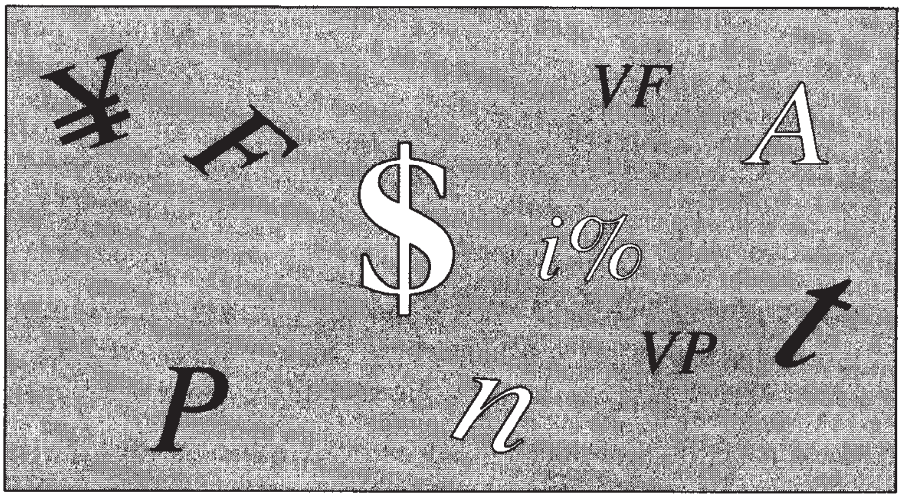
capítulo

# 2

# Los factores y su uso




En este capítulo se aborda la derivación de los factores de la ingeniería económica y el uso de estos factores básicos en los cálculos económicos. Es uno de los más importantes, puesto que los conceptos presentados en él se utilizan a lo largo de todo el texto.

## OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

**Propósito: Entender la derivación de las fórmulas de ingeniería económica y la forma como se utilizan.**

Factores $P/F$ y $F/P$

Factores $P/A$ y $A/P$

Factores $F/A$ y $A/F$

Usar las tablas

Factores $P/G$ y $A/G$

Gradiente geométrico

Interpolar

$P$, $F$ o $A$ de los flujos de efectivo

$P$, $F$ o $A$ de un gradiente uniforme

$P$, $F$ o $A$ de un gradiente geométrico

Calcular $i$

Calcular $n$

Este capítulo ayudará al lector a:

1. Derivar los factores de cantidad compuesta de pago único y valor presente.
2. Derivar los factores de valor presente, serie uniforme y recuperación de capital.
3. Derivar los factores de cantidad compuesta, serie uniforme y fondo de amortización.
4. Encontrar el valor correcto de un factor en una tabla.
5. Derivar los factores de valor presente, gradiente uniforme y serie anual.
6. Derivar la fórmula de gradientes geométricos (escalonada).
7. Interpolar linealmente para encontrar el valor de un factor.
8. Calcular el valor presente, futuro o anual de diversos flujos de efectivo.
9. Calcular el valor presente, futuro o anual de flujos de efectivo que contienen un gradiente uniforme.
10. Calcular el valor presepte, futuro o anual de los flujos de efectivo que comprenden un gradiente geométrico.
11. Calcular la tasa de interés (tasa de retorno) de una secuencia de flujos de efectivo.
12. Determinar el número de años $n$ requerido para lograr la equivalencia para una secuencia de flujos de efectivo.

## 2.1 DERIVACIÓN DE FACTORES DE PAGO ÚNICO (*F/P* Y *P/F*)

En esta sección, se desarrolla una fórmula que permite la determinación de cantidades futuras de dinero $F$ que se acumulan después de $n$ años (o periodos) a partir de una inversión única $P$ con interés compuesto una vez anualmente (o por periodo). Al igual que en el capítulo 1, se supondrá un periodo de interés de 1 año. Sin embargo, se debe reconocer que los símbolos $i$ y $n$ en las fórmulas desarrolladas aquí se aplican a los *periodos de* interés, que no solamente son años, como se analizará en el capítulo 3.

En el capítulo 1 se planteó que el interés compuesto se refiere al interés pagado sobre el interés. Por consiguiente, si una suma de dinero $P$ se invierte en algún momento $t = 0$, la suma de dinero $F_1$ que se habrá acumulado 1 año a partir del momento de la inversión a una tasa de interés de $i$ por ciento anual será:

$$
\begin{aligned}
F_1 &= P + Pi \\
&= P(1 + i)
\end{aligned}
$$

Al final del segundo año, la suma de dinero acumulada $F_2$ es la cantidad acumulada después del año 1 más el interés desde el final del año 1 hasta el final del año 2. Por tanto,

$$
\begin{aligned}
F_2 &= F_1 + F_1 i \qquad [2.1] \\
&= P(1 + i) + P(1 + i)i
\end{aligned}
$$

Lo cual puede escribirse como:

$$
\begin{aligned}
F_2 &= P(1 + i + i + i^2) \\
&= P(1 + 2i + i^2) \\
&= P(1 + i)^2
\end{aligned}
$$

En forma similar, la cantidad de dinero acumulada al final del año 3, si se utiliza la ecuación [2.1], será:

$$F_3 = F_2 + F_2 i$$

Al sustituir $P(1 + i)^2$ por $F_2$ y simplificar,

$$F_3 = P(1 + i)^3$$

De acuerdo con los valores anteriores, es evidente por inducción matemática que la fórmula puede ser generalizada para $n$ años así:

$$F = P(1 + i) \qquad [2.2]$$

El factor $(1 + i)^n$ se denomina factor de cantidad compuesta de pago único (FCCPU), pero en general se hace referencia a éste como el *factor F/P*. Cuando el factor es multiplicado por $P$, éste produce la suma futura $F$ de una inversión inicial $P$ después de $n$ años, a la tasa de interés $i$. Al despejar $P$ en la ecuación [2.2], en términos de $F$ resulta:

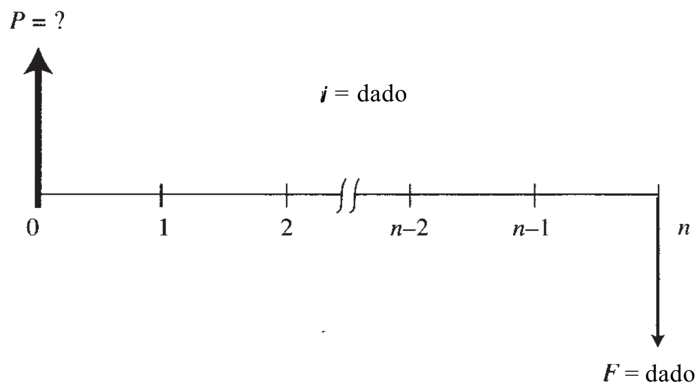



**Figura 2.1** **Diagrama de flujo de efectivo para determinar *P*, dado *F*.**

en la expresión

$$P = F\left[\frac{1}{(1 + i)^n}\right] \qquad [2.3]$$

La expresión en corchetes se conoce como el *factor de valor-presente, pago único* (FVPPU), o el *factor P/F*. Dicha expresión determina el valor presente $P$ de una cantidad futura dada, $F$, después de $n$ años a una tasa de interés $i$. El diagrama de flujo de efectivo para esta fórmula se muestra en la figura 2.1. En forma opuesta, el diagrama para encontrar $F$, dado $P$, sería exactamente el mismo si se intercambia la ? y el término *dado* y se utiliza la ecuación [2.2] para calcular $F$.

Es importante observar que los dos factores y las fórmulas derivadas aquí son *fórmulas de pago único;* es decir, son utilizadas para encontrar la cantidad presente o futura cuando solamente hay un pago o recibo involucrado. En las próximas dos secciones, se desarrollan fórmulas para calcular el valor presente o futuro cuando hay diversos pagos uniformes o recibo de dinero involucrado.

## 2.2 DERIVACIÓN DEL FACTOR DE VALOR PRESENTE, SERIE UNIFORME Y EL FACTOR DE RECUPERACIÓN DE CAPITAL (*P/A* Y *A/P*)

El valor presente $P$ de una serie uniforme, como la mostrada en la figura 2.2, puede ser determinado considerando cada valor de $A$ como un valor futuro $F$ y utilizando la ecuación [2.3] con el *factor P/F* para luego sumar los valores del valor presente. La fórmula general es:

$$P = A\left[\frac{1}{(1 + i)^1}\right] + A\left[\frac{1}{(1 + i)^2}\right] + A\left[\frac{1}{(1 + i)^3}\right] + \cdots + A\left[\frac{1}{(1 + i)^{n-1}}\right] + A\left[\frac{1}{(1 + i)^n}\right]$$

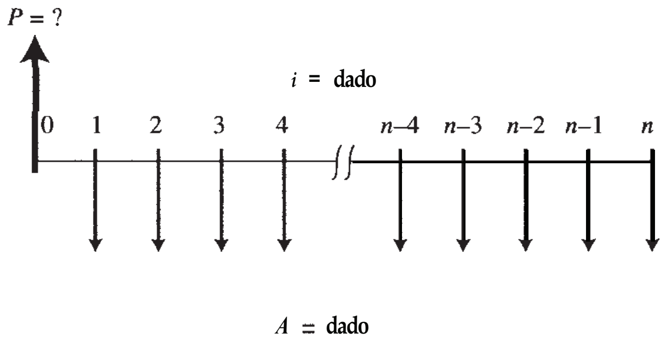



**Figura 2.2** Diagrama utilizado para determinar el valor presente de una serie uniforme.

donde los términos en corchetes representan los factores *P/F* durante los anos 1 hasta *n*, respectivamente. Si se factor-iza *A*,

$$P = A\left[\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)}\right] \qquad [2.4]$$

La ecuación [2.4] puede simplificarse multiplicando ambos lados por $1/(1+i)$ para producir:

$$\frac{P}{1+i} = A\left[\frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \frac{1}{(1+i)^4} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^n} + \frac{1}{(1+i)^{n+1}}\right] \qquad [2.5]$$

Restar la ecuación [2.4] de la ecuación [2.5], simplificar y luego dividir ambos lados de la relación por $-i/(1+i)$ conduce a una expresión para *P* cuando $i \neq 0$:

$$P = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right] \qquad i \neq 0 \qquad [2.6]$$

El término en corchetes se llama *factor* de valor *presente, serie uniforme* (FVP-SU), o el *factor P/A*. Esta ecuación dará el valor presente *P* de una serie anual uniforme equivalente *A* que empieza al final del año 1 y se extiende durante *n* años a una tasa de interés *i*.

El factor *P/A* en corchetes en la ecuación [2.6] puede ser determinado también considerando la ecuación [2.4] como una progresión geométrica, cuya forma general para su suma de extremo cerrado *S* es:

$$S = \frac{\text{(último término)(razón común)} - \text{primer término}}{\text{razón común} \quad 1}$$

La razón común entre los términos es $1/(1 + i)$. Para fines de simplificación, se fija $y = 1 + i$, y se forma la expresión $S$ anterior, simplificándose luego.

$$S = \frac{1/y^n y - 1/y}{1/y - 1}$$

$$= \frac{y^n - 1}{iy^n}$$

$$= \frac{(1 + i)^n - 1}{i(1 + i)^n}$$

Al reagruparse la ecuación [2.6], se puede expresar $A$ en términos de $P$:

$$A = P\left[\frac{i(1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1}\right] \qquad [2.7]$$

El término en corchetes, denominado el *factor de recuperación del capital* (FRC), o *factor A/P*, produce el valor anual uniforme equivalente $A$ durante $n$ años de una inversión dada $P$ cuando la tasa de interés es $i$.

