2010.2

Apostila de Matemática Financeira

Prof. Davi Riani Gotardelo

Disponível no Xerox e no Quiosque

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ)

Agradecimento especial à querida Prof. Silvinha, que me ensinou os primeiros passos da Matemática, por gentilmente ter cedido o material para confecção dessa apostila.

Conteúdo

CAPÍTULO 04 – TAXAS

CAPÍTULO 05 – RENDAS CERTAS OU ANUIDADES

CAPÍTULO 06 – SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO DE EMPRÉSTIMOS E FINANCIAMENTOS

Operações sobre mercadorias

1. Cálculos de lucro ou prejuízo sobre o preço de custo ou de venda

Quando se trabalha com compra e venda de mercadorias, tem-se a possibilidade de obtenção de lucro ou prejuízo, que pode ser sobre o custo ou sobre a venda. Para isso é necessário saber primeiro o que é preço de custo de uma mercadoria. O preço de custo de uma mercadoria compreende o preço de aquisição, acrescido das despesas diretas sobre a compra e a venda e, ainda, das despesas de administração, tributárias (PIS, COFINS,ICMS e outras) e de funcionamento da empresa.

Quando se fala em taxa de lucro ou de prejuízo, imediatamente se pensa em taxa de lucro ou de prejuízo sobre o preço de custo; pois é este que representa o capital empregado pelo comerciante na compra das mercadorias a serem vendidas. Na prática, entretanto, é mais cômodo ao comerciante calcular a taxa de lucro ou de prejuízo sobre o preço de venda; pois esse preço, presente nas tabelas de uso comercial e também nas etiquetas das mercadorias, é de mais fácil acesso do que o preço de custo. Além disso, o conhecimento da taxa de lucro sobre o preço de venda possibilita a determinação da taxa de lucro sobre o preço de custo, uma vez que existe uma relação entre as duas taxas.

1.1. Vendas com lucro

Ao se vender uma mercadoria pode-se ocasionar um lucro, sobre o preço de custo ou sobre o preço de venda da mesma, lembrando-se que ao se comprar e ao se vender uma mercadoria, vale a lei da oferta e da demanda.

QUESTÕES PARA DISCUSSÃO INICIAL DO CAPÍTULO

Como lidar com operações financeiras sobre compra e venda de mercadorias

CONCEITOS A SEREM DEFINIDOS NESSE CAPÍTULO

Abatimentos

Abatimentos e aumentos sucessivos

1.2. Vendas com lucro sobre o preço de custo

Desenvolvendo a fórmula:

V = preço de venda

C = preço de custo

L = lucro

i = taxa unitária de lucro

V = C + L   onde   L = iC   logo,   V = C + iC

V - C = iC

$$\boxed{\frac{V-C}{C} = i \qquad \text{ou} \qquad i = \frac{V-C}{C}}$$

<u>Exemplo:</u>

Uma loja de departamentos coloca à venda uma determinada mercadoria com um lucro de 13% sobre o preço de custo da mesma. Determine o preço de venda sabendo-se que esta mercadoria custou R$230,00.

i = 13% = 0,13   C = 230   V = ?

Como $i = \dfrac{V-C}{C}$,   então $0{,}13 = \dfrac{V-230}{230}$

0,13 x 230 = V - 230

29,90 = V – 230

29,90 + 230 = V

$\boxed{V = 259{,}90}$

<u>Resposta</u>. O preço de venda é de R$ 259,90.

ou

230 + 0,13 x 230 = 230 + 29,90 = 259,90

ou ainda,

230 $\longrightarrow$ 100%

x $\longrightarrow$ 113%

x = 230(113) : 100 $\boxed{x = 259{,}90}$

1.3. Vendas com lucro sobre o preço de venda

Desenvolvendo a fórmula :

V = C + L   onde L = iV   logo, V = C + iV

V - iV = C

$$\boxed{\frac{V-C}{V}=i \qquad \text{ou} \qquad i=\frac{V-C}{V}}$$

Exemplo.

O dono de uma loja de eletrodomésticos comprou uma mercadoria por R$689,00 e quer vendê-la com um lucro de 25% sobre o preço de venda. Qual deve ser o valor de venda dessa mercadoria?

i = 25% = 0,25   C = 689   V = ?

$$i=\frac{V-C}{V} \qquad 0{,}25=\frac{V-689}{V}$$

0,25V = V - 689

0,25V - V = - 689   V (0,25 - 1) = - 689   -0,75V = - 689 (- 1)

0,75V = 689

$$V=\frac{689}{0{,}75}$$

$\boxed{V = 918{,}67}$

Resposta. O valor de venda dessa mercadoria deverá ser de R$918,67.

1.4. Vendas com prejuízo

Analogamente ao que ocorre com o lucro, uma mercadoria pode ser vendida com prejuízo sobre o preço de custo ou de venda.

1.5. Vendas com prejuízo sobre o preço de custo.

Desenvolvendo a fórmula:

V = preço de venda

C = preço de custo

P = prejuízo

i = taxa unitária de prejuízo

V = C - P onde P = iC logo, V = C - iC

V - C = - iC $$\boxed{\frac{V-C}{C} = -i \quad \text{ou} \quad -i = \frac{V-C}{C}}$$

Exemplo.

Um aparelho de jantar foi vendido com um prejuízo de 40% sobre o preço de custo. Sabendo-se que esse aparelho custou R$300,00, qual foi o preço de venda?

i = 40%= 0,40 C = 300 V = ?

Como a fórmula de prejuízo sobre o preço de custo é $-i = \frac{V-C}{C}$, temos:

$-0{,}40 = \frac{V-300}{300}$ -0,40 x 300 = V - 300 - 120 = V - 300

-120 + 300 = V $\boxed{V = 180}$

Resposta. O preço de venda desse objeto foi de R$180,00.

ou

100% - 40% = 60% então,

se 100% ⟶ 300

60% ⟶ x

x = 300 x 60 : 100 $\boxed{x = 180}$

1.6. Vendas com prejuízo sobre o preço de vendas

Desenvolvendo a fórmula:

V = C - P onde P = iV então, V = C – iV

V - C = - iV $$\boxed{\frac{V-C}{V} = -i \quad \text{ou} \quad -i = \frac{V-C}{V}}$$

Exemplo:

Uma mercadoria cujo custo é de R$96.000,00 foi vendida com um prejuízo de 20% sobre o preço de venda. Calcule o preço de venda dessa mercadoria.

i = 20% = 0,20 C = 96.000 V = ?

$-i = \frac{V - C}{V}$ $-0{,}2 = \frac{V - 96.000}{V}$ -0,2V = V - 96.000

-0,2V - V = - 96.000 -V (0,2 + 1) = - 96.000 (-1) V (1,2) = 96.000

$V = \frac{96.000}{1{,}2}$ $\boxed{V = 80.000}$

Resposta. O preço de venda da mercadoria é de R$80.000,00.

2. Abatimentos e aumentos sucessivos

Na compra e venda de mercadorias tira-se uma fatura das mesmas. Essa fatura é a relação que acompanha a remessa de mercadorias expedidas, com a designação de quantidades, marcas, pesos, valores unitários e totais de cada mercadoria, percentuais de descontos, impostos, etc.

Muitas vezes são realizados descontos ou acréscimos sucessivos nessas faturas, decorrentes de ofertas, pagamentos à vista, etc.(para descontos) e de multas, impostos, etc.(para acréscimos).

2.1. Abatimentos sucessivos

Uma empresa distribuidora pode oferecer abatimentos sucessivos sobre o valor da fatura.

Para calcularmos o valor líquido da fatura podemos calcular os líquidos parciais correspondentes aos abatimentos sucessivos, respeitando a ordem das taxas, até obtermos o líquido final ou, aplicarmos a fórmula desenvolvida abaixo.

Desenvolvimento da fórmula do "Valor Líquido".

Determinemos que:

a = abatimento

PV = valor inicial da fatura

i = taxa de abatimento

L = valor líquido da fatura

Se $a_1 = PV \times i_1$ logo, $L_1 = PV - a_1$ consequentemente,

$a_2 = L_1 \times i_2$ e $L_2 = L_1 - a_2$

Substituindo, temos:

$L_2 = L_1 - L_1 \times i_2$ $L_2 = L_1 (1 - i_2)$

Generalizando, temos:

$L_k = L_{k-1} (1 - i_k)$

Se atribuirmos a **k** os valores 1,2,3,4,...,k, temos:

$L_1 = L_0 (1 - i_1)$

$L_2 = L_1 (1 - i_2)$

$L_3 = L_2 (1 - i_3)$

$L_4 = L_3 (1 - i_4)$

$\vdots \quad \vdots$

$L_k = L_{k-1} (1 - i_k)$

Multiplicando as igualdades membro a membro, temos:

$L_k = L_0 (1 - i_1)(1 - i_2)(1 - i_3)(1 - i_4) \dots (1 - i_k)$

Fazendo $L_0 = PV$ e $L_k = L$, temos:

$\boxed{L = PV (! - i_1)(1 - i_2) \dots (1 - i_k)}$

Onde:

$i_1, i_2, \dots, i_k$ são as taxas sucessivas

L = valor líquido da fatura, ou seja, depois dos descontos

PV = valor inicial da fatura

Exemplo.

Uma fatura de R$8.000,00 sofre dois abatimentos sucessivos de 10% e 8%. Qual o valor líquido a pagar?

$i_1 = 10\% = 0,1$ $i_2 = 8\% = 0,08$ $PV = 8.000$ $L = ?$

$a_1 = PV \times i_1 = 8.000 \times 0,1 = 800$ logo, $L_1 = 8.000 - 800 = 7.200$

$a_2 = L_1 \times i_2 = 7.200 \times 0,08 = 576$ logo, $L_2 = 7.200 - 576 = 6.624$

Se fizermos pela fórmula, temos:

$L = 8.000\ (1 - 0,1)\ (1 - 0,08)$

$L = 8.000\ (0,9)\ (0,92)$

$\boxed{L = 6.624}$

Resposta. O valor líquido a pagar é de R$6.624,00.

2.2. Aumentos sucessivos

Para aumentos sucessivos temos que:

No lugar do valor líquido (L) teremos o montante ou valor futuro (FV) e como são aumentos, iremos adicionar as taxas ao invés de subtraí-las como no desconto.

Logo, nossa fórmula de aumentos sucessivos será:

$\boxed{FV = PV\ (1 + i_1)\ (1 + i_2)\ ...\ (1 + i_k)}$

Exemplo.

Sobre um artigo de R$2.500,00 incide um imposto federal de 7% e um estadual de 3,5%. Determine o preço final desse artigo.

$i_1 = 7\% = 0,07$ $i_2 = 3,5\% = 0,035$

$FV = 2.500\ (1 + 0,07)\ (1 + 0,035)$

$FV = 2.500\ (1,07)\ (1,035)$

$\boxed{FV = 2.768,62}$

3. Exercícios

3.1 - Operações sobre mercadorias

1 – Uma televisão foi revendida por R$859,00, dando um prejuízo de 20% sobre o custo. Quanto havia custado?

2 – Quanto por cento sobre o custo se perdeu, ao se vender por R$238,00 um objeto que custou R$280,00?

3 – Vendendo um imóvel por R$150.000,00 tive um prejuízo de 17% sobre o preço de venda. Por quanto comprei?

4 – Calcule o preço de venda de um objeto que comprei por R$540,00 tendo perdido 20% do preço de venda?

5 – Vendi uma loja por R$32.000,00. Se tivesse vendido por mais R$1.999,00, meu lucro seria de 40% sobre o preço da nova venda. Qual foi o meu lucro?

6 – Certa mercadoria foi vendida por R$3.232,00 com um prejuízo de 8,7% sobre o preço de compra. Por quanto deveria ser vendida, para dar lucro de 12% sobre o preço de custo?

3.2 - Abatimentos e aumentos sucessivos

1 – Calcule o líquido de uma duplicata no valor de R$8.600,00 que sofreu a redução de 15% sobre este valor e, em seguida, outro abatimento de 8% sobre o líquido da primeira redução.

2 – Uma pessoa comprou um automóvel de R$15.800,00 (preço de tabela) com desconto de 2,5%. No dia seguinte, vendeu o automóvel pelo valor de 2% acima do preço de tabela. Qual foi a taxa percentual de lucro total dessa pessoa?

3 – Qual será o valor líquido de uma fatura de R$36.000,00 que recebe descontos sucessivos de 2%, 5% e 4% ?

Juros

2.1. Conceito

Juro é a remuneração dada a qualquer título de capitalização, ou seja, pelo uso do capital empregado, ou pela aplicação do capital em atividades produtivas, durante um certo período e à uma determinada taxa.

Esse intervalo de tempo usado na aplicação do capital à uma referida taxa, é denominado período financeiro ou período de capitalização.

2.2. Unidade de medida

Os juros são fixados através de uma taxa percentual, que sempre se refere à uma unidade de tempo: ano, semestre, trimestre, mês, dia, etc..

2.3. Taxa de juros

A taxa de juros mede o custo da unidade de capital, no período a que se refere. Essa taxa é fixada no mercado de capitais pela variação entre as forças que regem a oferta de fundos e a procura de créditos.

É a razão entre os juros pagos ou recebidos e o capital aplicado, num determinado período de tempo.

2.4. Diagrama de capital no tempo

Os problemas financeiros dependem basicamente do fluxo (entradas e saídas) de dinheiro no tempo. Esse fluxo é mais conhecido na prática como fluxo de caixa e é geralmente representado por um diagrama convencional de setor.

QUESTÕES PARA DISCUSSÃO INICIAL DO CAPÍTULO

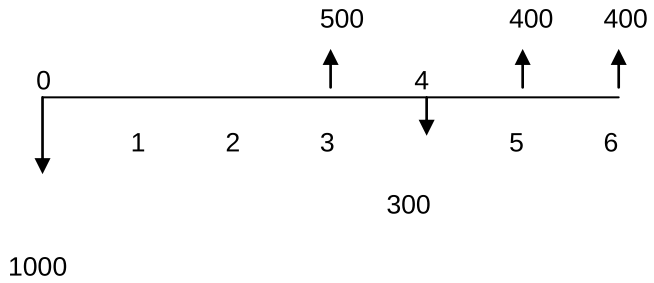
Juros Simples e Compostos: quando se usa qual?

O que é o juro?

CONCEITOS A SEREM DEFINIDOS NESSE CAPÍTULO

Juros Simples

Juros Compostos



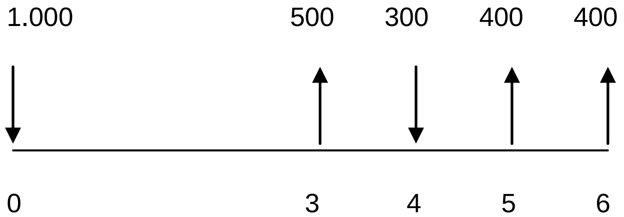
Essa representação é muito útil para situações em que é necessário visualizar o que está ocorrendo, quando temos entradas e saídas de capital no tempo.

Convenções empregadas:

- ✓ reta horizontal --- escala de tempo com progressão da esquerda para a direita;
- ✓ períodos de tempo --- representados em intervalos contíguos, de modo que cada número representa períodos acumulados;
- ✓ flechas --- a) para baixo --- saída ou aplicação de dinheiro (ou valor negativo)

  b) para cima --- entrada ou recebimento de dinheiro (ou valor positivo)

O diagrama anterior também pode ser representado também dos seguintes modos:



2.5. Juros Simples

Os juros são classificados em simples e compostos, dependendo do processo de cálculo utilizado. Juros simples são aqueles calculados somente sobre o capital inicial.

2.5.1. Cálculo do juro simples (comercial)

Quando o regime é de juros simples , a remuneração pelo capital inicial aplicado (também chamado de principal ou ainda, valor presente) é diretamente proporcional ao seu valor (capital) e ao tempo de aplicação. O fator de proporcionalidade é a taxa de juros, sendo que varia linearmente ao longo do tempo(1% ao dia é igual a 30% ao mês, que é igual a 360% ao ano, etc.).

PV – capital inicial ou principal ou valor presente (PV = Present Value)

j -- juro ou valor monetário da remuneração

n – tempo de aplicação, ou seja, o número de períodos em que esteve aplicado o capital ou valor presente (como o juro simples é dito comercial, usa-se o tempo comercial para os cálculos, ou seja, 30 dias no mês e 360 dias no ano).

i -- taxa unitária de juros(forma decimal)

Logo, se $\frac{J}{PVn} = i$ $\boxed{J = PV.i.n}$

Exemplo:

Um capital de R\$100,00 foi emprestado por 2 meses, à taxa de juros simples de 3% ao mês. Qual o valor dos juros recebidos ?

1º mês = R\$100,00 x 0,03 = R\$3,00 (R\$100,00 de capital renderá R\$3,00 de juros)

2º mês = R\$100,00 x 0,03 = R\$3,00 (R\$100,00 de capital renderá R\$3,00 de juros)

Total de juros nos dois meses = R\$3,00 + R\$3,00 = R\$ 6,00

Observe que os juros são sempre iguais; pois incidirá sempre sobre o capital inicial.

Pela fórmula:

J = PV.i.n J = 100.0,03.2 $\boxed{J = 6}$

Notações.

a) O prazo de aplicação **n** deve sempre ser expresso na mesma unidade de tempo da taxa **i** considerada.

