Integral

Origem: Wikipédia, a enciclopédia livre.

No cálculo, a **integral** de uma função foi criada para originalmente determinar a área sob uma curva no plano cartesiano e também surge naturalmente em dezenas de problemas de Física, como por exemplo na determinação da posição em todos os instantes de um objeto, se for conhecida a sua velocidade em todos os instantes.

O processo de se calcular a integral de uma função é chamado de **integração**.

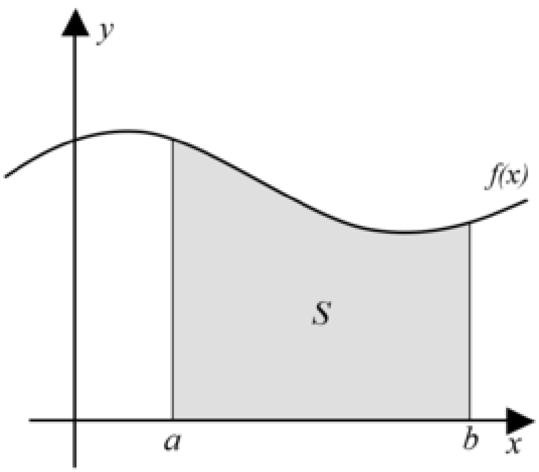
Diferentemente da noção associada de derivação, existem várias definições para a integração. Todas elas visando resolver alguns problemas conceituais relacionadas a limites, continuidade e existência de certos processos utilizados na definição. No entanto todas estas definições dão a mesma resposta para o resultado final de uma integração.

A integral também é conhecida como antiderivada. Uma definição também conhecida para integral indefinida é:

$$\int f(x)dx = F(x) \text{ se e somente se } \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

Índice

Definição conceitual



Integrando a área de uma função abaixo de uma curva

Para descrevermos a integral de uma função f(x) de um intervalo x entre [a, b] utiliza-se a notação:

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

A idéia desta notação utilizando um *S* comprido é generalizar a noção de somatório. Isto porque intuitivamente a integral de f(x) pode ser entendida como a soma de pequenos retângulos de base dx e altura f(x), onde o produto f(x) dx é a área deste retângulo. A soma de todas estas pequenas áreas, ou áreas infinitesimais, fornece a área total abaixo da curva. Mais precisamente podemos dizer que a integral acima é o valor limite da soma:

$$\sum_{i=0}^{N} f(x_i)\Delta x.$$

onde:

$$\Delta x = \frac{b-a}{N}$$

é o comprimento dos pequenos intervalos nos quais dividimos o intervalo (b-a), $f(x_i)$ é o valor da função em algum ponto deste intervalo. O que se espera é que quando N for muito grande o valor da soma acima se aproxime do valor da área abaixo da curva e, portanto, da integral de f(x) no intervalo. Ou seja que o limite

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx = S$$

esteja definido. O problema é que este raciocínio intuitivo é difícil de colocar em linguagem matemática precisa. Por isto existem várias formas de se definir a integração de maneira formal. O resultado entretando é coerente entre elas.

Teorema fundamental do Cálculo

Se resolvermos a integral acima entre os limites *a* e *b*, o resultado final pode ser escrito como:

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Onde a função *F(x)* é a função resultante da integração da função *f(x)*. O problema da integração, isto é, de se encontrar a solução para uma integral, se resume portanto a encontrar a função *F(x)*.

O resultado acima é extremamente importante pois ele nos oferece uma dica de como obter a integral. Para ver isto, supunha que o limite superior da integral, isto é, *b* é muito próximo de *a*, tal que possamos escrever:

$b = a + \Delta x$

Como os pontos limites da integral estão muito próximos podemos escrever:

$$\int_a^{a+\Delta x} f(x)dx = F(a+\Delta x) - F(a)$$

E olhando na definição da integração como um limite, dada acima, podemos dizer que a integral, neste caso se resume a apenas um dos termos na soma, e portanto podemos dizer, sem causar um erro muito grande, que:

$$\int_a^{a+\Delta x} f(x)dx = f(a)\Delta x = F(a+\Delta x) - F(a)$$

Comparando com a definição da derivada de uma função:

$$f(x) = \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \rightarrow f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$$

vemos que a função que procuramos *F(x)* é uma função tal que, quando tomamos a sua derivada obtemos a função *f(x)*. Em outras palavras, se sabemos como calcular a derivada de uma função podemos também calcular a integral da função resultante. Esta propriedade nos mostra que a integração na verdade é a operação inversa da derivação, pois se derivarmos uma função e em seguida a integrarmos, obteremos a função original. Esta propriedade é chamada de **Teorema fundamental do Cálculo**.

Passo-a-Passo

Integral Definida - Uma integral definida consta basicamente em integrar uma função constante nos intervalos, através das primitivas, que nada mais são do que a função integrada a cada membro.

