Estadística Inferencial

Estimación de parámetros

Estadística Descriptiva e Inferencial

- Estadística
  - Estadística Descriptiva
  - Estadística Inferencial

    (Estimación de parámetros y Prueba de hipótesis)

Estadística Descriptiva e Inferencial

Estadística descriptiva → Describe, analiza y representa un grupo de datos utilizando métodos numéricos y gráficos que resumen y presentan la información contenida en ellos.

Estadística inferencial → Comprende los métodos y procedimientos para deducir propiedades (hacer inferencias) de una población a partir de una pequeña parte de la misma (muestra).

Podemos clasificar la estadística en descriptiva, cuando los resultados del análisis no pretenden ir más allá del conjunto de datos, e inferencial cuando el objetivo del estudio es derivar las conclusiones obtenidas a un conjunto de datos más amplio.

Estadística Inferencial

- La estadística inferencial se concentra en la estimación de parámetros y la contrastación de hipótesis (estadísticas)
- La población aquí no se refiere a una población biológica ,se refiere a una población estadística
- Una población estadística es definida como la colección de todas las posibles observaciones de interés y sobre la cual nosotros deseamos hacer inferencias.

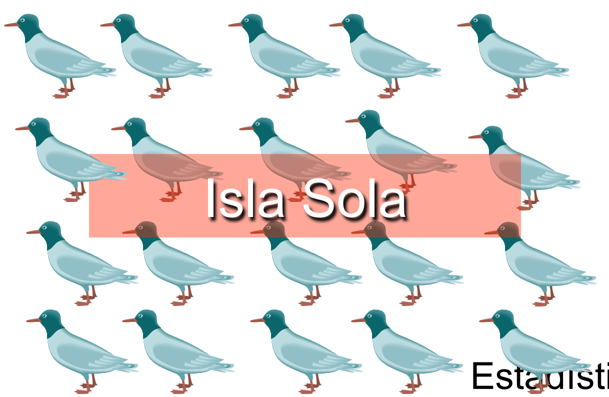
Estimación de Parámetros

- Un parámetro usualmente necesita ser estimado
  - Si se intenta conocer el nivel de DDT en gaviotas de la Isla Sola no se práctico colectar muestras de todas las gaviotas de la Isla.
- La estimación de parámetros se basa en la colecta de una muestra representativa de datos
- Estos datos son colectados de acuerdo a un protocolo de base científica (diseño de muestreo)

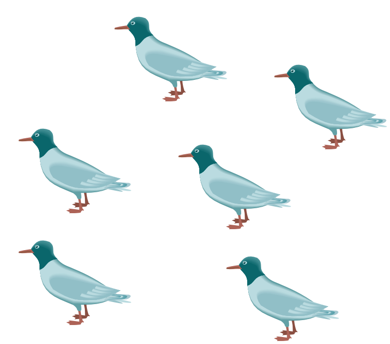
Población Estadística: Gaviotas de la Isla Sola.

Medida: Nivel de DDT (ppm)

Población estadística



Muestra



Estimación de Parámetros

Nivel de DDT en gaviotas de la Isla Sola

- Parámetros
  - μ = media poblacional
  - σ = desvío estándar poblacional

- Se toma una muestra al azar de 10 gaviotas de la Isla Sola y se mide el nivel de DDT (ppm).

100	105	97	103	96	106	102	97	99	103

- Estadísticos o estimados
  - $\bar{y}$ = media muestral = 100,8
  - s = desvío estándar muestral = 3,5214

El desvío estándar mide la variación de las observaciones alrededor de la media muestral

Estimación de Parámetros

¿Qué pasaría si muestreáramos 10 gaviotas diferentes?

Muestra	Niveles de DDT en las gaviotas										Media Muestral	Desvío Estándar
1	102	102	103	95	105	97	95	104	98	103	100,4	3,8
2	100	103	99	98	95	98	94	100	90	103	98,0	4,1
3	101	96	106	102	104	95	98	103	108	104	101,7	4,2
4	101	100	99	90	102	99	105	92	100	102	99,0	4,6
5	107	98	101	100	100	98	107	99	104	98	101,2	3,6
6	102	102	101	101	92	94	104	100	101	97	99,4	3,8
7	94	101	100	100	96	101	100	98	94	98	98,2	2,7
8	104	102	97	104	97	99	100	100	109	102	101,4	3,7

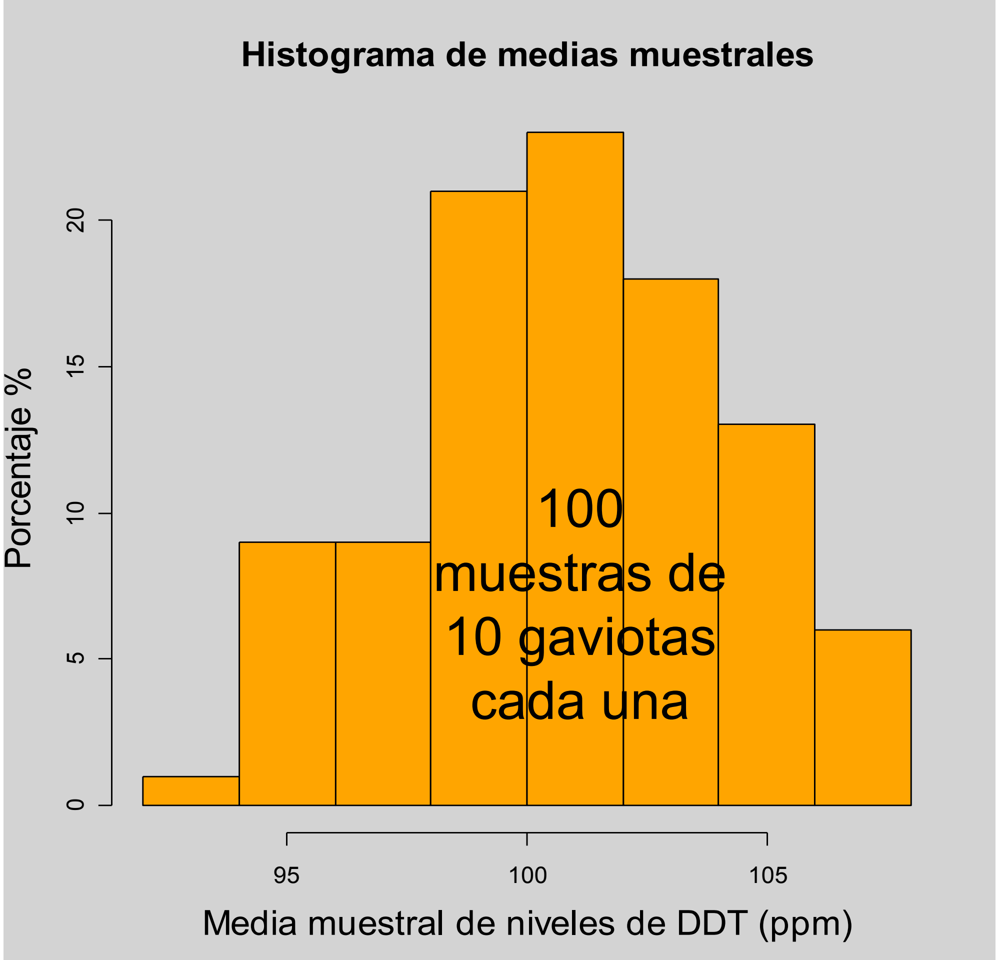
La media muestral y el desvío estándar muestral cambiarían de muestra en muestra

Distribución Muestral (Sampling Distribution)

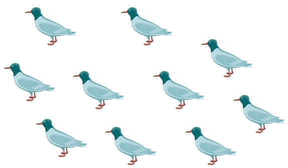
Si muchas muestras son tomadas tendríamos muchas medias muestrales y se podría elaborar un histograma de las medias muestrales

Concepto fundamental pero abstracto:

En la práctica nosotros trabajamos con una muestra y nunca vemos la distribución muestral

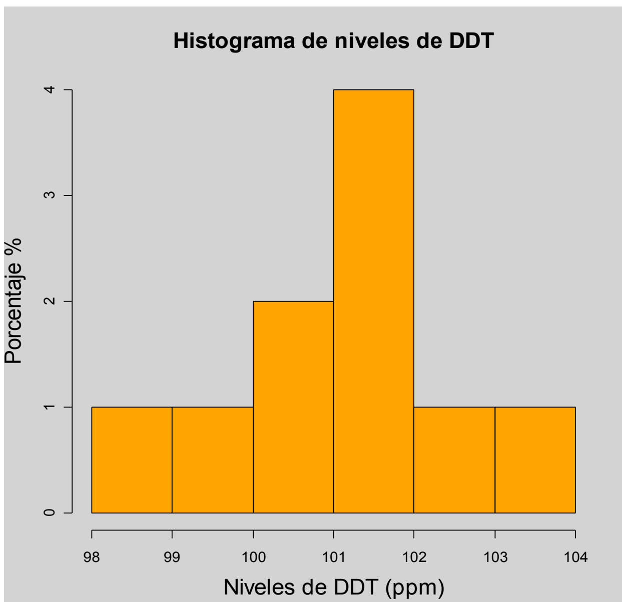


Distribución de los datos y distribución muestral

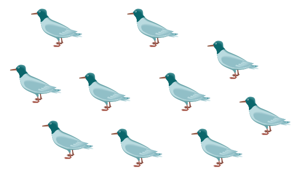


10 gaviotas

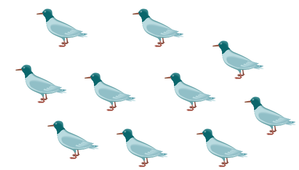
Media = 100,8
DE = 3,5214



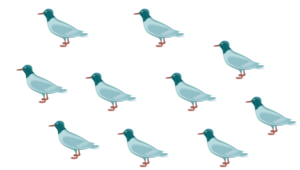
Distribución de los datos basada en 10 observaciones (10 gaviotas)