Ex: a) 12% = 0,12 ao ano b) i = 0,05 ao semestre

n = 5 anos n = 2 anos = 4 semestres

b) Observe que dados três valores da fórmula de juros simples (j = PV.i.n), podemos obter o quarto valor, por simples transformação algébrica.

$$J = PVin \rightarrow PV = \frac{J}{in}$$

$$J = PVin \rightarrow i = \frac{J}{PVn}$$

$$J = PVin \rightarrow n = \frac{J}{PVi}$$

ou ainda, $\boxed{J = FV - PV}$

2.5.2. Cálculo do juro exato

Denomina-se juro exato aquele que é obtido quando o período **<u>n</u>** está expresso em <u>dias</u> e quando é adotada a convenção de ano civil (365 dias).

$$J_k = \frac{i}{365} \qquad \boxed{J = \frac{PVin}{365}}$$

<u>Exemplo</u>.

Determine o juro exato de um capital de R$10.000,00 que é aplicado por 40 dias, à taxa de 36% ao ano.

$$J_e = \frac{10.000x0.36x40}{365} \qquad \boxed{J_e = 394,52}$$

<u>Resposta.</u> O juro exato é de R$394,52

<u>Obs</u>. Se o juro fosse comercial ficaria assim:

$$J_c = \frac{10.000x0.36x40}{360}$$

$\boxed{J_c = 400{,}00}$

Nota. Nas mesmas condições de aplicação o juro comercial é maior que o juro exato.

$$\boxed{J_c > J_e}$$

Notações.

a) Obtemos o juro exato usando o número exato de dias (365 dias = ano civil ou 366 dias = ano bissexto).

b) Ano bissexto: Um ano é bissexto quando o seu número é divisível por 4(um número é divisível por 4, quando seus dois últimos algarismos são 00 ou formam um número divisível por 4).

Ex: 3.700 ou 3.732

2.6.1.3. Períodos não inteiros

Podem ocorrer situações em que o prazo de aplicação não seja um número inteiro de períodos a que se refere a taxa dada, sendo então necessário se considerar frações de períodos, para que não se cometa erro no valor final.

Exemplo:

Qual é o juro e qual é o valor futuro de um capital de R$45.000,00 aplicado à taxa de juro simples de 18% ao semestre, pelo prazo de 5 anos e 9 meses?

1ª solução:

Transforma-se o tempo em semestre:

5 anos e 9 meses = 69 meses que dividido por 6 (um semestre tem 6 meses) dará um período de 11,5 semestres.

Logo,

n = 11,5 semestres

i = 18% ao semestre = 0,18

PV = 45.000

a) J = ? J = PV.i.n J = 45.000 x 0,18 x 11,5 J = 93.150

b) FV = ? FV = PV + J FV = 45.000 + 93.150 $\boxed{FV = 138.150}$

2ª solução:

Transformar o período e a taxa em meses.

n = 5 a . e 9 m. = 69 meses

i = 18% a . s. = $\frac{18}{6} = 3\%$ a . m.

a) J = PV.i.n J = 45.000 x 0,03 x 69 J = 93.150

b) FV = PV + J FV = 45.000 + 93.150 $\boxed{\text{FV = 138.150}}$

3ª solução:

A solução pode ser obtida em duas etapas:

a) Calcula-se o juro relativo à parte inteira.

b) Calcula-se o juro relativo à parte fracionária, determinando primeiramente a taxa proporcional a este período.

O juro total será a soma do juro referente à parte inteira com o juro da parte fracionária.

O valor futuro ou montante será a soma do capital com o juro total.

5 anos = 10 semestres

9 meses = 1 semestre e 3 meses

5 anos e 9 meses = 11 semestres e 3 meses

(1) Cálculo do juro semestral. J_1 = 45.000 x 0,18 x 11 = 89.100

(2) Cálculo da taxa proporcional ao trimestre e do juro trimestral.

1 semestre = 2 trimestres

$i_k = \frac{i}{k}$ $i_k = \frac{0{,}18}{2}$ $i_k = 0{,}09$

J_2 = 45.000 x 0,09 x 1s = 4.050

(3) Cálculo do juro total. $J_t = J_1 + J_2$ J_t = 89.100+4.050 = 93.150

(4) Cálculo do valor futuro. FV = PV + J FV= 45.000 + 93.150 = $\boxed{138.150}$

2.5.3. Determinação do nº exato de dias entre duas datas

Obtemos o nº exato de dias através das seguintes formas:

1 – Pela contagem direta dos dias em um calendário, incluindo apenas um dos dias extremos.

2 – Considerando o número exato de dias de cada mês.

a) 31 dias = janeiro, março, maio, julho, agosto, outubro e dezembro.
b) 30 dias = abril, junho, setembro e novembro.
c) 28 dias = fevereiro (29 se o ano for bissexto)

Nota. Se o ano for bissexto, somamos um ao número de dias.

3 – Pelo uso da tabela para contagem de dias (ver tabela em anexo).

Exemplos:

1 - Determine o número exato de dias, de 20 de outubro a 15 de março do ano seguinte.

20 de outubro a 20 de novembro = 31 dias

20 de novembro a 20 de dezembro = 30 dias

20 de dezembro a 20 de janeiro = 31 dias

20 de janeiro a 20 de fevereiro = 31 dias

20 de fevereiro a 28 de fevereiro = 8 dias

28 de fevereiro a 15 de março = 15 dias

total = 146 dias

Pela tabela de dias:

a) Calculamos o número exato de 20 de outubro a 31 de dezembro 365 – 293 = =72 dias

c) Somamos 72 dias com os 74 dias que vão de 1º de janeiro até 15 de março

72 + 74 = 146 dias

Nota: se o ano é bissexto somamos 1 (um) ao nº de dias. No caso: 146 + 1 = 147

2 - Um empréstimo de R$13.580,00 foi realizado em 20/08 e pago em 29/12 do mesmo ano. Sabendo-se que a taxa foi de 37,8% ao ano, determine o juro total a ser pago.

Tabela

29/12 = 363 dias

20/08 = 232 dias

(363 - 232) = 131 dias

PV = 13.580

i = 37,8%a . a . = 0,378 a .a . $= \frac{0,378}{360}$ = 0,00105

J = PV.i.n

J = 13.580 x 0,00105 x 131

$\boxed{J = 1.867,93}$

Resposta. O juro a ser pago é de R$ 1.867,93

2.6. Juros compostos

Juros compostos são aqueles calculados sobre o montante ou valor futuro relativo ao período anterior, a partir do segundo período financeiro. Portanto, concluímos que o montante no regime de juros compostos é igual ao de juros simples no 1º período e maior do que no regime de juros simples, a partir do segundo período.

A diferença entre os dois regimes pode ser facilmente verificada através do exemplo seguinte, pois o juro simples é linear e o juro composto é exponencial.

Um capital de R$25.800,00 aplicados a 11,8% ao ano nos regimes de juros simples e compostos, por um período de 4 anos, que juros renderão?

PV = 25.800 n = 4 a . i = 11,8% = 0,118 a .a .

a) Juros simples

J = Pvin J = 25.800 x 0,118 x 4 $\boxed{J = 12.177,60}$

b) juros compostos

$J = PV[(1+i)^n - 1]$ $J = 25.800[(1,118)^4 - 1]$ J = 25.800[1,56231 - 1]

J = 25.800[0,56231] $\boxed{J = 14.507,60}$

2.6.1 - Cálculo do valor futuro ou montante

$FV_1 = PV_0\ (1+i) = 20.000(1{,}125) = 22.500$

$FV_2 = FV_1\ (1+i) = 22.500(1{,}125) = 25.312{,}50$

$FV_3 = FV_2\ (1+i) = 25.312{,}50(1{,}125) = 28.476{,}56$

Se,

$FV_1 = PV_0(1+i)$

$FV_2 = PV_1(1+i)$ onde $PV_1 = FV1$ então,

$FV_2 = PV_0(1+i).(1+i) = PV_0\ (1+i)^2$

$FV_3 = PV_0\ (1+i)^2.(1+i) = PV_0\ (1+i)^3$

$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$

$FV_n = PV_0\ (1+i)^{n-1}(1+i) = PV_0\ (1+i)^n$

Portanto,

$$\boxed{FV_n = PV(1+i)^n}$$

2.6.2. Cálculo do valor presente

Se $FV_n = PV\ (1+i)^n$ então,

$$\boxed{PV = \frac{FV_n}{(1+i)^n} \quad \text{ou} \quad PV = FV_n\ (1+i)^{-n}}$$

2.6.3. Cálculo do juro

Como juro é a diferença entre o valor futuro e o valor presente, temos:

$J_1 = FV_1 - PV = 22.500 - 20.000 = 2.500$

$J_2 = FV_2 - PV = 25.312{,}5 - 20.000 = 5.312{,}50$

$J_3 = FV_3 - PV = 28.476{,}56 - 20.000 = 8.476{,}56$

⋮ ⋮ ⋮

$J_n = FV_n - PV$

Substituindo FV_n por $PV(1+i)^n$, temos,

$J_n = PV(1+i)^n - PV$

Colocando PV em evidência,

$$\boxed{J_n = PV\,[\,(1+i)^n - 1]}$$

Exemplo

Um empréstimo de R$4.500,00 foi feito para um prazo de 7 meses, à taxa de 2,3% ao mês. Calcule o valor futuro , os juros e, novamente o valor presente dessa aplicação.

PV = 4.500 n = 7 m . i = 2,3% = 0,023 a .m .

a) Valor futuro

$FV = PV\,(1+i)^n$

$FV = 4.500\,(1+0{,}023)^7$

$FV = 4.500\,(1{,}023)^7$

$FV = 4.500\,(1{,}17254)$

$\boxed{FV = 5.276{,}45}$

Pela HP - 12C

4.500 CHS PV

2,3 i

7 n

FV = ?

b) Juros

$J = PV\,[(1+i)^n - 1]$

$J = 4.500\,[(1{,}023)^7 - 1]$

$J = 4.500\,[\,1{,}17254 - 1]$

$J = 4.500\,[0{,}17254]$

$\boxed{J = 776{,}45}$

c) Valor presente

PV = $\dfrac{FV}{(1+i)^n}$

PV = $\dfrac{5.276,45}{(1,023)^7} = \dfrac{5.276,45}{1,17254} = 4.500$ conforme foi demonstrado anteriormente.

Pela HP - 12C

5.276,45 CHS FV

2,3 i

7 n

PV = ?

2.7. Convenção linear e exponencial para períodos não inteiros

Nem sempre o prazo das operações financeiras é um número inteiro, com relação à taxa. Adota-se, então duas convenções para se trabalhar com estes períodos não inteiros.

2.7.1. Convenção linear

É aquela que admite a formação de juros compostos para a parte inteira do prazo e juros simples para a parte fracionária.

$$\boxed{FV = PV(1+i)^n(1+i.\frac{m}{k})}$$

onde $\dfrac{m}{k}$ corresponde ao período fracionário.

<u>Exemplo.</u>

Seja um capital de R$100.000,00 emprestado à taxa de 18% ao ano, pelo prazo de 4 anos e 9 meses. Calcule o montante desse empréstimo pela convenção linear.

PV = 100.000 n = 4a . m = 9m. k = 12 i = 18%= 0,18 a .a .

$$FV = PV(1+i)^n(1+i.\frac{m}{k})$$

$FV = 100.000(1{,}18)^4(1+0{,}18.\frac{9}{12})$

$FV = 100.000(1{,}938778)(1{,}135)$

$\boxed{FV = 220.051{,}30}$

Resposta. Pela convenção linear, o valor futuro desse empréstimo é de R$220.051,30

2.7.2. Convenção exponencial

A convenção exponencial adota o mesmo regime de capitalização para todo o período (parte inteira e parte fracionária).

Seja, n = período inteiro

$\frac{m}{k}$ = período fracionário

Logo,

$$\boxed{FV = PV(1+i)^{n + m/k}}$$

Exemplo.

Usando o mesmo exemplo da convenção linear, temos:

$FV = 100.000(1{,}18)^{4 + 9/12}$

$FV = 100.000\ (1{,}18)^{4 + 0{,}75}$

$FV = 100.000\ (1{,}18)^{4{,}75}$

$FV = 100.000\ (2{,}195025)$

$\boxed{FV = 219.502{,}50}$

Pela HP - 12C

100.000 CHS PV

18 i

4,75 n

FV = ?

ou, pela equivalência de taxas:

$1+i_a = (1+i_m)^{12}$

$1{,}18 = (1+i_m)^{12}$

$\sqrt[12]{1{,}18} = 1+i_m$

$1{,}013888 = 1+i_m$

Como são 4 anos e 9 meses, temos então 57 meses. Logo, se

$FV = PV\,(1+i)^n$

$FV = 100.000(1{,}013888)^{57}$

$FV = 100.000(2{,}195025)$

$\boxed{FV = 219.502{,}50}$

3. Exercícios

Juros

1 - Transforme em taxa percentual:

a) 0,009 b) 21,365 c) 8 d) 2,11 e) 0,18 f) 0,05

2 - Transforme em taxa unitária:

a) 6,5% b) $5\frac{1}{8}\%$ c) 13% d) 0,2% e) 215,5% f) 4.568%

Juros simples

1 - Um capital de R$ 740,00 aplicado por um ano e meio, rendeu R$ 2.264,40 de juros simples. Encontre a taxa mensal correspondente a essa aplicação.

2 - Tomou-se emprestada a quantia de R$ 3.250,00 pelo prazo de 5 anos, à taxa de 30% ao ano. Qual será o valor dos juros a serem pagos?

3 – Quantos dias, um capital de R$ 7.500,00 , aplicado a 30% ao bimestre, leva para produzir R$ 14.812,50 de juros simples?

4 – A importância de R$ 860,00 foi aplicada em 10 de janeiro de 2000, à taxa de 54,75% ao ano e produziu em seu vencimento, juros simples de R$ 96,75. Em que data ocorreu o vencimento da aplicação? (Use ano civil, ou seja, 365 ou 366 dias).

5 – Robson pediu a uma financeira um empréstimo de R$ 3.580,00 por 25 dias. A financeira concordou em emprestar, desde que ele devolvesse R$ 4.922,50. Qual foi a taxa de juros cobrada?

6 – Uma loja vende uma TV colorida de 41 polegadas por R$ 7.250,00 a vista, ou em 5 parcelas mensais iguais de R$ 1.885,00. Qual a taxa de juros mensal que essa loja está cobrando?

7 – Apliquei 1/3 do meu capital a 18% ao mês e o restante a 22,5% ao mês. Decorridos 2 ano e 5 meses obtive R$ 8.586,90 de juros simples pelas duas aplicações. De quanto era o meu capital inicial?

8 – Num período de 13 meses, apliquei R$ 6.200,00 e obtive R$ 4.836,00 de juros simples. Determine a taxa diária de juros desta aplicação.

9 – A quantia de R$ 1.780,00 foi aplicada à taxa de 42% ao ano, pelo prazo de 150 dias. Qual será o juro dessa aplicação, se for considerado:

a) juro comercial? b) juro exato?

10– Um capital de R$ 19.940,00 foi aplicado à taxa de 33% ao ano, no período compreendido entre 12/05 a 23/09 do mesmo ano. Qual o juro recebido?:

11 – Verificar se as taxas de 18% ao ano e 3% ao bimestre são proporcionais.

12 – A quantia de R$ 9.874,00 empregada a 180% ao ano, durante ***n*** meses, produziu R$ 10.367,70 de juros simples. Calcule ***n***.

13 – Calcule a taxa mensal proporcional a 30% ao ano.

14 – Calcule a taxa mensal proporcional a 0,08% ao dia.

15 – Calcule a taxa anual proporcional a 8% ao trimestre.

16 – Que importância deve ser aplicada durante 7 meses, à taxa de 3,5% ao mês, para se obter R$ 2.120,72 de juros?

17 – Qual o valor do capital que, aplicado durante dois anos e cinco meses, à taxa de 1,85% ao mês, rendeu R$ 81.869,90 de juros?

18 – Calcule o juro e o montante correspondente ao capital de R$ 8.000,00 ,em regime de juro simples, durante 1 ano e 3 meses, à taxa de 36% ao ano.

19 – Um capital de R$ 14.000,00 ,aplicado pelo prazo de 9 meses, rendeu a importância de R$ 3.528,00. Determine a taxa anual correspondente.

20 – A que taxa mensal deve ser aplicada a importância de R$ 66.000,00 para que , em 3 meses e 10 dias ,acarrete um juro de R$ 11.000,00?

21 – Determine o período financeiro relativo à aplicação do capital de R$ 125.880,00 que, à taxa de 0,8% ao mês, rendeu R$ 9.063,36.

22 – Durante quanto tempo deverá ser aplicada a importância de R$ 46.760,00 , à taxa de 25,2% ao ano, para se obter R$ 27.036,63 de juro?

23 - Um investidor aplica R$ 98.200,00 num prazo de 14 meses. Sabendo que irá precisar de algum dinheiro durante esse prazo, resolve fazer retiradas mensais do juro, deixando o principal para o final do prazo da aplicação. Qual deverá ser o valor de cada retirada, se o dinheiro foi aplicado à uma taxa de 7,8% ao mês?

24 – Um capital de R$ 10.500,00 rendeu R$ 1.225,00 de juro simples. Sabendo-se que a taxa de juro contratada foi de 42% ao ano e que a aplicação foi feita no dia 20/01/88 , qual foi a data do vencimento?

25– Um investidor aplica 2/5 do seu capital a 4% ao mês e o restante a 45% ao ano. Decorridos 4 anos e 5 meses, recebe um total de R$ 798.000,00 de juro. Calcular o seu capital inicial.

26 – Uma pessoa aplica R$ 33.500,00 à 38,4% ao ano. Algum tempo depois, a taxa é aumentada para 4,5% ao mês. Determine o prazo em que vigorou a taxa de 4,5% ao mês, sabendo-se que em 10 meses os juros totalizaram R$ 12.462,00.

27 – Uma pessoa consegue um empréstimo de R$ 56.300,00 e promete pagar ao credor, após 10 meses, a quantia de R$ 79.383,00. Determine a taxa anual cobrada.

