

“Diagramas de órbitas e leis de escala
em sistemas dinâmicos não lineares”

Aluno: Vitor Almeida Favarim

Orientador: Prof. Dr. Juliano Antonio de Oliveira

VITOR ALMEIDA FAVARIM

**"Diagramas de órbitas e leis de escala em sistemas
dinâmicos não lineares"**

Dissertação de Mestrado apresentado no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica Interunidades entre o Instituto de Ciências e Tecnologia de Sorocaba e Faculdade de Engenharia de São João da Boa Vista da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Juliano Antonio de Oliveira

São João da Boa Vista

2022

F272d

Favarim, Vitor Almeida

Diagramas de órbitas e leis de escala em sistemas dinâmicos não lineares / Vitor Almeida Favarim. -- São João da Boa Vista, 2022
62 p. : il., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp),
Faculdade de Engenharia, São João da Boa Vista

Orientador: Juliano Antônio de Oliveira

1. Circuitos elétricos. 2. Comportamento caótico nos sistemas. 3.
Sistemas não lineares. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Faculdade de Engenharia, São João da Boa Vista. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.



CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Bifurcações e leis de escala em sistemas dinâmicos não lineares

AUTOR: VITOR ALMEIDA FAVARIM

ORIENTADOR: JULIANO ANTONIO DE OLIVEIRA

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em ENGENHARIA ELÉTRICA, área: Automação pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. JULIANO ANTONIO DE OLIVEIRA (Participação Virtual)
UNESP / Faculdade de Engenharia de São João da Boa Vista (SP)

Prof. Dr. EDSON DENIS LEONEL (Participação Virtual)
IGCE / UNESP/Rio Claro (SP)

Prof. Dr. LUIZ FELIPE RAMOS TURCI (Participação Virtual)
Universidade Federal de Alfenas

São João da Boa Vista, 24 de maio de 2022



Maria Luiza Sarubi Barreto
Diretora Técnica Acadêmica

Dedico o presente trabalho à memória de meu querido avô, Aparecido Almeida.

*O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de
Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001;
Processo nº 2018/14685-9, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo
(FAPESP);
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico CNPq - 309649/2021-8,
303242/2018-3.*

FAVARIM, V. A. **Diagramas de órbitas e leis de escala em sistemas dinâmicos não lineares.** Dissertação de mestrado UNESP - Universidade Estadual Paulista, São João da Boa Vista, 2022.

Resumo

Nesta dissertação foram investigadas algumas propriedades dinâmicas no mapa Ricker, parametrizado pelo parâmetro de controle r . Esse mapeamento pertence a um conjunto de mapas unidimensionais discretos utilizados para descrever a dinâmica de populações biológicas. Construímos o diagrama de órbitas e calculamos os expoentes de Lyapunov para avaliar o comportamento do sistema. Para a bifurcação em $r = 0$, realizou-se a análise da relaxação, fornecendo o expoente de relaxação $\delta = -1$, classificando-a como bifurcação transcritical. Para a bifurcação em $r = 2$, determinamos os expoentes característicos de decaimento de órbita para estado estacionário via método numérico e analítico, como sendo $\alpha = 1$, $\beta = -0,5$ e $z = -2$, classificando-a como duplicação de período. Também foram calculadas as órbitas *supertracks*, um conjunto de funções iterativas contínuas não sensíveis às condições iniciais. Com essas funções, foram extraídos os valores dos expoentes de decaimento das órbitas *supertracks* para o ponto fixo. O principal objetivo do trabalho foi caracterizar as propriedades dinâmicas do mapa Ricker com diferentes metodologias, podendo determinar a natureza de algumas bifurcações via método tradicional e também via *supertracks*, e por fim poder relacionar algumas de suas propriedades com modelos teóricos já conhecidos como o circuito de Chua.

Palavras-chave: Mapa Ricker, Expoente de Lyapunov, Diagrama de Órbitas, Órbitas *Supertracks*, Circuito de Chua.

FAVARIM, V. A. **Orbit diagram and scaling laws in nonlinear dynamical systems.**
Master Degree UNESP - Universidade Estadual Paulista, São João da Boa Vista, 2022.

Abstract

In this dissertation some dynamical properties were investigated in the Ricker map, parameterized by the control parameter r . This mapping belongs to a set of discrete one-dimensional maps used to describe the dynamics of biological populations. We construct the orbit diagram and calculate the Lyapunov exponents to evaluate the behavior of the system. For the bifurcation at $r = 0$, we performed relaxation analysis, providing the relaxation exponent $\delta = -1$, classifying it as a transcritical bifurcation. For the bifurcation at $r = 2$ we determined the characteristic orbit decay exponents for steady state via numerical and analytical method, as being $\alpha = 1$, $\beta = -0.5$ and $z = -2$, classifying it as period doubling. Also calculated were the supertracks orbits, a set of continuous iterative functions not sensitive to initial conditions. With these functions, the values of the decay exponents of the supertracks orbits for the fixed point were extracted. The main goal of the work was to characterize the dynamic properties of the Ricker map with different methodologies, being able to determine the nature of some bifurcations via the traditional method and also via supertracks, and finally being able to relate some of its properties with theoretical models already known as the Chua circuit.

Keywords: Ricker Map, Lyapunov Exponents, Orbit Diagram, Supertracks Orbits, Chua Circuit.

Sumário

Lista de Figuras	9
Lista de Tabelas	11
1 Introdução	12
1.1 Sistemas unidimensionais e órbitas	14
1.2 Caracterização do caos	16
1.3 Atrator	16
1.4 Transiente	17
1.5 Bifurcações	18
1.6 Comportamento assintótico	19
1.7 Estabilidade de pontos fixos ou periódicos	19
1.8 Órbitas <i>supertracks</i>	20
1.9 Divisão do trabalho	20
2 Propriedades dinâmicas do mapa Logístico	22
2.1 O mapa Logístico	22
2.2 Expoentes de Lyapunov para o mapa logístico	25
3 Propriedades dinâmicas do mapa Ricker	27
3.1 O Modelo Ricker	27
3.2 Expoentes de Lyapunov para o mapa Ricker	30
3.3 Relaxação de órbitas para o ponto fixo em $r = 0$	32
3.4 Convergência de órbita para o ponto fixo em $r = 2$	35
3.5 Aproximação analítica da convergência de órbita para o ponto fixo x^*	38
4 Análise das órbitas <i>supertracks</i> no mapa Ricker	41
4.1 Definições e formalismo das órbitas <i>supertracks</i>	41
4.2 Propriedades das órbitas <i>supertracks</i>	45
4.3 A importância de órbitas <i>supertracks</i> de ordens altas	47

4.4	Leis de potência no ponto de bifurcação de duplicação de período via órbitas <i>supertracks</i>	48
5	Propriedades dinâmicas do circuito de Chua	52
6	Conclusões	58

Lista de Figuras

1.1	Primeiros 30 pontos das órbitas para o mapa Ricker, considerando $x_0 = 0,5$ e dois parâmetros de controle diferentes, em (a) $r = 1$ e em (b) $r = 3$	15
1.2	Primeiros 30 pontos das órbitas para o mapa Ricker, em (a) $x_0 = 0,5$ e em (b) $x_0 = 0,51$ para um mesmo parâmetro de controle.	16
1.3	Primeiros 60 pontos do mapa Ricker, considerando $x_0 = 0,5$ e $r = 1,9$. . .	18
2.1	Diagrama de bifurcações para o mapa logístico para $r \in [0,4]$	24
2.2	Diagrama de órbitas para o mapa logístico para $r \in [0,4]$	25
2.3	Diagrama de órbitas para o mapa logístico para $r \in [0,4]$	26
3.1	Primeiras 30 iterações para o mapa ricker considerando (a) $r = 1$, (b) $r = 2,2$, (c) $r = 2,75$, (d) $r = 3,13$	28
3.2	Diagrama de órbita para o mapa Ricker com $x_0 = 0,5$	29
3.3	Diagrama de órbita com aproximação na imagem, considerando $r \in [1,95; 3,25]$ e $x_0 = 0,5$	30
3.4	(a) Diagrama de órbita para o mapa Ricker considerando $r \in [0,4]$. (b) Expoentes de Lyapunov para o mapa Ricker considerando também $r \in [0,4]$. A linha em $\lambda = 0$ representa o ponto de mudança de estabilidade. . .	31
3.5	(a) Diagrama de órbita para o mapa Ricker considerando $r \in [2,65; 2,95]$. (b) Expoentes de Lyapunov para o mapa Ricker considerando também $r \in [2,65; 2,95]$. A linha em $\lambda = 0$ representa o ponto de mudança de estabilidade.	32
3.6	Bifurcação em $r = 0$, considerando $x_0 = 0,5$	33
3.7	Esboço de $ x_0 - x^* vs n$ considerando $r_1 = 0,01$ e $r_2 = 0,001$	34
3.8	Esboço do comportamento de $\tau vs \mu$ confirmando a existência de uma lei de potência com o expoente $\delta = -1,00121(3) \approx -1$	35
3.9	Decaimento de órbita para ponto fixo em $x^* = 1$ e $r = 2$	36
3.10	Número de iterações de cruzamento n_x como função das condições ϵ_0 , usando $r = 2$	37

3.11	Colapso de todas as curvas em um único <i>plot</i> universal com reescala conveniente, em $x^* = 1$ e $r = 2$	38
4.1	(a) Conjunto das oito primeiras funções <i>supertracks</i> para o mapa Ricker. (b) Sobreposição das seis primeiras <i>supertracks</i> com o diagrama de órbitas do mapa Ricker com $x_0 = 0,5$	43
4.2	Órbitas <i>Supertracks</i> no mapa Ricker para $r \in [-0,5; 0,5]$	44
4.3	Órbitas <i>Supertracks</i> no mapa Ricker para $r \in [1,9; 3,25]$	45
4.4	Órbitas <i>Supertracks</i> no mapa Ricker com ampliação na rota para o caos.	45
4.5	<i>Supertracks</i> de ordem alta, conforme mostra a legenda da figura.	47
4.6	Primeiras 19 órbitas <i>supertracks</i> juntamente com o diagrama de órbitas para o mapa Ricker, com $r \in [1,9; 2,1]$. Para a construção do diagrama de bifurcações consideramos $x_0 = 0,5$	49
4.7	Aproximação da órbita em direção ao ponto fixo na bifurcação de duplicação de período, fornecendo a lei de potência com $\theta_2 = -0,4998(3)$	50
4.8	Aproximação da órbita em direção ao ponto fixo na bifurcação de duplicação de período, fornecendo a lei de potência com $\omega_2 = -1,5002(1)$	50
5.1	Circuito de Chua, baseado em (PEREIRA et al., 2014).	53
5.2	Diodo de Chua, baseado em (RAMOS, 2019).	54
5.3	Não-linearidade do diodo de chua, baseado em (PEREIRA et al., 2014).	54
5.4	Espaço de fases do circuito de Chua simulado, com os parâmetros $\alpha = 9,4$, $\beta = 28$, $G_a = -1,2$ e $G_b = -0,7$ e $x_0 = 0,7$	55
5.5	Espaço de fases do circuito de Chua simulado, com os parâmetros com os parâmetros $\alpha = 12$, $\beta = 28$, $G_a = -1,2$ e $G_b = -0,7$ e $x_0 = 0,7$	56
5.6	Espaço de fases do circuito de Chua simulado, com os parâmetros com os parâmetros $\alpha = 14,6$, $\beta = 28$, $G_a = -1,2$ e $G_b = -0,7$ e $x_0 = 0,7$	56
5.7	Diagrama de órbitas para uma faixa de operação do circuito de Chua, em função do ajuste de α . Adaptado de (LI; ZENG; YANG, 2014).	57

Lista de Tabelas

3.1	Tabela para valores dos expoentes críticos α , β , z e δ para diferentes tipos de bifurcações (LEONEL, 2019).	35
-----	---	----

Capítulo 1

Introdução

Sistemas dinâmicos possuem relações matemáticas que, a partir do conhecimento de um estado configuracional em um determinado instante, é possível determinar o estado em um instante posterior. Alguns autores datam o início dos estudos sobre sistemas dinâmicos entre os séculos XV e XVI, com a busca pela compreensão da mecânica celeste, contudo a modelagem matemática de um sistema temporal só teve progresso com Isaac Newton e suas leis do movimento (LEONEL, 2019).

Ao longo dos anos, a interdisciplinaridade de sistemas dinâmicos não lineares ficou cada vez mais evidente e, com isso, o interesse pela área aumentou gradativamente. Esses modelos matemáticos podem ser aplicados muito além da matemática e física, passando pela biologia, transmissão de doenças, ciclos econômicos, eletrônica, números randômicos, análise de espectro de energia, análise numérica, obtenção de resultados analíticos, criptografia, polinômios, ou mesmo em modelos teóricos como da dinâmica de fluidos com a convecção Rayleigh-Bernard, modelos de dinâmica populacional, como no caso do mapa Smith e Slatkin ou mesmo no foco do estudo desta dissertação, o modelo Ricker (KENDALL; FOX, 1998; STROGATZ, 2018; LUNA-ACOSTA et al., 2001; ZHANG, 2006)

Existem essencialmente sistemas dinâmicos lineares e não lineares. O primeiro possui soluções gerais, e é possível com pouca complexidade matemática determinar o comportamento futuro do sistema. O segundo, todavia, possui maior complexidade de obter soluções exatas para análise analítica, e mesmo se obtidos os resultados podem ser de difícil interpretação. Com o grande desenvolvimento tecnológico e de processamento das últimas décadas (ROCHA; MARTINS-FILHO; MACHADO, 2005), esses sistemas estão gradativamente sendo estudados e, atualmente, foram já desenvolvidos uma enorme quantidade de referências de estudos desenvolvidos e aplicados com a Teoria do Caos em mapeamentos caóticos e sistemas modelados matematicamente.

Algumas metodologias convenientes proporcionam uma análise mais holística da dinâmica do sistema, a fim de simplificar e compreender determinados comportamentos. Por

exemplo Aleksandr Lyapunov propôs que o comportamento caótico pode ser determinado a partir da evolução de duas condições iniciais próximas (x_0 e $x_0 + c$) que se afastam uma da outra exponencialmente no tempo. Assim, o estado futuro de uma condição inicial torna-se independente da outra, não havendo, portanto, nenhum tipo de ligação ou relação. Essa separação exponencial de órbitas com condições iniciais vizinhas no espaço de fases conduz ao conceito de expoente de Lyapunov positivo, fornecendo a identificação da dinâmica da órbita como caótica. A análise do afastamento exponencial médio entre trajetórias vizinhas também pode caracterizar a presença de comportamentos periódicos ou quase periódicos, no caso, quando a evolução de duas condições iniciais se mantém próximas com o passar do tempo. Nessa condição, o expoente de Lyapunov é negativo.

Outra forma de abranger determinadas características é utilizando as seções de Poincaré (HILBORN et al., 2000), em que permite a redução de um fluxo de soluções de um problema de N dimensões para $N - 1$ dimensões. Além disso, é possível a discretização de equações diferenciais, que permite um custo numérico menor em obter informações do problema quando comparado à equações diferenciais descritas nos modelos.

Mapeamentos discretos unidimensionais, como o já conhecido mapa logístico - amplamente estudado e desenvolvido por Robert May e inspiração para este trabalho, possui um desenvolvimento matemático aparentemente simples. Entretanto, a alteração do parâmetro de controle proporciona uma grande diversidade de comportamentos interessantes em sua dinâmica, como pontos fixos, bifurcações de diversos tipos, atratores caóticos, crises de fronteiras, dentre outros. Esse comportamento pode ser identificado em mapeamentos unidimensionais não lineares em geral e neste trabalho algumas metodologias já conhecidas para a literatura estão aplicadas em um mapa ainda não tão estudado.

A ciência possui objetivo de encontrar leis deterministas que governam a realidade. As leis são convenientes para prever a evolução futura de um sistema real, bastando expandir e extrapolar as funções matemáticas representativas para os valores e condições iniciais dadas. Assim, tem-se sistemas dinâmicos determinísticos, que são previsíveis e rígidos diante de alguma lei, seja ela uma simples equação ou até um conjunto de equações diferenciais, ou saindo da matemática, também como sistemas biológicos ou químicos, e assim por diante.

Diversos sistemas não lineares apresentam evoluções temporais que podem ser descritas usando-se formalismos de escala. Com a variação de parâmetros de controle, é possível observar e caracterizar, via leis de potência, grandezas físicas e observáveis no espaço de fases. Essas leis de potência podem levar à definição de expoentes críticos conduzindo a comportamentos universais. Trata-se de uma metodologia muito bem aceita pela comunidade científica na investigação de diversos problemas.

Em mapeamentos discretos unidimensionais, podemos observar uma série de caracte-

rísticas e comportamentos relacionados a dinâmica do sistema. O diagrama de órbitas, presente no Capítulo 3 construída para o mapa Ricker, representa a visão geral do mapa alvo deste trabalho, e ficará visualmente mais evidente alguns pontos aqui citados. Antes de introduzir o modelo em si conforme apresentamos a seguir, é importante realizar uma pequena análise de pontos importantes que serão comentados e desenvolvidos nesse trabalho.

1.1 Sistemas unidimensionais e órbitas

Considerando um sistema caracterizado por uma dinâmica não linear, podemos abranger e analisar, de forma genérica, algumas características importantes da estrutura de um sistema como esse. O sistema parte de uma condição inicial, que chamamos nesse trabalho de x_0 . Um sistema dinâmico não linear é, por definição, iterativo, determinístico e sensível às condições iniciais. Isso quer dizer que um sistema evolui baseado na iteração anterior, portanto o próximo resultado depende do atual, e assim por diante. Um sistema como esse, de forma genérica, pode ser evoluído da seguinte forma:

$$x_{n+1} = \mathcal{M}(x_n), \quad (1.1)$$

sendo a função $\mathcal{M}(x_n)$ conhecida. A condição inicial x_0 é importante para caracterizar o primeiro resultado do mapa, para posteriormente realizar o procedimento iterativo. Dessa forma, a evolução de um mapa genérico unidimensional discreto é descrita pela sequência:

$$\begin{aligned} x_1 &= \mathcal{M}(x_0), \\ x_2 &= \mathcal{M}(x_1), \\ x_3 &= \mathcal{M}(x_2), \\ &\dots \\ x_{n+1} &= \mathcal{M}(x_n), \end{aligned} \quad (1.2)$$

Nesse caso, considerando as condições supracitadas, dada uma condição inicial x_0 é possível encontrar a sequência de estados $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ por n aplicações sucessivas de \mathcal{M} . Essa sequência é chamada de órbita e, em alguns casos, uma expressão geral para x_n em função de n pode ser obtida.

Assim, a partir de um estado inicial, a evolução dinâmica de um sistema fornece um conjunto de estados seguintes. A sequência desses estados recebe o nome de órbita, que fornece a dinâmica temporal de um estado inicial. Conforme descrito em (LEONEL, 2019),

a partir da troca da configuração inicial, a evolução dinâmica fornece outra sequência de estados distintos e, conseqüentemente, outra órbita. Considerando todas as órbitas dentro de um intervalo de parâmetros de controle, podemos considerar o espaço de fases ou espaço de estados, que fornece informações a respeito de todos os estados considerados do sistema dinâmico.

Para o caso particular do mapa Ricker, que será apresentado e discutido em detalhes posteriormente, no Cap. 3, considerando $\mathcal{M} \rightarrow f$, temos que:

$$f(x_n) = x_{n+1} = x_n e^{r(1-x_n)}, \quad (1.3)$$

onde r é o parâmetro de controle, que agora analisamos como um valor fixo.