10 gaviotas



10 gaviotas

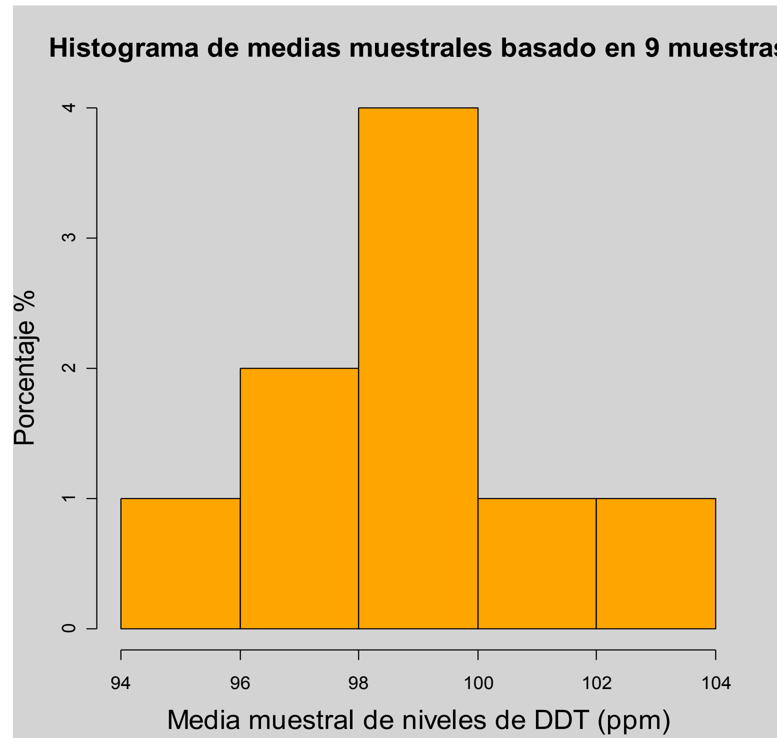


10 gaviotas

....

Media = 100
DE = 1,40

En realidad se denomina Error Estándar del Estadístico



Distribución de las medias de 9 muestras de 10 gaviotas cada muestra

Error Estándar de la media muestral

- Pero en la práctica nosotros no obtenemos, por ejemplo, 9 muestras de 10 gaviotas, sino sólo 1 muestra de 10 gaviotas.
- Por lo tanto, el error estándar debe ser estimado a partir de la información que obtenemos de 1 sola muestra de 10 gaviotas.
- Aquí es cuando la teoría estadística entra en juego. En algunos casos, es posible derivar de la teoría estadística, cuanto variará el estadístico de muestra en muestra.
- En el caso de la media muestral, el error estándar:

$$EE(\bar{y}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Desvío estándar poblacional

$$EE(\bar{y}) = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Desvío estándar de la muestra (la única muestra que obtuvimos (10 gaviotas))

$$EE(\bar{y}) = \frac{3.5214}{\sqrt{10}} = 1.1136$$

- El error estándar (EE) del estadístico es el desvío estándar de la distribución de muestras.
- El EE mide la variabilidad del estadístico sobre muestreos repetidos de la misma población
- Cada estadístico tendrá una fórmula diferente para calcular su error estándar.

Ejemplo Teórico de una distribución de muestreo

Supongamos que tenemos una población de un especie de ratón de la cual sólo quedan 5 individuos.

Peso (g) de los 5 ratones

33	28	45	43	47

μ = 39,20 g

σ = 7,39 g

El desvío estándar mide la variación de las observaciones (pesos) con respecto a la media (mide la dispersión de las observaciones individuales)

Ejemplo Teórico de una distribución de muestreo

Sólo existen 10 posibles muestras de 2 ratones cada muestra

# Muestra	Muestra		Media muestral	Desvío estándar muestral
1	33	28	30,5	3,54
2	33	45	39	8,49
3	33	43	38	7,07
4	33	47	40	9,90
5	28	45	36,5	12,02
6	28	43	35,5	10,61
7	28	47	37,5	13,44
8	45	43	44	1,41
9	45	47	46	1,41
10	43	47	45	2,83
		Media	39,20	7,07
		DE	4,52	4,27

Ejemplo Teórico de una distribución de muestreo

La tabla ilustra lo siguiente:

- Tanto los valores de la media muestral como los valores del desvío estándar muestral ocurren por encima y por debajo de la media poblacional y el desvío estándar poblacional, por lo que, cuando tenemos una sola muestra no sabemos si estamos por debajo o por encima del parámetro.
- La media (esperada) de todas las posibles medias muestrales es igual a la media poblacional. Esto nos dice que el estimador de la media es un estimador no sesgado de la media poblacional.
- La media (esperada) de todos los posibles valores del desvío estándar no es igual al desvío estándar poblacional. Esto nos dice que el estimador del desvío estándar es sesgado (aunque su sesgo desaparece con el incremento del tamaño muestral).
- El desvío estándar de la media (no de las observaciones) mide la variación de la media sobre todas las posibles muestras. Es lo que denominamos el Error Estándar de un estadístico.

Ejemplo Teórico de una distribución de muestreo

La tabla ilustra lo siguiente:

Para calcular el error estándar aplicamos la fórmula:

$$EE(\bar{y}) = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$EE(\bar{y}) = \frac{7.39}{\sqrt{2}} = 5.22$$

Respuesta incorrecta en este caso

Sin embargo, nos da la respuesta equivocada. La razón es que la muestra es una fracción considerable de la verdadera población, por lo tanto debe corregirse mediante una corrección para poblaciones finitas

$$EE(\bar{y}) = \frac{s}{\sqrt{n}}\sqrt{1-f}\sqrt{\frac{N}{N-1}}$$

$$EE(\bar{y}) = \frac{7,39}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{2}{5}}\sqrt{\frac{5}{5-1}} = 4,52$$

Valor Esperado (E(X))

El valor esperado se refiere a la media de un número grande de estimados de un parámetro.

Por ejemplo, E($\bar{y}$) = el promedio de todos los $\bar{y}$ obtenidos de todas las posibles muestras.

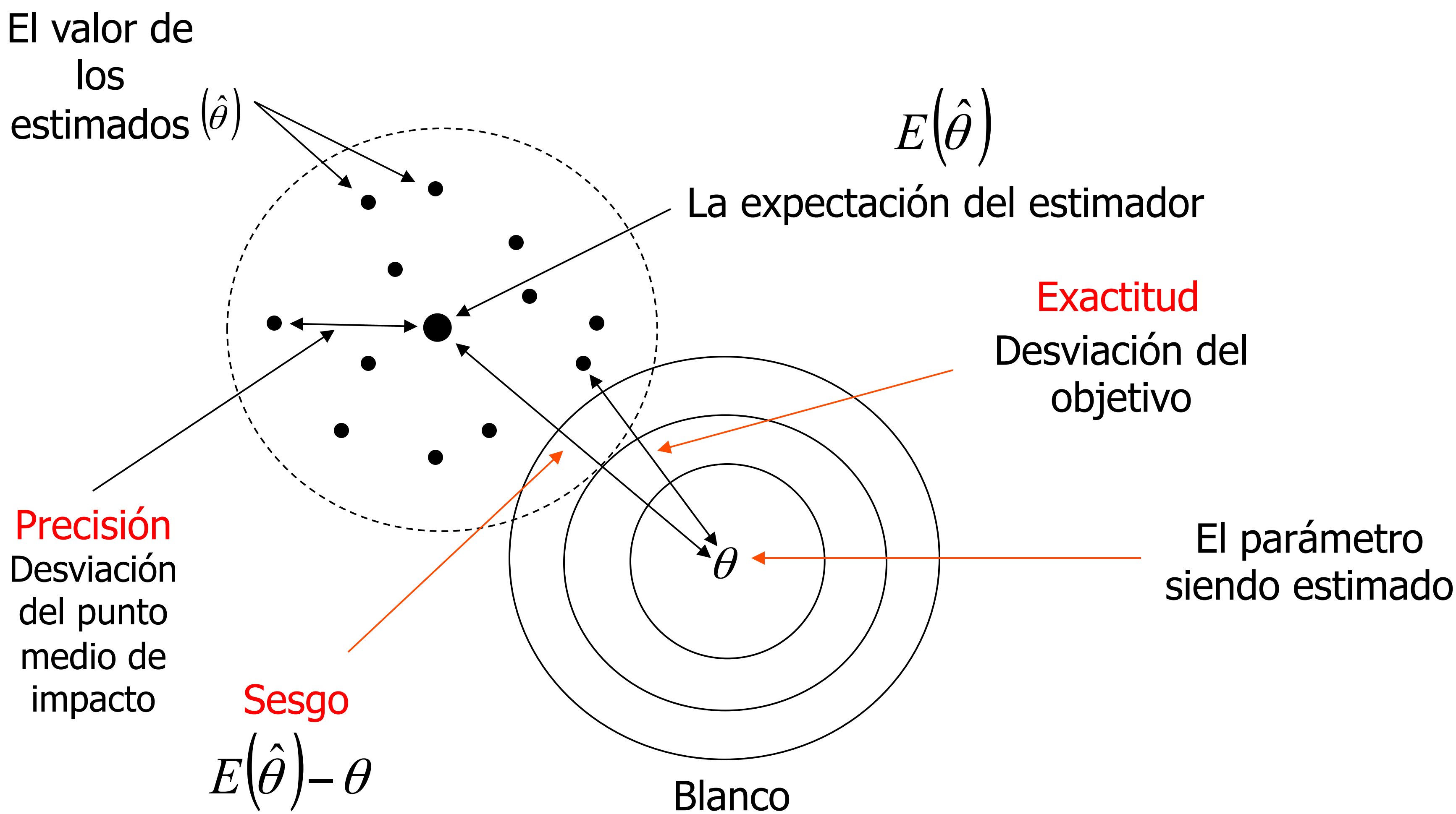
$\bar{y}$ $\bar{y}$ $\bar{y}$ $\bar{y}$ $\bar{y}$ $\bar{y}$ $\bar{y}$ $\bar{y}$ $\bar{y}$ $\bar{y}$

