensado $\mathcal{D}(D)$ não possui ciclos direcionados.*

Exercício 3.14. *Determine a quantidade de dígrafos simples fracamente conexo que podemos obter a partir de um grafo simples conexo $G = (V, A)$.*

Exercício 3.15. *Dado $V = \{1, 2, \dots, n\}$, um conjunto de vértices, determine a quantidade de dígrafos fracamente conexos ou não (com no máximo 1 laço por vértice) que podemos gerar usando V .*

Exercício 3.16. *Determine a quantidade de torneios que podemos obter a partir de um grafo K_n .*

Exercício 3.17. *Mostre que todo grafo simples $G = (V, A)$ com $|V| > |A|$ implica $\Omega(G) \geq |V| - |A|$.*

Exercício 3.18. *Mostre que um grafo simples $G = (V, A)$ tem uma quantidade de arestas que satisfaz a seguinte desigualdade*

$$|V| - \Omega(G) \leq |A| \leq \frac{1}{2}(|V| - \Omega(G))(|V| - \Omega(G) + 1)$$

Exercício 3.19. *Utilize o método de Malgrange para calcular os componentes fortes do dígrafo ilustrado na Figura 3.11 e encontre o dígrafo condensado correspondente.*

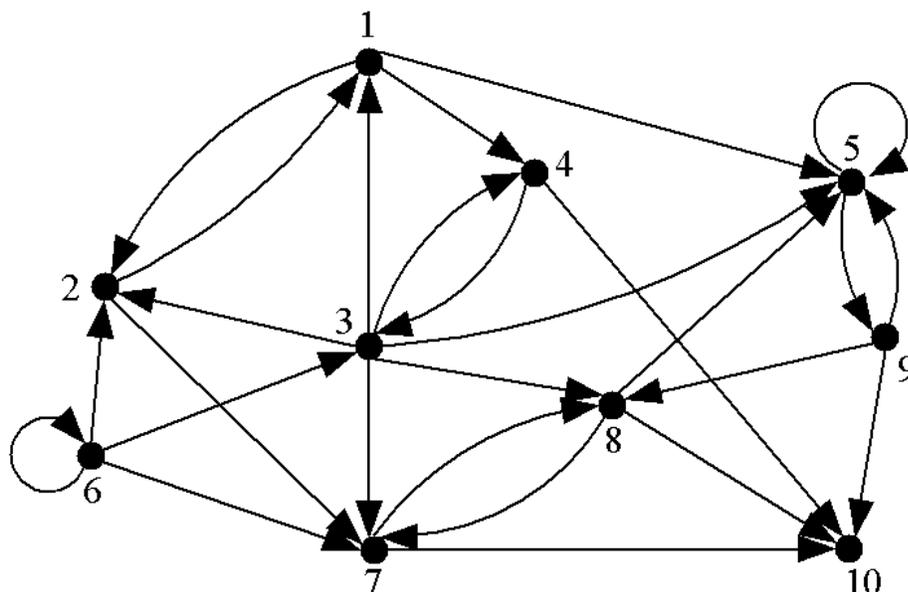


Figura 3.11: Dígrafo Exemplo

Capítulo 4

Relacionamentos V-A

Neste capítulo apresentamos alguns dos inúmeros conceitos associados ao relacionamento entre vértices e arestas, ou vértice e arco, que chamaremos de relacionamento V-A. Inicialmente apresentaremos o relacionamento entre vértices que dá origem ao conceito de clique, i.e, de subgrafos completos maximais, seguido do conceito de conjunto independente que está associado a subgrafos totalmente desconexos. Em seguida mostraremos o relacionamento entre arestas que dá origem ao conceito de emparelhamento ou acoplamento, finalizando com o conceito de cobertura de vértices que mostra o relacionamento entre arestas e vértices de maneira específica. Tentaremos sempre que possível fazer ligações com exemplos do mundo real.

4.1 Clique

O primeiro relacionamento V-A diz respeito ao relacionamento vértice-vértice intitulado *clique*. Um clique em um grafo G é um subgrafo completo de G . O fato de um clique ser um subgrafo completo implica que todos os vértices no clique são adjacentes entre si. Um clique é maximal quando ele não é um subgrafo próprio de outro subgrafo completo. O estudo de cliques foca principalmente em cliques que são maximais e máximos, portanto vários autores quando fazem referência a cliques estão considerando cliques maximais. Adotaremos esta mesma referência neste livro. Quando um clique não for maximal deixaremos explícita esta informação. Um subgrafo é um clique em um pseudografo(ou multigrafo) se e somente se ele for um clique no grafo subjacente ao pseudografo(ou multigrafo). Em um dígrafo(simples

ou não), um clique maximal é um subdígrafo completo maximal, onde para cada par de vértices u e v , existem dois arcos (u, v) e (v, u) . Como um clique é um subgrafo(ou subdígrafo) completo, ele pode ser descrito apenas pelos seus vértices.

A Figura 4.1 mostra (a) um grafo e seus (b) quatro cliques formados pelos seguintes conjuntos de vértices $\{1, 5\}$, $\{5, 6\}$, $\{1, 2, 3\}$ e $\{2, 3, 4, 6\}$, e destacados usando linhas de diferentes espessuras e formatos. Observe que uma aresta é um subgrafo completo, e em diversos casos ela é clique não maximal. Este é o motivo para que a aresta $\{1, 5\}$ seja um clique maximal e a $\{2, 3\}$ não seja. Note que $\{2, 3\}$ está contida propriamente no subgrafo completo formado pelos vértices $\{1, 2, 3\}$, enquanto que $\{1, 5\}$ não está contida em nenhum subgrafo completo. Outro ponto importante é que cliques podem compartilhar tanto arestas quanto vértices. Este é o caso dos cliques formados pelos vértices $\{1, 2, 3\}$ e $\{2, 3, 4, 6\}$ que compartilham os vértices 2 e 3 e aresta $\{2, 3\}$.

A Figura 4.2(b) mostra os cliques do dígrafo em (a). Estes cliques estão marcados com arestas grossas e pontilhadas e são formados pelos seguintes conjuntos de vértices $\{1, 3, 5\}$ $\{2, 3, 4, 6\}$ de tamanhos 3 e 4, respectivamente. Diferente do exemplo anterior, apenas um único arco entre um par de vértices não forma um clique. Este é o caso dos pares de vértices 1 e 2, e 5 e 6. Para que eles fossem candidatos a cliques maximais, eles teriam que ter não somente o arco $(2, 1)$, mas também o arco $(1, 2)$. O mesmo se aplica aos vértices 5 e 6.

Clique Máximo Número de Clique

Um grafo ou dígrafo G pode possuir vários cliques de diferentes tamanhos, como foi possível ver nos exemplos acima. O maior clique em G é chamado *clique máximo* e define o *número de clique* de G , representado por $\omega(G)$. Este número é igual ao tamanho do clique máximo, o qual é dado pelo número de vértices do clique. Mais formalmente $\omega(G) = r$ onde r é o maior inteiro tal que $K_r \subseteq G$. Esta medida é muito importante em problemas, como o de coloração de grafos como veremos no Capítulo 8. O grafo G na Figura 4.1 e o dígrafo D na Figura 4.2 possuem ambos número de clique igual a 4, i.e., $\omega(G) = 4$ e $\omega(D) = 4$. Um grafo ou dígrafo K_n possui um único clique, representado por si próprio. Logo, $\omega(K_n) = n$.

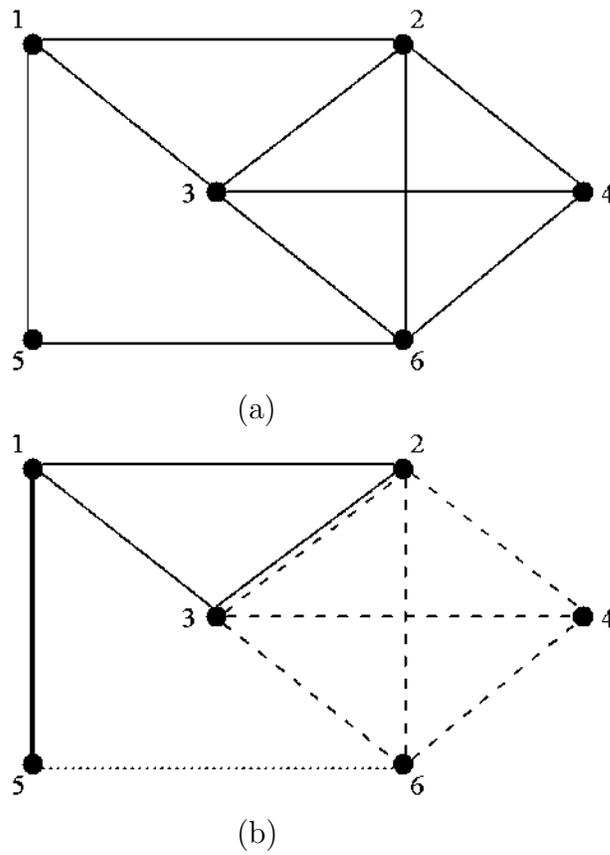
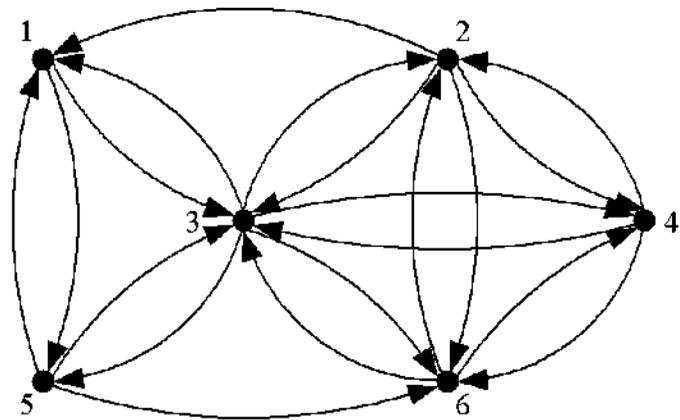
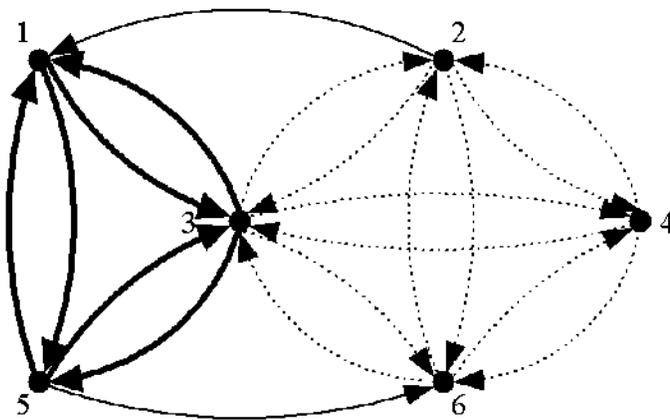


Figura 4.1: Exemplo de cliques em grafos. (b) destaca através de linhas de diferentes espessuras e estilos os quatro cliques do grafo em (a).



(a)



(b)

Figura 4.2: Exemplo de cliques em dígrafos. (b) destaca através de linhas grossa e pontilhada os cliques do dígrafo em (a).

4.2 Conjunto Independente

Este relacionamento V-A é outro exemplo de relacionamento vértice-vértice, porém oposto ao apresentado na seção anterior. Ele está associado aos subgrafos totalmente desconexos maximais chamados conjuntos independentes, ou simplesmente, *co-clique*. Um conjunto independente é um conjunto de vértices que não são adjacentes entre si. Ele é maximal se não é subconjunto próprio de outro conjunto independente. De forma análoga, um grafo ou dígrafo G pode possuir vários conjuntos independentes de diferentes tamanhos, sendo este tamanho definido pela cardinalidade do conjunto. O maior conjunto independente é chamado *conjunto independente máximo* e sua cardinalidade é usada para definir o *número de independência* de G , denotado por $\alpha(G)$. Analogamente ao número de clique, $\alpha(G) = r$ onde r é o maior inteiro tal que $\bar{K}_r \subseteq G$. Um grafo ou dígrafo K_n possui $\alpha(K_n) = 1$.

A Figura 4.3(b) ilustra um exemplo de conjunto independente dado pelos vértices brancos do grafo em (a). Este grafo possui os seguintes conjuntos independentes maximais: $\{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$, $\{1, 3, 5, 7\}$ e $\{4, 6\}$. O conjunto independente máximo é definido por $\{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$, logo o número de independência do grafo é igual a 6. Note que o subconjunto de vértices $\{1, 3, 7\}$ não é um conjunto independente maximal, pois ele está contido nos subconjuntos $\{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$ e $\{1, 3, 5, 7\}$.

Existe uma íntima relação entre conjuntos independentes e cliques. Um clique maximal em um grafo G é um subgrafo completo, que no complemento de G se torna um subgrafo totalmente desconexo, i.e., um conjunto independente maximal. Esta constatação permite usar algoritmos aplicados a cliques em conjuntos independentes e vice-versa.

A presença de vários conjuntos independentes maximais dá origem a um tipo especial de grafo chamado *grafo k -partido*. Um grafo $G = (V, A)$ é chamado *k -partido* se os seguintes critérios forem obedecidos

- for possível particionar o conjunto de vértices em k conjuntos não vazios V_1, V_2, \dots, V_k , de forma que eles sejam disjuntos dois a dois, i.e., $V_i \cap V_j = \emptyset$, para $i \neq j$, e a união dos elementos destes conjuntos seja o conjunto de vértices original, ou seja, $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k = V$.
- cada aresta $a \in A$, tem extremidades em conjuntos distintos, i.e., se $a = \{v, u\}$, então $v \in V_i$ e $u \in V_j$, onde $i \neq j$, ou seja, os vértices de cada conjunto não são adjacentes entre si.

Co-Clique

Conjunto Independente Máximo

Número de Independência

Grafo k -partido

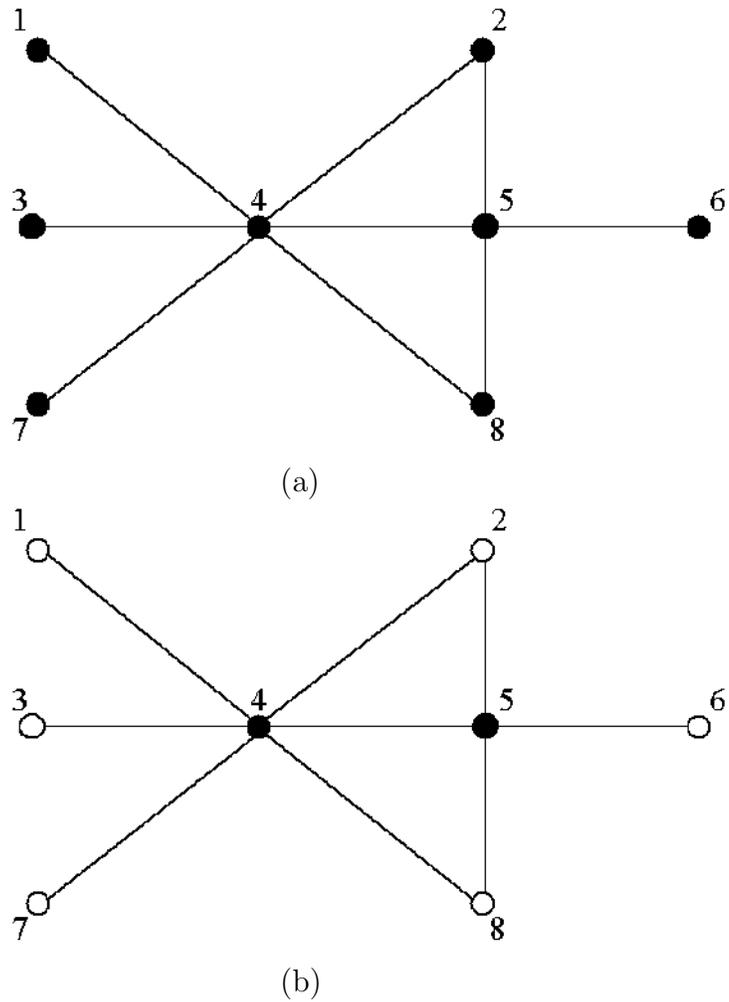


Figura 4.3: Exemplo de conjunto independente em grafos.(b) ilustra um conjunto independente, denotado pelos vértices branco, do grafo em (a).

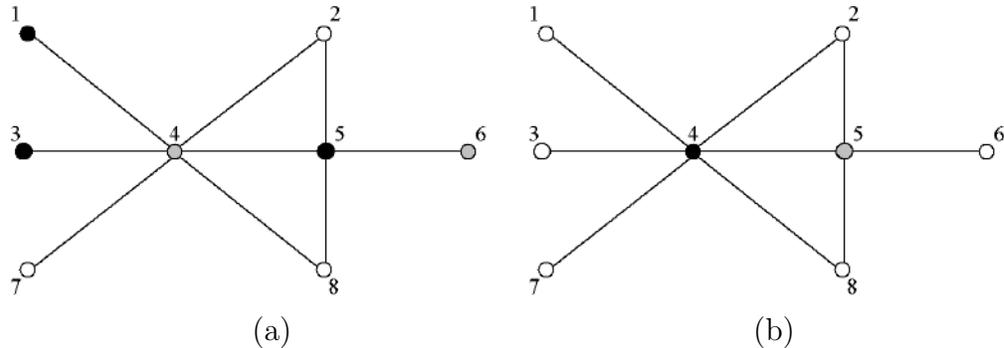


Figura 4.4: Exemplos de particionamento dos vértices do grafo na Figura 4.3(a) em três conjuntos independentes, mostrados em cores distintas.

- k é o menor inteiro que ainda garante os critérios anteriores, caso contrário qualquer grafo com n vértices seria um grafo n partido.

Cada conjunto V_i é chamado partição do conjunto de vértices e corresponde a um conjunto independente que pode ou não ser maximal. Se existem arestas entre qualquer par de vértices de conjuntos distintos então temos o que é chamado de grafo k -partido completo, denotado por K_{n_1, n_2, \dots, n_k} , onde cada $n_i = |V_i|$. Ele pode ser visto como o resultado da junção de vários complementos de grafos completos, i.e.,

$$K_{n_1, n_2, \dots, n_k} = \bar{K}_{n_1} + \bar{K}_{n_2} + \dots + \bar{K}_{n_k}$$

A Figura 4.4(a) e (b) ilustram o particionamento dos conjuntos de vértices do grafo na Figura 4.3(a), através de cores distintas, onde vértices com a mesma cor pertencem ao mesmo conjunto independente. Este grafo é um 3-partido, possuindo em cada exemplo três partições onde algumas correspondem a conjuntos independentes maximais. Por exemplo, na Figura 4.4(a), temos $\{4, 6\}$ como conjunto independente maximal, porém $\{1, 3, 5\}$ não é um conjunto independente maximal, já que está contido propriamente no conjunto independente $\{1, 3, 5, 7\}$. A mesma análise pode ser feita na Figura 4.4(b).

Um caso particular de um grafo k -partido, é o grafo 2-partido. Este grafo é composto por apenas duas partições, sendo comumente chamado de grafo bipartido. O uso deste tipo de grafo é amplo e é focado em problemas de emparelhamento. Um exemplo foi já mostrado anteriormente na Seção 1.7.1 e corresponde ao problema de associação de tarefas. Neste problema temos

**Grafo K -partido
Completo**

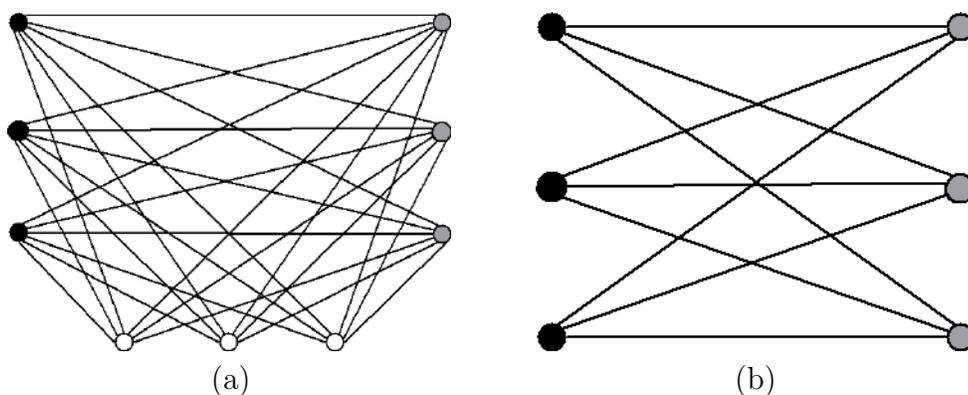


Figura 4.5: Exemplos de (a) grafo 3-partido completo e (b) grafo biclique.

que associar pessoas e tarefas de forma que cada tarefa seja realizada e cada pessoa esteja vinculada a uma dada tarefa. Este problema é analisado utilizando grafos bipartidos, onde um conjunto de vértices está associado às pessoas enquanto que o outro conjunto está associado às tarefas. Existem arestas apenas entre vértices de diferentes conjuntos, já que o emparelhamento deve ser constituído por elementos de conjuntos diferentes.

Grafo Bipartido Completo
Biclique

Quando um grafo bipartido possui aresta entre qualquer par de vértices de conjuntos distintos ele é chamado de grafo bipartido completo ou *biclique*, sendo denotado por $K_{r,s}$, onde r e s são os tamanhos dos dois particionamentos. O termo biclique é curioso e não é facilmente identificado olhando diretamente para o grafo, porém calculando $\bar{K}_{r,s}$, observaremos que os dois conjuntos independentes serão ambos *cliques*. As Figuras 4.5(a) e (b) ilustram um grafo 3-partido completo $K_{3,3,3}$ e um biclique $K_{3,3}$ respectivamente. Em ambos os casos, temos um particionamento do conjunto de vértices, onde cada partição é um conjunto independente.

O seguinte Teorema permite verificar rapidamente se um grafo é ou não bipartido.

Teorema 4.1. Um grafo G é bipartido se e somente se ele não possui ciclos de comprimento ímpar.

Dígrafo k -partido

A definição de *dígrafo k -partido* é similar ao exposto anteriormente para grafos, com a diferença que estamos lidando com arcos ao invés de arestas. Portanto, a origem e destino de cada arco devem situar-se em partições distintas. A relação entre grafos e dígrafos k -partidos é a seguinte. Um dígrafo D é k -partido se e somente se seu grafo simples subjacente G é k -partido. Um

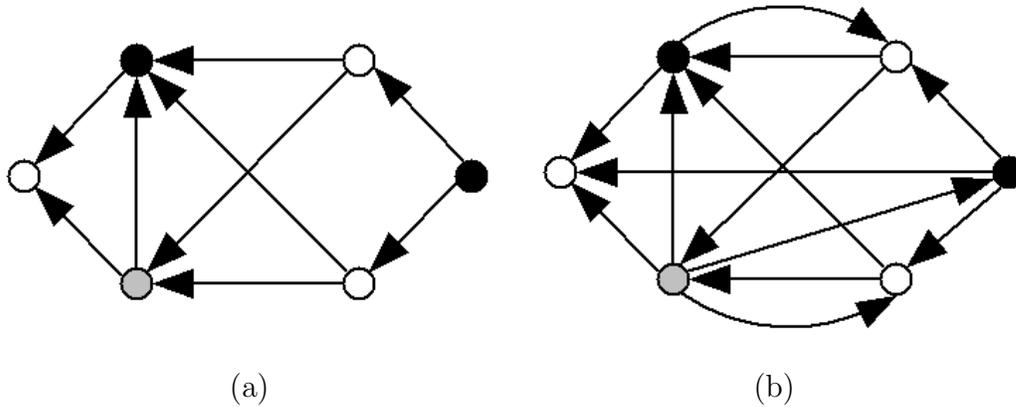


Figura 4.6: Exemplos de (a) dígrafo 3-partido e (b) dígrafo 3-partido completo.

dígrafo é k -partido completo se para cada par de vértices $v \in V_i$ e $u \in V_j$, com $i \neq j$, existe pelo menos um arco entre u e v [9]. Ele usa a mesma notação empregada em grafos, i.e., K_{n_1, n_2, \dots, n_k} , onde cada $n_i = |V_i|$. A Figura 4.6 ilustra (a) um dígrafo 3-partido, onde os vértices de uma mesma partição possuem mesma cor. Enquanto que (b) é um dígrafo 3-partido completo, $K_{3,1,1}$ pois existe pelo menos um arco entre cada par de vértices oriundos de partições diferentes. O que difere entre os dígrafos em (a) e em (b), é que em (a) estão faltando alguns arcos entre vértices de partições distintas, por exemplo, falta um arco entre o vértice preto mais à direita e o vértice cinza. Um dígrafo $D = (V, A)$ é *dígrafo bipartido direcionado* se o grafo subjacente é bipartido com partições V_1 e V_2 , tal que para cada arco $(u, v) \in A$, $u \in V_1$ e $v \in V_2$, ou seja, u é uma fonte e v é um sumidouro.

Dígrafo k -partido Completo

Dígrafo Bipartido Direcionado

A adaptação do Teorema 4.1 para dígrafos é a seguinte

Teorema 4.2. Um dígrafo fortemente conexo D é bipartido se e somente se ele não possui ciclos direcionados de comprimento ímpar.

4.3 Cobertura de Vértices

Este relacionamento $V - A$ lida simultaneamente com vértices e arestas. Ele é chamado cobertura de vértices e está intimamente associado aos conceitos anteriores. Dizemos que um vértice cobre uma aresta quando ele é uma de

suas extremidades. Dado um grafo $G = (V, A)$, sabemos que V cobre todas as arestas no conjunto A , porém o que é de interesse prático é saber o menor número de vértices que conseguem cobrir todas as arestas.

Cobertura Minimal

Uma cobertura de vértices de um grafo G é um subconjunto S dos vértices de G , $S \subseteq V$, que cobrem todas as arestas de G , i.e., todas as arestas são incidentes a pelo menos um vértice de S . De forma similar, ao apresentado anteriormente, buscamos as coberturas *minimais* de vértices, ou seja, coberturas de vértices que não possuem subconjunto próprio que seja uma cobertura de vértices. A menor cobertura de vértices é chamada *cobertura mínima de vértices* e sua cardinalidade define o *número de cobertura de vértices*, $\beta(G)$.

Cobertura Mínima

Número de Cobertura de Vértices

O relacionamento entre cobertura de vértices e conjunto independente é direta. Considere o conjunto independente maximal $I \subseteq V$. Todos os vértices em $v \in V - I$ são adjacentes a pelo menos um vértice em I , pois se existe um vértice v que não é adjacente a outro em I , então o conjunto I não é maximal. Portanto podemos pensar que cada aresta de G possui uma extremidade em $V - I$ e outra em I . Porém algumas arestas são incidentes a vértices apenas do conjunto $V - I$. Logo, os vértices em I não cobrem todas as arestas de G , porém os vértices em $V - I$ cobrem. Este fato dá origem ao seguinte Teorema.

Teorema 4.3. Dado um grafo $G = (V, A)$, um conjunto $S \subseteq V$ é um conjunto independente maximal de G se e somente se $V - S$ é uma cobertura minimal de vértices.

Este Teorema nos leva ao seguinte corolário

Corolário 4.1. Dado um grafo $G = (V, A)$,

$$\beta(G) = |V| - \alpha(G)$$

A Figura 4.7 mostra um grafo roda $W_5 = (V, A)$ e exemplos de conjuntos independentes maximais e coberturas de vértices. O conjunto I_1 formado apenas pelo vértice f , destacado em cinza, é um conjunto independente maximal de tamanho $|I_1| = 1$, enquanto que $V - I_1$ é uma cobertura de vértices de tamanho $|V - I_1| = 5$. Por outro lado, os vértices b e e , destacados em branco, correspondem a um conjunto independente maximal I_2 de tamanho $|I_2| = 2$, enquanto que $V - I_2$ é uma cobertura de vértices de tamanho $|V - I_2| = 4$. O conjunto I_2 é um exemplo de conjunto independente máximo e consequentemente $V - I_2$ é uma cobertura mínima de vértices. Observe que

os vértices em I_2 são adjacentes a todos os demais vértices do grafo, porém eles não correspondem a uma cobertura, já que as arestas que unem vértices do conjunto $V - I_2$, como a aresta $\{d, c\}$, não são cobertas pelos vértices em I_2 .

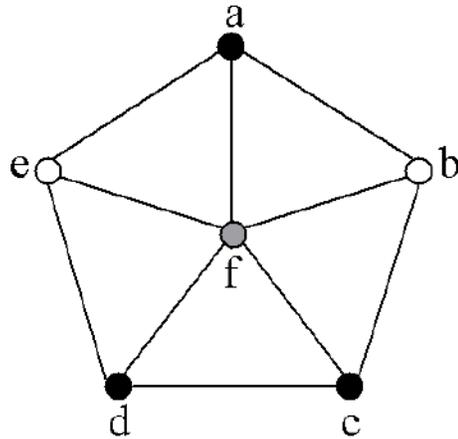


Figura 4.7: Exemplos de Conjunto Independente e Cobertura de Vértices.

O cálculo da cobertura mínima tem várias aplicações práticas. Por exemplo, imagine que queiramos descobrir a quantidade mínima de guardas que devemos colocar no cruzamento de ruas em uma rede de estradas de forma que cada estrada seja vigiada por pelo menos um guarda. A rede seria representada por um grafo, tendo como vértices os cruzamentos entre as ruas e como arestas as ruas. Um guarda em um cruzamento seria capaz de monitorar as ruas que interceptam o cruzamento. A quantidade de guardas afetam diretamente o custo da solução, por isso, a quantidade mínima é o foco principal do problema. Caso contrário, poderíamos pensar em associar à cada cruzamento um guarda. Esta solução é direta, porém é a que causa maior impacto financeiro. Outro exemplo é o problema para determinar o menor número de câmeras a serem utilizadas em um ambiente estruturado de forma a inspecioná-lo completamente. O ambiente seria representado pelo grafo e os vértices estariam associados às regiões de monitoramento. Similarmente, queremos a solução de menor custo. Em ambos os exemplos, buscamos minimizar uma função de custo, que é representada ou pelo número de câmeras ou pelo número de guardas, portanto, estes problemas são de minimização.

