Facultad
de
Ciencias

FUNDAMENTOS DE TEORÍA DE JUEGOS

(FUNDAMENTALS OF GAME THEORY)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Pablo Fernández Pisano

Director: Juan Antonio Cuesta Albertos

Febrero 2020

Quiero dar las gracias en primer lugar a mi tutor por haberme orientado y ayudado durante todo el tiempo que ha durado el proceso de este trabajo. Agradecer también, a todos los profesores de la Universidad de Cantabria, que me han enseñado matemáticas y guiado durante toda la carrera, junto con los alumnos y mis compañeros que también me han ayudado, además de amigos y familiares.

Índice general

Resumen

El trabajo consistirá en un análisis, por parte del alumno, de los principios y resultados más relevantes dentro de las teorías de Juegos y de la Decisión. Fundamentalmente los relativos a los conceptos de valor del juego, estrategias mínimas, equilibrio de Nash y su relación con la teoría de la utilidad. Se profundizará especialmente en los juegos de suma cero para dos personas. Se hace además hincapié en las soluciones que se han propuesto para actuar de un modo óptimo, calculando las estrategias óptimas y el valor de un juego. También prestamos atención a la interpretación matemática de las valoraciones diferentes que los jugadores conceden a las recompensas asociadas a un juego, y se analizarán algunos tipos de juego específicos como son los juegos estocásticos, los recursivos o los multietápicos.

Palabras clave: Teoría de Juegos, cálculo de estrategias, optimización, Minimax, juegos de suma cero, juegos de multietapas, valor del juego, Teoría de la Utilidad.

Summary

This work will consist essentially in an analysis by the student about the most relevant principle and result of Game Theory and Decision Theory. Fundamentally to the topic of game value, minimal strategies, Nash' equilibrium and it's relation with Utility Theory It will deepend in two person zero sum games. We will emphasize in proposed solutions to compute the game value and the optimal strategies. We will pay attention to the mathematical interpretation of player rating on the game's associated reward, and some types of games will be analyzed, like games of exhaustion, stochastic games and recursive games.

Keywords: Game Theory, strategy calculation, optimization, Minimax, zero sum games, multi-stage games, game value, Utility Theory.

Capítulo 0

Introducción

Es habitual encontrarnos en nuestro día a día con situaciones o problemas que nos obliguen a tomar una decisión. La elección tendrá unas consecuencias más favorables o menos que otras, y en determinados casos serán tan distintas o importantes que habrá que pensar qué elección nos beneficiará más que las demás.
Estas situaciones se presentan tanto a las personas, como a los países, partidos políticos, empresas... a los cuales además de sus propias decisiones, les afectan las decisiones de los demás. A veces, sería posible cooperar entre algunos de los participantes para obtener mejores beneficios y otras veces no.
La forma de actuar eligiendo unas decisiones u otras dependiendo de la situación se conocen como estrategias.
Ejemplos de estrategias hay muchos, desde los más simples y cotidianos hasta los más complejos; el decidir si se cena en un restaurante o en otro en base al precio de la comida y su calidad, cómo debe variar el precio de un determinado producto de una empresa en función de cómo actúe la competencia y siendo a su vez lo suficientemente alto para compensar el coste del proceso de fabricación, materias primas y distribución, pero tampoco demasiado para no repeler a los compradores. Y otros ejemplos como la proposición de una reforma laboral por parte de un partido político, el voto de los ciudadanos a ese u otro partido...

El área de las matemáticas que estudia, analiza y modela este tipo de situaciones se llama "Teoría de Juegos", y a pesar de no haber estudiado este área en mis años carrera, es una herramienta sumamente importante sobre todo para la teoría económica.

Este tipo de situaciones en donde se estudian las estrategias son las llamadas "Juegos", y su nombre deriva de su analogía con los juegos de mesa. Estos juegos son los objetos de estudio por ser relativamente sencillos de visualizar, aunque como hemos visto los jugadores no se restringen solo a personas. El final de estos juegos trae aparejada una recompensa o penalidad, que aún siendo la misma, puede percibirse de modo diferente por cada uno de los jugadores.

Enfocaremos este trabajo desde un punto de vista teórico al estudio de los juegos no cooperativos, y más concretamente a los juegos de suma cero (donde la ganancia o pérdida de un jugador se equilibra con exactitud con las pérdidas o ganancias de los otros jugadores) que son los más habituales. Utilizaremos gráficos realizados con GeoGebra por el autor para expresar de una manera más visual algunos ejemplos. Expondremos varias clases de este tipo de juegos y encontraremos las estrategias óptimas y el valor del juego para cada uno de ellos.
Los dos puntos que a mi parecer son más importantes, son la demostración de existencia de equilibrios de Nash y la demostración del Teorema Minimax:

John Forbes Nash fue el matemático que definió formalmente en 1950 el equilibrio de un juego (llamado ahora equilibrio de Nash). Un año después demostró la existencia de estos equilibrios. En este trabajo, definiremos los equilibrios de Nash y demostraremos su existencia para todo juego de n jugadores con estrategias mixtas de la misma forma que lo hizo John Nash.
Demostraremos también el Teorema Minimax, que es anterior y equivalente al Teorema de existencia del equilibrio de Nash para juegos no cooperativos de dos personas y de suma cero. Dado que este tipo de juegos son los más habituales, este teorema es muy probablemente el más famoso de todo el área de Teoría de Juegos y no podía pasarse por alto. Lo demostraremos también de la misma forma que lo demostró su descubridor John von Neumann en 1928.