Es muy importante recordar que estas fórmulas se derivan con el valor presente $P$ y la primera cantidad anual uniforme $A$, *separado* un *año (o un periodo).* Es decir, el valor presente *P siempre debe estar* localizado *un periodo anterior* a la primera $A$. El uso correcto de estos factores se ilustra en la sección 2.7.

## 2.3 DERIVACIÓN DEL FACTOR DE FONDO DE AMORTIZACIÓN Y EL FACTOR DE CANTIDAD COMPUESTA, SERIE UNIFORME (*A/F* Y *F/A*)

Aunque el *factor de fondo de amortización* (FFA), *o factor A/F, y* el *factor de cantidad compuesta, serie uniforme* (FCCSU), o *factor F/A*, podrían ser derivados utilizando el factor *F/P*, la forma más simple de derivar las fórmulas es sustituirlas en aquellas ya desarrolladas. Por tanto, si $P$ de la ecuación [2.3] se sustituye en la ecuación [2.7] resulta la fórmula siguiente:

$$A = F\frac{1}{(1 + i)^n}\,\frac{i(1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1} \qquad [2.8]$$

$$= F\left[\frac{i}{(1 + i)^n - 1}\right]$$

La expresión en corchetes en la ecuación [2.8] es el factor del fondo de amortización, o *A/F*. La ecuación [2.8] se utiliza para determinar la serie de valor anual uniforme que sería equivalente a un valor futuro determinado $F$, lo cual se muestra gráficamente en la figura 2.3. Observe que la serie uniforme $A$ se inicia al final del periodo 1 y continúa *a* lo *largo del periodo de F dado.*

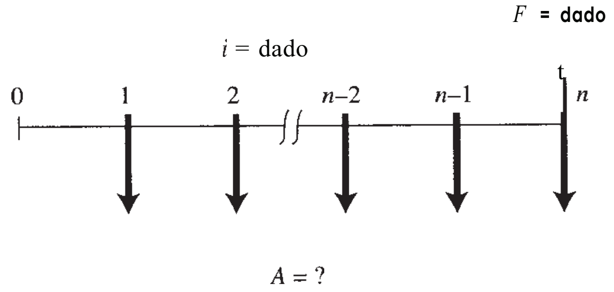



**Figura 2.3** **Transformación de un valor $F$ dado en una serie A equivalente.**

La ecuación [2.8] puede ser reordenada para expresar $F$ en términos de $A$:

$$F = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] \qquad [2.9]$$

El término en corchetes se denomina el *factor de cantidad compuesta, serie uniforme* (FCCSU), o factor $F/A$, el cual, cuando se multiplica por una suma anual uniforme $A$ dada, produce el valor futuro de la serie uniforme. El diagrama de flujo de efectivo para este caso aparecería igual al presentado en la figura 2.3, excepto que $A$ está dado y $F$ = ?. Nuevamente, es importante recordar que la cantidad futura $F$ ocurre durante el mismo periodo que la última $A$.

Como ejercicio, se debe mostrar que el factor $F/A$ puede obtenerse multiplicando las fórmulas del factor $F/P$ en la ecuación [2.2] y el factor $P/A$ en la ecuación [2.6] para una $i$ y $n$ dadas, es decir, $F/A = (F/P)(P/A)$ en términos de factores.

**Problema 2.1**

## 2.4 NOTACIÓN ESTÁNDAR DE FACTORES Y USO DE LAS TABLAS DE INTERÉS

A medida que cada factor fue derivado se introdujeron los términos abreviados, los cuales se utilizan para evitar la labor dispendiosa de escribir las fórmulas cada vez que se emplea uno de los factores. Se ha adoptado una notación estándar que incluye la tasa de interés y el número de periodos, como aparece siempre en la forma general ($X/Y$, $i$/, $n$). La primera letra, $X$, dentro-del paréntesis representa ló que-se desea encontrar, mientras que la segunda letra, $Y$, representa lo que está dado. Por ejemplo, $F/P$ significa *encontrar F cuando P está dado.* La $i$ es la tasa de interés en porcentaje y $n$ representa el número de periodos involucrados. Por tanto, ($F/P$, 6%, 20) significa obtener el factor que al ser multiplicado por una $P$ dada permite encontrar la cantidad futura de dinero $F$, que será acumulada en 20 periodos, si la tasa de interés es 6% por periodo.

Para identificar factores es más sencillo utilizar la notación estándar que los nombres de los factores y ésta será utilizada en forma exclusiva en lo sucesivo. La tabla 2.1 muestra la notación estándar para las fórmulas derivadas hasta el momento.

**Tabla 2.1** Notaciones estándar de factores

| Nombre del factor | Notación estándar |
|---|---|
| Valor presente, pago hico | $(P/F,i,n)$ |
| Cantidad compuesta, pago único | $(F/P, i, n)$ |
| Valor presente, serie uniforme | $(P/Ai,n)$ |
| Recuperación de capital | $(A/P,i,n)$ |
| Fondo de amortización | $(A/F,i,n)$ |
| Cantidad compuesta, serie uniforme | $(F/A,i,n)$ |

**Tabla 2.2** Cálculos mediante la notación estándar

| Encontrar | Dado | Factor | Ecuación | Fórmula |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $F$ | $(P/F,i,n)$ | $P = F(P/F,i,n)$ | $P = F[1/(1+i)^n]$ |
| $F$ | $P$ | $(F/P,i,n)$ | $F = P(F/P,i,n)$ | $F = P(1+i)^n]$ |
| $P$ | $A$ | $(P/A,i,n)$ | $P = A(P/A,i,n)$ | $P = A\{[(1+i)^n - 1]/i(1+i)^n\}$ |
| $A$ | $P$ | $(A/P,i,n)$ | $A = P(A/P,i,n)$ | $A = P\{i(1+i)^n/[(1+i)^n - 1]\}$ |
| $A$ | $F$ | $(A/F,i,n)$ | $A = F(A/F,i,n)$ | $A = F\{i/[(1+i)^n - 1]\}$ |
| $F$ | $A$ | $(F/A,i,n)$ | $F = A(F/A,i,n)$ | $F = A\{[(1+i)^n - 1]/i\}$ |

Para una referencia fácil, las fórmulas empleadas en los cálculos se reúnen en la tabla 2.2, y se muestran en la portada interna del texto. También la notación estándar es fácil de utilizar para recordar la forma como pueden derivarse los factores. Por ejemplo, el factor *A/F* puede ser derivado multiplicando las fórmulas de los factores *P/F* y *A/P*. En términos de ecuación, esto es,

$$\begin{aligned} A &= F(P/F,i,n)(A/P,i,n) \\ &= F(A/F,i,n) \end{aligned}$$

El equivalente de la cancelación algebraica de la $P$ hace que esta relación sea más fácil de recordar.

Con el fin de simplificar los cálculos rutinarios de la ingeniería económica que involucran factores, se han preparado tablas de valores de los factores para tasas de interés que van de 0.25 hasta 50% y periodos de tiempo desde 1 hasta grandes valores de $n$, dependiendo del valor de $i$. Estas tablas, que aparecen al final del libro, están ordenadas con los diversos factores en la parte superior y el número de periodos $n$ en la columna izquierda. Se ha impreso la palabra *discreto* en el título de cada tabla para enfatizar que estas tablas son para factores que utilizan la convención de final de periodo (sección 1.9) y el interés es compuesto una vez cada periodo de interés. Para un factor, tasa de interés y tiempo determinado, el

**Tabla 2.3** Ejemplos de valores de la tabla de interés

| Notación estándar | $i$ | $n$ | Tabla | Valor del factor |
|---|---|---|---|---|
| $(F/A,10\%,3)$ | 10 | 3 | 15 | 3.3100 |
| $(A/P,7\%,20)$ | 7 | 20 | 12 | 0.09439 |
| $(P/F,25\%,35)$ | 25 | 35 | 25 | 0.0004 |

valor correcto del factor se encuentra en la tabla de tasas de interés respectivas en la intersección del factor dado y $n$. Por ejemplo, el valor del factor $(P/A, 5\%,10)$ se encuentra en la columna *P/A* de la tabla 10 en el periodo 10, como 7.7217. Por supuesto, el valor 7.72 17 podría haber sido calculado utilizando la expresión matemática para este factor en la ecuación [2.6].

$$(P/A,5\%,10) = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = \frac{1.05^{10} - 1}{0.05(1.05)^{10}} = 7.7217$$

La tabla 2.3 presenta diversos ejemplos del uso de las tablas de interés.

**Problema 2.2**

## 2.5 DEFINICIÓN Y DERIVACIÓN DE LAS FÓRMULAS DE GRADIENTES


AONTAÑISTA

Un *gradiente uniforme* es una *serie de flujos de efectivo* que aumenta o disminuye en forma uniforme. Es decir, el flujo de efectivo, bien sea ingreso o desembolso, cambia por la misma cantidad aritmética cada periodo de interés. La *cantidad* del aumento o de la disminución *es el gradiente.* Por ejemplo, si un fabricante de automóviles predice que el costo de mantener un robot aumentará en $500 anuales hasta que la máquina haya sido retirada, hay una serie de gradientes involucrada y la cantidad del gradiente es $500. En forma similar, si la compañía espera que el ingreso disminuya en $3000 anualmente durante los próximos 5 años, el ingreso decreciente representa un gradiente negativo por una suma de $3000 anuales.

Las fórmulas desarrolladas anteriormente para los flujos de efectivo de serie uniforme fueron generadas con base en cantidades de final de año de igual valor. En el caso de un gradiente, el flujo de efectivo de cada final de año es diferente, de manera que es preciso derivar una nueva fórmula. Para hacerlo, es conveniente suponer que el flujo de efectivo

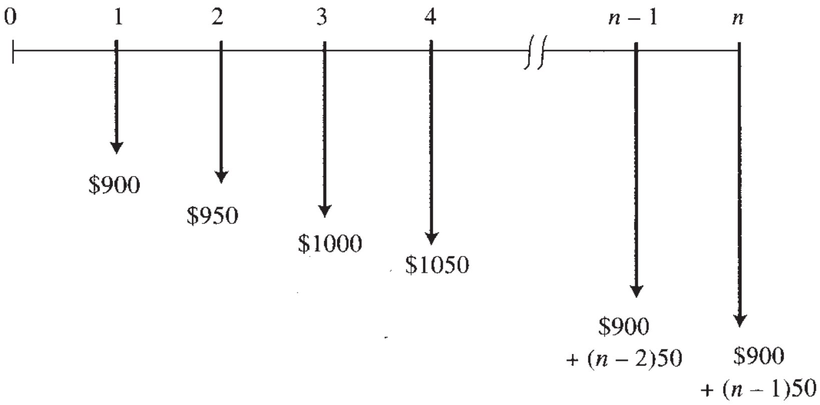



**Figura 2.4 Diagrama de una serie de gradiente uniforme con un gradiente de $50.**

que ocurre al final del año (o del periodo) 1 no hace parte de la serie del gradiente sino que es una ***cantidad base,*** lo cual es conveniente porque en las aplicaciones reales, la cantidad base es en general más grande o más pequeña que el aumento o la disminución del gradiente. Por ejemplo, si una persona compra un carro usado con una garantía de 1 año o 12,000 millas, razonablemente se podría esperar que durante el primer año de operación tuviera que pagar solamente por la gasolina. Supongamos que dicho costo es $900; es decir, $900 es la cantidad base. Después del primer año, sin embargo, la persona tendría que absorber el costo de las reparaciones o del remplazo y razonablemente se esperaría que estos costos aumentaran cada año que se poseyera el auto. Entonces, si se estima que los costos de operación y de reparación aumentarán en $50 cada año, la cantidad que se pagaría después del segundo año sería $950, después del tercero, $1000, y así sucesivamente hasta el año $n$, cuando el costo total sería $900 + (n - 1)50$. El diagrama de flujo de efectivo para esta operación se muestra en la figura 2.4. Observe que el gradiente ($50) aparece por primera vez entre el año 1 y el año 2 y la suma base ($900) no es igual al gradiente. Se define el símbolo G para los gradientes como:

G = cambio aritmético uniforme en la magnitud de los recibos o desembolsos de un periodo al siguiente

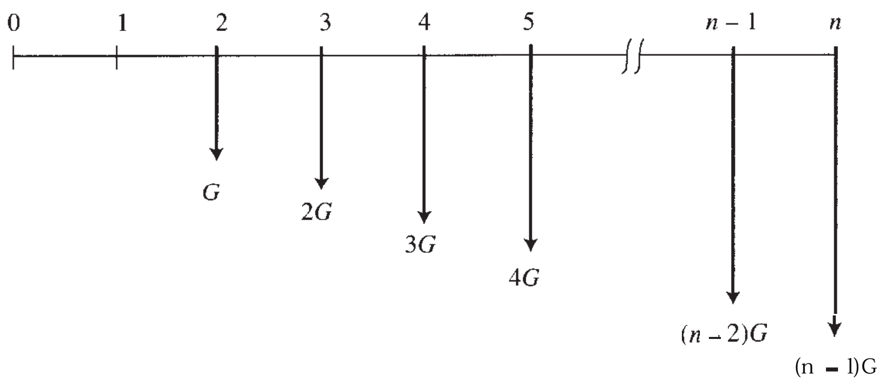



**Figura 2.5 Serie de gradiente uniforme, ignorando la cantidad base.**

El valor de G puede ser positivo o negativo. Si se ignora la cantidad base, se puede construir un diagrama de flujo de efectivo generalizado de gradientes en forma uniformemente creciente, como se muestra en la figura 2.5. Observe que el gradiente empieza entre los años 1 y 2, denominándose *gradiente convencional.*

## Ejemplo 2.1

La Compañía de Licores Calima espera obtener ingresos por \$47,500 el próximo año a partir de la venta de su producto de bebida suave. Sin embargo, se espera que las ventas aumenten de manera uniforme con la introducción de una nueva bebida hasta llegar a un nivel de \$100,000 en 8 años. Determine el gradiente y construya el diagrama de flujo de efectivo.

**Solución**

La cantidad base es \$47,500 y la ganancia en recaudos es:

$$\text{Ganancia en recaudos en 8 años} = 100{,}000 - 47{,}500 = \$52{,}500$$

$$\boxed{\text{Gradiente} = \frac{\text{ganancia}}{n-1}}$$

$$= \frac{52{,}500}{8-1} = \$7500 \text{ anual}$$

El diagrama de flujo de efectivo se muestra en la figura 2.6.

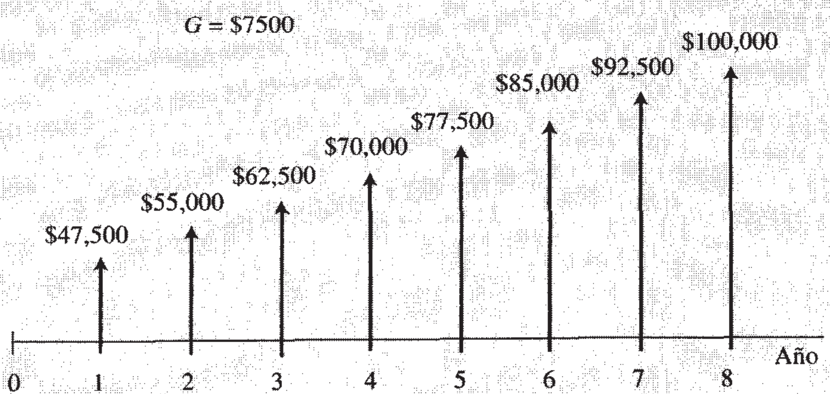



**Figura 2.6** Diagrama para la serie de gradientes, ejemplo 2.1.

Hay diversas formas para derivar factores de gradientes uniformes. Se utilizará el factor de valor presente, pago único (*P/F, i, n),* pero puede obtenerse el mismo resultado utilizando el factor *F/P, F/A o P/A.*

Haciendo referencia a la figura 2.5, se encuentra que el valor presente en el año 0 del pago de gradientes es igual a la suma de los valores presentes de los pagos individuales.

$$P = G(P/F,i,2) + 2G(P/F,i,3) + 3G(P/F,i,4) + \dots + [(n-2)G](P/F,i,n-1) + [(n-1)G](P/F,i,n)$$

Al factorizar G se obtiene:

$$P = G[(P/F,i,2) + 2(P/F,i,3) + 3(P/F,i,4) + \dots + (n-2)(P/F,i,n-1) + (n-1)(P/F,i,n)]$$

Al reemplazar los símbolos con la expresión del factor $P/F$ en la ecuación [2.3] se obtiene:

$$P = G\left[\frac{1}{(1+i)^2} + \frac{2}{(1+i)^3} + \frac{3}{(1+i)^4} + \dots + \frac{n-2}{(1+i)^{n-1}} + \frac{n-1}{(1+i)^n}\right] \qquad [2.10]$$

Al multiplicar ambos lados de la ecuación [2.10] por $(1+i)^1$ se obtiene:

$$P(1+i)^1 = G\left[\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{2}{(1+i)^2} + \frac{3}{(1+i)^3} + \dots + \frac{n-2}{(1+i)^{n-2}} + \frac{n-1}{(1+i)^{n-1}}\right] \qquad [2.11]$$

Al restar la ecuación [2.10] de la ecuación [2.11] y luego simplificar se obtiene:

$$P = \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n}\right] \qquad [2.12]$$

La ecuación [2.12] es la relación general para convertir un gradiente uniforme G (sin incluir la cantidad base) para $n$ años en valor presente en el año 0; es decir, la figura 2.7*a* se convierte en el flujo de efectivo equivalente mostrado en la figura 2.7*b*. El factor de valor *presente, gradiente uniforme,* o *factor* $P/G$, puede expresarse de la siguiente manera en dos formas equivalentes:

$$(P/G,i,n) = \frac{1}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n}\right] = \frac{(1+i)^n - in - 1}{i^2(1+i)^n}$$

Observe que el gradiente empieza en el año 2 en la figura 2.7*a* y $P$ está ubicado en el año 0. La ecuación [2.12] está representada en notación estándar de factores como:

$$P = G(P/G,i,n)$$

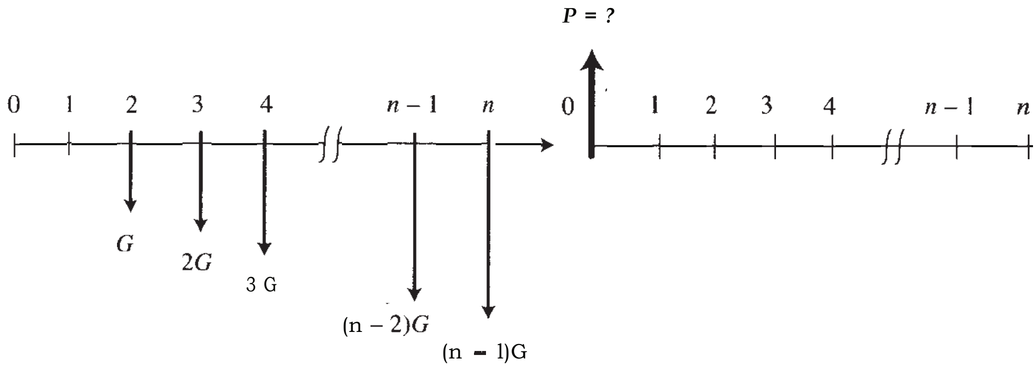



**Figura 2.7 Diagrama de conversión de un gradiente uniforme a un valor presente.**

El valor anual uniforme equivalente de un gradiente uniforme G se encuentra multiplicando el valor presente en la ecuación [2.12] por la expresión del factor $(A/P, i, n)$ en la ecuación [2.7]. Al utilizar la notación estándar de factores,

$$A = G(P/G,i,n)(A/P,i,n)$$
$$= G(A/G,i,n)$$

En la forma estándar, el equivalente de la cancelación algebraica de $P$ puede ser utilizado para obtener el factor $(A/G, i, n)$. En forma de ecuaciones,

$$A = \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n}\right]\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right] \qquad [2.13]$$

$$= G\left[\frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1}\right]$$

La expresión en corchetes de la forma simplificada en la ecuación [2.13] se denomina el *factor del valor anual de un gradiente uniforme* y se identifica por $(A/G,i,n)$. Este factor convierte la figura 2.8*a* en la figura 2.8*b*. Observe que el valor anual no es otra cosa que un valor $A$ equivalente al gradiente (sin incluir la cantidad base). Advierta que en la figura 2.8 el gradiente empieza en el año 2 y los valores $A$ ocurren desde el año 1 hasta el año $n$ inclusive.

En notación estándar de factores, las fórmulas utilizadas para calcular $P$ y $A$ de los flujos de efectivo de gradientes uniformes o aritméticos son

$$P = G(P/G,i,n) \qquad [2.14]$$

$$A = G(A/G,i,n) \qquad [2.15]$$

Los factores $P/G$ y $A/G$ son las dos columnas situadas más a la derecha en las tablas de factores 1 hasta la 29. La tabla 2.4 enumera diversos ejemplos de factores de gradientes tomados de dichas tablas.

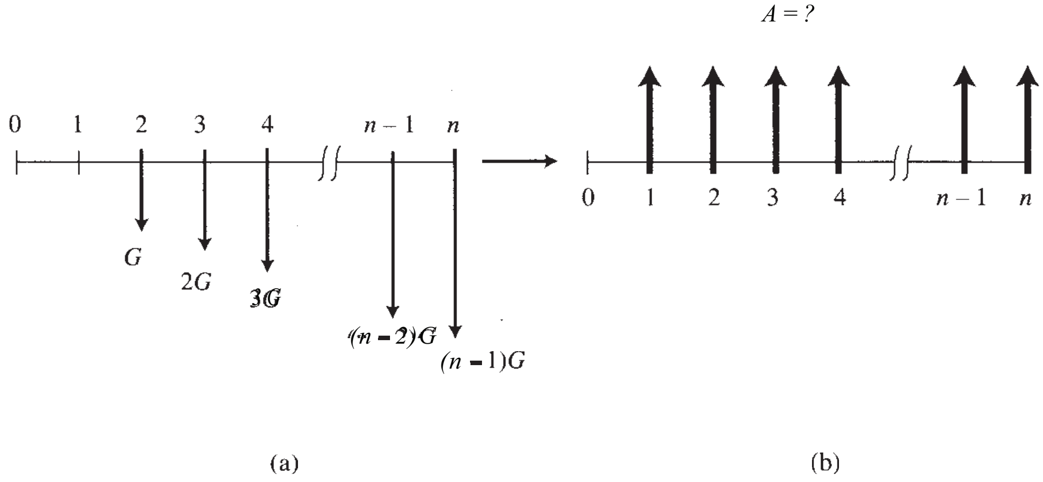



**Figura 2.8** **Diagrama de conversión de un gradiente uniforme a una serie anual uniforme equivalente.**

A lo largo de este capítulo se supone que el valor $n$ está dado en años. En el capítulo 3 se abordará cómo utilizar las tablas de factores para periodos de interés diferentes a años. Un *factor F/G (factor de valor futuro, gradiente uniforme)* podría obtenerse fácilmente multiplicando los factores *P/G* y *F/P* para los mismos valores de tasa de interés y de $n$ de la siguiente manera:

$$(P/G,i,n)(F/P,i,n) = (F/G,i,n)$$

Tal factor produciría un valor de $F$ en el mismo año que la última cantidad de gradiente. Como ejercicio, realice la multiplicación sugerida antes para obtener la siguiente ecuación *F/G:*

$$F = \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right]$$

**Problemas 2.3 a 2.7**

**Tabla 2.4** Ejemplos de valores de factor gradiente

| Valor a calcular | Notaeión estándar | $i$ | $n$ | Tabla | Factor |
|---|---|---|---|---|---|
| *P* | (*P/G*,5%,10) | 5 | 10 | 10 | **31.6520** |
| P | (*P/G*,30%,24) | 30 | 24 | 26 | 10.9433 |
| *A* | (*A/G*,6%,19) | 6 | 19 | 11 | 7.2867 |
| *A* | (*A/G*,35%,8) | 35 | 8 | 27 | 2.0597 |