Peso medio (g)

$$E(\bar{y}) = \frac{\sum \bar{y}}{n}$$

¿Qué tan bueno es el estimador?

Sesgo, Precisión, y Exactitud



Estos conceptos no pueden aplicarse a un único estimado obtenido de una muestra

¿Qué tan bueno es el estimador?

Sesgo, Precisión y Exactitud

1. Sesgo

Es la diferencia entre el valor esperado y el valor verdadero del parámetro

$$Sesgo = E\left(\hat{\theta}\right) - \theta$$

y Porcentaje relativo de sesgo = $100 \times \left(\frac{E\left(\hat{\theta}\right) - \theta}{\theta} \right)$

Valor esperado del estimado

Parámetro verdadero

$$E\left(\hat{\theta}\right) \neq \theta$$

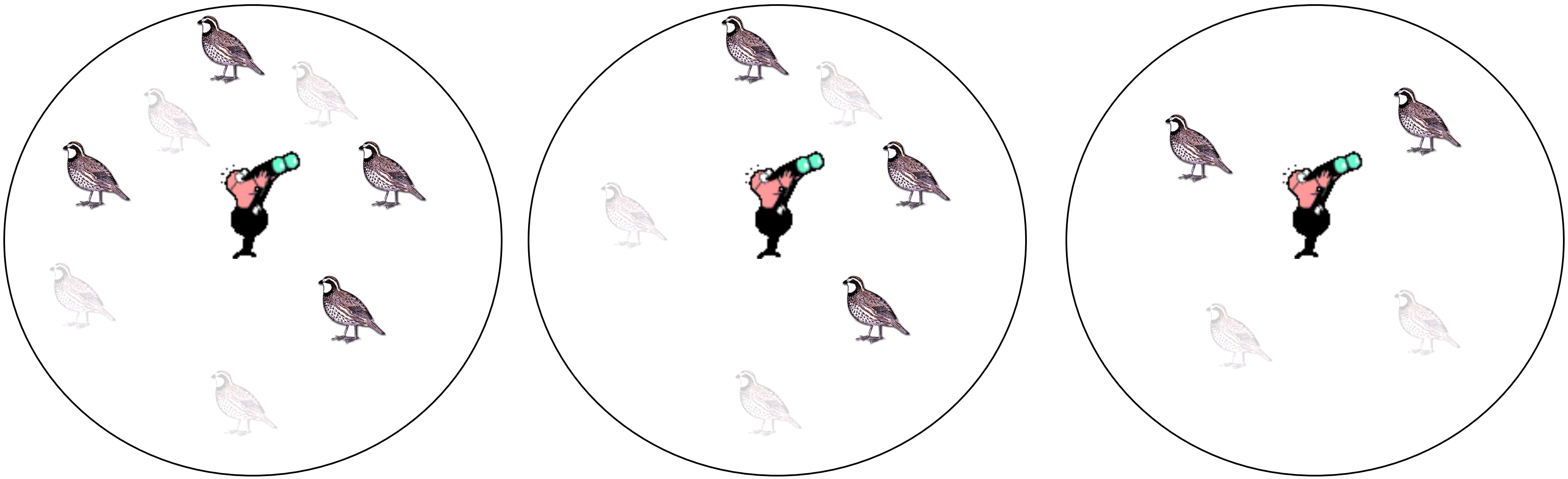
El estimador es sesgado

$$E\left(\hat{\theta}\right) = \theta$$

El estimador es insesgado

¿Qué tan bueno es el estimador?

Sesgo sistemático



Ejemplo de sesgo sistemático: en este caso el observador ve sólo el 50% de las aves.

No hay forma de saber con nuestros datos en la mano si hay sesgo sistemático o no.

En algunos casos es posible calibrar el método y así corregir el sesgo.

¿Qué tan bueno es el estimador?

Sesgo, Precisión y Exactitud

2. Precisión

$$\operatorname{var}\left(\hat{\theta}\right) = E\left[\left(\hat{\theta} - E\left(\hat{\theta}\right)\right)^2\right]$$

$$\hat{\operatorname{var}}\left(\hat{\theta}\right)$$

o

$$EE\left(\hat{\theta}\right) = \sqrt{\operatorname{var}\left(\hat{\theta}\right)}$$

Error estándar

o

Intervalos de Confianza (diferentes maneras de calcularlos)

¿Qué tan bueno es el estimador?

Sesgo, Precisión y Exactitud

2. Precisión

- Determina cuan variable serán los estimados tomados de muestras repetidas de la misma población.
- Si la variación es poca, entonces decimos que el estimado es preciso.
- La precisión de un estimado es controlada por el tamaño de muestra. En general, con tamaños de muestra grandes se logran estimados más precisos que con tamaños de muestra pequeños.

¿Qué tan bueno es el estimador?

Sesgo, Precisión y Exactitud

3. Exactitud (error cuadrado promedio, MSE)

$$MSE\left(\hat{\theta}\right) = E\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2$$

$$MSE\left(\hat{\theta}\right) = E\left[\hat{\theta} - E\left(\hat{\theta}\right) + E\left(\hat{\theta}\right) - \theta\right]^2$$

$$MSE\left(\hat{\theta}\right) = \mathrm{var}\left(\hat{\theta}\right) + sesgo\left(\hat{\theta}\right)^2$$

a. Exactitud combina sesgo y precisión del estimador.
b. Mide la distancia media entre estimado y el parámetro poblacional.
c. Un estimador exacto es aquel que es insesgado y preciso, mientras que un estimador inexacto es impreciso o sesgado o ambos.

Tipos de Error

- Error en estadística se refiere a la diferencia entre el estimado y el parámetro.
  - Error de muestreo: ocasionado por la selección aleatoria de los elementos en la muestra.
  - Sesgo: una tendencia consistente a subestimar o sobreestimar el parámetro.

    El sesgo puede permanecer aún si seleccionamos una muestra grande para evitar el error de muestreo.

    - Sesgo sistémico o Error de medida: es el que se da cuando se colectan los datos (por errores en los aparatos de medida o la forma en que tomamos los datos).
    - Sesgo estadístico: es el que se da por como se analizan los datos (relacionado con el diseño de muestreo y el estimador).

Recuerden

Un estimado sesgado pero preciso es preferible a un estimado insesgado pero impreciso

2 tipos de estimaciones

1. Estimación de punto: provee un valor único, el cual estima un parámetro poblacional.

2. Estimación de intervalo: provee un rango de valores que podría incluir el parámetro con probabilidad conocida (ejemplo, intervalos de confianza).

Parámetros y estadísticos comunes

Típicamente, las poblaciones (estadísticas) son descritas en términos de promedios, varianzas y otros parámetros que proveen un resumen informativo de la estructura de la distribución.