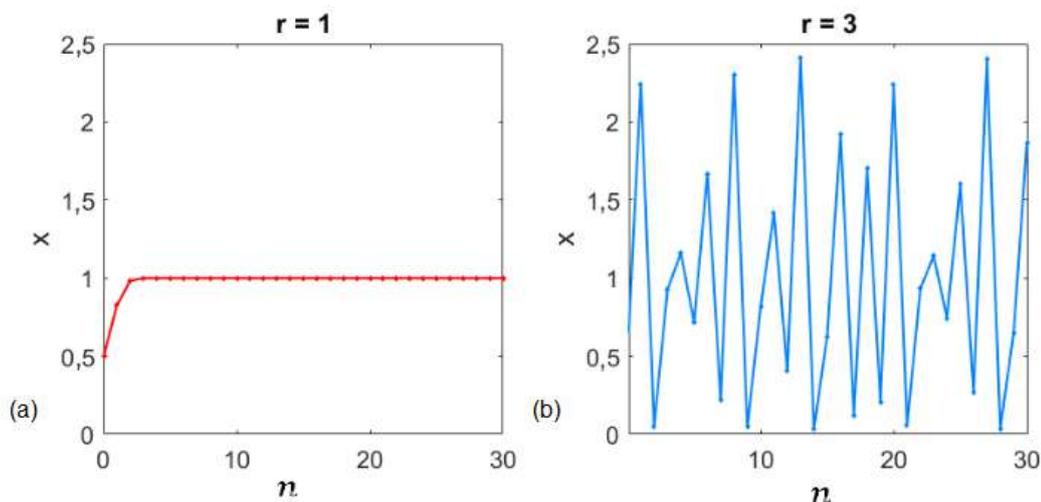


Figura 1.1: Primeiros 30 pontos das órbitas para o mapa Ricker, considerando $x_0 = 0,5$ e dois parâmetros de controle diferentes, em (a) $r = 1$ e em (b) $r = 3$.

A figura 1.1 apresenta os primeiros pontos da órbita para os parâmetros em figura 1.1(a) $r = 1$ e figura 1.1(b) $r = 3$, a fim de analisar diferentes comportamentos do sistema, e com $x_0 = 0,5$. Nota-se uma grande diferença em suas órbitas já nas primeiras iterações, ilustrando comportamentos com naturezas diferentes.

Outra ilustração pertinente é a análise da sensibilidade às condições iniciais, também utilizando o mapa Ricker, para o mesmo parâmetro de controle $r = 3$, com duas condições iniciais ligeiramente diferentes, na figura 1.2(a) $x_0 = 0,5$ e figura 1.2(b) $x_0 = 0,51$ com um mesmo parâmetro de controle $r = 3$. Podemos identificar visualmente uma divergência de órbitas já nas primeiras iteradas, apresentando uma grande sensibilidade às condições iniciais.

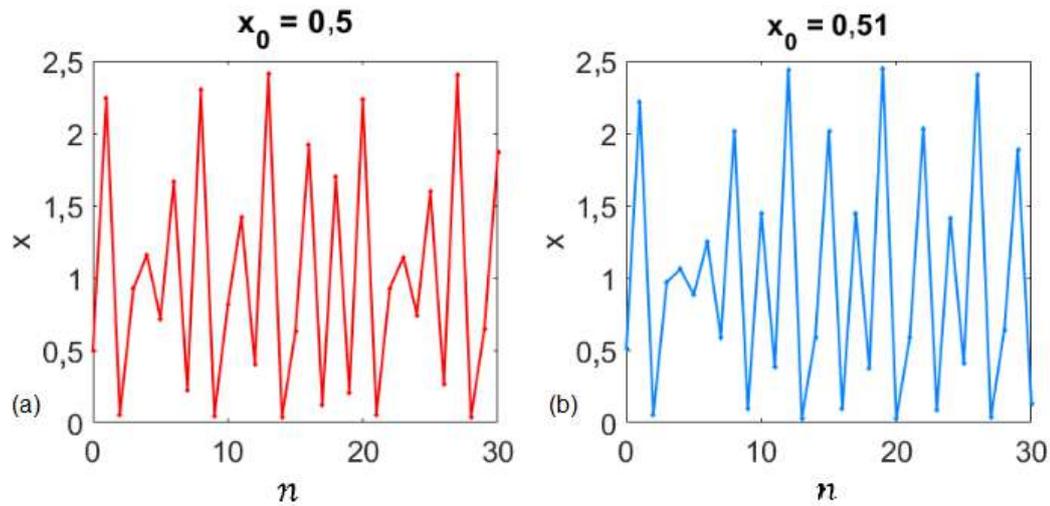


Figura 1.2: Primeiros 30 pontos das órbitas para o mapa Ricker, em (a) $x_0 = 0,5$ e em (b) $x_0 = 0,51$ para um mesmo parâmetro de controle.

1.2 Caracterização do caos

O caos é um termo usado para descrever o comportamento complexo de um sistema. De acordo com Leonel (2019), a perda de correlação da evolução temporal a partir de duas condições iniciais próximas e o afastamento exponencial dessas órbitas no espaço de fases remetem ao conceito de caos. Isso garante que o conhecimento de um determinado estado futuro a partir de uma das condições iniciais não permita dizer nada sobre o comportamento temporal da outra condição inicial. Em suma, conforme descrito por Poincaré, um sistema caótico deve possuir três condições satisfeitas: comportamento limitado, aperiódico e sensível às condições iniciais (MONTEIRO, 2002).

A sensibilidade às condições iniciais pode ser observada em inúmeros modelos e sistemas físicos. Lorenz afirma que o *pinball* está para o caos assim como o dado está para a probabilidade (SAVI, 2006). Mínimas diferenças em condições iniciais de lançamento da bola pode acarretar em diferenças muito grandes depois de um certo tempo. Analogamente, a mínima variação de um impulso de um esquiador no início de uma pista pode acarretar em grandes diferenças em um determinado ponto da pista. Essa sensibilidade às condições iniciais está ilustrada para o mapa Ricker na figura 1.2, na qual duas condições iniciais próximas, com diferença de 10^{-2} , são aplicadas e evoluídas no mapa.

1.3 Atrator

Uma consideração importante para todo o estudo de sistemas não lineares, seja unidimensional ou não, é o conceito de atrator. Este consiste em um ponto ou conjunto de

pontos no espaço de fases para o qual as órbitas convergem com o tempo. Há, essencialmente, três tipos de atratores:

- Atrator de ponto fixo;
- Atrator de ciclo limite;
- Atrator estranho

Os atratores de ponto fixo são definidos por pontos ao quais o sistema sempre converge, ou seja, um sistema de atração fechado que representa um estado estacionário bem definido. Atratores de ciclo limite tratam parâmetros limitados que definem os limites em que o sistema pode oscilar e representam um ciclo com periodicidade. E por fim, atratores estranhos possuem uma órbita em torno de pontos de maneira não periódica e caótica. Independente de sua natureza, podem ser vistos no espaço de fases de forma clara, conforme sua representação dinâmica.

1.4 Transiente

O conceito de transiente é caracterizado pelos primeiros pontos de uma órbita, ou seja, seu comportamento inicial (FIDÉLIS et al., 2013). Em muitos casos o comportamento do transiente não é relevante para a órbita, pois apenas após um grande número de iterações a órbita converge de fato para um atrator. Assim, a maior parte dos estudos de sistemas dinâmicos descartam o transiente, buscando analisar o comportamento assintótico ou estacionário das órbitas. A quantificação de quantos pontos são necessários para atingir o estado estacionário é obtida empiricamente, de forma que a simulação não sofra alterações indesejadas.

Algumas características visuais já foram identificados no item 1.3, contudo vale ilustrar em uma situação específica o significado prático e visual do transiente. A figura 1.3 ilustra os primeiros 60 pontos do mapa Ricker, considerando $x_0 = 0,5$ e $r = 1,9$.

Nota-se que logo após a condição inicial a órbita inicia sua trajetória em direção ao ponto fixo. Especificamente nesse caso tem-se o ponto fixo $x^* = 1$, ou seja, a órbita com o passar das iterações converge para esse valor. Conforme supracitado, o número de iterações deve ser escolhido tal que para n muito grande, x_n atingiu seu comportamento definitivo, ou seja, comportamento tal que permaneça o mesmo para qualquer número de iterações, considerando seja um ponto fixo unitário ou periódico. Nesse caso, para apenas 60 iterações, não é possível assumir que o comportamento já finalizou seu período transitório, portanto a figura procura apresentar apenas o comportamento da órbita nos passos iniciais. O comportamento antes da convergência pode ser de diversos formatos e geralmente não possui importância para estudo e caracterização do modelo.

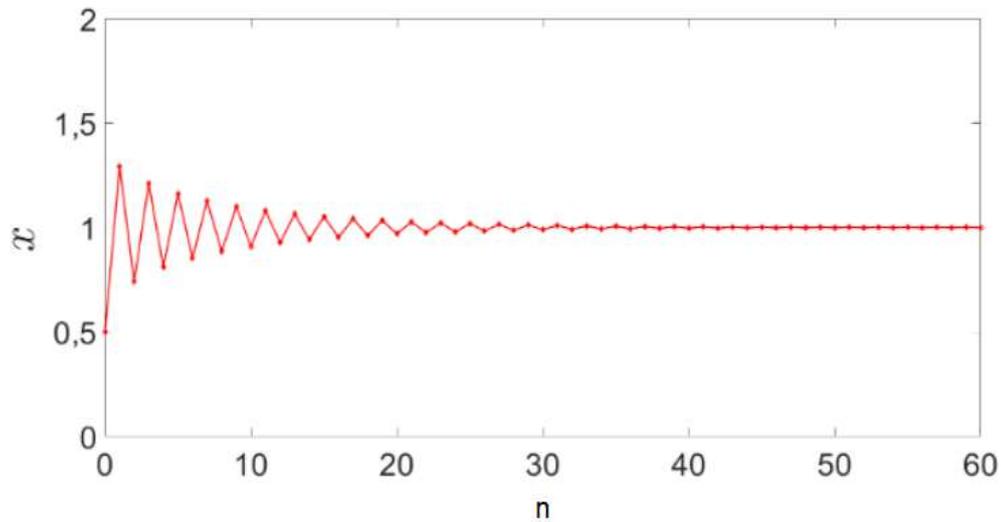


Figura 1.3: Primeiros 60 pontos do mapa Ricker, considerando $x_0 = 0,5$ e $r = 1,9$.

Para um mapa que ilustra a dinâmica populacional, a órbita pode simbolizar alguma proporção de alguma determinada razão de números de indivíduos, como porcentagem ou uma fração. Esse comportamento simboliza que em algum determinado período de tempo (anos, por exemplo), a população de algum determinado indivíduo oscila entre valores ligeiramente maiores e menores que a razão 1, convergindo para $x_{n \rightarrow \infty} = 1$.

1.5 Bifurcações

As bifurcações estão associadas a mudanças de estabilidade do sistema que, como supracitadas, podem ser alteradas de acordo com a mudança nos parâmetros. Possuem grande importância científica, uma vez que apresentam modelos para transições e instabilidades de sistemas conforme algum parâmetro é variado. A referência (STROGATZ, 2018) apresenta algumas das bifurcações aqui citadas, em sistemas de tempo contínuos unidimensionais regidos por equações diferenciais. Essas características podem ser estendidas para mapeamentos discretos. Assim, podemos destacar quatro principais tipos de bifurcações:

- Sela-nó
- Forquilha
- Transcrítica
- Duplicação de período

A bifurcação sela-nó acontece quando o sistema não possui nenhum ponto fixo, porém, quando um parâmetro é variado surge um ponto fixo não-hiperbólico que se separa em dois pontos fixos: um ponto de sela e um nó. A bifurcação de forquilha acontece quando existe um ponto fixo estável que se torna instável, originando dois novos pontos fixos estáveis. A bifurcação transcritical ocorre com a coexistência de dois pontos fixos, sendo um estável e um instável, e na bifurcação ocorre a troca de estabilidade entre eles. E finalmente, a bifurcação de duplicação de período, há um surgimento de uma órbita com período duplicado, onde o ponto fixo perde a estabilidade e surgem dois ramos novos estáveis (LEONEL, 2019). Nesse trabalho, o foco de estudo é duas bifurcações específicas do mapa Ricker, que foram definidas e classificadas conforme desenvolvimento da dissertação.

1.6 Comportamento assintótico

O comportamento assintótico pode apresentar três dinâmicas típicas: dinâmica caótica, periódica ou divergente.

Dinâmicas caóticas são dinâmicas que satisfazem as condições apresentadas por Poincaré descritas na Seção 1.2. Ou seja, órbitas que não divergem, não apresentam periodicidade e são sensíveis às condições iniciais, conforme ilustrado na figura 1.2.

Dinâmicas periódicas são aquelas em que ocorre a condição $x_{n+p} = x_n$, para $n \gg 1$ e $p \gg 1$. Assim, considerando uma órbita de período p e, assim, a condição $\mathcal{M}^{(p)}(x_n) = x_{n+p} = x_n$ é validada. A partir desta condição que os pontos fixos (período 1) e demais regiões periódicas de um sistema de tempo discreto são obtidas.

Dinâmica divergente é aquela em que, considerando $n \rightarrow \infty$, tem-se $x_n \rightarrow \pm\infty$

1.7 Estabilidade de pontos fixos ou periódicos

Chamamos neste trabalho um ponto fixo de x^* . Considerando sua existência, temos então que para um mapeamento unidimensional \mathcal{M} o ponto fixo é descrito por $\mathcal{M}(x^*) = x^*$, de modo que para todo $x_n = x^*$ com $n \gg 1$, segue com $\mathcal{M}(x_n) = x_{n+1} = x^*$. Dessa forma entende-se que um ponto fixo é caracterizado pela estabilidade periódica do espaço de fases. Essa análise considera periodicidade $p = 1$, contudo para $p > 1$ a descrição é análoga, podendo presumir que $\mathcal{M}^{(p)}(x^*) = x_n$ e, portanto, a descrição genérica é fornecida por $\mathcal{M}^{(p)}(x_n) = x_{n+p} = x^*$ para qualquer $p \geq 1$.

O estudo de estabilidade e periodicidade é apresentado em (TEIXEIRA et al., 2015), de modo que é utilizado como base de estudo para o trabalho em questão.

1.8 Órbitas *supertracks*

De acordo com Oblow (1988) outra forma de obter informações relevantes a respeito de mapeamentos discretos é com o estudo do comportamento de funções contínuas, denominadas órbitas *supertracks*. Elas são obtidas a partir da derivada do mapa da seguinte forma:

$$\frac{df(x_n)}{dx_n} = \frac{dx_{n+1}}{dx_n} = 0. \quad (1.4)$$

Essas funções permitem a análise das fronteiras do mapa e de convergências de órbitas para pontos fixos com decaimentos exponenciais, bem como a condição de densidade pontual de cada parâmetro de controle do mapeamento discreto (FIDÉLIS et al., 2013; OBLOW, 1988, 1987).

1.9 Divisão do trabalho

Nessa dissertação o alvo de estudo será o mapa Ricker, proposto em meados da segunda metade do século XX (LEVIN; GOODYEAR, 1980; KOETKE; DUARTE; WECKERLY, 2020; RICKER, 1954). Conforme referências, Ricker propôs um modelo de dinâmica populacional, especialmente para aplicação em peixes, que possui comportamento caótico ou não, dependendo do parâmetro de controle. O trabalho, portanto, é baseado neste modelo unidimensional discreto, que foi pouco investigado pela literatura.

Para melhor expressar nossas intenções, organizamos essa dissertação da seguinte forma:

No Capítulo 1 realizou-se uma breve introdução a respeito de tópicos importantes para o estudo de mapas caóticos e teoria do caos. Especificamente, para modelos unidimensionais. No Capítulo 2, tem-se a fundamentação teórica reproduzindo análises já conhecidas do mapa logístico, com o objetivo de criar um alicerce sólido para as análises seguintes.

Com o embasamento necessário já realizado, no Capítulo 3 apresentamos o mapa Ricker com mais detalhes, desenvolvendo alguns exemplos de iterações e o diagrama de órbita (DO) para $r \in [0, 4]$, utilizado para compreensão do comportamento geral do sistema, analisando de maneira ampla. Com o modelo feito, o será descrito o cálculo dos expoentes de Lyapunov para caracterizar a dinâmica das órbitas em função do parâmetro de controle..

Posteriormente, ainda no Capítulo 3 observamos algum comportamento típico em $r = 0$, que conduz a uma análise específica para caracterização do tipo de bifurcação. Na ocasião, é analisado o parâmetro de controle $r \in [-0.5, 0, 5]$ apenas para fins teóricos, uma vez que não possui validade física um parâmetro de controle negativo nesse tipo de mapa

proposto. Para definir a natureza da bifurcação, nesse caso é necessário definir um tempo de relaxação τ , que, com uma tolerância tol , é possível caracterizar o valor do expoente δ , considerando $\tau \propto \mu^\delta$, em que δ é o expoente de relaxação.

A finalização do Capítulo 3 está relacionada ao valor $r = 2$ em que podemos identificar visualmente no diagrama de órbitas uma bifurcação de duplicação de período. A metodologia já conhecida pela literatura permite caracterizar os expoentes críticos α , β e z para a bifurcação em questão, via metodologia numérica e analítica. Uma descrição fenomenológica de uma função homogênea generalizada consegue fornecer hipóteses de escala que são importantes para validação dos expoentes críticos.

Por fim, no Capítulo 4 apresentamos uma análise holística de *supertracks* aplicadas para o mapa em questão, com uma aplicação específica também na duplicação de período com desenvolvimentos inéditos na literatura atual. Primeiramente tem-se a comparação das *supertracks* com o próprio diagrama de órbita, demonstrando o comportamento geral do sistema. Apresentamos também a importância de funções de ordem alta bem como a interação da tangência e cruzamento dessas funções. Posteriormente, mostramos a aplicação de sucessivas iterações de funções *supertracks* no ponto de bifurcação de duplicação de período, em $r = 2$, a fim de, via *supertracks*, caracterizar os expoentes críticos. Estes, descritos e apresentados referência (POLI, 2021) estão validados para o mapa Ricker, bem como toda a integração e comparação do mapeamento discreto unidimensional com as funções *supertracks*.

Vale ressaltar que todas as simulações foram realizadas no software Matlab, utilizando por padrão números de ponto flutuante no formato de precisão dupla de acordo com a norma IEEE® 754 para precisão dupla. Todos os valores desse tipo de precisão requerem 64 bits e são suficiente para a análise fenomenológica em questão (POLI, 2021).

Capítulo 2

Propriedades dinâmicas do mapa Logístico

Neste Capítulo realizaremos uma revisão bibliográfica do mapa logístico, com uma visão abrangente baseada no diagrama de órbitas bem como nos expoentes de Lyapunov.

2.1 O mapa Logístico

A equação que descreve o mapa logístico é dada por:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad (2.1)$$

onde x_n é o número de indivíduos na n -ésima geração e r o parâmetro de controle de modo que $r \in [0, 4]$. O sistema, apesar de simples, possui destaque em suas propriedades dinâmicas por apresentar comportamento complexo (MONTEIRO, 2002). O mapa logístico, bem como uma série de mapas unidimensionais discretos, é uma equação determinística, ou seja, o estado futuro será determinado de acordo com os estados presentes. O comportamento do sistema varia de acordo com os valores de r , oscilando seu comportamento entre periódico e caótico com mínimas alterações. Esse fato chamou a atenção de Robert May, que realizou amplos estudos a respeito (MAY, 1974).