## 2.6 DERIVACIÓN DEL VALOR PRESENTE DE SERIES GEOMÉTRICAS

En la sección 2.5 se introdujeron factores de gradientes uniformes que podrían ser utilizados para calcular el valor presente o el valor anual uniforme equivalente de una serie de pagos que aumenta o disminuye por una cantidad aritmética constante en periodos de pago consecutivos. Con frecuencia, los flujos de efectivo cambian por un *porcentaje constante* en periodos de pago consecutivos, por ejemplo, 5% anual. Este tipo de flujo de efectivo, llamado una *serie geométrica o escalonada,* se muestra en forma general en la figura 2.9, donde $D$ representa la cantidad en dólares en el año 1 y $E$ representa la tasa de crecimiento geométrico en forma decimal. La ecuación para calcular el valor presente $P_E$ de una serie escalonada se encuentra al calcular el valor presente de los flujos de efectivo en la figura 2.9 utilizando el factor $P/F$, $1/(1+i)^n$.

$$P_E = \frac{D}{(1+i)^1} + \frac{D(1+E)}{(1+i)^2} + \frac{D(1+E)^2}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{D(1+E)^{n-1}}{(1+i)^n}$$

$$= D\left[\frac{1}{1+i} + \frac{1+E}{(1+i)^2} + \frac{(1+E)^2}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{(1+E)^{n-1}}{(1+i)^n}\right] \qquad [2.16]$$

Se multiplican ambos lados por $(1+E)/(1+i)$, se resta la ecuación [2.16] del resultado, se factoriza $P_E$ y se obtiene:

$$P_E\left(\frac{1+E}{1+i} - 1\right) = D\left[\frac{(1+E)^n}{(1+i)^{n+1}} - \frac{1}{1+i}\right] \qquad [2.17]$$

Se resuelve para $P_E$ y se simplifica para obtener:

$$P_E = \frac{D\left[\dfrac{(1+E)^n}{(1+i)^n} - 1\right]}{E - i} \qquad E \neq i \qquad [2.18]$$

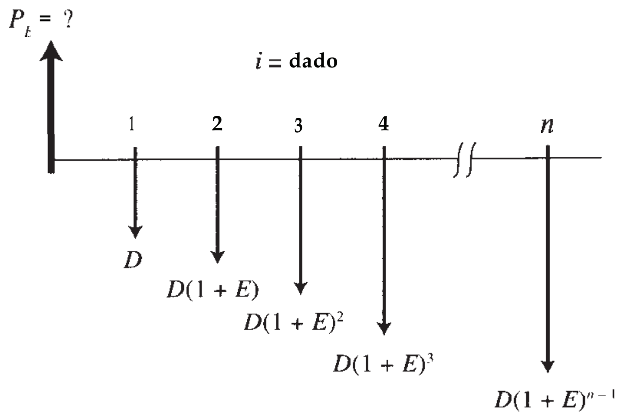



**Figura 2.9** Diagrama de flujo de efectivo paro un gradiente geométrico y su valor presente $P_E$

donde $P_E$ es el valor presente de una serie escalonada que empieza en el año 1 en $D$ dólares. Para la condición $E = i$, la ecuación [2.18] se convierte en*

$$P_E = D\frac{n}{1+E} \qquad E = i \tag{2.19}$$

El valor presente equivalente $P_E$ ocurre en el año anterior al flujo de efectivo $D$, como se muestra en la figura 2.9. Observe que $P_E$ es para la cantidad *total de la serie geométrica,* no solamente la cantidad G aplicable cuando se utiliza el factor *P/G* para gradientes aritméticos.

**Problema 2.8**

## 2.7 INTERPOLACIÓN EN TABLAS DE INTERÉS

Algunas veces es necesario localizar el valor de un factor para una tasa de interés $i$ o número de periodos $n$ que no está contemplado en las tablas de interés. Cuando esto ocurre, el valor del factor deseado puede obtenerse en una de dos formas: (1) utilizando las fórmulas derivadas en las secciones 2.1 a 2.3 y 2.5 (y resumidas en el interior de la portada) o (2) interpolando entre los valores tabulados. En general, es más fácil y más rápido utilizar las fórmulas de una calculadora u hoja de cálculo que ya las tiene preprogramadas. Además, el valor obtenido a través de la interpolación no es con exactitud el valor correcto, puesto que se está interpretando linealmente ecuaciones no lineales. Sin embargo, la interpolación es aceptable y se considera suficiente en la mayoría de los casos siempre y cuando que los valores de $i$ o $n$ no estén muy distantes entre sí.

El primer paso en la interpolación lineal es establecer los factores conocidos (valores 1 y 2) y desconocidos, como se muestra en la tabla 2.5. Se escribe entonces una ecuación de razones y se resuelve para c, de la siguiente manera:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad \text{o} \qquad c = \frac{a}{b}d \tag{2.20}$$

donde *a, b,* c y *d* representan las diferencias entre los números que se muestran en las tablas de interés. El valor de c de la ecuación [2.20] se suma o se resta del valor 1, dependiendo de si el valor del factor está aumentando o disminuyendo, respectivamente. Los siguientes ejemplos ilustran el procedimiento recién descrito.

* Utilice la regla de L'Hospital para modificar la ecuación [2.18].

$$\frac{dP_E}{dE} = \frac{D[n(1+E)^{n-1}]}{(1+i)^n}$$

Sustituya $E = i$ para obtener la ecuación [2.19]. Los cálculos del flujo efectivo que contienen series geométricas se analizan en la sección 2.10.

**Tabla 2.5** Arreglo para la interpolación lineal

| | *i* o *n* | Factor | |
|---|---|---|---|
| *b* [ *a* [ | tabulado | valor 1 | ] *c* ] *d* |
| | deseado | no *listado* | |
| | tabulad83 | valor 2 | |

## Ejemplo 2.2

Determine el valor de *A/P* para una tasa de interés de 7.3% y *n* de 10 años, es decir, (*A/P*, 7.3%, 10).

### Solución

Los valores del factor *A/P* para tasas de interés del 7 y 8% aparecen en las tablas 12 y 13, respectivamente. Se tiene la siguiente situación:

| | | | |
|---|---|---|---|
| *b* [ *a* [ | 7% | 0.14238 | ] *c* ] *d* |
| | 7.3% | X | 3 |
| | 8% | 0.14903 | |

La variable desconocida X es el vaior deseado det factor. De acuerdo con la ecuación [2.20],

$$c = \left(\frac{7.3-7}{8-7}\right)(0.14903 - 0.14238)$$

$$= \frac{0.3}{1}\, 0.00665 = 0.00199$$

Dado que el valor del factor esta aumentando a medida que la tasa de interés se incrementa de 7 a 8%, ef valor de *c* debe ser agregado al valor del factor del 7%. Así,

$$X = 0.14238 + 0.00199 = 0.14437$$

### Comentario

Es una buena práctica chequear la razonabilidad de la respuesta final verificando que X se encuentre ***entre*** 10s valores de los factores conocidos utilizados en la interpolación en las proporciones correctas aproximadamente. En este caso, puesto que 0.14437 es menor que 0.5 de la distancia entre 0.14238 y 0.14903, la respuesta parece razonable. En lugar de interpolar, en general es un procedimiento más simple utilizar la fórmula para calcular el valor del factor directamente (y es más preciso). El valor correcto del factor es 0.144358.

## Ejemplo 2.3

Halle el valor del factor (*P/F*, 4%, *48).*

**Solución**

De. acuerdo con la tabla 9 de factores de interés para un interés del 4%, los valores del factor *P/F* para 45 y 50 años pueden encontrarse de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & 45 & 0.1712 & & \\
b & a & 48 & X & c & d \\
 & & 50 & 0.1407 & & 
\end{array}
$$

Según la ecuación [2.20]

$$c = \frac{a}{b} d = \frac{48 - 45}{50 - 45}(001712 - 0.1407) = 0.0183$$

Dado que el valor del factor disminuye a medida que $n$ aumenta, $c$ se resta del valor del factor para $n = 45$.

$$X = 0.1712 - 0.0183 = 0.1529$$

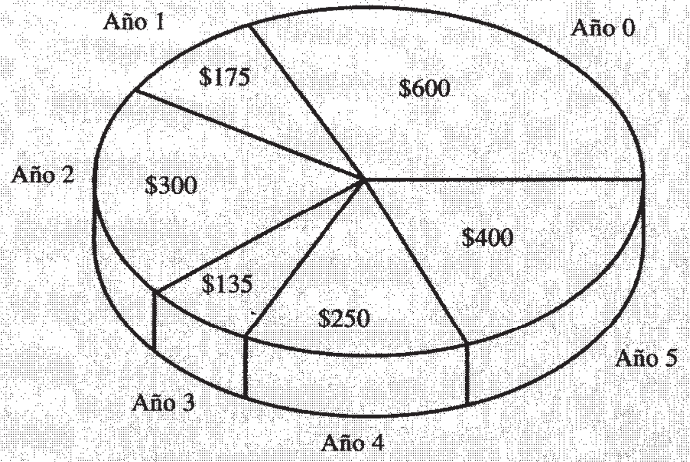
**Ejemplo adicional 2.15**
**Problemas 2.9 y 2.10**

## 2.8 CÁLCULOS DE VALOR PRESENTE, FUTURO Y ANUAL UNIFORME EQUIVALENTE

El primer paso, y probablemente el más importante para resolver los problemas de ingeniería económica, es la construcción de un diagrama de flujo de efectivo. Además de ilustrar en forma más clara la situación del problema, el diagrama de flujo de efectivo ayuda a determinar cuáles fórmulas deben ser utilizadas y si tales flujos en la forma presentada permiten la aplicación directa de las fórmulas obtenidas en las secciones anteriores. Obviamente, las fórmulas pueden ser utilizadas sólo cuando el flujo de efectivo del problema se corresponde con exactitud con el diagrama de flujo de efectivo para las fórmulas. Por ejemplo, si los pagos o los recibos ocurrieran *cada* dos *años* en lugar de cada año los factores de serie uniforme no podrían ser utilizados. Es muy importante, por consiguiente, recordar las condiciones para la aplicación de las fórmulas. El uso correcto de las fórmulas para encontrar *P*, ***F*** o ***A*** se ilustra en los ejemplos 2.4 a 2.8. Las ecuaciones se muestran en la tabla 2.2 y en el interior de la portada de este libro. Vea los ejemplos adicionales para los casos en los cuales algunas de estas fórmulas no pueden ser aplicadas.