Para um dígrafo, a definição de cobertura mínima é a mesma da usada

para um grafo, porém todos os cálculos são realizados utilizando seu grafo subjacente. Notem que nesta definição a orientação dos arcos está sendo totalmente desconsiderada, pois o que importa é saber a menor quantidade de vértices que cobrem todos os arcos. Em geral, esta definição de cobertura de vértices, para dígrafos tem pouca importância prática, já que características importantes sobre dígrafos estão sendo desconsideradas.

Cobertura de Fonte Para contornar este problema, Ferro e Ferrarello [10] definem os conceitos de *cobertura de fonte* e *cobertura de sumidouro*. Dado um dígrafo $D = (V, A)$, uma cobertura de fonte para D é um conjunto de vértices $S \subseteq V$, tal que cada arco em D parte de algum vértice em S , i.e., para cada vértice $v \in S$ existe pelo menos um arco $a = (v, u) \in A$. De forma análoga, uma cobertura de sumidouro para D é um conjunto de vértices $S \subseteq V$, tal que para cada $u \in S$ existe pelo menos um arco $a = (v, u) \in A$. Como buscamos sempre conjuntos mínimos, temos que considerar a menor cobertura de fonte(ou de sumidouro) que não está contida propriamente em outra cobertura de fonte(ou de sumidouro). A partir daí definimos para um dígrafo D , o *número de cobertura de fonte*, $\beta^+(D)$ e o *número de cobertura de sumidouro*, $\beta^-(D)$. O primeiro está associado ao tamanho da *cobertura mínima de fonte*, ou seja, à menor cobertura de fonte, enquanto que o segundo está associado ao tamanho da *cobertura mínima de sumidouro*. Considerando S e S' coberturas de fonte e sumidouro respectivamente para um dígrafo D , se $S \cap S' = \emptyset$, com $S \neq \emptyset$ e $S' \neq \emptyset$, então D é um dígrafo bipartido direcionado, conforme discutido na Seção 4.2.

Número de Cobertura de Fonte
Número de Cobertura de Sumidouro
Dígrafo Bipartido Direcionado

Problemas de cobertura de vértices, fonte e sumidouro em dígrafos, residem em problemas de contagem. Por exemplo, a partir de um dígrafo quantos ciclos direcionados de um dado comprimento são necessários para cobrir todos os vértices[11] ou a quantidade de maneiras que i caminhos direcionados podem cobrir todos os vértices do dígrafo[12].

Um problema similar ao de cobertura de vértices, independente se é em grafos ou não, é ao invés de focar nas arestas/arcos para serem cobertos focar nos vértices. Isto dá origem ao conceito de conjunto dominante que será apresentado na próxima seção.

4.4 Conjunto Dominante

Este relacionamento $V - A$ é um relacionamento vértice-vértice similar àquele definido pela cobertura de vértices, porém com um foco sutilmente diferente.

Uma cobertura de vértice é um subconjunto de vértice que *cobrem todas as arestas* de um grafo. Por sua vez, um conjunto dominante é também um subconjunto de vértices, porém, com a diferença de que estes vértices devem *cobrir (ou dominar) todos os vértices* do grafo que não participam do conjunto. A dominância entre vértices em um *grafo* é definida pela relação de adjacência entre eles. Se um vértice v é adjacente a outro vértice u , então v , além de dominar a si próprio, também domina u e vice-versa. Portanto, dizemos que v domina a si próprio e seus vizinhos, $\tau(v)$. De forma análoga ao apresentado na seção anterior, os problemas associados aos conjuntos dominantes objetivam encontrar sempre os conjuntos dominantes minimais e mínimos.

Relação de Dominância em Grafos

Formalmente um conjunto dominante S para um grafo $G = (V, A)$ é um subconjunto de vértices $S \subseteq V$, tal que todo vértice $v \in V - S$ é dominado por pelo menos um vértice de S , i.e., $\tau(v) \cap S \neq \emptyset, \forall v \in (V - S)$. A Figura 4.8 ilustra dois conjuntos dominantes minimais, através dos vértices brancos e cinzas, para um grafo G . O tamanho do menor conjunto define o *número de dominância* de um grafo G , o qual é denotado por $\gamma(G)$. Portanto, os vértices em cinza compõe o conjunto dominante mínimo e definem o número de dominância $\gamma(G) = 3$.

Número de Dominância

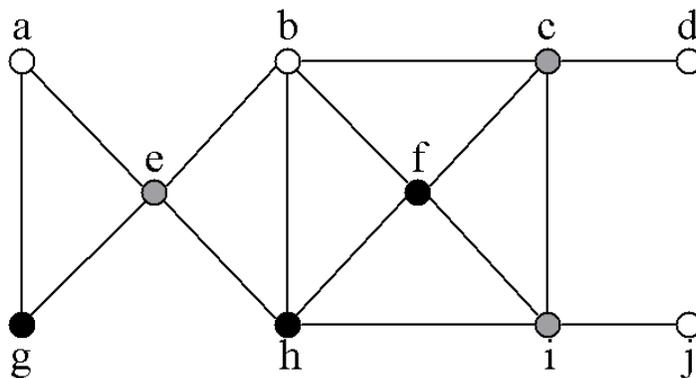


Figura 4.8: Exemplos de Conjuntos Dominantes.

Como é possível observar neste exemplo, todos os vértices que não participam do conjunto dominante são dominados por pelo menos um vértice deste conjunto. Por exemplo, considerando o conjunto dominante $S = \{e, c, i\}$, cada vértice em $V - S = \{a, b, d, f, g, h, j\}$ possui um vizinho em S . Como o conjunto dominante foca nos vértices, podem existir arestas descobertas,

como as arestas $\{a, g\}$ e $\{b, h\}$.

Os números de dominância e de cobertura de vértices possuem a seguinte relação $\gamma(G) \leq \beta(G)$ para qualquer grafo G que não possua vértices isolados. Neste caso, qualquer cobertura é um conjunto dominante que pode ou não ser minimal. As Figuras 4.9(a) e (b) mostram uma cobertura de vértices e um conjunto dominante, respectivamente, destacados pelos vértices em cinza. Notem que o conjunto dominante é um subconjunto próprio da cobertura de vértices, logo $\gamma < \beta$. Em grafos estrelas S_n , $\gamma = \beta$, pois apenas o vértice central é necessário para cobrir todos os vértices do grafo e todas as arestas. A diferença entre os tamanhos da cobertura de vértices e do conjunto de dominante por variar bastante. Por exemplo, para um grafo completo K_n , temos $\gamma(K_n) = 1$ e $\beta(K_n) = n - 1$.

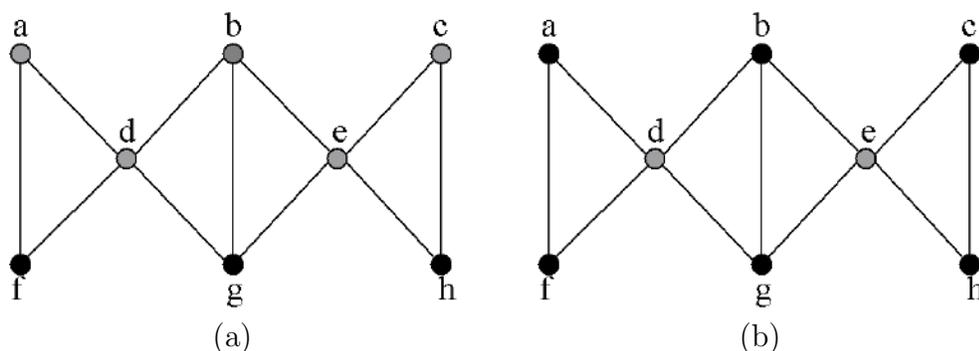


Figura 4.9: Exemplos de Conjuntos Dominantes.

Em um dígrafo, a relação de dominância é definida pela orientação de cada arco. Em um arco (v, u) , dizemos que o vértice v domina o vértice u e u é dominado por v . Notem que esta relação não é necessariamente simétrica, diferente da dominância em grafos, onde em uma aresta qualquer, um vértice domina o outro e (vice-versa). Devido a isso temos os conceitos de dominância de saída e dominância de entrada [13].

Relação de Dominância em Dígrafos

Conjunto Dominante de Entrada

Conjunto Dominante de Saída

Dado um dígrafo $D = (V, A)$, um *conjunto dominante de entrada* S é um subconjunto de vértices $S \subseteq V$, tal que todo vértice $v \in V - S$ domina pelo menos um vértice de S , i.e., $\tau^+(v) \cap S \neq \emptyset, \forall v \in (V - S)$. Enquanto que, um *conjunto dominante de saída* S é um subconjunto de vértices $S \subseteq V$, tal que todo vértice $v \in V - S$ é dominado por pelo menos um vértice de S , i.e., $\tau^-(v) \cap S \neq \emptyset, \forall v \in (V - S)$. Os tamanhos do menor conjunto dominante de entrada e do menor conjunto dominante de saída de um dígrafo D são

chamados de números de dominância de entrada e de saída, respectivamente, e denotados por $\gamma^-(D)$ e $\gamma^+(D)$. A partir da idéia de dominância, um vértice $v \in V$ de D é k -rei se todos os vértices puderem ser alcançados a partir de v por um caminho de comprimento no máximo k . Se $k = 1$, v domina todos os vértices.

A Figura 4.10 ilustra um dígrafo $D = (V, A)$ e dois conjuntos dominantes minimais de entrada. Os vértices em cinza compõem o conjunto $D_1 = \{b, c\}$ e os vértices em branco compõem o conjunto dominante $D_2 = \{a, d, f\}$. Todos os vértices que não estão no conjunto D_1 (ou D_2) dominam pelo menos um vértice do conjunto D_1 (ou D_2). Por exemplo, considerando o conjunto D_1 , o vértice b é dominado pelos vértices a, c, d e f . Enquanto que o vértice c é dominado pelos vértices a, b e e . Notem que os vértices que $V - D_1 = \{a, d, e, f\}$ dominam pelo menos um vértice de D_1 . Em relação ao conjunto D_2 , todos os vértices em $V - D_2 = \{b, c, e\}$ dominam pelo menos um vértice em $D_2 = \{a, d, f\}$.

A partir de um conjunto dominante de entrada podemos extrair um conjunto dominante de saída, porém este pode não ser minimal. Por exemplo, $V - D_1 = \{a, d, e, f\}$ é um conjunto dominante de saída porém não é minimal, já que ele possui um subconjunto próprio $\{a, e\}$ que é dominante. O mesmo acontece com o conjunto $V - D_2 = \{b, c, e\}$ que possui um subconjunto próprio formado pelos vértices c e e que é minimal. A obtenção de um conjunto não minimal não é o único problema. É possível que em alguns casos, um conjunto dominante de saída fique de fora do resultado. Esta situação será ilustrada na Seção 5.3.4. Os vértices c e e são vértices 2-rei.

Uma variação destas relações de dominância para dígrafos foi proposta por Chartrand[14]. Ela é chamada *relação de dominância gêmea*, e é definida como segue. Dado um dígrafo $D = (V, A)$, um *conjunto dominante gêmeo* S é um subconjunto de vértices $S \subseteq V$, tal que todo par de vértices $u, v \in S$ (onde u pode ou não ser igual a v), existem dois arcos $(u, w), (w, v) \in A$ para todo $w \in V - S$. Ou seja, todo vértice em $V - S$ domina e é dominado por vértices do conjunto S . Notem que esta dominância é uma combinação das dominâncias de entrada e a de saída. O tamanho do menor conjunto dominante gêmeo de entrada de um dígrafo D é chamado de número de dominância gêmea, sendo denotado por $\gamma^*(D)$. A relação entre a dominância gêmea e as outras dominâncias é dada por

$$\max\{\gamma^+(D), \gamma^-(D)\} \leq \gamma^*(D) \leq \gamma^+(D) + \gamma^-(D)$$

A dominância gêmea é fortemente motivada por aplicações em redes de

Números de Dominância de Entrada e de Saída

**Relação de Dominância Gêmea
Conjunto Dominante Gêmeo**

Números de Dominância Gêmea

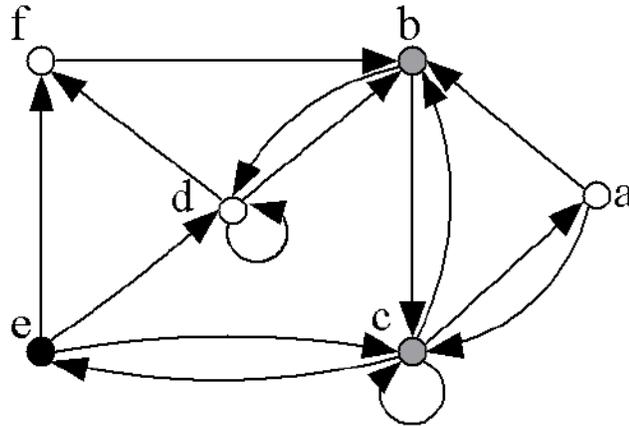


Figura 4.10: Exemplos de Conjuntos Dominantes de Entrada.

computadores. Como exemplo, considere que cada vértice no conjunto dominante S esteja associado a um servidor que forneça serviços específicos para outros computadores da rede. A comunicação entre os vértices fora e dentro do conjunto dominante é bidirecional, i.e., existindo a dominância gêmea, pois, dados u e w , onde $u \in S$ e $w \in V - S$, temos os arcos (u, w) e (w, u) que denotam a direção da comunicação entre u e w . Como um servidor em geral é muito caro, objetiva-se encontrar o menor número de servidores que atendam todos os computadores da rede, ou seja, minimizar o tamanho do conjunto dominante gêmeo.

Ainda considerando o dígrafo D ilustrado na Figura 4.10, um exemplo de conjunto dominante gêmeo minimal é o conjunto $S = \{b, c, d\}$. Observem que os vértices em $V - S = \{a, e, f\}$ dominam e são dominados pelos vértices do conjunto S . Por exemplo, os vértices a e e dominam e são dominados pelo vértice c ; enquanto que o vértice f domina o vértice b e é dominado pelo vértice d , que participam de S . Para este dígrafo $\gamma^*(D) = 3$.

4.5 Emparelhamento

Outro relacionamento V-A importante é o *emparelhamento*¹, também chamado de acoplamento ou casamento. Ele é um relacionamento aresta-aresta

Acoplamento
Casamento

¹Emparelhamento é a tradução do inglês da palavra Matching.

similar ao relacionamento vértice-vértice definido através dos conjuntos independentes. Ele considera a adjacência entre as arestas² e visa encontrar o maior conjunto de arestas não adjacentes entre si. Portanto, um emparelhamento M em um grafo $G = (V, A)$ é um subconjunto de arestas, $M \subseteq A$, que não correspondem a laços e que não compartilham vértices entre si. Portanto duas arestas $a_i, a_j \in A$, onde $a_i = \{v_i, u_i\}$ e $a_j = \{v_j, u_j\}$ e $i \neq j$, pertencem ao emparelhamento M , se $v_i \neq v_j \neq u_i \neq u_j$. Esta mesma definição serve para dígrafos porém consideramos arcos e não arestas. De forma análoga aos relacionamentos anteriores, temos interesse em saber os emparelhamentos maximais e máximo, ou seja, nos emparelhamentos que não são subconjuntos próprios de outros emparelhamento e nos maiores emparelhamentos existentes. O tamanho de um emparelhamento M é definido pela quantidade de arestas e representado por $|M|$, e o tamanho do maior emparelhamento de um grafo G é denotado por $\alpha'(G)$.

Quando uma aresta de M é incidente a um vértice $v \in V$, então dizemos que v é saturado por M . Quando o emparelhamento satura todos os vértices do grafo, então dizemos que o emparelhamento é perfeito. A Figura 4.11(a) mostra um exemplo de emparelhamento maximal de tamanho 2 em um grafo W_5 . Todas as arestas do grafo compartilham vértices com as arestas do emparelhamento, porém este emparelhamento não é perfeito pois existem vértices que não são saturados, como os vértices b e d . A Figura 4.11(b) mostra um emparelhamento máximo de tamanho $\alpha'(G) = 3$ que satura todos os vértices.

Na Seção 1.7.1, apresentamos um exemplo de emparelhamento envolvendo um conjunto de pessoas e um conjunto de tarefas. As arestas mais grossas destacadas na Figura 1.15(b) compõem um possível emparelhamento do grafo mostrado em (a). Notem que ele é perfeito pois todos os vértices estão saturados, i.e., as arestas são incidentes a todos os vértices do grafo. Este emparelhamento é máximo de tamanho igual a $\alpha'(G) = 4$. Existem outros emparelhamentos possíveis, como os mostrados nas Figuras 4.12(a) e (b) através de arestas mais grossas. O que diferencia um emparelhamento do outro, neste problema, é a soma dos tempos associados às suas arestas. Portanto cada emparelhamento tem uma soma que pode ou não ser diferente da soma dos outros emparelhamentos. Como buscamos aquele com a menor soma possível, este problema em particular pode ser visto com um problema de minimização.

²Duas arestas são adjacentes se compartilham vértices.

Emparelhamentos em Dígrafos

Emparelhamento Máximo

Vértice Saturado

Emparelhamento Perfeito

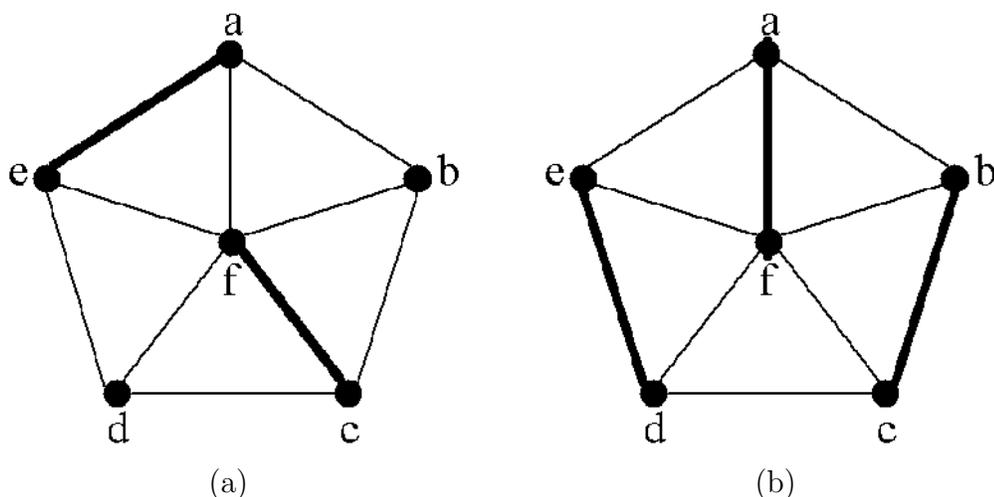


Figura 4.11: Exemplos de emparelhamentos de um grafo W_5 .

Emparelhamento Máximo \times Emparelhamento Perfeito Um ponto importante é como saber se um emparelhamento é maximal ou máximo. Ele é maximal se não for possível adicionar mais arestas de forma a garantir que as arestas não compartilham vértices. Portanto, apenas o conjunto formado pela aresta $\{t_1, e_4\}$ na Figura 4.12(a) não representa um emparelhamento maximal, já que é possível adicionar a aresta $\{t_2, e_1\}$ neste conjunto. Para saber se o emparelhamento é máximo, podemos inicialmente verificar se ele é perfeito. Se for então o emparelhamento é máximo, caso contrário temos que verificar a existência de *caminhos de aumento*. Por exemplo, nas Figuras 4.12 (a) e (b) os emparelhamentos são perfeitos, logo são máximos.

Caminho Alternante

Antes de definirmos um caminho de aumento, precisamos definir o conceito de caminho alternante. Um *caminho alternante* em um emparelhamento M é um caminho cujas arestas alternam entre aquelas que estão e aquelas que não estão em M . Por exemplo, o grafo 4.11(a) possui vários caminhos alternantes como $p_1 = \{d, \{d, e\}, e, \{e, a\}, a, \{a, b\}, b\}$ e $p_2 = \{b, \{b, c\}, c, \{c, f\}, f, \{f, e\}, e, \{e, a\}, a\}$. Notem que tanto em p_1 quanto em p_2 , as arestas do caminho alternam entre aquelas que estão e aquelas que não estão em M . Quando as extremidades de um caminho alternante não são saturadas, então ele é chamado *caminho de aumento*. Por exemplo, as extremidades d e b do caminho p_1 não são saturadas. Logo, temos um caminho de aumento.

Caminho de Aumento

Quando um emparelhamento possui um caminho de aumento P , basta

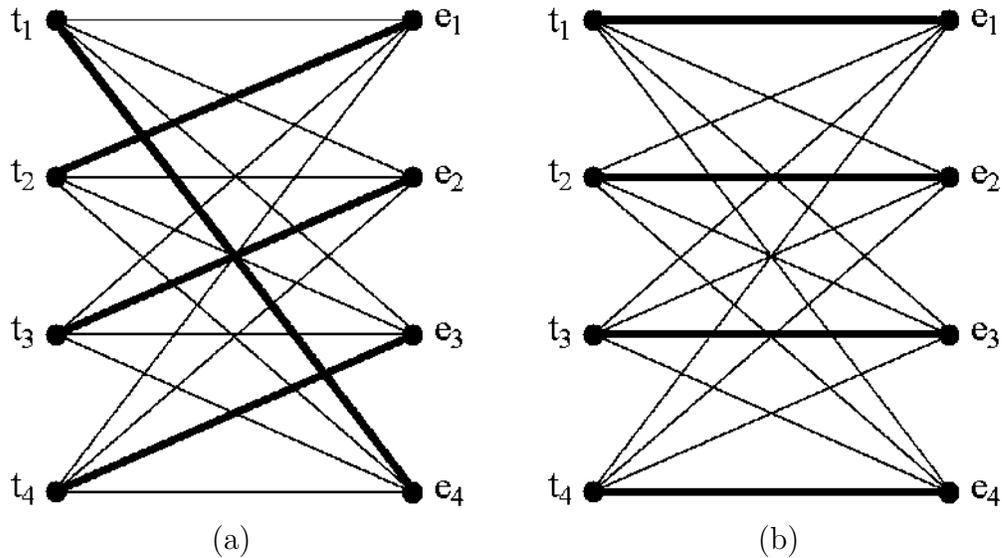


Figura 4.12: Exemplos de Emparelhamentos Perfeito.

substituir em M as arestas de P que estão pelas que não estão em M . Isto irá aumentar em uma unidade o tamanho de M . Se M não possuir mais caminhos de aumento então M é máximo. Usando esta estratégia, a partir do caminho p_1 , obtemos o emparelhamento ilustrado na Figura 4.13 de tamanho 3, enquanto que com a presença do caminho de aumento p_1 o emparelhamento tinha tamanho 2. A relação entre caminho de aumento e emparelhamento máximo foi mostrada por Berge, em 1957 através do seguinte Teorema.

Teorema 4.4 ([15]). Um emparelhamento M em um grafo G é máximo se e somente se M não possui caminhos de aumento.

Em problemas de emparelhamento envolvendo grafos bipartidos, podemos ter situações onde os conjuntos independentes têm tamanhos diferentes. Por exemplo, no caso ilustrado na Seção 1.7.1 o conjunto de tarefas e de pessoas possuem o mesmo tamanho, porém podemos ter casos, onde o número de tarefas é muito maior que de pessoas. Nesta situação o que nos interessa saber é se todo emparelhamento maximal nesta instância do problema irá associar todas as pessoas a alguma tarefa, i.e., se os vértices associados às pessoas serão saturados. Para responder a este problema, Hall em 1935 provou o seguinte Teorema.

Teorema 4.5 ([16]). Um grafo bipartido, com dois conjuntos independentes

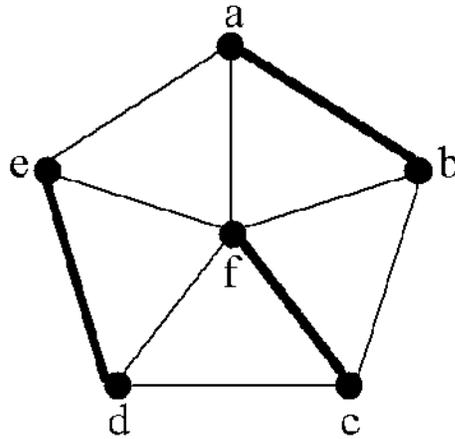


Figura 4.13: Emparelhamento Máximo

X e Y , tem um emparelhamento que satura X se e somente se para todo $S \subseteq X$, $|\Gamma(S)| \geq |S|$.

Quando $|X| = |Y|$, este teorema é chamado Teorema de Casamento (*Marriage Theorem*).

Existe um relacionamento interessante entre cobertura de vértices e emparelhamento. Como foi visto anteriormente, uma cobertura de vértices é um conjunto de vértices que cobre todas as arestas do grafo, i.e., as arestas do grafo possuem pelo menos uma das extremidades na cobertura, enquanto que um emparelhamento consiste em um conjunto de arestas que não compartilham vértices³ e que são adjacentes a todas as arestas do grafo. Como as arestas no emparelhamento são adjacentes a todas as arestas do grafo, então podemos imaginar que a cobertura pode ser construída selecionando pelo menos um vértice de cada aresta. Isso nos leva a concluir que o tamanho de qualquer cobertura de vértices de um grafo G é no mínimo o tamanho do menor emparelhamento maximal de G . Para grafos bipartidos existe uma prova matemática, que mostra que obtendo um emparelhamento e uma cobertura de vértices de mesmo tamanho, então tem-se um resultado ótimo para cada um deles. Esta prova segue os princípios da relação *min-max*.

Uma relação *min-max* prova que quando temos dois problemas duais sobre a mesma classe de instâncias (neste caso, grafos), a igualdade de resultados

³Notem que nenhum vértice pode cobrir duas arestas de um emparelhamento, já que nesse caso as arestas seriam adjacentes

destes problemas prova que ambos são ótimos para a instância analisada. Neste caso, os problemas tratados são o de maximização, associado ao emparelhamento, e o de minimização, associado à cobertura de vértices. Portanto, se dado um grafo obtivermos como resultado o mesmo valor para ambos os problemas, então o que temos é um resultado ótimo. As Figuras 4.12(a) e (b) mostram a aplicação deste Teorema. Observe que o tamanho do emparelhamento máximo é igual ao de cobertura mínima para ambos os grafos. Logo, os resultados são ótimos.

Isto nos leva à relação *min-max* definida pelo Teorema 4.6, chamado König-Egervary.

Teorema 4.6 ([17]). Se G é um grafo bipartido, então o tamanho do emparelhamento máximo de G é igual ao tamanho da cobertura mínima de vértices de G , i.e., $\alpha'(G) = \beta(G)$.

As Figuras 4.14(a) e (b) mostram o emparelhamento através de arestas grossas e a cobertura de vértices através dos vértices cinza. Cada vértice da cobertura foi escolhido a partir das arestas do emparelhamento. Note que neste exemplo, qualquer uma das coberturas terá dois vértices de pelo menos uma aresta do emparelhamento. Em ambos os casos a cobertura tem tamanho igual a 4 que é igual ao $\beta(W_5) = 4$, discutido através do exemplo da Figura 4.7

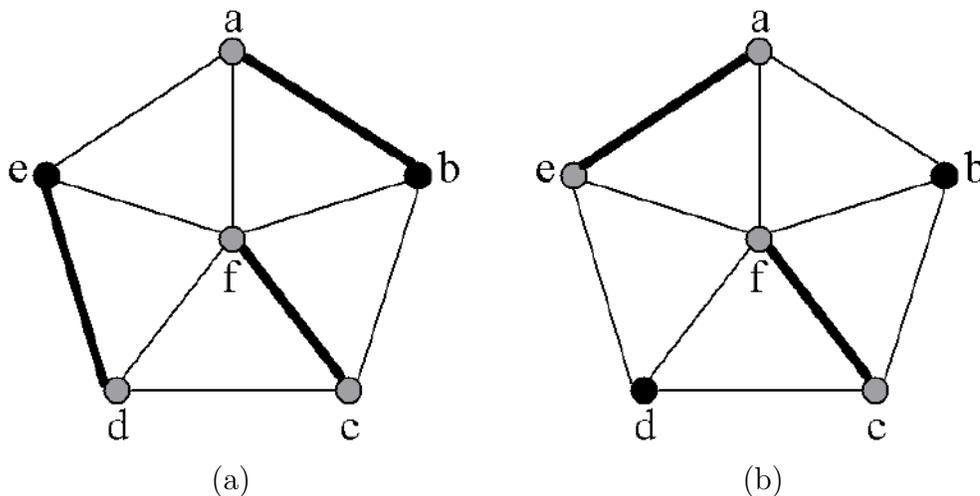


Figura 4.14: Emparelhamento e Cobertura

Os conceitos de conjunto independente e de emparelhamento possuem uma relação interessante. O primeiro é um conjunto maximal(ou máximo) de vértice que não são adjacentes entre si, enquanto que o último corresponde a um conjunto maximal(ou máximo) de arestas que não compartilham vértices, ou seja, não são adjacentes entre si. O fato de um lidar com vértices e o outro com arestas faz com que ambos consigam usar o mesmo método de enumeração. Por exemplo, o método que lista os conjuntos independentes maximais em um grafo G é o mesmo método que lista os emparelhamentos maximais de G , porém neste último recebe como entrada $L(G)$, que corresponde ao grafo linha de G , ao invés de G . Na Seção 2.2.10 mostramos que qualquer grafo G possui um grafo linha correspondente $L(G)$, onde as arestas de G são mapeadas para vértices em $L(G)$. Portanto, um conjunto independente em $L(G)$ está associado a um conjunto de arestas em G que não são adjacentes. Isto nos leva a $\alpha'(G) = \alpha(L(G))$, i.e., o tamanho do emparelhamento máximo em G é igual a tamanho do conjunto independente máximo em $L(G)$. Usaremos este princípio na Seção 5.2.4 para enumerarmos os emparelhamentos maximais de grafos.