Os pontos fixos da equação 2.1 podem ser encontrados a partir da condição $x_{n+1} = x_n = x^*$, de modo que a sucessão de iterações resulta em um mesmo ponto com a condição de iterações suficientemente grande. Assim, temos:

$$x^* = rx^*(1 - x^*), \quad (2.2)$$

$$x^* - rx^* + rx^{*2} = 0. \quad (2.3)$$

Resolvendo a equação para x , temos que os pontos fixos de periodicidade $p = 1$ são

descritos por:

$$x_1^* = 0, \quad (2.4)$$

e

$$x_2^* = 1 - \frac{1}{r}. \quad (2.5)$$

As funções que descrevem o comportamento assintótico do mapa para órbitas de período 2 são baseadas na condição $x_{n+2} = x_n = x^*$. Assim:

$$x_{n+2} = rx_{n+1}(1 - x_{n+1}). \quad (2.6)$$

Substituindo (2.1) em (2.6), ficamos com:

$$x_{n+2} = r[rx_n(1 - x_n)1 - [rx_n(1 - x_n)]], \quad (2.7)$$

$$x_{n+2} = r^2x_n - r^2x_n^2 - r^3x_n^2 + 2r^3x_n^3 - r^3x_n^4, \quad (2.8)$$

Considerando a suposição supracitada, temos que $x_{n+2} = x_n$. Portanto:

$$x_n = r^2x_n - r^2x_n^2 - r^3x_n^2 + 2r^3x_n^3 - r^3x_n^4, \quad (2.9)$$

$$1 = r^2 - r^2x_n - r^3x_n + 2r^3x_n^2 - r^3x_n^3, \quad (2.10)$$

Para determinação das funções de ponto fixo, faz-se necessário encontrar as raízes da função em questão. Assim podemos aplicar o teorema de D'alembert para divisão de polinômios, que é utilizado para diminuição de grau de polinômio: dado um polinômio $p(x)$ de grau $n \geq 1$, sendo q_1 a raiz de $p(x)$, então $p(x)$ é divisível por $x - q_1$, resultando em um quociente polinomial $q_1(x)$ de grau $(n - 1)$. Assim:

$$= \frac{-r^2 + r^2x_n + r^3x_n - 2r^3x_n^2 + r^3x_n^3 + 1}{x - 1 + \frac{1}{r}} \quad (2.11)$$

$$= r^3x^2 - r^3x - r^2x + r^2 + r \quad (2.12)$$

Dividindo a equação (2.12) por r e resolvendo em função de x , temos duas soluções possíveis e os pontos fixos são definidos e descritos por:

$$x_3^* = \frac{r + 1 + \sqrt{r^2 - 2r - 3}}{2r} \quad (2.13)$$

e

$$x_4^* = \frac{r + 1 - \sqrt{r^2 - 2r - 3}}{2r} \quad (2.14)$$

Após o cálculo analítico dos pontos fixos, é importante representá-los graficamente.

Na figura 2.1 é apresentado o diagrama de bifurcações, tornando possível identificar o comportamento das funções que representam os diferentes pontos fixos, em função de r . Considerando a função x_n^* por r , tem-se a representação do diagrama de bifurcações. Na figura 2.2 tem-se o diagrama de órbitas, portanto é possível observar uma grande abrangência de soluções de acordo com diferentes parâmetros de controle.

É possível observar nas duas figuras a seguir que para $r \in [0, 1]$ o comportamento é caracterizado pelo período 1 e a órbita é atraída para o ponto fixo $x_1^* = 0$. No intervalo $r \in [1, 3]$ ainda permanece uma órbita de período 1, porém regida por uma função diferente da anterior, sendo agora $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$. Ao observar o intervalo $r \in [3; 3, 5]$, a órbita de período 2 surge e permanece com alternância entre dois pontos fixos, descritos por x_3^* e x_4^* . Vale a pena também ressaltar que para valores de r onde estes pontos fixos perderam a estabilidade as curvas continuam a aparecer, porém são instáveis. A análise é análoga para períodos maiores que 2, porém a abordagem analítica fornece funções mais complicadas devido ao grau do polinômio..

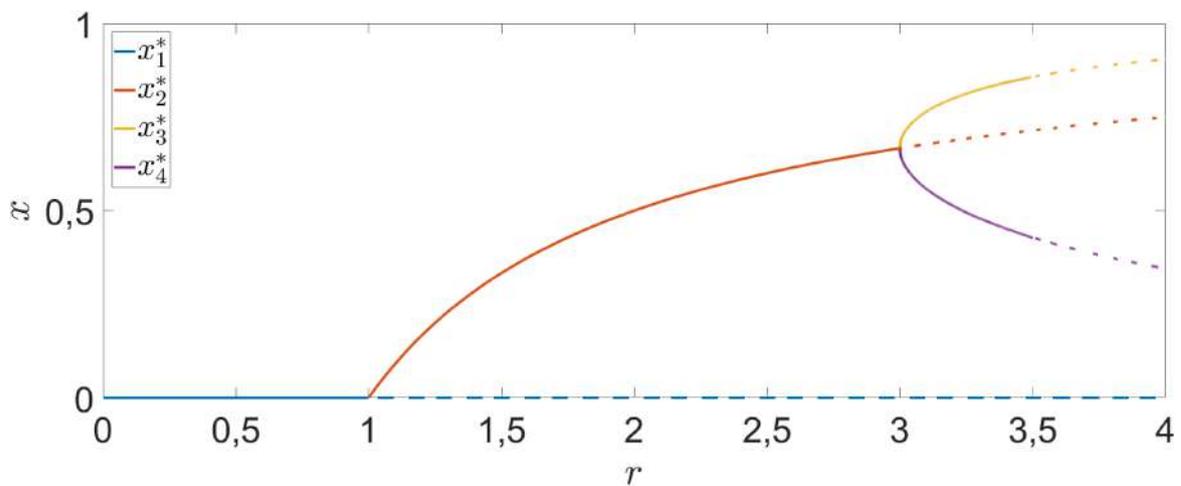


Figura 2.1: Diagrama de bifurcações para o mapa logístico para $r \in [0, 4]$.

O diagrama de órbitas consiste em uma sucessão de iterações do mapa com cada valor de r , com resolução tão baixa quanto necessário. Para tal, é importante também o descarte do transitório, uma vez que para a análise em questão o início do comportamento assintótico não possui interesse para análise.

É possível observar os valores obtidos anteriormente para pontos fixos, no caso em que há periodicidade 1 ($p = 1$) e periodicidade 2 ($p = 2$). Além disso é possível identificar a rota para o caos bem como algumas janelas de periodicidade em meio ao comportamento caótico.

Uma forma de caracterizar a presença ou ausência de caos é utilizando os expoentes de Lyapunov para qualquer mapa discreto unidimensional que pode possuir comportamento caótico.

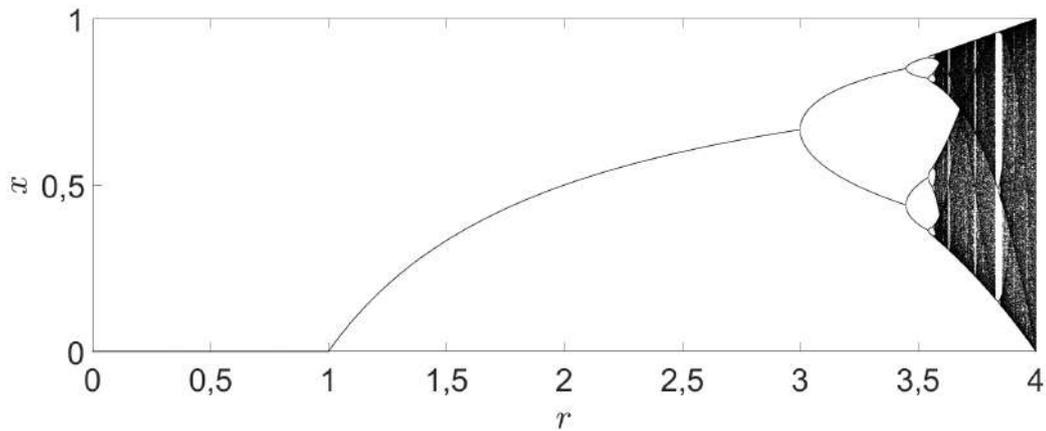


Figura 2.2: Diagrama de órbitas para o mapa logístico para $r \in [0, 4]$.

2.2 Expoentes de Lyapunov para o mapa logístico

A divergência exponencial média permite, dentre outras avaliações, classificar uma órbita como caótica ou não. O procedimento genérico tem utilidade para qualquer mapeamento discreto unidimensional e, de acordo com o sinal do expoente, é possível caracterizar a natureza da dinâmica. Se o sistema dinâmico apresenta comportamento caótico, o expoente de Lyapunov para tal é positivo, bem como se o sistema possui comportamento periódico, o expoente é negativo. Aqui discutiremos mais a respeito, fazendo uma abordagem genérica e posteriormente direcionada para o mapa em questão.

O procedimento para calcular os expoentes de Lyapunov consiste em iterar duas condições iniciais próximas e acompanhar a evolução das duas no espaço de fases. Se a distância de ambas reduzir com o passar do tempo, as órbitas são ditas regulares. Entretanto caso a distância entre as órbitas aumente exponencialmente, o conhecimento de uma delas não permite dizer nada sobre a outra, portanto, apresenta-se um comportamento caótico.

Para ilustrar o procedimento, consideremos um mapeamento unidimensional genérico.

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (2.15)$$

sendo $f(x_n)$ uma função discreta não linear. Vamos considerar duas condições iniciais muito próximas para analisarmos a evolução de órbita e poderemos introduzir o conceito dos expoentes de Lyapunov em mapeamentos unidimensionais. Sendo assim, chamaremos as condições de x_0 e $x_0 + c$ e considerando a situação-limite $c \rightarrow 0$, tem-se:

$$d = |f^{(n)}(x_0 + c) - f^{(n)}(x_0)|. \quad (2.16)$$

É possível definir a distância relativa como d/c e admitir que esta tenha um comportamento exponencial em n tal que $\frac{d}{c} = e^{\lambda n}$, sendo λ o expoente de Lyapunov. Assim,

temos:

$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{|f^{(n)}(x_0 + c) - f^{(n)}(x_0)|}{c} = e^{\lambda n}, \quad (2.17)$$

que conduz, por definição de derivada, a

$$|f'^{(n)}(x_0)| = e^{\lambda n}, \quad (2.18)$$

$$\lambda n = \ln|f'^{(n)}(x_0)|, \quad (2.19)$$

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln|f'(x_i)|. \quad (2.20)$$

A função f que define o mapa em geral depende de ao menos um parâmetro de controle. Assim, o expoente de Lyapunov λ também dependerá (ARAUJO et al., 2013), ou seja, $\lambda = \lambda(r)$.

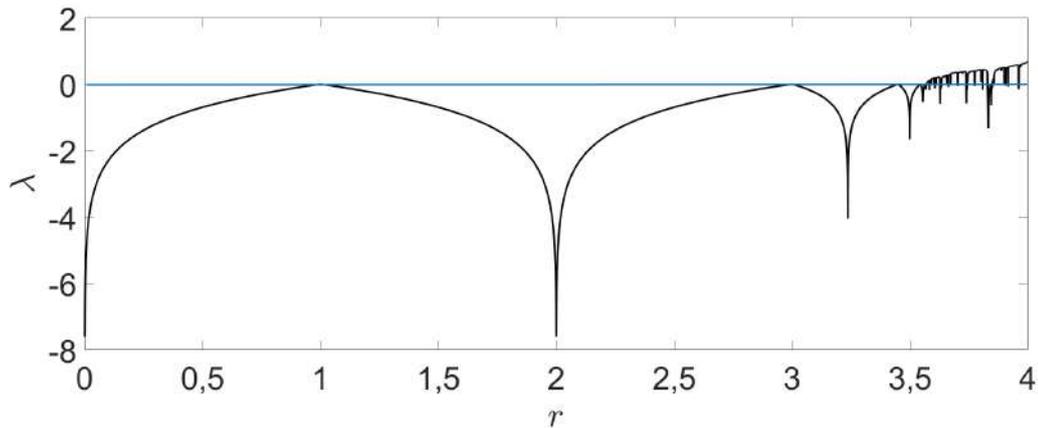


Figura 2.3: Diagrama de órbitas para o mapa logístico para $r \in [0, 4]$.

Considerando agora a derivada do mapa da Eq. (2.1) na Eq. (2.20), temos a representação dos expoentes de Lyapunov para $r \in [0, 4]$ para o mapa Logístico. Desta equação, tem-se que para $\lambda > 0$ o comportamento é caótico e para $\lambda \leq 0$ o comportamento é periódico ou quase-periódico. Quando $\lambda = 0$ o diagrama de órbitas demonstra uma nova bifurcação. A figura 2.3 ilustra os expoentes de Lyapunov para o mapa Logístico.

Capítulo 3

Propriedades dinâmicas do mapa Ricker

Neste Capítulo apresentamos algumas propriedades dinâmicas do mapa Ricker. Construímos o diagrama de órbitas, calculamos dos expoentes de Lyapunov, e analisamos duas de suas bifurcações. Vale ressaltar que como não há ligação matemática entre o presente capítulo e o anterior, os valores descrito como ponto fixo x_n^* , expoentes de Lyapunov λ e dentre outras relações, são nominadas para o mapa presente. Assim, é preciso desconsiderar os nomes das variáveis anteriormente descritos.

3.1 O Modelo Ricker

Ricker propôs um modelo de dinâmica populacional, especialmente para aplicação em peixes, que possui comportamento interessante para análise. Trata-se de um modelo unidimensional de x_{n+1} dependendo de x_n , tratando, portanto, de um sistema essencialmente determinístico. O modelo é descrito por:

$$f(x) = x_{n+1} = x_n e^{r(1-x_n)}, \quad (3.1)$$

em que a função $f(x) = x_{n+1}$ é a próxima iterada que utiliza a variável dinâmica x_n e o parâmetro de controle r . O mapa Ricker possui natureza determinística e integralmente dependente da condição inicial e do parâmetro de controle, características semelhantes do mapa logístico (MAY, 1974). Assim, dada uma condição inicial x_0 , o mapa da Equação (3.1) evolui através de um processo iterativo do tipo:

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, \quad (3.2)$$

Essas trajetórias podem ser caóticas ou não, considerando a condição inicial x_0 e

dependendo do parâmetro de controle. É possível considerar diferentes valores de parâmetro de controle em estado estacionário e analisar seus possíveis resultados. Utilizando a Equação (3.1), podemos considerar primeiramente para $r = 1$, $r = 2, 2$, $r = 2, 75$ e $r = 3, 13$. Esses valores de parâmetro de controle simbolizam diferentes condições: taxa de alimentação, reprodução, predadores, condições climáticas, todas compiladas em um único parâmetro para melhor parametrização e estudo do modelo teórico. A figura 3.1 demonstra, para quatro parâmetros de controle diferentes, a evolução das órbitas.

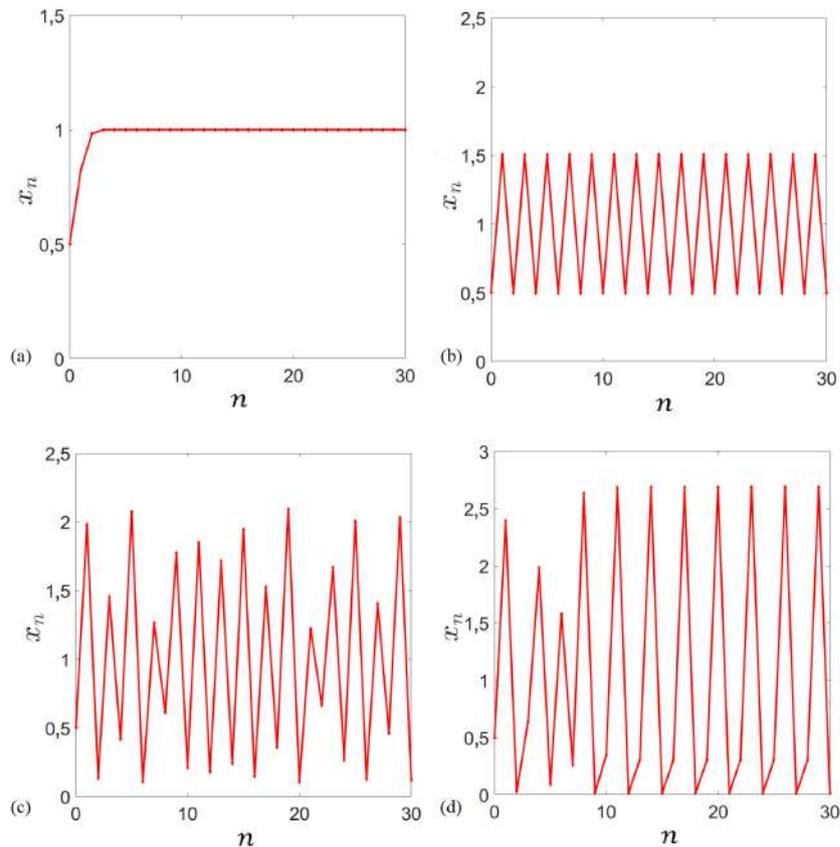


Figura 3.1: Primeiras 30 iterações para o mapa ricker considerando (a) $r = 1$, (b) $r = 2, 2$, (c) $r = 2, 75$, (d) $r = 3, 13$.

Apenas de âmbito ilustrativo, a figura 3.1 apresenta alguns tipos de comportamentos em função dos parâmetros. Não há como garantir comportamento caótico ou periódico com uma quantidade baixa de iterações, mas os valores foram escolhidos especificamente em condições que a natureza do comportamento apresentado se repete por um período $n \gg 10^8$. Assim, na figura 3.1(a), para $r = 1$, tem-se uma aproximação direta ao ponto fixo, no caso, $x^* = 1$. Com $r = 2, 2$, ilustrado na figura 3.1(b) os valores alternam com periodicidade 2, oscilando entre apenas dois valores. Na figura 3.1(c), com $r = 2, 75$ não há periodicidade, e, conforme já apresentado brevemente na seção 1.2, é determinístico,

aperiódico e sensível às condições iniciais, apresentando portanto um comportamento caótico. E finalmente com $r = 3,13$ na figura 3.1(d), temos novamente uma janela de estabilidade, porém agora com período 3.

O cálculo do ponto fixo parte da definição deste, sendo $x_{n+1} = x_n = x^*$. Assim, para o modelo em questão da Equação 3.1, tem-se que:

$$x^* = x^* e^{r(1-x^*)}, \quad (3.3)$$

$$e^{r(1-x^*)} = 1, \quad (3.4)$$

$$r(1-x^*) = 0, \quad (3.5)$$

o que conduz, considerando $(1-x^*) = 0$ a:

$$x^* = 1. \quad (3.6)$$

Isso implica que para $r \in]0, 2]$, intervalo onde há a periodicidade $p = 1$, o espaço de fases converge para o estado estacionário composto pelo ponto fixo $x^* = 1$.

A abordagem mais completa de boa parte das características construtivas presente no mapa Ricker é baseada no estudo do diagrama de órbitas. Para isso, itera-se dinamicamente o mapa da Equação (3.1), considerando $r \in [0, 4]$ e a condição inicial empírica $x_0 = 0,5$ com resolução de $r = 0.0004$ e, para cada valor de r , são realizadas 10^2 iteradas. Para isso, é necessário descartar o transiente, ignorando as primeiras 10^5 iteradas. Com essas informações, tem-se o diagrama de órbitas (DO) do mapa Ricker na figura 3.2 usando a condição inicial $x_0 = 0,5$.

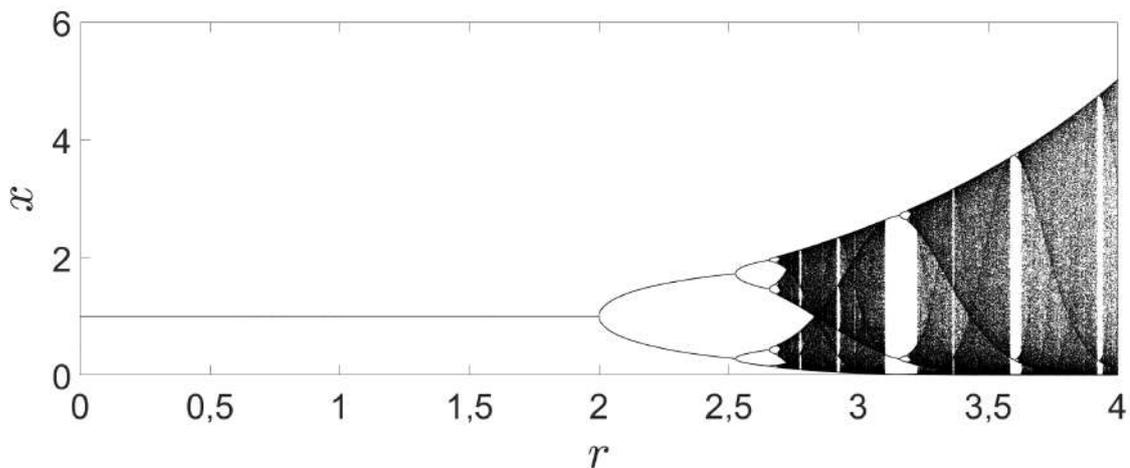


Figura 3.2: Diagrama de órbita para o mapa Ricker com $x_0 = 0,5$.