28 – Uma imobiliária vende uma loja por R$ 25.350,00 à vista. A prazo, vende por R$31.445,25, sendo R$ 6.000,00 de entrada e o restante após 9 meses. Qual a taxa mensal de juros cobrada?

29 - Um investidor aplicou R$ 240.000,00 à uma taxa mensal de 26,1% ao mês, no dia 18/08/2002. Em que dia o investidor pode retirar o montante de R$ 288.024,00?

30 – Depositei certa importância a 8% ao ano. No final do 2º ano, somei os juros ao capital e depositei a soma a 12% ao ano, recebendo no fim de quatro anos os juros de R$ 189.312,00. Qual foi a quantia inicialmente depositada?

31 – Calcular a taxa trimestral de juros, proporcional às seguintes taxas:

a) 24% ao ano b) 36% ao biênio c) 6% ao semestre

32 – Determinar a taxa anual de juros, proporcional às seguintes taxas:

a) 3% ao trimestre b) 27% ao quadrimestre c) 5% ao mês

33 – Calcular o juro simples, referente a um capital de R$ 1.000,00 , aplicado conforme hipóteses a seguir:

Taxas de juros	Prazo
a) 17% ao ano	4 anos
b) 26,8% ao ano	30 meses
c) 30,8% ao ano	5 anos e meio
d) 38% ao ano	4 anos e 8 meses

34 – Quanto tempo deve ficar aplicado um capital, para que as hipóteses abaixo sejam verdadeiras?

Valor presente	Valor futuro	Taxa de juros
a) R$ 800,00	R$ 832,00	16% ao ano
b) R$ 1.200,00	R$ 2.366,00	2,2% ao mês

35 – Se um capital de R$ 7.300,00 rendeu R$ 9.581,25 de juros em 5 anos, qual é a taxa de juros quadrimestral equivalente?

36 – Uma pessoa aplicou R$ 9.800,00 no mercado financeiro e após 3 anos recebeu o montante de R$ 16.856,00. Que taxa equivalente semestral foi utilizada?

37– Um capital aplicado em 12/03/99 e resgatado em 23/07/99 à uma taxa de 57,6% ao ano, rendeu R$ 2.234,40 de juro. De quanto era o capital inicial?

38 – Apliquei 2/3 de um capital a 6% ao mês e o restante a 0,25% ao dia. De quanto era o meu capital inicial, se após 3 anos e 7 meses, obtive R$ 90.837,50 de juros simples, pelas duas aplicações?

39 – Um empréstimo de R$ 18.540,00 foi realizado em 12/04 e pago em 15/10 do mesmo ano. Sabendo-se que a taxa foi de 58,5% ao ano, determine o juro total a ser pago.

Juros compostos

1 – A que taxa de juros, um capital aplicado pode ser resgatado, no final de 23 meses, pelo triplo do seu valor?

2 – Em quanto tempo um capital pode produzir juros iguais a 75% do seu valor, se aplicado a 6,25% ao mês?

3 – Determinar o montante, no final de 9 meses, resultante da aplicação de um capital de R$ 99.580,00 à taxa de 4,875% ao mês.

4 – Uma pessoa empresta R$ 168.600,00 hoje para receber R$ 1.069.123,07 no final de dois anos. Calcular as taxas mensal e anual desse empréstimo.

5 – Sabendo-se que a taxa quadrimestral de juros cobrada por uma instituição financeira é de 13,5% , determinar qual o prazo em que um empréstimo de R$42.000,00 será resgatado por R$ 69.700,00.

6 – Quanto devo aplicar hoje, à taxa de 63,42% ao ano, para ter R$ 2.000.000,00 no final de 15 meses?

7 – Uma indústria de calçados mantém um empréstimo de R$ 980.000,00 que será liquidado, de uma só vez, no final de três anos. Sabendo-se que a taxa de juros é de 32% ao semestre, calcular o valor pelo qual esse empréstimo deverá ser quitado.

8 – Em que prazo uma aplicação de R$ 125.480,00 à taxa de 3,75% ao mês, gera um resgate de R$ 202.497,60?

9 – A aplicação de certo capital, à taxa de 82,425% ao ano, gerou um montante de R$ 948.500,00 no final de 1 ano e 5 meses. Calcular o valor dos juros.

10 – Qual é mais vantajoso: aplicar R$ 13.000,00 por 3 anos, a juros compostos de 3% ao mês, ou aplicar esse mesmo valor, pelo mesmo prazo a juros simples de 5% ao mês?

11 – No fim de quanto tempo um capital, aplicado à taxa de 3,8% ao mês, triplica o seu valor:

a) no regime de capitalização composta;
b) no regime de capitalização simples.

12 – Qual o montante produzido pela aplicação de R$ 580.000,00, à taxa de 175% ao ano, pelo prazo de 213 dias?

13 – Qual o valor do capital, que aplicado à taxa de 19,5% ao trimestre durante 185 dias, produziu um montante de R$ 8.000,00?

14 – A aplicação de R$ 485.650,00 proporcionou um resgate de R$ 741.176,64 no final de 6 meses. Determinar as taxas mensal e anual dessa operação.

15 – Certa aplicação rende 0,225% ao dia. Em que prazo o investidor poderá receber o dobro da sua aplicação?

Convenção linear e convenção exponencial

1 - Um capital de R$ 60.000,00 é emprestado à taxa de juros compostos de 86% ao ano, por 5 anos e 4 meses. Tendo por base a capitalização anual, qual será o valor futuro:
a) por convenção linear;
b) por convenção exponencial?

2 - Considerando as convenções linear e exponencial, calcule o valor futuro de um capital de R$ 26.500,00 aplicado por 75 dias, à taxa de 4% ao mês.

3 - Uma pessoa investiu R$ 19.800,00 à taxa de 42% ao ano e após certo tempo recebeu um montante de R$ 71.623,62. Quanto tempo o capital ficou aplicado? Considerar a convenção exponencial.

Equivalência de capitais

Resolver os dois primeiros exercícios abaixo, nos regimes de capitalização simples e composta. Os outros, apenas no regime de capitalização composta.

1 – Uma pessoa deve em um banco dois títulos: o primeiro no valor de R$ 2.700,00 para pagamento imediato e o segundo, no valor de R$ 9.580,00 para pagamento em 10 meses. Possuindo recursos para quitar sua dívida em 5 meses, determinar o valor desse pagamento único, considerando a taxa de 78% ao ano e a data atual.

2 – Um apartamento deve ser vendido à vista por R$ 48.000,00. A prazo, o proprietário propõe 3 pagamentos bimestrais iguais, sendo o primeiro em 60 dias. Se a taxa de juros é de 14,6% ao bimestre, qual seria então o valor dos pagamentos?

3 – Um vendedor que possui uma dívida de R$ 5.000,00 para ser paga daqui a dois meses, propõe a substituição dessa dívida pelo pagamento imediato de R$ 2.100,00 mais outro de R$ 3.500,00. Em quanto tempo o novo pagamento será efetuado, se for usada a taxa de 3,4% ao mês e a data focal zero?

4 – Dois títulos no valor de R$ 7.845,60 para 8 meses e R$ 10.950,80 para 11 meses vão ser substituídos por outros dois, no valor de R$ 15.790,00 para 15 meses e o segundo para 21 meses. Encontre o valor do segundo título, sabendo-se que a taxa usada foi de 4,5% ao mês e a data focal 15?

5 – Uma pessoa propõe a substituição de suas promissórias de R$ 1.500,00 e R$2.780,00, vencíveis respectivamente em 3 e 5 meses, por três outras, sendo as duas primeiras respectivamente de R$ 1.980,00 e R$ 1.300,00 , com prazos de 7, 8 e 12 meses. Supondo-se que a data focal seja a atual, e que a taxa de desconto aplicada nessa operação seja de 2,8% a. m., qual o valor da 3º prestação?

6 – Dois títulos de R$ 100,00 e R$ 300,00 vencíveis em 30 e 60 dias respectivamente, foram substituídos por um outro vencível em 120 dias. Tomando-se a data 4 como focal, e a taxa de desconto de 2% a . m., qual o valor do novo título?

7 – O pagamento de uma motocicleta pode ser feito em três parcelas mensais de R$ 5.000,00 , R$ 6.000,00 e R$ 9.000,00 vencendo, respectivamente em 1, 2 e 3 meses. O gerente da loja, com a finalidade de aumentar as suas vendas, anuncia que quem quiser poderá dar uma entrada de R$ 6.000,00 e pagar o restante daí a 3 meses. Qual será o valor desse último pagamento, se a taxa for de 33% ao ano e a data focal for a da entrada?

8 – Quatro pagamentos mensais de R$ 100,00, vencendo o primeiro daqui a um mês, são substituídos por dois pagamentos iguais de R$ 202,38 sendo o primeiro para daqui a dois meses. Se adotarmos a data focal zero e a taxa de desconto de 30% a . a . , qual será a data da última parcela?

9 – Uma pessoa planejou comprar uma blusa e após 30 dias, um terno, de valores R$ 100,00 e R$ 180,00 respectivamente. O gerente da loja sugere que, embora a compra seja feita hoje e a seguinte após um mês, o cliente pague em 5 parcelas iguais, vencendo a primeira 3 meses após a compra do terno. Considerando a taxa de juro de 30% ao ano e a data focal a do vencimento da 5ª parcela, qual será o valor das parcelas?

10 – Um cliente planeja substituir seus três títulos de R$ 1.000,00 , R$ 2.000,00 e R$3.000,00 com prazos de vencimento para 30, 60 e 90 dias respectivamente, por um único título vencível em 180 dias. Qual será o valor desse título, uma vez que a taxa é de 36% ao ano e a data focal é a do vencimento do novo título?

11- Um comerciante descontou dois títulos em um banco: um de R$ 12.000,00 para 120 dias e outro de R$ 10.000,00 para 150 dias. desejando substituí-los por um título único para 90 dias, calcule o valor nominal desse título na data 3, sabendo-se que a taxa de 42%a .a . de desconto permanece inalterada.

12- Um micro empresário tem três títulos , de R$ 2.000,00 , R$ 10.000,00 e R$8.000,00 descontados em um banco e com vencimentos para 90, 150 e 180 dias respectivamente. Desejando substituí-los por dois outros de valores nominais iguais para 60 e 120 dias, calcule o valor comum na data zero, supondo-se que a taxa seja de 3,2% ao mês para as transações desse tipo.

13 – Tenho três títulos, cujos valores são de R$ 15.000,00 , R$ 20.000,00 e R$25.000,00 , com vencimentos para 60, 90 e 120 dias respectivamente, que foram substituídos por dois outros de valores iguais , vencíveis em 150 e 210 dias. Calcule o valor dos novos títulos, sabendo-se que a taxa de desconto é de 3,5% a. m. e a data focal a do último pagamento a ser efetuado.

14 – Sendo de 3% ao mês a taxa de desconto, dentro de quantos dias deverá vencer um título de R$ 2.000,00 a fim de que seja equivalente a um outro de R$1.600,00 vencível em 60 dias?

15 – Um comerciante contraiu uma dívida de R$ 37.300,00 para ser paga com dois títulos de mesmo valor, vencíveis em 60 e 90 dias, respectivamente. Sabendo-se que a taxa de desconto é de 2,7% ao mês, calcule qual será o valor nominal de cada título, na data 30 dias.

Desconto

3. Desconto

Todo título de crédito tem uma data de vencimento, porém o devedor pode resgatá-lo antecipadamente, obtendo com isso um abatimento denominado desconto. Portanto, desconto é a denominação dada a um abatimento que se faz quando um título de crédito é resgatado antes do seu vencimento.

Os títulos de créditos mais utilizados em situações financeiras são:

- ✓ nota promissória
- ✓ duplicata
- ✓ letra de câmbio

Com relação aos títulos de crédito, pode ocorrer:

- ✓ que o devedor efetue o pagamento antes da data predeterminada;
- ✓ que o credor necessite do dinheiro antes da data predeterminada.

Em ambos os casos há um benefício que, obtido em comum acordo, recebe o nome de desconto.

Essas operações são chamadas operações de desconto e o ato de efetuá-las chama-se descontar um título.

Observa-se ainda:

- ✓ data do vencimento -- fixado no título, para o pagamento (ou recebimento) da aplicação;
- ✓ valor nominal ou futuro – valor indicado no título, a ser pago no dia do vencimento;
- ✓ valor atual ou presente – líquido pago (ou recebido) antes do vencimento;
- ✓ prazo – número de períodos compreendidos entre aquele em que se negocia o título e o do seu vencimento.

Desconto é a quantia a ser abatida do valor futuro ou nominal, isto é, a diferença entre o valor futuro e o valor presente.

QUESTÕES PARA DISCUSSÃO INICIAL DO CAPÍTULO

CONCEITOS A SEREM DEFINIDOS NESSE CAPÍTULO

Desconto Simples

Desconto Racional

Desconto Comercial

Taxa média

Prazo médio

O desconto pode ser comercial e racional.

3.1. Desconto simples

3.1.1. Desconto racional *(não é um desconto usado quando se está trabalhando com capitalização simples).*

Chamamos de desconto racional ou por dentro ao valor obtido pela diferença entre o valor nominal e o valor atual de um compromisso, que seja saldado **n** períodos antes do seu vencimento.

Cálculo do desconto racional

FV = valor futuro (ou montante)

PV = valor presente ou atual (ou valor descontado racional)

n = número de períodos antes do vencimento

i = taxa de desconto

d_r = valor do desconto racional

Temos que FV = PV (1+ in) logo, $PV = \frac{FV}{1+in}$ (valor presente ou atual). Temos também que $d_r = FV - PV$, logo:

$$d_r = FV - \frac{FV}{1+in} \quad \text{(m.m.c. = 1 + in), então:}$$

$$d_r = \frac{FV(1+in) - FV}{1+in}$$

$$d_r = \frac{FV + FVin - FV}{1+in} \qquad \text{Logo ,} \quad \boxed{d_r = \frac{FVin}{1+in}}$$

Cálculo do valor descontado racional (V_r)

$V_r = FV - d_r$ como $d_r = \frac{FVin}{1+in}$ temos, $V_r = FV - \frac{FVin}{1+in}$

$$V_r = \frac{FV(1+in) - FVin}{1+in} \qquad V_r = \frac{FV + FVin - FVin}{1+in}$$

$$\boxed{V_r = \frac{FV}{1+in}}$$

Observe que o valor descontado racional, no juro simples, é o próprio valor presente ou atual.

Então, se V_r = PV, podemos usar

$$\boxed{PV = \frac{FV}{1+in}}$$

Exemplo:

Um título de R$8.500,00 vai ser descontado à taxa de 2,8% ao mês. Faltando 67 dias para o vencimento do título, determine o valor do desconto racional.

$d_r = \dfrac{FVin}{1+in}$ $\quad d_r = \dfrac{8.500x\dfrac{0,028}{30}x67}{1+\dfrac{0,028}{30}x67}$ $\quad d_r = \dfrac{531,53333}{1,06253}$ $\quad \boxed{d_r = 500,25}$

Resp.: O desconto racional será de R$ 500,25

Aproveite o exercício anterior e calcule o valor descontado racional

a) $PV = FV - d_r$ ou b) $PV = \dfrac{FV}{1+in}$ $\quad PV = \dfrac{8.500}{1+0,028x\dfrac{67}{30}}$

$PV = 8.500 - 500,25$ $\quad PV = \dfrac{8.500}{1,06253}$ $\quad \boxed{PV = 7.999,75}$

$\boxed{PV = 7.999,75}$

Resp.: o valor descontado racional será de R$ 7.999,75

3.1.2. Desconto comercial *(também chamado de desconto bancário, é o mais usado em capitalização simples)*

Chamamos de desconto comercial ou “por fora” ao valor que se obtém pelo cálculo do juro simples sobre o valor nominal ou valor futuro do compromisso que seja saldado n períodos antes do vencimento, à uma taxa i, fixada.

Obs: No cálculo de desconto simples, sempre que o mesmo não for explicitado, deve-se considerar desconto comercial.

Notações:

d_c = valor do desconto comercial

FV = valor futuro ou nominal do título

V_c = valor atual comercial ou valor descontado comercial

n = número de períodos antes do vencimento

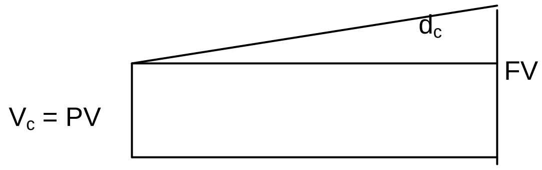
i = taxa de desconto

Por definição, temos $d_c = FV.i.n$ que é o valor do desconto comercial.

Nota. O desconto comercial simples só deve ser empregado para períodos curtos, pois para prazos longos o valor do desconto poderá ultrapassar o valor nominal do título (resultado incoerente, sem nexo).

Valor atual comercial ou valor descontado comercial ou valor presente (PV)

$V_c = FV - d_c$



Como $d_c = FV.i.n$, temos: $V_c = FV - FV.i.n$

Então: $V_c = FV\ (1\text{-}in)$	ou	$PV = FV\ (1 - in)$

Exemplo:

Um título de R$8.500,00 vai ser descontado, à taxa de 2,8% ao mês. Faltando 67 dias para o vencimento do título, determine:

- ✓ valor do desconto comercial;
- ✓ valor atual comercial.

a) $d_c = FV.i.n$ $\quad d_c = 8.500{,}00\ .\ \dfrac{0{,}028}{30}\ .\ 67$ $\quad d_c = 531{,}53$

b) $PV = FV - d_c$

$PV = 8.500 - 531{,}53$

$\boxed{PV = 7.968{,}47}$

ou

$PV = FV\ (1 - in)$

$PV = 8.500\ \left(1 - \dfrac{0{,}028}{30}\ .\ 67\right)$

$PV = 8.500\ (\ 1 - 0{,}06253\ )$

$PV = 8.500\ (\ 0{,}93747)$

$\boxed{PV = 7.968{,}47}$

Resp.: o desconto comercial será de R$ 531,53 e o valor descontado comercial será de R$ 7.968,47.