4.6 Exercícios

Exercício 4.1. *Mostre que um grafo completo K_n pode ser expresso como a união de k grafos bipartidos sse $n \leq 2^k$*

Exercício 4.2. *Mostre que o grafo de Petersen não é um grafo bipartido, e determine seu número de independência e seu número de clique.*

Exercício 4.3. *Mostre que qualquer grafo k -cubo é um grafo bipartido.*

Exercício 4.4. *Mostre que $\alpha(G) \geq \frac{|V|}{\Delta(G)+1}$ para qualquer grafo G .*

Exercício 4.5. *Mostre que qualquer árvore T tem no máximo um emparelhamento que é perfeito.*

Exercício 4.6. *Encontre a menor árvore onde o número de dominância e o número de cobertura de vértices seja diferente.*

Exercício 4.7. *Determine o número de dominância de um grafo C_n*

Exercício 4.8. *Prove que se o diâmetro de um grafo G é no mínimo igual a 3, então o número de dominância do complemento de G será menor ou igual a 2.*

Exercício 4.9. *Mostre que qualquer grafo $G = (V, A)$ k -regular, tem um conjunto dominante com no mínimo $|V|/(k + 1)$ vértices.*

Exercício 4.10. *Determine quantos emparelhamentos perfeitos um biclique $K_{r,s}$ possui.*

Capítulo 5

Enumeração

Neste capítulo apresentamos o *método de Maghout* que é utilizado para calcular os relacionamentos V-A discutidos no capítulo anterior. Este método usa as leis da álgebra booleana para encontrar os conjuntos minimais e maximais do problema de interesse o qual pode ter sido modelado usando tanto grafos quanto dígrafos. O método explora as inter-relações existentes entre os relacionamentos V-A para a obtenção do resultado desejado. Por exemplo, sabemos que um conjunto independente maximal em um grafo G é um clique em \bar{G} . Portanto, o mesmo método pode ser utilizado tanto para enumerar os cliques maximais quanto os conjuntos independentes de um grafo G . O que difere é o grafo fornecido como entrada para o método que pode ser o próprio G ou \bar{G} .

**Método
de Maghout**

5.1 Método de Maghout

Para facilitar a compreensão, focaremos inicialmente no problema de cobertura minimal de vértices. A obtenção dos conjuntos independentes maximais e cliques é direta, tendo sido discutida anteriormente nas respectivas seções. Todavia, o cálculo dos conjuntos dominantes e dos emparelhamentos, exige uma pequena modificação do método a qual discutiremos oportunamente nas seções subsequentes.

Considere um grafo simples $G = (V, A)$ composto pelos seguintes conjuntos de vértices $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ e de arestas $A = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}\}$. Como queremos saber as coberturas minimais de vértices deste grafo, então devemos selecionar para cada aresta uma de suas extremidades. Neste caso, para

a aresta $a_1 = \{v_1, v_2\}$, podemos escolher ou o vértice v_1 ou o vértice v_2 , e para a aresta $a_2 = \{v_2, v_3\}$, a escolha pode ser feita entre os vértices v_2 e v_3 . Notem que no nosso exemplo, existem apenas duas coberturas minimais possíveis: $\{v_2\}$ e $\{v_1, v_3\}$.

A escolha do vértice que irá cobrir cada aresta pode ser modelada pelo operador lógico *ou*. Considerando \dot{v}_i a variável lógica associada ao vértice v_i , podemos associar as seguintes somas lógicas às arestas a_1 e a_2 , respectivamente

$$(\dot{v}_1 + \dot{v}_2) \text{ e } (\dot{v}_2 + \dot{v}_3)$$

O produto destas duas somas $(\dot{v}_1 + \dot{v}_2) \cdot (\dot{v}_2 + \dot{v}_3)$ combina todas as possibilidades existente de escolha de vértices, onde \cdot representa o operador lógico *e*. Portanto realizando este produto encontramos,

$$\dot{v}_1 \cdot \dot{v}_2 + \dot{v}_1 \cdot \dot{v}_3 + \dot{v}_2 \cdot \dot{v}_2 + \dot{v}_2 \cdot \dot{v}_3$$

Cada um destes termos é uma possível cobertura. Por exemplo, o termo $\dot{v}_1 \cdot \dot{v}_2$ está associado aos vértices v_1 e v_2 e representa uma cobertura, porém que não é minimal. Por outro lado, o termo $\dot{v}_1 \cdot \dot{v}_3$ contém uma cobertura minimal definida pelos vértices v_1 e v_3 . A importância da álgebra booleana aparece neste momento. O termo $\dot{v}_2 \cdot \dot{v}_2$ possui uma referência repetida ao vértice v_2 . Isto indica que v_2 é extremidade de ambas as arestas. Para eliminar esta repetição aplicamos a *lei da idempotência*¹ no termo $\dot{v}_2 \cdot \dot{v}_2$ que leva ao termo \dot{v}_2 . Logo, o novo resultado intermediário é

$$\dot{v}_1 \cdot \dot{v}_3 + \dot{v}_1 \cdot \dot{v}_2 + \dot{v}_2 + \dot{v}_2 \cdot \dot{v}_3$$

O termo \dot{v}_2 já representa nossa primeira cobertura de vértices. Todavia, existem as coberturas $\dot{v}_1 \cdot \dot{v}_2$ e $\dot{v}_2 \cdot \dot{v}_3$ que não são minimais e que devem ser eliminadas do resultado final. Para eliminar estas coberturas utilizamos a *lei da absorção*² nos três últimos termos do resultado anterior encontrando

$$\dot{v}_1 \cdot \dot{v}_3 + \dot{v}_2$$

Logo, para o primeiro termo temos a seguinte cobertura $\{v_1, v_3\}$ e para o segundo termo temos a cobertura $\{v_2\}$. A obtenção do conjunto independente é direta, pois sabemos que se V é o conjunto de vértices e C é a

¹A lei da idempotência diz que $p \wedge p \Leftrightarrow p$ e que $p \vee p \Leftrightarrow p$ para qualquer proposição lógica p .

²A lei da absorção diz que $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ e que $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ para quaisquer proposições lógicas p e q .

cobertura, o conjunto independente associado à C é igual a $I = V - C$. Logo, o conjunto independente associado ao primeiro termo é $\{v_2\}$ e ao segundo termo é $\{v_1, v_3\}$. Casualmente os conjuntos independentes e as coberturas são iguais ao resultado encontrado anteriormente, porém invertidos. Vale ressaltar que isto não é uma regra.

A versão geral deste processo é definida da seguinte maneira. Se $G = (V, A)$ é um pseudografo ou multigrafo, devemos considerar seu grafo simples subjacente. Para cada vértice $v \in V$, é criada uma variável lógica \dot{v} e para cada aresta $a = \{v_i, v_j\} \in A$ é criada a seguinte soma lógica $(\dot{v}_i + \dot{v}_j)$ a partir das variáveis lógicas associadas aos vértices da aresta. Usando o produto de variáveis lógicas definido por

$$\bigwedge_{i=m}^n \dot{v}_i = \dot{v}_m \cdot \dot{v}_{m+1} \cdot \dots \cdot \dot{v}_{n-1} \cdot \dot{v}_n$$

calculamos

$$\bigwedge_{(v_i, v_j) \in A} (\dot{v}_i + \dot{v}_j) \quad (5.1)$$

Lembrando que as operações \cdot e $+$ correspondem às operações lógicas e e ou , respectivamente. Esta expressão possuirá vários produtos do seguinte tipo $(\dot{v}_i + \dot{v}_j) \cdot (\dot{v}_k + \dot{v}_m)$, que através da lei da distributividade³ da operação e , se tornará $\dot{v}_i \cdot \dot{v}_k + \dot{v}_i \cdot \dot{v}_m + \dot{v}_j \cdot \dot{v}_k + \dot{v}_j \cdot \dot{v}_m$, ou simplesmente, $\dot{v}_i \dot{v}_k + \dot{v}_i \dot{v}_m + \dot{v}_j \dot{v}_k + \dot{v}_j \dot{v}_m$, para facilitar a visualização.

Quando um vértice v_i for adjacente a vários vértices, ele participará de várias somas lógicas neste produto. Sem perda de generalidade, considere os vértices ordenados w_1, w_2, \dots, w_m que correspondem aos m vizinhos⁴ de v_i , i.e., $w_i \in \tau(v_i)$. Focando apenas em v_i e sua vizinhança teremos o seguinte produto lógico

$$\bigwedge_{j=1}^m (\dot{v}_i + \dot{w}_j) = \dot{v}_i + \bigwedge_{j=1}^m \dot{w}_j \quad (5.2)$$

Em algumas situações, teremos várias variáveis lógicas participando de diversas somas ao invés de apenas uma. Este é o caso do cálculo dos conjuntos

³A lei da distributividade diz que $p \vee (r \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (p \vee q)$ e que $p \wedge (r \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (p \wedge q)$ para quaisquer proposições lógicas p, r e q .

⁴A ordem é imposta apenas para facilitar a compreensão do processo, pois dois vértices consecutivos w_i e w_{i+1} podem corresponder a dois vértices no grafo original v_k e v_l , com $|k - l| > 1$, i.e., com índices não consecutivos.

dominantes minimais como veremos na Seção 5.2.3. Neste caso, teremos o seguinte produto lógico

$$\bigwedge_{j=1}^k (\dot{S} + \dot{R}_j) = \dot{S} + \bigwedge_{j=1}^k \dot{R}_j \quad (5.3)$$

onde

$$\dot{S} = \sum_{i=1}^s \dot{s}_i \quad \text{e} \quad \dot{R}_j = \sum_{l=1}^{r_j} \dot{r}_{j,l}$$

e k é a quantidade de termos que possuem em comum a soma lógica \dot{S} constituída das variáveis lógicas \dot{s}_i , com $1 \leq i \leq s$. Enquanto que o termo \dot{R}_j representa a soma das variáveis restantes no j -ésimo termo composta pelas variáveis $\dot{r}_{j,l}$, com $1 \leq l \leq r_j$, onde r_j representa a quantidade de variáveis que não participam de \dot{S} no j -ésimo termo. Esta quantidade pode variar para cada termo, pois podemos encontrar termos distintos cujas somas restantes possuem tamanhos diferentes. A ordem imposta nos índices das variáveis constituintes de \dot{S} e \dot{R}_j visa apenas facilitar a compreensão do processo pois duas variáveis consecutivas, como por exemplo, \dot{s}_i e \dot{s}_{i+1} podem corresponder a dois vértices no grafo original v_k e v_l com índices não consecutivos. Um caso particular deste produtório é o seguinte

$$\dot{S} \bigwedge_{j=1}^{k-1} (\dot{S} + \dot{R}_j) = \dot{S} \quad (5.4)$$

onde \dot{S} participa como sub-soma em vários termos e como um termo integralmente.

Após sucessivas aplicações das leis da álgebra booleana (distributividade, absorção, idempotência, etc.) no produtório da Equação 5.1, encontramos um somatório de termos, onde cada termo permite extrair as coberturas minimais de vértices. Considere o n -ésimo termo $P_n = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_l\}$, representado na forma de conjunto, onde p_k é a k -ésima variável do termo. A cobertura de vértices minimal C_n associada ao conjunto P_n é formada por todos os vértices $v_j \in V$, tal que a variável $\dot{v}_j \in P_n$, ou seja, a variável associada ao vértice v_j aparece no termo. Formalmente, a cobertura C_n é definida como

$$C_n = \{v \in V \mid \dot{v} \in P_n\}$$

De forma similar ao ilustrado no exemplo no início desta seção, a obtenção do conjunto independente maximal é direta. Para cada cobertura C_n , o

conjunto independente maximal $I_n = V - C_n$. Se consideramos novamente o n -ésimo termo P_n , o conjunto independente maximal é formado por todos os vértices $v_j \in V$, tal que a variável $\dot{v}_j \notin P_n$, ou seja, a variável associada ao vértice v_j não aparece no termo. Formalmente

$$I_n = \{v \in V \mid \dot{v} \notin P_n\}$$

Para sabermos se o resultado da simplificação não produziu conjuntos que não sejam maximais, temos que verificar se dados dois termos P_j e P_k , as variáveis de um termo aparecem completamente no outro termo. Se $P_j \subseteq P_k$, então P_k produzirá uma cobertura de vértices que não é minimal (vice-versa). Este princípio pode ser utilizado durante a fase intermediária do processo para remover termos que sabidamente gerarão conjuntos independentes não maximais. Como a relação entre cliques e conjuntos independentes é direta. A obtenção dos cliques de um grafo G é feita obtendo os conjuntos independentes maximais em \bar{G} . Como sabemos, o conjunto independente em G é um clique em \bar{G} , e um clique em G é um conjunto independente em \bar{G} .

5.2 Enumeração em Grafos

Esta seção apresenta o uso do método de Maghout para o cálculo de coberturas de vértices, conjuntos independentes, conjuntos dominantes e emparelhamentos. Em todos os casos, selecionamos grafos e dígrafos para exemplificar a aplicação do método.

5.2.1 Coberturas de Vértices e Conjuntos Independentes

A partir da descrição anterior, vamos aplicar o método de Maghout no grafo $G = (V, A)$ ilustrado na Figura 5.1. Os vértices $a - e$ serão representados por $A - E$, respectivamente. Usando a Equação 5.1 encontramos o seguinte produto

$$(A + B)(B + D)(B + C)(A + E)(D + E)(D + C) \quad (5.5)$$

O desenvolvimento deste produto pode ser feito por partes começando pelas variáveis que aparecem com mais frequência nas somas, i.e., pela variável associada ao vértice com maior grau. Neste caso, temos os vértices b e d . Selecionamos um deles por exemplo, o vértice b , e focamos o desenvolvimento

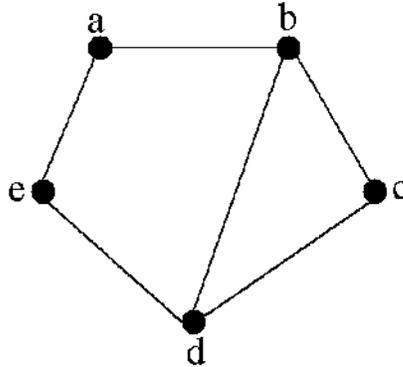


Figura 5.1: Grafo exemplo

no produto das somas que contêm B , ou seja, em $(A + B)(B + D)(B + C)$. Para facilitar a visualização das operações realizadas destacaremos os termos usados a cada passo, colocando-os em negrito.

$$(\mathbf{A+B})(\mathbf{B+D})(B+C) \Rightarrow \text{distributividade}$$

$$(AB+AD+\mathbf{BB+BD})(B+C) \Rightarrow \text{idempotência}$$

$$(\mathbf{AB+B+BD+AD})(B+C) \Rightarrow \text{absorção}$$

$$(\mathbf{B+AD})(B+C) \Rightarrow \text{distributividade}$$

$$(\mathbf{BB+BC+ABD+ACD}) \Rightarrow \text{idempotência}$$

$$(\mathbf{B+BC+ABD+ACD}) \Rightarrow \text{absorção}$$

$$(B+ACD)$$

Notem que o resultado encontrado é o mesmo aplicando a Equação 5.2 em $(A + B)(B + D)(B + C)$. Usando a Equação 5.2 no produto $(A + E)(D + E)$ temos $E + AD$. Composto os resultados e continuando o processo temos os seguintes passos

$(A+B)(B+D)(B+C)(A+E)(D+E)(D+C) \Rightarrow$	Equação 5.2
$(\mathbf{B+ACD})(\mathbf{E+AD})(D+C) \Rightarrow$	distributividade
$(\mathbf{BE+ABD+ACDE+ACD})(D+C) \Rightarrow$	absorção
$(\mathbf{BE+ABD+ACD})(D+C) \Rightarrow$	distributividade
$(\mathbf{BDE+ABDD+ACDD+BCE+ABCD+ACCD}) \Rightarrow$	idempotência
$(\mathbf{BDE+ABD+ACD+BCE+ABCD+ACD}) \Rightarrow$	absorção
$(\mathbf{BDE+ABD+ACD+BCE})$	

Após esta simplificação, devemos verificar se ainda existe algum termos que pode ser absorvido por outro. Se isto não for possível, então chegamos ao resultado final. Como temos quatro termos, o grafo possui as seguintes quatro coberturas minimais de vértices.

**Coberturas
Minimais de
Vértices**

$$C_1 = \{b, d, e\}, C_2 = \{b, c, e\}, C_3 = \{a, b, d\}, C_4 = \{a, c, d\}$$

Logo, temos número de cobertura de vertices $\beta(G) = 3$. O conjunto independente maximal I_n é obtido por $I_n = V - C_n$. Portanto, temos os seguintes conjuntos independentes maximais

**Conjuntos Inde-
pendentes Maxi-
mais**

$$I_1 = \{a, c\}, I_2 = \{a, d\}, I_3 = \{c, e\}, I_4 = \{b, e\}$$

e número de independência do grafo $\alpha(G) = 2$.

5.2.2 Cliques

A aplicação do método de Maghout para o cálculo de cliques é direta. Se queremos calcular os cliques de um grafo G , devemos encontrar os conjuntos independentes maximais presentes em \bar{G} . Isto nos levará diretamente aos cliques em G . Portanto dado o grafo G ilustrado na Figura 5.1, primeiramente temos que calcular o complemento de G . O grafo \bar{G} é ilustrado na Figura 5.2.

Em seguida, é realizado o mesmo processo apresentado na seção anterior. A partir de \bar{G} , realizamos as seguintes operações

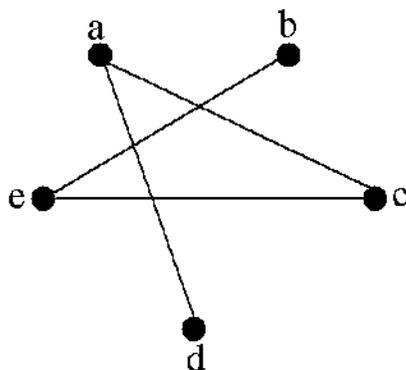


Figura 5.2: Complemento do grafo ilustrado na Figura 5.1

$$(A+D)(A+C)(C+E)(E+B) \Rightarrow \text{Equação 5.2}$$

$$(A+CD)(E+BC) \Rightarrow \text{distributividade}$$

$$AE+ABC+CDE+BCD$$

Os termos encontrados correspondem às seguintes *coberturas mínimas* de vértices

$$\{a, e\}, \{a, b, c\}, \{c, d, e\}, \{b, c, d\}$$

A partir destas coberturas encontramos os seguintes *conjuntos independentes máximos* em \bar{G} ,

$$\{b, c, d\}, \{d, e\}, \{a, b\}, \{a, e\}$$

que correspondem aos cliques máximos em G . Isto nos leva ao número de clique do grafo igual a $\omega(G) = 3$.

5.2.3 Conjuntos dominantes

O uso do método de Maghout para o cálculo dos conjuntos dominantes em grafos segue uma lógica muito similar àquela descrita na Seção 5.1. É importante considerar que para o cálculo da cobertura de vértices, criamos uma soma lógica $\dot{u} + \dot{v}$ para cada aresta $\{u, v\}$. Esta soma indica que podemos selecionar ou o vértice u ou o vértice v para compor a cobertura de vértices. Este mesmo processo de escolha será usado para o cálculos dos conjuntos dominantes máximos.

Dado o grafo $G = (V, A)$, ilustrado na Figura 5.1, para cada vértice criaremos uma variável lógica. Neste caso, os vértices $a - f$ estão associados às variáveis lógicas $A - F$, respectivamente. Em seguida, para cada vértice v criamos uma soma lógica contendo todas as variáveis dos vértices que são dominadas por v ⁵. Por exemplo, para o vértice a , criamos a seguinte soma lógica

$$(A + B + E)$$

para o vértice b temos a seguinte soma $(A + B + C + D)$, e assim por diante. Portanto para este grafo temos o seguinte produto destacando o vértice dominante embaixo da sua respectiva soma lógica.

$$\underbrace{(A + B + E)}_a \underbrace{(A + B + C + D)}_b \underbrace{(B + C + D)}_c \underbrace{(B + C + D + E)}_d \underbrace{(A + D + E)}_e$$

Em seguida realizamos os seguintes passos

$$\begin{aligned} & (A+B+E)(A+B+C+D)(B+C+D)(B+C+D+E) \\ & (A+D+E) \Rightarrow \end{aligned} \quad \text{Equação 5.3}$$

$$(A+E+BD)(A+B+C+D)(B+C+D)(B+C+D+E) \Rightarrow \quad \text{Equação 5.4}$$

$$(A+E+BD)(B+C+D) \Rightarrow \quad \text{distributividade}$$

$$AB+AC+AD+BE+CE+DE+\mathbf{BD}+\mathbf{BCD}+\mathbf{BD} \Rightarrow \quad \text{absorção}$$

$$AB+AC+AD+BE+CE+DE+BD$$

Cada termo encontrado representa um conjunto dominante minimal composto pelos vértices que têm suas variáveis lógicas presentes no termo. Portanto, a partir deste resultado temos os seguintes dominantes para G

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, e\}, \{c, e\}, \{d, e\}, \{b, d\}$$

os quais indicam que o número de dominância de G é igual a $\gamma(G) = 2$.

⁵Um vértice v domina um vértice u , se existe a aresta $\{v, u\}$ no conjunto de arestas do grafo. Além disso, é importante considerar que v domina a si próprio.

5.2.4 Emparelhamentos

Na Seção 4.5, discutimos a relação entre emparelhamento maximal e conjunto independente maximal. Vimos que um emparelhamento maximal em um grafo G corresponde a um conjunto independente maximal no grafo linha $L(G)$. Usando esta relação, aplicaremos o método de Maghout no grafo linha $L(G)$ ao invés de utilizá-lo diretamente no grafo G original para enumerar todos os seus emparelhamentos maximais.

Para facilitar a compreensão do método, rerepresentamos o grafo $G = (V, A)$ da Figura 4.13 na Figura 5.3(a), dando ênfase às suas arestas. A Figura 5.3(b) mostra o grafo linha $L(G) = (V_L, A_L)$ associado a G . As arestas de G possuem rótulos $a - j$ que serão usados como rótulos dos vértices correspondentes em $L(G)$. Dois vértices em $L(G)$ são adjacentes se compartilham vértices em G . Por exemplo, as arestas a e b em G compartilham vértices, logo os vértices correspondentes são adjacentes em $L(G)$, como podemos ver na Figura 5.3(b). Por outro lado, como as arestas a e c não compartilham vértices, seus vértices $a, c \in V_L$ correspondentes em $L(G)$ não são adjacentes.

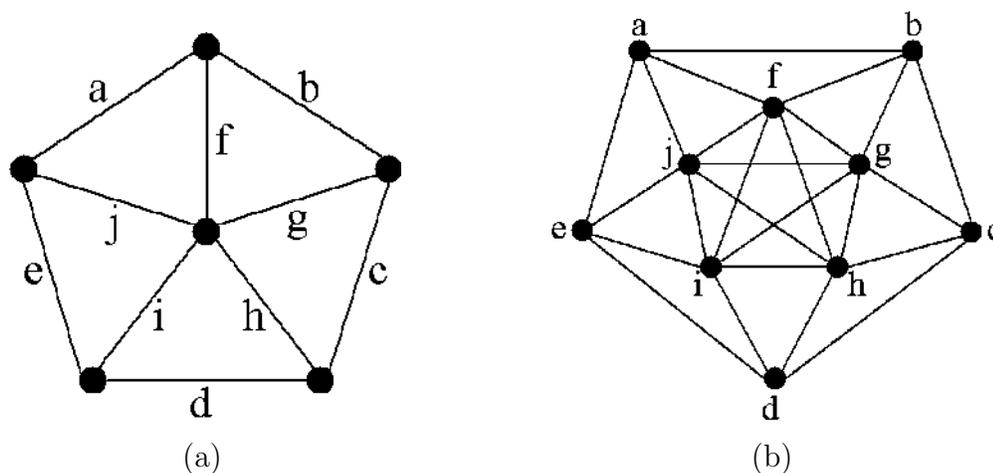


Figura 5.3: Grafo Roda (a) W_5 e seu grafo linha (b) $L(W_5)$ correspondente.

De forma similar ao apresentado na seção anterior, a partir do grafo $L(G)$, criaremos as variáveis lógicas $A - J$ que estarão associadas aos vértices $a - j$, respectivamente. Em seguida, para cada aresta $(u, v) \in A_L$ criamos a seguinte soma lógica $U + V$ e realizamos o produto das somas lógicas

associadas às arestas de $L(G)$. Este produto é ilustrado abaixo

$$(A+B)(A+F)(A+J)(A+E)(B+F)(B+G)(B+C)(C+G)(C+H)(C+D) \\ (D+H)(D+I)(D+E)(E+I)(E+J)(J+F)(J+G)(J+H)(J+I)(F+G)(F+H) \\ (F+I)(G+H)(G+I)(H+I)(I+J)$$

Como este produto possui vários termos, iremos focar inicialmente apenas em algumas partes. Por exemplo, aplicando a Equação 5.2 nas somas que possuem em comum a variável F obtemos

$$F + ABGHIJ$$

Realizando o mesmo processo porém focando nos vértices G, H, I e J , encontramos $G + BCHIJ$, $H + CDIJ$, $I + DEJ$ e $J + AE$ respectivamente. O produto original se transforma em

$$\underbrace{(A+B)(A+E)(B+C)(C+D)(D+E)}_{P_1} \\ \underbrace{(F+ABGHIJ)(G+BCHIJ)(H+CDIJ)(I+DEJ)(J+AE)}_{P_2}$$

ou seja, $P_1.P_2$. Podemos simplificar P_1 , através dos seguintes passos

$$(A+B)(A+E)(B+C)(C+D)(D+E) \Rightarrow \text{Equação 5.2}$$

$$(A+BE)(B+C)(C+D)(D+E) \Rightarrow \text{Equação 5.2}$$

$$(A+BE)(C+BD)(D+E) \Rightarrow \text{distributividade}$$

$$(AC+ABD+BCE+BDE)(D+E) \Rightarrow \text{distributividade}$$

$$ACD+ACE+ABD+ABDE+BCDE+ BCE \\ BDE+BDE \Rightarrow \text{absorção}$$

$$ACD+ACE+ABD+BCE+BDE$$

Realizando o mesmo processo com P_2 , temos

$(\mathbf{F+ABGHIJ})(\mathbf{G+BCHIJ})(\mathbf{H+CDIJ})$
 $(\mathbf{I+DEJ})(\mathbf{J+AE})\Rightarrow$ distributividade

$(\mathbf{FG+BCFHIJ+ABGHIJ+ABCGHIJ})$
 $(\mathbf{H+CDIJ})(\mathbf{I+DEJ})(\mathbf{J+EA})\Rightarrow$ absorção

$(\mathbf{FG+BCFHIJ+ABGHIJ})(\mathbf{H+CDIJ})$
 $(\mathbf{I+DEJ})(\mathbf{J+AE})\Rightarrow$ distributividade

$(\mathbf{FG+BCFHIJ+ABGHIJ})$
 $(\mathbf{HI+DEHJ+CDIJ+CDEIJ})(\mathbf{J+AE})\Rightarrow$ absorção

$(\mathbf{FG+BCFHIJ+ABGHIJ})$
 $(\mathbf{HI+DEHJ+CDIJ})(\mathbf{J+AE})\Rightarrow$ distributividade

$(\mathbf{FG+BCFHIJ+ABGHIJ})$
 $(\mathbf{HIJ+HIEA+DEHJ+DEHJA+CDIJ+CDIJE})\Rightarrow$ absorção

$(\mathbf{FG+BCFHIJ+ABGHIJ})$
 $(\mathbf{HIJ+HIEA+DEHJ+DEHJA+CDIJ})\Rightarrow$ absorção

$(\mathbf{FG+BCFHIJ+ABGHIJ})$
 $(\mathbf{HIJ+HIEA+DEHJ+CDIJ})\Rightarrow$ distributividade

$\mathbf{FGHIJ+FGHIEA+FGDEHJ+FGCDIJ+BCFHIJ+}$
 $\mathbf{BCFHIJEA+BCFHIJDE+BCFHIJD+ABGHIJ}$
 $\mathbf{+ABGHIJE+ABGHIJDE+ABGHIJCD}\Rightarrow$ absorção

$\mathbf{FGHIJ+FGHIEA+FGDEHJ+FGCDIJ+BCFHIJ+}$
 $\mathbf{BCFHIJEA+BCFHIJDE+BCFHIJD+ABGHIJ}\Rightarrow$ absorção

$\mathbf{FGHIJ+FGHIEA+FGDEHJ+FGCDIJ+BCFHIJ+ABGHIJ}$

O cálculo de $P_1.P_2$ resulta nos seguintes passos. Devido à quantidade de termos manipulados a cada passo, omitimos o nome das operações aplicadas, entretanto, continuamos destacados os termos usados nas operações.