É possível identificar alguns pontos importantes na figura 3.2 para o presente estudo,

bem como a dinâmica comportamental do mapa em questão. O mapa possui uma bifurcação transcítica em $r = 0$ que será definida e estudada no Capítulo 3.3, em que o parâmetro de controle é aplicado entre a transição de valores negativos para positivos. Apesar de não possuir sentido físico para valores de $r < 0$, o estudo é necessário para caracterização da natureza da bifurcação.

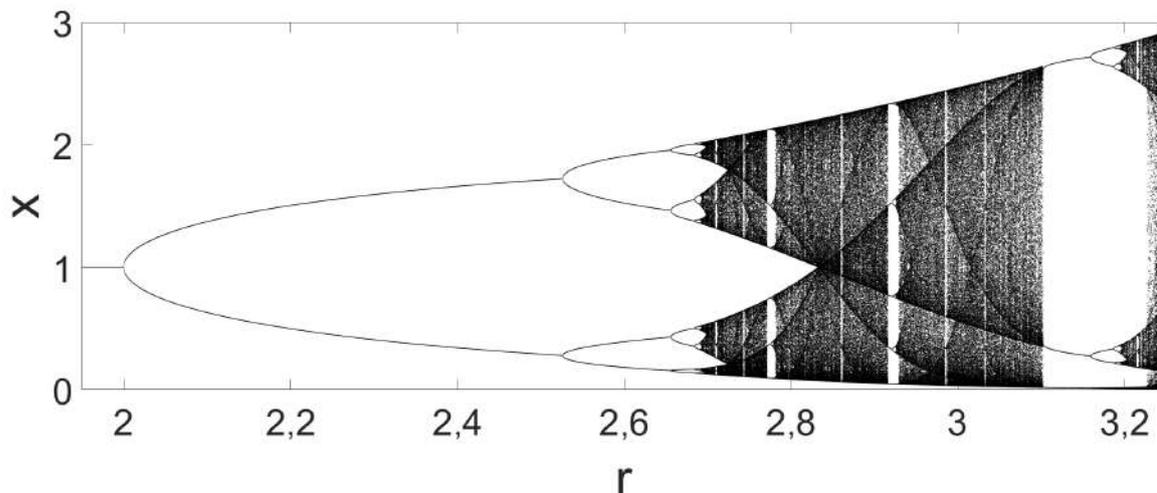


Figura 3.3: Diagrama de órbita com aproximação na imagem, considerando $r \in [1, 95; 3, 25]$ e $x_0 = 0, 5$.

Podemos observar na figura 3.3 que ela possui também um comportamento linear após período transitório em $r \in [0, 2]$, em que a evolução da condição inicial converge para o atrator de ponto fixo $x^* = 1$ e, logo em $r = 2$, uma bifurcação. Nesta, especificamente, o trabalho trata alguns estudos ainda inéditos na literatura. Com valores de $r > 2$, o mapa evolui com divisões de duplicação de período sucessivas, respeitando o critério de proporcionalidade universal para mapeamentos unidimensionais. Além disso, é possível por fim identificar as janelas de estabilidade, que ocorrem em diversos períodos durante o caos, bem como as áreas "escuras" de maior densidade.

A figura 3.3 demonstra com mais precisão a bifurcação bem como a rota para o caos. Além disso fica muito evidente as linhas de tendência que posteriormente serão sobrepostas com a apresentação das funções *supertracks*.

3.2 Expoentes de Lyapunov para o mapa Ricker

A equação encontrada anteriormente em Equação (2.20), descreve os expoentes de Lyapunov de um mapa genérico. Para a determinação dos expoentes de Lyapunov para o mapa Ricker, faz-se necessário, portanto, substituir a derivada de uma função genérica

$f'(x_i)$ pela derivada do mapa Ricker. Considerando então a Equação 3.1, temos que o cálculo dos expoentes de Lyapunov é dado por:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |e^{r(1-x_i)} - rx_i e^{r(1-x_i)}|. \quad (3.7)$$

Assim, considerando um intervalo definido por $r \in [0, 4]$, temos os expoentes de Lyapunov para o mapa Ricker.

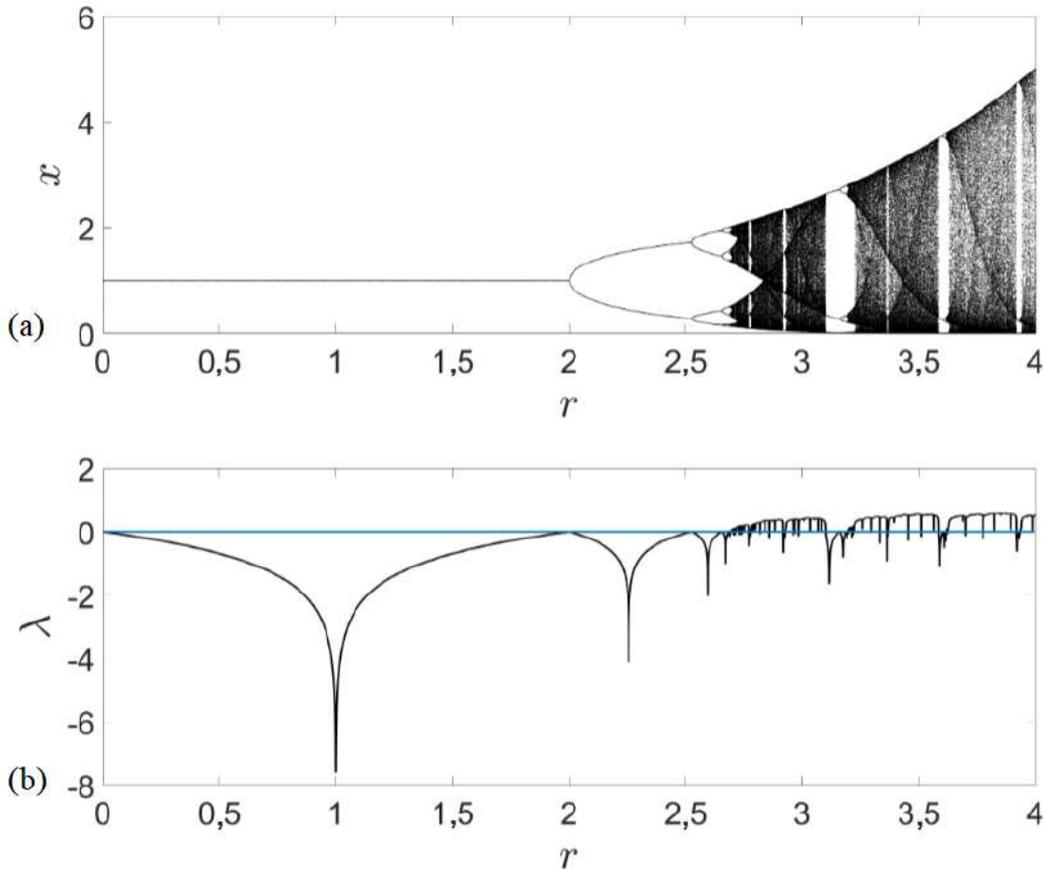


Figura 3.4: (a) Diagrama de órbita para o mapa Ricker considerando $r \in [0, 4]$. (b) Expoentes de Lyapunov para o mapa Ricker considerando também $r \in [0, 4]$. A linha em $\lambda = 0$ representa o ponto de mudança de estabilidade.

Desta equação, tem-se que para $\lambda > 0$ o comportamento é caótico e para $\lambda \leq 0$ o comportamento é periódico ou quase-periódico. Quando $\lambda = 0$ o diagrama de órbitas demonstra uma nova bifurcação. A figura 3.4 demonstra a comparação da aplicação do diagrama de órbitas e dos expoentes de Lyapunov, em escala convenientemente ajustada para comparação com o diagrama de órbitas. Podemos identificar algumas bifurcações importantes que estão dispostas em análises a seguir, como as presentes em $r = 0$ e em

$r = 2$, agora novamente demonstrada pelo diagrama de órbita como bifurcações. Além disso, ficam evidentes algumas janelas de estabilidade.

Novamente, para uma caracterização visual mais precisa, tem-se a representação do diagrama de órbitas juntamente com os expoentes de Lyapunov numa condição de maior visibilidade. Nesse caso, considera-se a rota para o caos após a bifurcação em $r = 2$, conforme podemos ver na figura 3.5(a), o diagrama de órbitas para $r \in [2,65; 2,95]$ e condição inicial $x_0 = 0,5$ e na figura 3.5(b), os expoentes de Lyapunov para o mesmo intervalo citado.

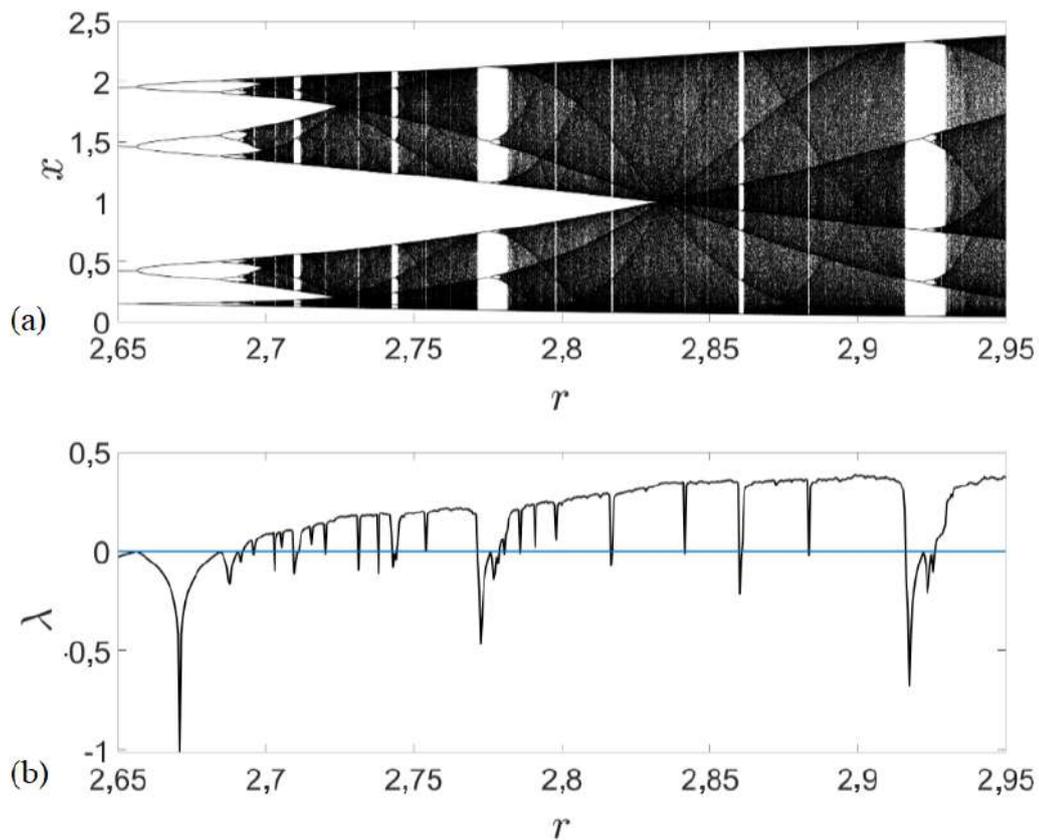


Figura 3.5: (a) Diagrama de órbita para o mapa Ricker considerando $r \in [2,65; 2,95]$. (b) Expoentes de Lyapunov para o mapa Ricker considerando também $r \in [2,65; 2,95]$. A linha em $\lambda = 0$ representa o ponto de mudança de estabilidade.

3.3 Relaxação de órbitas para o ponto fixo em $r = 0$

Nesta seção, realizamos um estudo sobre a relaxação de órbitas para o ponto fixo em $r = 0$, onde podemos descrever uma descontinuidade no diagrama de órbitas. O parâmetro

de controle negativo simboliza uma incoerência física, uma vez que representa condições reais de vida de uma dinâmica populacional, contudo vale ressaltar que o estudo teórico é necessário para definição da natureza da bifurcação. Esta, em questão, é ilustrada na figura 3.6.

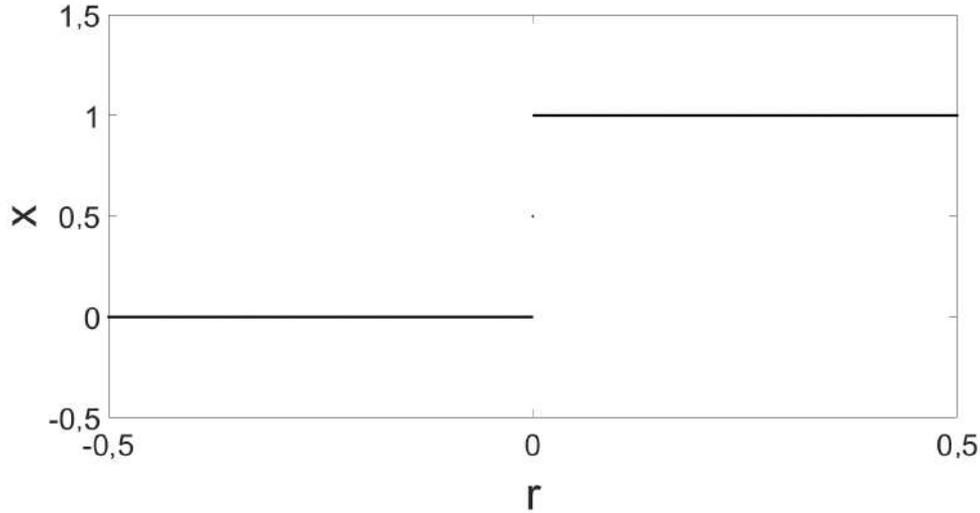


Figura 3.6: Bifurcação em $r = 0$, considerando $x_0 = 0,5$.

Como ilustrado na figura 3.6, para valores $r < 0$ temos o ponto fixo $x_* = 0$. Em $r = 0$ o expoente da exponencial do mapa da Equação (3.1) é zero, resultando apenas o valor de x_0 , que neste caso foi simulado como $x_0 = 0,5$. Para valores $r > 0$, temos o já conhecido ponto fixo x^* . A análise da natureza da bifurcação é baseada nesse caso, pelo tempo de relaxação, devido à descontinuidade.

De acordo com o que foi feito para o mapa logístico em Leonel (2019) podemos considerar a relaxação de órbitas para $r > 0$ sendo $r \approx 0$. Considerando $r_1 = 0,01$ e $r_2 = 0,001$, temos o comportamento saturado após um determinado período de iterações, ou seja, a convergência é estacionada em função da resolução da simulação. Isso demonstra que a órbita atingiu o ponto fixo e não houve decaimento em lei de potência. A função que ajusta este decaimento é uma exponencial e a velocidade de convergência depende do parâmetro $\mu = |r - r_c|$, sendo r_c o parâmetro que define a bifurcação. Uma descrição empírica para o comportamento de $x(n)$ neste caso é dado por:

$$x(n) - x^* = (x_0 - x^*)e^{-\frac{n}{\tau}}, \quad (3.8)$$

em que $x_0 - x^*$ representa a distância inicial do ponto fixo e τ ao tempo de relaxação, e é dado por $\tau \propto \mu^\delta$, em que δ é o expoente de relaxação. No caso, como considerado para todo o trabalho uma condição inicial menor do que o ponto fixo, tem-se a análise, portanto, do módulo da distância inicial ao ponto fixo.

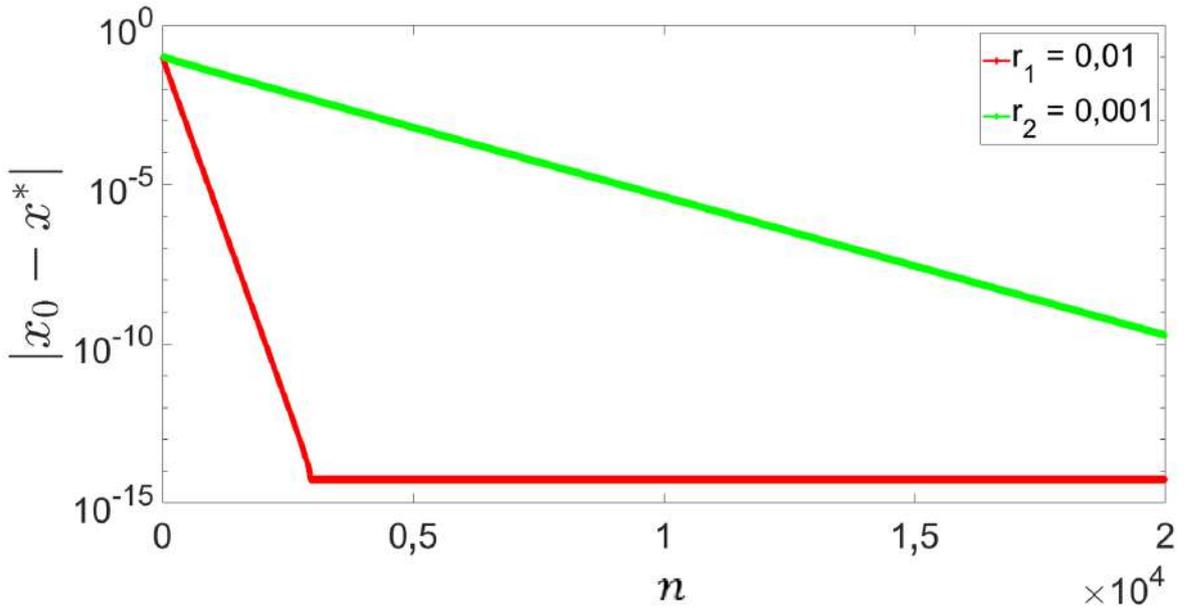


Figura 3.7: Esboço de $|x_0 - x^*|$ vs n considerando $r_1 = 0,01$ e $r_2 = 0,001$.

A figura 3.7 mostra a saturação via resolução para r_1 e mesmo com a maior proximidade do ponto fixo - em r_2 , com uma grande quantidade de iterações, o comportamento apesar de diferente, não decai em lei de escala. Assim, é necessário uma outra abordagem, no caso, a obtenção de um expoente baseado no tempo de relaxação.

O tempo de relaxação é dado com uma condição inicial iterada a partir do mapa, até que a distância ao ponto fixo seja menor que uma determinada tolerância preestabelecida. Assim que a distância for atingida, a dinâmica é interrompida, o número de iterações até que a condição de convergência seja atingida é registrada e uma nova simulação é iniciada com um parâmetro μ diferente, repetindo todo o processo. A figura a 3.8 mostra o comportamento de τ vs. μ , considerando $tol = 10^{-10}$, proporcionando o ajuste em lei de potência de $\delta = -1,00121(3)$.

A relaxação ilustrada na figura 3.8 mostra que o decaimento em lei de potência fornecendo o expoente $\delta = -1,00121(3) \approx -1$ conforme descrito para uma bifurcação transcritical (LEONEL, 2019). A referência em questão propõe uma tabela (3.1) para os valores dos expoentes críticos de acordo com a bifurcação. O expoente encontrados portanto validam a natureza das bifurcações.