Se expondrá lo citado anteriormente siguiendo en mi opinión un orden natural de capítulos:

Capítulo 1: Introducimos la teoría de juegos, con la definición de juego, sus distintas formas de presentación y las estrategias posibles. Distinguiremos en particular entre las acciones concretas a tomar (las estrategias puras) y la realización de sorteos para determinar las acciones adoptadas (las estrategias mixtas). Veremos cómo la introducción de sorteos supone ventajas de actuación.

Capítulo 2: Definimos y demostramos las existencias de equilibrios de Nash en todos los juegos posibles de n jugadores con estrategias mixtas.

Capítulo 3: Demostramos el Teorema Minimax, la existencia de un único valor de juego para dos jugadores en los juegos de suma cero, que es el caso más habitual. Distinguimos varios tipos de matrices de juegos y buscamos su valor y soluciones óptimas en cuanto a estrategias, que son las que se dan en el equilibrio de Nash.

Capítulo 4: Se presentan varios tipos de juegos que, sin estar incluidos en el contexto del capítulo anterior, pueden resolverse con la teoría contenida en él. Aquí se incluyen, por ejemplo, juegos en cuyo desarrollo intervienen otros juegos o juegos que, en determinadas circunstancias, devuelven a sus jugadores a su posición inicial.

Capítulo 5: Se desarrollan los fundamentos de la Teoría de la Utilidad, que pretenden dar una interpretación matemática al hecho de que diferentes jugadores aprecian de modo diferente una misma recompensa (aún cuando esta sea un premio en metálico).

Utilizaremos en gran parte la teoría de los capítulos I, II, III, V, VI y VII de [5], junto [1] para la demostración de la existencia de equilibrios de Nash y [2] para la demostración del Teorema Minimax, además de otras referencias recogidas en los distintos capítulos.

Capítulo 1

Nociones generales de un juego

Podemos hacernos una idea de lo que es un juego pensando en los juegos de mesa. Llamaremos *movimiento* a cualquier acción ejecutada de entre las contempladas en el juego y realizada aleatoriamente o por un *jugador*, siendo este un participante.
Empezando desde un punto dado, desde una situación inicial, cada jugador del conjunto de jugadores (el cual consideraremos con cardinal mayor o igual a uno) realiza una secuencia de movimientos de forma alternativa, cada uno de los cuales se elige entre las posibilidades que las reglas del juego determinan en cada posición.
Además de los movimientos de cada jugador, puede haber un factor aleatorio que ejecute movimientos escogidos de forma azarosa y no a voluntad de ningún jugador. Un ejemplo es el mus, en donde las cartas que recibe cada jugador son completamente aleatorias. Además de la aleatoriedad, también es un factor importante el conocimiento de la situación y de los movimientos realizados. Cada movimiento puede ser conocido o no por todos los participantes del juego. Por ejemplo en el ajedrez, cada jugador sabe perfectamente todos los movimientos que se han hecho desde el comienzo de la partida. En caso contrario podemos referirnos al "pares o nones", en el que no se conoce el movimiento del contrincante hasta el final del juego.
Al final de cada juego, además, puede haber una recompensa para cada jugador, ya sea económica, o emocional que depende del progreso y final del juego. La recompensa puede verse como una función que asigna una ganancia o pérdida a cada jugador por cada posible final del juego.
La Teoría de la Utilidad (Ver capítulo 5) permite ver el valor personal de cada recompensa para cada jugador desde un punto de vista matemático.

Definición 1.1.
Entenderemos un juego como el sistema $G := \{(\Sigma_i, \pi_i) : i \in I\}$ *donde* $I := \{1, 2, ..., n\}$ *es el conjunto de los* n *jugadores,* Σ_i *es el conjunto finito que contiene todas las posibles secuencias de movimientos del jugador* i *y* π_i *es una función del conjunto* $\Sigma_1 \times \Sigma_2 \times ... \times \Sigma_n$ *en los reales conocida como la recompensa del jugador* i.

A continuación analizaremos más detenidamente un juego y las dos formas más comunes de representarlo:

1.1. Un juego en forma extensiva

Los juegos como hemos señalado constan de tres elementos:

i) Alternancia de movimientos personales o aleatorios.

ii) Posible carencia de conocimiento.

iii) Función de recompensa, que asigna los premios a cada jugador.

A partir de aquí podemos esquematizar los movimientos y cada posible secuencia por medio de los arboles de juego.

Definición 1.2.
Un árbol de juego es un grafo dirigido de tipo árbol formado por una raíz desde la cual parte una colección finita de nodos que representan todas las posibles posiciones de un juego y que están conectados por aristas que representan los posibles movimientos.

