Juegos Bayesianos

1: Definición y equilibrio

Universidad Carlos III de Madrid

El juego bayesiano

- En los juegos definidos hasta ahora, todos los elementos del juego son conocidos por todos los jugadores.
  - Estrategias (acciones).
  - Orden del juego.
  - Función de pagos.
- Es decir, cuando definimos un juego todos los jugadores saben qué juego se está jugando.
  - Y también: todos los jugadores saben que todos los jugadores saben qué juego se está jugando.
  - Y también: todos saben que todos saben que todos saben…. qué juego se está jugando.
- Esto se denomina conocimiento común. Es decir, una vez definido el juego, este es de conocimiento común.

El juego bayesiano

- A menudo, alguna de las características del juego no es conocida por algún jugador.
- Esto se traduce en que hay jugadores con información privada no conocida por otros jugadores.
- En esos casos, los modelos de juego vistos hasta ahora no serían, en principio, adecuados.
- Nuevo modelo: el juego bayesiano, donde los pagos no son conocimiento común.
- La información privada sobre alguna de las otras características se puede modelizar también como un caso de información privada sobre los pagos.
- P.e., si la Jugadora 1 no sabe si el conjunto de estrategias de la Jugadora 2 es {A, B} o {A, B, C} podemos transformar el juego en otro en el que la Jugadora 2 tiene como conjunto de estrategias el {A, B, C}, pero la Jugadora 1 no sabe si los pagos de la Jugadora 2 en caso de elegir la C son los que 2 sabe o son un valor muy bajo (que hará que C nunca se elija).
- Según si el juego sobre el que hay información asimétrica es estático o dinámico, así el juego bayesiano será también estático o dinámico. En este tema solo veremos los estáticos.

El juego bayesiano

Ejemplos de juegos bayesianos.

- Duopolio de Cournot donde los costes de la rival son desconocidos.
- Oligopolio de Bertrand donde la demanda es incierta, pero una empresa tiene información sobre ella.
- Subasta donde las valoraciones de los demás participantes no son conocidas.
- Contribuciones privadas a un bien público sin conocer costes o valoraciones de los demás.
- Negociación sin conocer su factor de descuento del rival.
- Batalla de los sexos sin saber si la pareja prefiere estar sola o acompañada.
- Dilema del prisionero sin conocer si la otra jugador presenta preferencias altruistas.

El juego bayesiano

En el estudio de los juegos bayesianos veremos lo siguiente:

- La definición de juego bayesiano para recoger la información asimétrica.
- El uso de las funciones de mejor respuesta para definir el equilibrio bayesiano.
- La redefinición del juego bayesiano como un juego dinámico de información imperfecta.
- La equivalencia del equilibrio bayesiano con el equilibrio de Nash de la forma normal correspondiente a ese juego dinámico.

Ejemplo 1

- El Jugador 1 puede elegir entre dos acciones A y B.
- El Jugador 2 puede elegir entre dos acciones I y D.
- Los pagos dependen de los tipos de jugadores.
- El Jugador 1 es de un solo tipo y este es conocido por el Jugador 2.
- El Jugador 2 puede ser del tipo *x* o de tipo *y.*
- El Jugador 2 sabe su tipo pero el Jugador 1 no sabe con certeza el tipo del Jugador 2.
- El Jugador 1 sabe que el Jugador 2 es del tipo *x* con probabilidad 2/3, y del tipo *y* con probabilidad 1/3.
- Los pagos, según acciones elegidas y tipo del Jugador 2, se muestran en las siguientes tablas.

Ejemplo 1

Modelizamos "no conocer los pagos" como "no conocer los tipos"

$p = 2/3$ 2 tipo *x*

		I	D
1	A	4 , 3	3 , 1
	B	3 , 6	2 , 3

$p = 1/3$ 2 tipo *y*

		I	D
1	A	3 , 3	1 , 6
	B	1 , 1	5 , 3

- Es un juego bayesiano.
- No son dos juegos en forma normal: no son dos matrices independientes y no se pueden analizar como tales.
- El Jugador 1 no sabe en qué matriz están.
- El Jugador 2 sí sabe en qué matriz están.