A tabela em questão é referenciada em outros momentos do trabalho, com foco principalmente na bifurcação de duplicação de período.

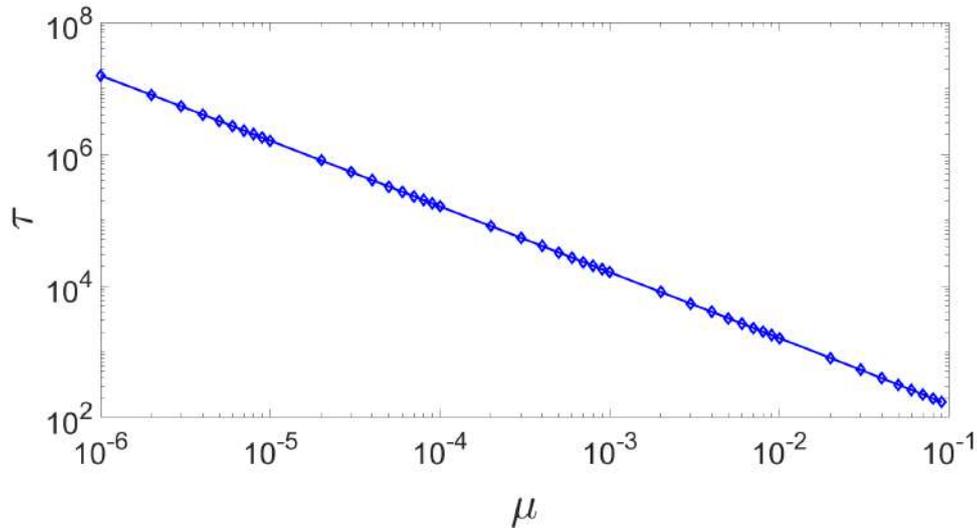


Figura 3.8: Esboço do comportamento de τ vs μ confirmando a existência de uma lei de potência com o expoente $\delta = -1,00121(3) \approx -1$.

Bifurcação	α	β	z	δ
Duplicação de período	1	-0,5	-2	-1
Transcrítica	1	-1	-1	-1
Tangente	1	-1	-1	-0,5
Sela-nó	1	-1	-1	-0,5

Tabela 3.1: Tabela para valores dos expoentes críticos α , β , z e δ para diferentes tipos de bifurcações (LEONEL, 2019).

3.4 Convergência de órbita para o ponto fixo em $r = 2$

Nesta seção são investigados os expoentes críticos obtidos a partir de um estudo sistemático de leis de escala, realizado para o mapa logistic-like, utilizando uma descrição robusta no estudo de uma função homogênea generalizada. Os expoentes α , β e z encontrados poderão ser utilizados para determinar a universalidade das bifurcações.

A primeira bifurcação de duplicação de período é observada em $r = 2$, quando o ponto fixo x^* torna-se instável e uma órbita de período 2 nasce assintoticamente estável, convergindo em alternância para dois novos pontos fixos regidos por funções independentes.

Para compreender o decaimento de órbita para ponto fixo no estado estacionário, a investigação é baseada no comportamento de x_n na evolução temporal da distância do ponto fixo na órbita com diferentes condições iniciais.

Como $x^* \neq 0$ sendo $x^* = 1$, faz-se necessário a parametrização da condição inicial subtraindo em todas as simulações o valor do ponto fixo, uma vez que a convergência de órbita para ponto fixo leva em consideração apenas a distância modular da órbita para o

ponto fixo. Assim, consideraremos $\epsilon = x_0 - x^*$. Desta maneira, a convergência de órbitas para ponto de equilíbrio é mostrada na figura 3.9.

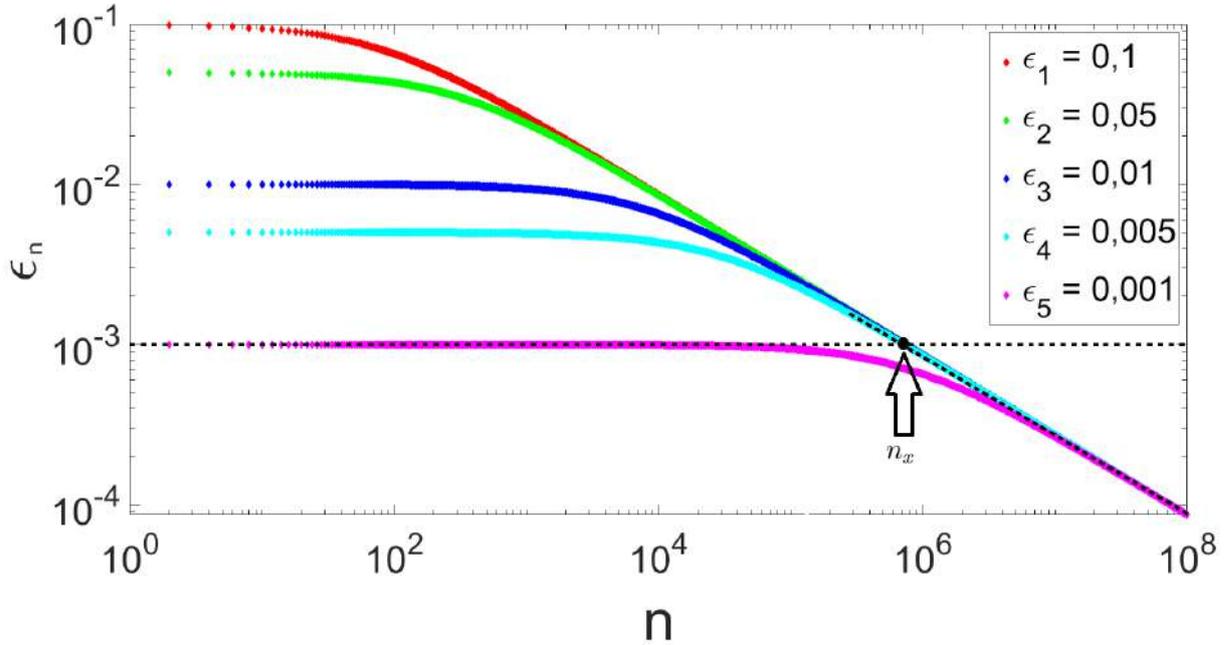


Figura 3.9: Decaimento de órbita para ponto fixo em $x^* = 1$ e $r = 2$.

Dependendo da condição inicial x_0 , a órbita mantém-se em um comportamento constante até o número de iteração de cruzamento n_x - cruzamento entre a linha de tendência que representa o estado em que órbitas são constantes e a linha de decaimento exponencial. Após o cruzamento as órbitas decaem em lei de potência descrita pelo expoente β , fornecendo $\beta = -0,4997(2)$, considerando valores diferentes de ϵ . Analisando a figura 3.9 e considerando $(x_n - x^*) = \epsilon_n$ e $(x_0 - x^*) = \epsilon_0$, podemos propor as seguintes hipóteses de escala:

1. Para $n \ll n_x$, o comportamento de ϵ vs. n é dado por $\epsilon_n \propto \epsilon_0^\alpha$, no qual α é um expoente crítico. Tem-se, nesse caso, $\alpha = 1$, uma vez que um regime constante está estacionado sobre ϵ_0 por um longo intervalo de n .
2. Para $n \gg n_x$, o comportamento de x vs. n é dado por $\epsilon_n \propto n^\beta$, no qual β é um expoente crítico que fornece o decaimento de ϵ para o ponto fixo
3. Finalmente, para n_x , tem-se que $n_x \propto \epsilon_0^z$, em que z é um expoente crítico de n_x e fornece o número de interações do crossover.

A figura 3.10 mostra n_x como função de ϵ_0 em que obtivemos o valor do expoente crítico z dado por um ajuste em lei de potência, sendo $z = -1,99(3)$.

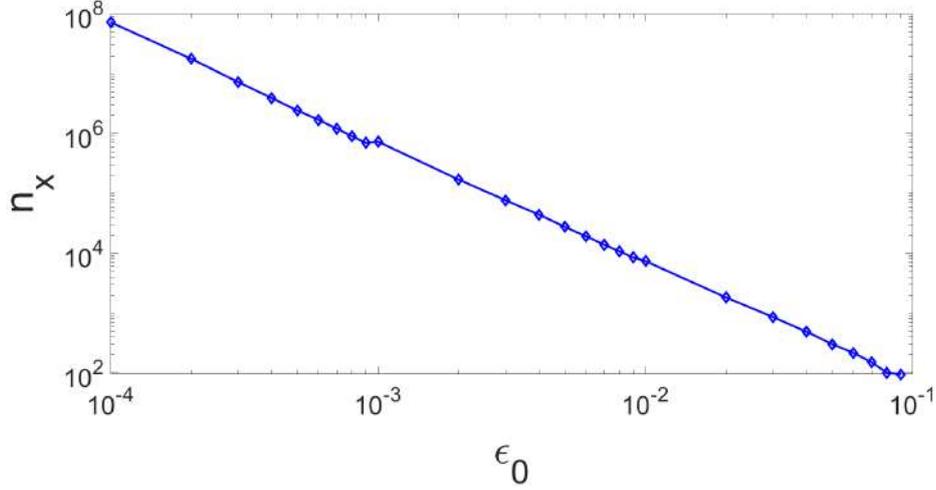


Figura 3.10: Número de iterações de cruzamento n_x como função das condições ϵ_0 , usando $r = 2$.

Com o comportamento observado na figura 3.10 e as hipóteses de escala podemos descrever o comportamento de ϵ_n como uma função homogênea generalizada nas variáveis n e ϵ_0 , definida como:

$$x(\epsilon_0, n) = lx(l^a \epsilon_0, l^b n), \quad (3.9)$$

sendo l é um fator de escala, a e b são expoentes característicos. Como l é um fator de escala, é possível assumir algum valor empírico conveniente para cálculo. Assim, temos $l^a \epsilon_0 = 1$, levando a $l = \epsilon_0^{-\frac{1}{a}}$. Substituindo na equação anterior, temos:

$$x(\epsilon_0, n) = \epsilon_0^{-\frac{1}{a}} x(1, \epsilon_0^{-\frac{b}{a}} n). \quad (3.10)$$

Assumindo $x(1, \epsilon_0^{-\frac{b}{a}} n)$ constante para $n \ll n_x$ e comparando com a primeira hipótese de escala, é possível constatar que $\alpha = -\frac{1}{a}$. Posteriormente, assumindo l constante e, analogamente ao processo anterior, $l^b n = 1$, portanto $l = n^{-\frac{1}{b}}$. Assim, temos:

$$x(\epsilon_0, n) = n^{-\frac{1}{b}} x(n^{-\frac{a}{b}} \epsilon_0, 1), \quad (3.11)$$

em que assumiremos que $x(n^{-\frac{a}{b}} \epsilon_0, 1)$ é constante para $n \gg n_x$ e comparando com a segunda hipótese de escala, concluímos que $\beta = -\frac{1}{b}$.

Assim é possível correlacionar os resultados obtidos com as expressões para o fator de escala. Isso conduz a:

$$n_x^{-\frac{1}{\beta}} = \epsilon_0^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad (3.12)$$

$$n_x = \epsilon_0^{\frac{\alpha}{\beta}}. \quad (3.13)$$

Comparando a terceira hipótese de escala com o resultado obtido, temos que a lei de escala é dada por

$$z = \frac{\alpha}{\beta}. \quad (3.14)$$

Isso implica que todos os expoentes estão interligados e, sabendo dois deles é possível determinar o terceiro. É possível ainda analisar os expoentes em uma proporção reescalada de forma conveniente, conforme figura 3.11, tal que $\epsilon_n \rightarrow \frac{\epsilon_n}{\epsilon_0^\alpha}$ e $n \rightarrow \frac{n}{\epsilon_0^z}$ colapsando todas as curvas de ϵ_n vs. n em apenas uma curva. O colapso sobreposto valida os expoentes α e z anteriormente descritos.

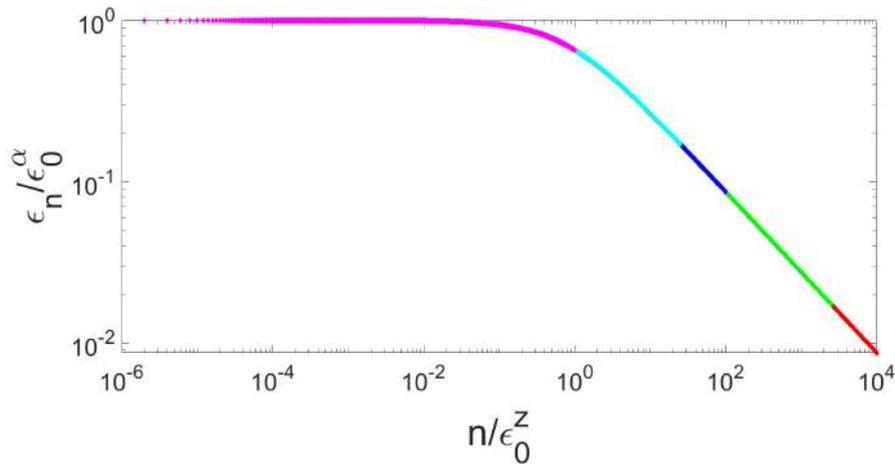


Figura 3.11: Colapso de todas as curvas em um único *plot* universal com reescala conveniente, em $x^* = 1$ e $r = 2$.

3.5 Aproximação analítica da convergência de órbita para o ponto fixo x^*

Nesta seção são representadas diferentes aproximações analíticas para alcançar o equilíbrio. Primeiramente, considera-se o ponto de bifurcação de duplicação de período em $r = 2$. Assim, o mapeamento é descrito como:

$$f(x) = x_{n+1} = x_n e^{2(1-x_n)}, \quad (3.15)$$

$$x_{n+2} = x_{n+1} e^{2(1-x_{n+1})}, \quad (3.16)$$

A análise da bifurcação de duplicação de período implica em compreender a segunda iterada no ponto da bifurcação. Dessa forma, é realizada uma expansão em série de Taylor de x_{n+2} em torno de x^* .

$$f(f(x)) = x^* + \frac{f'(f(x^*))(x - x^*)}{1!} + \frac{f''(f(x^*))(x - x^*)^2}{2!} + \frac{f'''(f(x^*))(x - x^*)^3}{3!} + O(4),$$

$$f(f(x)) = x^* + u_1(x_n - x^*) + u_2(x_n - x^*)^2 + u_3(x_n - x^*)^3, \quad (3.17)$$

em que u_1 , u_2 e u_3 são a primeira, segunda e terceira derivada do mapa divididas pelo seus respectivos fatores aplicadas no ponto fixo x^* , fornecendo então $u_1 = 1$, $u_2 = 0$ e $u_3 = -4/3$. Nesse caso manteremos os termos de baixa ordem, uma vez que ϵ' é muito próximo de zero. Então, como $u_2 = 0$, temos:

$$x_{n+2} = x^* + (x_n - x^*) + u_3(x_n - x^*)^3. \quad (3.18)$$

Como sabemos que x^* é positivo, u_3 é negativo e supondo novamente que a variável dinâmica x pode ser considerada como uma variável contínua, podemos reescrever a Equação (3.18), considerando que $(n + 2) \rightarrow (m + 1)$ e $n \rightarrow m$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} x_{m+1} &= x^* + x_m - x^* + u_3(x_m - x^*)^3 \\ x_{m+1} - x_m &= u_3(x_m - x^*)^3 \\ &\approx \frac{dx}{dm} = -u_3\epsilon', \end{aligned} \quad (3.19)$$

sendo $\epsilon' = (x - x^*)$. Fazendo separação de variáveis, obtemos a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dx}{\epsilon'^3} = -u_3 dm. \quad (3.20)$$

Para resolução, deve-se aplicar a integral nos dois membros da igualdade. Os limites de integração são tais que a condição inicial x_0 é definida para $m = 0$ e para um valor m arbitrário, temos o limite superior x_m . Dessa forma:

$$\int_{x_0}^{x_m} \frac{dx'}{\epsilon'^3} = -u_3 \int_0^m dm',$$

$$-\frac{1}{2\epsilon'^2} \Big|_{x_0}^{x_m} = -u_3 m' \Big|_0^m,$$

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\epsilon_m'^2} + \frac{1}{\epsilon_0'^2} \right) = -u_3 m, \quad (3.21)$$

Considerando $\epsilon'_m = (x_m - x^*)$ e $\epsilon'_0 = (x_0 - x^*)$ temos:

$$\frac{1}{\epsilon_0'^2} - \frac{1}{\epsilon_m'^2} = 2u_3 m. \quad (3.22)$$

Finalmente, retornando a suposição $m \rightarrow n$, chegamos à aproximação analítica para a convergência de órbita para o ponto fixo da primeira duplicação de período escrita como:

$$\epsilon'_n = \frac{\epsilon'_0}{\sqrt{1 + 2u_3 n \epsilon_0'^2}}. \quad (3.23)$$

de modo que podemos observar que:

1. Para $n \ll n_x$, temos $2u_3 n \epsilon_0'^2 \ll 1$, o que implica em $\epsilon'_n = \epsilon'_0$, permitindo concluir que o expoente crítico $\alpha = 1$.
2. Para $n \gg n_x$ temos $2u_3 n \epsilon_0'^2 \gg 1$, assim $\epsilon'_n = (2u_3)^{-\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{2}}$, que comparando à segunda hipótese de escala, obtemos o expoente crítico $\beta = -1/2$.
3. Finalmente, para $n = n_x$, tem-se que $2u_3 n \epsilon_0'^2 = 1$, assim temos $n_x = (2u_3)^{-1} \epsilon_0'^{-2}$, que comparando com a terceira hipótese de escala, podemos concluir que $z = 2$.

Com os resultados aqui apresentados, valida-se então as hipóteses de escalas apresentadas na Seção 3.4

Com esses procedimentos, neste Capítulo apresentamos analítica e numericamente os expoentes críticos α , β e z . Eles podem ser comparados com outros mapas já conhecidos na literatura como o mapa logistic-like (LEONEL, 2019; TEIXEIRA et al., 2015).

Capítulo 4

Análise das órbitas *supertracks* no mapa Ricker

Além do estudo numérico tradicional já conhecido para analisar mapas unidimensionais, usado para inspeção dos atratores, uma ferramenta alternativa é o estudo baseado em funções *supertracks*. O estudo pode ser direcionado em qualquer mapeamento unidimensional, já que é uma técnica geral. Constrói-se um conjunto finito de $s_n(r)$ de funções polinomiais recursivas a partir do mapa Ricker, de forma que são obtidas pela iteração recursiva da função $f(x_n)$ do mapa, avaliada no seu ponto máximo, ou seja, no ponto cuja derivada é nula.

4.1 Definições e formalismo das órbitas *supertracks*

Conforme apresentado por Oblow (OBLOW, 1988), o formalismo da análise das órbitas *supertracks* provém do estudo da derivada do mapa. A análise pode ser aplicada para outros mapas unidimensionais discretos, mas estudaremos aqui especificamente o mapa Ricker. A análise é baseada no fato que se, durante o processo iterativo do mapa, a condição

$$\frac{df(x_n)}{dx_n} = 0, \quad (4.1)$$

é alcançada, a órbita é dita superestável. Quando isso ocorre, a órbita para este valor do parâmetro fixo r perde dependência da órbita existente, portanto perdeu também sua dependência da condição inicial x_0 pois a equação Equação (4.1) torna-se nula a partir de então, não importando quantas iteradas sejam calculadas. Esta condição pode ocorrer em alguns pontos críticos do mapa. Para o mapa estudado, a condição é:

$$\frac{df(x_n)}{dx_n} = \frac{d(x_n e^{r(1-x_n)})}{dx_n} = 0, \quad (4.2)$$

$$\frac{df(x_n)}{dx_n} = e^{r(1-x_n)} + x_n r(1-x_n)e^{r(1-x_n)} = 0. \quad (4.3)$$

Assim, como a derivada é nula, quando a órbita passa por $x = 1/r$ toda a informação dos pontos da órbita anterior é perdida bem como a correlação com as condições iniciais, devido ao término do período transitório. Isso é um ponto de partida para entender o comportamento caótico de forma convencional, segundo Oblow (OBLOW, 1988).