Peso corporal de 12 osos andinos u osos de anteojos (kg)
95,5
93,4
104,5
141,0
86,6
123,0
96,0
165,0
98,5
114,4
99,0
88,3

Promedio	108,8
Mediana	98,8
Varianza	558,2
Desvío estándar	23,63
Coeficiente de variación	21,8

Parámetros y estadísticos comunes

Parámetro	Estadístico	Fórmula	Comentarios
Promedio de la población (μ)	Promedio de la muestra ($\bar{y}$)	$\dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$	Medida de localización.
Varianza de la población (σ^2)	Varianza de la muestra (s^2)	$\sum_{i=1}^{n} \dfrac{(y_i - \bar{y})^2}{n-1}$	Medida de dispersión o variabilidad. Un valor pequeño de σ^2 indica que los valores están agrupados cerca del promedio. Un valor grande de σ^2 indica que los valores están ampliamente dispersos (mucha variabilidad).
Desvío estándar de la población (σ)	Desvío estándar de la muestra (s)	$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \dfrac{(y_i - \bar{y})^2}{n-1}}$	Medida de dispersión o variabiliad. Es simplemente la raíz cuadrada de la varianza. Tiene la ventaja de que mide la dispersión en las mismas unidades de los datos.
Coeficiente de variación de la población (CV)	Coeficiente de variación de la muestra (CV)	$\dfrac{s}{\bar{y}} \times 100$	Medida de dispersión o variabilidad. Mide la desviación estándar como un porcentaje del promedio.

El error estándar y el intervalo de confianza

Medidas de precisión de los estimados

Parámetro	Estadístico	Formula	Comentarios
Error estándar del parámetro (σ_θ)	Error estándar de la muestra (s_θ)	$\frac{s}{\sqrt{n}}$ o $\sqrt{\hat{\text{var}}_\theta}$	Indica la variación de nuestro estimado. Si el EE es grande, muestras repetidas van a resultar en estimados muy diferentes y el estimado a partir de cualquier muestra única puede no aproximarse al verdadero parámetro.
Intervalo de confianza del parámetro		Muchas formas de calcularse	Indica la variación o precisión de nuestro estimado. Un IC amplio indica un precisión baja.

Intervalos de Confianza

- Como el estimado de un parámetro está basado en una muestra aleatoria, el estimado es una variable aleatoria con su propia distribución.
- Una pregunta clave es, ¿cuán bueno es el estimado?, en el sentido de "aproximarse" al parámetro de interés.
- El Intervalo de Confianza es el método primario para responder a la pregunta ¿cuán bueno es el estimado?
- La estimación de intervalos es basado en el conocimiento de la distribución del estimado, la cual puede ser obtenida de la distribución muestral.
- La idea es identificar un intervalo para los valores de $\hat{\theta}$ que con una certeza de 95% incluye θ .
- Para un IC de 95%, 95 es el nivel de confianza del intervalo = la probabilidad deseada de incluir θ en el intervalo.

Intervalos de Confianza

- Un intervalo de confianza apropiado debería ser entre ± 10% y 25% del estimado.

Ejemplo

Media = 3,4 kg (IC 95% = 1,87 - 4,93 kg) → ± 45%

Media = 3,4 kg (IC 95% = 3,06 – 3,74 kg) → ± 10%

Intervalos de Confianza

- Se toma una muestra al azar de 10 gaviotas de la Isla Sola y se mide el nivel de DDT (ppm).

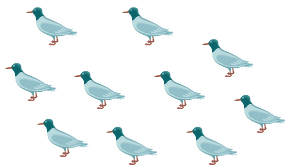
100	105	97	103	96	106	102	97	99	103

- Estadísticos o estimados
- $\bar{y}$ = media muestral = 100,8
- s = desvío estándar muestral = 3,5214

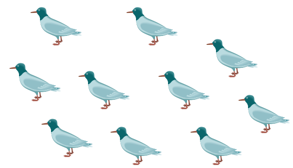
Sin embargo, el valor de la media muestral cambiaría si se tomara otra muestra de 10 gaviotas.

Teorema del Límite Central

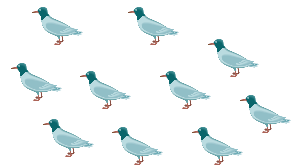
Si tomamos muchas muestras de una población y calculamos sus medias



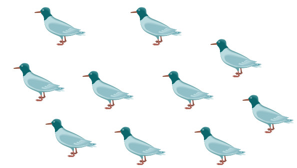
10 gaviotas



10 gaviotas



10 gaviotas



10 gaviotas

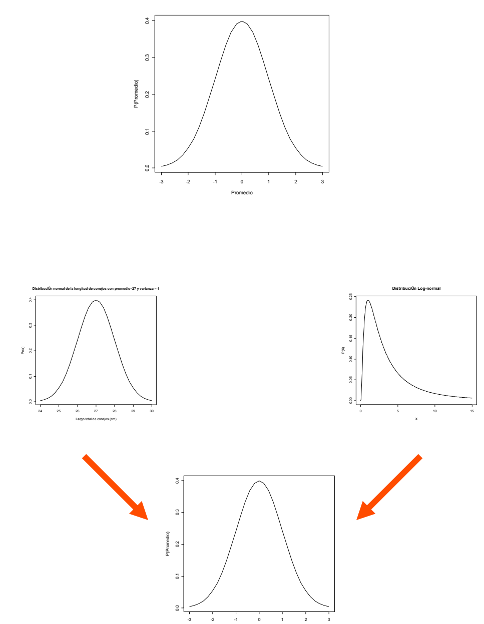
…….

Nivel medio de DDT $\bar{y}$ $\bar{y}$ $\bar{y}$ $\bar{y}$ $\bar{y}$

1. La distribución de las medias de una distribución normal es también distribuida normalmente.

2. A medida que el tamaño de muestra aumenta, la distribución de medias de cualquier distribución se aproximará a una distribución normal (base del Teorema del Límite Central).

3. El valor esperado de las medias muestrales es igual a la media de la población de donde se tomaron las muestras



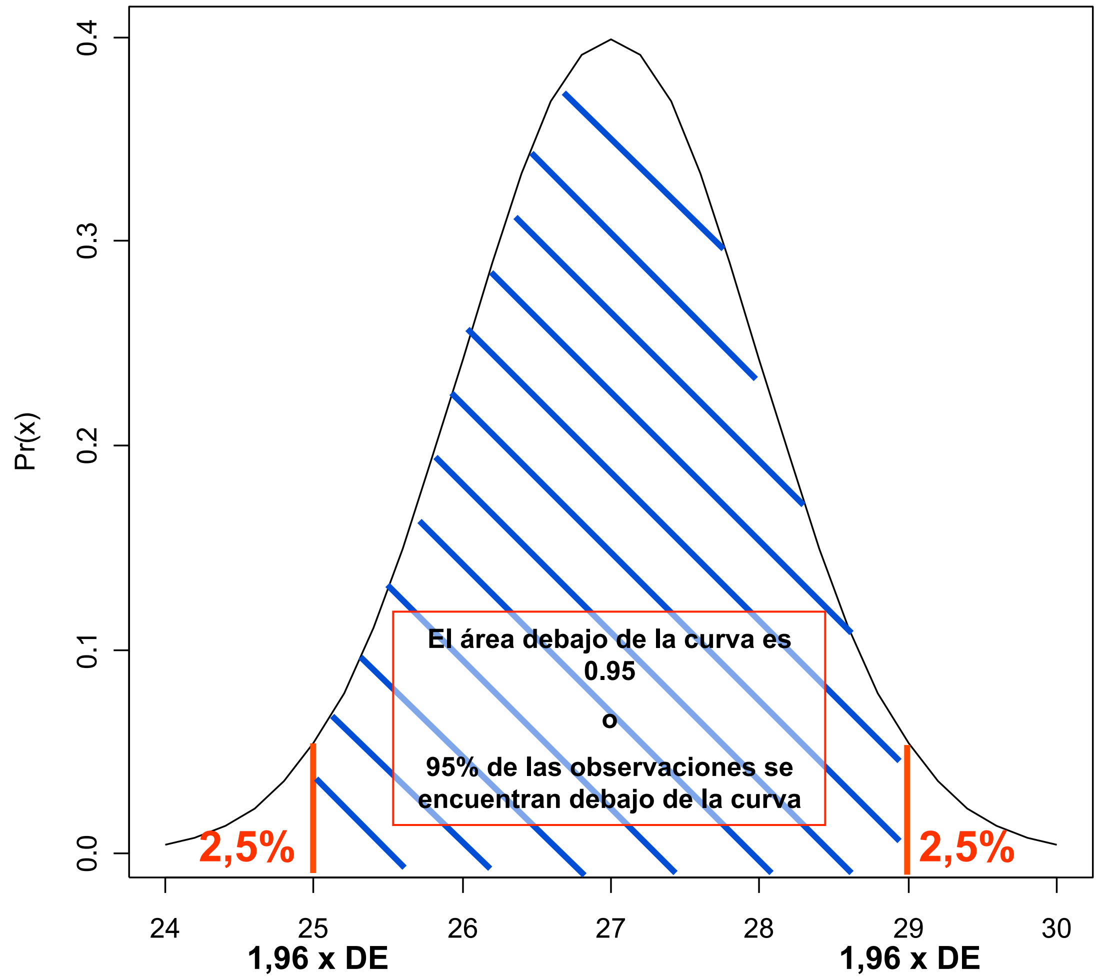
Distribución Normal y Regla Empírica

Para cualquier variable con distribución normal

50% de las observaciones se encuentra entre media + 0.674 x DE

95% de las observaciones se encuentra entre media + 1,96 x DE

99% de las observaciones se encuentra entre promedio + 2,576 x DE



Intervalos de Confianza

De acuerdo al Teorema del Límite Central y la Regla Empírica hay 95% de probabilidad que la media poblacional (μ) está dentro de ±2 el EE estimado ($\frac{s}{\sqrt{n}}$).