3.1.3. Desconto bancário

O desconto bancário pode ser entendido como uma extensão do desconto comercial, acrescido de um taxa administrativa pré fixada **h**, cobrada sobre o valor nominal ou futuro, além de, na maioria das vezes, cobrar o encargo proveniente do IOF (Imposto sobre Operações Financeiras), de responsabilidade do financiado. Sendo assim, a taxa bancária linear efetivamente cobrada é muito maior do que a contratada.

Notações:

V_b = valor atual ou valor descontado bancário.

d_b = desconto bancário

d_c = desconto comercial

h = taxa de despesas administrativas

FV = valor nominal ou montante

n = número de períodos antes do vencimento

i = taxa de desconto

Valor do desconto bancário

$d_b = d_c + FV.h$ Como $d_c = FV.i.n$ temos que: $d_b = FV.i.n + FV.h$

$\boxed{d_b = FV (in + h)}$

Com o IOF, temos: $\boxed{d_b = FV (in + h + IOFn)}$

Valor descontado bancário

$V_b = FV – d_b$ Como $d_b = FV (in + h)$ $V_b = FV – FV (in + h)$ $\boxed{V_b = FV [1 – (in + h)]}$ ou $\boxed{PV = FV [1 - (in + h)]}$

Exemplo:

Um título de R$ 8.500,00 foi descontado no Banco X, que cobra 1,5% como despesa administrativa. Sabendo-se que o título foi descontado 67 dias antes do seu vencimento e que a taxa corrente em desconto comercial é de 2,8% ao mês, qual o desconto bancário? Quanto recebeu o proprietário do título?

a) desconto bancário

$d_b = FV (in +h)$

$d_b = 8.500 \left(\frac{0,028}{30}.67 + 0,015\right)$

$d_b = 8.500 (0,06253 + 0,015)$

$d_b = 8.500 (0,07753)$

$\boxed{d_b = 659}$

b) valor descontado bancário

PV = FV [1 – (in +h)]

PV = 8.700 [1 – 0,07753]

PV = 8.500 (0,92247)

$\boxed{PV = 7.841}$

Resp.: o desconto bancário foi de R$ 659,00 e o valor descontado bancário foi de R$ 7.841,00.

3.1.4. Relação entre os descontos : racional e comercial.

Sabemos que: $d_r = \frac{FV.i.n}{1+in}$ e que: $d_c = FV.i.n$

Logo, podemos substituir **FV.i.n** na 1ª fórmula por **d_c**.

Então,

$$\boxed{d_r = \frac{d_c}{1+in} \qquad \text{ou} \qquad d_c = d_r\,(1+in)}$$

Exemplo.

O desconto comercial de um título descontado 67 dias antes do seu vencimento e à taxa de 2,8% ao mês é de R$ 531,53. Determinar o desconto racional.

$d_c = 531{,}53$ $\quad$ $i = 0{,}028$ a.m. $\quad$ $n = 67$ d

$d_c = d_r\,(1+in)$ $\quad$ $531{,}53 = d_r\,(1+\frac{0{,}028}{30}.67)$ $\quad$ $d_r = \frac{531{,}53}{1{,}062533}$ $\quad$ $\boxed{d_r = 500{,}25}$

Resposta – O desconto racional é de R$500,25

3.2. Desconto composto

Desconto, no regime de capitalização composta é como no simples, corresponde à quantia a ser abatida do valor nominal antes do vencimento. O valor descontado é a <u>diferença entre o valor nominal e o desconto</u>.

Utilizamos o desconto composto nas operações de longo prazo onde, o desconto simples pode ter resultados sem nexo.

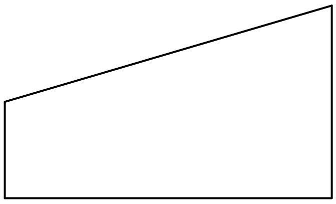
O desconto composto pode também ser comercial (praticamente não é usado no Brasil) e racional (que é o desconto usado entre nós).

3.2.1. Desconto composto racional

É o desconto obtido pela diferença entre o valor futuro ou nominal e o valor presente ou atual de um compromisso, que seja saldado n períodos antes do vencimento, à uma determinada taxa.

A) CÁLCULO DO VALOR PRESENTE OU ATUAL

FV = VALOR FUTURO OU NOMINAL DE UM COMPROMISSO (NA DATA DO VENCIMENTO)
N = NÚMERO DE PERÍODOS COMPREENDIDOS ENTRE A DATA DO DESCONTO E A DATA DO VENCIMENTO
I = TAXA DE JUROS UTILIZADA NA OPERAÇÃO DE DESCONTO
D = DESCONTO RACIONAL COMPOSTO
PV = VALOR PRESENTE OU ATUAL, OU AINDA, VALOR DESCONTADO RACIONAL (NA DATA DO DESCONTO)



Como FV = PV $(1 + i)^n$ então

$$PV = \frac{FV}{(1+i)^n} \qquad \text{ou} \qquad PV = FV\,(1 + i)^{-n}$$

onde, $(1 + i)^{-n}$ é um fator de descapitalização.

B) CÁLCULO DO DESCONTO RACIONAL COMPOSTO

Como vemos, o desconto racional composto é obtido pela diferença entre o valor nominal ou futuro e o valor atual, presente ou descontado.

d = FV - PV como: $PV = \frac{FV}{(1+i)^n}$ substituindo PV, temos:

$$d = FV - \frac{FV}{(1+i)^n}$$

Colocando FV em evidência, temos:

$$d = FV\left(1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right)$$

C) TAXA DE DESCONTO EFETIVA EXPONENCIAL

O cálculo da taxa efetiva linear não incorpora o real comportamento exponencial dos juros; enquanto que a taxa efetiva exponencial faz essa incorporação. Conseqüentemente, a forma exponencial passa a ser a mais apropriada para se calcular o verdadeiro custo da operação.

A taxa efetiva de juros é aquela apurada durante todo o prazo n, sendo formada exponencialmente através dos períodos de capitalização. Ou seja, é o processo de formação de juros pelo regime composto, ao longo dos períodos de capitalização.

$\boxed{if = (1+i)^n - 1}$ onde n = número de períodos da capitalização dos juros.

Para o regime de capitalização composta, verificamos que a taxa equivalente obtida é interpretada como taxa efetiva da operação.

4. Exercícios

DESCONTO SIMPLES

1 – Determine o desconto comercial de uma promissória de R$ 9.000,00 à taxa de 36% ao ano, resgatada 75 dias antes do vencimento.

2 – Uma duplicata foi descontada pelo valor de R$ 420.768,00 oitenta dias antes do seu vencimento, à taxa de 49% ao ano. Qual é o seu valor nominal?

3 – Ao pagar um título de R$ 4.900,00 com antecipação de 110 dias, recebo um desconto de R$ 725,00. Qual é a taxa anual de desconto?

4 – O valor atual de um título de R$ 9.650,00 é R$ 8.320,00. Sabendo-se que a taxa bancária de desconto é de 2,9% ao mês, qual o tempo de antecipação?

5 – Uma duplicata de R$ 174.800,00 foi resgatada antes do seu vencimento por R$98.560,00. Sabendo-se que a taxa de desconto foi de $2\frac{3}{4}$ % ao mês, qual o tempo de antecipação?

6 – Uma empresa possui um título cujo valor nominal é de R$ 13.550,00 com vencimento daqui a 350 dias. Quantos dias antes do vencimento deve descontá-lo, à taxa comercial de 60% ao ano, para que possa adquirir mercadoria na valor de R$10.840,00?

7 – Uma dívida de R$ 28.700,00 será saldada 7 meses antes do seu vencimento. Que desconto racional será obtido se a taxa for de 32% ao ano?

8 – Um título de valor nominal de R$ 10.000,00 com vencimento em 23/09/98 foi resgatado em 15/06/98. Qual o desconto racional se a taxa foi de 32% ao ano?

9 – Um título de valor nominal de R$ 8.900,00 foi descontado à taxa de 26% ao ano. Sabendo-se que o desconto racional foi de R$ 500,00, quanto dias antes do vencimento efetuou-se o resgate?

10 – Uma nota promissória no valor de R$ 20.000,00 em seu vencimento, foi descontada 4 meses antes de seu prazo de resgate. Sabendo-se que a taxa de desconto comercial era de 56% ao ano, qual o desconto, qual o valor descontado e qual a taxa efetivamente cobrada?

11 – Uma empresa retira de um banco um empréstimo por cinco meses, no valor de R$ 90.000,00. Se a taxa de juros for de 26% ao ano e além disso, o banco cobrar 1% a título de despesas administrativas, qual será o desconto bancário?

12 – Uma empresa desconta uma duplicata de R$ 9.350,00 com vencimento a 7 meses. Se a taxa de desconto simples for de 36% ao ano e a taxa de serviço bancário for de 1,5% sobre o valor nominal do título, qual será o valor líquido recebido e a taxa efetivamente paga pela empresa?

13 – João tem uma dívida de R$ 63.000,00 que vence em 18 meses. Propõe pagar R$ 21.000,00 no fim de 7 meses e 5 dias e R$ 15.000,00, 3 meses e 18 dias depois. Quanto João deve pagar na data de seu vencimento de forma a liquidar a dívida? Considere a taxa de 63% ao ano.

14 – No desconto de um título é obtido um desconto racional de R$ 28.000,00. Considerando uma taxa de desconto de 30% ao ano e que o título foi resgatado 4 meses antes de seu vencimento, calcular o desconto comercial obtido.

15 – Calcular o valor de resgate (nominal) e a taxa de desconto efetiva de uma nota promissória resgatada 5 meses antes do seu vencimento, considerando-se que o banco desconta a Promissória por R$ 36.500,00 aplicando a taxa de 7% ao mês.

16 – Um título de R$ 280.000,00 é descontado em um banco 7 meses antes do vencimento, à taxa comercial de 7% ao mês. O banco cobra uma taxa de 2% sobre o valor nominal como despesas administrativas e o conhecido IOF (sobre o valor nominal) de 1,5% ao ano. Qual o valor líquido recebido pelo portador do título?

17 – Um banco cobra em seus financiamentos a taxa administrativa de 1,5% e uma taxa corrente de 38% ao ano. Que financiamento por 6 meses deverá um cliente pedir a este banco, se esta pessoa necessitar de R$ 35.600,00?

18 – Um título a vencer no dia 25/10/98 foi descontado no dia 30/08/98. Se o desconto comercial fosse de R$ 2.740,00 e a taxa fosse de 57% ao ano. Qual seria o valor nominal deste título?

19 – Uma duplicata de R$ 125.000,00 com 120 dias a decorrer até o seu vencimento foi descontada por um banco, à taxa de 3,5% ao mês. Calcular o valor líquido entregue ao cliente:

a) de acordo com o conceito de desconto comercial;

b) de acordo com o conceito de desconto racional.

20 – Determinar o valor nominal ou de face de um título com 144 dias para o seu vencimento que, descontado à taxa de 58% ao ano proporcionou um valor atual de R$ 77.400,00. Sabe-se que a operação foi feita de acordo com o desconto comercial.

Taxa média e prazo médio

1 – Três capitais foram aplicados da seguinte maneira: o primeiro de R$ 5.000,00 em 20 dias a 5% ao ano, o segundo de R$ 8.750,00 a 6% ao ano, em um mês e meio e o terceiro de R$ 2.500,00 a 3% ao ano, durante 5 meses. Calcular a taxa média e o prazo médio.

2 – Três capitais são postos a juros: o primeiro de R$ 400,00 a 7% ao mês, o segundo de R$ 350,00 a 4% ao mês e o terceiro de R$ 250,00 a 3% ao mês, durante o período de um ano. Que taxa média se poderia aplicar?

3 – Quatro capitais iguais estão aplicados: o primeiro a 60% ao ano, por 40 dias; o segundo a 70% ao ano, durante 50 dias; o terceiro a 50% ao ano durante 80 dias e o quarto a 40% ao ano por 30 dias. Qual a taxa média?

4 – Três capitais são postos a juros, à taxas iguais. O primeiro de R$ 10.000,00 durante 50 dias; o segundo de R$ 15.000,00 em 30 dias e o terceiro de R$ 25.000,00 em 25 dias. Determinar a que prazo médio poderíamos aplicá-los.

5 – Cinco capitais iguais são aplicados durante um mesmo prazo, à taxas de 3,5% ao mês, 12% ao mês, 15% ao mês, 8% ao mês e 9,5 % ao mês, respectivamente. Qual a taxa média?

6- Um comerciante deve a um terceiro, os seguintes capitais, a 10% ao ano:

R$ 2.000,00 a 45 dias;

R$ 5.000,00 a 60 dias;

R$ 1.000,00 a 30 dias.

Em que tempo poderá pagar tudo de uma só vez, de modo que dessa unificação de vencimentos, não advenha prejuízo nem para o devedor nem para o credor.

7 – A dívida de certa pessoa é dada por:

R$ 15.000,00 a 60% ao ano, por 45 dias;

R$ 10.000,00 a 10% ao ano, em dois meses;

R$ 20.000,00 a 64% ao ano, em 100 dias.

Calcular a taxa média, o prazo médio e o desconto total correspondentes ao pagamento de uma só vez, dos capitais devidos.

8 – Sabendo-se que o desconto comercial de três títulos, de valores iguais a R$12.700,00 , R$ 15.500,00 e R$ 6.900,00 com prazos de respectivamente 3, 5 e 7 meses, resultou num valor líquido de R$ 28.800,00 creditado na conta do cliente. Calcular a taxa média, o prazo médio e o desconto total.

9 – Quatro capitais no valor de R$ 2.000,00, R$ 4.000,00 , R$ 6.000,00 e R$ 8.000,00 foram emprestados a juros simples, pelos prazos de 15, 4, 10 e 7 meses, respectivamente. Sabendo-se que o principal mais os encargos serão pagos nos respectivos vencimentos e que o somatório dos montantes dessas quatro operações é de R$ 30.000,00 , calcular a taxa média e o prazo médio correspondentes a essas operações.

Método Hamburguês

1 – Uma empresa no seu extrato de conta corrente referente ao 1º semestre de 96 apresentou a movimentação transcrita a seguir. Admitindo-se por hipótese que o banco em que essa empresa mantém conta, paga semestralmente juros de 12% ao ano sobre os saldos credores, calcular o valor dos juros creditados em 01/07/96.

Data	Histórico	V / C	Saldo	Nº dias	$PV_h n_h$
14 / 01 / 96	depósito	5.000 C			
19 / 01 / 96	depósito	10.000 C			
10 / 02 / 96	cheque	3.500 D			
24 / 02 / 96	Aviso/débito	500 D			
13 / 03 / 96	depósito	1.150 C			
08 / 04 / 96	cheque	11.850 D			
20 / 05 / 96	depósito	3.725 C			
21 / 06 / 96	cheque	2.960 D			

2 – Um cliente de certo banco possui um cheque especial. Sabendo-se que esse banco cobra juros de 8,5% ao mês sobre os saldos devedores debitados mensalmente e que a movimentação da conta desse cliente durante o mês de abril de 98 é a transcrita a seguir, calcular o valor dos juros debitados no início do mês de maio.

Data	Histórico	V / C	Saldo	N° de dias	$PV_h\ n_h$
01 / 04 / 98	transporte	---	16.148,50 C		
02 / 04 / 98	cheque	15.000 D			
04 / 04 / 98	cheque	20.000 D			
09 / 04 / 98	conta / luz	750 D			
17 / 04 / 98	depósito	12.000 C			
22 / 04 / 98	cheque	15.443 D			
25 / 04 / 98	depósito	86.780 C			
30 / 04 / 98	cheque	3.800 D			

<u>Desconto composto</u>

1 – Determine o valor atual de um título de R$ 12.500,00 , saldado 9 meses antes do vencimento, à taxa de desconto composto de 2,7% ao mês.

2 – Qual é o desconto composto que um título de R$ 9.850,00 sofre ao ser descontado, 8 meses antes do seu vencimento, à taxa de 3,75% ao mês ?

3 – Um título no valor de R$ 29.500,00 foi saldado 2 meses antes do seu vencimento. O possuidor do título obteve uma taxa de desconto composto de 1,8% ao mês. Qual foi o desconto racional e qual a quantia recebida?

4 – Um título de valor nominal de R$ 48.860,00 foi resgatado 8 meses antes do seu vencimento, tendo sido contratada a taxa de 2,45% ao mês. Qual foi o desconto racional concedido?

5 – Ao descontar uma Nota Promissória no valor de R$ 15.000,00 no vencimento, a financeira informou que sua taxa era de 45% ao ano. Se o desconto fosse efetuado 5 meses antes do vencimento, qual seria o valor líquido (valor do resgate) recebido pelo possuidor do título?

6 – Um investidor aplicou R$ 29.470,00 em um Certificado de Renda Fixa, pelo prazo de 720 dias, contratando-se à taxa de 75% ao ano. Após certo tempo, vende o CRF por R$ 80.360,86 quando então a taxa de desconto racional era de 69,56% ao ano. Quanto tempo antes do vencimento a transferência foi feita?

7 – Em um título no valor de R$ 11.000,00 o desconto sofrido foi de R$ 1.005,60. Se a taxa de juros de mercado for de 2,5% ao mês, qual será o prazo de antecipação?

8 - Com uma antecipação de 8 meses, o valor nominal de um compromisso é de 7 vezes o desconto racional. Qual é o seu valor nominal, se o valor de resgate é de R$ 13.564,00?