O ponto em que a derivada anula-se, ou também definido como ponto máximo do sistema, possui, portanto, grande importância. Durante a iteração, uma órbita que passa pelo ponto crítico define o início de uma órbita *supertrack*, que por sua vez, sua evolução demonstra diferenças qualitativas entre os comportamentos do sistema.

Vale lembrar que as órbitas *supertracks* não possuem dependência funcional da condição inicial e dependem unicamente do parâmetro de controle do sistema, fazendo com que cada iterada torna-se uma função contínua de r , diferente do modelo discretizado de um mapa caótico convencional.

A solução da equação Equação (4.3) acima é então utilizada como condição inicial e, a partir dessa, um conjunto de funções $s_n(r)$ é gerado. A condição inicial $s_0(r)$ será utilizada para iterar sucessivamente as funções seguintes. Tem-se, portanto:

$$s_0(r) = \frac{1}{r}. \quad (4.4)$$

Com a condição inicial $s_0(r)$ é possível encontrar as outras funções seguintes $s_1(r)$, $s_2(r)$, $s_3(r)$, ..., $s_n(r)$, com um processo iterativo, criando as funções chamadas órbitas *supertracks*. Elas são chamadas também de funções polinomiais ou Q-curves (OBLOW, 1988). As funções *supertracks* genéricas dos mapas são obtidas iterativamente por:

$$s_{n+1}(r) = f(s_n(r)), \quad (4.5)$$

Assim, para o mapa Ricker da Eq. (3.1), tem-se a função genérica aplicada:

$$s_{n+1} = s_n e^{r(1-s_n)}, \quad (4.6)$$

Considerando a equação anterior e considerando $s_0 = \frac{1}{r}$, tem-se as primeiras equações *supertracks* do mapa ricker:

$$s_1 = s_0 e^{r(1-s_0)} = \frac{1}{r} e^{r(1-\frac{1}{r})} = \frac{e^{r-1}}{r}, \quad (4.7)$$

$$s_2 = s_1 e^{r(1-s_1)} = \frac{e^{r-1}}{r} e^{r-e^{r-1}}, \quad (4.8)$$

$$s_3 = s_2 e^{r(1-s_2)} = \frac{e^{3r-e^{r-1}-e^{2r-e^{r-1}-1-1}}}{r}, \quad (4.9)$$

e assim sucessivamente, em que o grau da função em r cresce de acordo com n . São funções contínuas em r , com derivadas contínuas, que modelam assintoticamente o diagrama de órbitas.

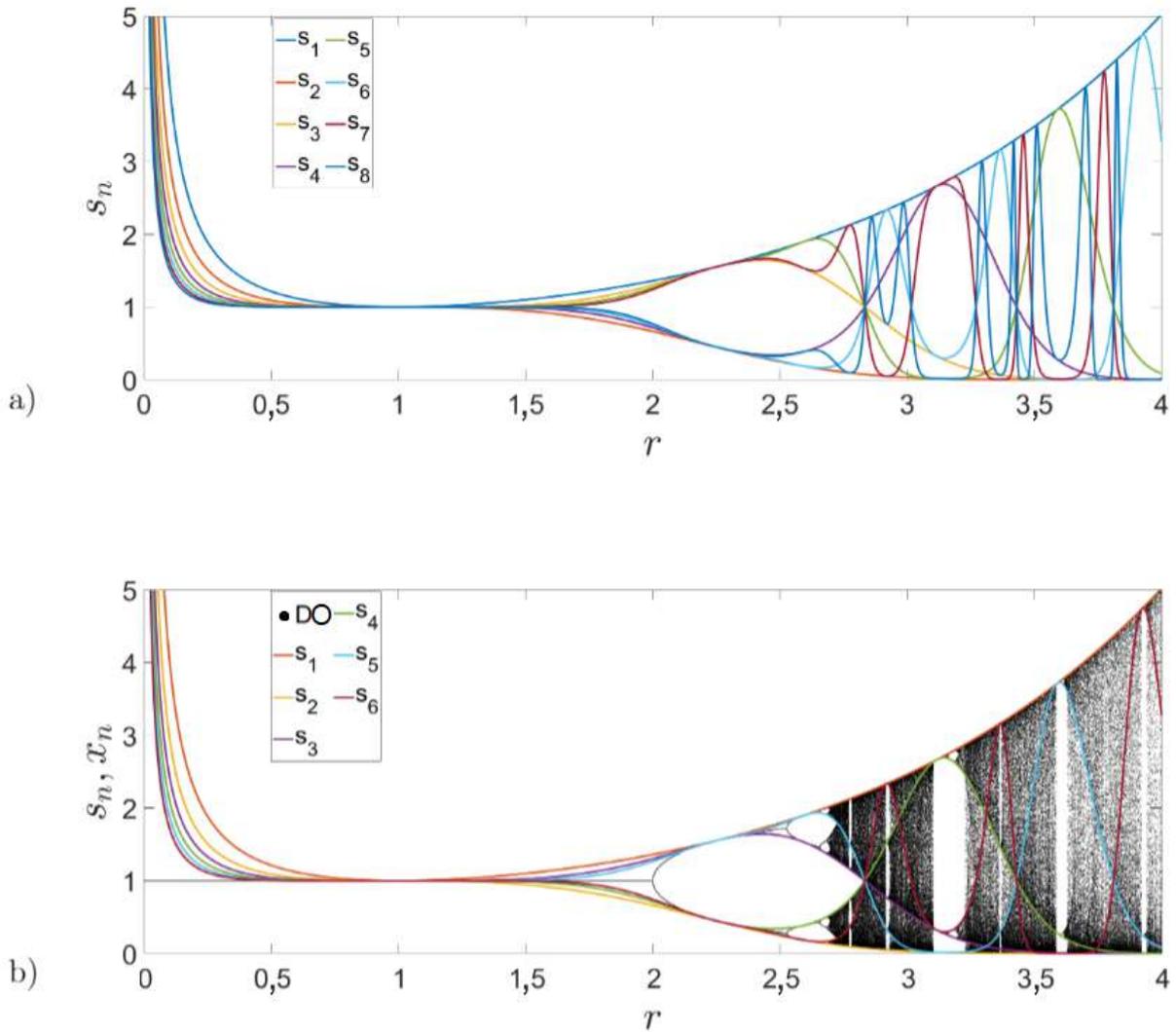


Figura 4.1: (a) Conjunto das oito primeiras funções *supertracks* para o mapa Ricker. (b) Sobreposição das seis primeiras *supertracks* com o diagrama de órbitas do mapa Ricker com $x_0 = 0, 5$.

Uma das vantagens de trabalhar com as órbitas *supertracks* está no fato de se tratarem de funções contínuas e suaves em todo domínio, permitindo o estudo de suas derivadas em pontos que aparentam descontinuidade no diagrama de órbitas. As órbitas *supertracks*

apresentam-se como candidatas interessantes no estudo da rota para o equilíbrio assintótico de órbitas, principalmente pelo fato de serem contínuas no parâmetro r e apresentam condição inicial única.

A figura 4.1(a) ilustra apenas as primeiras oito órbitas *supertracks* no mapa Ricker e a figura 4.1(b) relaciona as órbitas *supertracks* junto com o diagrama de órbitas. Uma visão holística do diagrama de órbitas com $x_0 = 0,5$ juntamente com as órbitas *supertracks*, é possível observar todas as órbitas vindo de $+\infty$ convergindo assintoticamente para o ponto fixo $x^* = 1$ para valores do parâmetro de controle r entre 0 e 2, bem como a denotação de todas as regiões mais escurecidas pelo diagrama de órbitas, agora trilhado pelas órbitas *supertracks*. Nota-se também, numa visão mais aprofundada, que as órbitas s_1 e s_2 demarcam as bordas superiores e inferiores das *supertracks*, respectivamente.

Novamente, para uma análise apenas teórica, tem-se a representação gráfica na figura 4.2 das 19 primeiras órbitas *supertracks*, com visualização semelhante ao que foi apresentado no diagrama de órbita mostrado no Capítulo 3.3, ou seja, para $r \in [-0,5; 0,5]$ e limitando a visualização do valor de s_n para valores entre -6 e 6 , uma vez que elas divergem para valores muito grandes.

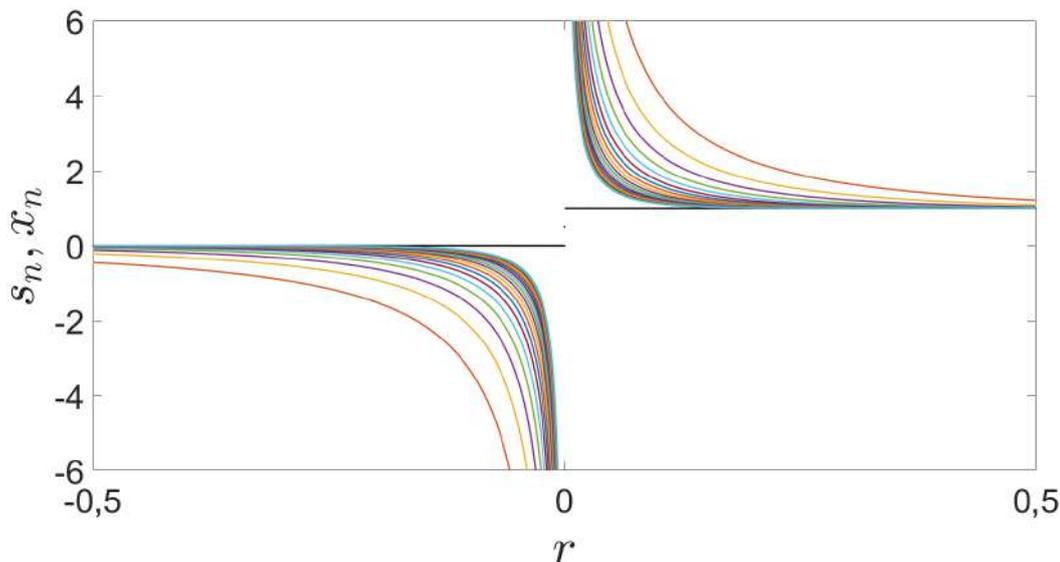


Figura 4.2: Órbitas *Supertracks* no mapa Ricker para $r \in [-0,5; 0,5]$.

É possível, logo no início de análise, observar a convergência assintótica para o ponto fixo, sendo ele em $x_-^* = 0$ para $r < 0$ e $x^* = 1$ para $r > 0$ e também a rota para $-\infty$ em r^- e vindo de ∞ em r^+ .

Na figura 4.3 é possível identificar o um comportamento assintótico das funções *supertracks* para as órbitas. A taxa de aproximação das *supertracks* reduz conforme o tempo, fato que levanta o questionamento de como é a natureza do comportamento dessa apro-

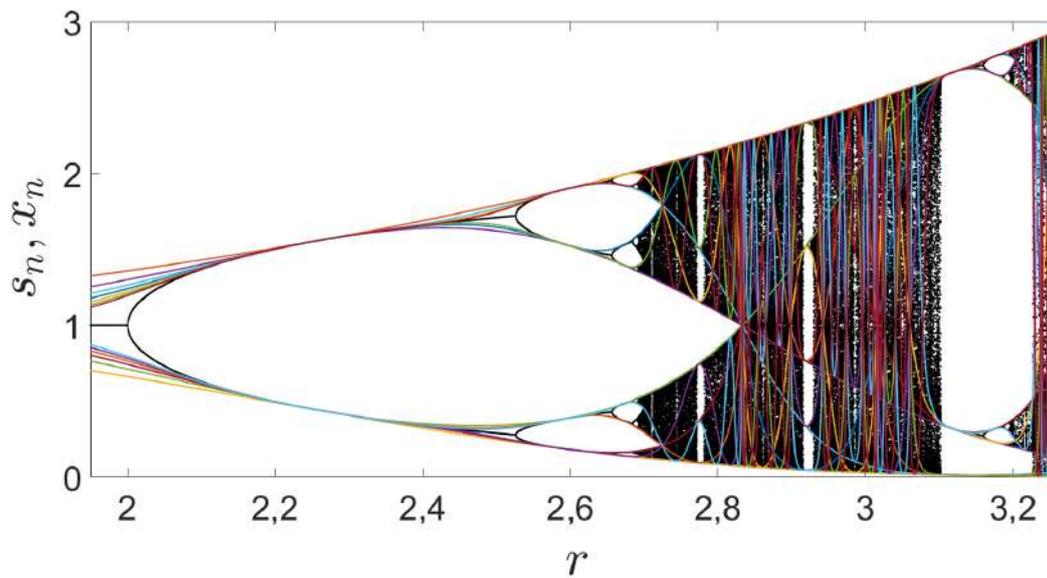


Figura 4.3: Órbitas *Supertracks* no mapa Ricker para $r \in [1, 9; 3, 25]$.

ximação, que será abordado a seguir.

4.2 Propriedades das órbitas *supertracks*

A figura 4.4 representa as mesmas oito primeiras órbitas *supertracks* anteriormente citadas. É possível notar alguns cruzamentos e tangenciamentos das órbitas.

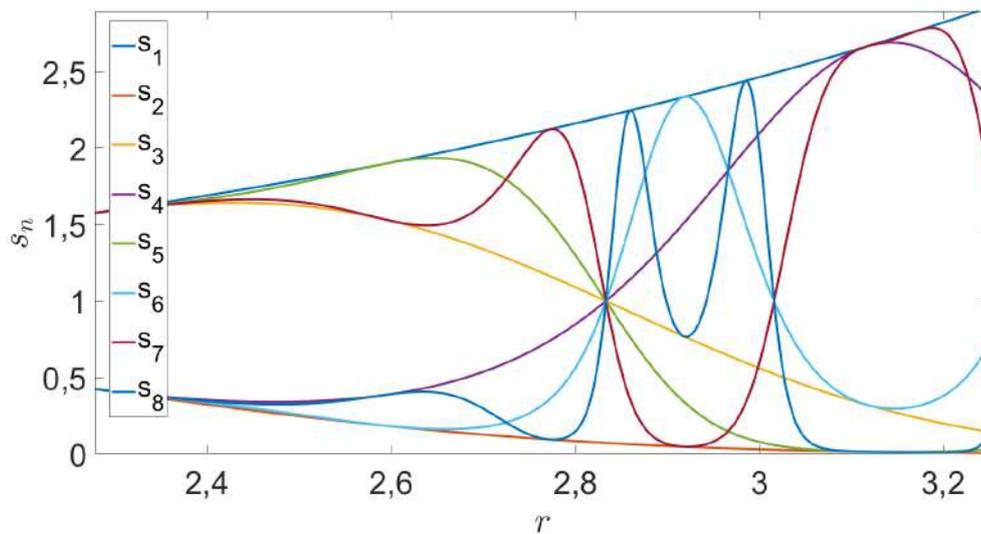


Figura 4.4: Órbitas *Supertracks* no mapa Ricker com ampliação na rota para o caos.

Assim, de acordo com a referência (JENSEN; MYERS, 1985), é possível citar duas

características importantes da interação das órbitas *supertracks*:

- A tangência de órbitas *supertracks* simboliza a existência de um ponto fixo ou de órbita periódica estável.
- O cruzamento de órbitas *supertracks* identificam os pontos de Misiurewicz, que são pontos periódicos instáveis, indicando que o mapa é caótico para este valor de parâmetro fixo r .

O encontro de todas as órbitas *supertracks* plotadas, com exceção de s_1 e s_2 é obtido pelos dados de simulação, em que $r \approx 2,833$.

De acordo com Fidélis (FIDÉLIS et al., 2013), órbitas superestáveis de período p ocorrem em r_p quando $s_p(r)$ intercepta $s_0(r)$, ou seja, quando:

$$s_{n+p}(r_p) = s_n(r_p) \quad \forall r_p | s_n(r_p) = s_0(r) \quad (4.10)$$

e

$$\frac{d}{dr}(s_{n+p}(r_p)) = \frac{d}{dr}(s_n(r_p)) \quad \forall r_p | s_n(r_p) = s_0(r) \quad (4.11)$$

o que significa que as órbitas *supertracks* passam pelo mesmo ponto e com o mesmo sinal de derivada. A mesma análise vale para:

$$\frac{d}{dr}(s_{n+p}(r_p)) \frac{d}{dr}(s_n(r_p)) > 0 \quad (4.12)$$

se apresentadas na mesma condição da Equação (4.10).

Um ponto de Misiurewicz ocorre quando duas ou mais *supertracks* com inclinações diferentes se cruzam, e representam uma singularidade instável no comportamento caótico. Assim:

$$s_n(r_{n,p}) = s_{n+p}(r_{n,p}) \quad (4.13)$$

e

$$\frac{d}{dr}(s_n(r_{n,p})) \frac{d}{dr}(s_{n+p}(r_{n,p})) < 0 \quad (4.14)$$

acontece para gerar o(s) ponto(s) de Misiurewicz em $r_{n,p} = M_{n,p}$, pois pode corresponder a uma órbita periódica instável de período $p \geq 1$. O valor de n corresponde ao pré-período.

As *supertracks* de ordens mais elevadas, ao tangenciarem-se entre si, dão origem a órbitas superestáveis e pontos de Misiurewicz, de acordo com suas inclinações, que tornam-se mais densos com maiores frequências em todo o regime caótico. A sucessão de r_p pela interceptação em s_0 pode ser usada para calcular a constante de Feigenbaum e sua constante de escala universal (FIDÉLIS et al., 2013).

4.3 A importância de órbitas *supertracks* de ordens altas

Conforme já trabalhado e supracitado, órbitas *supertracks* modelam assintoticamente o domínio do espaço de fases e o diagrama de órbita, fornecendo informações em funções contínuas no tempo e independentes de condições iniciais. As primeiras duas órbitas *supertracks* modelam assintoticamente os limites superiores e inferiores do diagrama de órbitas, conforme visto na figura 4.1(a) e (b). As seguintes representam áreas de maior densidade iterativa, representando trajetórias suaves e com pontos de tangências e intersecção bem definidos e claros num diagrama com escala padronizada.

Contudo a contribuição de órbitas *supertracks* de ordem alta pode possuir certa relevância e coerência quando comparado ao diagrama de órbitas de qualquer mapa unidimensional.

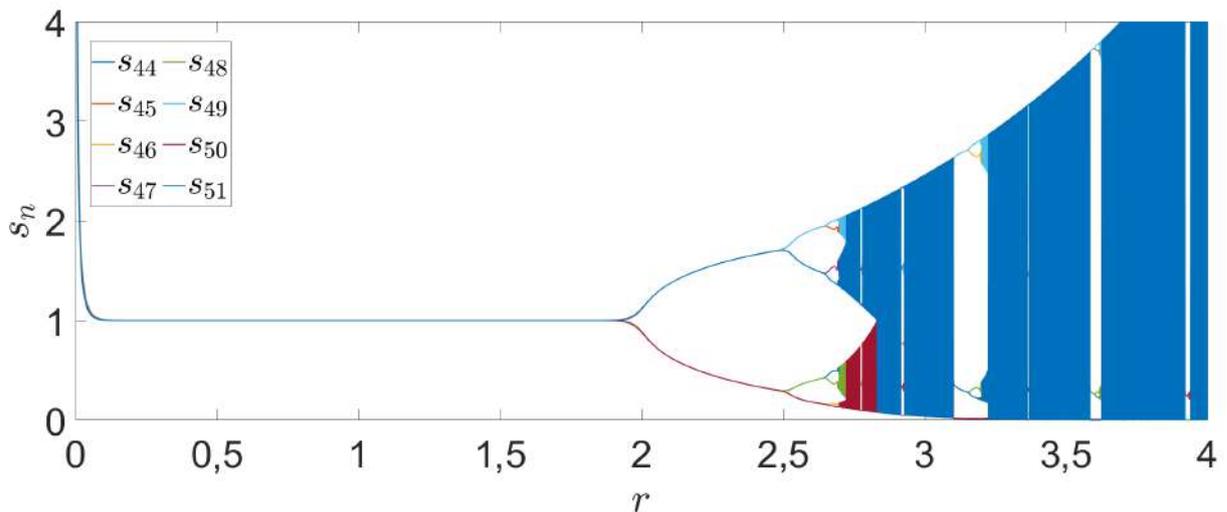


Figura 4.5: *Supertracks* de ordem alta, conforme mostra a legenda da figura.