(ACD+ACE+ABD+BCE+BDE)
 (FGHIJ+AEFGHI+DEFGHJ+CDFGIJ+BCFHIIJ+ABGHIIJ)⇒

ACDFGHIJ+ACEFGHIJ+ABDFGHIJ+BCEFGHIJ+BDEFGHIJ+
 ACDEFGHI+ACEFGHI+ABDEFGHI+ABCEFGHI+ABDEFGHI+
 ACDEFGHJ+ACDEFGHJ+ABDEFGHJ+BCDEFGHJ+BDEFGHJ+
ACDFGIJ+ACDEFGIJ+ABCDFGIJ+BCDEFGIJ+BCDEFGIJ+
 ABCDFHIJ+ABCEFHIJ+ABCDFHIJ+BCEFHIJ+BCDEFHIJ+
 ABCDGHIJ+ABCEGHIJ+ABDGHIJ+ABCEGHIJ+ABDEGHIJ ⇒

ACEFGHIJ+ABDFGHIJ+BCEFGHIJ+BDEFGHIJ+
 ACDEFGHI+ACEFGHI+**ABDEFGHI**+ABCEFGHI+**ABDEFGHI**+
 ACDEFGHJ+ACDEFGHJ+ABDEFGHJ+BCDEFGHJ+BDEFGHJ+
 ACDFGIJ+BCDEFGIJ+BCDEFGIJ+
 ABCDFHIJ+ABCEFHIJ+ABCDFHIJ+BCEFHIJ+BCDEFHIJ+
 ABCDGHIJ+ABCEGHIJ+ABDGHIJ+ABCEGHIJ+ABDEGHIJ⇒

ACEFGHIJ+ABDFGHIJ+BCEFGHIJ+**BDEFGHIJ**+
 ACDEFGHI+ACEFGHI+ABDEFGHI+ABCEFGHI+
 ACDEFGHJ+ACDEFGHJ+**ABDEFGHJ+BCDEFGHJ+BDEFGHJ**+
 ACDFGIJ+BCDEFGIJ+BCDEFGIJ+
 ABCDFHIJ+ABCEFHIJ+ABCDFHIJ+BCEFHIJ+BCDEFHIJ+
 ABCDGHIJ+ABCEGHIJ+ABDGHIJ+ABCEGHIJ+ABDEGHIJ⇒

ACEFGHIJ+ABDFGHIJ+BCEFGHIJ+
 ACDEFGHI+ACEFGHI+ABDEFGHI+ABCEFGHI+
 ACDEFGHJ+ACDEFGHJ+BDEFGHJ+
 ACDFGIJ+**BCDEFGIJ+BCDEFGIJ**+
 ABCDFHIJ+ABCEFHIJ+ABCDFHIJ+BCEFHIJ+BCDEFHIJ+
 ABCDGHIJ+ABCEGHIJ+ABDGHIJ+ABCEGHIJ+ABDEGHIJ⇒

ACEFGHIJ+ABDFGHIJ+**BCEFGHIJ**+
 ACDEFGHI+ACEFGHI+ABDEFGHI+ABCEFGHI+
 ACDEFGHJ+ACDEFGHJ+BDEFGHJ+
 ACDFGIJ+BCDEFGIJ+
 ABCDFHIJ+**ABCEFHIJ**+ABCDFHIJ+ **BCEFHIJ**+ **BCDEFHIJ**+
 ABCDGHIJ+ABCEGHIJ+ ABDGHIJ+ABCEGHIJ+ABDEGHIJ⇒

ACEFGHIJ+ABDFGHIJ+
 ACDEFGHI+ACEFGHI+ABDEFGHI+ABCEFGHI+
 ACDEFGHJ+ACDEFGHJ+BDEFGHJ+
 ACDFGIJ+BCDEFGIJ+
ABCDFHIJ+ABCDFHIJ+BCEFHIJ+
 ABCDGHIJ+ABCEGHIJ+ABDGHIJ+ABCEGHIJ+ABDEGHIJ⇒

ACEFGHIJ+ABDFGHIJ+
 ACDEFGHI+ACEFGHI+ABDEFGHI+ABCEFGHI+
ACDEFGHJ+ACDEFGHJ+BDEFGHJ+
 ACDFGIJ+BCDEFGIJ+
 ABCDFHIJ+BCEFHIJ+
 ABCDGHIJ+ABCEGHIJ+ABDGHIJ+ABCEGHIJ+ABDEGHIJ⇒

ACEFGHIJ+ABDFGHIJ+
ACDEFGHI+ACEFGHI+ABDEFGHI+ABCEFGHI+
 ACDEFGHJ+BDEFGHJ+
 ACDFGIJ+ BCDEFGIJ
 ABCDFHIJ+ BCEFHIJ
 ABCDGHIJ+ ABCEGHIJ+ ABDGHIJ+ ABCEGHIJ+ ABDEGHIJ⇒

ABDFGHIJ+
 ACEFGHI+ABDEFGHI+
 ACDEFGHJ+BDEFGHJ+
 ACDFGIJ+ BCDEFGIJ
 ABCDFHIJ+ BCEFHIJ
ABCDGHIJ+ ABCEGHIJ+ ABDGHIJ+ ABCEGHIJ+ ABDEGHIJ⇒

ACEFGHI+ABDEFGHI+
 ACDEFGHJ+BDEFGHJ+
 ACDFGIJ+ BCDEFGIJ
 ABCDFHIJ+ BCEFHIJ
ABCEGHIJ+ ABDGHIJ+ ABCEGHIJ⇒

ACEFGHI+ABDEFGHI+ACDEFGHJ+BDEFGHJ+ACDFGIJ+
 BCDEFGIJ+ABCDFHIJ+BCEFHIJ+ABCEGHIJ+ABDGHIJ

Baseado no processo descrito na Seção 5.2.1, sabemos que os termos acima representam as seguintes coberturas de vértices minimais em $L(G)$.

$$\begin{aligned} &\{a, c, e, f, g, h, i\}, \{a, b, d, e, f, g, h, i\}, \{a, c, d, e, f, g, h, j\}, \{b, d, e, f, g, h, j\}, \\ &\{a, c, d, f, g, i, j\}, \{b, c, d, e, f, g, i, j\}, \{a, b, c, d, f, h, i, j\}, \{b, c, e, f, h, i, j\}, \\ &\{a, b, c, e, g, h, i, j\}, \{a, b, d, g, h, i, j\} \end{aligned}$$

Os conjuntos independentes são obtidos calculando $V_L - C$, para cada cobertura C . Portanto, os conjuntos independentes maximais de $L(G)$ são

$$\{b, d, j\}, \{c, j\}, \{b, i\}, \{a, c, i\}, \{b, e, h\}, \{a, h\}, \{e, g\}, \{a, d, g\}, \{d, f\}, \{c, e, f\}$$

os quais correspondem aos emparelhamentos maximais em G . Observe que $\alpha(L(G)) = \alpha'(G) = 3$, i.e., o número de independência de $L(G)$ é igual ao tamanho do maior emparelhamento em G .

5.3 Enumeração em Dígrafos

Nesta seção aplicamos o método de Maghout em dígrafos para obter as coberturas de vértices, conjuntos independentes, cliques, conjuntos dominantes (entrada, saída e gêmeos) e emparelhamentos. Em todos os casos, selecionamos um dígrafo e aplicamos o método apresentando passo a passo as operações realizadas. Em algumas situações re-aproveitamos os resultados já calculados na seção anterior, que é o caso da seção de emparelhamento.

5.3.1 Coberturas de Vértices e Conjuntos Independentes

A aplicação do método de Maghout em dígrafos é direta. Independente se o dígrafo é simples ou não, utilizamos seu grafo *simples* subjacente. Note que o grafo subjacente a um multigrafo direcionado é um multigrafo. Podemos aplicar o método neste grafo, porém existirá redundância de esforço já que múltiplas arestas entre um mesmo par de vértices irão aparecer várias vezes no produtório. Para minimizar isto utilizamos o grafo subjacente ao multigrafo que é simples. Por exemplo, o dígrafo $D = (V, A)$ da Figura 4.2(a)

**Grafo Simples
Subjacente**

possui os seguintes grafos: o grafo subjacente ao dígrafo, que é um multigrafo, e o grafo subjacente a este multigrafo. Estes grafos são ilustrados nas Figuras 5.4(a) e (b), respectivamente. O produtório da Equação 5.1 para o multigrafo na Figura 5.4(a) é

$$(\dot{1} + \dot{3})^2(\dot{1} + \dot{5})^2(\dot{5} + \dot{3})^2(\dot{2} + \dot{3})^2(\dot{2} + \dot{4})^2(\dot{2} + \dot{6})^2(\dot{3} + \dot{4})^2(\dot{3} + \dot{6})^2(\dot{4} + \dot{6})^2(\dot{1} + \dot{2})(\dot{5} + \dot{6})$$

onde

$$(\dot{v} + \dot{u})^k = \underbrace{(\dot{v} + \dot{u})(\dot{v} + \dot{u}) \dots (\dot{v} + \dot{u})}_{k \text{ vezes}}$$

e k corresponde à multiplicidade da aresta $\{v, u\}$. Enquanto que para o grafo ilustrado na Figura 5.4(b), temos

$$(\dot{1} + \dot{3})(\dot{1} + \dot{5})(\dot{5} + \dot{3})(\dot{2} + \dot{3})(\dot{2} + \dot{4})(\dot{2} + \dot{6})(\dot{3} + \dot{4})(\dot{3} + \dot{6})(\dot{4} + \dot{6})(\dot{1} + \dot{2})(\dot{5} + \dot{6})$$

Usando a simplificação mostrada na Equação 5.2 juntamente com a lei de idempotência do operador lógico e , é possível mostrar que as expressões para o multigrafo e para grafo são equivalentes. Portanto, aplicando o método de Maghout na expressão acima temos a seguinte seqüência de passos.

$$\begin{aligned} &(\dot{\mathbf{1}} + \dot{\mathbf{3}})(\dot{\mathbf{1}} + \dot{\mathbf{5}})(\dot{\mathbf{5}} + \dot{\mathbf{3}})(\dot{\mathbf{2}} + \dot{\mathbf{3}})(\dot{\mathbf{2}} + \dot{\mathbf{4}})(\dot{\mathbf{2}} + \dot{\mathbf{6}}) \\ &(\dot{\mathbf{3}} + \dot{\mathbf{4}})(\dot{\mathbf{3}} + \dot{\mathbf{6}})(\dot{\mathbf{4}} + \dot{\mathbf{6}})(\dot{\mathbf{1}} + \dot{\mathbf{2}})(\dot{\mathbf{5}} + \dot{\mathbf{6}}) \Rightarrow \end{aligned} \quad \text{Equação 5.2}$$

$$\begin{aligned} &(\dot{\mathbf{3}} + \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}}\dot{\mathbf{6}})(\dot{\mathbf{1}} + \dot{\mathbf{5}})(\dot{\mathbf{2}} + \dot{\mathbf{4}})(\dot{\mathbf{2}} + \dot{\mathbf{6}})(\dot{\mathbf{4}} + \dot{\mathbf{6}}) \\ &(\dot{\mathbf{1}} + \dot{\mathbf{2}})(\dot{\mathbf{5}} + \dot{\mathbf{6}}) \Rightarrow \end{aligned} \quad \text{Equação 5.2}$$

$$(\dot{\mathbf{3}} + \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}}\dot{\mathbf{6}})(\dot{\mathbf{1}} + \dot{\mathbf{5}})(\dot{\mathbf{2}} + \dot{\mathbf{4}})(\dot{\mathbf{6}} + \dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}})(\dot{\mathbf{1}} + \dot{\mathbf{2}}) \Rightarrow \quad \text{Equação 5.2}$$

$$(\dot{\mathbf{3}} + \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}}\dot{\mathbf{6}})(\dot{\mathbf{6}} + \dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}})(\dot{\mathbf{2}} + \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{4}})(\dot{\mathbf{1}} + \dot{\mathbf{5}}) \Rightarrow \quad \text{distributividade}$$

$$(\dot{\mathbf{3}}\dot{\mathbf{6}} + \dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{3}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}} + \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}}\dot{\mathbf{6}} + \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}}\dot{\mathbf{6}})(\dot{\mathbf{2}} + \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{4}})(\dot{\mathbf{1}} + \dot{\mathbf{5}}) \Rightarrow \quad \text{idempotência}$$

$$(\dot{\mathbf{3}}\dot{\mathbf{6}} + \dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{3}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}} + \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}}\dot{\mathbf{6}})(\dot{\mathbf{2}} + \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{4}})(\dot{\mathbf{1}} + \dot{\mathbf{5}}) \Rightarrow \quad \text{distributividade}$$

$$(\dot{\mathbf{3}}\dot{\mathbf{6}} + \dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{3}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}} + \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}}\dot{\mathbf{6}})(\dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{2}} + \dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{5}} + \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{4}} + \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}}) \Rightarrow \quad \text{absorção}$$

$$(\dot{\mathbf{3}}\dot{\mathbf{6}} + \dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{3}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}} + \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}}\dot{\mathbf{6}})(\dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{2}} + \dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{5}} + \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{4}}) \Rightarrow \quad \text{distributividade}$$

$$\begin{aligned} &\dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{3}}\dot{\mathbf{6}} + \dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{3}}\dot{\mathbf{5}}\dot{\mathbf{6}} + \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{3}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{6}} + \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{3}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}} + \dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{3}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}} + \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{3}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}} + \\ &\dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}}\dot{\mathbf{6}} + \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}}\dot{\mathbf{6}} + \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}}\dot{\mathbf{6}} \Rightarrow \end{aligned} \quad \text{idempotência}$$

$$\begin{aligned} &\dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{3}}\dot{\mathbf{6}} + \dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{3}}\dot{\mathbf{5}}\dot{\mathbf{6}} + \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{3}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{6}} + \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{3}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}} + \dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{3}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}} + \\ &\dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{3}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}} + \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}}\dot{\mathbf{6}} \Rightarrow \end{aligned} \quad \text{absorção}$$

$$\dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{3}}\dot{\mathbf{6}} + \dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{3}}\dot{\mathbf{5}}\dot{\mathbf{6}} + \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{3}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{6}} + \dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{3}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}} + \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}}\dot{\mathbf{6}}$$

Após este processo, obtivemos cinco termos indicando que temos as seguintes coberturas de vértices minimais

$$\{1, 2, 3, 6\}, \{2, 3, 5, 6\}, \{1, 3, 4, 6\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 4, 5, 6\}$$

A obtenção dos conjuntos independentes maximais é feita como mostrada na seção anterior. Dada uma cobertura minimal de vértices C , o conjunto independente maximal é $V - C$. Logo, os conjuntos independentes maximais de D são

$$\{4, 5\}, \{1, 4\}, \{2, 5\}, \{1, 6\}, \{3\}$$

e o número de independência do dígrafo é $\alpha(D) = 2$.

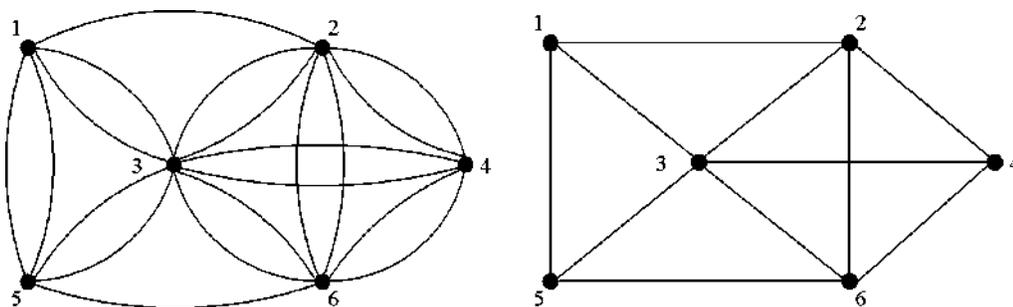


Figura 5.4: Enumeração de Conjuntos Independentes em Dígrafos. (a) grafo subjacentes e (b) grafo simples subjacente ao dígrafo ilustrado na Figura 4.2

5.3.2 Coberturas de Fonte e Sumidouro

Como as coberturas de fonte e sumidouro podem ser obtidas diretamente a partir dos arcos do dígrafo, o método de Maghout não é utilizado nesta seção. Dado um dígrafo $D = (V, A)$, as coberturas de fonte e sumidouro $C_f \subseteq V$ e $C_s \subseteq V$, respectivamente, correspondem a subconjuntos de vértices tal que para todo arco $(u, v) \in A$, $u \in C_f$ e $v \in C_s$, i.e., para cada arco, o vértice origem compõe a cobertura de fonte enquanto que o vértice destino compõe a cobertura de sumidouro. Note que o fato de $v \in C_f$, não implica que v é um vértice fonte. Isto indica apenas que existem arcos que têm v como origem. A mesma idéia está relacionada aos vértices em C_s .

Para ilustrar estas coberturas, considere os dígrafos ilustrados na Figura 5.5. Para o dígrafo D_1 em (a), as coberturas de fonte e de sumidouro são $C_f = \{a, e\}$ e $C_s = \{b, c, d, f\}$, respectivamente. Como $C_f \cap C_s = \emptyset$, logo D_1 é um dígrafo bipartido direcionado com as partições definidas por C_f e C_s . Neste caso, para cada arco (u, v) , u é *vértice fonte* e v é *vértice sumidouro*. Para o dígrafo D_2 em (b), $C_f = \{a, b, e\}$ e $C_s = \{c, d, e, f\}$. D_2 é um dígrafo bipartido, pois seu grafo subjacente é bipartido possuindo os seguintes conjuntos independentes $\{a, e\}$ e $\{b, c, d, f\}$. Todavia, D_2 não é bipartido direcionado pois $C_f \cap C_s \neq \emptyset$, i.e., D_2 não possui apenas vértices fonte e sumidouro. O dígrafo D_3 em (c), possui $C_f = \{a, b, c, d, e\}$ e $C_s = \{a, b, c, d, f\}$. Este dígrafo não é bipartido, pois o grafo subjacente possui ciclos de tamanho 3. Ele é um dígrafo 3-partido cujo conjunto de vértices pode ser dividido nas seguintes partições $\{a, e\}$, $\{b, d\}$ e $\{c, f\}$.

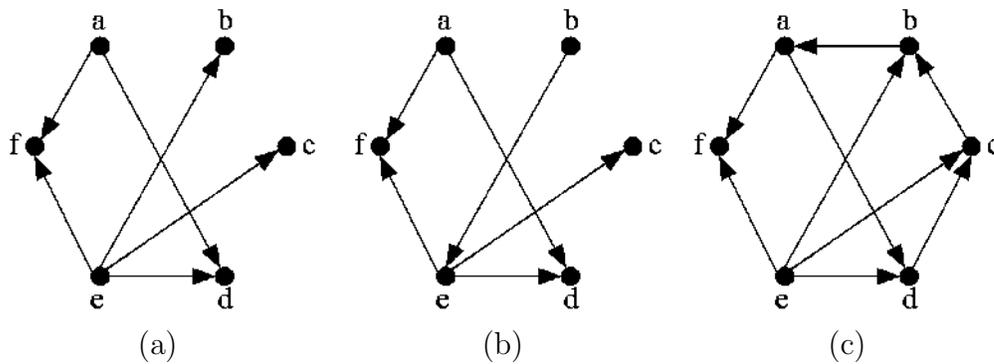


Figura 5.5: Cobertura de Fonte e Sumidouro

5.3.3 Cliques

O cálculo de cliques maximais em dígrafos é similar ao cálculo realizado para grafos. Inicialmente calculamos o complemento do dígrafo e encontramos seu grafo simples subjacente, pelos motivos apresentados na Seção 5.3.1. Em seguida aplicamos o método de maghout. Considere, o dígrafo D , ilustrado na Figura 4.2. O Complemento deste dígrafo \bar{D} e seu grafo simples subjacente, são ilustrados nas Figuras 5.6(a) e (b), respectivamente.

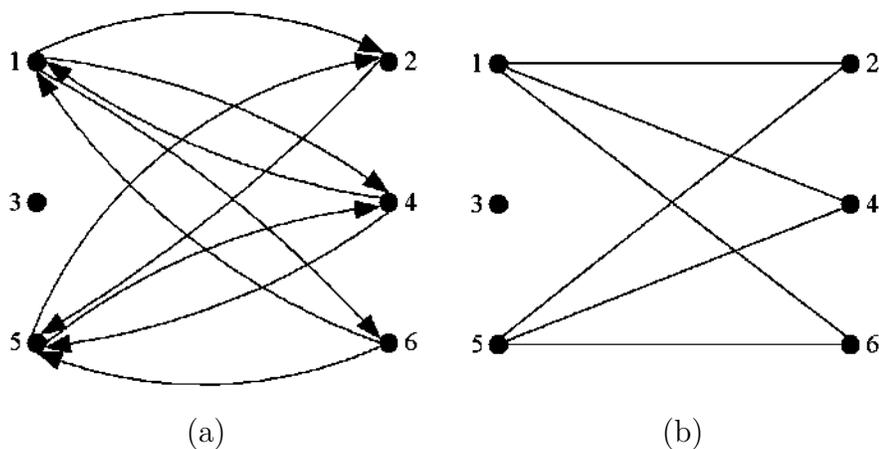


Figura 5.6: Enumeração de Cliques em Dígrafos. (a) Complemento e (b) grafo simples subjacente do dígrafo ilustrado na Figura 4.2.

A partir do grafo simples subjacente, temos os seguintes passos

$$(\dot{1} + \dot{2})(\dot{1} + \dot{4})(\dot{1} + \dot{6})(\dot{5} + \dot{2})(\dot{5} + \dot{4})(\dot{5} + \dot{6}) \Rightarrow \text{Equação 5.2}$$

$$(\dot{1} + \dot{2}\dot{4}\dot{6})(\dot{5} + \dot{2}\dot{4}\dot{6}) \Rightarrow \text{Equação 5.2}$$

$$\dot{1}\dot{5} + \dot{2}\dot{4}\dot{6}$$

Os termos encontrados correspondem às seguintes cobertura de vértices minimais

$$\{1, 5\}, \{2, 4, 6\}$$

Usando este resultado encontramos os seguintes conjuntos independentes maximais em \bar{D} ,

$$\{2, 3, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}$$

que correspondem aos cliques maximais em D . Logo, o número de clique do dígrafo é $\omega(D) = 4$.

5.3.4 Conjuntos Dominantes

O uso do método de Maghout para o cálculo dos conjuntos dominantes em dígrafos segue uma lógica muito similar àquela descrita na Seção 5.1. Inicialmente apresentaremos o cálculo dos conjuntos dominantes de entrada e em seguida mostraremos como os conjuntos dominantes de saída serão calculados. Finalizaremos com o cálculo dos conjuntos dominantes minimais gêmeos. É importante considerar que para o cálculo da cobertura de vértices, criamos uma soma lógica $\dot{u} + \dot{v}$ para cada aresta $\{u, v\}$. Esta soma indica que podemos selecionar ou o vértice u ou o vértice v para compor a cobertura de vértices. Este mesmo processo de escolha será usado para o cálculos dos conjuntos dominantes maximais.

Dado o dígrafo $D = (V, A)$, ilustrado na Figura 4.10, para cada vértice criaremos uma variável lógica. Neste caso, os vértices $a - f$ estão associados às variáveis lógicas $A - F$, respectivamente. Em seguida, para cada vértice v criamos uma soma lógica contendo todas as variáveis dos vértices que são dominadas por v ⁶. Por exemplo, para o vértice a , criamos a seguinte soma lógica

$$(A + B + C)$$

⁶Um vértice v domina um vértice u , se existe o arco (v, u) no dígrafo. Além disso, é importante considerar que v domina a si próprio.

para o vértice b temos a seguinte soma $(B + C + D)$, e assim por diante. Portanto para este dígrafo temos o seguinte produto destacando o vértice dominante embaixo da sua respectiva soma lógica.

$$\underbrace{(A + B + C)}_a \underbrace{(B + C + D)}_b \underbrace{(A + B + C + E)}_c \underbrace{(B + D + F)}_d$$

$$\underbrace{(C + D + E + F)}_e \underbrace{(B + F)}_f$$

Em seguida realizamos os seguintes passos

$$(A+B+C)(B+C+D)(A+B+C+E)(B+D+F) \quad \text{Equação 5.4}$$

$$(C+D+E+F)(B+F) \Rightarrow$$

$$(A+B+C)(B+C+D)(B+D+F)(C+D+E+F)(B+F) \Rightarrow \quad \text{Equação 5.4}$$

$$(A+B+C)(B+C+D)(C+D+E+F)(B+F) \Rightarrow \quad \text{Equação 5.3}$$

$$(B+C+AD)(C+D+E+F)(B+F) \Rightarrow \quad \text{Equação 5.3}$$

$$(B+(C+AD)F)(C+D+E+F) \Rightarrow \quad \text{distributividade}$$

$$(B+CF+ADF)(C+D+E+F) \Rightarrow \quad \text{distributividade}$$

$$BC+BD+BE+BF+CF+CDF+CEF+CF+ACDF+ADF+ADEF+ADF \Rightarrow \quad \text{absorção}$$

$$BC+BD+BE+BF+CF+ADF+ADEF+ADF \Rightarrow \quad \text{absorção}$$

$$BC+BD+BE+BF+CF+ ADF$$

Portanto, os conjuntos dominantes de entrada para D são

$$\{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{b, f\}, \{c, f\}, \{a, d, f\}$$

Conjuntos Dominantes de Entrada

e o número de dominância de entrada é $\gamma^-(D) = 2$. Calcular o conjunto dominante de saída a partir do conjunto dominante de entrada através de

$C_s = V - C_e$, onde C_e é o conjunto dominante de entrada e C_s é o conjunto dominante de saída, pode levar a resultados incompletos ou não minimais. Por exemplo, os conjuntos obtidos a partir do resultado anterior são

$$\{a, d, e, f\}, \{a, c, e, f\}, \{a, c, d, f\}, \{a, c, d, e\}, \{a, b, d, e\}, \{b, c, e\}$$

Note que o conjunto $\{a, d, e, f\}$ não corresponde a um conjunto minimal pois $\{a, e\}$ é o conjunto dominante de saída minimal. Além disso, alguns conjuntos que compõem o resultado correto, como $\{b, c, f\}$, não aparecem. Este conjunto é dominante de saída e não é subconjunto próprio de outro conjunto.

Para obtermos os conjuntos dominantes de saída minimais, realizamos um processo similar ao exposto anteriormente. Porém ao invés de escrevermos para cada vértice v a soma lógica das variáveis que são dominadas por v , escrevemos a soma lógica das variáveis que dominam v . Para o mesmo dígrafo D , a soma associada ao vértice a é dada apenas por $(A + C)$. Em seguida realizamos o produto das somas obtidas para cada vértice. Isto resultado no seguinte produto

$$\underbrace{(A + C)}_a \underbrace{(A + B + C + D + F)}_b \underbrace{(A + B + C + E)}_c \underbrace{(B + D + E)}_d$$

$$\underbrace{(C + E)}_e \underbrace{(D + E + F)}_f$$

Em seguida realizamos os seguintes passos

$$\begin{aligned} &(\mathbf{A+C})(\mathbf{A+B+C+D+F})(\mathbf{A+B+C+E})(\mathbf{B+D+E}) \\ &(\mathbf{C+E})(\mathbf{D+E+F}) \Rightarrow \end{aligned} \quad \text{Equação 5.4}$$

$$(\mathbf{A+C})(\mathbf{B+D+E})(\mathbf{C+E})(\mathbf{D+E+F}) \Rightarrow \quad \text{Equação 5.3}$$

$$(\mathbf{A+C})(\mathbf{D+E+BF})(\mathbf{C+E}) \Rightarrow \quad \text{Equação 5.3}$$

$$(\mathbf{C+AE})(\mathbf{D+E+BF}) \Rightarrow \quad \text{distributividade}$$

$$\mathbf{CD+CE+CBF+ADE+AE+ABEF} \Rightarrow \quad \text{absorção}$$

$$\mathbf{CD+CE+CBF+AE}$$

Portanto, os conjuntos dominantes de saída para D são

**Conjuntos
dominantes
de
Saída** **Do-
de**

$$\{c, d\}, \{c, e\}, \{c, b, f\}, \{a, e\}$$

e o número de dominância de saída é $\gamma^+(D) = 2$.

O cálculo dos conjuntos dominantes gêmeos minimais segue diretamente do resultado obtido nos cálculos anteriores. Sabemos que para um dígrafo $D = (V, A)$, um conjunto dominante gêmeo S é um subconjunto de vértices $S \subseteq V$, tal que todo par de vértices $u, v \in S$ existem dois arcos $(u, w), (w, v) \in A$ para todo $w \in V - S$. Nos conjuntos dominantes de entrada S_1 , todos os vértices em $V - S_1$ dominam pelo menos um vértice em S_1 , enquanto que nos conjuntos dominantes de saída S_2 , todos os vértices em $V - S_2$ são dominados pelos vértices em S_2 . Portanto $V - (S_1 \cup S_2)$ correspondem aos vértices que dominam os vértices em S_1 e são dominados pelos vértices em S_2 .

Considerando os resultados anteriores $R_1 = BC+BD+BE+BF+CF+ ADF$ e $R_2 = CD+CE+CBF+AE$ associados aos conjuntos dominantes de entrada e de saída respectivamente. Os conjuntos dominantes gêmeos são obtidos através dos seguintes passos

$R_1.R_2=(BC+BD+BE+BF+CF+ ADF)$
 $(CD+CE+CBF+AE)\Rightarrow$ distributividade

$BCD+BCE+BCF+ABCE+BCD+BCDE+BCDF+$
 $ABDE+BCDE+BCE+BCEF+ABE+BCDF+BCEF+$
 $BCF+ABEF+CDF+CEF+BCF+ACEF+ACDF+$
 $ACDEF+ABCDF+ADEF\Rightarrow$ absorção

$BCD+BCE+BCF+ABCE+$
 $ABDE+BCE+BCEF+ABE+BCEF+$
 $BCF+ABEF+CDF+CEF+BCF+ACEF+ACDF+$
 $ACDEF+ADEF\Rightarrow$ absorção

$BCD+BCE+BCF+$
 $ABDE+ABE+$
 $BCF+ABEF+CDF+CEF+BCF+ACEF+ACDF+$
 $ACDEF+ADEF\Rightarrow$ absorção

$BCD+BCE+BCF+$
 $ABDE+ABE+$
 $ABEF+CDF+CEF+ACEF+ACDF+$
 $ACDEF+ADEF\Rightarrow$ absorção

$BCD+BCE+BCF+$
 $ABE+CDF+CEF+ACEF+ACDF+$
 $ACDEF+ADEF\Rightarrow$ absorção

$BCD+BCE+BCF+ABE+$
 $+CDF+CEF+ACDF+ADEF\Rightarrow$ absorção

$BCD+BCE+BCF+ABE+$
 $CDF+CEF+ADEF$

Conjuntos Dominantes Gêmeos

Portanto, os conjuntos dominantes gêmeos para D são

$$\{b, c, d\}, \{b, c, e\}, \{b, c, f\}, \{a, b, e\}, \{c, d, f\}, \{c, e, f\}, \{a, d, e, f\}$$

e o número de dominância gêmeo é $\gamma^*(D) = 3$.

5.3.5 Emparelhamentos

Na Seção 5.2.4, vimos explicitamente o relacionamento entre emparelhamento maximal e conjunto independente maximal através da relação entre um grafo G e seu grafo linha $L(G)$. Observamos que os emparelhamentos de G poderiam ser obtidos calculando os conjuntos independentes em $L(G)$. Isto permitiu o uso do método de Maghout em $L(G)$ para enumerar todos os emparelhamentos maximais de G .

Na Seção 4.5, discutimos que o conceito de emparelhamento para grafos e dígrafos era o mesmo, porém com a diferença de que para o primeiro considerávamos arestas enquanto para o último considerávamos arcos. Entretanto, em ambos os casos, o emparelhamento buscava sempre um conjunto de arcos ou arestas que não compartilhavam vértices e não correspondiam a laços.