9 – Pedro receberia R$ 60.000,00 como parte de sua herança. Contudo, necessitando do dinheiro 5 meses antes da data do recebimento, propõe a um amigo a venda dos seus direitos por R$ 56.954,02. Que taxa de juros anual Pedro pagou?

10 – Numa antecipação de 7 meses, o desconto racional composto foi de R$4.718,94. Qual é o valor nominal do título, uma vez que a taxa de juro anual é de 42%?

11 - O quociente do valor de resgate sobre o valor atual descontado racionalmente é de 1,04598 considerando-se uma antecipação de 85 dias. Qual é a taxa de juros anual?

12 – Se o valor nominal for igual a 52 vezes o seu desconto racional resultante de um resgate, 3 meses antes do vencimento, qual é a taxa de juro anual?

13 – Ao descontar uma nota promissória no valor de R$ 16.960,00 no vencimento, a financeira informou que sua taxa era de 44% ao ano, em regime de juro composto. Se o desconto fosse efetuado 5 meses antes do vencimento, qual seria o valor líquido recebido pelo possuidor do título?

Taxas

QUESTÕES PARA DISCUSSÃO INICIAL DO CAPÍTULO

Taxa nominal

Taxa efetiva

Taxa Over

4. Taxas

4.1 – Taxas Nominais

Apesar de vermos que o juro só é formado no final de cada período, na prática vemos com freqüência anúncios do tipo:

- ✓ juros de 64% ao ano, capitalizados mensalmente;
- ✓ juros de 425% ao ano, capitalizados bimestralmente.

Convencionou-se, então, chamar de taxas nominais essas taxas com capitalizações diferentes dos períodos anunciados nos juros. Portanto, taxas nominais são aquelas cujo período de capitalização não coincide com aquele a que se refere a taxa. Também, por convenção, adotou-se que a taxa por período de capitalização seja proporcional à taxa nominal.

$$\boxed{i_K = \frac{i}{k}}$$

Exemplo:

12% ao ano em 3 anos, capitalizados bimestralmente.

K = 6 (bimestres em um ano).

Logo, $i_6 =$ 0,12 / 6 = 0.02 ao bimestre.

Como n = 3 anos = 18 bimestres

Se precisássemos encontrar o valor futuro seria: $FV_{18} = PV\,(1 + i_6)^{18}$

Exemplo:

Um capital de R$ 25.000,00 foi aplicado por 3 anos a 24% ao ano, capitalizado trimestralmente. Qual é o valor futuro?

$n = 3$ a $= 12$ t. $i_k = 0{,}24 / 4 = 0{,}06$ ao trimestre

$k = 4$ (trimestres ao ano) PV = 25.000,00

$i = 24\%$ ao ano $= 0{,}24$

$FV = PV\,(1 + i_k)^n$

$FV = 25.000\,(1 + 0{,}06)^{12}$

$FV = 25.000\,(2{,}0122)$ $\boxed{FV = 50.304{,}91}$

<u>Obs.</u> Se a capitalização fosse anual, teríamos

$FV = 25.000\,(1{,}24)^3$

$FV = 25.000\,(1{,}90662)$ $\boxed{FV = 47.665{,}60}$

4.2. Taxa nominal efetiva

A <u>taxa nominal efetiva</u> é a taxa anual equivalente à taxa do período de capitalização pedido.

Temos:

i = taxa nominal

i_f = taxa efetiva

n = número de capitalizações para <u>um período</u> da taxa nominal

i_k = taxa por período de capitalização

Como, por definição, i_f é equivalente à i_k e $i_k = i/k$ temos:

$$1 + i_f = \left(1 + \frac{i}{k}\right)^k$$

Logo,

$$\boxed{i_f = \left(1 + \frac{i}{k}\right)^k - 1}$$

<u>Exemplo.</u>

Um capital de R$ 25.000,00 foi aplicado por 3 anos à taxa de 24% ao ano, capitalizado trimestralmente. Qual é a taxa efetiva?

$i/k = 0,24/4=0,06$

$n = 3\ a = 12\ t$

Como $i_f = (1 + i/k)^k - 1$

$ì_f =(1,06)^4 - 1$

$ì_f = 1,26248 - 1$

$i_f = 0,26248$

$\boxed{26,25\%}$

<u>Obs.</u> Encontrando o valor futuro podemos conferir com o exercício da taxa nominal.

$FV = 25.000\ (1,26248)^3$

$FV = 25.000\ (2,0122)$

$\boxed{FV = 50.304,91}$

Conforme o que havíamos conseguido com a taxa nominal.

4.3. Taxa real, aparente e de inflação

Quando se realiza uma operação financeira, à uma determinada taxa, espera-se uma remuneração do capital utilizado na operação, à essa mesma taxa. Entretanto com a desvalorização das unidades monetárias, essa remuneração fica distorcida.

Um índice de inflação busca medir indiretamente a desvalorização da unidade monetária , quando da aquisição de um determinado grupo de bens e serviços, em um dado período.

4.3.1. Cálculo das taxas real, aparente e de inflação

A taxa aparente é aquela que vigora nas operações correntes. Quando não há inflação, a taxa real é igual a taxa aparente; mas, quando a inflação existe, a taxa aparente é formada pelos componentes da inflação e da taxa real.

<u>Notações.</u>

PV = valor presente ou capital inicial

i = taxa aparente

i_{inf} = taxa de inflação

i_r = taxa real

FV = valor futuro ou montante

a) Quando não há inflação PV(1+i) = PV(1+i_r)

b) Quando há inflação PV(1+i) = PV (1+i_r) (1+i_{inf}) dividindo ambos os membros da igualdade por PV, temos:

$$\frac{PV(1+i)}{PV} = \frac{PV(1+i_r)(1+i_{\text{inf}})}{PV}$$ daí, (1+i) = (1+i_r)(1+i_{inf}) então,

$$\boxed{i = [(1+i_r)(1+i_{inf}) - 1]}$$

Obs: a poupança é uma taxa de juros aparente, onde se reduz a inflação para se ver o juro real. Se a taxa de inflação for <u>menor</u> do que a taxa de poupança, tem-se um juro aparente; se for <u>maior</u>, tem-se uma perda real.

<u>Exemplo.</u>

Qual deve ser a taxa aparente correspondente a uma taxa real de 9% ao mês e uma inflação de 22% no período?

i_r = 9% = 0,09 i_{inf} = 22% = 0,22 i = ?

i = [(1+i_r)(1+i_{inf}) - 1]

i = [(1,09)(1,22) -1]

i = [1,3298 - 1]

i = 0,3298 multiplicando por 100, temos: $\boxed{\text{32,98\% ao mês}}$

4.4 - Taxa Over (Taxa por um dia)

A palavra *overnigt* refere-se às operações realizadas no *open market* por prazo mínimo de um dia. O termo *open market,* no sentido amplo, é qualquer mercado sem local físico determinado e com livre acesso à negociação./ No Brasil, entretanto, tal denominação se aplica ao conjunto de transações realizadas com títulos de renda fixa, de emissão pública ou privada. A denominada *taxa over* é adotada geralmente nas operações financeiras desse mercado, entretanto seu valor não é usado nos cálculos por não representar uma taxa efetiva. A *taxa over* é uma taxa nominal, pois costuma ser expressa ao mês, com capitalização diária porém, válida somente para dias úteis, ou seja, sua capitalização ocorre unicamente em dia de funcionamento do mercado financeiro. Caso se queira realizar uma operação com mais de um dia, utiliza-se o conceito da taxa nominal para converter a *taxa over* por um dia e, em seguida, utiliza-se o conceito da taxa efetiva para capitalizar, ou seja, converter a *taxa over* por um dia para o prazo da operação. Assim, o montante de um capital aplicado à *taxa over* mensal por um determinado número de dias é:

$$\boxed{FV = PV\left(1+\frac{tx.over}{30}\right)^{du}}$$ onde du = dias úteis no prazo da aplicação

4.4.1 - Taxa de juros efetiva equivalente à taxa over

O montante de um capital aplicado à *taxa over* durante **dc** (dias corridos), correspondentes à **du** (dias úteis) é encontrado utilizando-se a fórmula acima.

O montante do mesmo capital aplicado durante os mesmos dias corridos à uma taxa efetiva **if** é:

$$\boxed{FV = PV(1+if)^{\frac{dc}{n}}}$$

onde n = períodos (dias) da taxa **if**.

A seguir, podemos igualar os dois montantes de modo que possamos destacar a taxa efetiva equivalente à taxa over:

$$\left(1+\frac{tx.over}{30}\right)^{du} = (1+if)^{\frac{dc}{n}}$$ logo, $$\sqrt[\frac{dc}{n}]{\left(1+\frac{tx.over}{30}\right)^{du}} = \sqrt[\frac{dc}{n}]{(1+if)^{\frac{dc}{n}}}$$ então,

trocando a raiz pela exponencial inversa do índice, temos,

$$\left[\left(1+\frac{tx.over}{30}\right)^{du}\right]^{\frac{n}{dc}} = 1+if$$ logo, $$\left(1+\frac{tx.over}{30}\right)^{\frac{du.n}{dc}} = 1+if$$ então,

$$\boxed{if = \left(1+\frac{tx.over}{30}\right)^{\frac{du.n}{dc}} - 1}$$

onde: **if** = taxa efetiva em **n** dias.

<u>Exemplo:</u>

Uma operação com duração de 30 dias corridos foi fechada à uma taxa over de 2% ao mês, sendo computados 22 dias úteis nesse mês. Determinar a taxa efetiva para o prazo da operação.

Dados: taxa over = 2%a .m.; dc = 30 dias; du = 22 dias; n = 30; if = ?

$$if = \left(1+\frac{tx.over}{30}\right)^{\frac{du.n}{dc}} - 1 \qquad if = \left(1+\frac{0,02}{30}\right)^{\frac{22.30}{30}} - 1 \qquad if = (1,00067)^{22} - 1$$

$$if = 1,01477 - 1 \qquad if = 0,01477$$

R: 1,477% a .m.

Exercícios

Taxa nominal

1 – Calcule o valor atual; de um título de valor nominal de R$ 11.200,00 com vencimento para 2 anos e 6 meses, à taxa de 36% ao ano, capitalizados semestralmente.

2 – Um título de valor nominal de R$ 15.000,00 foi resgatado 3 meses antes do seu vencimento, tendo sido contratado à taxa de 30% ao ano, capitalizados mensalmente. Qual foi o desconto concedido?

3 – O valor nominal de um título é de R$ 200.000,00. Seu portador deseja descontá-lo 1 ano e três meses antes do seu vencimento. Calcule o valor de resgate, sabendo-se que a taxa de desconto composto é de 28% ao ano, capitalizados trimestralmente.

4 - Uma empresa toma emprestado em um Banco R$ 500.000,00 à taxa de 21% ao ano, com capitalizações quadrimestrais. Quanto deverá devolver ao final de 2 anos? Qual a taxa efetivamente cobrada pelo Banco?

5 - Quanto uma pessoa deve depositar em um Banco que paga 24% ao ano, com capitalizações bimestrais, para que ao fim de 5 anos possua R$ 200.000,00? Qual a taxa efetivamente paga pelo Banco?

Taxas real, de inflação e aparente

1 - Qual a taxa real, num período de inflação de 17% e um ganho aparente de 34%?

2 - Uma pessoa aplicou um capital de R$ 12.500,00 durante 10 meses, à uma taxa de juros corrente de 13% ao mês. Sabendo-se que houve uma inflação de 5% ao mês, qual foi o ganho líquido na aplicação?

Taxa over

1 - Uma operação com duração de 35 dias corridos, foi contratada à uma taxa over de 1,8% ao mês. Se durante esse prazo houve 22 dias úteis , calcular a taxa efetiva mensal e o montante ao término do prazo, considerando-se que foram aplicados R$100.000,00.

2 - Em uma aplicação de R$ 120.000,00 pelo prazo de 38 dias corridos correspondentes a 32 dias úteis foram resgatados R$ 126.500,00. Determinar o valor da taxa over mensal.

Rendas certas ou Anuidades

5. Rendas certas ou anuidades

Quando uma série de pagamentos tem valores variáveis e periodicidade diferente é necessário que se resolva como se cada aplicação ou pagamento fosse independente, o que acarreta, na maioria das vezes, uma sobrecarga de cálculos. À uma série de pagamentos ou recebimentos iguais, com intervalo de tempo iguais, chamamos de " rendas certas ou anuidades" e, para elas temos mecanismos que facilitam a resolução dos cálculos.

Denomina-se renda à sucessão de depósitos (capitalizações) ou de prestações (amortizações), em épocas diferentes, destinadas a formar um capital ou pagar uma dívida.

Nas aplicações financeiras, quando o objetivo é constituir um capital em data futura, tem-se o processo de capitalização. Caso contrário, quando se quer pagar uma dívida, tem-se o processo de amortização.

Pode ocorrer também o pagamento pelo uso sem que haja amortização, que é o caso dos aluguéis.

As rendas ou anuidades, quanto à forma de pagamento ou de recebimento, podem ser de dois tipos:

- ✓ rendas certas ou determinísticas: aquelas cuja duração e pagamentos são predeterminados, não dependendo de condições externas. Os diversos parâmetros como o valor dos termos, o prazo de duração, a taxa de juros, etc., são fixos e imutáveis (Matemática Financeira). Podem ser constituídas por aplicações iguais e em série, com a finalidade de se formar um montante num futuro pré estabelecido; prestações assumidas hoje, como forma de empréstimo; prestações de bens adquiridos; etc..

QUESTÕES PARA DISCUSSÃO INICIAL DO CAPÍTULO

CONCEITOS A SEREM DEFINIDOS NESSE CAPÍTULO

Anuidades

Amortização Composta

Coeficientes de Financiamento

✓ rendas aleatórias ou probabilísticas: ocorre quando, pelo menos um dos parâmetros é uma variável aleatória, isto é, não pode ser previamente determinada. O número de termos é indeterminado (Matemática Atuarial).

<u>Exemplo</u>: Seguro de vida -- os valores de pagamentos (mensalidades) são certos; sendo aleatórios o valor do seguro a receber (causa da morte) e a data do recebimento (data da morte).

5.1 - Definições importantes

✓ <u>Anuidade ou renda certa</u>: capitais (pagamentos ou recebimentos) referidos à uma dada taxa de juros **i**.

✓ <u>Termos da anuidade</u>: valores que constituem a renda.

✓ <u>Período</u>: intervalo de tempo entre dois termos.

✓ <u>Duração da anuidade</u>: soma dos períodos.

✓ <u>Valor atual ou presente de uma anuidade</u>: soma dos valores atuais dos seus termos, para uma mesma data focal, à uma mesma taxa de juros.

✓ <u>Montante ou valor futuro da anuidade</u>: soma dos montantes dos seus termos, à uma mesma taxa de juros e uma mesma data focal.

5.2 - Classificação das anuidades

Uma série de pagamentos ou recebimentos é representada por um fluxo de caixa. Os fluxos de caixa podem ser verificados das mais variadas formas e tipos .

Quanto à periodicidade:

✓ <u>Periódicas</u>: todos os períodos são iguais.

✓ <u>Não periódicas</u>: os períodos não são iguais entre si.

Quanto ao prazo:

✓ <u>Temporárias</u>: a duração é limitada (1 ano, 5 anos).

✓ <u>Perpétuas</u>: a duração é ilimitada (seguros de vida).

Quanto ao valor dos termos:

✓ <u>Constantes</u>: todos os termos são iguais.

✓ <u>Variáveis</u>: os termos não são iguais entre si.

Quanto à forma de pagamento ou de recebimento:

✓ <u>Imediatas</u>: quando os termos são exigíveis a partir do primeiro período.

- ✓ Diferidas: quando os termos são exigíveis a partir de uma data que não seja o primeiro período.

Obs: as anuidades imediatas e diferidas se subdividem em:

- ✓ Postecipadas ou vencidas: os termos são exigíveis no fim dos períodos.
- ✓ Antecipadas: os termos são exigíveis no início dos períodos.

5.3. Amortização composta

5.3.1. Modelo básico de anuidade ou renda

As séries de pagamentos que constituem as rendas certas ou anuidades são simultaneamente:

- ✓ temporárias (duração limitada - 1 ano, 5 meses, etc.);
- ✓ constantes(valores ou termos iguais entre si);
- ✓ imediatas e postecipadas;
- ✓ periódicas (todos os períodos iguais).

A taxa de juros **i** é referida ao mesmo período dos termos.

Exemplo:

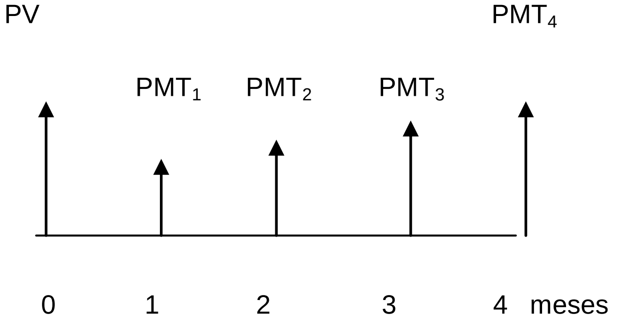
Certa pessoa compra um carro para pagar em 4 prestações iguais de R$2.626,24 sem entrada. As prestações serão pagas a partir do mês seguinte ao da compra e a taxa de juros será de 2% ao mês. Qual o preço do carro à vista?

Resolução:

O preço do carro à vista corresponde à soma dos valores atuais das prestações na data focal zero, à taxa de 2% ao mês.

PV = soma dos valores atuais.

PMT = valor da prestação.