El EE estimado es un estimado de que tan variable es la media muestral ($\bar{y}$) alrededor de la media poblacional.

Por lo tanto, podemos construir un intervalo de confianza de 95% como:

$$\bar{y} \pm 2(\text{EE estimado})$$

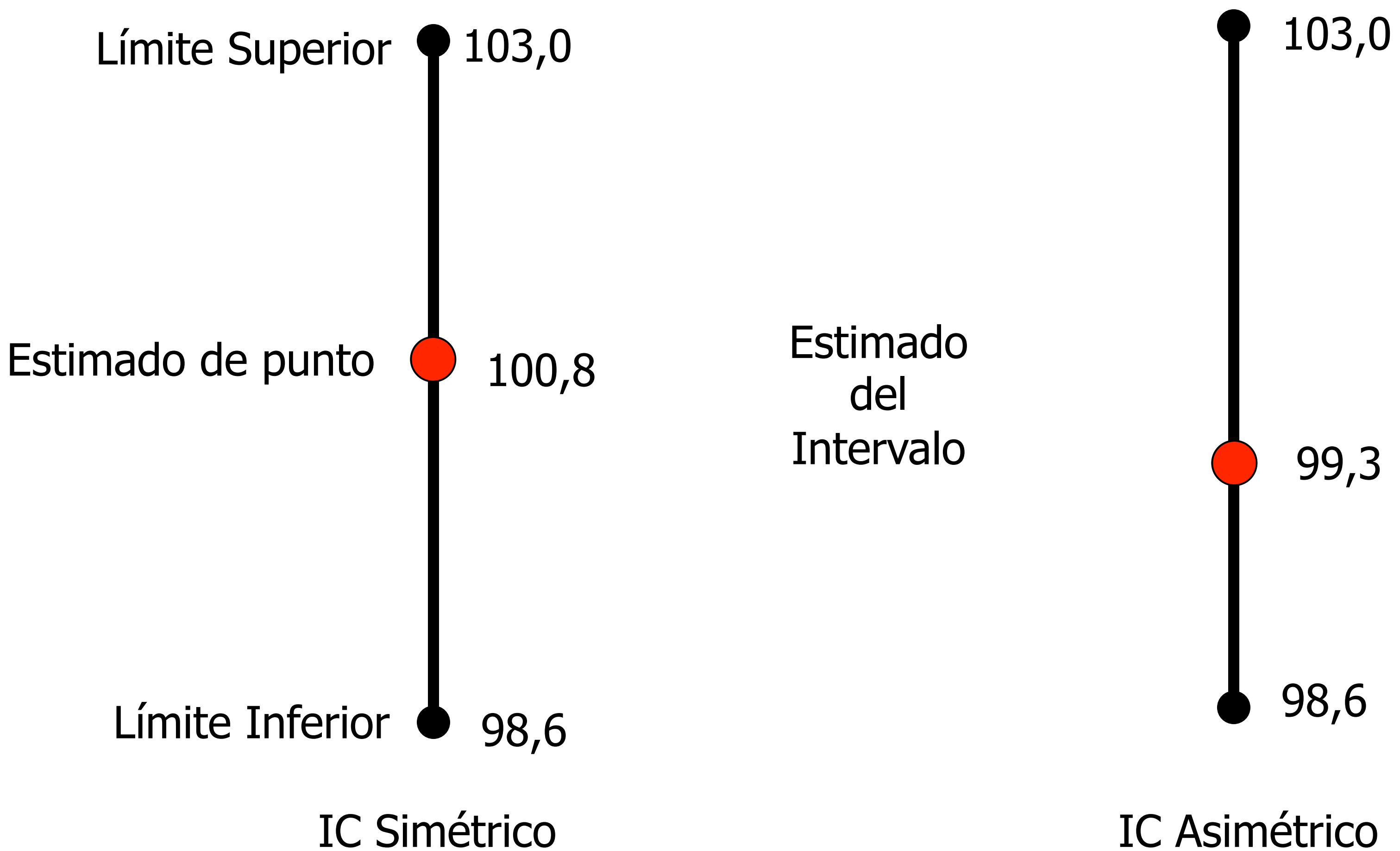
$$100{,}8 \pm 2(1{,}1136) = 100{,}8 \pm 2{,}2276$$

$$95\% IC = 98{,}6 - 103{,}0\, ppm$$

Anatomía de un Intervalo de Confianza

Intervalo de Confianza de 95%

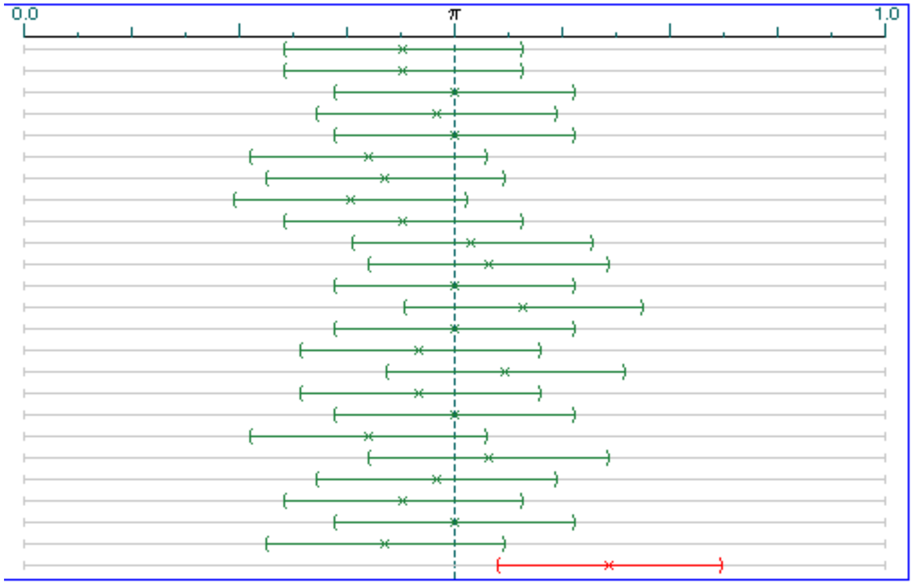
Nivel de confianza



Intervalos de Confianza

Interpretación de un Intervalo de Confianza del 95%

- Si las muestras son colectadas repetidamente de una población, y un intervalo de confianza es calculado para cada muestra, entonces el 95% de esos intervalos debería contener el verdadero valor del parámetro θ.

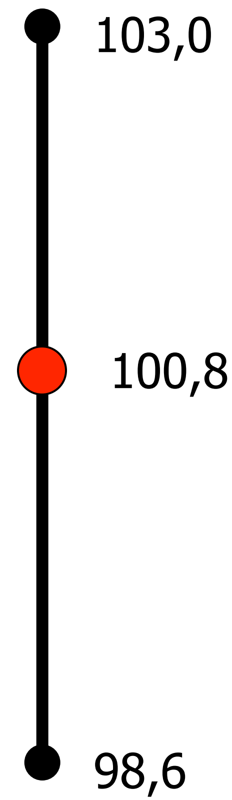


Intervalos de Confianza

Interpretación de un Intervalo de Confianza del 95%

- Se puede decir con 95% de confianza de que el IC calculado contiene el parámetro θ.

- Esta es una interpretación más práctica, porque en realidad nosotros calculamos un solo intervalo de confianza.
- En este caso, podemos decir con un 95% de confianza que la verdadera media del nivel de DDT de las gaviotas de la Isla Sola está entre 98,6 y 103,0 ppm.
- Estamos bastante seguros que la verdadera media del nivel de DDT no es ni 110 ppm, ni 90 ppm.
- La verdadera media es cualquier valor entre 98,6 y 103,0.
- El intervalo no es un intervalo para valores individuales en la población sino para el parámetro (en este caso, la media poblacional).
- El intervalo de confianza no es un intervalo para la media muestral (100,8) sino para el parámetro de interés cuyo valor desconocemos.



Intervalos de Confianza

Interpretación incorrecta de un Intervalo de Confianza del 95%

- Existe un 95% de probabilidad de que el IC contenga el parámetro θ.

La interpretación es incorrecta porque el IC contiene el parámetro o no lo contiene.

Intervalos de Confianza

Hay diferentes fórmulas para calcular intervalos de confianza

- La fórmula para un intervalo de confianza para una media es:

Observen la relación de el IC y el tamaño de muestra n.