Definición 1.3.
Sea T un árbol de juego con un nodo inicial A llamado punto de comienzo ó posición de salida de T. Decimos que el nodo C sigue al nodo B si existe una secuencia de aristas que conectan A y C pasando a través de B. Se dice además que C sigue inmediatamente a B o que es un seguidor inmediato de B si C sigue a B y existe una arista que conecta B con C. Un nodo X se dice que es terminal si no existe otro nodo que le siga.

Definición 1.4 (Juego de n-jugadores en forma extensiva)**.**
Un juego con n jugadores en forma extensiva consiste en:

α) *Un árbol de juego T.*

β) *Una función, llamada función de recompensa, que asigna un vector n-dimensional a cada nodo terminal de T.*

γ) *Una partición de los nodos no terminales de T en n+1 conjuntos S_0, S_1, ..., S_n llamados conjuntos jugables de los jugadores.*

ζ) *Una distribución de probabilidad definida para cada nodo perteneciente a S_0 con soporte en el conjunto de sus seguidores inmediatos.*

λ) *Para cada $i = 1, ...n$, una subpartición de S_i en los subconjuntos $S_i^1, ..., S_i^{k_i}$ llamados conjuntos de información, de tal forma que dos nodos en el mismo conjunto de información tienen la misma cantidad h_i^j de seguidores inmediatos y cuyas aristas siguen una misma numeración ordinal respecto al movimiento que representan. Además, ningún nodo puede seguir a otro nodo que pertenezca al mismo conjunto de información.*

μ) *Para cada conjunto de información S_i^j, una aplicación constante f desde S_i^j hasta un elemento del conjunto de números ordinales que representan las aristas de los seguidores inmediatos de S_i^j.*

Los anteriores elementos entran en el juego de la siguiente forma: Empezamos el juego en el punto de partida, A. La partición $S_0, ..., S_n$ divide los movimientos en aleatorios (S_0) y personales, que corresponden a los n jugadores. En ζ se definen los esquemas de aleatorización en cada movimiento aleatorio. En λ se dividen los movimientos de cada jugador en conjuntos de información: cada jugador sabe en qué conjunto de información está, pero no en qué nodo exacto del conjunto de información, y μ le obliga a elegir el mismo movimiento desde todos los vértices del conjunto de información. En β se proporciona la función de recompensa, que asigna a los n jugadores su recompensa en cada posible final del juego.

Una vez entendida la idea de juego, concretaremos en el tipo de juego que será nuestro objeto de estudio:

Definición 1.5 (Juegos no cooperativos).
Llamaremos juego no cooperativo a uno cuyos jugadores toman decisiones independientemente del resto de jugadores tratando de maximizar su beneficio personal.

Este tipo de juegos difieren de los cooperativos, donde los jugadores cooperan para un objetivo en común.

En este trabajo asumiremos que los juegos son juegos no cooperativos, ya que aún habiendo juegos cooperativos no trataremos ninguno.

Ejemplo 1.6.
Para hacernos una idea de un juego no cooperativo, la Figura 1.1 muestra el árbol asociado al juego de 2 personas “Piedra, papel, tijera”. Aquí, el jugador I y el jugador II deben escoger una de entre las opciones “Piedra”, “Pape1” y “Tijera” para, dependiendo de la elección del otro jugador, ganar, perder o empatar en base a las siguientes reglas:
Piedra vence a la tijera, tijera vence al papel, papel vence a la piedra y cada objeto empata consigo mismo.

En este árbol, el nodo inicial A es la situación previa al primer movimiento del primer jugador (por ejemplo, el jugador I). La arista escogida (sea el movimiento piedra, papel o tijera) nos lleva a la situación donde se produce la elección del segundo jugador. Éste, desconociendo la elección del jugador I, elige una arista (un movimiento) para finalizar el juego.

Cada nodo terminal, tiene a su derecha el vector de la función de recompensa, en donde la recompensa del jugador I es representada por la primera componente y la recompensa del jugador II por la segunda.

El jugador II tiene un conjunto de información con 3 vértices $\{C, B, D\}$ porque desconoce el movimiento del jugador I. Por lo tanto, en este caso $S_1 = \{A\}$ y $S_2 = \{C, B, D\}$. Además el jugador II tiene un conjunto de información que coincide con S_2.