Nesta seção iremos usar os resultados obtidos anteriormente para grafos e apresentados na Seção 5.2.4. Considerando o dígrafo $D = (V, A)$ mostrado na Figura 5.7, a enumeração dos emparelhamentos é feita a partir do *grafo subjacente* a D , o qual chamaremos de D' . Usando D' , aplicamos o método de Maghout no grafo linha $L(D')$. O grafo D' é o grafo da Figura 5.3 que foi utilizado na Seção 5.2.4 para exemplificar o cálculo dos emparelhamentos maximais. Portanto os passos mostrados naquela seção assim como o resultado obtido são também válidos para o dígrafo D . Assim, os emparelhamentos maximais para D correspondem aos seguintes conjuntos de arcos

$\{b, d, j\}, \{c, j\}, \{b, i\}, \{a, c, i\}, \{b, e, h\}, \{a, h\}, \{e, g\}, \{a, d, g\}, \{d, f\}, \{c, e, f\}$

e $\alpha'(D) = 3$ indicando que o tamanho do maior emparelhamento de D é igual a 3.

Grafo Subjacente ao Dígrafo Grafo Linha

5.4 Exercícios

Exercício 5.1. *Liste todos os conjuntos independentes do grafo ilustrado na Figura 4.1(a) e determine seu número de independência.*

Exercício 5.2. *Liste todos os conjuntos independentes e cliques do grafo ilustrado na Figura 5.8. Em seguida determine seus números de clique e de independência.*

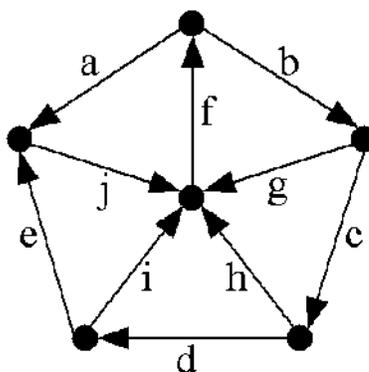


Figura 5.7: Dígrafo usando para o cálculo do emparelhamento.

Exercício 5.3. *Liste todos os conjuntos independentes e cliques do complemento do grafo ilustrado na Figura 5.8. Em seguida determine seus números de clique e de independência. Compare os resultados obtidos com os do exercício anterior.*

Exercício 5.4. *Quantos conjuntos independentes e cliques possui: (a) K_n e (b) C_n*

Exercício 5.5. *Mostre para qualquer grafo G , $\omega(G) = \alpha(\bar{G})$ e $\alpha(G) = \omega(\bar{G})$*

Exercício 5.6. *Mostre que para qualquer inteiro positivo $n \geq 2$, o número de Ramsey $r(n, 2)$ é igual a n .*

Exercício 5.7. *Determine $|V|$ e $|A|$ de um grafo biclique $K_{r,s} = (V, A)$.*

Exercício 5.8. *Quantos automorfismos possui um biclique $K_{r,s}$ com (a) $r \neq s$ e (b) $r = s$?*

Exercício 5.9. *Dado um grafo $G = (V, A)$, mostre que*

$$\bigwedge_{j=1}^{d(v_i)} (u_i + u_{i+j}) = u_i + \bigwedge_{j=1}^{d(v_i)} (u_{i+j})$$

considerando que u_i é a variável lógica associada ao vértice $v_i \in V$ e u_{i+j} é a variável lógica associada ao vértice $v_j \in \tau(v_i)$.

Exercício 5.10. *Determine os conjuntos independentes maximais e os cliques do dígrafo ilustrado na Figura 5.9*

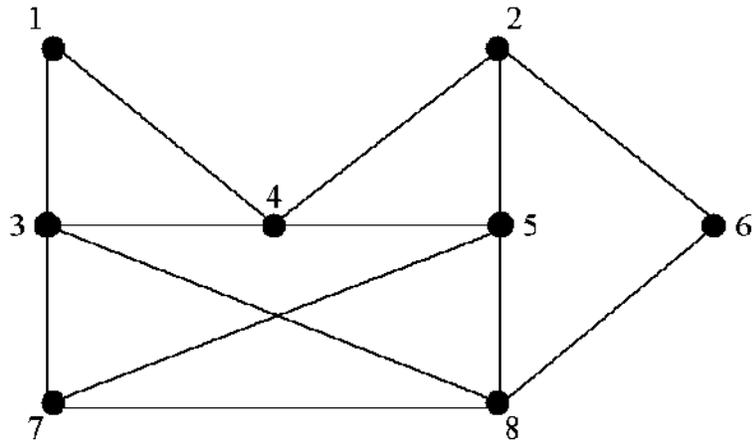


Figura 5.8: Grafo Exemplo

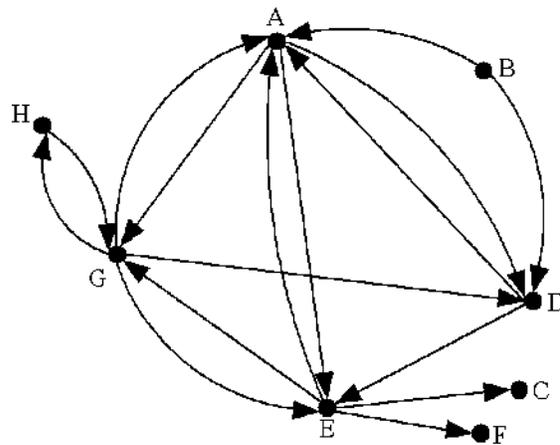


Figura 5.9: Dígrafo Exemplo

Exercício 5.11. *Dada uma aresta com multiplicidade $k \geq 1$, mostre que*

$$(\dot{v} + \dot{u})^k = (\dot{v} + \dot{u}),$$

onde $+$ é a operação lógica ou.

Exercício 5.12. *Seja $G = G_1 + G_2$, i.e., o resultado da operação de junção sobre os grafos G_1 e G_2 . Prove que $\omega(G) = \omega(G_1) + \omega(G_2)$.*

Exercício 5.13. *Mostre que um grafo G é bipartido se e somente se $\alpha(H) \geq \frac{1}{2}|H|$ para todo subgrafo H de G , i.e., $H \subseteq G$.*

Exercício 5.14. *Mostre que para qualquer $k > 0$, todo grafo k -regular bipartido tem um emparelhamento perfeito.*

Exercício 5.15. *Determine a quantidade de emparelhamentos perfeitos de um grafo completo K_n .*

Exercício 5.16. *Prove que para qualquer grafo $G = (V, A)$, $\alpha(G) \geq \frac{|V|}{\Delta(G)+1}$*

Exercício 5.17. *Mostre que $\max\{\gamma^+(D), \gamma^-(D)\} \leq \gamma^*(D) \leq \gamma^+(D) + \gamma^-(D)$*

Capítulo 6

Árvores

Este capítulo apresenta os principais conceitos relacionados a um tipo particular de grafo chamado *Árvore*. Uma árvore pode ser vista ou como um grafo conexo ou como um dígrafo conexo sem ciclos. Árvores vêm sendo estudadas desde 1857 por Cayley em processos de contagem de componentes químicos e possuem inúmeras aplicações práticas, sendo freqüentemente empregadas em algoritmos que necessitam realizar buscas rápidas de itens em uma lista; representar dados eficientemente para armazenamento ou transmissão; modelar explicitamente um processo de decisão, entre outros.

6.1 Conceitos Básicos

Definição 6.1. Uma árvore é um grafo conexo acíclico, i.e., sem ciclos de qualquer tamanho.

Qualquer grafo simples conexo que não possui ciclos é uma árvore. Quando o grafo é simples e apenas acíclico, temos uma *floresta*, onde cada componente conexo é uma *árvore*. Se ele possui apenas um único componente conexo, então ele é uma árvore que consiste em uma floresta conexa. A Figura 6.1 ilustra vários grafos acíclicos que representam árvores, em particular, (a) é um grafo caminho P_6 e (b) é um grafo estrela S_6 . Observe que em todos os casos, o número de arestas é uma unidade a menos que o número de vértices. A união de todas as árvores nesta figura compõe uma floresta com 3 componentes conexos. O fato de uma árvore ser um grafo acíclico leva ao seguinte Teorema.

This work is licensed under CC BY-NC-SA 4.0. To view a copy of this license, visit <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0>

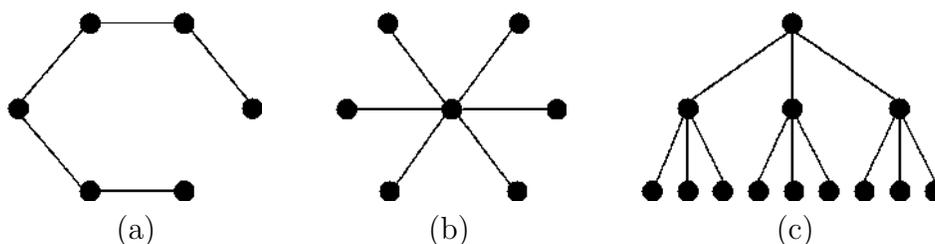


Figura 6.1: Exemplo de árvores. O grafo resultante da união das árvores (a), (b) e (c) corresponde a uma floresta.

Teorema 6.1. Em uma árvore, existe um único caminho entre qualquer par de vértices.

A presença de um ciclo em um grafo leva a pelo menos dois caminhos entre algum par de vértices na árvore. Como uma árvore não possui ciclos nem laços então o número de arestas é limitado pelo número de vértices.

Teorema 6.2. Uma árvore $T = (V, A)$ possui $|A| = |V| - 1$.

O fato do número de arestas ser limitado pelo número de vértices em uma árvore T , nos leva ao seguinte teorema relacionado ao conjunto de árvores que formam uma floresta.

Teorema 6.3. Uma floresta $F = (V, A)$ composta por n árvores $T_i = (V_i, A_i)$, com $1 \leq i \leq n$, possui uma quantidade de aresta igual a

$$|A| = \sum_{i=1}^n |V_i| - n.$$

Uma árvore possui inúmeras características que são equivalentes entre si e que a individualizam dos demais grafos. Estas características são destacadas no seguinte Teorema.

Teorema 6.4. Para um grafo $T = (V, A)$ de $n \geq 1$ vértices, as seguintes afirmações são equivalentes e caracterizam T como uma árvore com n vértices.

- (i) T é conexo e tem $n - 1$ arestas;

- (ii) Para qualquer par de vértices $v, u \in V$, existe apenas um único caminho de v a u (e vice-versa) em T ;
- (iii) T é minimamente conexo, i.e., T é conexo porém a remoção de qualquer aresta qualquer torna T desconexo.
- (iv) T é maximamente acíclico, i.e., T não possui ciclos entretanto a adição de uma aresta entre qualquer par de vértices não adjacentes gera um ciclo em T .

A partir do ítem (iii) do Teorema 6.4, temos os seguintes Corolários

Corolário 6.1. Cada aresta de uma árvore é uma aresta de corte (Verifique!).

Corolário 6.2. Um vértice v de uma árvore é um vértice de corte se e somente se $d(v) > 1$ (Verifique!).

Portanto qualquer árvore T com mais de $n \geq 2$ vértices possui conectividades de vértice e de aresta iguais a 1, i.e., $\lambda(T) = \kappa(T) = 1$.

É comum lidarmos com árvores cujos vértices possuam rótulos. Uma árvore com vértices rotulados com letras ou número é chamada *árvore rotulada*. Duas árvores rotuladas $T = (V, A)$ e $T' = (V', A')$ são idênticas se $V = V'$ e $A = A'$, i.e., se tanto o conjunto de aresta quanto o conjunto de vértices forem iguais. Se ambas as árvores possuírem a mesma forma, porém com conjunto de arestas distintos, devido aos rótulos, elas serão consideradas diferentes. Neste caso, dizemos que são *árvores isomórficas*, porém diferentes. Isomorfismo em grafos é discutido em maiores detalhes na Seção 1.6. As árvores mostradas na Figura 6.1 não são rotuladas. Por outro lado, as árvores das Figuras 6.2(a) e (b) são rotuladas e distintas, mesmo que elas representem grafos estrela S_6 . O que difere nestas árvores é o conjunto de arestas. A aresta $\{d, c\}$ está contida apenas na árvore em (a), enquanto que a aresta $\{a, c\}$ está presente apenas na árvore em (b).

Na Seção 1.4 apresentamos o conceito de centro de um grafo que consiste em um grafo induzido pelos vértices de excentricidade mínima. Este conceito é válido para árvores com adição da informação de que o centro de uma árvore é um vértice ou uma aresta. Este resultado foi obtido por Jordan e apresentado através do seguinte Teorema.

Teorema 6.5 ([18]). O centro de uma árvore é um vértice ou uma aresta.

This work is licensed under CC BY-NC-SA 4.0. To view a copy of this license, visit <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0>

Árvore Rotulada

Árvores Isomórficas

Centro de Árvores

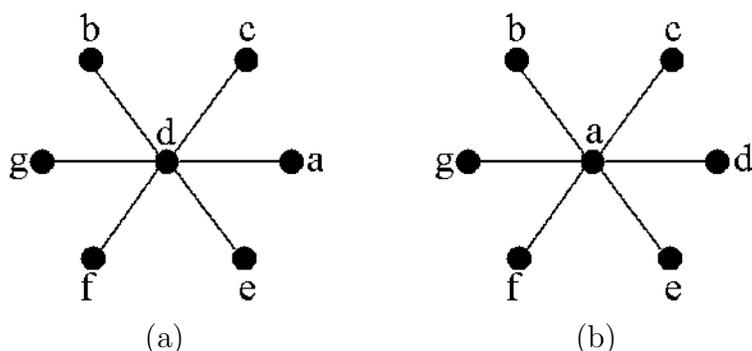


Figura 6.2: Exemplo de árvores rotuladas.

Considerando a Figura 6.2, o centro da árvore em (a) é o vértice d , enquanto que o centro da árvore em (b) é o vértice a . O vértice d em (a) possui menor excentricidade dentre todos os vértices, sendo igual a $\epsilon(d) = 1$, enquanto que os demais vértices possuem excentricidade igual a 2. A mesma situação é encontrada em (b), porém o vértice que possui a menor excentricidade é o vértice a . Por outro lado, os vértices da árvore ilustrada na Figura 6.3(a) possuem as seguintes excentricidades:

$$\epsilon(a) = 3, \epsilon(b) = 3, \epsilon(c) = 3, \epsilon(d) = 2, \epsilon(e) = 2, \epsilon(f) = 3 \text{ e } \epsilon(g) = 3.$$

Portanto os vértices d e e possuem os menores valores de excentricidade e correspondem ao centro desta árvore.

6.2 Árvores Enraizadas

Vértice Raiz

Árvore Enraizada

Em inúmeras aplicações um dado vértice é designado para se tornar um *vértice raiz*. A partir dele podemos associar uma direção à cada aresta de forma a criar um caminho direcionado do vértice raiz para cada vértice da árvore. Isto leva ao conceito de *árvore enraizada* e também à definição de uma hierarquia entre os vértices. As Figuras 6.3(b) e (c) mostram árvores enraizadas geradas a partir da árvore em (a), tendo como raízes os vértices a e e respectivamente. É possível alcançar qualquer vértice da árvore através de um *único* caminho direcionado a partir do vértice raiz.

Vértices Pai, Filho e Irmão

Vértices Ancestral, Descendente, Folha e Interno

Se $T = (V, A)$ é uma árvore enraizada e $v, u \in V$ são vértices quaisquer, então u é *pai* de v e v é *filho* de u se existe um arco $(u, v) \in A$. Dois vértices são chamados *irmãos* quando possuem o mesmo pai. Um vértice u é *ancestral*

This work is licensed under CC BY-NC-SA 4.0. To view a copy of this license, visit <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0>

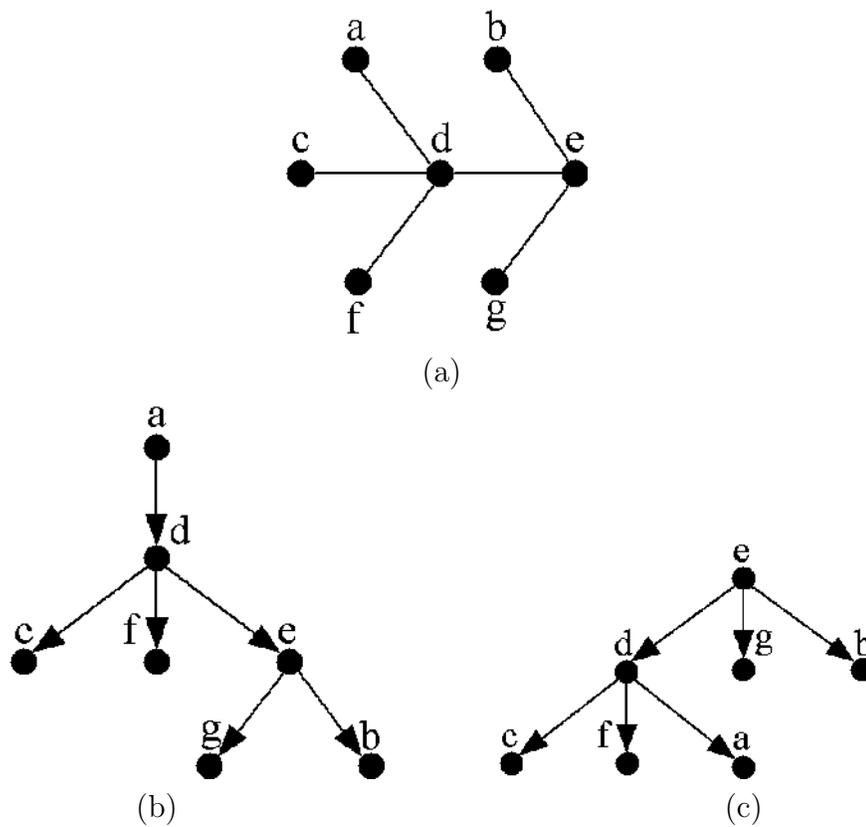


Figura 6.3: Exemplo de árvores enraizadas. (b) e (c) são árvores enraizadas geradas a partir de (a), com raízes a e e respectivamente

de outro vértice v , se e somente existe um caminho direcionado na árvore de u para v . Neste caso, v é um vértice *descendente* de u . Vértices que não possuem descendentes são chamados *vértices folha*, e os demais vértices são chamados *vértices internos* da árvore. O vértice raiz é um vértice interno a não ser que ele seja o único na árvore. Neste caso, ele é considerado como sendo um vértice folha.

Toda árvore com no mínimo dois vértices tem no mínimo duas folhas. Um vértice folha v possui grau $d(v) \leq 1$, onde $d(v) = 0$, quando a árvore for composta apenas por ele. Um vértice interno u de uma árvore possui grau $d(u) \geq 1$. A remoção de uma folha de uma árvore com n vértices resulta em outra árvore porém com $n - 1$ vértices. Portanto, para qualquer árvore $T=(V,A)$ não trivial temos $d(v) \geq 1, \forall v \in V$. Usando esta informação e os Teoremas 1.1 e 6.2, temos o seguinte Corolário

Corolário 6.3. Para uma árvore $T = (V, A)$, temos

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|A| = 2|V| - 2$$

Subárvore

Uma *subárvore* $T' = (V', A')$ de uma árvore $T = (V, A)$, i.e., denotada por $T' \subseteq T$, possui como raiz um vértice interno v de T e como vértices internos todos os vértices descendentes de v e todas as arestas incidentes a estes vértices em T . Formalmente, se $T' \subseteq T$ e v é raiz de T' , então $u \in V'$ se $u \in V$ e é descendente da raiz v em T , ou seja, se existe um caminho direcionado em T com origem em v e destino em u . Em relação aos arcos, $a = (x, y) \in A'$ se $(x, y) \in A$ e $x, y \in V'$. As Figuras 6.4(a) e (b) apresentam duas sub-árvores da árvore na Figura 6.3(b) com vértices raiz e e d , respectivamente. Todos os vértices descendentes do vértice e da árvore na Figura 6.3(b) compõem a sub-árvore na Figura 6.4(a), juntamente com os respectivos arcos. O mesmo se aplica à sub-árvore da Figura 6.4(b).

Quando todos os vértices internos de uma árvore enraizada possuem no máximo p filhos, então dizemos que ela é uma árvore p -ária. Uma árvore enraizada é p -ária completa se todos os seus *vértices internos* possuem exatamente p filhos. Quando $p = 2$, temos uma árvore binária composta por vértices com no máximo dois filhos. Nesta árvore, dizemos que um vértice com dois filhos possui um filho à esquerda e outro à direita. A subárvore enraizada com raiz no filho à esquerda é chamada *subárvore esquerda*, enquanto que a outra subárvore é chamada *subárvore direita*. Árvores binárias são comumente usadas para estruturar informação para que esta seja aces-

Árvore p -ária, e p -ária Completa

Árvore Binária, Subárvores Direita e Esquerda

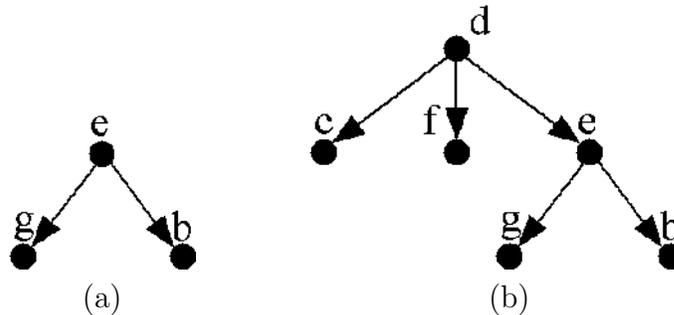


Figura 6.4: Exemplo de sub-árvores. (a) e (b) são sub-árvores da árvore da Figura 6.3(b) com raízes e e d , respectivamente.

sada de forma eficiente. Nestes casos, elas são chamadas de *árvores binárias de pesquisa*.

A árvore mostrada na Figura 6.3(c) é um exemplo de árvore 3-ária, também chamada de ternária. Esta árvore é completa pois todos os vértices internos possuem exatamente 3 vértices filhos. Por outro lado, embora a árvore mostrada na Figura 6.3(b) seja uma árvore ternária, ela não é completa, pois o vértice e possui apenas dois filhos. Outro exemplo pode ser visto na Figura 6.1(b) se considerarmos o vértice central como sendo um vértice raiz. Neste caso, teremos uma árvore 6-ária. A árvore ilustrada na Figura 6.1(c) pode também ser vista como árvore completa 3-ária se considerarmos que o vértice do topo como vértice raiz.

O comprimento do caminho do vértice raiz até um vértice v qualquer define o *nível do vértice v* , denotado por $l(v)$ ¹. O nível de um vértice é também chamado de altura do vértice na árvore. Por exemplo, considere a árvore $T = (V, A)$ ilustrada na Figura 6.3(c). Os vértices de T possuem os seguintes níveis $l(a) = 2, l(b) = 1, l(c) = 2, l(d) = 1, l(e) = 0$ e $l(f) = 2$. Note que o nível do vértice raiz e é igual a 0, por outro lado o nível do vértice a é igual a 2. A partir desta informação é possível calcular a altura da árvore T , denotada por $h(T)$ ². Ela é definida pelo maior valor de nível encontrado considerando todos os vértices de T , i.e.,

$$h(T) = \max_{v \in V} l(v).$$

Uma árvore p -ária de altura h é chamada balanceada se todos os vértices

Nível de um vértice

Altura de uma Árvore

Árvore Balanceada

¹ l é a inicial da palavra *level* que corresponde à palavra nível em inglês

² h é a inicial da palavra *height* que corresponde à palavra altura em inglês

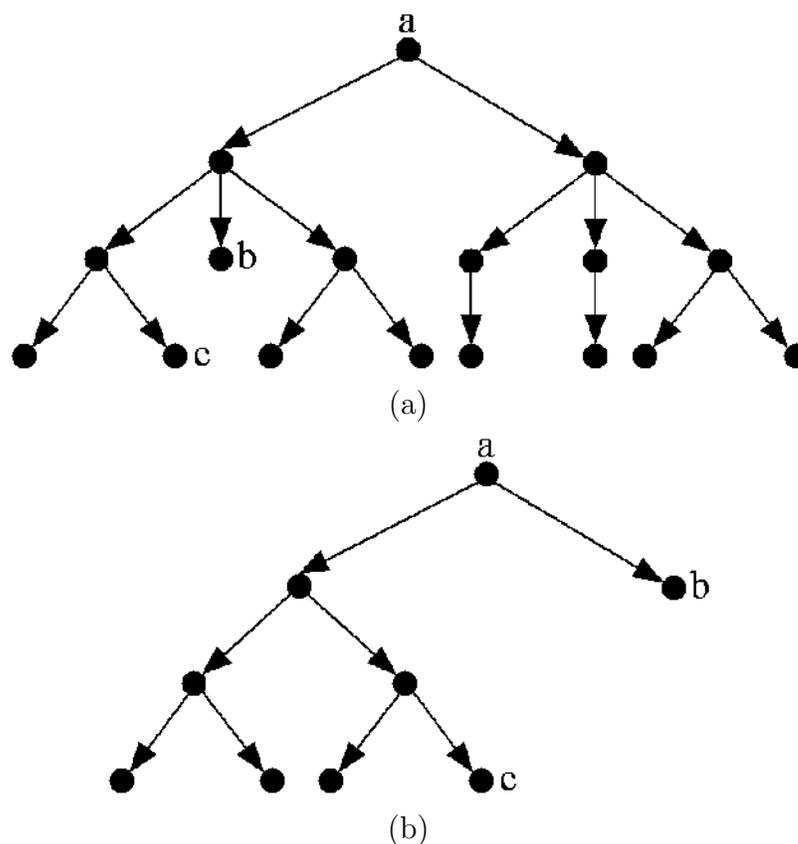


Figura 6.5: Exemplo de árvore balanceada. (a) é uma árvore ternária balanceada, enquanto que (b) é binária porém não balanceada.

Árvore Cheia

p-ária

folha possuem nível igual ou a h ou $h - 1$. Se esta árvore é completa e todos os seus vértices folhas estiverem a uma altura h , então ela é chamada árvore *p*-ária cheia. A Figura 6.5(a) mostra uma árvore ternária com raiz no vértice a e altura igual a 3. Esta árvore é balanceada pois todos os vértices folha, diferentes do vértice b , possuem altura igual a 3, enquanto b possui altura igual a 2. Por outro lado, a árvore binária em (b) não é balanceada pois ela possui altura igual a 3 e contém um vértice folha b com altura igual a 1.

A quantidade de vértices que uma árvore *p*-ária de altura h possui é obtida somando o número de vértices a uma distância $0, 1, \dots, h$ da raiz. Assim temos que

Teorema 6.6. Uma árvore *p*-ária de altura h possui no máximo p^h vértices

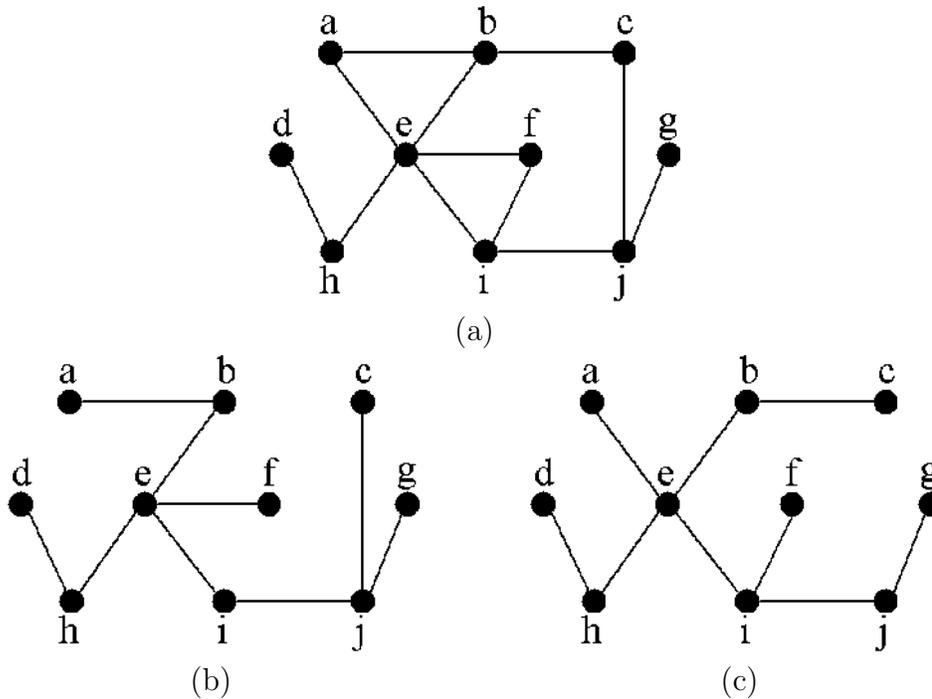


Figura 6.6: Exemplo de árvores de espalhamentos. (a) mostra um grafo G e (b) e (c) mostram duas árvores de espalhamentos de G .

folha e no máximo $\sum_{i=0}^{h-1} p^i = \frac{p^h-1}{p-1}$ vértices internos.

6.3 Árvores de Espalhamento

Como discutido na Seção 1.1, qualquer grafo G possui um subgrafo, chamado subgrafo de espalhamento ou subgrafo gerador, que contém todos os vértices do grafo original. Quando este subgrafo não possui ciclos ele é comumente chamado de *árvore de espalhamento* ou *árvore geradora*. Quando o subgrafo de espalhamento é desconexo, então temos uma *floresta de espalhamento*, onde cada componente conexo é uma árvore de espalhamento.

Floresta de Espalhamento

A Figura 6.6(a) mostra um grafo G e duas árvores de espalhamentos de G em (b) e (c). Cada árvore possui o mesmo conjunto de vértices de G e um subconjunto das arestas que não formam ciclos.

Uma questão que se colocar diretamente após a apresentação destas árvores é quantas árvores de espalhamento podem ser obtidas a partir de um grafo

G . Uma solução simples e elegante para este problema foi dada por Cayley através do seguinte Teorema.

Teorema 6.7. O número de árvores de espalhamento de um grafo $G = (V, A)$ é dado por

$$\mathcal{T}(G) = \mathcal{T}(G - a) + \mathcal{T}(G/a)$$

onde $a \in A$ e não corresponde a um laço.

Através deste Teorema podemos observar que o número de árvores de espalhamento de G é obtido de forma recursiva. Inicialmente selecionando uma aresta a qualquer e a usamos para realizar duas operações em G , já discutidas na Seção 2.2: a remoção de a , dada por $G - a$, e a operação de arco contração em a , dada por G/a . A partir daí, o número de árvores de espalhamento de G é igual a soma do número de árvores de espalhamento de G após a remoção da aresta a , e de G após a operação de arco-contração na aresta a .