A medida que n aumenta el EE disminuye y por lo tanto la amplitud del IC disminuye (se hace más angosto)

$$\bar{y} \pm t_{n-1} \times EE$$

$$o$$

$$\bar{y} \pm t_{n-1} \times \frac{s}{\sqrt{n}}$$

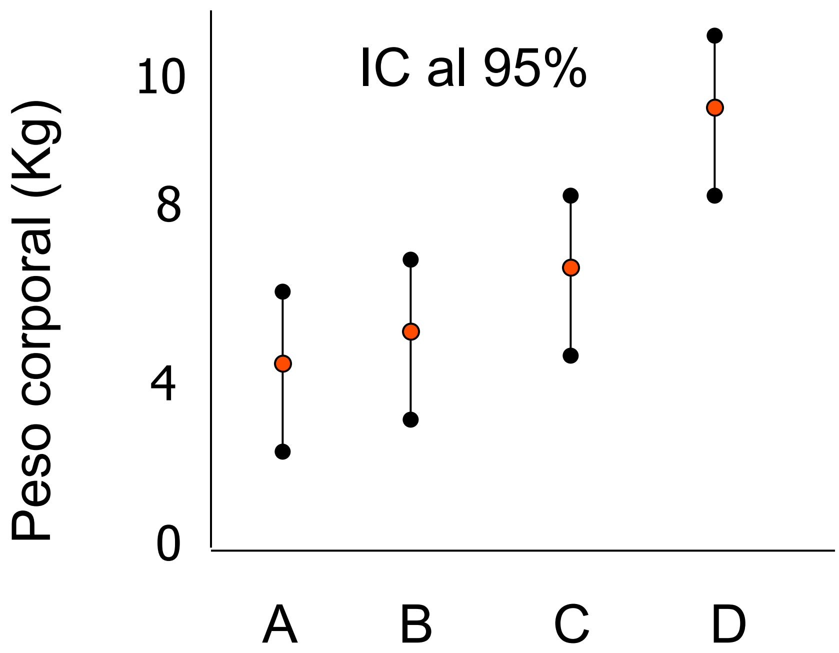
Si el nivel de confianza se aumenta el IC se hace más amplio.

Para llegar a un 100% de confianza se debe hacer un censo.

- El t_{n-1} se refiere a valores de una distribución de t con n-1 grados de libertad.

Intervalos de Confianza

Usando Intervalos de confianza para comparar grupos



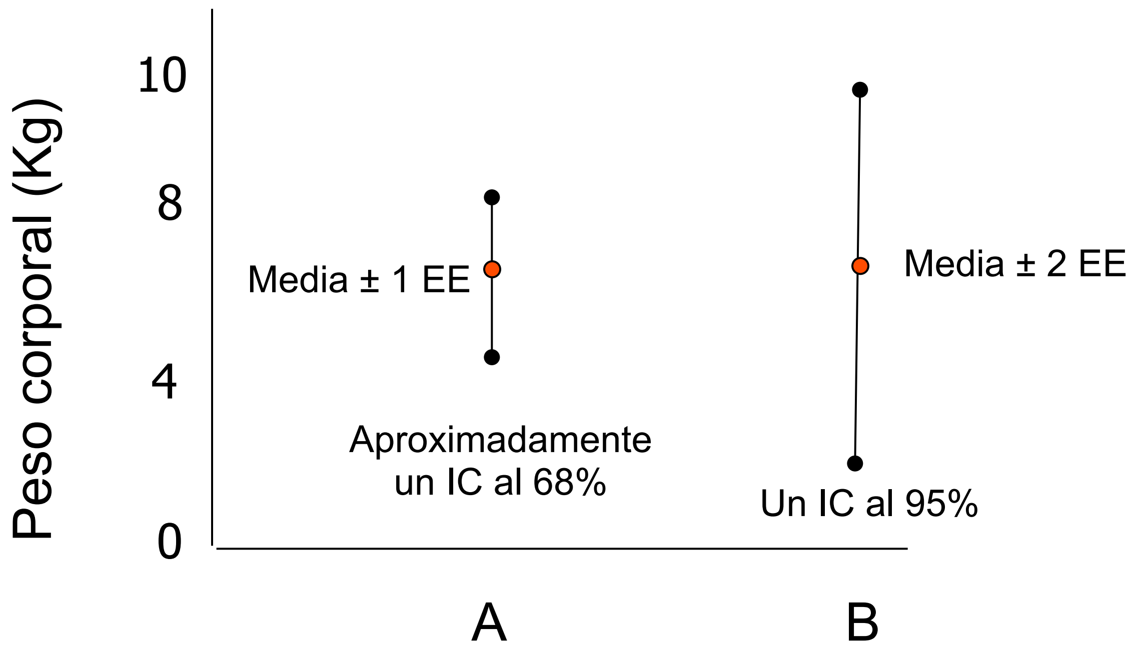
La media poblacional de los sitios A y B no difieren (se solapan demasiado)

La media poblacional del sitio D es mayor que la media poblacional de sitios A y B (no hay solapamiento)

La media poblacional de sitio D podría ser mayor que la media poblacional de sitio C (es incierto porque hay cierto solapamiento)

Intervalos de Confianza

Hay que tener cuidado con la interpretación de la barra de error que se representa en un gráfico



Intervalos de Confianza

Métodos para calcular los Intervalos de Confianza

1. Intervalos de Confianza Normales

   (Más comúnmente usados, provee IC simétricos. No son apropiados cuando el tamaño de muestra es pequeño, permite límite inferior <0)

2. Intervalos de confianza Log-normales

   (Usados en MARK para los estimados de tamaño poblacional (N) y tasa de cambio poblacional (λ). No genera limites inferiores <0 y no son simétricos).

3. Intervalos de Confianza de Perfil de Similitud

   (La teoría de verosimilitud provee mejor intervalos de confianza para tamaños de muestra pequeño)

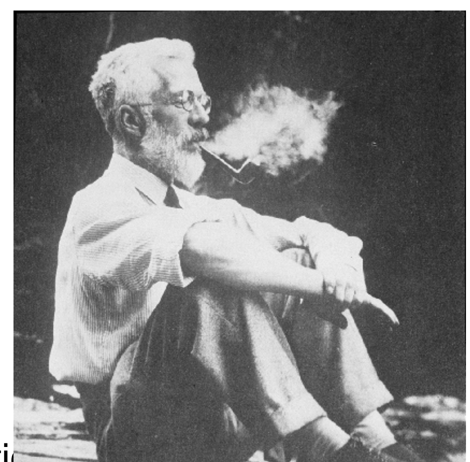
4. Intervalos de Confianza mediante Bootstrap

Métodos de Estimación de Parámetros

1. Método de los Momentos
2. Método de Máxima Verosimilitud
3. Método de los Cuadrados Mínimos
4. Bootstrap y jacknife
5. Estadística Bayesiana

Método de Máxima Verosimilitud (Maximum Likelihood)

- Procedimiento extremadamente simple pero brillante.
- Dada una muestra de observaciones de una población, se encuentran los estimados de uno (o mas) parámetros que maximizan la verosimilitud (likelihood) de observar esos datos.
- Para determinar los estimados de máxima verosimilitud se requiere una función de verosimilitud, la cual brinda la verosimilitud de los datos observados (y por lo tanto el estimado) de todos los posibles valores del parámetro que se intenta estimar.



Sir Ronald Fisher

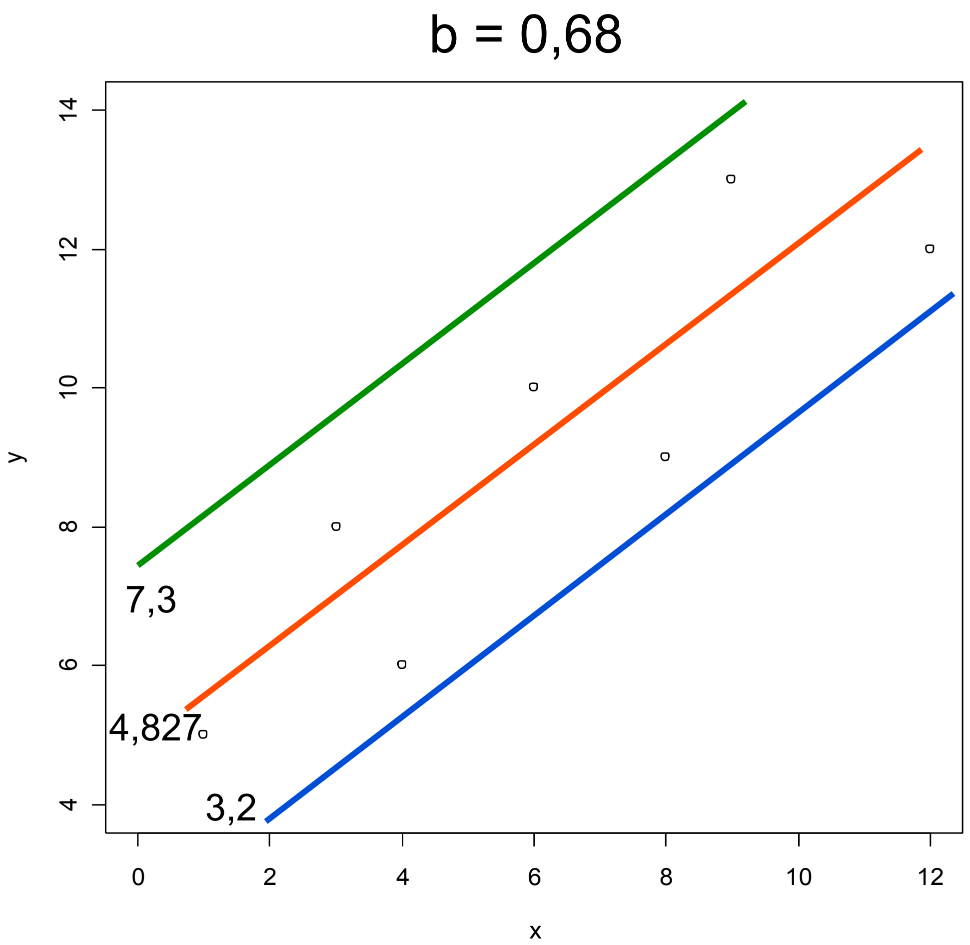
Método de Máxima Verosimilitud (Maximum Likelihood)

- Dado los datos y
- dado nuestro modelo escogido
- ¿qué valores de los parámetros del modelo hacen que nuestros datos sean los más probables?