Como as prestações são iguais, $PMT_1 = PMT_2 = PMT_3 = PMT_4$, logo:

$$PV = \frac{PMT}{(1{,}02)} + \frac{PMT}{(1{,}02)^2} + \frac{PMT}{(1{,}02)^3} + \frac{PMT}{(1{,}02)^4}$$

Colocando PMT em evidência, temos:

$$PV = PMT\left(\frac{1}{(1{,}02)} + \frac{1}{(1{,}02)^2} + \frac{1}{(1{,}02)^3} + \frac{1}{(1{,}02)^4}\right)$$

PV = 2.626,24 (0,980392 + 0,961169 + 0,942322 + 0,923846)

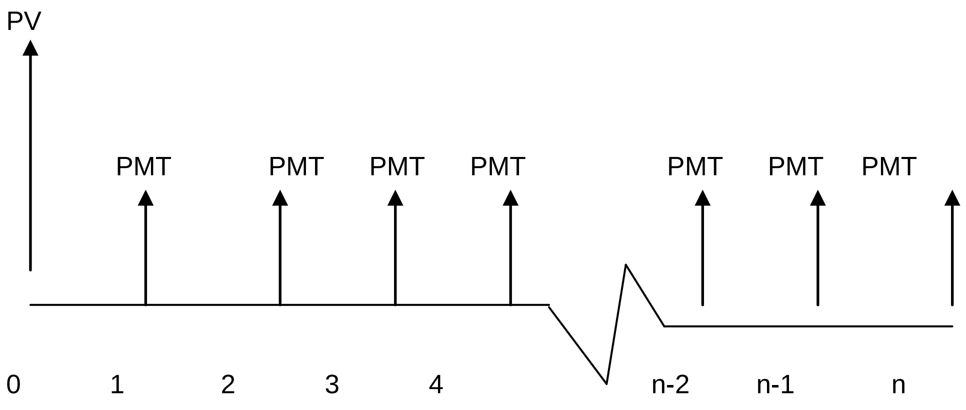
PV = 2.626,24 (3,807729)

PV $\cong$ 10.000,00

Resposta: O preço do carro à vista é de R$ 10.000,00

5.3.2. Cálculo do valor presente do modelo básico

Seja um principal PV a ser pago em **n** termos iguais a PMT, imediatos, postecipados e periódicos. Seja também uma taxa de juros **i**, referida ao mesmo período dos termos.



A soma dos valores atuais dos termos na data zero é:

$$PV = \left(\frac{PMT}{(1+i)^1} + \frac{PMT}{(1+i)^2} + \frac{PMT}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{PMT}{(1+i)^{n-1}} + \frac{PMT}{(1+i)^n}\right)$$

Colocando PMT em evidência, temos:

PV = PMT $\left(\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n} \right)$

Fazendo FPV(i,n) = $\left(\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n} \right)$

(lê-se : FPV = fator de valor presente ou FVA = fator de valor atual)

Temos,

PV = PMT . FPV (i,n)

O valor de FPV é obtido pela soma dos termos de uma progressão geométrica (PG).

Como a ordem das parcelas não altera a soma, temos:

FPV(i,n) = $\left(\frac{1}{(1+i)^n} + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^3} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^1} \right)$,

onde:

$$a_1 = \frac{1}{(1+i)^n} = (1+i)^{-n}$$

$$a_n = \frac{1}{1+i} = (1+i)^{-1}$$

$$q = \frac{1}{(1+i)} : \frac{1}{(1+i)^2} = \frac{1}{(1+i)}.(1+i)^2 = (1+i)$$

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1}$$

Logo, FPV(i,n)= $\frac{(1+i)^{-1}(1+i)-(1+i)^{-n}}{(1+i)-1} = \frac{(1+i)^0-(1+i)^{-n}}{1+i-1} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

$$FPV(i,n) = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Multiplicando ambos os termos da fração resultante por $(1+i)^n$, temos:

$$FPV(i,n) = \frac{1(1+i)^n - (1+i)^{-n}(1+i)^n}{i(1+i)^n} = \frac{(1+i)^n - (1+i)^0}{i(1+i)^n} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

Conclusão:

$$\boxed{FPV(i,n) = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}}$$

Esse fator FPV(i,n) é chamado "fator de amortização" e vem tabelado para diversos valores de **i** ou de **n**, nas tabelas financeiras.

Exemplo.

Um conjunto de sala de estar custa R$ 5.000,00 à vista; mas pode ser financiado sem entrada, em 10 prestações mensais iguais, à taxa de 3% ao mês. Calcule a prestação a ser paga pelo comprador.

i = 3% a. m. = 0,03 a. m. n = 10 meses PV = 5.000,00

Se PV = PMT. FPV(i,n) então, PMT = $\frac{PV}{FPV(i,n)}$

Como $FPV(i,n) = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$ temos,

FPV(3%,10) = $\frac{(1+0{,}03)^{10} - 1}{0{,}03(1+0{,}03)^{10}} = \frac{(1{,}03)^{10} - 1}{0{,}03(1{,}03)^{10}} = \frac{1{,}343916 - 1}{0{,}03(1{,}343916)} = \frac{0{,}343916}{0{,}040317} = 8{,}530297$

Calculando a prestação PMT = $\frac{PV}{FPV(i,n)} = \frac{5.000}{8{,}530297} = 586{,}15$

Resposta. O valor da prestação a ser paga é de $\boxed{\text{R\$ 586,15}}$

5.3.3. Coeficientes de financiamento

Fatores ou coeficientes de financiamento são números admencionais que multiplicados por PV transformam-se no valor de cada parcela de financiamento.

As parcelas devem ser iguais entre si; mas, os períodos não precisam ser necessariamente iguais.

Os coeficientes de financiamento são largamente usados no comércio, agências de turismo, operações de leasing e outros financiamentos onde a quantidade de valores presentes são grandes.

Temos que PV.C_f = PMT logo, $C_f = \dfrac{PMT}{PV}$.

Substituindo PMT na fórmula ,vem $C_f = \dfrac{\dfrac{PV}{FPV(i,n)}}{PV}$ então,

$$C_f = \frac{PV}{FPV\,(i,n)} \cdot \frac{1}{PV} = \frac{1}{FPV\,(i,n)}$$

Como $FPV(i,n) = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$, temos $C_f = \dfrac{1}{\dfrac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}}$

Então,

$$C_f = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

<u>Exemplo</u>

O gerente de uma loja deseja estabelecer coeficientes de financiamento por unidade de capital emprestado. O resultado da multiplicação do coeficiente pelo valor financiado é igual à prestação mensal. Sabendo-se que a taxa de juros da loja é de 4% ao mês, qual é o coeficiente unitário num financiamento de 6 meses?

$$C_f = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

$$C_f = \frac{0{,}04(1{,}04)^6}{(1{,}04)^6 - 1} = \frac{0{,}04(1{,}265319)}{1{,}265319 - 1} = \frac{0{,}050613}{0{,}265319} = 0{,}190762$$

Este é o valor que , aplicado ao valor financiado dará o valor das 6 prestações mensais iguais, considerando a taxa de 4% ao mês.

<u>Obs.</u> Se tivéssemos uma mercadoria com preço à vista de R$ 10.000,00, qual seria o valor de cada prestação, no prazo e taxa acima?

Sabemos que a prestação é igual ao valor presente vezes o coeficiente de financiamento, logo:

PMT = 10.000 x 0,190762

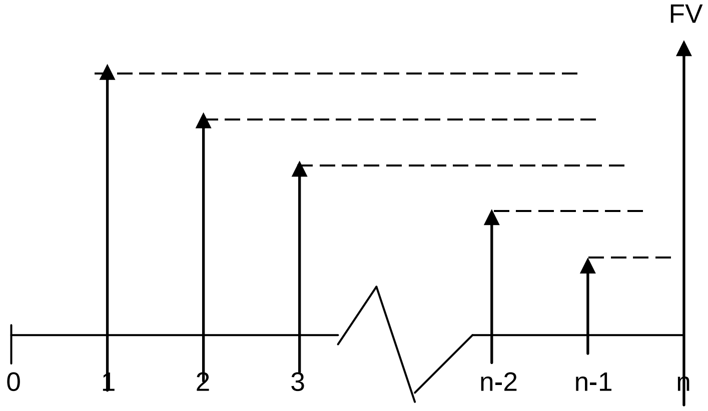
$\boxed{PMT = 1.907,62}$

Resposta. O valor de cada prestação é de R$ 1.907,62

5.3.4. Cálculo do valor futuro ou montante do modelo básico

Consideremos um processo de capitalização em que são aplicadas parcelas iguais, periódicas e postecipadas, à uma taxa de juros **i** referida ao mesmo período dos termos. O problema consiste na determinação de um valor futuro (FV) na data focal **n**, através desse processo de capitalização.

O valor futuro ou montante é o resultado da soma de cada um dos termos, à taxa de juros **i**, na data focal **n**.



Vamos admitir que esta soma seja a partir do termo de ordem n até o termo de 1ª ordem.

$$FV = PMT(1+i)^{n-1} + PMT(1+i)^{n-2} + ... + PMT(1+i)^2 + PMT(1+i) + PMT$$

$$FV = PMT + PMT(1+i) + PMT(1+i)^2 + . . . + PMT(1+i)^{n-2} + PMT(1+i)^{n-1}$$

$$FV = PMT\,[1 + (1+)^1 + (1+i)^2 + . . . + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}\,]$$

Seja $FFV = 1 + (1+i)^1 + (1+i)^2 + . . . + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}$ que é a soma dos termos de uma PG, onde $a_1 = 1$, $a_n = (1+i)^{n-1}$ e $q = 1+ i$

Como $S_n = \dfrac{an.q - a}{q-1}$ então, $FFV(i,n) = \dfrac{(1+i)^{n-1}(1+i)-1}{1+i-1} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$

Logo, $FV = PMT \,.\, FFV(i,n)$ e $PMT = \dfrac{FV}{FFV(i,n)}$

(FFV = fator de valor futuro ou FAC = fator de acumulação de capital)

Exemplo

Uma pessoa deposita R$ 1.000,00 mensalmente. Sabendo-se que ela está ganhando 2% ao mês, quanto possuirá em 2 anos?

PMT = 1.000 i = 2% = 0,02 a . m. n = 2 a .= 24 m. FV =?

Calculando FFV(i,n) = $\frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{(1{,}02)^{24} - 1}{0{,}02} = \frac{1{,}608437 - 1}{0{,}02} = \frac{0{,}608437}{0{,}02} = 30{,}421862$

FV = PMT . FFV(i,n)

FV = 1.000 x 30,421862

Fv = 30.421,862

Resposta. A pessoa possuirá R$ 30.421,86

5.3.5 - Relação entre os fatores FPV(n,i) e FFV(n,i)

Temos que FPV(i,n) = $\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$. Multiplicando os dois lados da igualdade por $(1+i)^n$, vem:

$$(1+i)^n.FPV(i,n) = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}.(1+i)^n$$

$(1+i)^n.FPV(i,n) = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$ como $\frac{(1+i)^n - 1}{i} = FFV(i,n)$, temos:

$$\boxed{FFV(i,n) = (1+i)^n.FPV(i,n)}$$

Esta relação permite que se relacione o valor presente (PV) com o valor futuro (FV) do modelo básico.

Como FV = PMT . FFV(i,n) e como FFV(i,n) = $(1+i)^n$. FPV(i,n)

Temos FV = PMT . $(1+i)^n$. FPV(i,n) e se PV = FPV(i,n)

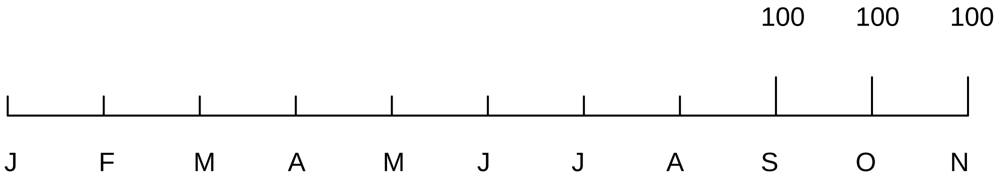
chegamos a FV = $(1+i)^n$. PV ou FV = PV$(1+i)^n$, conforme já foi provado.

Exemplo

Uma pessoa planejando a construção de uma casa, prevê dispêndios mensais de R$ 100.000,000 nos meses de setembro, outubro e novembro. Quanto deve ser depositado mensalmente de janeiro a agosto, do mesmo ano, para que seja possível efetuar tais retiradas, considerando uma remuneração de 3% ao mês sobre os depósitos?

PMT = ? i = 3%= 0,03 a .m. n= 8 meses FV = 300.000

PV = PMT . FPV(i,n) FV = PMT . FFV(i,n)



Pelo modelo básico teremos que o PV dos meses de setembro a novembro, na data 9 deve ser igual ao FV na mesma data dos meses de janeiro a agosto. Logo,

FV = PV Como FV = PMT . FFV(i,n) e PV = PMT . FPV(i,n), temos:

PMT . FFV(i,n) = PMT . FPV(i,n)

Calculando FFV(3%,8)

FFV(i,n) = $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ logo,

FFV(3%,8) = $\frac{(1{,}03)^8 - 1}{0{,}03} = \frac{1{,}266770 - 1}{0{,}03} = \frac{0{,}266770}{0{,}03} = 8{,}892336$

FPV(i,n) = $\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$,

logo FPV(3%,3) = $\frac{(1{,}03)^3 - 1}{0{,}03(1{,}03)^3} = \frac{1{,}092727 - 1}{0{,}03(1{,}092727)} = \frac{0{,}092727}{0{,}032782} = 2{,}828595$

Então, se PMT. FFV(3%,8) = 100.000 . FPV(3%,3)

PMT (8,892336) = 100.000 (2,828595)

PMT (8,892336) = 282859,5

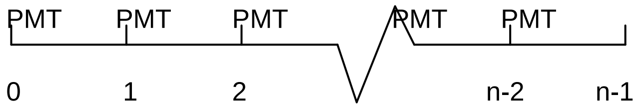
PMT = $\frac{282.859{,}5}{8{,}892336} = 31.809{,}36$

<u>Resposta.</u> A quantia a ser depositada mensalmente deverá ser de $\boxed{\text{R\$ 31.809,36}}$

5.4. - Anuidades antecipadas imediatas

Nesse tipo de anuidades, os termos são exigíveis no início dos períodos. A primeira prestação é paga na assinatura do contrato (data zero).

5.4.1. Cálculo do valor presente



Seja PV o valor atual de uma renda antecipada. Então,

$$PV = PMT + \frac{PMT}{1+i} + \frac{PMT}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{PMT}{(1+i)^{n-2}} + \frac{PMT}{(1+i)^{n-1}}$$

Colocando R em evidência, temos:

$$PV = PMT\left(1 + \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^{n-2}} + \frac{1}{(1+i)^{n-1}}\right)$$

Como $\left(\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^{n-2}} + \frac{1}{(1+i)^{n-1}}\right)$ = FPV(n-1,i) concluímos que:

PV = PMT [1+FPV(i,n-1)] ou ainda PV = PMT (1+i) . FPV(i,n)

ou seja, o valor atual de uma renda antecipada de n termos.

<u>Exemplo.</u>

Calcule o valor presente de uma anuidade antecipada de 12 termos mensais de R$ 250,00, à taxa de 3% ao mês.

PMT = 250 i = 3% = 0,03 a .m. n = 12 m.

PV = PMT [1+ FPV(i,n-1)}

PV = 250 [1+ FPV(3%,12-1)]

PV = 250 [1+ 9,252631]

Cálculo do FPV(i,n-1)

$$FPV(3\%;11) = \frac{(1,03)^{11} - 1}{0,03(1,03)^{11}} = \frac{0,384234}{0,041527}$$

FPV(3%;11) = 9,252631

PV = 250 [10,252631]

$\boxed{PV = 2.563,16}$

Resposta. O valor presente da anuidade é de R$ 2.563,16

Pela segunda fórmula, temos:

PV = PMT(1+i).FPV(i,n)

$$FPV(3\%,12) = \frac{(1{,}03)^{12} - 1}{0{,}03(1{,}03)^{12}} = \frac{0{,}42576}{0{,}04277}$$

PV = 250 (1,03) . 9,95398

FPV(3%,12) = 9,95398

$\boxed{PV = 2.563,15}$

5.4.2 - Cálculo do valor futuro

O valor futuro ou montante de uma renda antecipada é o mesmo do montante do modelo básico, multiplicado por (1+i). Logo,

FV = PMT.(1+i).FFV(i,n)

Exemplo.

Uma pessoa deposita em uma financeira, no início de cada mês, durante 5 meses, a quantia de R$ 100,00. Calcule o valor futuro ou montante da renda, sabendo-se que esta financeira paga juros de 2% ao mês, capitalizados mensalmente.

PMT = 100,00 i = 2% = 0,02 a .m. n = 5 m. FV = ?

Se o depósito é feito no início de cada mês, a renda é antecipada; portanto, a fórmula é: FV = PMT.(1+i). FFV(i,n)

Cálculo do FFV(2%;5)

FV = 100 (1,02). FFV(2%;5)

$$FFV(2\%;5) = \frac{(1{,}02)^{5} - 1}{0{,}02} = \frac{0{,}104081}{0{,}02}$$

FV = 100 .(1,02). 5,204040

FFV(2%;5) = 5,204040

$\boxed{FV = 530,81}$

Resposta. O valor futuro será de R$ 530,81.