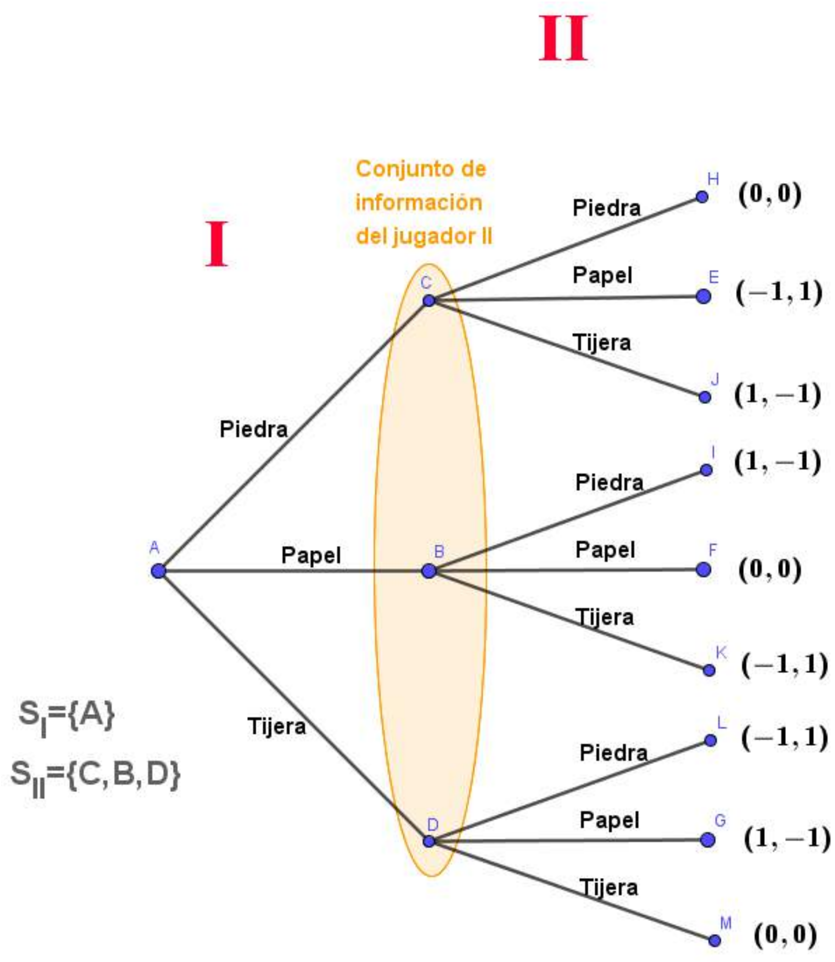

Figura 1.1: Piedra, papel, tijera en forma extensiva

□

Definición 1.7.
Se dice que un jugador tiene información perfecta en el juego G si y solo si todos sus conjuntos de información contienen un único elemento.
Se dice además que el juego T tiene información perfecta si todos los jugadores tienen información perfecta.

El juego de "Piedra, papel, tijera" no es un juego de información perfecta, ya que el jugador II tiene un conjunto de información con tres elementos. Un ejemplo de juego con información perfecta es el ajedrez, ya que cada jugador conoce perfectamente todos los movimientos precedentes tanto suyos como de su contrincante.

1.2. La forma normal: estrategias

Usaremos el término *estrategia* para identificar una lista conteniendo instrucciones con los pasos a seguir según vayan sucediendo unas cosas u otras. Si lo trasladamos a nuestro árbol, tenemos lo siguiente:

Definición 1.8.
Una estrategia σ para un jugador i se define como una función que asigna a cada conjunto de información S_i^j un número t entre 1 y k_i^j (donde k_i^j es la cantidad de nodos seguidores inmediatos de los nodos de S_i^j) representando este al t-ésimo número ordinal que representa la arista que sigue a cualquier nodo del conjunto de información.
El conjunto de todas las estrategias del jugador i se representa por Σ_i (mencionado previamente en la Definición 1.1).

En juegos sencillos, como el de piedra, papel y tijera, es fácil planificar las estrategias, pero si vamos a juegos más complejos como el ajedrez, quizá cada jugador pueda planificar sus próximos dos o tres movimientos, pero es impensable pretender planear una estrategia completa. Aún así, pasaremos por alto esta limitación práctica y asumiremos desde un punto de vista teórico que todas las estrategias quedan definidas antes de empezar el juego.

La estrategia que un jugador i quisiera seguir sería la que le proporcionase una mayor recompensa, es decir, situándonos en el árbol, sería la que le llevase a uno de los nodos terminales en donde se alcanza el máximo valor en la i-ésima coordenada.
Como esto es muy difícil de realizar, (puesto que, por ejemplo, un jugador difícilmente sabrá si su contrincante va a sacar piedra o papel) lo más acertado sería tomar para cada jugador i la esperanza de los posibles movimientos azarosos que le afecten en su función de recompensa π_i, de tal forma que se obvia el factor aleatorio y se considera únicamente

a cada jugador, pero asumiendo las posibles estrategias de los demás jugadores. Dado que los n jugadores están usando una n-tupla de estrategias, tenemos:

$$\pi(\sigma^1,\ \sigma^2, ...,\ \sigma^n) = (\ \pi_1(\sigma^1, \sigma^2, ..., \sigma^n), ...,\ \pi_n(\sigma^1, \sigma^2, ..., \sigma^n)) = \pi(\sigma). \tag{1.1}$$