**Ejemplo 2.4**

Un contratista de baldosas independiente realizó una auditoría de algunos registros viejos y encontró que el costo de los suministros de oficina variaban, como se muestra en la gráfica siguiente. Si el




contratista deseaba conocer el valor equivalente en el año 10 de las tres sumas más grandes solamente, ¿cuál era ese total a una tasa de interés del 5%

**Solución**

El primer paso es trazar el diagrama de flujo de efectivo desde la perspectiva del contratista. La figura 2.10 indica que debe calcularse un valor $F$. Puesto que cada valor es diferente y no tiene lugar cada año, el valor futuro $F$ puede determinarse sumando los costos unitarios individuales equivalentes en el año 10. Por tanto,

$$
\begin{aligned}
F &= 600(F/P,5\%,10) + 300(F/P,5\%,8) + 400(F/P,5\%,5) \\
&= 600(1.6289) + 300(1.4775) + 400(1.2763) \\
&= \$1931.11
\end{aligned}
$$

**Comentario**

El problema también podría resolverse encontrando el valor presente en el año 0 de los costos de $300 y $400 mediante los factores $P/F$ y luego encontrando el valor futuro del total en el año 10.

$$
\begin{aligned}
P' &= 600 + 300(P/F,5\%,2) + 400(P/F,5\%,5) \\
&= 600 + 300(0.9070) + 400(0.7835) \\
&= \$1185.50
\end{aligned}
$$

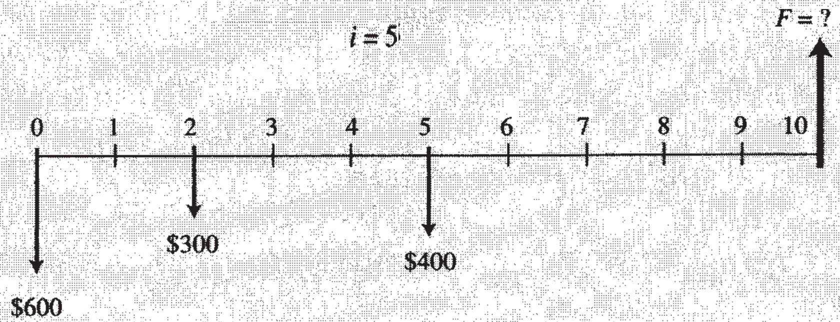



**Figura 2.10** Diagrama para el valor futufa en el año 10, ejemplo 2.4.

$$F = 1185.50(F/P,5\%,10)$$
$$= 1185.50(1.6289)$$
$$= \$1931.06$$

Es obvio que el problema podría trabajarse de diversas formas, ya que cualquier año podría utilizarse para hallar el equivalente total de los costos antes de encontrar el valor futuro en el año 10. Como ejercicio, se debería trabajar el problema utilizando el año 5 para el total equivalente y luego determinar ta cantidad final en el año 10. Todas las respuestas deben ser iguales. Las diferencias menores en valor que haya en este y en todos los cálculos futuros de este tipo se deben a errores de aproximación y al diverso número de dígitos significativos utilizados en el factor y en las cantidades en dólares para llegar a la respuesta final.

---

**Ejemplo** 2.5

¿Cuánto diera tendría un hombre en su cuenta de inversión después de 8 años si deposito $1000 anualmente durante 8 años al 14% anual empezando un año a partir de hoy.

**Solución**

El diagrama de flujo de efectivo se muestra en la figura 2.11. Dado que los pagos empiezan al final del año 1 y terminan en el año en que et valor futuro es deseado, puede utilizarse la fórmula *F/A*. Por tanto,

$$F = 1000(F/A, 14\%,8) = 1000(13.2328) = \$13232.80$$

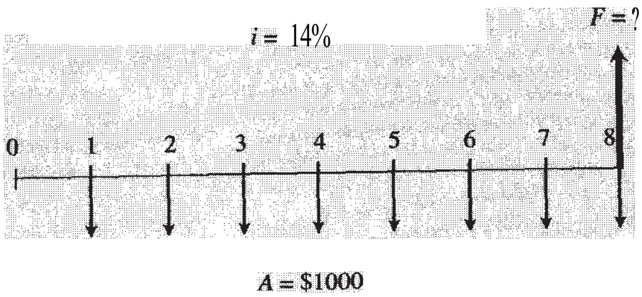



**Figura 2.11** Diagrama para encontrar *F* para una serie uniforme, ejemplo 2.5.

---

**Ejemplo 2.6**

¿Cuánto dinero estaría una persona dispuesta a gastar ahora con el fin de: evitar el gasto de $500 dentro de siete años a partir de hoy si la tasa de interés es del 18% anual?

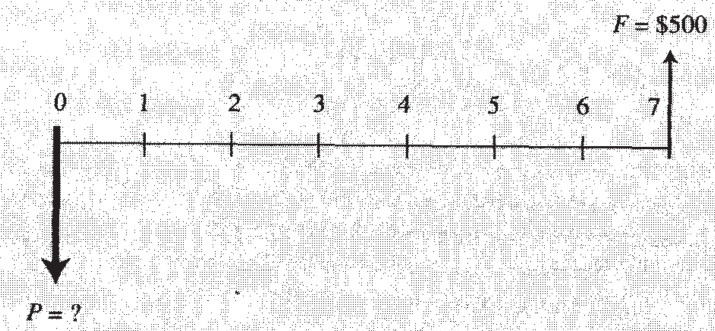



**Figura 2.12** Diagrama para el ejemplo 2.6.

### Solución

El diagrama de flujo de efectivo, que aparece en la figura 2.12, permite el uso del factor $P/F$ directamente. $F$ está dado y $P$ debe ser calculado.

$$P = \$500(P/F,18\%,7) = 500(0.3139) = \$156.95$$

### Comentario

El mismo problema puede ser expresado en otras formas. ¿Cuál es el valor presente de $500 dentro de siete años a partir de hoy si la tasa de interés es del 18% anual? ¿Cuál cantidad presente sería equivalente a $500 dentro de siete años si la tasa de interés es del 18% anual? ¿Cuál inversión inicial es equivalente a gastar $500 dentro de siete años a una tasa de interés del 18% anual? En cada caso, $F$ está dado y $P$ debe ser calculado. Aunque hay muchas formas para expresar el mismo problema, el diagrama de flujo de efectivo es el mismo en cada caso.

---

## Ejemplo 2.7

¿Cuánto dinero estaría una persona dispuesta apagar ahora por una inversión cuyo retorno garantizado será de $600 anual durante 9 años empezando el año próximo, a una tasa de interés del 16%. anual?

### Solución

El diagrama de flujo de efectivo se muestra en la figura 2.13. Dado que el diagrama de fl ujo de efectivo corresponde a la fórmula de serie uniforme $P/A$, el problema puede resolverse directamente.

$$P = 600(P/A,16\%,9) = 600(4.6065) = \$2763.90$$

### Comentario

Es necesario reconocer que los factores $P/F$ pueden utilizarse para cada uno de los nueve recibos y los valores presentes resultantes pueden agregarse para obtener la respuesta correcta. Otra forma es hallar el valor futuro Fde los $600 pagos y luego encontrar el valor presente del valor $F$. Hay muchas formas de resolver un problema de ingeniería económica. En general sólo se presenta aquí el método más directo, pero es aconsejable trabajar los problemas al menos en otra forma para familiarizarse con el uso de las fórmulas.

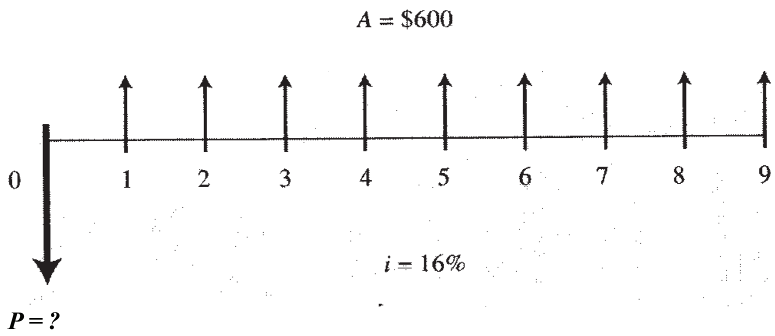



Figura 2.13 Diagrama para el ejemplo 2.7.

## Ejemplo 2.8

¿Cuánto dinero debe depositar Carol cada año empezando dentro de 1 año al $5\frac{1}{2}\%$ anual con el fin de acumular $6000 dentro de siete años?

### Solución

El diagrama de flujo de efectivo desde la perspectiva de Carol se muestra en la figura 2.14. Este diagrama corresponde a la fórmula *A/F* en la forma derivada.

$$A = \$6000(A/F,5.5\%,7) = 6000(0.12096) = \$725.76 \text{ anual}$$

### Comentario

El valor del factor *A/F* de 0.12096 se calcula mediante la fórmula del factor en fa ecuación [2.8].

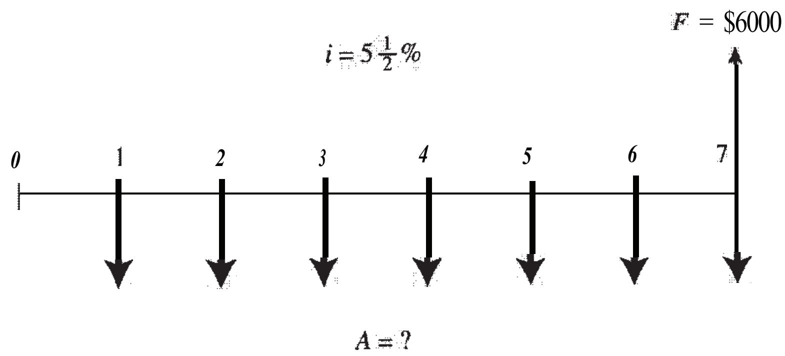



Figura 2.14 Diagrama para el ejemplo 2.8.

**Ejemplo adicional 2.16**
**Problemas 2.11 a 2.29**

## 2.9 VALOR PRESENTE Y VALOR ANUAL UNIFORME EQUIVALENTE DE LOS GRADIENTES UNIFORMES CONVENCIONALES

Cuando hay un flujo de efectivo de un gradiente uniforme convencional involucrado (figura 2.5), el gradiente empieza entre los años 1 y 2, coincidiendo el año 0 para el gradiente y el año 0 del diagrama de flujo de efectivo completo. En este caso, el valor presente $P_G$ o valor anual uniforme equivalente $A_G$ solamente del gradiente puede determinarse mediante la fórmula *P/G*, ecuación [2.14], o la fórmula *A/G*, ecuación [2.15], respectivamente. *(Véase* la portada interna del libro). El flujo de efectivo que forma la cantidad base del gradiente debe considerarse por separado. Por consiguiente, para situaciones de flujo de efectivo que contienen gradientes convencionales:

1. La cantidad básica es la cantidad *A* de la serie uniforme que empieza en el año 1 y se extiende al año *n*.
2. Para un gradiente creciente, debe sumarse la cantidad del gradiente a la cantidad de la serie uniforme.
3. Para un gradiente decreciente, debe restarse la cantidad del gradiente de la cantidad de la serie uniforme.

En consecuencia, las ecuaciones generales para calcular el valor presente total $P_T$ de los gradientes convencionales son,

$$P_T = P_A + P_G \quad y \quad P_T = P_A - P_G,$$

El cálculo del valor presente para un gradiente creciente se ilustra en el ejemplo 2.9.