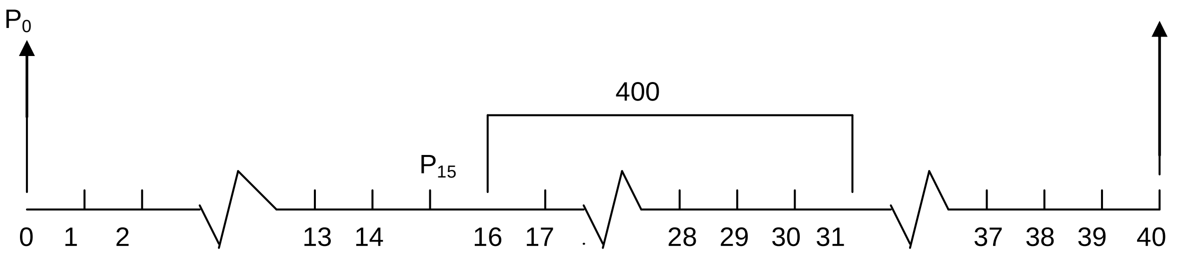
5.5.- Renda ou anuidade diferida (com carência)

As rendas ou anuidades diferidas são aquelas em que o 1º termo é exigível a partir de um certo período, denominado período de carência. Tudo como se os termos fossem transladados de um intervalo de tempo igual à carência.

Exemplo.

Uma pessoa vai receber 16 prestações mensais iguais a R$ 400,00 com um diferimento (período de carência) de 15 meses. Sendo a taxa de juros igual a 2% ao mês, pergunta-se:

a) qual o valor presente ou atual das prestações na data zero;
b) qual o valor futuro ou montante na data focal 40?



a) 1ª opção

Valor presente na data zero

Resolve-se em duas etapas:

1. calcula-se o principal (ou valor presente) na data focal 15, segundo o modelo básico;

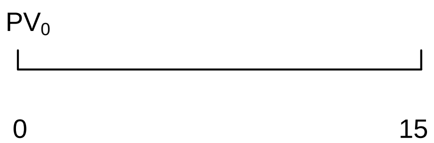
PV_{15} = PMT. FPV(2%;16) FPV(2%;16) = $\dfrac{(1{,}02)^{16}-1}{0{,}02(1{,}02)^{16}} = \dfrac{0{,}372786}{0{,}027456}$

PV_{15} = 400.(13,577579) FPV(2%;16) = 13,577579

$\boxed{PV_{15} = 5.431{,}03}$

2. a seguir, acha-se o valor presente na data zero, à taxa de 2% ao mês.

$$PV = \frac{FV}{(1+i)^n}$$



onde o FV será igual ao PV_{15}.

$$PV_0 = \frac{5.431,03}{(1,02)} = \frac{5.431,03}{1,345868} = 4.035,34$$

Resposta. O valor atual das prestações na data zero é R$4.035,34

2ª opção

Pode-se chegar ao mesmo resultado calculando-se o valor presente de uma anuidade de 31 termos e subtraindo-se o valor presente de uma anuidade de 15 termos (tudo pelo modelo básico). Esta anuidade de 15 termos corresponde aos 15 termos que "não existem" no problema proposto.

PV_0 = PMT . FPV(2%;31) - PMT . FPV(2%;15)

Colocando PMT em evidência, temos:

PV_0 = PMT [FPV(2%;31) - FPV(2%;15)]

PV_0 = 400 [(22,937568) - (12,849426)]

PV_0 = 400 (10,088142)

$\boxed{PV_0 = 4.035,27}$

b) Montante na data focal 40

1ª opção

Pode-se obtê-lo diretamente do valor presente.

n = 40 PV = 4.035,34 i = 2% = 0,02 a.m. FV_{40} = ?

$FV = PV\ (1+i)^n$

$FV_{40} = 4.035,34\ (1,02)^{40}$

FV_{40} = 4.035,34 (2,208040)

$\boxed{FV_{40} = 8.910,19}$

2ª opção

Pode-se usar o modelo básico e calcular o valor futuro ou montante na data 31 (do período 16 ao 31 = 16 termos). O valor futuro é então capitalizado até a data focal 40.

Tem-se que $FV_{31} = PMT \cdot FFV(i,n)$ então,

$FV_{31} = PMT \cdot FFV(2\%;16)$ como $FV(2\%;16) = 18{,}639285$ temos:

$FV_{31} = 400\ (18{,}639285)$ $\boxed{FV_{31} = 7.455{,}71}$

Capitalizando-se o valor futuro FV_{31} até a data focal 40, temos:

$FV_{40} = 7.455{,}71\ (1{,}02)^9$ (Obs: 40-31 = 9)

$FV_{40} = 7.455{,}71\ (1{,}195093)$

$\boxed{FV_{40} = 8.910{,}26}$

3ª opção

Calcula-se, pelo modelo básico, o valor futuro de uma anuidade de 25 termos (40 termos menos os 15 primeiros que não são usados) , menos o valor futuro de uma anuidade de 9 termos (40 - 31 termos).

$FV = PMT\ [FFV(2\%;25) - (FFV(2\%;9)]$

$FV = 400\ (\ 32{,}03030 - 9{,}754628)$

$FV = 400\ (\ 22{,}275672)$

$\boxed{FV = 8.910{,}27}$

Resposta. O valor futuro será de R$ 8.910,27

Exercícios

Anuidades - modelo básico.

1 – Quanto uma pessoa terá de aplicar mensalmente num “Fundo de Renda Fixa", durante 5 anos, para que possa resgatar R$ 200.000,00 no final dos 60 meses, sabendo-se que o fundo proporciona um rendimento de 2% ao mês?

2 – Quantas prestações de R$ 4.000,00 devo aplicar trimestralmente, à taxa de 7% ao trimestre, para acumular um montante de R$ 100.516,08? Usar a tabela.

3 – A que taxa devo aplicar R$ 15.036,28 por ano para que eu tenha R$ 500.000,00 no final de 10 anos? Usar a tabela.

4 – Qual o valor que, financiado à taxa de 4% ao mês, pode ser pago ou amortizado em 5 prestações mensais , iguais e sucessivas de R$ 100,00 cada uma?

5 – Calcular o valor atual de uma série de 24 prestações iguais, mensais e consecutivas de R$ 3.500,00 cada uma, considerando uma taxa de 5% ao mês.

6 – Calcule pela tabela, o número de prestações semestrais de R$ 15.000,00 cada um, capazes de liquidar um financiamento de R$ 49.882,65, à taxa de 20% ao semestre.

7 – Qual o montante, no final de 8 meses, referente a uma aplicação de R$ 1.000,00 por mês, à taxa de 3% ao mês?

8 – Quanto deverá ser aplicado a cada 2 meses, em um “Fundo de renda fixa”, à taxa de 5% ao bimestre, durante 3,5 anos, para que se obtenha, no final desse prazo, um montante de R$ 175.000,00?

9 – O Sr. Manoel Reis resolveu aplicar mensalmente a quantia de R$ 800,00, durante 5 anos, à uma taxa de 42,576% ao ano. Além das aplicações mensais, o Sr. Manuel Reis fará uma aplicação extra de R$ 3.000,00 no final de cada ano, isto é, no final do mês de dezembro, aproveitando parte do seu 13º salário. Qual o valor do montante no final do 60º mês, sabendo-se que a data base é final de dezembro do ano 20XY, e que a 1ª parcela será aplicada no final do mês seguinte?

10 – Mauro e Clara ficaram noivos e pretendem casar-se daqui a 20 meses. Como entendem ser mais aconselhável adquirir à vista o imóvel necessário, pretendem fazer aplicações mensais, cujo montante deverá ser sacado 3 meses antes do casamento, para a devida compra. Sabendo-se que:

a) essa aplicação deverá render 2,75% ao mês;
b) o montante desejado é de R$ 80.000,00 (valor que os mesmos destinam para o imóvel daqui a 17 meses);
c) o casal aplicou hoje R$ 12.000,00.

Indaga-se: qual o valor de cada uma das 17 prestações mensais, iguais e consecutivas, necessárias para totalizar o montante de R$ 80.000,00 no final de 17 meses?

11 – Quanto terei de aplicar mensalmente a partir de hoje, para acumular no final de 36 prestações, um montante de R$ 300.000,00 , sabendo-se que o rendimento firmado é de 34,489% ao ano e que as prestações são iguais e consecutivas?

12 – Um conjunto de som custa R$ 1.500,00 `a vista; mas pode ser financiado sem entrada, em 10 prestações mensais iguais, à taxa de 2,5% ao mês. Calcule a prestação a ser paga pelo comprador.

13 - Uma aparelhagem de som está acumulada nas seguintes condições: R$1.500,00 de entrada e 3 prestações mensais iguais de R$ 1.225,48. Calcule o preço à vista , sabendo-se que o juro cobrado pela loja de som é de 2,5% ao mês.

14 - Um carro está a venda por R$ 15.000,00 `avista. Pode também ser adquirido em prestações mensais de R$ 885,71 a 3% ao mês, de juros. Sabendo-se que as prestações vencem a partir do mês seguinte ao da compra, calcule o número de prestações.

15 - Uma loja vende uma mercadoria por R$ 2.000,00 à vista ou financiada em 18 meses, a juros de 3,5% ao mês. Qual será a prestação mensal, se não for dada entrada alguma e a primeira prestação vencer após um mês?

16 - Uma determinada loja vende uma mercadoria por R$ 3.000,00. É exigida uma entrada de 40% do valor da mercadoria e são cobrados juros de 5% ao mês. Qual será o valor das prestações, se um cliente optar por 6 prestações iguais?

17 - Um carro está à venda por R$ 10.000,00 de entrada, mais 12 prestações mensais iguais a R$ 2.236,51. Como opção, a agência vende também em 24 prestações de R$ 1.613,16 sendo, nesse caso, exigida uma entrada de R$12.000,00. Qual é a melhor alternativa, se a taxa do mercado for de 3% ao mês?

18 - Uma loja vende uma mercadoria em 12 prestações mensais iguais a R$ 97,49 ou, em 24 prestações mensais iguais a R$ 51,50. Nos dois casos o cliente não dará entrada alguma. Sabendo-se que a taxa de juros do crédito pessoal é de 2,5% ao mês, pergunta-se: qual é o melhor sistema para o comprador?

19 - O gerente financeiro de uma loja deseja estabelecer coeficientes de financiamento por unidade de capital emprestado. O resultado da multiplicação do coeficiente pelo valor financiado é igual à prestação mensal. Sabendo-se que a taxa de juros da loja é de 3% ao mês, quais são os coeficientes unitários nas hipóteses de prazos abaixo?

a) 6 meses b) 12 meses c) 18 meses d) 24 meses

20 - Qual é o valor atual de uma renda periódica de R$ 1.000,00 à taxa de 5% ao bimestre, em 2 anos?

21 - Qual é a mensalidade periódica equivalente a um valor atual de R$ 10.000,00 se a taxa for de 2,5% ao mês, no prazo de 24 meses?

22 - Um carro cujo valor à vista era de R$ 30.000,00 foi comprado por certa pessoa, em prestações mensais iguais a R$ 1.734,90 sem dar entrada alguma. Sendo a taxa de juros de 4% ao mês, calcule o número de prestações a pagar.

23 - Uma mercadoria é vendida por R$ 5.000,00 à vista ou, por R$ 1.000,00 de entrada, mais prestações mensais iguais de R$ 480,97. Sabendo-se que a taxa de juros considerada é de 3,5% ao mês, qual é o número de prestações?

24 - Uma financeira anuncia que seus coeficientes para financiamento de carros em 24 meses são:

a) carro *zero Km* --- 0,06480
b) carro *usado* --- 0,06815

Se uma pessoa quiser financiar R$ 20.000,00 em 24 meses na compra de um carro zero Km, pergunta-se quanto deverá pagar de prestação mensal?

25 – Qual o valor que, financiado à taxa de 4% ao mês, pode ser pago ou amortizado em 5 prestações mensais iguais e sucessivas de R$ 100,00 cada uma.

26 - Um empréstimo de R$ 30.000,00 é concedido por uma instituição financeira para ser liquidado em 12 prestações mensais iguais e consecutivas. Sabendo-se que a taxa de juros é de 3,5% ao mês, calcular o valor de cada prestação.

27 – Calcule o número de prestações semestrais de R$ 15.000,00 cada uma, capaz de liquidar um financiamento de R$ 49.882,65 à taxa de 20% ao semestre.

28 - Qual é o montante de uma anuidade periódica de R$ 500,00 aplicada a 6% ao trimestre, por 5 anos?

29 – Uma pessoa, planejando a construção de uma casa, prevê dispêndios mensais de R$ 100.000,00 nos meses de setembro, outubro e novembro. Quanto deve ser depositado mensalmente de janeiro a agosto do mesmo ano, para que seja possível efetuar tais retiradas, considerando remuneração de 3% ao mês sobre os depósitos?

30 – Quantos depósitos bimestrais de R$ 1.000,00 serão necessários para que, se a remuneração for de 4% ao bimestre, se tenha R$ 29.778,08?

Anuidades antecipadas

1 – Qual é o valor futuro de uma renda antecipada de 10 termos mensais de R$500,00 à taxa de 1,5% ao mês?

2 – Quanto se deve depositar no início de cada semestre, com antecipação, numa instituição financeira que paga 9% ao semestre, para constituir o montante de R$ 50.000,00 no final de 3 anos, sendo os juros capitalizados semestralmente?

3 - Qual o montante a receber ao final do 5º mês, resultante da aplicação de 5 prestações mensais iguais e consecutivas de R$ 100,00, à taxa de 4% ao mês, sabendo-se que a primeira aplicação será feita na data do contrato?

4 - Determinar o valor de um imóvel financiado em 24 prestações iguais de R$5.054,03 sabendo-se que a taxa de juros cobrada é de 3,5% ao mês e que a primeira prestação deverá ser paga no ato da assinatura do contrato.

5 - Uma certa pessoa compra uma mercadoria em 24 prestações iguais de R$630,64 sendo que a primeira prestação é dada como entrada. Sabendo-se que a taxa do mercado é de 4% ao mês, qual será o preço à vista da referida mercadoria?

6 – Qual o valor atual de uma dívida que pode ser amortizada por 12 prestações bimestrais antecipadas de R$ 1.000,00 cada uma, sendo 5% ao bimestre a taxa de juros?

7 – Determine o valor da prestação mensal para amortizar, com 6 prestações antecipadas, um empréstimo de R$ 8.000,00 a juros de 3% ao mês.

8 – José contraiu uma dívida de R$ 25.630,00 que deverá ser paga em 12 prestações mensais antecipadas de R$ 2.500,00. Qual é a taxa de juros?

9 – Quantas prestações anuais antecipadas de R$ 1.688,17 serão necessárias para pagar uma dívida futura de R$ 165.000,00 com uma taxa de juros de 40% ao ano?

10 - Uma pessoa deposita R$ 1.000,00 mensalmente. Sabendo-se que ela está ganhando 2% ao mês, quanto possuirá em 2 anos?

11 – Uma pessoa deseja comprar um carro por R$ 40.000,00 à vista, daqui a 12 meses. Admitindo-se que ela vá poupar uma certa quantia mensal, que será aplicada em letras de câmbio, rendendo 2,2% ao mês de juros compostos, determine quanto deve ser poupado mensalmente.

12 – A que taxa uma pessoa, realizando depósitos imediatos no valor de R$ 809,30 , forma um capital de R$ 13.500,00 ao fazer o décimo quinto depósito?

13 – Quantas prestações mensais imediatas de R$ 500,00 devem ser depositadas, à taxa de 2% ao mês, a fim de constituir um montante de R$ 6.706,00?

14– Uma pessoa deposita R$ 680,00 no final de cada mês. Sabendo-se que seu ganho é de 1,5% ao mês, quanto possuirá em 2 ½ anos?

15 – Qual depósito trimestral que, durante 4 anos consecutivos, produz um montante de R$ 200.000,00 após o último depósito? Considere a taxa de 10% ao trimestre.

16 – Qual a importância constante a ser depositada em um banco, ao final de cada ano, à taxa de 6% ao ano, capitalizados anualmente, de tal modo que, ao fazer o décimo depósito, forme o capital de R$ 400.000,00?

Anuidades diferidas

1 - Uma empresa obtém um empréstimo de R$ 100.000,00 para ser quitado em 5 prestações mensais iguais e consecutivas. Sabemos que a 1ª prestação tem o seu vencimento 90 dias após a data do contrato e que a taxa de juros cobrada pelo Banco X é de 6% ao mês, calcular o valor das prestações.

2 - Antônio compra de um amigo, um apartamento cujo valor à vista é de R$150.000,00 nas seguintes condições: entrada de R$ 50.000,00 mais prestações mensais de R$ 18.598,04 com um ano de carência. Sabendo-se que a taxa de juros contratada foi de 4,5% ao mês, qual o número de prestações?

3 - Qual o valor atual ou presente de uma renda de 15 termos mensais de R$ 700,00 com três meses de carência, à taxa de 1,5% ao mês?

4 - Qual o valor presente de uma dívida que pode ser amortizada com 10 prestações mensais de R$ 500,00, sendo de 2% a taxa de juros e devendo a primeira prestação ser paga 3 meses depois de realizado o empréstimo?

5 - Uma divida de R$ 20.000,00 deve ser amortizada com 6 pagamentos bimestrais consecutivos, sendo de 4% ao bimestre a taxa de juros. Calcule esta prestação, sabendo-se que o pagamento da primeira delas deve ser efetuado 4 meses após a realização do empréstimo.

Outras anuidades

1 - Qual o montante ao final de 6 trimestres, resultante da aplicação de 6 parcelas trimestrais de R$ 1.000,00 , R$ 4.000,00 , R$ 2.000,00 , R$ 6.000,00 , R$ 3.000,00 e R$ 5.000,00 à taxa de 10% ao trimestre, sendo a primeira aplicação feita no final do 1º trimestre?

2 - Calcular o valor presente da série representada por 5 pagamentos mensais consecutivos de R$ 1.700,00 , R$ 3.000,00 , R$ 1.250,00 , R$ 2.300,00 e R$ 980,00 , considerando a taxa de 4% ao mês.