Ejemplo 1

- Encontremos el equilibrio bayesiano a partir de las correspondencias de mejor respuesta.
- Comencemos por el Jugador 2, que conoce su tipo (y el tipo del Jugador 1):
  - Si 2 es del tipo *x*:
    - La estrategia D está estrictamente dominada por la estrategia I. Su mejor respuesta para cualquier estrategia del Jugador 1 será I.
  - Si 2 es del tipo *y*:
    - La estrategia I está estrictamente dominada por la estrategia D. Su mejor respuesta para cualquier estrategia del Jugador 1 será D.
  - Es decir, la mejor respuesta del Jugador 2 ante cualquier estrategia del Jugador 1 será (I, D).
- Ahora podremos calcular la mejor respuesta de 1 frente a (I, D):
  - $U_1(\text{A, ID}) = (2/3)4 + (1/3)1 = 9/3$
  - $U_1(\text{B, ID}) = (2/3)3 + (1/3)5 = 11/3$
- El equilibrio bayesiano será: (B, (I, D)).

Ejemplo 1

- Este ejemplo ha sido fácil porque el Jugador 2 tenía una estrategia dominante. En general no será así y tendremos que calcular todas las mejores respuestas del Jugador 1 para las posibles estrategias del Jugador 2, $S_2 = \{\text{II, ID, DI, DD}\}$.
- A partir de ahí encontraríamos estrategias tales que una fuera mejor respuesta frente a la otra y viceversa (lo veremos con más cuidado en el Ejemplo 2).

Pago esperado de jugar A:

$$U_1(\text{A, II}) = (2/3)4 + (1/3)3 = 11/3$$
$$U_1(\text{A, ID}) = (2/3)4 + (1/3)1 = 9/3$$
$$U_1(\text{A, DI}) = (2/3)3 + (1/3)3 = 9/3$$
$$U_1(\text{A, DD}) = (2/3)3 + (1/3)1 = 7/3$$

Pago esperado de jugar B:

$$U_1(\text{B, II}) = (2/3)3 + (1/3)1 = 7/3$$
$$U_1(\text{B, ID}) = (2/3)3 + (1/3)5 = 11/3$$
$$U_1(\text{B, DI}) = (2/3)2 + (1/3)1 = 5/3$$
$$U_1(\text{B, DI}) = (2/3)2 + (1/3)1 = 5/3$$

	II	ID	DI	DD
A	$\underline{11/3}$	3	$\underline{3}$	7/3
B	7/3	$\underline{11/3}$	5/3	$\underline{3}$

Representación del juego bayesiano

El juego bayesiano deberá tener definidos los siguientes elementos:

- El conjunto de jugadores: $N = \{1, 2, \ldots, n\}$.
- Los tipos de los jugadores (un tipo por cada parte de información privada que pueda tener un jugador): $T_i = \left\{t_i^1, t_i^2, \ldots, t_i^{m_i}\right\}$ para todo $i \in N$.
- Cada tipo de cada jugador deberá tener definida una distribución de probabilidades sobre combinaciones de tipos (representarán sus creencias sobre los tipos de los rivales):

$$p\big((t_1, t_2, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n)|t_i\big) = p(t_{-i}|t_i)$$

para todo $t_{-i} \in T_{-i}$, para todo $t_i \in T_i$ y para todo $i \in N$.

- Las acciones posibles para cada tipo. Por conveniencia, supondremos que todos los tipos de un mismo jugador tienen el mismo conjunto de acciones: $A_{t_i} = A_i = \left(A_i^1, A_i^2, \ldots, A_i^{k_i}\right)$ para todo $t_i \in T_i$ y para todo $i \in N$.
- Una estrategia del Jugador i es un vector de acciones, una por cada tipo: $\left(a_{t_i^1}, a_{t_i^2}, \ldots, a_{t_i^{m_i}}\right)$.
- Funciones de pagos que dependen no sólo de las acciones sino también de los tipos:
    - Pago del tipo t_i: $u_{t_i}(a_1, a_2, \ldots, a_n; t_1, t_2, \ldots t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots t_n)$.
    - Pago del Jugador i:

$$u_{t_i}(a_1, a_2, \ldots, a_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) = \sum_{t_i \in T_i} p(t_i) u_{t_i}(a_1, a_2, \ldots, a_n;\ t_1, t_2, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n).$$