$y = a + bx$

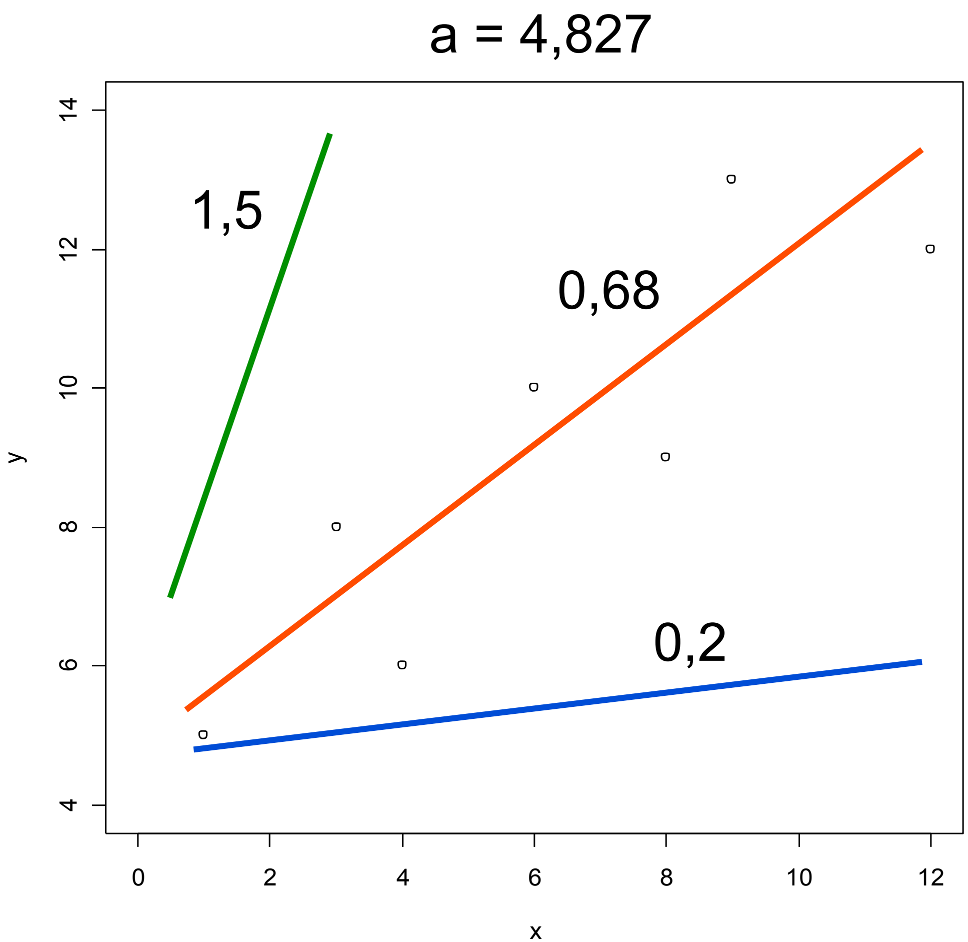
$y = a + 0{,}68x$

Respuesta: $a = 4{,}827$



Método de Máxima Verosimilitud (Maximum Likelihood)

- Dado los datos y
- dado nuestro modelo escogido
- ¿qué valores de los parámetros del modelo hacen que nuestros datos sean los más probables?



$y = a + bx$

$y = 4{,}827 + bx$

Respuesta: $b = 0{,}68$

Método de Máxima Verosimilitud (Maximum Likelihood)

- Los estimados de máxima verosimilitud son aquellos que son "más probables" dado los datos.
- Se eligen valores para θ para maximizar la función de verosimilitud.
- A veces los estimadores de máxima verosimilitud tienen soluciones aritméticas exactas (como cuando se estiman promedios y parámetros para modelos lineales).
- En contraste, cuando se analizan algunas distribuciones no-normales los estimados de máxima verosimilitud se calculan utilizando complejos algoritmos iterativos.
- Verosimilitud (likelihood) no es lo mismo que probabilidad.
- La función de verosimilitud no es una distribución de probabilidades.
- En una distribución de probabilidades para una variable, el parámetro es considerado fijo y los datos son la variable desconocida.
- En una función de verosimilitud, los datos son considerados fijos y y es el parámetro que varía para todo los posibles valores.
- Sin embargo, la verosimilitud de los datos dado un valor de parámetro particular está relacionado a la probabilidad de obtener los datos asumiendo este valor de parámetro específico.

Método de Máxima Verosimilitud (Maximum Likelihood)

Ejemplo del EMV para una distribución binomial

Probability Density Function that describes the probability of observing x successes in n trials is:

$$f(x \mid n, p) = \binom{n}{x} p^{x} (1 - p)^{(n-x)}$$

Método de Máxima Verosimilitud (Maximum Likelihood)

Ejemplo del EMV para una distribución binomial

Usando una probabilidad de distribución binomial se puede modelar el número avistamientos (x) de n zorros cuando cada zorro tiene una probabilidad de detección p.

Si n=5 y p=0.8, entonces la probabilidad de ver los 5 zorros en un muestreo es:

$$f(5 \mid 5, 0.8) = \binom{5}{5} 0.8^{5} (1-0.8)^{(5-5)} = 0.32768$$

y la probabilidad de ver 4 zorros de los 5 es:

$$f(4 \mid 5, 0.8) = \binom{5}{4} 0.8^{4} (1-0.8)^{(5-4)} = 0.4096$$

y la probabilidad de ver 3, 2, 1, y 0 de los 5 zorros es: 0.2048, 0.0512, 0.0064, 0.00032

Método de Máxima Verosimilitud (Maximum Likelihood)

Ejemplo del EMV para una distribución binomial

- Ahora, supongamos que la probabilidad de detección (p) no se conoce y queremos estimarla.
- Supongamos que observamos 4 zorros (x=4) y sabemos que hay un total de 5 zorros en la población (n=5).
- p se podría estimar como: 4/5 = 0.8
- Pero para mostrar como trabaja el estimador de máxima verosimilitud vamos a estimar p dado los datos x y n.

Función de verosimiltud binomial

$$L(p \mid n, x) = \binom{n}{x} p^{x} (1-p)^{(n-x)} \qquad L(p \mid 5,4) = \binom{5}{4} p^{4} (1-p)^{(5-4)}$$

Método de Máxima Verosimilitud (Maximum Likelihood)

Ejemplo del EMV para una distribución binomial

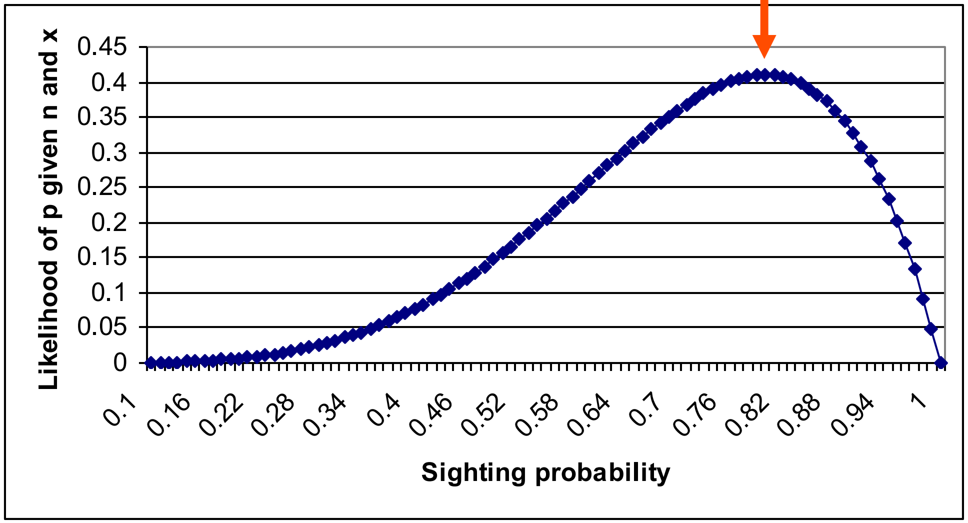
	Función de verosimilitud binomial	Verosimilitud	Log-verosimilitud
¿Que tal p = 0.10?	$L(p \mid 5,4) = \binom{5}{4} 0.10^4 (1-0.10)^{(5-4)}$	0,00045	-7,7072
¿Que tal p = 0.11?	$L(p \mid 5,4) = \binom{5}{4} 0.11^4 (1-0.11)^{(5-4)}$	0,00065	-7,3362
•	•	•	•
¿Que tal p = 0.80?	$L(p \mid 5,4) = \binom{5}{4} 0.80^4 (1-0.80)^{(5-4)}$	0,4096	-0,8925
•	•	•	•
¿Que tal p = 0.99?	$L(p \mid 5,4) = \binom{5}{4} 0.99^4 (1-0.99)^{(5-4)}$	0.0480	-3,0359