3 - Certa pessoa vende um carro a um amigo cobrando juros de 1% ao mês. O negócio foi feito da seguinte forma:

R$ 5.000,00 de entrada;

R$ 4.000,00 no 1º mês;

R$ 6.000,00 no 2º mês;

R$ 1.000,00 no 3º mês;

R$ 3.000,00 no 4º mês.

Qual o valor do carro à vista, uma vez que estes pagamentos soldam toda a dívida?

4 - Uma dívida foi liquidada em 4 prestações anuais de R$ 37.551,02, R$ 12.500,00, R$ 113.800,00 e R$ 97.300,00, respectivamente, vencíveis no final de cada ano. Sabendo-se que a taxa de juros cobrada foi de 40% ao ano, calcular o valor da dívida.

5 - Um empréstimo de R$ 6.500,00 será pago em 5 prestações mensais, iguais e consecutivas, à uma taxa de 12% ao semestre. Pergunta-se:

a) qual o valor de cada prestação se elas forem postecipadas;
b) e se elas forem antecipadas;
c) se houver uma carência de 3 meses, qual o valor de cada PMT?

6 - Um computador será pago em 7 prestações mensais , consecutivas e postecipadas, sendo as de ordem ímpar no valor de R$ 425,00 e as de ordem par no valor de R$ 640,00. Qual o valor desse computador à vista sabendo-se que a taxa de juros contratada foi de 1,8% ao mês?

Sistemas de Amortização de Empréstimos e Financiamentos

QUESTÕES PARA DISCUSSÃO INICIAL DO CAPÍTULO

CONCEITOS A SEREM DEFINIDOS NESSE CAPÍTULO

Sistema de Amortização Constante – SAC

Price

Sistema de Amortização Variável

Sistema de Amortização Misto

Segundo as práticas habituais, os empréstimos classificam-se em: de curto, de médio e de longo prazo.

Os sistemas de amortização são desenvolvidos basicamente para operações de empréstimos e financiamentos de longo prazo, envolvendo desembolsos periódicos do principal e encargos financeiros.

Os problemas mais importantes num empréstimo de longo prazo dizem respeito à explicitação do sistema de reembolso adotado e ao cálculo da taxa de juros efetivamente cobrada.

Existem várias maneiras de amortizar uma dívida, devendo as condições de cada operação estarem estabelecidas em contrato firmado entre o credor (mutuante) e o devedor (mutuário).

Os sistemas de amortização de empréstimos e financiamentos tratam, basicamente, da forma pela qual o principal e os encargos financeiros são restituídos ao credor do capital.

6.1. Definições básicas

✓ Encargos financeiros – Representam os juros da operação, caracterizando–se como custo para o devedor e retorno para o credor.

✓ Amortização – Refere-se exclusivamente ao pagamento do principal (capital emprestado), o qual é efetuado, geralmente, através de parcelas periódicas (mensais, trimestrais, etc.).

✓ Saldo devedor – Representa o valor do principal da dívida, em determinado momento, após a dedução do valor já pago pelo credor a título de amortização.

✓ Prestação – É composto do valor da amortização mais os encargos financeiros devidos em determinado período de tempo. Assim: Prestação = Amortização + Encargos

✓ Carência – Muitas operações de empréstimos e financiamentos prevêem um diferimento na data convencional do início dos pagamentos

6.2. Sistema de amortizações constantes - SAC

O credor exige a devolução de principal em **n** parcelas iguais, incidindo os juros sobre o saldo devedor.

$$\boxed{\text{Amortização} = \frac{Valordoempréstimo}{Númerodeprestações}}$$

6.2.1. SAC sem carência.

Uma empresa pede emprestados R$ 100.000,00 que o banco entrega no ato. Sabendo-se que o principal será amortizado em prestações semestrais, no prazo de 5 anos e que a taxa cobrada é de 30% ao ano, construa a planilha.

Taxa equivalente semestral a 30% ao ano:

$1 + i_a = (1+i_s)^2$

$1{,}30 = (1+i_s)^2 \qquad \sqrt{1{,}30} = (1+i_s)$

$i_s = 0{,}140175 = 14{,}0175\%$ ao semestre

$$\text{Amortização} = \frac{100.000{,}00}{10} = 10.000{,}00 / semestre$$

Períodos (semestres)	Saldo devedor ($)	Amortização ($)	Juros ($)	Prestação ($) (amortização. + juros)
0	100.000,00	--	--	--

1	90.000,00	10.000,00	14.017,50	24.017,50
2	80.000,00	10.000,00	12.615,80	22.615,80
3	70.000,00	10.000,00	11.214,00	21.214,00
4	60.000,00	10.000,00	9.812,30	19.812,30
5	50.000,00	10.000,00	8.410,50	18.410,50
6	40.000,00	10.000,00	7.008,80	17.008,80
7	30.000,00	10.000,00	5.607,00	15.607,00
8	20.000,00	10.000,00	4.205,30	14.205,30
9	10.000,00	10.000,00	2.803,50	12.803,50
10	--	10.000,00	1.401,80	11.401,80
Total	--	100.000,00	77.096,50	177.096,50

6.2.2. SAC com carência de dois anos e pagamento de juros

Utilizaremos o mesmo exemplo.

Períodos (semestres)	Saldo devedor ($)	Amortização ($)	Juros ($)	Prestação ($)
0	100.000,00	--	--	--
1	100.000,00	--	14.017,50	14.017,50
2	100.000,00	--	14.017,50	14.017,50
3	100.000,00	--	14.017,50	14.017,50
4	100.000,00	--	14.017,50	14.017,50
5	90.000,00	10.000,00	14.017,50	24.017,50
6	80.000,00	10.000,00	12.615,80	22.615,80

7	70.000,00	10.000,00	11.214,00	21.214,00
8	60.000,00	10.000,00	9.812,30	19.812,30
9	50.000,00	10.000,00	8.410,50	18.410,50
10	40.000,00	10.000,00	7.008,80	17.008,80
11	30.000,00	10.000,00	5.607,00	15.607,00
12	20.000,00	10.000,00	4.205,30	14.205,30
13	10.000,00	10.000,00	2.803,50	12.803,50
14	--	10.000,00	1.401,80	11.401,80
Total	--	100.000,00	133.166,50	233.166,50

6.2.3. SAC com carência de 2 anos e prazo de utilização não-unitário

Períodos (semestres)	Saldo devedor ($)	Amortização ($)	Juros ($)	Prestação ($)
0	50.000,00	--	--	--
1	100.000,00	--	7.008,70	7.008,75
2	100.000,00	--	14.017,50	14.017,50
3	100.000,00	--	14.017,50	14.017,50
4	100.000,00	--	14.017,50	14.017,50
5	90.000,00	10.000,00	14.017,50	24.017,50
6	80.000,00	10.000,00	12.615,80	22.615,80
7	70.000,00	10.000,00	11.214,00	21.214,00
8	60.000,00	10.000,00	9.812,30	19.812,30
9	50.000,00	10.000,00	8.410,50	18.410,50
10	40.000,00	10.000,00	7.008,80	17.008,80

11	30.000,00	10.000,00	5.607,00	15.607,00
12	20.000,00	10.000,00	4.205,30	14.205,30
13	10.000,00	10.000,00	2.803,50	12.803,50
14	--	10.000,00	1.401,80	11.401,80
Total	--	100.000,00	126.157,75	226.157,75

6.2.4. SAC com carência (2 anos) e capitalização de juros.

Períodos (semestres)	Saldo devedor ($)	Amortização ($)	Juros ($)	Prestação ($)
0	100.000,00	--	--	--
1	114.017,50	--	--	--
2	129.999,90	--	--	--
3	148.222,60	--	--	--
4	168.999,70	--	--	--
5	90.000,00	10.000,00	92.689,30	102.689,30
6	80.000,00	10.000,00	12.615,80	22.615,80
7	70.000,00	10.000,00	11.214,00	21.214,00
8	60.000,00	10.000,00	9.812,30	19.812,30
9	50.000,00	10.000,00	8.410,50	18.410,50
10	40.000,00	10.000,00	7.008,80	17.008,80
11	30.000,00	10.000,00	5.607,00	15.607,00
12	20.000,00	10.000,00	4.205,30	14.205,30
13	10.000,00	10.000,00	2.803,30	12.803,30
14	--	10.000,00	1.401,80	11.401,80
Total	--	100.000,00	155.768,30	255.768,30

6.2.5. SAC com carência (2 anos) com juros capitalizados e acrescidos ao saldo devedor.

Períodos (semestres)	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	100.000,00	--	--	--
1	114.017,50	--	--	--
2	129.999,90	--	--	--
3	148.222,60	--	--	--
4	169.000,00	--	--	--
5	152.100,00	16.900,00	23.689,60	40.589,60
6	135.200,00	16.900,00	21.320,60	38.220,60
7	118.300,00	16.900,00	18.951,70	35.851,70
8	101.400,00	16.900,00	16.582,70	33.482,70
9	84.500,00	16.900,00	14.213,70	31.113,70
10	67.600,00	16.900,00	11.844,80	28.744,80
11	50.700,00	16.900,00	9.475,80	26.375,80
12	33.800,00	16.900,00	7.106,90	24.006,90
13	16.900,00	16.900,00	4.737,90	21.637,90
14	--	16.900,00	2.369,00	19.269,00
Total	--	169.000,00	130.292,70	299.292,70

6.3. Sistema de amortização francês – SAF - PRICE

Prestação. Utiliza-se o modelo básico PMT = $\boxed{\dfrac{PV}{FPV(i,n)}}$

6.3.1. SAF – PRICE sem carência

Um banco empresta R$ 100.000,00 entregues no ato, sem prazo de carência. Sabendo-se que o banco utiliza o sistema francês, que a taxa contratada seja de 30% ao ano e que o banco quer a devolução em 5 anos, com prestações semestrais, construa a planilha.

PMT = $\dfrac{100.000,00}{5,212555} = 19.184,40$

Períodos (semestres)	Saldo devedor ($)	Amortização ($)	Juros ($)	Prestação ($)
0	100.000,00	--	--	--
1	94.833,10	5.166,90	14.017,50	19.184,40
2	88.941,80	5.891,20	13.293,20	19.184,40
3	82.224,80	6.717,00	12.467,40	19.184,40
4	74.566,20	7.658,60	11.525,90	19.184,40
5	65.834,10	8.732,10	10.452,30	19.184,40
6	55.877,90	9.956,20	9.228,30	19.184,40
7	44.526,20	11.351,80	7.832,70	19.184,40
8	31.583,20	12.943,00	6.241,50	19.184,40
9	16.825,90	14.757,30	4.427,20	19.184,40
10	--	16.825,90	2.358,60	19.184,40
Total	--	100.000,00	91.844,00	191.844,00

6.3.2. SAF – PRICE com carência (2 anos) e pagamento de juros.

PMT = $\dfrac{100.000}{5,21257} = 19.184,40$

Períodos (semestres)	Saldo devedor ($)	Amortização ($)	Juros ($)	Prestação ($)
0	100.000,00	--	--	--
1	100.000,00	--	14.017,50	14.017,50
2	100.000,00	--	14.017,50	14.017,50
3	100.000,00	--	14.017,50	14.017,50
4	100.000,00	--	14.017,50	14.017,50
5	94.833,10	5.166,90	14.017,50	19.184,40
6	88.941,80	5.891,20	13.293,20	19.184,40
7	82.224,80	6.717,00	12.467,40	19.184,40
8	74.566,20	7.658,60	11.525,90	19.184,40
9	65.834,10	8.732,10	10.452,30	19.184,40
10	55.877,90	9.956,20	9.228,30	19.184,40
11	44.526,20	11.351,80	7.832,70	19.184,40
12	31.583,20	12.943,00	6.241,50	19.184,40
13	16.825,90	14.757,30	4.427,20	19.184,40
14	--	16.825,90	2.358,60	19.184,40
Total	--	100.000,00	147.914,00	247.914,00

6.3.3. SAF – PRICE com carência (02 anos), com juros capitalizados e acrescidos ao saldo devedor.

$$\text{PMT} = \frac{168999,70}{5,212555} = 32421,70$$

Períodos (semestres)	Saldo devedor ($)	Amortização ($)	Juros ($)	Prestação ($)
0	100.000,00	--	--	--
1	114.017,50	--	--	--
2	129.999,90	--	--	--
3	148.222,60	--	--	--
4	168.999,70	--	--	--
5	160.267,53	8.732,17	23.689,53	32.421,70
6	150.311,40	9.956,20	22.465,50	32.421,70
7	138.959,70	11.351,80	21.069,90	32.421,70
8	126.016,70	12.943,00	19.478,70	32.421,70
9	111.259,40	14.757,30	17.664,40	32.421,70
10	94.433,50	16.825,90	15.595,80	32.421,70
11	75.249,10	19.184,40	13.237,20	32.421,70
12	53.375,50	21.873,70	10.548,00	32.421,70
13	28.435,70	24.939,80	7.481,90	32.421,70
14	--	28.435,70	3.985,97	32.421,70
Total	--	169.000,00	155.217,00	324.217,00

Exercícios

Amortizações.

1 – Um empréstimo de R$ 80.000,00 deve ser pago em 4 amortizações constantes anuais, sem carência. A taxa de juros contratada é de 8 % ao ano. Construir a planilha de financiamento.

2 – O Banco L & S emprestou R$ 240.000,00 pagos no ato, à taxa de 9% ao ano. O prazo total para a amortização do financiamento é de 3 anos e meio, incluindo-se 1 ano de carência. O pagamento de juros e das amortizações constantes deve ser semestral. Construir a planilha.

3 – Uma empresa recebe um financiamento de R$ 300.000,00 para ser pago em 6 prestações anuais, com 2 anos de carência, pelo Sistema Francês. Construir a planilha, considerando-se a taxa de juros de 20% ao ano.

4 – Usar o mesmo exemplo para 6 parcelas semestrais, com taxa efetiva.

5 – Usar ainda o exemplo 3 , com juros capitalizados e incorporados ao principal, para serem amortizados nas prestações.

6 – Um empréstimo de R$ 260.000,00 foi entregue pela financiadora em 2 parcelas iguais, defasadas em um ano. Com uma carência de 3 anos e uma taxa de juros de 16% ao ano, como ficaria a planilha?

7 – Qual será a 1ª prestação trimestral de um financiamento de R$ 50.000,00 com carência de 3 anos, tendo sido os juros capitalizados na carência? Considerando-se a taxa de juros de 16% ao ano, Sistema Francês – Tabela Price e 12 prestações – separar a parcela referente aos juros na primeira prestação.

8 – Uma empresa em fase de expansão, obtém de uma agência governamental, um financiamento de R$ 48.000.000,00 a ser liberado em três parcelas quadrimestrais seqüenciais, sendo de R$ 13.000.000,00 a primeira, de R$ 30.000.000,00 a segunda e de R$ 5.000.000,00 a terceira.

Os encargos financeiros são basicamente os seguintes:

a) taxa efetiva de juros de 9% ao ano;
b) comissão de abertura de crédito de 0,5% sobre o valor do financiamento - valor esse cobrado quando da liberação da primeira parcela.

O órgão financiador concede 4 quadrimestres de carência, sendo pagos juros durante a carência. O prazo total do financiamento será de 5 anos, o SAC como sistema de amortização adotado e as amortizações quadrimestrais.

9 - Um empréstimo de R$ 70.000,00 será realizado à uma taxa de 26% ao ano, num período de 2 anos, com prestações quadrimestrais. Pergunta-se:

a) qual o valor da 4ª amortização pelo SAC;
b) qual o valor da 6ª prestação pelo SAF;
c) qual o valor da 2ª prestação pela Tabela Price;
d) qual o valor do 2º saldo devedor, 2ª amortização, 2º juro e 2ª prestação pelo SAF;
e) quais os valores da amortização, do juro e da prestação de 2º período pelo SAM;
f) se o sistema utilizado fosse o SAA com pagamento de juros, quando seria efetuada a amortização, qual o seu valor e qual o valor da prestação nesse período?

BIBLIOGRAFIA

BEDRAN, Afonso Jung. **Matemática Financeira.** Apostila para cursos de graduação. UFJF.

CRESPO, Antônio Arnot. **Matemática Comercial e Financeira**. 3ª ed. Rio de Janeiro: Saraiva, 1988

MATHIAS, Wasington Franco. **Matemática Financeira**. 2ª ed. São Paulo: Atlas 1996

NETO, Alexandre Assaf. **Matemática Financeira e suas aplicações.** 4ª ed. São Paulo: Atlas, 1998

PUCCINI, Abelardo de Lima. **Matemática Financeira**. 5ª ed. Rio de Janeiro:LTC,1993

SAMANEZ, Carlos Patricio. **Matemática Financeira. Aplicações à Análise de Investimento**. São Paulo: Makron Books, 1999

SARAIVA, Eduardo César Gomes. **Matemática Financeira.** Ed. Rio de Janeiro: FGV Managenment – Cursos de educação continuada. 62 p.

SOBRINHO, José Dutra Vieira. **Manual de Aplicações Financeiras: HP-12C**. 2ª ed. São Paulo: Atlas, 1996

SOBRINHO, José Dutra Vieira. **Matemática Financeira**. 6ª ed. São Paulo: Atlas,1997

SPRITZER, Moisés. **Matemática Financeira.** 1ª Ed. Rio de Janeiro: FGV Managenment – Cursos de educação continuada. 69 p.

VERAS, Lília Ladeira. **Matemática Financeira.** 3ª ed. São Paulo: Atlas,1999

VIANNA, Fernando. **Matemática Financeira é Fácil - com ou sem HP-12C**, 2ª ed. Belo Horizonte: Lê, 1995

ZIMA, Peter. **Fundamentos de Matemática Financeira**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1995