Para exemplificar este processo usaremos o grafo $G = (V, A)$ ilustrado na Figura 6.7 e a aresta a em destaque. De acordo com o Teorema 6.7, temos que calcular $G_1 = G - a$ e $G_2 = G/a$, pois

$$\mathcal{T}(G) = \mathcal{T}(G_1) + \mathcal{T}(G_2)$$

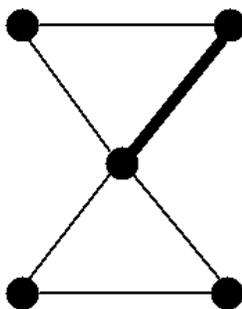


Figura 6.7: Grafo G exemplo para o cálculo do número de árvores de espalhamento. A aresta em negrito é a selecionada para o Teorema 6.7.

Os grafos G_1 e G_2 são ilustrados nas Figura 6.8(a) e (d), respectivamente. Como estes grafos são complexos, não é possível saber diretamente o número de árvores de espalhamento de cada um deles. Devido a isto, utilizamos novamente o Teorema 6.7 em G_1 e G_2 . Para G_1 , selecionamos a aresta b ,

como ilustrado na Figura 6.8(a) a fim de obter $G'_1 = G_1 - b$ e $G''_1 = G_1/b$, ambos ilustrados em (b) e (c), respectivamente. Enquanto que para G_2 , selecionamos a aresta c , ilustrada na Figura 6.8(d) para calcular $G'_2 = G_2 - c$ e $G''_2 = G_2/c$, ambos ilustrados em (e) e (f), respectivamente.

Dessa forma temos,

$$\mathcal{T}(G_1) = \mathcal{T}(G'_1) + \mathcal{T}(G''_1) \quad \text{e} \quad \mathcal{T}(G_2) = \mathcal{T}(G'_2) + \mathcal{T}(G''_2)$$

A partir destes grafos e analisando as Figuras 6.8(a)-(f), sabemos que $\mathcal{T}(G'_1) = 1$ e $\mathcal{T}(G''_1) = 2$. Estes resultados se devem ao fato de G'_1 já ser uma árvore, e G''_1 , para se tornar uma árvore deve selecionar uma das duas arestas que são incidentes no mesmo par de vértices. Cada uma destas arestas juntamente com as demais dá origem a uma única árvore de espalhamento. Portanto G_1 possui exatamente duas árvores de espalhamento. Através destes resultados obtemos $\mathcal{T}(G_1) = 3$. Usando o mesmo processo, sabemos que $\mathcal{T}(G'_2) = 2$ e $\mathcal{T}(G''_2) = 4$, e conseqüentemente, $\mathcal{T}(G_2) = 6$. Utilizando os resultados obtidos concluímos que $\mathcal{T}(G) = 9$.

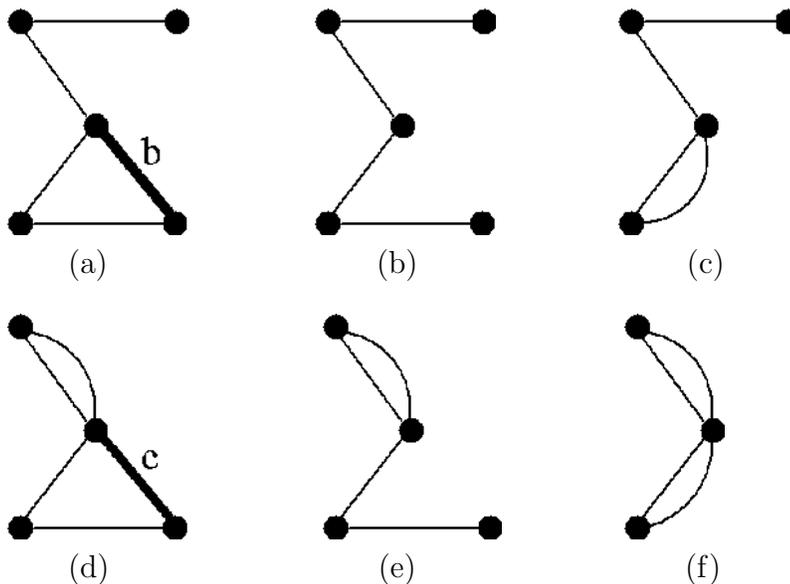


Figura 6.8: Árvores intermediárias utilizadas no cálculo do número de árvores de espalhamento do grafo G ilustrado na Figura 6.7. (a) $G_1 = G - a$ e (b) $G'_1 = G_1 - b$ (c) $G''_1 = G_1/b$ (d) $G_2 = G/a$ (e) $G'_2 = G_2 - c$ (f) $G''_2 = G_2/b$.

Devido à recursividade, este processo pode ser muito complicado e demorado quando o grafo é muito grande. Felizmente existe uma maneira mais

direta de calcular o número de árvores de espalhamento de grafos genéricos. Ele foi desenvolvido por Kirchhoff [19] e é baseado no cálculo de determinante de matrizes. Kirchhoff mostrou que o número de árvores de espalhamento de um grafo G é determinado a partir do cofator³ da matriz resultante da subtração da matriz de graus⁴ pela matriz de adjacência, ambas do grafo G , o que é expresso através do seguinte Teorema.

Teorema 6.8 (Teorema de Matriz-Árvore [20]). Dados um grafo $G = (V, A)$ sem loops com $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, a matriz de adjacência $D = [d_{i,j}]$ de G , onde $d_{i,j}$ representa o número de arestas entre os vértices v_i e v_j , e a matriz de graus $M = [m_{i,j}]$ de G , onde $m_{i,i} = d(v_i)$ e $m_{i,j} = 0$, para $i \neq j$, o número de árvores de espalhamento de G pode ser obtido por

$$\mathcal{T}(G) = (-1)^{i+j} \det Q_{i,j}$$

onde $Q_{i,j}$ é a matriz resultante da eliminação da linha i e coluna j , relativos ao elemento $q_{i,j}$, da matriz $Q = M - D$.

A aplicação do Teorema 6.8 no grafo da Figura 6.7 é direta. Para facilitar a visualização da solução, os vértices serão associados aos rótulos de 1 a 5, conforme podemos ver na Figura 6.9.

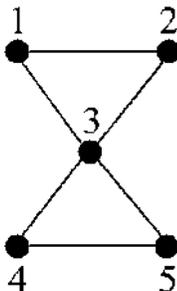


Figura 6.9: Grafo G exemplo para o cálculo do número de árvores de espalhamento.

Inicialmente calculamos sua matriz de adjacência D e a matriz de graus

³Dada uma matriz quadrada $A = [a_{i,j}]$ de ordem n , o cofator $A_{i,j} = (-1)^{i+j}|D_{ij}|$, onde $|D_{ij}|$ é o determinante da matriz resultante da remoção da linha i e coluna j da matriz A .

⁴A matriz de graus $M = [m_{i,j}]$ de um grafo é uma matriz diagonal tal que $m_{i,i} = d(v_i)$ e $m_{i,j} = 0$, para $i \neq j$, e $d(v_i)$ corresponde ao grau do vértice v_i .

M , as quais são mostradas abaixo.

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

A matriz Q resultante da subtração da matriz M pela matriz D é dada por

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

O cálculo do cofator é realizado selecionando qualquer elemento da matriz Q , o qual, por conveniência, será o elemento $q_{1,1}$. Portanto o número de árvores de espalhamento é dado por.

$$\mathcal{T}(G) = (-1)^{1+1} \det \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 9.$$

Quando o grafo é completo é possível calcular facilmente o número de árvores de espalhamento através de uma expressão simples desenvolvida por Cayley [21] e apresentada pelo seguinte Teorema

Teorema 6.9 ([21]). Para um grafo completo K_n , o número de árvores de espalhamento é dado por

$$\mathcal{T}(K_n) = n^{n-2}$$

Este teorema permite também obter a resposta para a seguinte pergunta: quantas árvores rotuladas podemos gerar com um conjunto de n vértices, de maneira que qualquer par de vértices possa ser adjacente. Observe que esta pergunta é análoga à aquela que consiste em determinar o número de árvores de espalhamento a partir de um grafo totalmente conexo com n vértices. Vale ressaltar que o resultado obtido diz respeito ao número de árvores distintas,

onde estas árvores podem ou não ser isomórficas entre si. Isomorfismo será discutido no Capítulo 1.6.

Se considerarmos o conjunto de vértices de K_n sendo definido por $N = \{1, 2, \dots, n\}$ notaremos que n^{n-2} corresponde ao número de seqüências de tamanho $n - 2$ que podemos formar com os elementos definidos no conjunto N . A relação entre estas seqüências e as possíveis árvores geradoras associadas ao grafo K_n é devido também ao trabalho de Prüfer. Prüfer [22] mostrou que existe uma correspondência direta entre o conjunto de árvores de espalhamento de K_n e o conjunto de todas as seqüências de tamanho $n - 2$, de maneira que cada árvore seja identificada de forma unívoca por uma dada seqüência. A esta seqüência é dado o nome *código prüfer*.

Código Prüfer

O código Prüfer é obtido através do seguinte processo. Considere uma árvore $T = (V, A)$ com n vértices rotulados de 1 a n . Por conveniência denotaremos a árvore no instante $i > 0$ por T_i , o vértice selecionado no instante i por s_i e o vértice vizinho a s_i por t_i . Note que $T_1 = T$, i.e., no instante 1 a árvore T_1 é exatamente igual a árvore original T .

Os vértices vizinhos assumem papel fundamental na construção do código, pois eles compõem o código Prüfer. Por exemplo, para a árvore T , o código Prüfer é dado por $(t_1, t_2, t_3, \dots, t_{n-2})$. A questão principal é como escolher s_i . Esta escolha é fácil pois o vértice s_i corresponde sempre ao vértice folha de menor índice na árvore T_i . Os passos abaixo descrevem o processo de obtenção do código Prüfer:

1. No primeiro passo do cálculo do código, s_1 é o *vértice folha* com menor índice na árvore T .
2. Em seguida, identificamos seu vértice vizinho t_1 para ser o primeiro elemento do código Prüfer.
3. Removemos s_1 e sua aresta incidente em T_1 dando origem à árvore T_2 .

Nas demais iterações temos os seguintes passos. A cada instante i ,

1. O vértice s_i é determinado e seu vértice vizinho t_i passa a integrar a i -ésima posição do código Prüfer.
2. Em seguida, s_i é removido da árvore T_i , através da operação $T_i - s_i$, dando origem a uma nova árvore T_{i+1} .

Este processo pára após a execução da iteração $n - 2$, i.e., quando sobraem apenas dois vértices na árvore. Neste momento temos todos os vizinhos dos vértices selecionados e por conseguinte uma seqüência de tamanho $n - 2$ que corresponde ao código Prüfer.

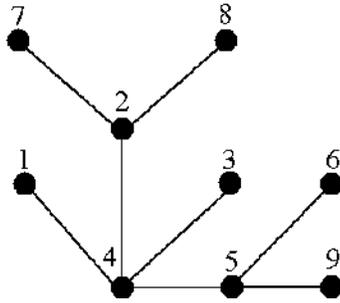


Figura 6.10: Árvore usada para o cálculo do código Prüfer.

Os passos realizados para obter o código Prüfer da árvore ilustrada na Figura 6.10 são mostrados na Tabela 6.1. Esta tabela mostra a árvore corrente T_i , através apenas de seus vértices, o vértice selecionado s_i e seu vértice vizinho t_i , e o código Prüfer corrente. Como a árvore possui 9 vértices, este processo tem apenas 7 iterações. Ao final da sétima iteração temos o código Prüfer para T . É importante enfatizar que este código permite distinguir a árvore das demais, i.e., nenhuma outra árvore de 9 vértices com os rótulos de 1 – 9 possui este código.

Iteração i	Árvore T_i	s_i	t_i	código Prüfer
1	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}	1	4	(4)
2	{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}	3	4	(4, 4)
3	{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9}	6	5	(4, 4, 5)
4	{2, 4, 5, 7, 8, 9}	7	2	(4, 4, 5, 2)
5	{2, 4, 5, 8, 9}	8	2	(4, 4, 5, 2, 2)
6	{2, 4, 5, 9}	2	4	(4, 4, 5, 2, 2, 4)
7	{4, 5, 9}	4	5	(4, 4, 5, 2, 2, 4, 5)

Tabela 6.1: Passos realizados para obter o código Prüfer da árvore na Figura 6.10

Existem alguns pontos interessantes no código que merecem destaque. Se analisarmos o código juntamente com sua árvore, veremos que cada vértice v

aparece no código $d(v) - 1$ vezes, onde $d(v)$ é o grau do vértice v . Isso ocorre por alguns motivos. Primeiro é importante enfatizar que os vértices folha são usados apenas para a seleção dos vértices que irão compor o código, os quais correspondem aos vértices internos da árvore. Cada vértice interno v possuirá no máximo $d(v) - 1$ folhas, o que fará com que este vértice apareça no código exatamente $d(v) - 1$ vezes. Quando todas as suas $d(v) - 1$ folhas forem removidas ele próprio se tornará folha. Neste momento, ele apenas contribuirá com o processo informando o seu vértice vizinho que irá compor o código.

A partir de um código Prüfer P , podemos recuperar a árvore associada da seguinte maneira. Primeiro, criamos um conjunto de vértices S que contenha todos os vértices da árvore que não aparecem no código P . Como para uma árvore com n vértices, temos sempre os rótulos de 1 a n , basta verificar quais rótulos não aparecem no código e adicioná-los a S . À cada iteração, o conjunto S sofrerá alterações na quantidade de seus elementos, por isso, usaremos o termo S_i para representar o conjunto S no instante i . No primeiro passo de iteração, quando $i = 1$, o conjunto S_1 contém todos os vértices originais de S . De forma análoga, temos o código intermediário P_i definido na iteração i , e quando $i = 1$, P_1 é exatamente igual ao código original P . Além deles, usamos os termos s_i , que corresponde ao elemento de menor rótulo do conjunto S_i , e o p_i que corresponde sempre ao primeiro elemento do código P_i , i.e, o elemento mais à esquerda de P_i . A partir destas informações, a recuperação da árvore associada ao código Prüfer é feita pelos seguintes passos:

1. No passo inicial, $i = 1$, selecionamos o vértice s_1 , de menor índice do conjunto S_1 , e o primeiro elemento p_1 do código P_1 para compor a primeira aresta $\{s_1, p_1\}$ da árvore que está sendo recuperada.
2. Em seguida, removemos s_1 de S_1 , gerando o conjunto S_2 , e o primeiro elemento p_1 de P_1 , gerando o código P_2 .

Os passos seguintes seguem a mesma lógica, porém com uma sutil diferença.

1. Na iteração i , selecionamos o vértice s_i do conjunto S_i e o primeiro elemento p_i do código P_i . Estes elementos irão compor a aresta $\{s_i, p_i\}$. Após isto, removemos s_i de S_i e o elemento p_i de P_i . Isto gerará o conjunto S_{i+1} e o código P_{i+1} .
2. **Se p_i não aparecer mais em P_{i+1} , então ele é adicionado a S_{i+1} .**

O processo pára quando o código P for completamente processado, i.e., ele não possuir mais elementos. Neste momento, existirão apenas dois elementos no conjunto S_i , os quais formarão a última aresta da árvore.

A partir do código Prüfer $P = (4, 4, 5, 2, 2, 4, 5)$, gerado anteriormente, a recuperação da árvore associada é dada através da seguinte seqüência de processamento mostrada na Tabela 6.2. Observe que na iteração 5, removemos o elemento 2 do código Prüfer corrente, P_5 . Como era a sua última aparição em P_5 , ele foi adicionado ao conjunto S_6 . O mesmo aconteceu com o elemento 4 na iteração 6 que foi adicionado ao conjunto S_7 . Todas as arestas geradas compõem o conjunto de arestas da árvore associada ao código Prüfer.

Iteração i	P_i	p_i	S_i	s_i	Aresta
1	(4, 4, 5, 2, 2, 4, 5)	4	{1, 3, 6, 7, 8, 9}	1	{1, 4}
2	(4, 5, 2, 2, 4, 5)	4	{3, 6, 7, 8, 9}	3	{3, 4}
3	(5, 2, 2, 4, 5)	5	{6, 7, 8, 9}	6	{5, 6}
4	(2, 2, 4, 5)	2	{7, 8, 9}	7	{2, 7}
5	(2, 4, 5)	2	{8, 9}	8	{2, 8}
6	(4, 5)	4	{2, 9}	2	{2, 4}
7	(5)	5	{4, 9}	4	{4, 5}
8	()		{5, 9}		{5, 9}

Tabela 6.2: Recuperação da árvore T a partir do código Prüfer

Como existe uma função bijetora entre a árvore e seu respectivo código Prüfer, cada permutação dos elementos do código levará a uma árvore distinta da original, porém mantendo a mesma seqüência de graus. Ou seja, as duas árvores possuem os mesmos vértices com os mesmos graus por vértice porém com conjuntos distintos de arestas, já que existirão conexões diferentes entre os vértices. Por exemplo, se considerarmos o código $P' = (2, 4, 5, 4, 2, 4, 5)$, que corresponde a uma permutação do código $P = (4, 4, 5, 2, 2, 4, 5)$, encontraremos uma árvore distinta da árvore mostrada na Figura 6.10. A árvore associada ao código P' , mostrada na Figura 6.11, é recuperada através dos seguintes passos, mostrados na Tabela 6.3

A partir deste resultado concluímos que : Dada uma seqüência de inteiros positivos d_1, d_2, \dots, d_n totalizando $2n - 2$, existem

$$\frac{(n-2)!}{\prod_{i=1}^n (d_i - 1)!}$$

Iteração i	P_i	p_i	S_i	s_i	Aresta
1	(2, 4, 5, 4, 2, 4, 5)	2	{1, 3, 6, 7, 8, 9}	1	{1, 2}
2	(4, 5, 4, 2, 4, 5)	4	{3, 6, 7, 8, 9}	3	{3, 4}
3	(5, 4, 2, 4, 5)	5	{6, 7, 8, 9}	6	{5, 6}
4	(4, 2, 4, 5)	4	{7, 8, 9}	7	{4, 7}
5	(2, 4, 5)	2	{8, 9}	8	{2, 8}
6	(4, 5)	4	{2, 9}	2	{4, 2}
7	(5)	5	{4, 9}	4	{4, 5}
8	()		{5, 9}	8	{5, 9}

Tabela 6.3: Recuperação da árvore associada ao código Prüfer $P' = (2, 4, 5, 4, 2, 4, 5)$.

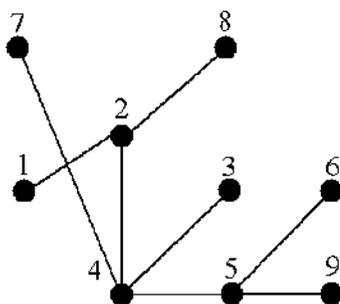


Figura 6.11: Árvore associada ao código Prüfer $P' = (2, 4, 5, 4, 2, 4, 5)$.

árvores que podem ser formadas a partir de um conjunto de n vértices tal que o grau do vértice i é d_i .

Vimos anteriormente que a partir de uma árvore $T = (V, A)$ com $|V| = n$, o código Prüfer P tem $n - 2$ elementos, onde cada vértice $v \in V$ aparecerá no código exatamente $d(v) - 1$ vezes. Como cada permutação dos elementos de P corresponde a uma árvore, teremos uma quantidade de árvores igual ao número de permutações dos elementos de P , dado por

$$\frac{(n - 2)!}{\prod_{i=1}^n (d(v_i) - 1)!}$$

Portanto, a partir dos vértices da árvore da Figura 6.10, temos a seqüência de graus 4, 3, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, onde o grau 4 está associado ao vértice 4, e o grau três está associado aos vértices 2 e 5. Portanto, o vértice 4 aparecerá três

vezes no código enquanto que os vértices 2 e 5 aparecerão duas vezes cada. Os demais vértices aparecerão zero vezes no código, pois correspondem a vértices folha. Usando esta informação, a quantidade de árvores que podemos gerar com os vértices, mantendo os graus definidos acima, é igual a

$$\frac{7!}{3!2!2!} = 210 \text{ árvores}$$

As Figuras 6.10 e 6.11 ilustram duas árvores das 210 árvores possíveis. De forma similar aos grafos, dígrafos possuem árvores de espalhamentos, porém elas são orientadas. Uma árvore T é chamada de espalhamento orientada de um dígrafo D , se o grafo subjacente de T é uma árvore de espalhamento do grafo subjacente de D . Basicamente, estamos eliminando a orientação tanto de T quanto de D para fazer esta verificação. Além disso, em dígrafos encontramos os conceitos de árvore orientada de espalhamento de entrada e árvore orientada de espalhamento de saída, também chamadas apenas de *árvore de espalhamento de entrada* e *árvore de espalhamento de saída*. Uma árvore T é uma árvore de espalhamento de entrada de um dígrafo D , denotada por T_s^- , se possuir apenas o vértice s como vértice sumidouro, i.e., com grau de saída $d^+(s) = 0$. De forma similar, T é uma árvore de espalhamento de saída de um dígrafo D , denotada por T_s^+ , se possuir apenas o vértice s como vértice fonte, i.e., com grau de entrada $d^-(s) = 0$. Neste último caso, esta árvore também é uma árvore enraizada tendo como raiz o vértice s . As Figuras 6.12(b)-(d) mostram exemplos de árvores de espalhamento associadas ao dígrafo em (a). A árvore em (b) é uma árvore de espalhamento de entrada com vértice sumidouro r , enquanto que a árvore em (c) é uma árvore de espalhamento de saída com vértice fonte s . Embora a árvore em (d) seja uma árvore de espalhamento, ela não é nem de entrada nem de saída.

**Árvore de
Espalhamento
de Entrada**
**Árvore de
Espalhamento
de Saída**

De forma similar ao Teorema 6.8, o seguinte Teorema permite calcular a quantidade de árvores de espalhamento de saída de um dado dígrafo.

Teorema 6.10 ([23]). Dados um dígrafo simples $D = (V, A)$ com $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, sua matriz de adjacência $L = [d_{i,j}]$, onde $d_{i,j} = 1$ se $(v_i, v_j) \in A$ e 0 se $(v_i, v_j) \notin A$, e sua matriz de graus de entrada $M = [m_{i,j}]$, onde $m_{i,i} = d^-(v_i)$ e $m_{i,j} = 0$, para $i \neq j$, o número de árvores de espalhamento de saída de D com raiz no vértice v_i é dado por

$$\mathcal{T}^+(D, v_i) = \det Q_i$$

onde Q_i é a matriz resultante da eliminação da linha i e coluna i da matriz $Q = M - L$.

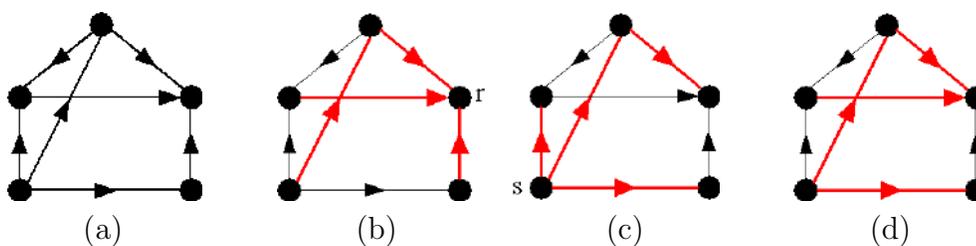


Figura 6.12: Exemplos de árvores orientadas de espalhamento do dígrafo ilustrado em (a). (b) e (c) correspondem às árvores de espalhamento de entrada e saída, respectivamente. (d) é uma árvore de espalhamento que não é nem de entrada nem de saída.

Para facilitar a visualização da aplicação deste teorema considere o dígrafo ilustrado na Figura 6.13(a).

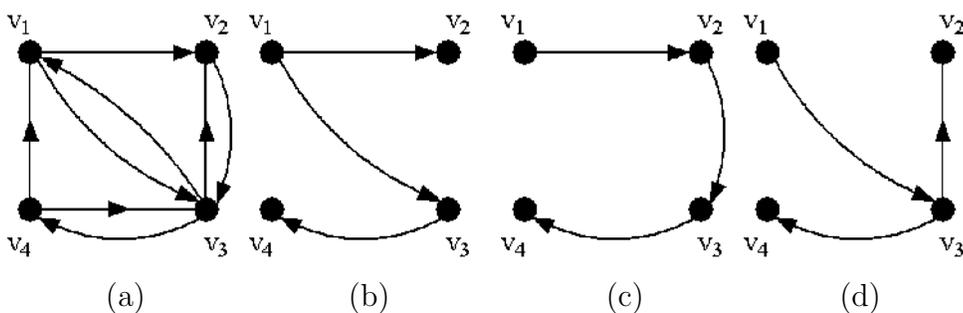


Figura 6.13: Exemplos de árvores de espalhamento de saída do dígrafo ilustrado em (a). (b)-(d) mostram as suas árvores de espalhamento de saída com raiz no vértice v_1 .

Inicialmente calculamos as matrizes de adjacência L e de graus M , as quais são mostradas abaixo.

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz Q resultante da subtração da matriz M pela matriz L é dada

This work is licensed under CC BY-NC-SA 4.0. To view a copy of this license, visit <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0>

por

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A quantidade de árvores de espalhamento de saída de D com raiz no vértice v_1 é dado

$$\mathcal{T}^+(D, v_1) = \det Q_1$$

onde Q_1 é a matriz resultante da eliminação da linha 1 e coluna 1, relativa ao elemento $q_{1,1}$, da matriz Q , i.e.,

$$\mathcal{T}^+(D, v_1) = \det \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

ou seja, o dígrafo D possui 3 árvores de espalhamento de saída com raiz no vértice v_1 , as quais são mostradas nas Figuras 6.13(b)-(d). O teorema seguinte permite calcular o número de árvores de espalhamento de entrada e saída de um multigrafo direcionado.

Teorema 6.11 ([23]). Dados um multigrafo direcionado $D = (V, A)$ com $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, sua matriz de adjacência $L = [d_{i,j}]$, onde $d_{i,j}$ é a quantidade de arcos que partem de v_i e atingem v_j , com $d_{i,i} = 0, \forall i$, e sua matriz de graus de entrada $M = [m_{i,j}]$, onde $m_{i,i} = d^-(v_i)$ e $m_{i,j} = 0$, para $i \neq j$, o número de árvores de espalhamento de saída de D com raiz no vértice v_i é dado por

$$\mathcal{T}^+(D, v_i) = \det Q_i$$

onde Q_i é a matriz resultante da eliminação da linha i e coluna i , relativos ao elemento $q_{i,i}$, da matriz $Q = M - L$. Considerando a matriz de graus de saída de D , como $N = [n_{i,j}]$, onde $n_{i,i} = d^+(v_i)$ e $n_{i,j} = 0$, para $i \neq j$, o número de árvores de espalhamento de entrada de D com sumidouro no vértice v_i é dado por

$$\mathcal{T}^-(D, v_i) = \det R_i$$

onde R_i é a matriz resultante da eliminação da linha i e coluna i , relativos ao elemento $r_{i,i}$, da matriz $R = N - L$.

6.4 Exercícios

Exercício 6.1. *Determine o número de vértices de uma árvore enraizada p -ária completa de altura h .*

Exercício 6.2. *Determine a altura h de uma árvore p -ária com l folhas.*

Exercício 6.3. *Determine o número de arestas de uma floresta que possui t árvores e n vértices.*

Exercício 6.4. *Mostre que se um grafo G é uma árvore com $\Delta(G) \geq k$, então G possui no mínimo k vértices folha.*

Exercício 6.5. *Mostre que toda árvore com exatamente dois vértices de grau 1 é um caminho.*

Exercício 6.6. *Determine o número de vértices internos e de folhas de uma árvore p -ária cheia.*

Exercício 6.7. *Determine o número de vértices e de folhas de uma árvore p -ária cheia com i vértices internos.*

Exercício 6.8. *Determine o número de vértices de uma árvore p -ária cheia com l folhas.*

Exercício 6.9. *Mostre que os vértices de origem e de destino do mais longo caminho em uma árvore possuem grau igual a 1.*

Exercício 6.10. *Determine o número de árvores de espalhamento que podemos gerar com o conjunto de vértices $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, onde os vértices possuem os seguintes graus $\{3, 1, 2, 1, 3, 1, 1\}$, dados em ordem. Em seguida, defina dois códigos Prüfer e desenhe suas respectivas árvores.*

Capítulo 7

Planaridade

Este capítulo apresenta os principais conceitos e teoremas relacionados à área de planaridade em teoria dos grafos. Uma das perguntas que tentaremos responder com este estudo é a seguinte : é possível desenhar um multigrafo em um plano de forma que suas arestas não se cruzem? Neste caso, como estamos focando nossa atenção ao desenho do grafo no plano de forma que o cruzamento das arestas não ocorra, podemos então levar os resultados que serão apresentados para o domínio dos multigrafos direcionados considerando sempre seu multigrafo subjacente, i.e., desconsiderando as orientações dos arcos.

7.1 Multigrafos Planares

Antes de definirmos o que é um multigrafo planar, vamos imaginar o seguinte problema: existem três companhias que devem abastecer com gás, eletricidade e água três prédios diferentes, os quais podem ou não estar em frente destas companhias, através de tubulações subterrâneas. Estas tubulações podem estar à mesma profundidade? Outro problema que poderíamos tentar responder é: dada uma representação lógica de um circuito na forma de um grafo, será que ela pode ser impressa em uma placa física de forma que as conexões entre os elementos do circuito não se cruzem? Responder a estas perguntas equivale a verificar se o grafo associado ao problema é planar ou não.

Definição 7.1. Um multigrafo $G = (V, A)$ é planar sse existe uma função de mapeamento f que mapeia G para o espaço R^2 de forma que a) cada

vértice seja mapeado para um ponto distinto de R^2 e b) cada aresta (u, v) seja mapeada para uma curva $C_{(u,v)}$ com extremidades em $f(u)$ e $f(v)$, onde nenhum par de curvas se intercepte, com exceção de suas extremidades.