Representaremos así la esperanza de la función de recompensa, considerando que el jugador i utiliza la estrategia $\sigma^i \in \Sigma_i$ y llamaremos σ a la n-tupla perteneciente al producto cartesiano $\Sigma_1 \times \Sigma_2 \times ... \times \Sigma_n$. Tabulamos de esta forma todas las posibles estrategias de los jugadores y movimientos del factor aleatorio.
A diferencia de un juego en su forma extensiva, en este apartado y en casi todo el resto del trabajo, utilizaremos la forma normal, que consiste en identificar el juego de n jugadores con un "array"n-dimensional, en donde la celda $\{a_{i_1, j_2, ..., k_n}\}$ contiene un vector n-dim con el valor de la función de recompensa en el nodo terminal en el que concluya el juego con las estrategias $i_i \in \Sigma_1$ del jugador 1, $j_2 \in \Sigma_2$ del jugador 2, ... y $k_n \in \Sigma_n$ del jugador n.
Como nuestro caso más habitual serán los juegos de dos jugadores, utilizaremos una matriz A en donde la celda $\{a_{i,j}\}$ contiene la función de recompensa habiendo utilizando las estrategias $i \in \Sigma_I$ y $j \in \Sigma_{II}$ del jugador I y jugador II respectivamente.

Ejemplo 1.9. Como ejemplo de un juego en forma normal, utilizaremos el juego "Piedra, papel, tijera"(ver la Figura 1.2):

II

I	Piedra	Papel	Tijera
Piedra	**(0, 0)**	**(−1, 1)**	**(1, −1)**
Papel	**(1, −1)**	**(0, 0)**	**(−1, 1)**
Tijera	**(−1, 1)**	**(1, −1)**	**(0, 0)**

Figura 1.2: Piedra, papel y tijera en forma normal

Piedra papel y tijera es además un juego de tipo suma cero, de los cuales hablaremos más adelante.

□

1.3. Tipos de estrategias

Definición 1.10 (Estrategias puras).
Definimos una estrategia como "pura" si esta asigna a cada conjunto de información de su jugador un número entre 1 *y* k*, donde* k *es la cantidad de nodos seguidores inmediatos.*

Por lo tanto, Σ_i es el conjunto de estrategias puras del jugador i. Entonces, si un jugador tiene N conjuntos de información y $k_1, k_2, ..., k_N$ nodos seguidores inmediatos de cada conjunto, el número total de posibles estrategias puras es $\prod_{i=1}^{N} k_i$.

Aunque parezca lógico tener que escoger un nodo inmediato de forma determinista, hay muchas situaciones en las que es preferible dejar esta elección al azar.

Ejemplo 1.11.
Supongamos que estamos jugando de nuevo a "Piedra, papel o tijera". Siendo el jugador II, intentarás averiguar la estrategia del jugador I pensando por ejemplo; "la gente suele escoger piedra", o "Él siempre saca piedra" para sacar papel y poder ganar al jugador I. Esto es un error, ya que el jugador I podría adelantarse a este razonamiento; "Él sabe que siempre saco piedra, así que sacará papel". El jugador II a su vez, podría adelantarse también al razonamiento del jugador I y optar entonces por sacar piedra, u optar por sacar tijera para evitar otro posible razonamiento del jugador I.
El caso es que jamás llegaremos a una solución acertada porque nunca podremos saber con seguridad qué sacará el jugador I.
Una posibilidad es dejar que la estrategia sea escogida al azar. Por lo tanto, el objetivo del jugador es elegir una distribución de probabilidad en cada conjunto de información que esté definida en el conjunto de los nodos que le siguen, y que, de alguna forma maximice sus beneficios.

□

El razonamiento del ejemplo nos lleva a las llamadas estrategias mixtas:

Definición 1.12 (Estrategias mixtas).
Le llamamos estrategias mixtas a las distribuciones de probabilidad en el conjunto de estrategias puras.

En el caso de que el jugador i tenga una cantidad finita m_i de estrategias puras, una estrategia mixta se reduce a un vector m_i-dim, $x = (x_1, ..., x_{m_i})$, satisfaciendo

$$x_j \geq 0, j = 1, ..., m_i, \qquad y \qquad \sum_{j=1}^{m} x_j = 1$$

Por lo tanto, podemos identificar el conjunto de estrategias mixtas X_i del jugador i con el subconjunto de $\mathbb{R}^{m_i}$ tal que

$$X_i := \left\{ (x_1, x_2, ..., x_{m_i}) \in \ \mathbb{R}^{m_i} \ : \ x_j \geq 0, \ \sum_{j=1}^{m_i} x_j = 1 \right\}$$

También, podemos definir X como el producto cartesiano $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$, el cual ademas cumple la proposición que sigue (cuya demostración puede encontrarse en [4]):

Proposición 1.13.
Con las condiciones mencionadas anteriormente, en un juego finito no cooperativo de n personas, tanto X_i con $i \in \{1, ...n\}$ como X son subconjuntos acotados, cerrados y convexos de $\mathbb{R}^{m_i}$ y $\mathbb{R}^{m_1+m_2+...+m_n}$ respectivamente con la topología usual.

Es en este punto donde se alcanza una situación complicada, puesto que es probable que la estrategia de un jugador perjudique a los demás y viceversa.