**Ejemplo** 2.9

Una pareja piensa empezar a ahorrar dinero depositando $500 en su cuenta de ahorros, dentro de un año. Ellos estiman que los depósitos aumentarán en $100 cada año durante 9 años a partir de entonces. ¿Cuál sería el valor presente de las inversiones si la tasa de interés es de 5% anual?

**Solución**

El diagrama de flujo de efectivo desde la perspectiva de la pareja se muestra en la figura 2.15. Deben realizarse dos cálculos: el primero, para calcular el valor presente de la cantidad base $P_A$ y, el segundo, para calcular el valor presente del gradiente $P_G$. Entonces, el valor total presente $P_T$ es igual a $P_G$ más $P_A$, puesto que $P_A$ y $P_G$ ocurren ambos en el año 0, lo cual se ilustra claramente en el diagrama de flujo de efectivo dividido en la figura 2.16. El valor presente es:

$$\begin{aligned} P_T &= P_A + P_G \\ &= 500(P/A,5\%,10) + 100(P/G,5\%,10) \\ &= 500(7.7217) + 100(31.652) \\ &= \$7026.05 \end{aligned}$$

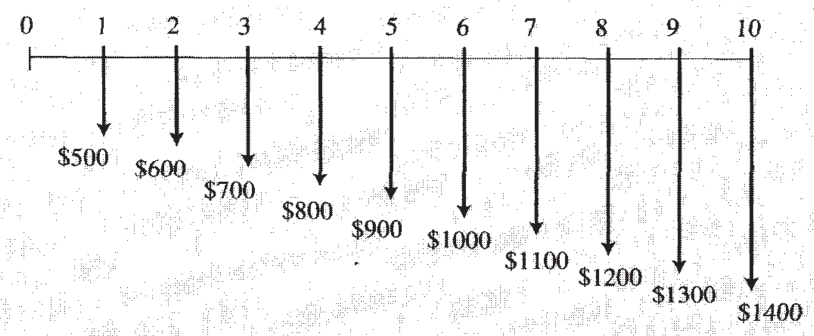



**Figura 2.15** Flujo de efectivo, ejemplo 2.9.

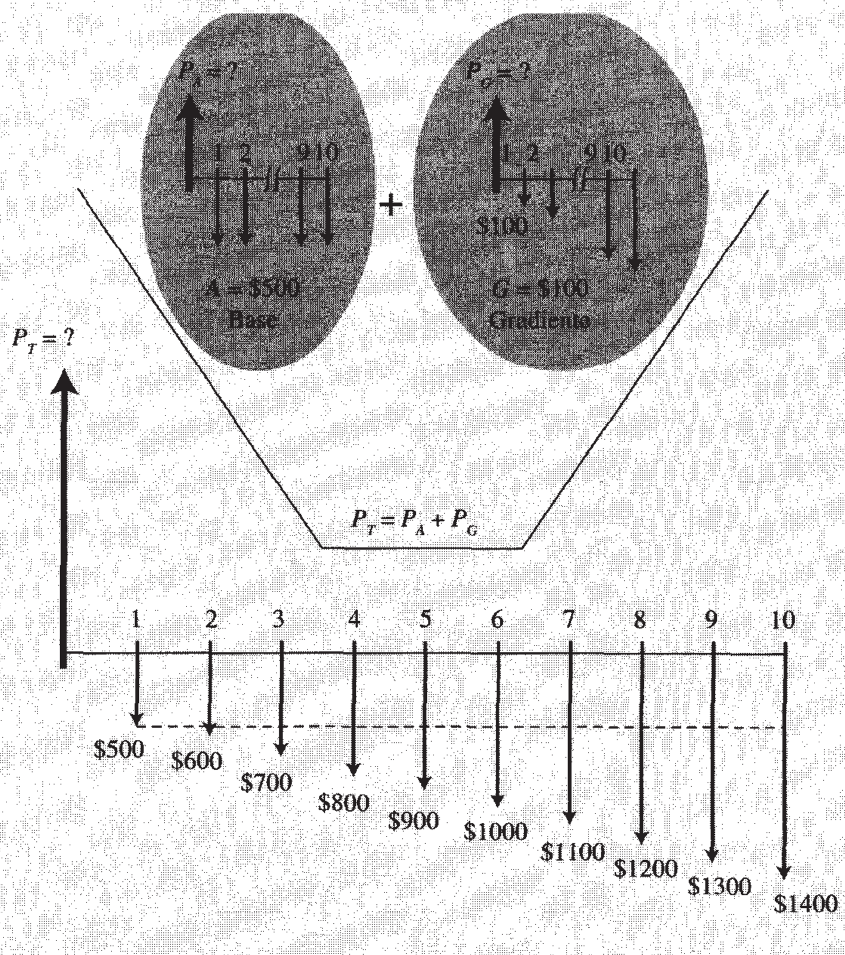



**Figura 2.16** Diagrama dividido para el ejemplo 2.9.

**Comentario**

Es importante hacer énfasis de nuevo en que el factor *P/G* determina *solamente* el valor presente del *gradiente*. Cualquier otro flujo de efectivo involucrado debe ser considerado por separado.

**Ejemplo 2.10**

Trabaje de nuevo el ejemplo 2.9 resalviendo para la serie de valor anual uniforme equivalente.

**Solución**

Aquí, también es necesario considerar por separado el gradiente y los demás costos involucradas en el flujo de efectivo. Si se utilizan los flujos de efectivo de la figura 2.16, el valor anual total $A_T$ es:

$$A_T = A_1 + A_G$$

donde $A_1$ es el valor anual equivalente de la suma base $500 y $A_G$ es el valor anual equivalente del gradiente.

$$A_T = 500 + 100(A/G,5\%,10) = 500 + 100(4.0991)$$
$$= \$909.91 \text{ anualmente durante los años 1 al 10}$$

Comentario

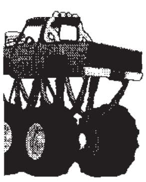
Con frecuencia es útil recordar que si el valor presente ya ha sido calculado (como en el ejemplo 2.9), éste puede ser multiplicado simplemente por el factor apropiado *A/P* para obtener *A*. Aquí,

$$A_T = P_T(A/P,5\%,10) = 7026.05(0.12950)$$
$$= \$909.87$$

**Problemas 2.30 a 2.38**

## 2.10 CÁLCULOS QUE INVOLUCRAN SERIES GEOMÉTRICAS

Como se analizó en la sección 2.6, el valor presente $P_E$ de una serie geométrica (cantidad base y gradiente geométrico) está determinado por las ecuaciones [2.18] o [2.19]. El valor anual uniforme equivalente o el valor futuro de la serie puede ser calculado convirtiendo el valor presente utilizando el factor de interés apropiado, es decir, *A/P* o *F/P*, respectivamente. El uso de la ecuación [2.18] se ilustra en el ejemplo 2. 11.



**Ejemplo 2.11**

La incorporación de ruedas grandes a una camioneta cuesta $8000 y se espera que dure 6 años con un valor de salvamento de $1300. Se espera que el costa de mantenimiento sea $1700 el primer año, aumentando en 11 % anualmente de ese momento en adelante. Determine el valor presente equivalente del costo de la modificación y del mantenimiento si la tasa de interés es del 8% anual. Al determinar *P* para este ejemplo, utilice signos menos para los flujos de efectivo negativos y signos más a fin de indicar un flujo de efectivo positivo para el valor de salvamento.

**Solución**

El diagrama de flujo de efectivo se muestra en la figura 2.17. Dado que $E \neq i$, la ecuación [2.18] se utiliza para calcular $P_E$. El $P_T$ total es:

$$P_T = -8000 - P_E + (1300(P/F,8\%,6)$$

$$= -8000 - 1700 \; \frac{[(1+0.11)^6/(1+0.08)^6 - 1}{0.11 - 0.08} + 1300(P/F,8\%,6) \qquad [2.21]$$

$$= -8000 - 1700(5.9559) + 819.26 = \$ -17{,}305.85$$

**Comentario**

El valor anual uniforme equivalente de la camioneta puede determinarse multiplicando \$–17,305.85 por $(A/P, 8\%,6)$.

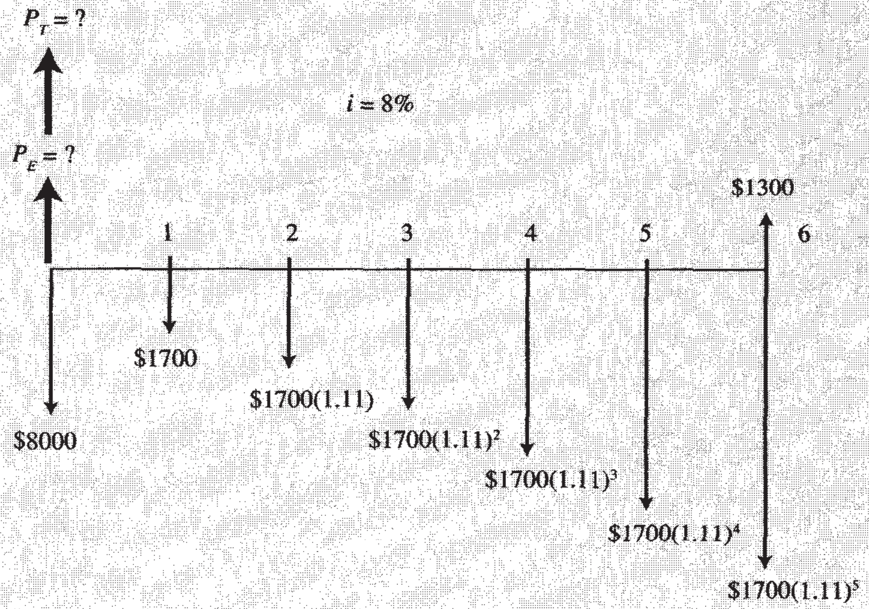



Figura 2.17 Diagrama de flujo de efectivo para el ejemplo 2.11.

---

**Ejemplo** 2.11
**(Hoja de cálculo)**

La incorporación de ruedas grandes a una camioneta cuesta $8000 y se espera que dure 6 años con un valor de salvamento de $1300. Se espera que el costo de mantenimiento sea $1700 el primer año, aumentando en 11% anualmente a partir de ese momento, Utilice et análisis de hoja de cálculo para determinar el valor presente equivalente de los castos de la modificación y del mantenimiento si la tasa de interés es de 8% anual.

**Solución**

La figura 2.18 presenta una hoja de cálculo con el valor presente en la celda B8. La relación utilizada para calcular $P_T$ = \$-17,306 se muestra a continuación en la hoja de cálculo de Excel en la reproducción de pantalla. Este es equivalente a la ecuación [2.21] en el ejemplo 2. 11 anterior.

**Comentario**

El lector debe trabajar este ejemplo en su propio sistema de hoja de cálculo a fin de familiarizarse con su uso para problemas de ingeniería económica. También, debe tratar de hacer sus propias tareas utilizando lo más posible una hoja de cálculo.