Usando a definição supramencionada, temos que

Definição 7.2. Um multigrafo direcionado $D = (V, A)$ é planar sse seu multigrafo subjacente é planar.

Existem inúmeras funções que mapeiam os vértices e arestas de um multigrafo para pontos em R^2 de forma que as estas arestas não cruzem. Cada mapeamento define um desenho de G em R^2 . Os desenhos que obedecerem aos critérios definidos acima serão chamados de *realização gráfica planar* de G , ou simplesmente, *realização planar* de G . A Figura 7.1 mostra diferentes desenhos do $K_{3,2}$ no plano. Apenas as Figuras 7.1(b) e (c) são realizações planares. Note que é necessário apenas uma única realização planar para tornar um dado grafo planar.

Realização Planar

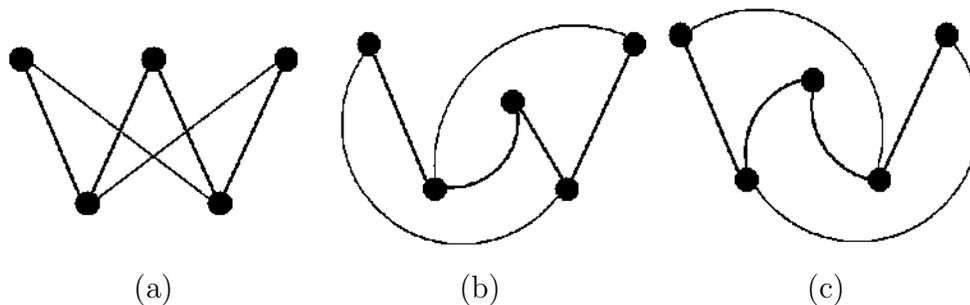


Figura 7.1: Grafo $K_{3,2}$ desenhado no plano. (b) e (c) correspondem a exemplos de realização planar de $K_{3,2}$.

Face de um Grafo

A realização planar de um dado multigrafo G divide o plano R^2 em um conjunto regiões maximais chamadas de *faces* de G , onde qualquer par de pontos dentro desta região pode ser conectada por uma curva sem interceptar G . É natural chamar cada curva da realização planar de aresta. Cada aresta faz fronteira com 1 ou 2 faces. A Figura 7.2 ilustra uma realização planar onde as arestas a e b são as únicas a fazerem fronteira com apenas uma única face. Note que a região cinza não é delimitada por uma face, porém ela faz fronteira com a realização planar. Devido a isso, ela é chamada ou de *face ilimitada* ou de *face externa* ao grafo. Assim, nesta realização planar temos

Face Externa ao Grafo

This work is licensed under CC BY-NC-SA 4.0. To view a copy of this license, visit <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0>

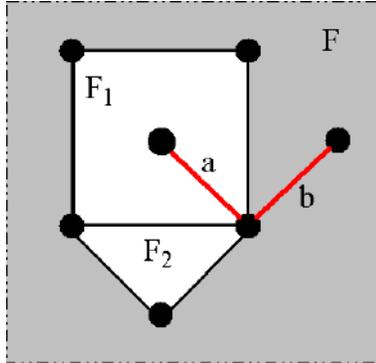


Figura 7.2: Exemplo de Grafo Planar

três faces F , F_1 e F_2 , onde a face F é a face externa ao grafo.

Cada face f possui um grau, denotado por $d(f)$ ¹ que é definido pela quantidade de arestas que estão na sua fronteira. Na realização planar ilustrada na Figura 7.2, as faces F , F_1 e F_2 possuem $d(F) = 7$, $d(F_1) = 6$ e $d(F_2) = 3$ graus, respectivamente. Uma aresta que está na fronteira de apenas uma face é contada duas vezes no cálculo do grau daquela face, por isso a face F tem grau igual a 7, enquanto que a face F_2 possui grau igual a 3. Se somarmos o grau de cada face de um dado grafo, veremos que cada aresta será contada exatamente duas vezes, ou seja, duas vezes ou pela mesma face ou uma vez por cada uma das faces que faz fronteira com a aresta. Assim temos o seguinte teorema,

Grau de uma Face

Teorema 7.1. Se $G = (V, A)$ é multigrafo planar então

$$\sum_{f \in F} d(f) = 2|A|,$$

onde F é o conjunto das faces da realização gráfica de G , incluindo a face externa a G .

A partir da realização planar de um grafo planar $G = (V, A)$ é possível encontrar um grafo geométrico dual, $G^* = (V^*, A^*)$ planar o qual é obtido da seguinte maneira. Cada face f de G , incluindo a face externa corresponderá a um vértice $v_f^* \in V^*$ em G^* . Dois vértices $v_f^*, v_h^* \in V^*$ serão adjacentes em G^* se as faces associadas a eles, f e h , compartilharem pelo menos uma

Grafo Geométrico Dual

¹Notação similar à usada para expressar o grau de um dado vértice.

aresta. Cada aresta $a \in A$ em G dará origem a uma aresta $a^* \in A^*$ que será incidente aos vértices em G^* cujas faces correspondentes em G compartilham a . Como o grau de cada face f é definido pelo número de arestas que estão em sua fronteira, o vértice v_f^* associado a esta face terá grau igual ao grau de f , i.e.,

$$d(f) = d(v_f^*)$$

A Figura 7.3(a) mostra a realização planar de um grafo planar G e o (b) grafo dual correspondente. Para facilitar a legibilidade da figura, cada aresta mostrada em (a) é apresentada com o mesmo rótulo em (b). De forma similar, cada face em (a) estará associada ao vértice de mesmo rótulo em (b). Neste exemplo, o grafo dual associado é um pseudo grafo já que a aresta a_1 em (a) faz fronteira apenas com a face F_1 . Como um grafo planar qualquer pode possuir várias realizações planares, então ele pode ter associado vários grafos geométricos duais, um grafo dual para cada uma de suas realizações planares. A Figura 7.4 mostra (a) outra realização planar do grafo G . Note que o (b) grafo geométrico dual correspondente é diferente daquele ilustrado na Figura 7.4(b).

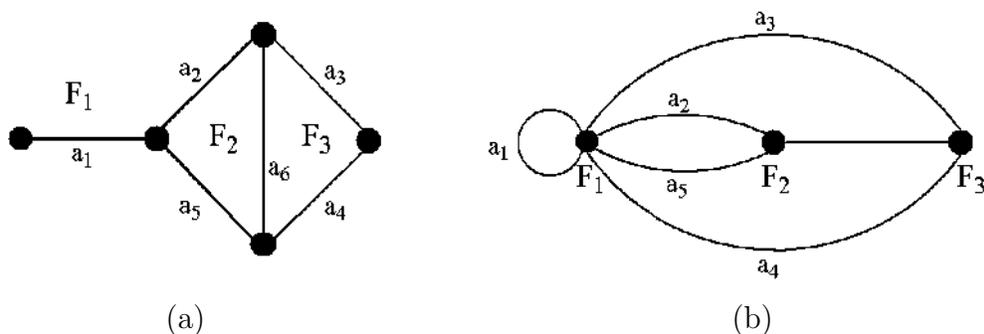


Figura 7.3: Exemplo de Grafo Geométrico Dual. (b) é o grafo geométrico dual da realização planar em (a).

7.2 Teorema de Euler

Euler propôs uma expressão simples que relaciona o número de vértices, arestas e faces de um grafo conexo. Embora esta expressão faça referência a grafos simples, ela é diretamente aplicada a multigrafos.

This work is licensed under CC BY-NC-SA 4.0. To view a copy of this license, visit <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0>

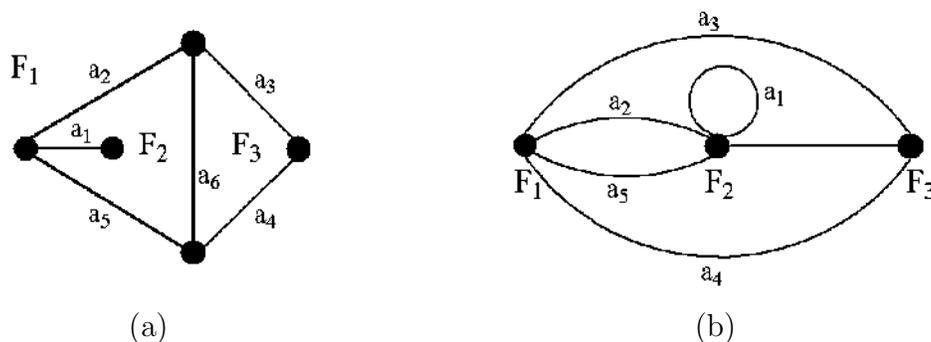


Figura 7.4: Exemplo de Grafo Geométrico Dual. (b) é o grafo geométrico dual da realização planar em (a).

Teorema 7.2 (Teorema de Euler - Grafos Conexos). Seja $G = (V, A)$ um grafo conexo planar com f faces e n vértices, i.e., $|V| = n$, e m arestas, i.e., $|A| = m$, então

$$n - m + f = 2$$

Para grafos desconexos com p componente conexos temos o seguinte teorema,

Teorema 7.3 (Teorema de Euler - Grafos Desconexos). Seja $G = (V, A)$ um grafo planar com p componentes conexos, f faces e n vértices, i.e., $|V| = n$, e m arestas, i.e. $|A| = m$, então

$$n - m + f = p + 1$$

Note que quando $p = 1$, o grafo é conexo, então temos a expressão definida no Teorema 7.2. A partir destes teoremas podemos concluir que qualquer realização planar de um dado grafo particionará o espaço R^2 na mesma quantidade de regiões,

Corolário 7.1. Todas as realizações planares de um multigrafo G planar conexo ou não têm o mesmo número de faces.

Além disso, usando os teoremas supracitados podemos encontrar expressões que relacionam o número de vértices ao de arestas de um dado

multigrafo sem fazer referência explícita ao número de faces. Inicialmente, vamos considerar um multigrafo conexo $G = (V, A)$ planar com $|V| \geq 3$ com faces delimitadas por exatamente 3 arestas. Um exemplo é ilustrado na Figura 7.5. Usando o Teorema 7.1 temos,

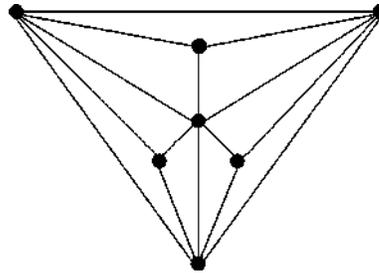


Figura 7.5: Exemplo de Grafo Planar com todas as faces com grau 3.

$$3f = 2m$$

onde f é o número de faces de G e $m = |A|$. Se em G , algumas faces tiverem grau maior que 3, sabemos que

$$3f \leq 2m$$

A partir do teorema de Euler para grafos conexos, temos

$$f = 2 - n + m$$

o que nos leva a

$$3(2 - n + m) \leq 2m$$

resultando na seguinte desigualdade

$$m \leq 3n - 6$$

Se usarmos esta desigualdade para testar a planaridade do grafo K_5 obteremos o seguinte resultado,

$$10 \leq 3 \cdot 5 - 6 \rightarrow 10 \leq 9.$$

o que é falso e mostra que K_5 não é planar. Note que K_5 possui 5 vértices e 10 arestas. Este resultado nos leva ao seguinte teorema.

This work is licensed under CC BY-NC-SA 4.0. To view a copy of this license, visit <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0>

Teorema 7.4. K_5 não é planar.

Entretanto esta desigualdade não se aplica ao grafo $K_{3,3}$. Como $K_{3,3}$ possui 6 vértices e 9 arestas, a desigualdade acima resultaria em

$$9 \leq 3 \cdot 6 - 6 \rightarrow 9 \leq 12$$

o que nos leva a uma conclusão errada, pois $K_{3,3}$ não é um grafo planar. Esta conclusão errada foi oriunda da desigualdade que aplicamos. Anteriormente assumimos que os grafos possuiriam faces delimitadas por no mínimo 3 arestas, porém o grafo $K_{3,3}$ não possui faces triangulares. Ele é um grafo bipartido e cada uma de suas faces é delimitada por no mínimo 4 arestas. Assim, a nossa desigualdade inicial deve ser alterada para considerar grafos com faces que tenham grau no mínimo igual a 4. Isso nos leva a

$$4f \leq 2m \rightarrow 2f \leq m$$

Novamente usando o teorema de Euler para grafos conexos, temos

$$f = 2 - n + m$$

o que nos leva a

$$2(2 - n + m) \leq m$$

resultando na seguinte desigualdade

$$m \leq 2n - 4$$

Realizando novamente o teste de planaridade do grafo $K_{3,3}$ com esta nova desigualdade, encontramos

$$9 \leq 2 \cdot 6 - 4 \rightarrow 9 \leq 8$$

Assim, chegamos ao seguinte teorema

Teorema 7.5. $K_{3,3}$ não é planar.

Um fato curioso é que os grafos K_n com $n \leq 4$ assim como os grafos $K_{p,q}$ com $p \leq 3$ e $q \leq 2$ são planares. Porém grafos K_n com $n \geq 5$ ou $K_{p,q}$, com $p, q \geq 3$ não são. Isso se deve ao fato de que K_n , com $n > 5$, contém um subgrafo K_5 enquanto que o grafo $K_{p,q}$ com $p, q \geq 3$ contém um subgrafo $K_{3,3}$.

7.3 Teorema de Kuratowski

Teorema 7.6 (Teorema de Kuratowski). Um grafo $G = (V, A)$ é planar sse não contém um subgrafo que pode ser contraído aos grafos K_5 ou $K_{3,3}$ através de sucessivas operações de arco-contracção.

Dado um grafo $G = (V, A)$, uma operação de arco-contracção em uma aresta $a = (v, u) \in A$ onde ou $d(v)$ ou $d(u)$ é 2, leva a um grafo isomórfico ao grafo reduzido a partir de G pela operação de supressão do vértice (ver Seção 2.2.8) de grau 2 que é extremidade de a (verifique!). Esta conclusão leva ao seguinte teorema

Teorema 7.7 (Teorema de Kuratowski). Um grafo $G = (V, A)$ é planar sse não contém um subgrafo homeomorfo a K_5 ou $K_{3,3}$.

Dois grafos H_1 e H_2 são homeomorfos se eles podem ser obtidos a partir de um grafo G através de sucessivas operações de subdivisão e supressão (ver Seção 2.2.8). Note que a operação de subdivisão é a operação inversa da operação de supressão. A Figura 7.6(a) mostra o grafo de Petersen com as arestas $a-e$ em destaque. Se aplicarmos a operação de arco-contracção nestas arestas, obteremos o grafo K_5 . Logo, o grafo de Petersen não é planar. A Figura 7.6(b) ilustra outro exemplo de grafo não planar. Se realizarmos operações de arco-contracção nas arestas $a-d$ obteremos o grafo $K_{3,3}$. Note que o resultado seria o mesmo se tivéssemos realizado a operação de supressão dos vértices em cinza.

7.4 Exercícios

Exercício 7.1. *Mostre que se $G = (V, A)$ é um grafo planar conexo onde cada face de G é um t -círculo então*

$$m = \frac{t(n-2)}{(t-2)}$$

onde $n = |V|$ e $m = |A|$.

Exercício 7.2. *Mostre que se todas as faces de uma realização planar de um grafo planar G têm grau par então o grafo geométrico dual G^* correspondente será euleriano.*

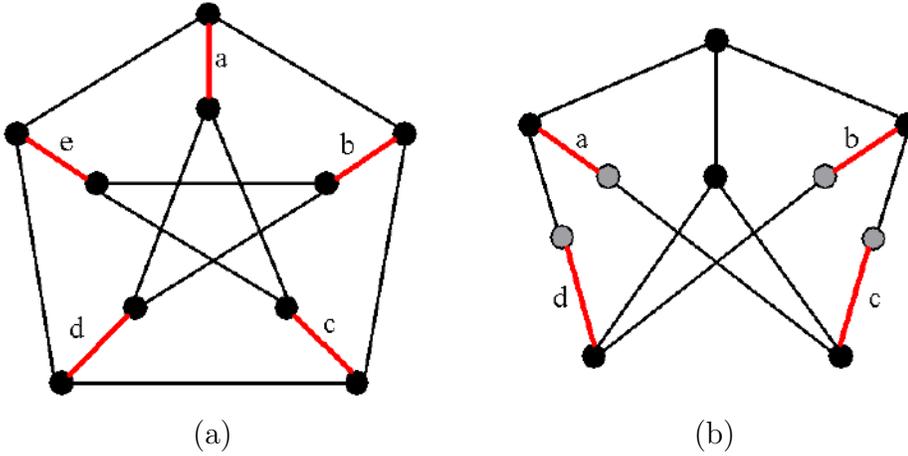


Figura 7.6: Exemplos de grafos não planares.

Exercício 7.3. Mostre que se $G = (V, A)$ um grafo planar com p componentes conexos, f faces e n vértices, i.e., $|V| = n$ e m arestas, i.e. $|A| = m$, então

$$n - m + f = p + 1$$

Exercício 7.4. Mostre que qualquer árvore T com $n \geq 1$ vértices possui uma única realização planar.

Exercício 7.5. Mostre que o grafo obtido a partir da remoção de uma aresta qualquer do grafo $K_{3,3}$ é um grafo planar

Exercício 7.6. Mostre que o grafo obtido a partir da remoção de uma aresta qualquer do grafo K_5 é um grafo planar

Exercício 7.7. Mostre que se todos os ciclos de um grafo conexo planar $G = (V, A)$ possuírem pelo menos k arestas então

$$|A| \leq \frac{k}{k-2}(|V| - 2)$$

a seguinte o grafo obtido a partir da remoção de uma aresta qualquer do grafo K_5 é um grafo planar

Exercício 7.8. Mostre que todo grafo roda W_n é isomórfico ao seu grafo geométrico dual.

Capítulo 8

Coloração

Este capítulo discute os principais conceitos relacionados aos problemas de coloração de grafos. Algumas das perguntas que tentaremos responder são se dado um grafo G é possível ou não colorir seus vértices com uma quantidade limitada de cores de forma que cada vértice adjacente tenha uma cor diferente; ou a partir de um grafo G , a quantidade de maneiras que podemos colorir as arestas de G de forma que arestas incidentes em um mesmo vértice tenham cores diferentes. Respostas a estas perguntas são importantes em diversos problemas combinatórios. Um exemplo clássico é o seguinte: imagine que devemos reunir pessoas para participarem de um ou mais comitês de avaliação em uma determinada conferência. Qual deve ser o escalonamento de horários para o encontro dos membros destes comitês para permitir que todos os membros participem de todas as atividades realizadas por seus respectivos comitês?

8.1 Grafos Coloríveis

Embora o problema de coloração de grafos seja abstrato, as cores usadas para colorir um grafo podem ter inúmeros significados. Elas podem representar diferentes tipos de informação como horários, recursos, atividades, entre outros. Para o problema de escalonamento mencionado anteriormente, temos que inicialmente modelar as instâncias do problema como um grafo. Cada comitê corresponderá a um vértice no grafo, e dois vértices serão adjacentes se os comitês correspondentes possuírem pessoas em comum. A Figura 8.1(a) mostra uma instância deste problema. Nela existem 9 comitês

e cada um deles está associado a um vértice do grafo. Pessoas que participam de múltiplos comitês impõem restrições que são representadas pelas arestas deste grafo. Por exemplo, a aresta entre os vértices 1 e 2 indica que existe pelo menos uma pessoa que participa de ambos os comitês. O mesmo acontece, por exemplo, na aresta entre os comitês 5 e 4. Os triângulos existentes no grafo podem estar indicando que uma ou mais pessoas participam dos três comitês associados aos vértices destes triângulos. Este é o caso do triângulo formado pelos vértices 5, 4 e 9.

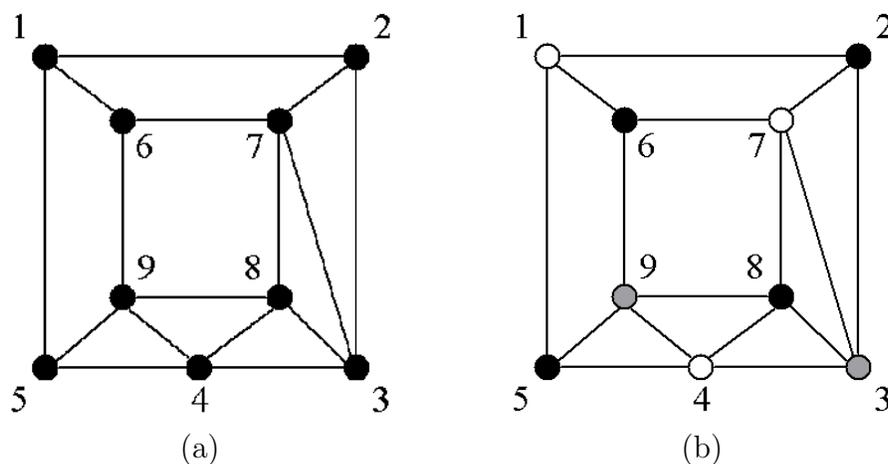


Figura 8.1: Exemplo de Coloração. (b) é uma possível coloração dos vértices do grafo em (a).

A partir deste grafo devemos colorir seus vértices. Cada cor estará associado a um horário específico. A solução mais direta seria atribuir um horário para cada vértice, porém não seria a melhor solução possível. Cada horário pode implicar em custos. Assim concentrar os encontros dos comitês, fazendo com que alguns sejam realizados em sessões paralelas, fará com que a quantidade de horários usados seja menor impactando possivelmente a logística do evento. Como dito, as arestas impõem restrições ao nosso problema. Por exemplo, a aresta entre os vértices 1 e 2 informa que pelo menos uma pessoa participa destes dois comitês. Assim eles devem ser reunidos em horários diferentes. Note que este não é o caso para os comitês 5 e 6 ou 9 e 3. Portanto, uma possível coloração do grafo ilustrado na Figura 8.1(a) é mostrada em (b). Note que foram usadas apenas 3 cores, ou seja, 3 horários diferentes é o suficiente para que todos os comitês consigam se reunir de forma que cada

participante participe das reuniões dos seus respectivos comitês. Na solução mais direta, a resposta seria 9 horários.

Então, os vértices deste grafo poderiam ser coloridos com no mínimo 3 e no máximo 9 cores diferentes. Existem inúmeras maneiras de associarmos as cores aos vértices de forma que vértices adjacentes tenham cores diferentes. A Figura 8.1(b) mostra apenas um exemplo

Definição 8.1. Uma k -coloração de um grafo $G = (V, A)$ é uma função de rotulamento $f : V \rightarrow S$, onde S correspondem a um conjunto de cores e $|S| = k$. Os vértices associados a uma cor formam uma classe de cores.

Definição 8.2. Uma k -coloração é *própria* se os vértices adjacentes de um grafo tiverem rótulos (cores) diferentes. Um grafo é k -colorível se ele tem uma k -coloração própria. O número cromático $\chi(G)$ é o menor k tal que G é k -colorível.

Em uma coloração própria, cada classe de cores corresponde a um conjunto independente. Na Figura 8.1(b), podemos notar que os vértices 2,5,6 e 8 não são adjacentes entre si e por isso possuem a mesma cor. Logo se um dado grafo G é k -colorível, então seu conjunto de vértices está sendo particionado em k conjuntos independentes.

Note que o fato de um grafo ser k -colorível não implica que ele seja um grafo k -partido. Como vimos na Seção 4.2, para que um grafo seja k -partido, ele deve obedecer a alguns critérios, entre eles aquele que define que k é o menor número de particionamentos dos vértices do grafo de forma que cada partição corresponda a um conjunto independente. Essa restrição é importante, caso contrário teríamos classificações problemáticas. Por exemplo, qualquer grafo com n vértices pode ser colorido propriamente com n cores, entretanto isso não o torna n -partido. Um grafo ciclo C_n , com n par, é um grafo bipartido e pode ser colorido propriamente com n cores diferentes, porém sabemos que $\chi(C_n) = 2$ para n par. Note que como as definições acima focam na adjacência e coloração dos vértices, elas são diretamente aplicadas a multigrafos, porém não a pseudografos. Pseudografos permitem laços e por isso não são coloríveis.

Apesar de termos destacado que um grafo k -colorível não implica que ele seja um grafo k -partido, temos que um grafo G com número cromático $\chi(G) = k$ implica que o grafo seja k -partido. Neste caso, $\chi(G)$ define a menor quantidade de cores que podemos usar para colorir um grafo propriamente, e conseqüentemente o menor particionamento dos vértices de G de forma que cada partição corresponda a um conjunto independente. Assim temos que

k -coloração

Número Cromático

Grafo k -colorível
x Grafo k -partido

Multigrafos x
Coloração

Pseudografos x
Coloração

Teorema 8.1. Um grafo G é k -partido sse seu número cromático for igual a k , i.e., $\chi(G) = k$.

A Figura 8.2 ilustra uma possível coloração para o grafo de Petersen. Este grafo é 3-partido logo seu número cromático é 3. Se olharmos apenas os ciclos destacados nesta figura veremos que eles possuem uma quantidade ímpar de vértices, e devido a isto necessitam de 3 cores para serem coloridos propriamente.

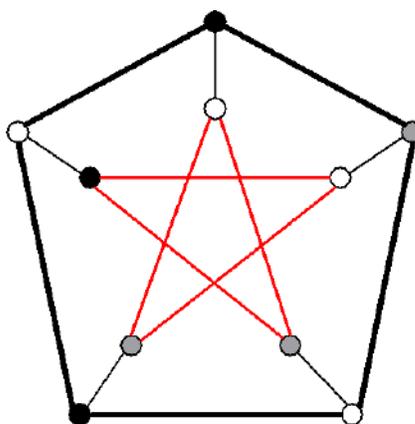


Figura 8.2: Exemplo de Coloração - Grafo de Petersen.

Analisando as propriedades e características de cada grafo podemos derivar algumas relações envolvendo o número cromático. Por exemplo, a principal característica de um grafo colorido propriamente é que seus vértices adjacentes devem ter cores diferentes. Baseado nisto, qual seria a relação entre o número cromático e o grau dos vértices de um dado grafo? Considerando um grafo simples $G = (V, A)$ com n vértices, saberemos que o grau de qualquer vértice estará no seguinte intervalo,

$$0 \leq d(v) \leq n - 1$$

o que indica que um dado vértice v pode ter nenhum vizinho ou ser vizinho de todos os outros vértices no grafo. O primeiro caso pode ser facilmente ilustrado por um grafo totalmente desconexo, enquanto que o último por um grafo totalmente conexo. No primeiro caso, a quantidade mínima de cores para colorir propriamente este grafo é igual a 1. Enquanto que no último, a quantidade seria igual a quantidade de vizinhos de v , já que cada vértice

é adjacente aos demais, mais uma unidade, que seria a cor atribuída a v . Assim, temos o seguinte teorema.

Teorema 8.2. Para qualquer grafo G , o número cromático $\chi(G)$ é no máximo uma unidade a mais que o maior grau, $\Delta(G)$, de G , ou seja, $\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$.

Continuando, qual seria a relação de um clique com o número cromático de um grafo? Um clique é um subgrafo completo maximal, i.e., é um subgrafo onde cada vértice é adjacente aos demais. Assim se um grafo possui um clique de tamanho 4, ele precisará de pelo menos 4 para ser colorido propriamente. Como um grafo pode possuir inúmeros cliques, convém relacionar o número cromático do grafo com o tamanho do maior clique. Portanto,

Número Cromático Clique **x**

Teorema 8.3. Para qualquer grafo $G = (V, A)$, $\chi(G) \geq \omega(G)$ onde $\omega(G)$ é o número de clique¹ de G ;

A Figura 8.1(a) mostra um exemplo onde o maior clique tem tamanho 3 dado pelo subgrafo que forma um triângulo. Na Figura 8.2, temos o grafo de Petersen com dois ciclos C_5 que não compartilham arestas. Focando nossa atenção apenas para um dos ciclos veremos que o maior clique é definido por qualquer uma das arestas, ou seja, o maior clique terá tamanho igual a 2. Porém como o ciclo tem comprimento ímpar, ele será colorido propriamente com no mínimo 3 cores.

Em relação aos conjuntos independentes, qual seria sua relação com o número cromático? Sabemos que particionando os vértices de um grafo em conjuntos independentes encontraremos a quantidade de cores que podemos colorir propriamente os vértices do grafo. Neste caso, cada cor distinta será atribuída a cada conjunto independente. Considere que tenhamos um grafo $G = (V, A)$ e queiramos saber aproximadamente a quantidade de conjuntos independentes que ele possui, tendo como uma única informação o tamanho do maior conjunto independente. Se o maior conjunto independente tem tamanho $\alpha(G)$ e este grafo possui n vértices, i.e., $|V| = n$, então podemos assumir alguns cenários. O primeiro é que todos os conjuntos independentes têm o mesmo tamanho, o qual é igual a $\alpha(G)$, assim a quantidade de conjuntos independentes de G será igual a $|V|/\alpha(G)$. Esse é o caso de grafos k -partidos completos com conjuntos independentes de mesmo tamanho.

Número Cromático Conjunto Independente **x**

¹Número de clique é definido na Seção 4.1 e corresponde ao tamanho do maior clique de um grafo.

Porém, sabemos que esta situação ideal é bem específica e é bem provável que existam mais conjuntos independentes com tamanhos inferiores à $\alpha(G)$. Um exemplo direto é o grafo ciclo C_5 , destacado em vermelho na Figura 8.2. O tamanho do maior conjunto independente é igual a 2 e qualquer particionamento dos vértices em conjuntos independentes resultará em 3 conjuntos independentes maximais. A partir desta análise, temos o seguinte teorema como resultado.

Teorema 8.4. Para qualquer grafo $G = (V, A)$, $\chi(G) \geq |V|/\alpha(G)$, onde $\alpha(G)$ é o número de independência² de G .

8.2 Grafos Aresta-Coloríveis

Até o presente momento discutimos a coloração de vértices de um grafo. Porém, existem inúmeros problemas do mundo real que focam na coloração das arestas. De forma similar à coloração de vértices, as cores associadas às arestas podem possuir inúmeros significados, como capacidade, tempo, energia, etc. Abaixo temos algumas definições que são muito parecidas com aquelas apresentadas na seção anterior.

k -coloração de aresta

Definição 8.3. Uma k -coloração de aresta de um grafo $G = (V, A)$ é uma função de rotulamento $f : A \rightarrow S$, onde S correspondem a um conjunto de cores e $|S| = k$. As arestas de uma mesma cor formam uma classe de cores.