Si añadimos el caso de las estrategias mixtas a la función de recompensa, únicamente habría que contar (además del efecto del azar) con las esperanzas de las probabilidades definidas en las estrategias mixtas de todos los jugadores. Podremos calcular entonces la esperanza de la función de recompensa $\pi_i(\sigma^1, \ \sigma^2, ..., \ \sigma^n)$ sumando todos los posibles resultados para $\sigma^1, \ \sigma^2, ..., \ \sigma^n$ ponderados por la probabilidad de que se produzca cada uno de ellos.

Es aquí donde, aparte de buscar una estrategia para maximizar el beneficio propio, se busca la estrategia que maximice los beneficios teniendo en cuenta las estrategias de los demás. Estos aspectos se analizan en los capítulos que siguen.

Capítulo 2

Equilibrio de Nash

En 1950, el matemático John Nash definió formalmente el concepto de equilibrio para juegos finitos no cooperativos de n personas, y demostró la existencia de dichos equilibrios para esta clase de juegos [1]. En honor a su aportación, estos equilibrios son conocidos hoy en día como *equilibrios de Nash.*

2.1. Definición de equilibrio de Nash

Definición 2.1 (Equilibrio de Nash)**.**
Dado un juego T, una n-tupla de estrategias $\sigma^* = (\sigma^{*1}, \sigma^{*2}, ..., \sigma^{*n}) \in X$ *con* $\sigma^{*i} \in X_i$ *se dice que está en equilibrio o que es una n-tupla en equilibrio si y sólo si para cualquier jugador* $i \in I$ *(donde I es el conjunto de los n jugadores) y cualquier posible estrategia suya* $\mu^i \in X_i$*, se cumple que*

$$\pi_i(\sigma^{*1}, \sigma^{*2}, ..., \sigma^{*i-1}, \mu^i, \sigma^{*i+1}, ..., \sigma^{*n}) \leq \pi_i(\sigma^*) \tag{2.1}$$

Es decir, en esta situación cada jugador individual no gana nada modificando su estrategia mientras los otros jugadores mantengan las suyas. Así, cada jugador está ejecutando su mejor estrategia posible teniendo en cuenta las estrategias de los demás.

Es importante darse cuenta de que una n-tupla de estrategias donde se alcance el equilibrio no proporciona el mejor resultado para los jugadores en conjunto, sino el mejor resultado para cada uno considerando las estrategias del resto. Es posible incluso, que coordinando las estrategias de los jugadores, se alcanzase un resultado mejor para el conjunto. Un ejemplo de esto es el clásico dilema del prisionero:

Ejemplo 2.2.
La policía arresta a dos sospechosos. No hay pruebas suficientes para condenarlos y decide interrogarlos por separado, ofreciendo a ambos el mismo trato. Si uno confiesa y su cómplice no, el cómplice será condenado a la pena total, diez años, y el primero será liberado. Si

los dos confiesan y delatan al compañero, ambos serán condenados a seis años. Si ambos lo niegan, todo lo que podrán hacer será encerrarlos durante un año por un cargo menor.

	Jugador II lo niega	Jugador II confiesa
Jugador I lo niega	(-1,-1)	(-10,0)
Jugador I confiesa	(0,-10)	(-6,-6)

Figura 2.1: Matriz del juego "Dilema del prisionero"

Si cada jugador escoge su mejor estrategia con el objetivo de maximizar su propio beneficio (o de optimizar lo peor que le puede ocurrir), ambos escogerán la estrategia de confesar, que es la que les ofrece una pena máxima menor, la de 6 años. Si los dos jugadores colaboran, el objetivo de sus estrategias será el de minimizar la pena de cárcel en conjunto para ambos, por lo que escogerán negar el crimen. De esta forma, la pérdida para ambos jugadores será una pena de 1 año, que es una mejor resultado que el anterior para ambos.

$\square$

De la definición de equilibrio de Nash además, podemos sacar la conclusión de que, siendo $\pi_i(\sigma^{i \to \lambda_j})$ la recompensa esperada del jugador i si cambia a la estrategia pura λ_j mientras el resto de los jugadores conservan sus estrategias correspondientes, entonces:

Proposición 2.3.
En un juego no cooperativo de n personas, $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2, ..., \sigma^n) \in X$ está en equilibrio si y sólo si para cada $i \in I, \pi_i(\sigma) \geq \pi_i(\sigma^{i \to \lambda_j})$ $\forall \lambda_j \in \Sigma_i$, siendo Σ_i el conjunto de estrategias puras del jugador i.

Cuya demostración puede encontrarse en [4].

Un detalle importante a tener en cuenta, es que no existe siempre para todos los juegos una n-tupla de estrategias puras en equilibrio, ya que por ejemplo para nuestro juego de piedra, papel o tijeras no existe:
Por ejemplo, si el jugador I elige piedra, el único equilibrio posible se da si el jugador II elige papel (con cualquiera de las otras dos estrategias, el jugador II mejoraría pasando a papel). Pero en este caso, el jugador I mejoraría pasando a tijera, y siendo así, el jugador II mejoraría cambiando también de estrategia. Algo similar sucede si el I elige piedra o

papel, por lo que con estrategias puras nunca se da el equilibrio de Nash en este juego.