**Problemas 2.39 a 2.45**

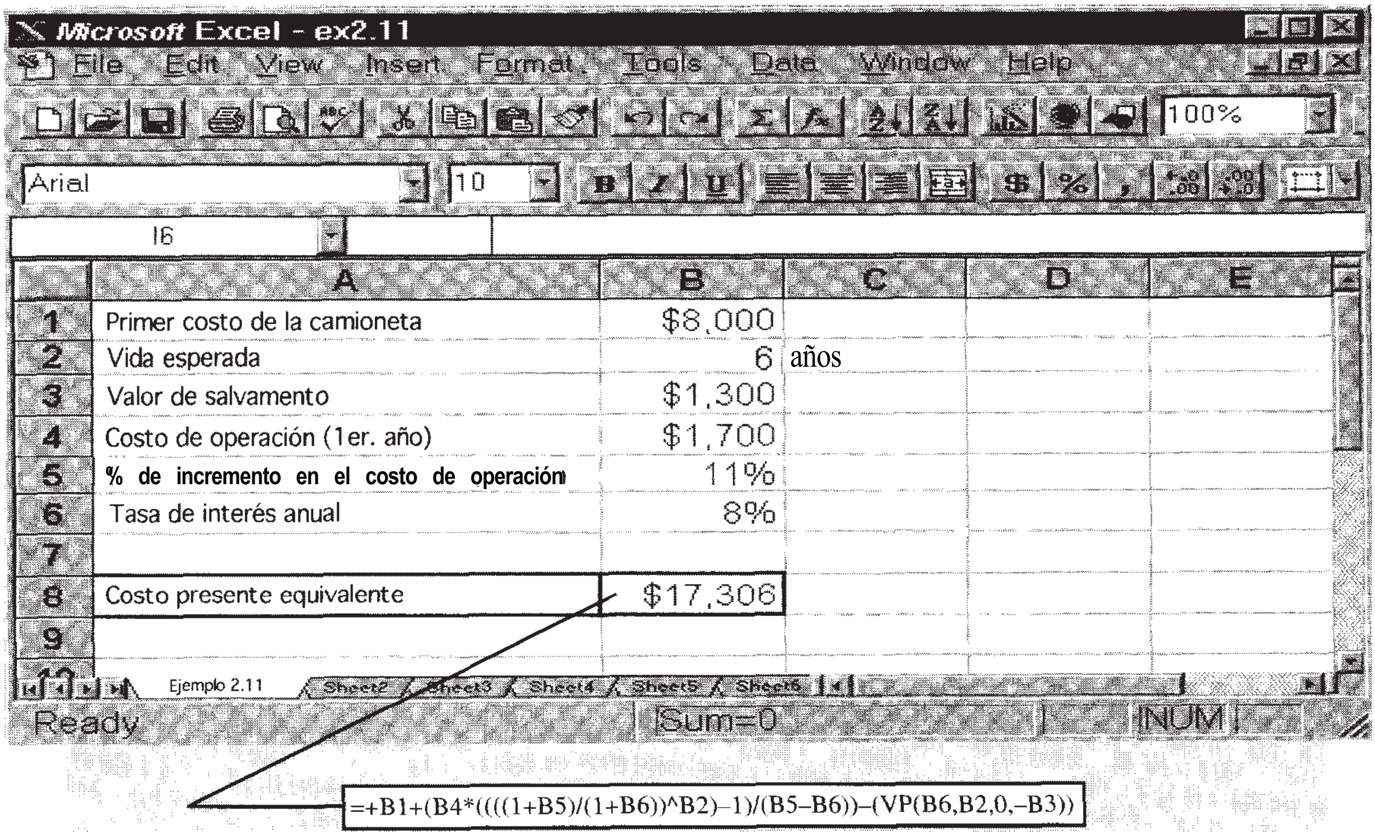



Figura 2.18 Solución de hoja de cálculo, ejemplo 2.11.

## 2.11 CÁLCULO DE TASAS DE INTERÉS DESCONOCIDAS

En algunos casos, se conoce la cantidad de dinero depositado y la cantidad de dinero recibida luego de un número especificado de años pero se desconoce la tasa de interés o tasa de retorno. Cuando hay involucrados un pago único y un recibo único, una serie uniforme de pagos o recibos, o un gradiente convencional uniforme de pagos o recibos, la tasa desconocida puede determinarse para *i* por una solución directa de la ecuación del valor del dinero en el tiempo. Sin embargo, cuando hay pagos no uniformes o muchos factores, el problema debe resolverse mediante un método de ensayo y error o numérico. En esta sección se consideran problemas de flujo de efectivo, serie uniforme, pago único, o la serie gradiente convencional. Los problemas más complicados de ensayo y error se abordan en el capítulo 7, que estudia el análisis de tasas de retorno.

Las fórmulas de pago único pueden reordenarse con facilidad y expresarse en términos de *i*, pero para las ecuaciones de serie uniforme y de gradientes, comúnmente es necesario ***resolver para el valor del factor*** y determinar la tasa de interés a partir de las tablas de factores de interés. Ambas situaciones se ilustran en los ejemplos siguientes.

---

Ejemplo 2.12

*(a)* Si Caro1 puede hacer una inversión de negocios que requiere un gasto de $3000 ahora con el fin de recibir $5000 dentro de cinco años, ¿cuál sería la tasa de retorno sobre la inversión?

*(b)* Si Carol puede recibir 7% anual de intereses de un certificado de depósito, ¿cuál inversión debe hacerse?

**Solución**

*(a)* El diagrama de flujo de efectivo se muestra en la figura 2.19. Dado que hay fórmulas de pago único involucradas en este problema, la *i* puede determinarse directamente de la fórmula:

$$P = F(P/F,i,n) = F \frac{1}{(1+i)}$$

$$3000 = 5000 \frac{1}{(1+i)^5}$$

$$0.600 = \frac{1}{(1+i)^5}$$

$$i = \left(\frac{1}{0.6}\right)^{0.2} - 1 = 0.1076\ (10.76\%)$$

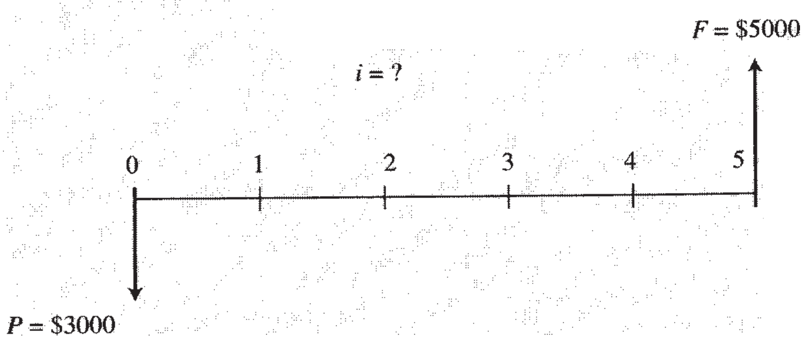



Figura 2.19 **Diagrama utilizado para determinar *i*, ejemplo 2.12*a*.**

Alternativamente, la tasa de interés puede encontrarse estableciendo las ecuaciones *P/F* o *F/P*, resolviendo para el valor del factor e interpolando. Al utilizar *P/F*,

$$\begin{aligned} P &= F(P/F,i,n) \\ 3000 &= 5000(P/F,i,5) \\ (P/F,i,5) &= 3000/5000 \\ &= 0.6000 \end{aligned}$$

De acuerdo con las tablas de interés, un factor *P/F* de 0.6000 para $n = 5$ se encuentra entre 10 y 11%. Interpolando entre estos dos valores mediante la ecuación [2.20], se obtiene:

$$\begin{aligned} c &= \frac{0.6209 - 0.6000}{0.6209 - 0.5935}(11 - 10) \\ &= \frac{0.0209}{0.0274}(1) \\ &= 0.7628 \end{aligned}$$

Por consiguiente, se debe agregar c al factor base del 10%.

$$i = 10 + 0.76 = 10.76\%$$

Es una buena práctica insertar el valor calculada nuevamente en la ecuación para verificar qué tan correcta está la respuesta. Por tanto,

$$\begin{aligned} c &= 5000(P/F,10.76\%,5) \\ &= 5000\frac{1}{(1 + 0.1076)^5} \\ &= 5000(0.5999) \\ &= 3000 \end{aligned}$$

(b Puesto que 10.76% es mayor que el 7% disponible en certificados de depósito, Caro1 debe hacer la inversión de negocíos.

**Comentario**

Comoquiera que la tasa de retorno más alta sería la recibida en la inversión del negocio es probable que Caro1 seleccione esta opción en lugar de los certificados de depósito. Sin embargo, no se especificó el grado de riesgo asociado con la inversión de negocios. Obviamente, la cantidad de riesgo asociada con una inversión particular es un parámetro importante y con frecuencia conduce a la selección de la inversión con la tasa de retorno más baja. A menos que se especifique lo contrario, los problemas en este texto asumirán igual riesgo para todas las alternativas.

---

**Ejemplo 2.13**

Unos padres desean ahorrar dinero para la educación de su hijo; compran entonces una póliza de seguros que producirá $10,000 dentro de quince años. Ellos deben pagar $500 por año durante 15 años empezando dentro de un año. ¿Cuál será la tasa de retorno sobre sus inversiones?

**Solución**

El diagrama de flujo de efectivo se muestra en la figura 2.20. Cualquiera de los factores, *A/F* o *F/A*, puede utilizarse. Si se utiliza *A/F*:

$$A = F(A/F,i,n)$$
$$500 = 10{,}000(A/F,i,15)$$
$$(A/F,i,15) = 0.0500$$

Según las tablas de interés bajo la columna *MF* para 15 años, el valor 0.0500 se encuentra entre 3 y 4%. Por interpolación, $i = 3.98\%$.

**Comentario**

Para confirmar, debe insertarse el valor. $i = 3.98\%$ en la fórmula ***MF*** para determinar que se obtiene **0.0500.**

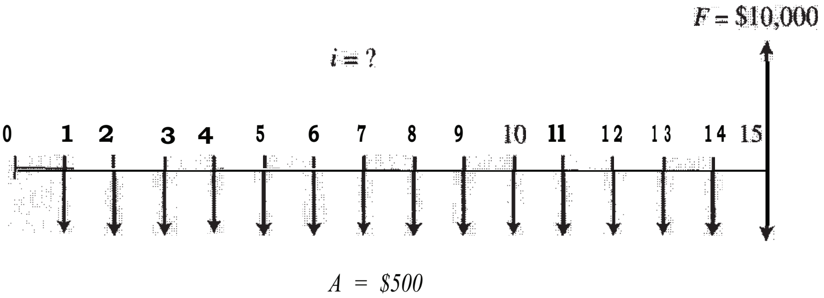



**Figura 2.20** **Diagrama para determinar la tasa de retorno, ejemplo 2.13.**

**Problemas 2.46 a 2.51**

## 2.12 CÁLCULO DE AÑOS DESCONOCIDOS

En el análisis económico del punto de equilibrio, algunas veces es necesario determinar el número de años (periodos) requerido antes de que la inversión se pague. Otras veces se desea saber cuándo determinadas cantidades de dinero estarán disponibles a partir de una inversión propuesta. En estos casos, el valor desconocido es $n$; para encontrar esta variable pueden wtilizarse técnicas similares a aquellas de la sección anterior sobre tasas de interés desconocidas.

Algunos de estos problemas pueden resolverse directamente para $n$ mediante una manipulación apropiada de las fórmulas de serie uniforme y de pago único. De manera alternativa, se puede resolver para el valor del factor e interpolar en las tablas de interés, como se ilustra a continuación.

### Ejemplo 2.14

¿Cuánto tiempo tomará duplicar $1000 si la tasa de interés es del 5% anual?