Número Cromático de Aresta

Definição 8.4. Uma k -coloração de arestas é *própria* se arestas incidentes em um mesmo vértice de um grafo tiverem rótulos (cores) diferentes. Um grafo é k -aresta colorível se ele tem uma k -coloração própria de arestas. O número cromático de aresta $\chi'(G)$ é o menor k tal que G é k -aresta colorível. Este número também é chamado de *índice cromático*.

k -coloração própria de arestas x emparelhamento

Cada conjunto de arestas que possuem a mesma cor em uma k -coloração própria de arestas é formado por arestas que não compartilham vértices entre si. Isso nos leva a relacionar este conjunto ao conceito que vimos anteriormente sobre *emparelhamento* na Seção 4.5, já que um emparelhamento de um grafo G é um conjunto de arestas que não compartilham vértices entre si. Como em uma k -coloração própria de arestas, arestas incidentes em um

²Número de independência é definido na Seção 4.2 e corresponde ao tamanho do maior conjunto independente de um grafo.

mesmo vértice devem ser coloridas com cores diferentes, podemos concluir diretamente que para qualquer grafo $G = (V, A)$, $\chi'(G) \geq \Delta(G)$. Os teoremas abaixo definem mais precisamente a relação entre $\chi'(G)$ e $\Delta(G)$.

Teorema 8.5 ([24]). Se G é um grafo bipartido, então $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Teorema 8.6 ([25]). Se G é um grafo simples, então $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Teorema 8.7 ([26]). Se $G = (V, A)$ é multigrafo então $\chi'(G) \leq \Delta(G) + \mu(G)$, onde $\mu(G)$ é a multiplicidade máxima de aresta, i.e., $\mu(G) = \max_{a \in A} \mu(a)$ ³.

8.3 Polinômio Cromático

A partir de um conjunto de cores disponíveis é possível determinar a quantidade de maneiras que um grafo pode ser colorido propriamente. Por exemplo, se tivermos disponível um conjunto de cores S de tamanho k , a quantidade de maneiras que podemos colorir um vértice é igual a k . Se um grafo $G = (V, A)$ é totalmente desconexo e tivermos que colorir seus vértices com as cores deste conjunto, G poderá ser colorido de k^n maneiras diferentes, onde $|V| = n$. Ou seja, como para cada vértice temos k possibilidades e temos n vértices, então a quantidade de maneiras é definida como

$$\underbrace{k.k.k \dots k}_{n \text{ vezes}} = k^n$$

Esta expressão relaciona o número de vértices com o número de cores disponível na forma de um polinômio. Para um grafo mais geral, temos que

Definição 8.5. Dado $k \in N$, onde N é o conjunto dos números naturais, e um grafo $G = (V, A)$, $\chi(G; k)$ é o número de maneiras que podemos colorir propriamente G com um conjunto $S = \{1, 2, \dots, k\}$ de cores de forma que nem sempre todas as cores sejam usadas pela função $f : V \rightarrow S$.

A função $\chi(G; k)$ também é chamada de *polinômio cromático* de G quando é definida em função de k . No caso do grafo desconexo com n vértices ilustrado anteriormente, temos

$$\chi(\bar{K}_n; k) = k^n$$

³O conceito multiplicidade de aresta é definido na Seção 1.1.

Quando $k < \chi(G)$ então $\chi(G; k) = 0$, i.e., a quantidade de cores disponíveis para colorir propriamente o grafo é menor que seu número cromático. Porém, se $k \geq \chi(G)$ então $\chi(G; k) > 0$.

Como exemplo, vamos considerar que existam k cores disponíveis no conjunto S , i.e., $|S| = k$, para colorir o grafo G_1 ilustrado na Figura 8.3(a). Para determinar o polinômio cromático $\chi(G_1; k)$ temos que saber a quantidade de maneiras que temos para colorir cada um dos vértices de G_1 . Neste exemplo, o vértice a pode ser colorido por qualquer uma das k cores. Porém, o vértice b só pode ser colorido por $k - 1$ cores, já que uma das cores do conjunto S já foi atribuída ao vértice a . Como o vértice c é adjacente apenas ao vértice b , podemos considerar que existem disponíveis $k - 1$ cores já que uma das cores de S foi atribuída ao vértice b . Assim, multiplicando estes resultados temos o seguinte polinômio cromático

$$\chi(G_1, k) = k(k - 1)(k - 1) = k(k - 1)^2.$$

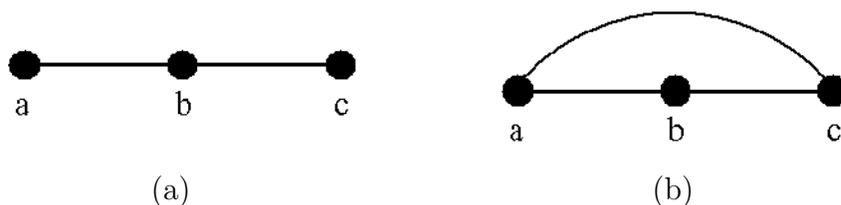


Figura 8.3: Coloração de Grafos. (a) árvore com 3 vértices. (b) grafo completo K_3 .

Por outro lado, o grafo G_2 , ilustrado na Figura 8.3(b), é um grafo completo K_3 . De forma similar ao processo feito anteriormente, podemos começar determinando a quantidade de cores que podemos associar ao vértice a . Como ainda não atribuímos nenhuma cor a qualquer vértice, o vértice a pode ser colorido por qualquer uma das k cores, enquanto que o vértice b só pode ser colorido por $k - 1$ cores, já que uma das cores do conjunto S já foi atribuída ao vértice a . Porém para o vértice c , temos uma pequena mudança em relação à solução anterior. O vértice c é adjacente agora aos vértices a e b , e já associamos uma cor a cada um destes vértices. Então temos agora apenas $k - 2$ cores disponíveis. Assim, multiplicando estes resultados temos o seguinte polinômio cromático

$$\chi(G_2; k) = k(k - 1)(k - 2) = k^3 - 3k^2 + 2k.$$

Generalizando este último resultado para grafos completos com n vértices, K_n , temos

$$\chi(K_n, k) = k \cdot (k - 1) \cdot (k - 2) \dots (k - n + 1),$$

ou seja,

$$\chi(K_n; k) = \binom{k}{n} n!$$

Teorema 8.8. Se $T = (V, A)$ é uma árvore com n vértices, $|V| = n$, e k é o número de cores disponíveis, $k \in \mathbb{N}$, então

$$\chi(T; k) = k(k - 1)^{n-1}.$$

Considere a árvore ilustrada na Figura 8.4 e um conjunto S , com $|S| = k$ e $k \geq 2$. Escolhemos inicialmente qualquer vértice. Para facilitar a aplicação do teorema acima, iremos escolher o vértice a . Este vértice pode ser colorido com qualquer uma das k cores disponíveis. Os demais vértices serão coloridos tendo como base este vértice inicial. Assim, o vértice b por sua vez pode ser colorido com qualquer uma das $k - 1$ cores restantes disponíveis, já que uma das cores de S já foi atribuída ao vértice a . Seguindo a ordem, o vértice c pode ser colorido com também $k - 1$ cores, pois ele é adjacente apenas ao vértice b , então ele pode repetir a cor do vértice a porém não pode usar a cor atribuída ao vértice b . Seguindo este raciocínio, os demais vértices poderão ser coloridos com $k - 1$ cores, e portanto, o polinômio cromático para a árvore T com 9 vértices, considerando $|S| = k$ é

$$\chi(T; k) = k(k - 1)^8.$$

Uma das maneiras para calcular o polinômio cromático de um grafo genérico é através da seguinte *equação de recorrência cromática*,

**Equação de
Recorrência
Cromática**

Teorema 8.9. Se $G = (V, A)$ é um grafo simples e $a \in A$ então

$$\chi(G; k) = \chi(G - a; k) - \chi(G/a; k).$$

Esta equação indica que o polinômio cromático de um grafo genérico G pode ser encontrado considerando o polinômio cromático de G sem uma dada aresta a subtraído do polinômio cromático do grafo resultante da operação de arco contração da aresta a de G . Note que uma aresta $a = \{u, v\}$ impõe uma

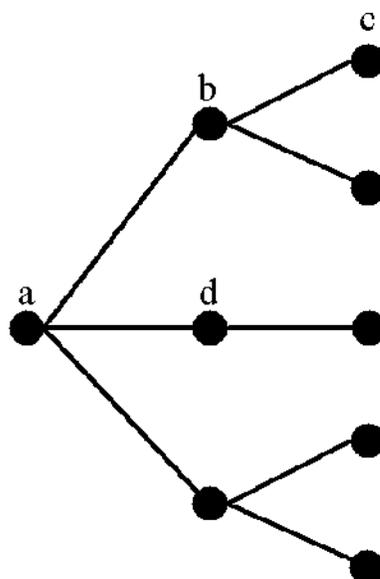


Figura 8.4: Coloração de Árvores.

restrição às possibilidades de cores que podem ser atribuídas aos vértices u e v . A operação $G - a$ leva a um grafo onde os vértices u e v podem assumir quaisquer cores inclusive a mesma cor. A operação G/a , como definida anteriormente na Seção 2.2.7, contrai a aresta a unindo os vértices u e v . No cálculo do polinômio cromático, a intenção é fazer como que u e v tenham a mesma cor. Assim, neste cálculo temos $\chi(G - a; k)$ como o polinômio cromático onde u e v podem ter a mesma cor, o que não é permitido em G , pela própria presença de a , e o $\chi(G/a; k)$ como o polinômio cromático onde u e v possuem a mesma cor. Embora a expressão recursiva definida pelo teorema possa ser trabalhosa para grafos genéricos, ela facilita a obtenção do polinômio cromático de maneira mais sistemática.

O exemplo seguinte mostrará a aplicação da equação de recorrência cromática. Considere o grafo G ilustrado na Figura 8.5(a). Selecionando a aresta a em vermelho e calculando $G - a$ e G/a obtemos os grafos ilustrados em (b) e (c). Embora o resultado em (c) seja um multigrafo, como comentando anteriormente, podemos desconsiderar as múltiplas arestas entre um mesmo par de vértices e focar nossa atenção a apenas na adjacência entre os vértices. Neste caso, o grafo em (c) seria visto como uma árvore e portanto

$$\chi(G/a) = k(k - 1)^2.$$

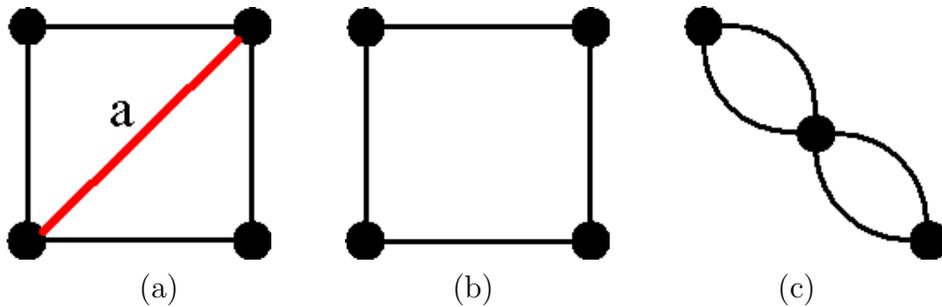


Figura 8.5: Aplicação do equação de recorrência cromática no grafo G em (a) resultado inicialmente nos grafos (b) $G - a$ e (c) G/a .

O grafo ilustrado na Figura 8.5 (b) é um ciclo C_4 e o seu polinômio cromático é obtido usando novamente a equação definida no Teorema 8.9. O cálculo de $\chi(C_4; k)$ é feito selecionando uma aresta, por exemplo, a aresta b como mostrado na Figura 8.6(a). Isso nos leva, a

$$\chi(C_4; k) = \chi(C_4 - b; k) - \chi(C_4/b; k).$$

Os grafos $C_4 - b$ quanto C_4/b são ilustrados respectivamente em (b) e (c). Como $C_4 - b$ é um caminho de comprimento 3, seu polinômio cromático é igual a

$$\chi(C_4 - b; k) = k(k - 1)^3.$$

Por outro lado, C_4/b é um grafo completo K_3 e polinômio cromático é

$$\chi(C_4/b; k) = k(k - 1)(k - 2).$$

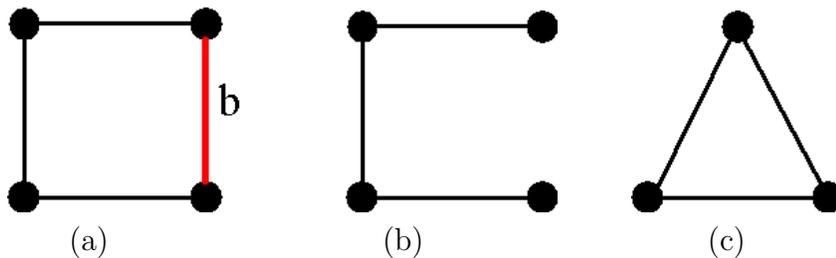


Figura 8.6: Aplicação do equação de recorrência cromática no grafo G em (a) resultado inicialmente nos grafos (b) $G - a$ e (c) G/a .

A partir destes resultados intermediários, temos

$$\chi(C_4; k) = k(k - 1)^3 - k(k - 1)(k - 2)$$

Substituindo este resultado

$$\chi(C_4; k) = k(k-1)(k^2 - 3k + 3)$$

Combinando estes resultados, temos

$$\chi(G; k) = k(k-1)(k^2 - 3k + 3) - k(k-1)^2$$

$$\chi(G; k) = k(k-1)(k^2 - 4k + 4)$$

que corresponde ao polinômio cromático do grafo ilustrado na Figura 8.5(a).

8.4 O teorema das quatro cores

O teorema das quatro cores foi inicialmente posto como uma conjectura em 1850, e provado mais tarde em 1976 por Appel e Haken. Anterior a esta prova, muitas soluções incorretas foram propostas, em geral, muito difíceis de serem contestadas. Alguns afirmam que a prova mais notória é aquela publicada em 1879 por Alfred Kempe. A prova elaborada por Kempe foi aceita como válida até 1890, quando Heawood encontrou um erro que tornava os argumentos de Kempe incompletos. Mesmo possuindo falhas a solução de Kempe foi a base para a proposta de Appel e Haken. A prova proposta por Appel e Haken foi muito controversa pois ela realizou uma análise minuciosa de inúmeros tipos de grafos um a um com o auxílio de um computador. A controvérsia decorreu do uso do computador. Alguns argumentavam que poderia existir um erro no programa usado para realizar os testes o que poderia levar a um resultado errado.

O teorema como enunciado abaixo pode ser aplicado apenas a grafos planares. A Figura 8.7 mostra um exemplo de grafo planar colorido com apenas 4 cores. Grafos não planares podem ter números cromáticos arbitrários.

Teorema 8.10. O número cromático $\chi(G)$ para um grafo planar G é no máximo igual a 4.

O problema das quatro cores está intimamente relacionado ao problema de coloração de mapas. Se considerarmos cada região do mapa como uma face de um grafo planar, conseguiremos extrair um grafo geométrico dual o qual é planar, onde cada uma destas regiões está associada a um vértice

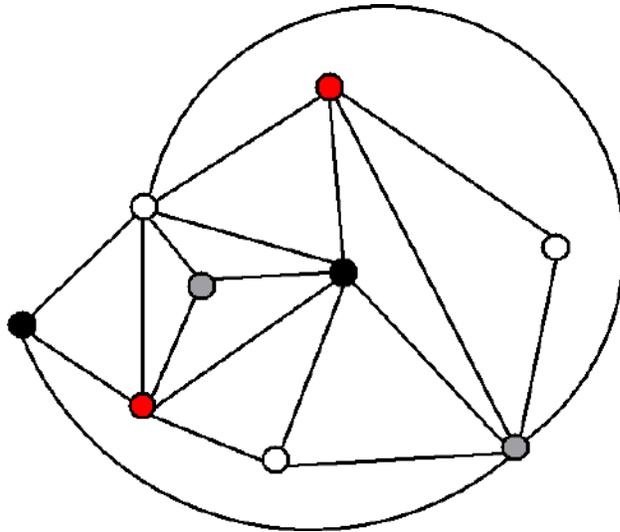


Figura 8.7: Grafo planar colorido com 4 cores.

no grafo dual. Como o grafo dual é planar, pelo Teorema 8.10, os vértices deste grafo podem ser coloridos propriamente com no máximo 4 cores. Por conseguinte, as regiões do mapa também poderão ser coloridas propriamente com no máximo 4 cores. Note que o grafo dual resultante não será um pseudografo, i.e., ele não possuirá laços, pois não existirão no mapa uma aresta fazendo fronteira com apenas uma única face, como nos exemplos ilustrados nas Figuras 7.3 e 7.4.

8.5 Exercícios

Exercício 8.1. Prove que $\chi(G) = \Delta(G) + 1$ sse G é ou um grafo completo ou um ciclo de comprimento ímpar

Exercício 8.2. Mostre que se G contém exatamente um ciclo de comprimento ímpar então $\chi(G) = 3$

Exercício 8.3. Mostre que para um grafo simples G , se $\chi(G) = 2$ então G é bipartido

Exercício 8.4. Qual é o número cromático de um grafo $K_{m,n,p}$?

Exercício 8.5. Dê exemplo de grafos que possuem número cromático igual a 1.

Exercício 8.6. O que podemos dizer sobre um grafo que possui um subgrafo isomórfico a K_n ?

Exercício 8.7. Mostre que qualquer grafo G com cintura $g(G) = 2p$, para $p \in \mathbb{N}$ tem $\chi(G) \geq 3$.

Exercício 8.8. Dados os grafos abaixo

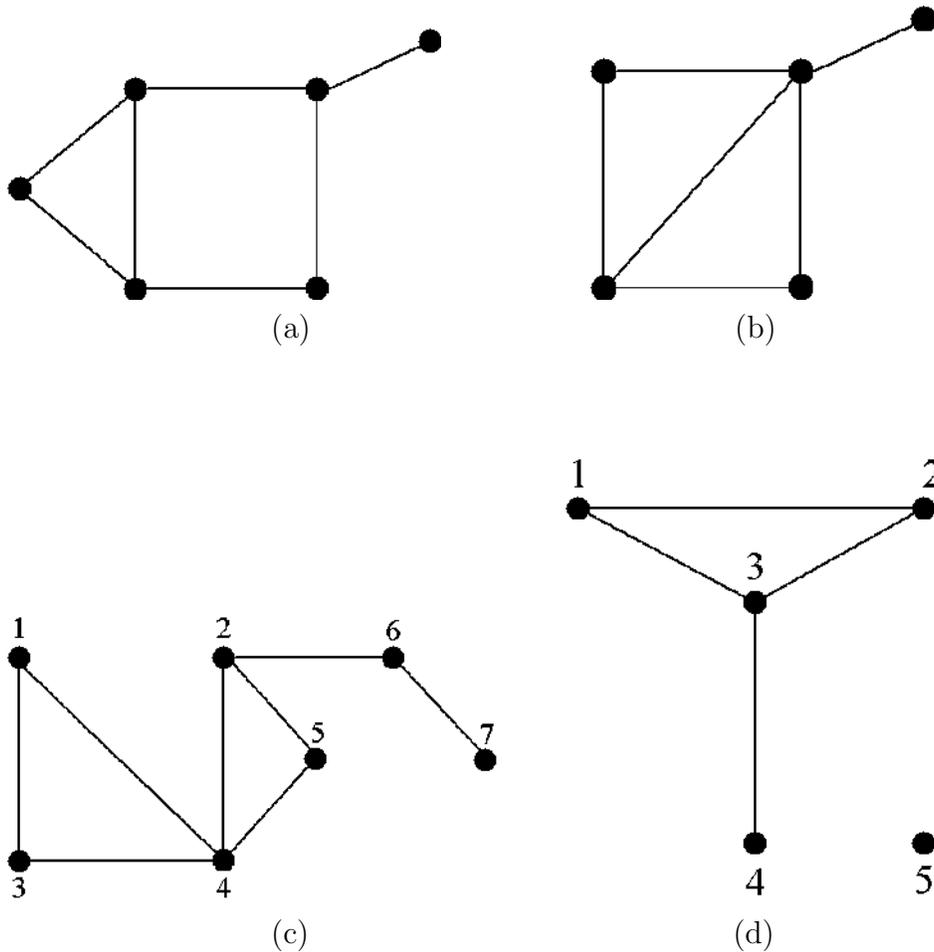


Figura 8.8: Grafos Exemplo. (a) G_1 (b) G_2 (c) G_3 (d) G_4

Determine o número cromático e o polinômio cromático considerando um conjunto de k cores.

Índice

- Árvore, 115
- Árvore p -ária, 120
- Árvore p -ária Cheia, 121
- Árvore p -ária Completa, 120
- Árvore Balanceada, 121
- Árvore Binária, 120
- Árvore Enraizada, 118
- Árvore Geradora, 123
- Árvore Rotulada, 117
- Árvore de Espalhamento, 123
- Árvores Isomórficas, 117
- Índice de Wiener, 17

- Acoplamento, 80
- Altura de uma Árvore, 121

- Biclique, 70
- Bloco, 45

- Código Prüfer, 128
- Caminho, 13
- Caminho Alternante, 82
- Caminho de Aumento, 82
- Caminho de Espalhamento, 15
- Caminho Direcionado, 14
- Casamento, 80
- Centro de Árvores, 117
- Centro de um Grafo, 16
- Ciclo, 13
- Ciclo Direcionado, 14
- Cintura, 15

- Circuito, 13
- Circuito Direcionado, 14
- Circunferência, 15
- Clique em Dígrafos, 64
- Clique em Grafos, 63
- Clique Máximo, 64
- Co-Clique, 67
- Cobertura de Fonte, 75
- Cobertura de Sumidouro, 75
- Cobertura de Vértices, 73
- Cobertura Mínima de Vértices, 73
- Cobertura Minimal de Vértices, 73
- Componente Conexo, 43
- Conjunto Dominante, 76
- Conjunto Dominante de Entrada, 77
- Conjunto Dominante de Saída, 77
- Conjunto Dominante Gêmeo, 79
- Conjunto Independente Máximo, 67
- Corda, 15

- Dígrafo Bipartido Direcionado, 71
- Dígrafo Completo, 20
- Dígrafo k -partido, 70
- Dígrafo k -partido Completo, 71
- Dígrafo Linha, 30
- Dígrafo Semicompleto, 20
- Dígrafo Simples, 5
- Diâmetro, 16
- Dominância, 5

- Emparelhamento, 80

- Emparelhamento Máximo, 80
 Emparelhamento Perfeito, 80
 Emparelhamentos em Dígrafos, 80
 Excentricidade, 16
- Fator, 7
 Floresta, 115
 Floresta de Espalhamento, 123
 Função de Incidência, 3
 Função Multivalorada de Vizinhança, 7
 Funções de Fechamento Transitivo, 42
 Funções Estendidas de Vizinhança em Grafos e Dígrafos, 40
 Funções Multivalorada de Vizinhança Direta e Inversa, 8
- Grafo (m, n) -Ramsey, 73
 Grafo Bipartido Completo, 70
 Grafo Caminho, 20
 Grafo Ciclo, 20
 Grafo completo, 19
 Grafo Conexo, 43
 Grafo Desconexo, 43
 Grafo Direcionado Simples, 5
 Grafo Estrela, 21
 Grafo Homeomorficamente Reduzido, 28
 Grafo Induzido, 7
 Grafo K-Cubo, 21
 Grafo k-partido, 67
 Grafo K-partido Completo, 69
 Grafo Linha, 30
 Grafo não separável, 45
 Grafo Orientado, 5
 Grafo Reduzido, 28
 Grafo Regular, 20
 Grafo Roda, 21
- Grafo Simples, 2
 Grafo Simples Subjacente, 101
 Grafo Subjacente a Pseudografo e Multigrafos, 3
 Grafo Subjacente ao Dígrafo, 6
 Grafo totalmente desconexo, 19
 Grafo Trivial, 19
 Grafo Vazio, 19
 Grau, 8
 Graus de Entrada e de Saída, 8
- Método de Maghout, 87
 Maior Grau, 8
 Menor Grau, 8
 Multigrafo, 2
 Multigrafo Direcionado, 5
- Número de Clique, 64
 Número de Cobertura de Fonte, 75
 Número de Cobertura de Sumidouro, 75
 Número de Cobertura de Vértices, 73
 Número de Dominância, 76
 Número de Independência, 67
 Número de Ramsey, 72
 Números de Dominância de Entrada e de Saída, 78
 Números de Dominância Gêmea, 79
 Nível de um vértice, 121
- Operação Complemento, 25
 Operação de Contração, 27
 Operação de Decomposição, 29
 Operação de Intersecção, 24
 Operação de Junção, 23
 Operação de Remoção, 27
 Operação de União, 23
 Operação Produto, 25
 Operador Linha, 30

- Passeio, 13
Passeio de Espalhamento, 15
Passeio Direcionado, 14
Passeio Direcionado Fechado, 14
Passeio Fechado, 13
Problema das Pontes de Königsberg,
1
Pseudografo, 2
- Raio, 16
Relação de Dominância em Dígrafos,
77
Relação de Dominância em Grafos,
76
Relação de Dominância Gêmea, 79
- Semi-Caminho, 14
Semi-Passeio, 14
Semi-Trilha, 14
Seqüência de Graus, 9
Seqüência Gráfica, 10
Subárvore, 120
Subárvore Direita, 120
Subárvore Esquerda, 120
Subdivisão de Grafo, 29
Subgrafo e Subdígrafo de Espelhamento,
7
- Teorema de Menger-Dígrafos, 55
Teorema de Menger-Grafos, 47, 49
Trilha, 13
Trilha de Espalhamento, 15
Trilha Direcionada, 14
- Vértice Ancestral, 118
Vértice de Corte \times Pseudografo, 45
Vértice Descendente, 118
Vértice Filho, 118
Vértice Folha, 118
Vértice Fonte, 9
Vértice Interno, 118
Vértice Irmão, 118
Vértice Pai, 118
Vértice Raiz, 118
Vértice Saturado, 80
Vértice Sumidouro, 9
Vértices Adjacentes, 2

Bibliografia

- [1] S. Hakimi, “On the realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a graph,” *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 10, pp. 496–506, 1962.
- [2] G. Dirac, “Some theorems on abstract graphs,” *Proc. Lond. Math. Soc.*, vol. 2, pp. 69–81, 1952.
- [3] O. Ore, “Note on hamilton circuits,” *Amer. Mat. Monthly*, vol. 67, p. 55, 1960.
- [4] K. H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications*. McGraw-Hill, 2007.
- [5] K. Menger, “Zur allgemeinen kurventheorie,” *Fund. Math.*, vol. 10, pp. 96–115, 1927.
- [6] H. Whitney, “Congruent graphs and the connectivity of graphs,” *Amer. J. Math.*, vol. 54, pp. 150–168, 1932.
- [7] H. Robbins, “A theorem on graphs with an application to a problem on traffic control,” *American Mathematical Monthly*, vol. 46, pp. 281–283, 1939.
- [8] D. Geller and F. Harary, “Connectivity in digraphs,” in *Recent Trends in Graph Theory, Proceedings of the First New York City Graph Theory Conference*, vol. 186, 1970, pp. 105–115.
- [9] G. Gutin and B. Sackler, “Finding a longest path in a complete multipartite digraph,” *SIAM J. Discrete Math.*, vol. 6, pp. 270–273, 1993.
- [10] G. C. Ferro and D. Ferrarello, “Polynomial ideals and directed graphs,” *Commutative Algebra*, 2007.

This work is licensed under CC BY-NC-SA 4.0. To view a copy of this license, visit <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0>

- [11] D. Amar and A. Raspaud, "Covering the vertices of a digraph by cycles of prescribed length," *Discrete Mathematics*, vol. 65, pp. 273–290, 1995.
- [12] F. Chung and R. Graham, "On the cover polynomial of a digraph," *Journal of Combinatorial Theory*, vol. 65, pp. 273–290, 1995.
- [13] G. Chartrand, F. Harary, and B. Q. Yue, "On the out-domination and in-domination numbers of a digraph," *Discrete Mathematics*, 1999.
- [14] G. Chartrand, M. S. P. Dankelmann, and H. C. Swart, "Twin domination in digraphs," *Ars Combinatoria*, vol. 67, 2003.
- [15] C. Berge, "Two theorems in graph theory," *Proc. Nat. Acad. Sci.*, vol. 43, pp. 842–844, 1957.
- [16] P. Hall, "On representatives of subsets," *J. Lond. Mat.*, vol. 10, pp. 26–30, 1935.
- [17] D. König, "Graphen und matrizen," *Math. Lapok*, vol. 38, pp. 116–119, 1931.
- [18] C. Jordan, "Sur les assemblages de lignes," *J. für die Reine und Angewandte Mathematic*, vol. 70, pp. 185–190, 1869.
- [19] G. Kirchhoff, "Über die auflösung der gleichungen, auf welche man bei der untersuchung der linearen verteilung galvanischer ströme geführt wird," *Ann. Phys. Chem.*, vol. 72, pp. 497–508, 1847.
- [20] ———, "Ueber die auflösung der gleichungen, auf welche man bei der untersuchung der linearen vertheilung galvanischer ströme geführt wird," *Ann. Phys. Chem.*, vol. 72, pp. 497–508, 1847.
- [21] A. Cayley, "A theorem on trees," *Quart. J. Math*, vol. 23, pp. 376–378, 1889.
- [22] H. Prüfer, "Neuer beweis eines satzes über permutationen," *Arch. Math. Phys*, vol. 27, pp. 727–744, 1918.
- [23] W. T. Tutte, "The dissection of equilateral triangles into equilateral triangles," *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, vol. 44, pp. 463–482, 1948.

-
- [24] D. König, “Über graphen und ihre anwendung auf determinantentheorie und mengenlehre,” *Math. Ann.*, vol. 77, pp. 453–465, 1916.
- [25] V. G. Vizing, “On an estimate of the chromatic class of a p -graph,” *Diskret. Analiz*, vol. 3, pp. 25–30, 1964.
- [26] C. Shannon, “A theorem on coloring the lines of a network,” *J. Math. Phys.*, vol. 28, pp. 148–151, 1949.