Fórmula das Primitivas

$$\int a.x^n dx = \frac{a.x^{n+1}}{n+1}$$

Exemplo:

Tratamos cada membro da função como uma função em separado, para em seguida efetuar a soma entre eles e gerar outra função, a função na qual substituiremos o valor de X pelos valores do intervalo, feito isso usamos o teorema do cálculo para chegar ao valor da integral.

No intervalo (0,3)

$f(x) = x^2 + 2x + 4$

$$\int (x^2)dx + \int (2x)dx + \int (4)dx$$

Aqui usa-se a Fórmula da Primitiva em cada integral.

$$\frac{x^{2+1}}{2+1} + \frac{2.x^{1+1}}{1+1} + \frac{4.x^{0+1}}{0+1}$$

Geramos a outra função, que será usada para substituirmos os valores do intervalo.

$$\frac{x^3}{3} + x^2 + 4.x$$

Para x = 0

$f(a) = 0$

Para x = 3

$$\frac{3^3}{3} + 3^2 + 4.3$$

f(*b*) = 30

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO.

$$\int_a^b \frac{d}{dx} f(x) dx = f(b) - f(a)$$

$$\int_0^3 (x^2 + 2x + 4) dx = \frac{3^3}{3} + 3^2 + 4.3 - 0$$

$$\int_0^3 (x^2 + 2x + 4) dx = 30$$

Exemplos de integração

Estas são as integrais de algumas das funções mais comuns:

$\int_a^b 1 dx = x\Big|_a^b = (b - a)$ (Integral da função constante)

$\int_a^b x dx = \frac{1}{2} x^2\Big|_a^b = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$ (Integral da função f(x) = x)

Por definição a barra $f(x)\Big|_a^b$ é utilizada com o significado da diferença *f*(*b*) - *f*(*a*)

Definições de integral

Para definições do processo de integração mais rigorosas veja os links abaixo.

- Integral de Riemann
- Integral de Lebesgue
- Integral de Riemann-Stieltjes
- Integral de Gauge

Tábua de integrais

Origem: Wikipédia, a enciclopédia livre.
(Redirecionado de **Lista de integrais**)

Integração é uma das duas operações básicas em cálculo. Como, ao contrário da diferenciação, é uma operação não-trivial, existem tabelas de integrais conhecidas que frequentemente se mostram úteis. Esta página relaciona algumas das antiderivadas mais comuns; uma lista mais completa pode ser encontrada em Lista de integrais.

Usa-se *C* como constante arbitrária de integração
que só pode ser determinada se tivermos conhecimento do valor da integral em algum ponto específico. Cada função tem infinitas antiderivadas, diferenciadas entre si pelo valor específico de *C*.

O uso da plica ' denota a derivada da função em ordem a *x*.

Estas fórmulas são apenas outra forma de apresentação das asserções da tabela de derivadas.

Índice

Regras de integração de funções em geral

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$$

$$\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int f(x)g(x) = f(x)\int g(x)\,dx - \int \left(d[f(x)]\int g(x)\,dx\right)$$ ou, de outra forma,

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

Integrais de Funções Simples

Funções Racionais

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad \text{if } n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a} arctan(x/a) + C$$

Logaritmos

$$\int \log_b x\,dx = x\log_b x - x\log_b e + C$$

Caso particular: $b = e, \int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$

Funções Exponenciais

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

Caso particular: $a = e, \int e^x\,dx = e^x + C$

Funções Irracionais

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

Caso particular: $a = 1, \int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = \arcsin x + C$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \arccos\frac{x}{a} + C$$

Caso particular: $a = 1, \int \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = \arccos x + C$

Funções Trigonométricas

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \csc x\,dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C$$

$$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x - \sin x\cos x) + C$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x + \sin x\cos x) + C$$

Funções Hiperbólicas

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$$
$$\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$$
$$\int \tanh x\,dx = \ln(\cosh x) + C$$
$$\int \operatorname{csch} x\,dx = \ln\left|\tanh\frac{x}{2}\right| + C$$
$$\int \operatorname{sech} x\,dx = \arctan(\sinh x) + C$$
$$\int \coth x\,dx = \ln|\sinh x| + C$$

Integrais Definidas

Existem funções cujas antiderivadas *não podem*
ser expressas de forma fechada. No entanto, os valores das integrais definidas dessas funções em intervalos comuns podem ser calculados. Algumas integrais definidas de uso frequente estão relacionadas abaixo.

$$\int_0^\infty \sqrt{x}\,e^{-x}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$
$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$
$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1}\,dx = \frac{\pi^2}{6}$$
$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\,dx = \frac{\pi^4}{15}$$
$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$
$$\int_0^\infty x^{z-1}\,e^{-x}\,dx = \Gamma(z)$$