En el caso de las estrategias mixtas, sí que existe siempre en todos los juegos con un número finito de estrategias puras un estado de equilibrio para al menos una n-tupla.
Si bien este enunciado es sencillo, la demostración es algo más laboriosa. Conocido ya el enunciado y demostración del teorema del punto fijo de Brouwer en la carrera, nos basaremos en sus conclusiones para demostrar la existencia de estos equilibrios en estrategias mixtas, de la misma forma que lo demostró Nash.

2.2. Existencia de equilibrios de Nash

Recordaremos el teorema del punto fijo de Brouwer igualmente, aún dando por conocida la demostración (ver [6]).

Teorema 2.4 (Teorema del punto fijo de Brouwer)**.**
Sea K un subconjunto compacto y convexo de $\mathbb{R}^n$ y sea f una función continua de K en sí misma. Entonces f tiene al menos un punto fijo en K.

Junto a este teorema utilizaremos las proposiciones 1.13 y 2.3 en la demostración que nos incumbe, que sigue las ideas de Nash en [1]:

Teorema 2.5.
Todo juego finito no cooperativo de n personas tiene un equilibrio de Nash en X.

Demostración.
Sea $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2, ..., \sigma^n) \in X$. Para cada posible estrategia pura λ_j con $j \in \{1, ..., m_i\}$ de cada jugador $i \in I$, definimos la función $\phi_{ij} \; : \; X \to \mathbb{R}$ como

$$\phi_{ij}(\sigma) = max\{0, \pi_i(\sigma^{i \to \lambda_j}) - \pi_i(\sigma)\}. \tag{2.2}$$

Esta función es continua en X, ya que tanto $\pi_i(\sigma^{i \to \lambda_j})$ como $\pi_i(\sigma)$ lo son por ser cada una una combinación lineal de sus componentes, y por lo tanto su diferencia es continua. Por tanto ϕ_{ij} es el máximo de una constante y una función continua, y en consecuencia es continua.

Dada la estrategia $\sigma^i = (\sigma^i_1, \sigma^i_2, ..., \sigma^i_{m_i})$ del jugador i y $j \in \{1, 2, ..., m_i\}$, definimos

$$(\sigma^i_j)' = \frac{\sigma^i_j + \phi_{ij}(\sigma)}{1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{m_i} \phi_{ik}(\sigma)}. \tag{2.3}$$

Probaremos que $(\sigma^i)' = \big((\sigma_1^i)', (\sigma_2^i)', ..., (\sigma_{m_i}^i)'\big)$ es un elemento de X_i, es decir, que cumple que $(\sigma_j^i)' \geq 0$ y $\sum_{j=1}^{m_i}(\sigma_j^i)' = 1$.

Por definición sabemos que $\phi_{ij} \geq 0$ y $\sigma_j^i \geq 0$ por ser σ^i una estrategia mixta. Como el numerador es no negativo y el denominador es positivo, entonces $(\sigma_j^i)' \geq 0$.

Por otro lado, como σ^i es una distribución de probabilidad, se tiene que $\sum_{j=1}^{m_i}\sigma_j^i = 1$ y, en consecuencia:

$$\sum_{j=1}^{m_i}(\sigma_j^i)' = \sum_{j=1}^{m_i}\left(\frac{\sigma_j^i + \phi_{ij}(\sigma)}{1 + \sum_{k=1}^{m_i}\phi_{ik}(\sigma)}\right) = \frac{\sum_{j=1}^{m_i}\big(\sigma_j^i + \phi(\sigma)\big)}{1 + \sum_{k=1}^{m_i}\phi_{ik}(\sigma)} = \frac{1 + \sum_{j=1}^{m_i}\phi_{ij}(\sigma)}{1 + \sum_{k=1}^{m_i}\phi_{ik}(\sigma)} = 1.$$

Ahora, sea $R : X \to X$ la función definida por

$$R(\sigma) = \big((\sigma^1)', (\sigma^2)', ..., (\sigma^n)'\big) =: \sigma'.$$

La función R es continua, ya que ϕ_{ij} es continua, y la suma y cociente de funciones continuas donde no se anula el denominador (y no lo hace, porque $1 + \sum_{k=1}^{m_i}\phi_{ik}(\sigma) > 0$) son continuos.

Además, por el Lema 1.13, X es cerrado, acotado y convexo. Por lo tanto, el Teorema 2.4 implica que R tiene al menos un punto fijo, que llamaremos $\sigma = (\sigma^1, ..., \sigma^n) \in X$.