Representación del juego bayesiano

Nota técnica:

- Estrictamente, como elemento primitivo del modelo de juego bayesiano deberíamos tener una distribución de probabilidad sobre todas las combinaciones de tipos.
- A partir de esta distribución se calcularían todas las demás probabilidades.
- Por ejemplo, sea un juego con 3 jugadores con tipos $T_1 = \{a, b\}$, $T_2 = \{x, y\}$, $T_2 = \{r, t\}$
- Sea la distribución de probabilidad sobre tipos: $\big(p(a,x,r), p(a,x,t), p(a,y,r), p(a,y,t), p(b,x,r), p(b,x,t), p(b,y,r), p(b,y,t)\big)$. Estas probabilidades son números entre 0 y 1, cuya suma es 1.
- Ahora podemos calcular, por ejemplo:
  - $p(a) = p(a,x,r) + p(a,x,t) + p(a,y,r) + p(a,y,t)$.
  - $p(x,t|a) = \frac{p(a,x,t)}{p(a)}$.

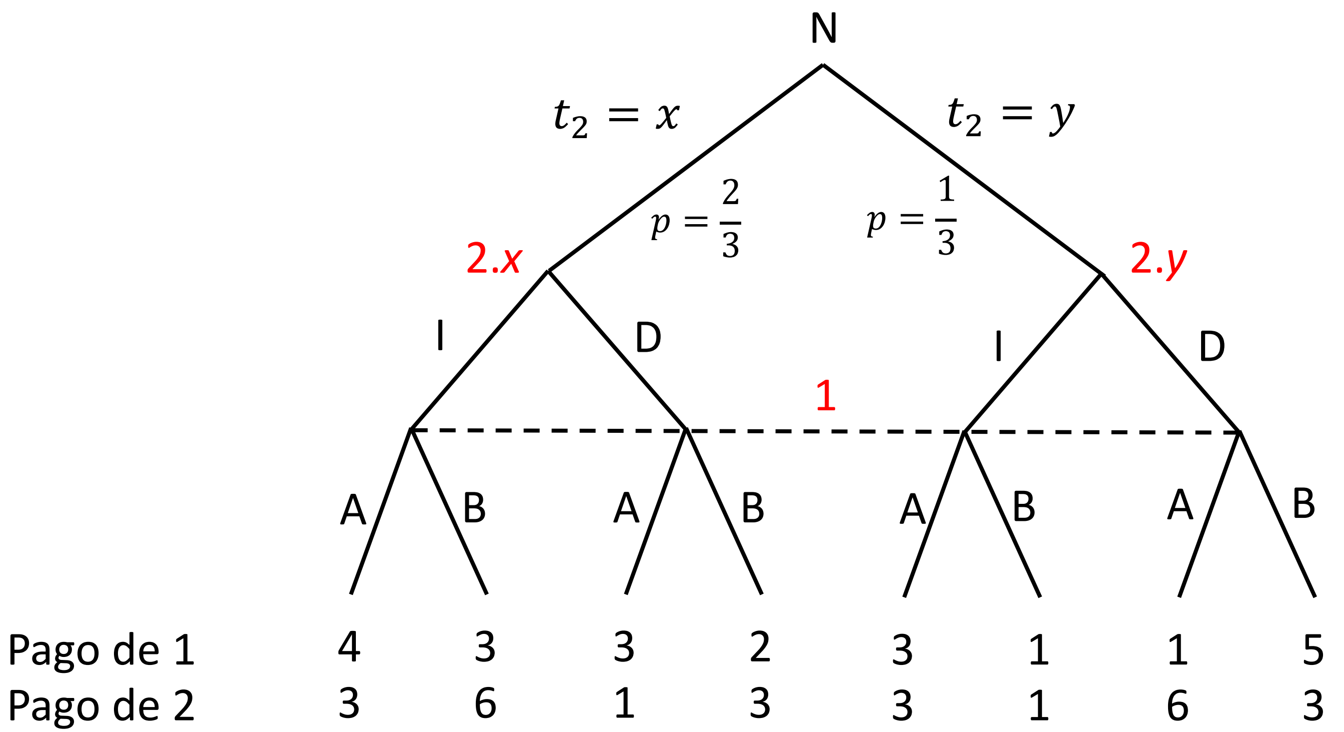
Representación del juego bayesiano

Veamos la representación bayesiana del ejemplo 1:

- Jugadores, $N = \{1, 2\}$.
- Tipos: $T_1 = \{1\}$, $T_2 = \{x, y\}$.
- Probabilidades sobre tipos: cada uno de los tres tipos tiene creencias sobre los demás.
  - $p(x|1) = \frac{2}{3}$, $p(y|1) = \frac{1}{3}$,
  - $p(1|x) = 1$,
  - $p(1|y) = 1$.
- Acciones: $A_1 = \{\text{A, B}\}$, $A_x = A_y = \{\text{I, D}\}$.
- Estrategias:
  - $S_1 = A_1 = \{\text{A, B}\}$,
  - $S_2 = A_x \times A_y = \{\text{II, ID, DI, DD}\}$.
- Pagos: las 2 matrices de la transparencia 7.

Representación del juego bayesiano

El juego bayesiano se puede representar mediante su forma extensiva.



Conjuntos de información. Jugador 1: {1}, Jugador 2: {2.*x*, 2.*y*}.

Estrategias: $S_1 = \{\text{A, B}\}$, $S_2 = \{\text{II, ID, DI, DD}\}$.

Ejemplo 2

- La batalla de sexos con información asimétrica.
- Ella prefiere que salgan juntos antes que separados, y prefiere el fútbol a la ópera.
- Las preferencias de Él dependen de si está agobiado o no.
  - Si está agobiado prefiere pasar la noche sin su pareja.
  - Si no está agobiado (normal) prefiere pasar la noche con Ella.
  - En ambos casos prefiere la ópera al fútbol.
- Los pagos se indican en las siguientes tablas.
- Ella cree que es igual de probable que él esté agobiado como que no lo esté.

Ejemplo 2

Pagos si Él está normal

Prob. = 1/2

Él

Ella	F	O
F	2 , 1	0 , 0
O	0 , 0	1 , 2

Pagos si Él está agobiado

Prob. = 1/2

Él

Ella	F	O
F	2 , 0	0 , 2
O	0 , 1	1 , 0

Ejemplo 2

Analicemos la mejor respuesta de Él.

Él normal

		F	O
Ella	F	2, $\underline{1}$	0, 0
	O	0, 0	1, $\underline{2}$

Él agobiado

		F	O
Ella	F	2, 0	0, $\underline{2}$
	O	0, $\underline{1}$	1, 0

Si ella elige fútbol la mejor respuesta de ÉL es: fútbol si normal y ópera si agobiado.

Si ella elige ópera la mejor respuesta de ÉL es: ópera si normal, y fútbol si agobiado.

$$MR_{\text{Él}}(\text{F}) = \text{FO},\ MR_{\text{Él}}(\text{O}) = \text{OF}.$$

Ejemplo 2

Mejor Respuesta de Ella.

	FF	FO	OF	OO
F	$\underline{2}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	0
O	0	0,5	0,5	$\underline{1}$