#### Solución

El diagrama de flujo de efectivo se muestra en la figura 2.21. El valor $n$ se puede determinar sea mediante el factor $F/P$ o el factor $P/F$. Utilizando el factor $P/F$,

$$\begin{aligned} P &= F(P/F,i,n) \\ 1000 &= 2000(P/F,5\%,n) \\ (P/F,5\%,n) &= 0.500 \end{aligned}$$

Según la tabla de interés del 5%, el valor 0.500 bajo la columna $P/F$ se encuentra entre 14 y 15 años. Por interpolación, $n$ = 14.2 años.

#### Comentario

Los problemas de este tipo se complican más cuando se involucran dos o más pagos no uniformes. Se aconseja leer los ejemplos adicionales para una ilustración que utiliza el método de ensayo y error.

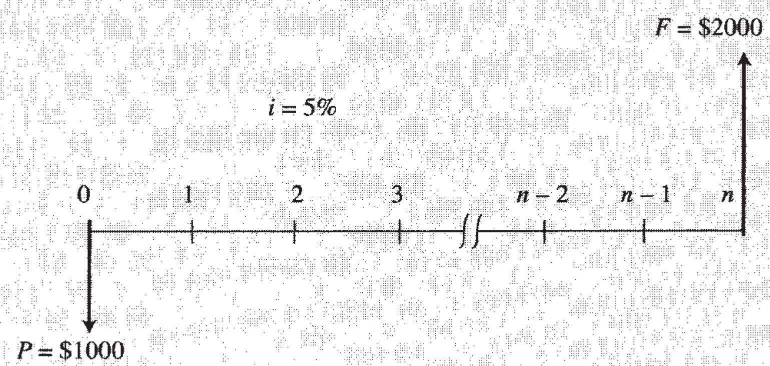



**Figura 2.21** Diagrama para determinar un valor $n$, ejemplo 2.14.

**Ejemplo adicional 2.17**
**Problemas 2.52 a 2.57**

## EJEMPLOS ADICIONALES

### Ejemplo 2.15

**FACTORES DE INTERÉS, SECCIÓN 2.7** La firma Waldorf Concession Stands, Inc. ha comprado un nuevo edificio. El valor presente de los costos de mantenimiento futuros debe ser calculado con un factor $P/A$. Si $i$ = 13% anual y se espera que la vida sea 42 años, encuentre el valor correcto del factor.

**Solución**

La fórmula para el factor $P/A$ es:

$$(P/A, 13\%, 42) = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

$$= \frac{(1+0.13)^{42} - 1}{0.13(1+0.13)^{42}}$$

$$= \frac{168.549}{22.0412} = \mathbf{7.647}$$

El valor $P/A$ también podría estar determinado por la interpolación en las tablas de interés. Sin embargo, puesto que no hay valores de la tabla aqui para $i = 13\%$ o $n = 42$, se requeriría una interpolación en dos sentidos. Obviamente es más fácil y preciso utilizar la fórmula de factores.

---

**Ejemplo 2.16**

CÁLCULO DE $P$, $F$ Y $A$, **SECCIÓN** 2.8 Explique por qué no pueden utilizarse factores de serie uniforme para calcular $P$ o $F$ directamente para cualquiera de los flujos de efectivo mostrados en la figura 2.22.

**Solución**

*(a)* El factor $P/A$ no puede ser utilizado para calcular $P$, ya que el recibo de $100 anualmente no ocurre todos los años desde el año 1 hasta el año 5.

*(b)* Puesto que no hay $A$ = $550 en el año 5, no puede utilizarse el factor $F/A$. La relación $F = 550(F/A,i,4)$ formaría el valor futuro en el año 4, no en el año 5 como se deseaba.

*(c)* El primer valor $A$ = $1000 ocurre en el año 2. El uso de la relación $P = 1000(P/A,i,4)$ permitirá calcular $P$ en el año 1, no en el año 0.

*(d)* Los valares de los recibos son desiguales; por tanto la relación $F = A(F/A,i,3)$ no *se* puede utilizar para calcular $F$.

**Comentario**

Algunas formas calculan $P$ o $F$ sin recurrir solamente a los factores $P/F$ y $F/P$; *estos* métodos se analizan en el capítulo 4.

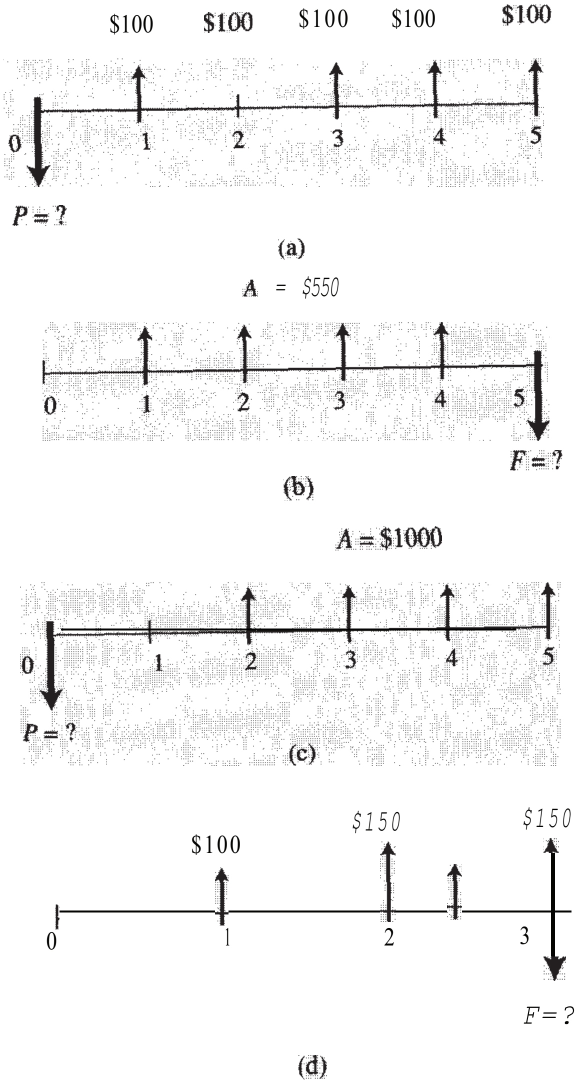



Figura 2.22 Diagramas de flujo de efectivo, ejemplo 2.16.

---

## Ejemplo 2.17

**VALOR n DESCONOCIDO, SECCIÓN 2.12** Si Jeremías deposita $2000 ahora, $500 dentro de tres años y $1000 dentro de cinco años, ¿dentro de cuántos años su inversión total ascenderá a $10,000 si la tasa de interés es 6% anual?

**Solución**

El diagrama de flujo de efectivo (figura 2.23) requiere que la siguiente ecuación sea correcta.

$$F = P_1(F/P,i,n) + P_2(F/P,i,n-3) + P_3(F/P,i,n-5)$$
$$10{,}000 = 2000(F/P,6\%,n) + 500(F/P,6\%,n-3) + 1000(F/P,6\%,n-5)$$

Es necesario seleccionar diversos valores de $n$ y resolver la ecuación. La interpolación para $n$ será necesaria para obtener una igualdad exacta. El procedimiento mostrado en la tabla 2.6 indica que 20 años es mucho tiempo y 15 años es muy corto tiempo. Por consiguiente, se interpola entre 15 y 20 años.

$$c = \frac{10{,}000 - 7590.10}{(10{,}157.20 - 7590.10)}(20 - 15) = 4.69$$

$$n = 15 + c = 19.69 \approx 20 \text{ años}$$

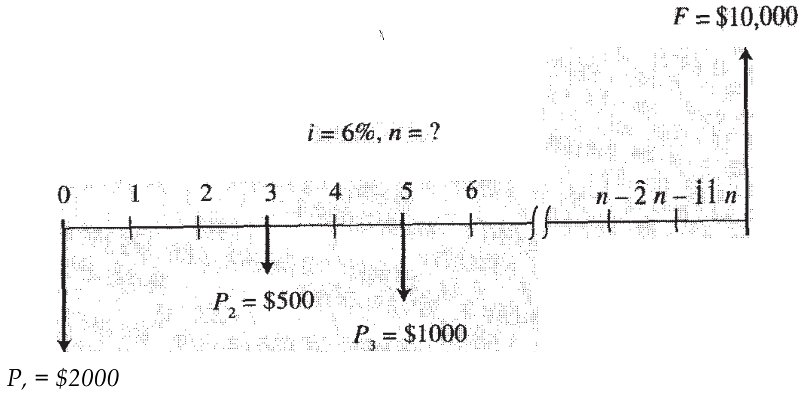



**Figura 2.23 Diagrama para determinar $n$ para una serie no uniforme, ejemplo 2.17.**

## Comentario

Dado que el interés aumenta en forma compuesta al final de cada año, el dinero no podría realmente ser retirado hasta el año 20, tiempo en el cual la cantidad acumulada sería $10,157.20.

**Tabla 2.6** Solución de ensayo y error para $n$, ejemplo 2.17

| $n$ | 2,000 × $(F/P,6\%,n)$ | 500 × $(F/P,6\%,n-3)$ | 1,000 × $(F/P,6\%,n-5)$ | $F$ | Observación |
|---|---|---|---|---|---|
| 15 | 4,793.20 | 1,006.10 | 1,790.80 | 7,590.10 | Muy pequeño |
| 20 | 6,414.20 | 1,346.40 | 2,396.60 | 10,157.20 | Muy grande |

## RESUMEN DEL CAPÍTULO

En este capítulo se introdujeron fórmulas que permiten al lector hacer cálculos de equivalencia para flujos de efectivo, presentes, futuros, anuales y gradientes. La facilidad de utilizar estas fórmulas y la notación del factor estándar que los representa es fundamental para permitirle avanzar exitosamente a través de otros capítulos en este libro. Al utilizar estas fórmulas y/o las tablas generadas de la parte del factor de las mismas, es posible convertir flujos de efectivo únicos en flujos de efectivo, o gradientes uniformes en valores presentes y mucho más. Asimismo es posible resolver estas fórmulas para la tasa de retorno (i) o el tiempo (n). Al comprender la forma de manipularlas, el lector adquiere un conjunto de herramientas verdaderamente poderoso que le ayudará a negociar no sólo lo que resta de este libro, sino también muchas de las experiencias encontradas en la vida diaria.

## PROBLEMAS

2.1 Construya los diagramas de flujo de efectivo y derive las fórmulas para los factores enumerados a continuación para cantidades de principio de año en lugar de la convención de final de año. El valor $P$ debe tener lugar al mismo tiempo que para la convención de final de año.

1. $P/F$ o factor FVPPU
2. $P/A$ o factor FRC-SU
3. $F/A$ o factor FCCSU

2.2 Encuentre el valor numérico correcto para los siguientes factores de las tablas de interés:

1. ($F/P$, 10%,28)
2. ($A/F$,1%,1)
3. ($A/P$,30%,22)
4. ($P/A$, 10%,25)
5. ($P/F$, 16%,35)

2.3 Construya un diagrama de flujo de efectivo para las siguientes transacciones.

| **Año, $k$** | **0** | 1 | 2 | 3-10 |
|---|---|---|---|---|
| **Depósito, $** | **10,000** | 200 | 400 | $400 + 300(k - 3)$ |

2.4 Construya un diagrama de flujo de efectivo para las siguientes transacciones.

| **Año, $k$** | ***0*** | 1 | 2-8 |
|---|---|---|---|
| **Transacción** | \$-6000 | 1000 | $2000 - 100(k - 2)$ |

2.5 Construya un diagrama de flujo de efectivo para las siguientes transacciones.

| **Año, $k$** | ***0*** | 1-4 | 5-7 |
|---|---|---|---|
| **Transacción** | \$-8000 | 1000 | $800 - 100(k + 2)$ |