A figura 4.5 demonstra a 44^o *supertracks* até a 51^o, em um *plot* único com escala conveniente. Quanto maior a ordem da função, maior a proximidade com o diagrama de órbita, e na imagem é possível observar com precisão a semelhança. Foi escolhido empiricamente de forma que modelassem visualmente bem o diagrama, bem como escolhidas oito *supertracks* para demonstrar com maior precisão até o comportamento após a primeira bifurcação de duplicação de período, onde o período p aumenta exponencialmente até atingir o comportamento caótico.

As janelas de estabilidade também ficam nítidas no *plot* com *supertracks* de ordem alta. A maior proximidade visual desta interação com o diagrama de órbitas vai depender exclusivamente do grau escolhidos das funções, mas nesse caso tem-se precisão suficiente

para identificar até mesmo o período de oscilação presente nas janelas de estabilidade.

4.4 Leis de potência no ponto de bifurcação de duplicação de período via órbitas *supertracks*.

Um estudo sistemático sobre leis de potências em pontos de bifurcação no mapa logistic-like foi realizado no trabalho (POLI, 2021). As análises foram baseadas em:

- Órbitas *supertracks* $s_n(r)$,
- A razão entre duas *supertracks* consecutivas $s_{n+p}(r)/s_n(r)$ em uma órbita de período p ,
- A derivada das funções *supertracks* no ponto de bifurcação, denotada por $s'_n(r)$,
- A razão entre duas derivadas consecutivas das funções *supertracks* $s'_{n+p}(r)/s'_n(r)$ em uma órbita de período p .

Estendemos os estudos investigando a aproximação das órbitas nos pontos de bifurcações no mapa Ricker. Como descrito em Poli (2021), a aproximação das seqüências em direção aos respectivos valores assintóticos pode ser caracterizada por meio de leis de potência. Dessa forma, para cada ponto de bifurcação, dado o parâmetro de controle, existem quatro expoentes característicos, θ_n , ω_n , ϕ_n e τ_n , ligados à aproximação das quatro seqüências em direção aos seus valores assintóticos. Dessa forma, podemos supor que:

- Para a órbita: $|s_n(r) - x_r^*| \propto n^{\theta_r}$, onde o θ_r está relacionado com o expoente β da lei de escala;
- Para a aproximação à unidade da razão entre as órbitas: $|\frac{s_{n+p}(r)}{s_n(r)} - x_r^*| \propto n^{\omega_r}$;
- Existem duas possibilidades para a derivada, sendo elas:
 - Caso ela seja convergente: $|s'_n(r) - s_r^*| \propto n^{\phi_r}$;
 - Caso ela seja divergente: $s'_n(r) \propto n^{\phi_r}$;
- Para a aproximação à unidade da razão entre as derivadas $|\frac{s'_{n+p}(r)}{s'_n(r)} - x_r^*| \propto n^{\tau_r}$;

É possível também observar algumas características específicas de cada tipo de bifurcação a partir do estudo das órbitas *supertracks*. Em $r = 2$, a bifurcação de duplicação de período é caracterizada pela maior proximidade das *supertracks* conforme o grau da função.

O comportamento assintótico a partir das órbitas *supertracks* para bifurcações de duplicação de período serão estudadas nessa parte do trabalho. O estudo é baseado novamente na primeira bifurcação de duplicação de período, em $r = 2$, uma vez que nas duplicações seguintes tem-se a mesma natureza comportamental. A figura 4.6 apresenta uma ampliação da bifurcação em questão, com as primeiras 19 órbitas *supertracks*. Nota-se a proximidade assintótica das órbitas em formato contínuo e suave, diferentemente do comportamento do mapa em si, que possui descontinuidades e é discreto. Esse comportamento pode ser analisado também por decaimentos de órbita conforme descritos a seguir.

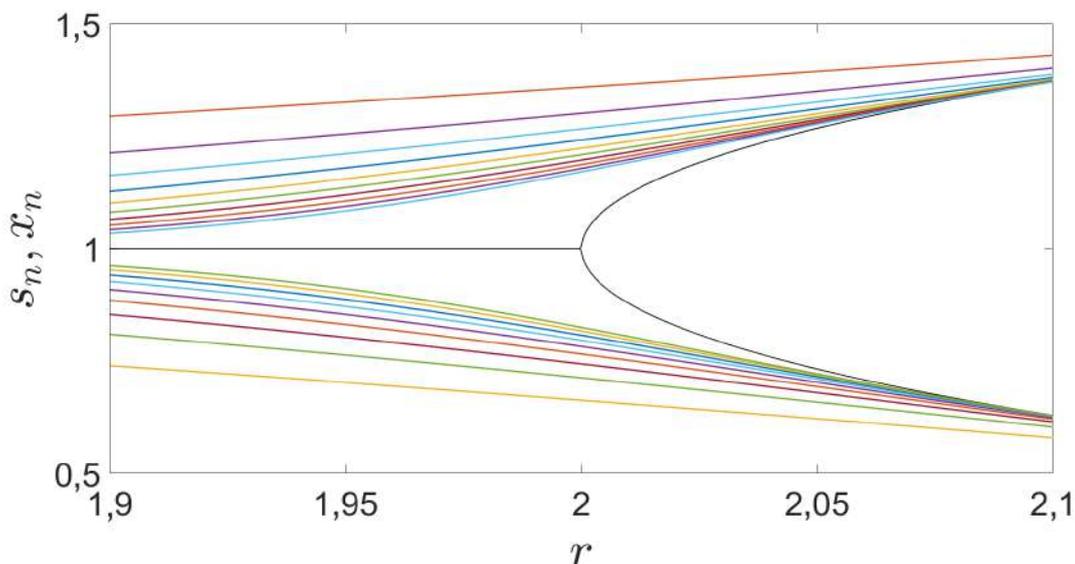


Figura 4.6: Primeiras 19 órbitas *supertracks* juntamente com o diagrama de órbitas para o mapa Ricker, com $r \in [1,9; 2,1]$. Para a construção do diagrama de bifurcações consideramos $x_0 = 0,5$.

É importante ressaltar que o estudo a partir das funções *supertracks* retorna apenas um expoente crítico por sequência estudada. O comportamento de crossover, presente na descrição via lei de potência estudadas anteriormente não está presente aqui, devido à natureza da construção das órbitas a partir de uma condição inicial única (ponto crítico) dos mapas. Assim, apenas o comportamento estacionário da convergência é estudado, obtendo, a partir dali, o expoente buscado.

A figura 4.7 mostra a aproximação das órbitas *supertracks* para o ponto fixo próximo à bifurcação de duplicação de período $p = 2$ subtraindo o ponto fixo $x^* = 1$ em uma função de n . Um ajuste em lei de potência fornece $\theta_2 = -0,4998(3)$. Na figura, o diagrama pequeno representa o valor das órbitas *supertracks* sem módulo e desconsiderando a subtração do ponto fixo, considerando também numa escala semi-log. No caso em questão é possível observar a convergência no formato decimal e também a diferenciação de

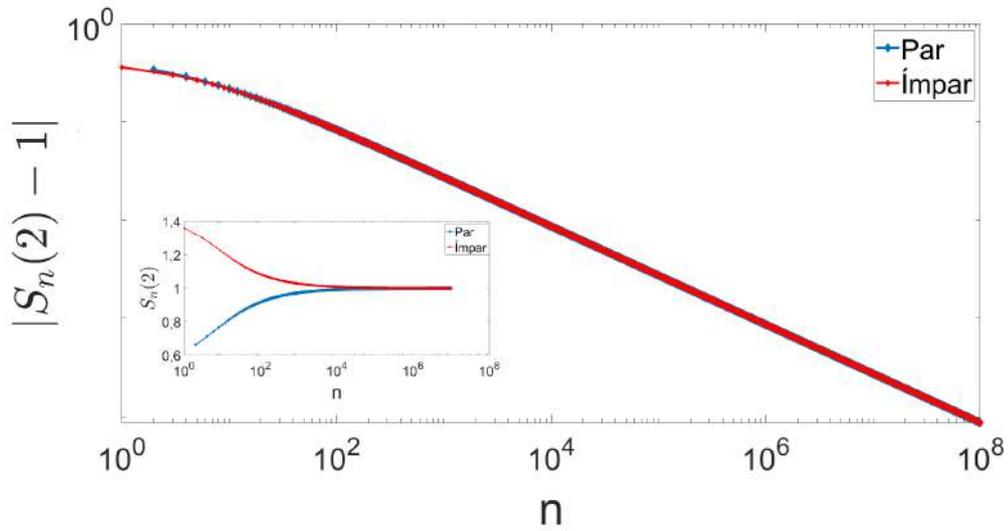


Figura 4.7: Aproximação da órbita em direção ao ponto fixo na bifurcação de duplicação de período, fornecendo a lei de potência com $\theta_2 = -0,4998(3)$.

pontos pares e ímpares, que possuem alternância em cálculo. Observa-se, finalmente, que a convergência para o ponto fixo é dada após uma série de iterações e tanto as órbitas pares quanto as ímpares convergem para o mesmo ponto fixo $x^* = 1$.

A análise da razão de órbitas *supertracks* oferece um segundo expoente crítico. Considerando uma órbita de período $p = 2$ - primeira bifurcação de duplicação de período em $r = 2$, considera-se $|\frac{s_{n+2}(2)}{s_n(2)} - 1| \propto n^{\omega_2}$.

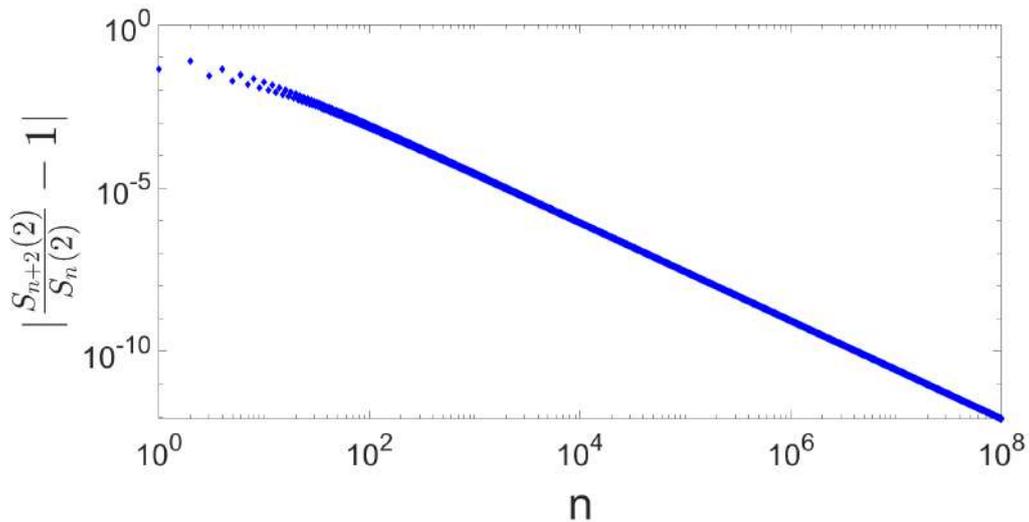


Figura 4.8: Aproximação da órbita em direção ao ponto fixo na bifurcação de duplicação de período, fornecendo a lei de potência com $\omega_2 = -1,5002(1)$.

A razão de órbitas demonstrado na Figura 4.8 fornece o ajuste em lei de potência para

a razão entre órbitas considerando a periodicidade $p = 2$, fornecendo o segundo expoente crítico, $\omega_2 = -1,5002(1)$.

Os expoentes críticos θ_2 e ω_2 recuperam alguns dos expoentes críticos encontrados no Capítulo 3 são validados com a correlação dos expoentes obtidos para o mapa logistic-like em (POLI, 2021).

Capítulo 5

Propriedades dinâmicas do circuito de Chua

O circuito de Chua é um circuito eletrônico que apresenta comportamento caótico. Foi introduzido em 1983 por Leon Ong Chua, com a proposta de idealizar um circuito elétrico que se comportasse de maneira caótica para demonstrar experimentalmente o modelo caótico do sistema de Lorenz, refutando a ideia de que trata-se apenas de um fenômeno matemático (MARTINS, 2016; RAMOS, 2019). Matsumoto, em 1985, realizou as primeiras experiências em uma versão simplificada, utilizando também simulações computacionais para provar a existência de caos no circuito. No mesmo ano foram obtidos os primeiros resultados experimentais utilizando esse circuito, caracterizando a primeira confirmação experimental da existência de caos em circuitos elétricos. Além disso, foi analisado detalhadamente os atratores encontrados experimentalmente no circuito de Chua com a utilização de expoentes de Lyapunov para caracterizar o Caos. (MATSUMOTO; CHUA; KOMURO, 1985; ZHONG; AYROM, 1985)

Chua projetou o circuito como um circuito autônomo, ou seja, um circuito que contém apenas elementos eletrônicos invariantes no tempo e com fontes de corrente constante (BAPTISTA, 1996; RAMOS, 2019). Para um circuito autônomo exibir um comportamento caótico, ele deve conter três essenciais características:

- Pelo menos um elemento não linear;
- Pelo menos um resistor ativo localmente e
- Três ou mais elementos de armazenamento de energia.

O circuito de Chua é um dos circuitos que atendem a esses critérios. É composto por dois capacitores (C), um indutor (L) e um resistor (R) que estão conectados a uma

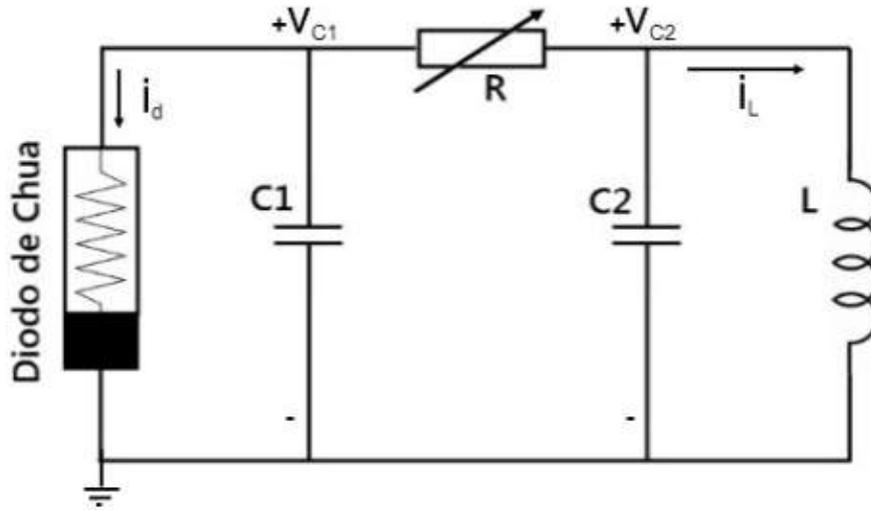


Figura 5.1: Circuito de Chua, baseado em (PEREIRA et al., 2014).

resistência não linear, também conhecido como diodo de Chua. Está representado na Figura 5.1

O dispositivo de não linearidade é conhecido como Diodo de Chua, apresentado na Figura 5.2, que possui três segmentos com inclinação negativa e três pontos de equilíbrio instáveis. Essa não linearidade presente nesse sistema permitiu os matemáticos da época estudarem analiticamente. É baseado em amplificadores operacionais e sua configuração facilita o fluxo de corrente elétrica que fornece energia no sistema. A figura 5.3 representa regiões de não-linearidade presentes nesse circuito, de modo que o comportamento da corrente não varia linearmente em função da tensão, havendo, portanto, três regiões de comportamento de inclinação negativa.

O comportamento caótico ocorre devido ao funcionamento periódico do sistema que depende de um equilíbrio entre os circuitos e o resistor R do circuito de Chua. Esse circuito é um dos poucos sistemas físicos não lineares que apresenta regimes caóticos por diferentes abordagens, incluindo sistemas experimentais, computacionais e análises matemáticas (JUNIOR, 2010; MITAL; KUMAR; PRASAD, 2008; PEREIRA et al., 2014).

As equações que descrevem o comportamento do circuito de Chua em função dos parâmetros de controle são descritas por:

$$\frac{dv_{c1}}{dt} = \frac{v_{c2} - v_{c1}}{RC_1} - \frac{i_d}{C_1} \quad (5.1)$$

$$\frac{dv_{c2}}{dt} = \frac{v_{c1} - v_{c2}}{RC_2} - \frac{i_d}{C_2} \quad (5.2)$$

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{v_{c2}}{L} \quad (5.3)$$

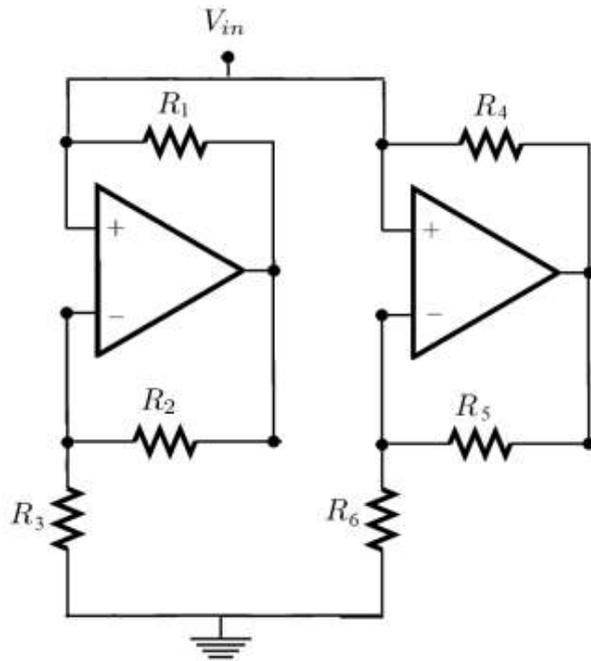


Figura 5.2: Diodo de Chua, baseado em (RAMOS, 2019).

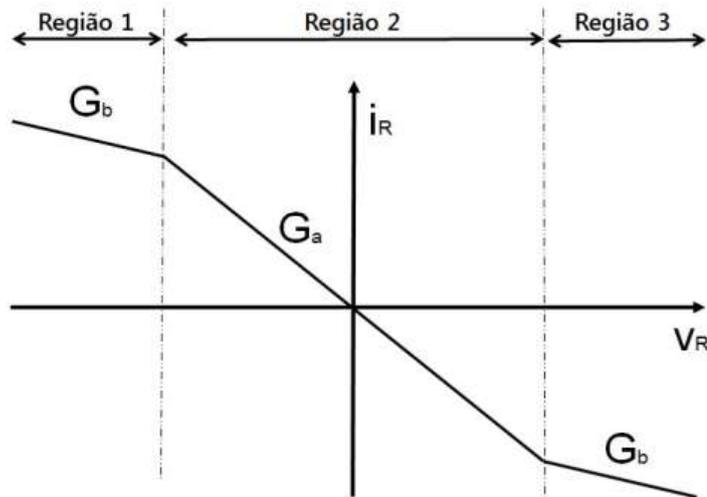


Figura 5.3: Não-linearidade do diodo de chua, baseado em (PEREIRA et al., 2014).

sendo v_{c1} e v_{c2} as tensões nos capacitores C_1 e C_2 , respectivamente, i_L a corrente do indutor. O termo $i_d(t)$ representa a não linearidade do sistema.