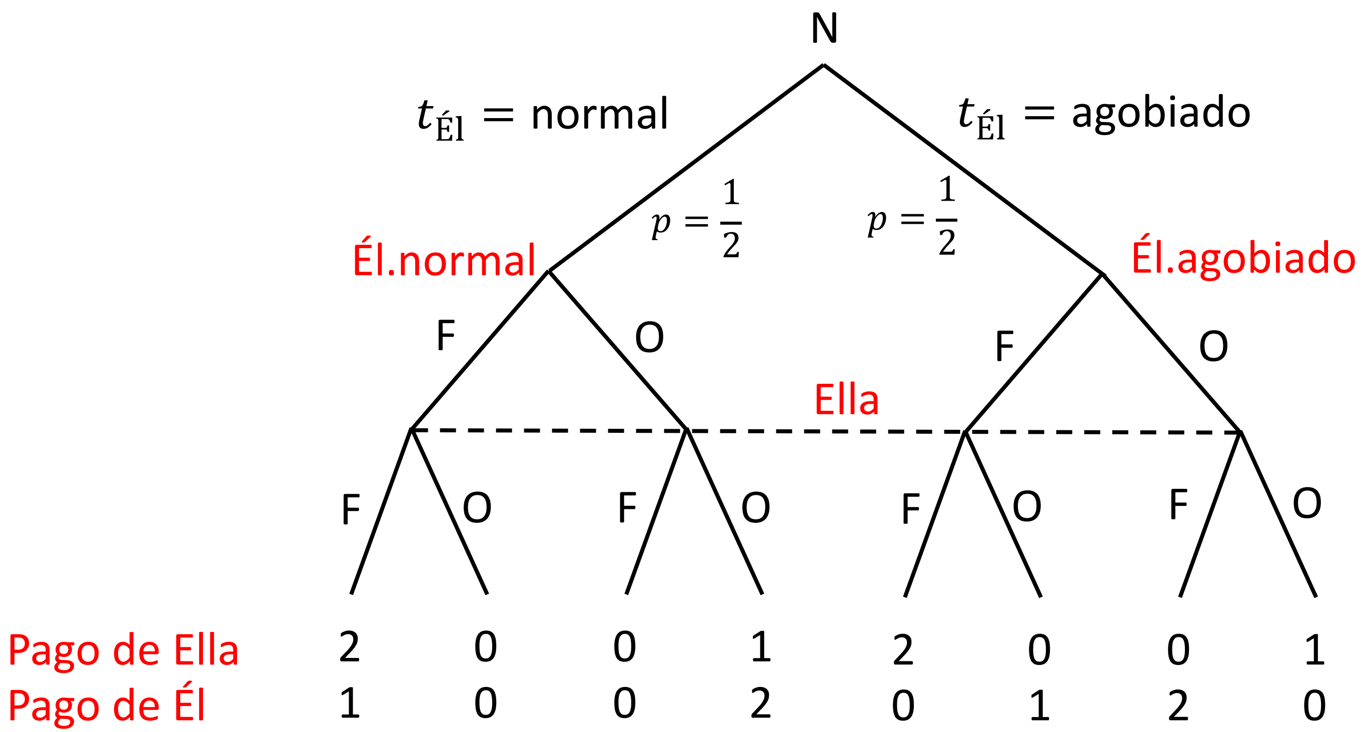
$MR_{\text{Ella}}(\text{FF}) = \text{F}$
$MR_{\text{Ella}}(\text{FO}) = \text{F}$
$MR_{\text{Ella}}(\text{OF}) = \text{F}$
$MR_{\text{Ella}}(\text{OO}) = \text{O}$

$MR_{\text{Él}}(\text{F}) = \text{FO}$
$MR_{\text{Él}}(\text{O}) = \text{OF}$

ENB: (fútbol, (fútbol si normal, y ópera si agobiado)) = (F, FO)

Ejemplo 2

Forma extensiva de la batalla de sexos con información asimétrica.



Encontremos el ENPS de esta forma extensiva.

Como solo hay un subjuego, coincidirá con el EN.

Ejemplo 2

Pasemos a la forma normal:

	FF	FO	OF	OO
F	$\underline{2}$, 0,5	$\underline{1}$, $\underline{1{,}5}$	$\underline{1}$, 0	0, 1
O	0, 0,5	0,5, 0	0,5, $\underline{1{,}5}$	$\underline{1}$, 1

- EN: (F, FO), que coincide con el equilibrio bayesiano.
- De hecho, el EN de la forma normal correspondiente a la forma extensiva de un juego bayesiano es siempre el equilibrio bayesiano del juego bayesiano.

Extensiones

- Ella tiene un tipo, Él tres tipos. La matriz de la forma normal será 2x8.
- Ella y Él tienen dos tipos.
- Ella y Él tienen un número arbitrario de tipos.
- Hay metacreencias: Él tiene 2 tipos, Ella tiene creencias sobre estos dos tipos. Él no sabe cuáles son estas creencias de Ella, pero tiene formadas unas creencias sobre esas creencias de Ella.
- Lo anterior se puede complicar tanto como se quiera. Según el teorema de Harsanyi, siempre se podrá modelizar como lo hemos hecho, multiplicando el número de tipos.
- Hay más de dos jugadores.
- Los jugadores eligen secuencialmente. Quien juega después observa la acción, pero no el tipo de quien ha jugado.
- Estas extensiones no se verán en este curso.