Método de Máxima Verosimilitud (Maximum Likelihood)

Ejemplo del EMV para una distribución binomial

Función de verosimilitud binomial

$$L(p \mid 5,4) = \binom{5}{4} p^4 (1-p)^{(5-4)}$$



p	Likelihood
0.73	0.3834
0.74	0.3898
0.75	0.3955
0.76	0.4003
0.77	0.4043
0.78	0.4072
0.79	0.4090
0.80	0.4096
0.81	0.4090
0.82	0.4070
0.83	0.4034
0.84	0.3983
0.85	0.3915
0.86	0.3829
0.87	0.3724

Método de Máxima Verosimilitud (Maximum Likelihood)

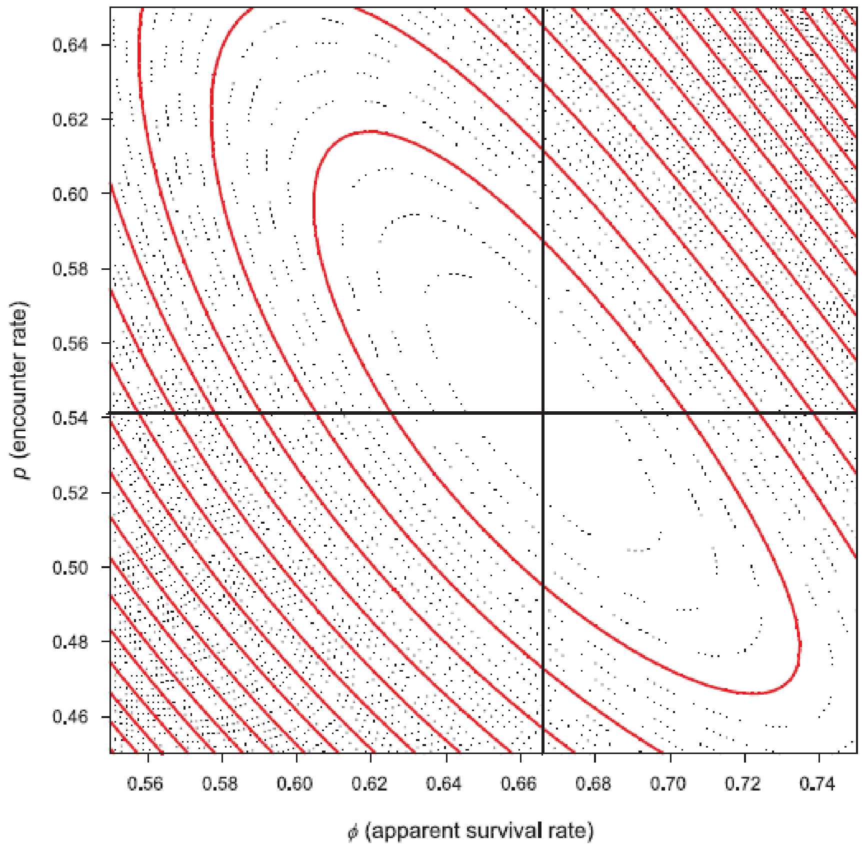
Propiedades de los Estimadores de Máxima Verosimilitud

1. EMV se aproxima a una distribución normal a medida que el tamaño de muestra aumenta.
2. La varianza del EMV es asimptóticamente mínima (minimiza la varianza asimptóticamente).
3. EMV son asimptóticamente insesgados. A medida que el tamaño de muestra aumenta el valor esperado de $\hat{\theta}$ converge hacia θ.

Método de Máxima Verosimilitud (Maximum Likelihood)

Estimadores de máxima verosimilitud para más de un parámetro

Supongamos que un análisis de supervivencia no se puede recapturar cada animal que está vivo, entonces es necesario estimar una tasa de recaptura (y el parámetro de interés (tasa de supervivencia).



1. El EMV es la intersección de la cruz
2. Con dos parámetros el intervalo de confianza del 95% es el contorno más interno

Intervalo de Confianza usando el perfil de verosimilitud

- El “likelihood” es usado para calcular el intervalo de confianza para un parámetro θ_0 basado en la función:

$$\varphi(\theta_0) = 2\ln\left[\frac{L(\hat{\theta}_0, \hat{\underline{\theta}})}{L(\theta_0, \hat{\underline{\theta}})}\right]$$

- La variable aleatoria $\varphi(\theta_0)$ está distribuida como un chi-cuadrado con 1 grado de libertad.
- El intervalo de confianza del perfil de verosimilitud en θ_0 se encuentra al resolver para θ_0 en:

$$\varphi(\theta_0) = \chi_1^2(\alpha)$$

Intervalo de Confianza usando el perfil de verosimilitud

Ejemplo

n = 100 venados son seguidos con radio-telemetría durante el invierno

y = 90 sobreviven

Función de verosimilitud Binomial:

$$L(p \mid 100{,}90) = \binom{100}{90} p^{90} (1-p)^{(100-90)}$$

$$\varphi(\theta_0) = \chi^2_{1,1-\alpha}$$

EMV es p = 0.9 con log-verosimilitud = -32.508

Resolviendo $2\ln\left[\frac{L(\hat{p},\hat{p})}{L(p,\hat{p})}\right] = \chi_1^2(0.05) = 3.84$ entonces $2\left[-32.508 - \ln L(p,\hat{p})\right] = 3.84$

$$\ln L(p,\hat{p}) = -34.4285$$

IC 95% = 0.788 – 0.966

Intervalo de Confianza usando el perfil de verosimilitud

Ejemplo

n = 30 venados seguidos con radio-telemetría durante la estación seca

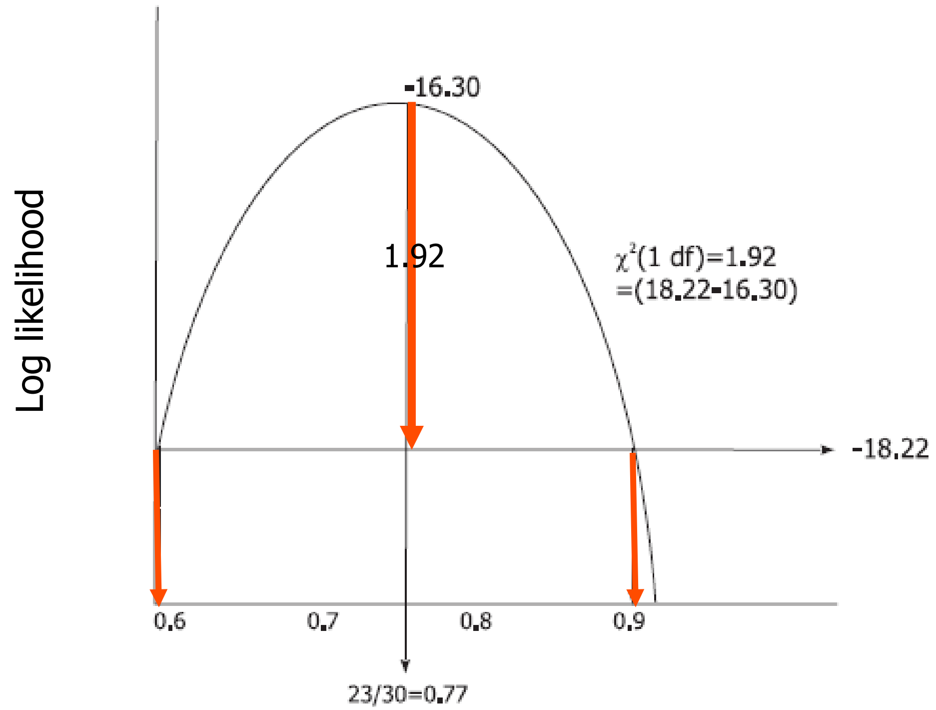
y = 23 sobreviven

EMV es p = 0.77 con log-verosimilitud = -16.30

Valor crítico de $\chi 2$ es 1.92 (3.84/2)

-16.30 – 1.92 = -18.22

IC 95% = 0.6, 0.9



Método de Cuadrados Mínimos (Ordinary Least Squares (OLS))

- El estimador de cuadrados mínimos de un parámetro es aquel que minimiza la suma de las diferencias entre cada observación de la muestra y el parámetro.
- Se calculan más fácilmente que los estimadores de máxima verosimilitud. Existen soluciones aritméticas exactas.
- Para modelos lineales (regresión lineal y ANDEVA) balanceados , EMV y ECM tienen un desempeño idéntico.
- Sin embargo, ECM son inapropiados para modelos comunes en donde la variable respuesta o los residuales no se distribuyen normalmente. Los modelos lineales generalizados (GLM) tales como regresión logística, modelos log-lineales y modelos no lineales se basan en EMV.

Estimador mínimo cuadrado de μ = $\sum (y_i - \bar{y})^2$