Para simulações, podemos considerar $\alpha = \frac{C_2}{C_1}$, $\beta = \frac{R^2 c_2}{L}$, $a = RG_a$ e $b = RG_b$. Para ilustrar os tipos diferentes de comportamento em função do tempo do modelo teórico do circuito de Chua, é possível representar o espaço de fases com diferentes configurações de parâmetros de controle e condições.

O comportamento presente no circuito de Chua possui uma dinâmica mais complexa

do que aquela exibida pelos atratores de Lorenz ou de Rossler (RADWAN; FOU DA, 2015). Existem essencialmente quatro tipos de atratores que podem ser observados nesse circuito, são eles:

- Ponto fixo,
- Ciclo limite ou periódico,
- *Single scroll*,
- *Double Scroll*.

A observação desses atratores é visualizada com maior precisão nos espaços de fases, onde cada seleção de iterações é plotada com um determinado conjunto de parâmetros de controle. O espaço de fases consiste em um sistemas de coordenadas associadas às variáveis, descrevendo a dinâmica de um sistema (MARANHÃO, 2001). Podemos observar, para algumas condições diferentes ilustradas a seguir, o espaço de fases para condições de parâmetros de controle específicas fornecendo diferentes órbitas para v_{c1} , v_{c2} e i_L .

Primeiramente na figura 5.4 podemos observar um atrator, com os parâmetros $\alpha = 9, 4$, $\beta = 28$, $G_a = -1, 2$ e $G_b = -0, 7$.

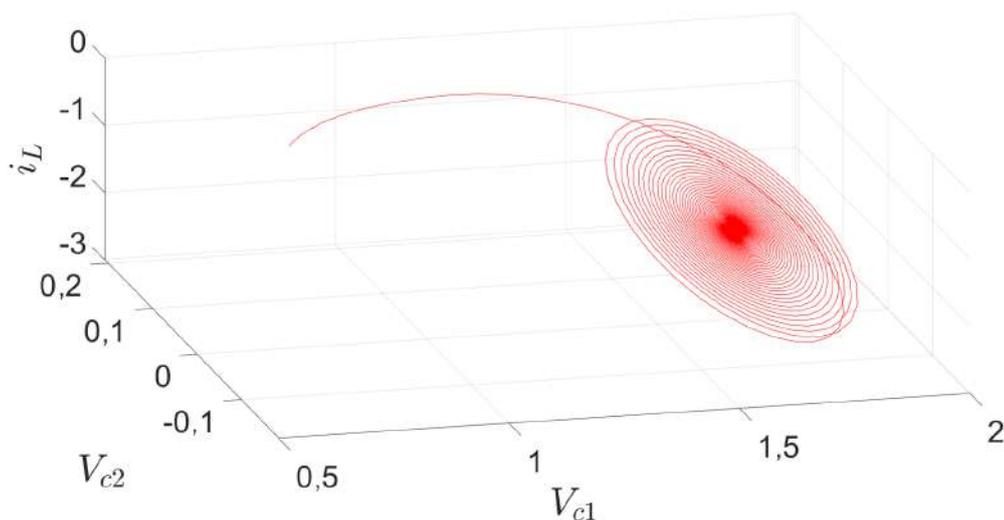


Figura 5.4: Espaço de fases do circuito de Chua simulado, com os parâmetros $\alpha = 9, 4$, $\beta = 28$, $G_a = -1, 2$ e $G_b = -0, 7$ e $x_0 = 0, 7$.

Para uma segunda simulação, a alteração dos parâmetros de controle fornecem uma visão diferente do espaço de fases, contudo ainda de natureza muito parecida. Com os parâmetros $\alpha = 12$, $\beta = 28$, $G_a = -1, 2$ e $G_b = -0, 7$ e $x_0 = 0, 7$, o comportamento é o representado pela figura 5.5.

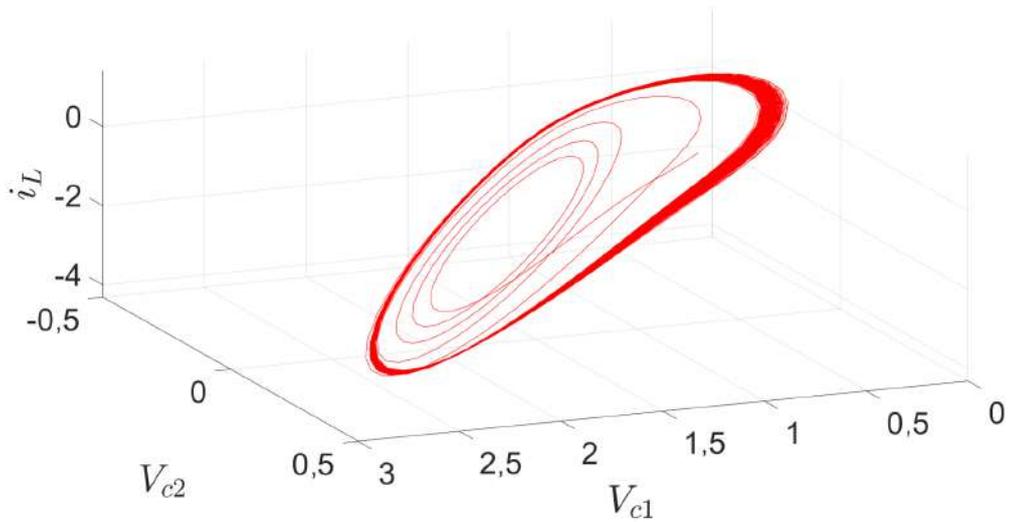


Figura 5.5: Espaço de fases do circuito de Chua simulado, com os parâmetros com os parâmetros $\alpha = 12$, $\beta = 28$, $G_a = -1,2$ e $G_b = -0,7$ e $x_0 = 0,7$.

Para uma terceira condição diferente, apresentada na figura 5.6, os parâmetros $\alpha = 14,6$, $\beta = 28$, $G_a = -1,2$ e $G_b = -0,7$ e $x_0 = 0,7$ fornecem uma natureza fundamentalmente diferente, podendo identificar a presença agora de um atrator caótico do tipo *double scroll*, em que as órbitas são inéditas em cada novo ciclo nunca repetindo o mesmo posicionamento dimensional, representando portanto um atrator estranho.

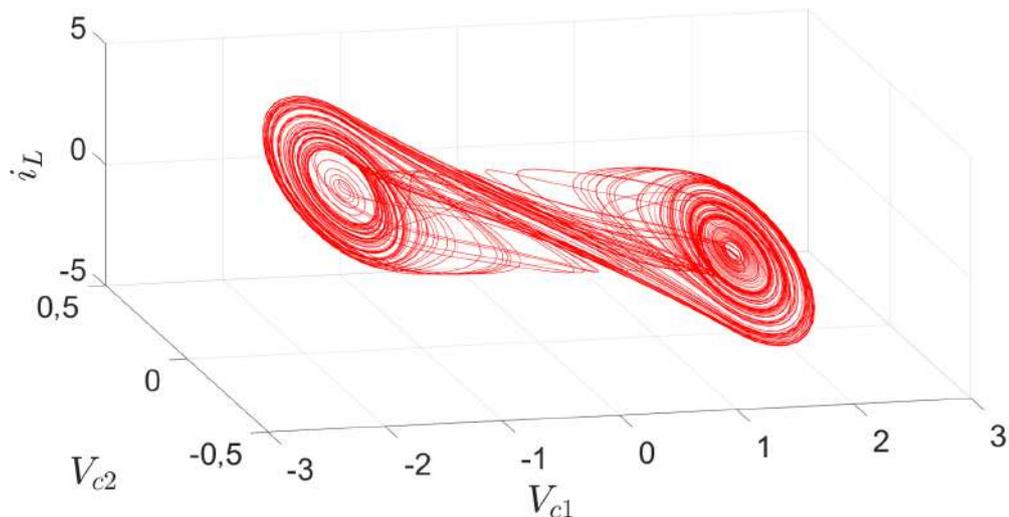


Figura 5.6: Espaço de fases do circuito de Chua simulado, com os parâmetros com os parâmetros $\alpha = 14,6$, $\beta = 28$, $G_a = -1,2$ e $G_b = -0,7$ e $x_0 = 0,7$.

Os espaços de fases permitem a visualização de uma ampla disponibilidade de iterações para um conjunto de parâmetros de controle fixo, permitindo a visualização simples de uma determinada condição orbital como apresentado na figura 1.1. Contudo para melhor

representação, é possível simular um diagrama de órbitas para o circuito em questão, onde a variável em função da alteração do parâmetro ilustra o comportamento do sistema. Assim, é possível visualizar a caracterização caótica e periódica de algum sistema em função apenas de um parâmetro específico. Para tal, a simulação executada demonstra uma faixa de alteração do parâmetro α com todos os outros parâmetros fixados (LI; ZENG; YANG, 2014).

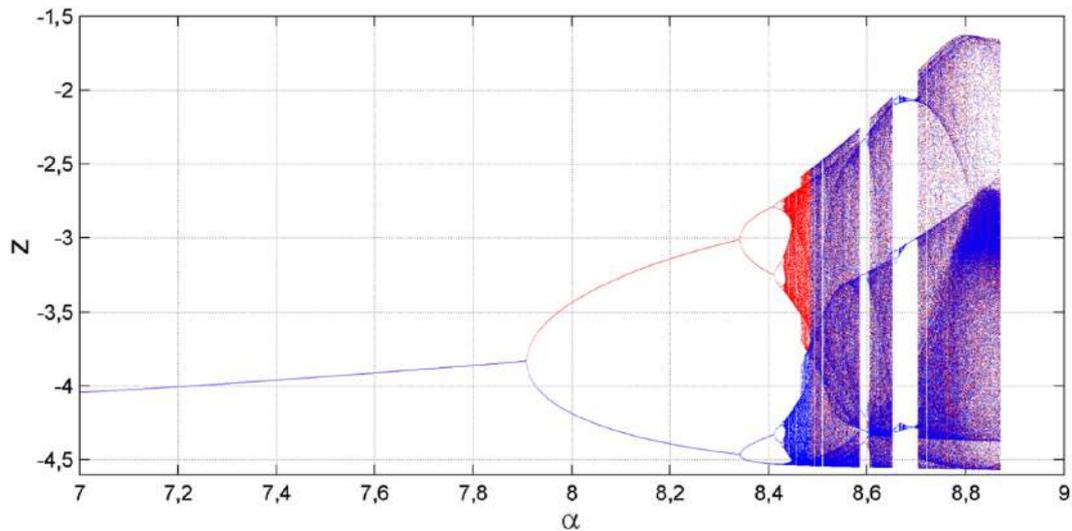


Figura 5.7: Diagrama de órbitas para uma faixa de operação do circuito de Chua, em função do ajuste de α . Adaptado de (LI; ZENG; YANG, 2014).

Nota-se a clara semelhança da figura 5.7 com diagrama de órbitas apresentado para o mapa Logístico na figura 2.2 e com o mapa Ricker na figura 3.1. Assim, tem-se que a algumas fundamentações que sustentam os mapas unidimensionais, quando considerados de forma convenientemente correta, também são válidos para análise de sistemas físicos mais complexos como o circuito de Chua.

Capítulo 6

Conclusões

O trabalho teve como principal objetivo estudar e demonstrar as propriedades dinâmicas do mapa Ricker, utilizando diferentes ferramentas já conhecidas pela literatura. Para isso, primeiramente fez-se necessária uma contextualização com um mapa já conhecido: o mapa logístico. Foi realizado então, para o mapa logístico, o desenvolvimento analítico dos pontos fixos x_1^* , x_2^* , x_3^* e x_4^* e plotado, com eles, o diagrama de bifurcações. Além disso, também foi apresentado o diagrama de órbitas e o cálculo dos expoentes de Lyapunov.

Com a contextualização teórica e com o devido embasamento, o mapa unidimensional discreto proposto por Ricker foi apresentado. Com ele, realizou-se o cálculo do ponto fixo x_1^* e o estudo do diagrama de órbitas com a visão ampla do mapa, identificando alguns pontos principais de interesse, como as bifurcações em $r = 2$ e $r = 0$. Os expoentes de Lyapunov foram calculados e colocados em paralelo com o diagrama de órbitas, a fim de caracterizar o caos e caracterizar alguns pontos fixos.

Para a bifurcação transcítica em $r = 0$ estudou-se o tempo de relaxação obtendo o expoente δ , comparando com as referências para validar a natureza da bifurcação. Para a bifurcação de duplicação de período, em $r = 2$, realizou-se um estudo de leis de escala para a análise de convergência para ponto fixo para encontrar os expoentes críticos α , β e γ , utilizando a análise numérica e analítica para tal. Essas metodologias são comuns para análise de mapas como esse, portanto são de extrema importância para caracterização de um mapa tão pouco estudado como o Ricker.

Utilizou-se das versáteis funções *supertracks*, primeiramente também com a holística análise do diagrama de órbitas, identificando principais pontos de interesse e comparando com informações já conhecidas. Com isso, fez-se conveniente a descrição e análise da tangência dessas funções contínuas, que fornecem a existência de um ponto fixo ou de órbita periódica estável, e de seus cruzamentos, que apresentam a existência de pontos de Misiurewicz, simbolizando pontos instáveis.

Ainda em análises de *supertracks*, foi investigada a convergência dessas funções para

ponto fixo, abordando tanto do valor das funções em si quanto da razão entre órbitas de período $p = 2$. Com isso, foi possível validar dois outros expoentes, θ e ω , a partir de um ajuste em lei de potência.

Por fim, o circuito de Chua simulado, proposto há algumas décadas, introduz o conceito de que sistemas dinâmicos com comportamento caóticos não são estudados unicamente teóricos, fornecendo caracterizações teóricas fundamentalmente semelhantes aos modelos unidimensionais com maior simplicidade. Com a visualização de algumas órbitas periódicas e caóticas e com a análise do diagrama de órbitas com a alteração do parâmetro α fica clara a semelhança e aplicabilidade de sistemas dinâmicos.

O trabalho, portanto, identificou as propriedades dinâmicas de um mapa unidimensional inédito. Essas características presentes nesse modelo teórico são estritamente controladas via software e procura refletir uma realidade específica de alguma determinada aplicação real, mas a aplicabilidade de sistemas dinâmicos vai muito além de apenas dinâmica populacional. Muitos modelos matematicamente restritos pela física clássica são possíveis de representar e compreender com as análises de propriedades dinâmicas, como o pêndulo duplo, previsão do tempo, sistemas financeiros, circuitos elétricos como o circuito de Chua, RLC não-linear, RLD, e dentre outros.

Referências Bibliográficas

ARAUJO, S. B. L.; RORATO, A. C.; PEREZ, D. M.; PIE, M. R. A spatially explicit model of synchronization in fiddler crab waving displays. **PLoS One**, Public Library of Science San Francisco, USA, v. 8, n. 3, p. e57362, 2013.

BAPTISTA, M. d. S. **Perturbando Sistemas Não-Lineares, uma Abordagem do Controle de Caos**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 1996.

FIDÉLIS, A. J. et al. Dinâmica do mapa logístico via supertracks. Universidade do Estado de Santa Catarina, 2013.

HILBORN, R. C. et al. **Chaos and nonlinear dynamics: an introduction for scientists and engineers**. [S.l.]: Oxford University Press on Demand, 2000.

JENSEN, R. V.; MYERS, C. R. Images of the critical points of nonlinear maps. **Physical Review A**, APS, v. 32, n. 2, p. 1222, 1985.

JUNIOR, E. R. V. Espaços de parâmetros para um circuito caótico experimental. Universidade Federal de Minas Gerais, 2010.

KENDALL, B. E.; FOX, G. A. Spatial structure, environmental heterogeneity, and population dynamics: analysis of the coupled logistic map. **Theoretical population biology**, Elsevier, v. 54, n. 1, p. 11–37, 1998.

KOETKE, L. J.; DUARTE, A.; WECKERLY, F. W. Comparing the ricker and θ -logistic models for estimating elk population growth. **Natural Resource Modeling**, Wiley Online Library, v. 33, n. 4, p. e12270, 2020.

LEONEL, E. D. **Invariância de Escala em Sistemas Dinâmicos Não Lineares**. [S.l.]: Editora Blucher, 2019.

LEVIN, S. A.; GOODYEAR, C. P. Analysis of an age-structured fishery model. **Journal of Mathematical Biology**, Springer-Verlag, v. 9, n. 3, p. 245–274, 1980.

LI, Q.; ZENG, H.; YANG, X.-S. On hidden twin attractors and bifurcation in the chua's circuit. **Nonlinear Dynamics**, Springer, v. 77, n. 1, p. 255–266, 2014.

LUNA-ACOSTA, G.; ORELLANA-RIVADENEYRA, G.; MENDOZA-GALVÁN, A.; JUNG, C. Chaotic classical scattering and dynamics in oscillating 1-d potential wells. **Chaos, Solitons & Fractals**, Elsevier, v. 12, n. 2, p. 349–363, 2001.

MARANHÃO, D. M. **Caracterização topológica de atratores: o circuito de Chua**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2001.

MARTINS, T. C. Desenvolvimento de um aplicativo android para a análise do circuito de chua-matsumoto. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 38, n. 1, 2016.

MATSUMOTO, T.; CHUA, L.; KOMURO, M. The double scroll. **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, IEEE, v. 32, n. 8, p. 797–818, 1985.

MAY, R. M. Biological populations with nonoverlapping generations: stable points, stable cycles, and chaos. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 186, n. 4164, p. 645–647, 1974.

MITAL, P. B.; KUMAR, U.; PRASAD, R. S. Chua's circuit-a universal paradigm for generating and studying chaos. **Journal of Active & Passive Electronic Devices**, v. 3, n. 1, 2008.

MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas dinâmicos**. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2002.

OBLOW, E. Supertracks: the building blocks of chaos. **NASA STI/Recon Technical Report N**, v. 88, p. 13207, 1987.

_____. Supertracks, supertrack functions and chaos in the quadratic map. **Physics Letters A**, Elsevier, v. 128, n. 8, p. 406–412, 1988.

PEREIRA, L.; SANSÃO, J.; CARDOSO, A.; MOZELLI, L. Plataforma didática e experimental para investigações do circuito de chua. In: **Anais do XX Congresso Brasileiro de Automática**. [S.l.: s.n.], 2014.

POLI, J. G. Leis de potência e estudos analíticos em pontos de bifurcação de mapas 1-d via supertracks. Instituto Federal Catarinense, 2021.

RADWAN, A. G.; FOUDA, M. E. **On the mathematical modeling of memristor, memcapacitor, and meminductor**. [S.l.]: Springer, 2015. v. 26.

RAMOS, L. C. N. Propriedades dinâmicas e leis de escala em mapeamentos unidimensionais discretos: aplicações em circuitos. Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2019.

RICKER, W. E. Stock and recruitment. **Journal of the Fisheries Board of Canada**, NRC Research Press Ottawa, Canada, v. 11, n. 5, p. 559–623, 1954.

ROCHA, R.; MARTINS-FILHO, L. S.; MACHADO, R. F. Analogia eletrônica no ensino de física. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 27, p. 211–218, 2005.

SAVI, M. A. **Dinâmica não-linear e caos**. [S.l.]: Editora E-papers, 2006.

STROGATZ, S. H. **Nonlinear dynamics and chaos with student solutions manual: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering**. [S.l.]: CRC press, 2018.

TEIXEIRA, R. M.; RANDO, D. S.; GERALDO, F. C.; FILHO, R. C.; OLIVEIRA, J. A. de; LEONEL, E. D. Convergence towards asymptotic state in 1-d mappings: A scaling investigation. **Physics Letters A**, Elsevier, v. 379, n. 18-19, p. 1246–1250, 2015.

ZHANG, W.-B. **Discrete dynamical systems, bifurcations and chaos in economics**. [S.l.]: elsevier, 2006.

ZHONG, G.-Q.; AYROM, F. Experimental confirmation of chaos from chua's circuit. **International journal of circuit theory and applications**, Wiley Online Library, v. 13, n. 1, p. 93–98, 1985.