Probaremos ahora que σ es una n-tupla en equilibrio de Nash para el juego. Centrándonos en el jugador i con $i \in \{1, 2, ..., n\}$, sea $\lambda_l^i \in \Sigma_i$ una estrategia pura tal que

$$\pi_i(\sigma^1, ..., \sigma^{i-1}, \lambda_l^i, \sigma^{i+1}, ..., \sigma^n) = min\left\{\pi_i(\sigma^1, ..., \sigma^{i-1}, \lambda_k^i, \sigma^{i+1}, ..., \sigma^n) \ : \ k = 1, 2, ..., m_i\right\}.$$

Por lo tanto $\pi_i(\sigma^{i \to \lambda_l}) \leq \pi_i(\sigma^{i \to \lambda_k})$ $\forall k \in \Sigma_i$. Entonces

$$\pi_i(\sigma^{i \to \lambda_l}) \leq \sum_{k=1}^{m_i}\beta_k \pi_i(\sigma^{i \to \lambda_k}),$$

siempre que $\sum_{k=1}^{m_i}\beta_k = 1$, luego $\pi_i(\sigma^{i \to \lambda_l}) \leq \pi_i(\sigma)$. Con esto último, y (2.2), está claro que $\phi_{il}(\sigma) = 0$.

Utilizando lo anterior y teniendo en cuenta que σ es un punto fijo, obtenemos

$$\sigma_l^i = (\sigma_l^i)' = \frac{\sigma_l^i + \phi_{il}(\sigma)}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} \phi_{ik}(\sigma)} = \frac{\sigma_l^i}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} \phi_{ik}(\sigma)},$$

Donde se deduce que $1 + \sum_{k=1}^{m_i} \phi_{ik}(\sigma) = 1$, y entonces $\phi_{ik}(\sigma) = 0\ \forall k$. Esto implica que $\pi_i(\sigma) \geq \pi_i(\sigma^{i \to \lambda_j})\ \forall \lambda_j \in \Sigma_i$. Como el jugador i puede ser cualquiera de los n jugadores del juego y teniendo en cuenta la Proposición 2.3, σ es un equilibrio de Nash.

$\square$

Este teorema únicamente nos asegura la existencia de al menos un equilibrio de Nash en todo juego, pero no nos dice cómo alcanzarlo. Sin embargo, aparecen algoritmos en la literatura de reciente investigación para calcular eficientemente la n-tupla de estrategias en equilibrio.

Capítulo 3

Juegos de suma cero para dos personas

En este capítulo estudiamos un caso particular de juegos no cooperativos: los juegos de suma cero. Los juegos de suma cero son los juegos en los cuales la ganancia o pérdida de un jugador se equilibra con exactitud con las pérdidas o ganancias de los otros jugadores. Más concretamente, estudiaremos los juegos de suma cero que solo incluyen dos jugadores. Este tipo de juegos personalmente me parecen los más interesantes, puesto que son los más habituales y los que engloban una mayor cantidad de casos no solo en juegos de mesa, sino que también abarcan juegos representativos de la competencia entre empresas, de la gestión y distribución de recursos dentro de una empresa... etc.

3.1. Juegos de suma cero

Definición 3.1.
Un juego T se dice que es de suma cero si para cada estrategia, la función de recompensa en $(\pi_1, ..., \pi_n)$ satisface $\sum_{i=1}^{n} \pi_i \equiv 0$.

Como he señalado, un juego de suma cero representa un sistema cerrado: todo lo que un jugador gana, otro lo pierde. En el caso de dos jugadores, expresaremos por comodidad la función de recompensa en las celdas de las matrices de la forma normal con un sólo componente, que es la recompensa asignada al jugador I, y de acuerdo con la definición, lo que el jugador I recibe es lo que pierde el jugador II.
Como es obvio, en este tipo de juegos no hay ningún motivo para una cooperación entre los jugadores ni ningún tipo de negociación.

Una particularidad de este tipo de juegos que me parece muy curiosa es el siguiente resultado (cuya demostración puede encontrarse en Teorema II.1.2 en [5]):

Teorema 3.2.
En un juego de suma cero para dos jugadores, si (σ_1, σ_2) *y* (τ_1, τ_2) *son dos parejas en equilibrio, entonces:*
i) (σ_1, τ_2) *y* (τ_1, σ_2) *también son parejas en equilibrio, y además*
ii) $\pi(\sigma_1, \sigma_2) = \pi(\tau_1, \tau_2) = \pi(\sigma_1, \tau_2) = \pi(\tau_1, \sigma_2)$.

3.2. Estrategias óptimas: Máximo beneficio y mínima pérdida asegurados

Conociendo el significado de las matrices $A = (a_{ij})$ de los juegos en forma normal es fácil ver que una pareja de estrategias puras está en equilibrio si y solo si, el elemento a_{ij} correspondiente es a la vez el mayor de su columna (para el beneficio del jugador I) y el menor de su fila (perjudicando lo menos posible al jugador II).
Si existe este elemento, se llama *punto de silla* (por analogía al punto de silla de un paraboloide hiperbólico). Veamos un ejemplo:

Ejemplo 3.3.
La siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

tiene un punto de silla en el elemento $a_{22} = 2$. Sin embargo, la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

no tiene ninguna pareja de estrategias puras en equilibrio.

□

Para hallar las estrategias en equilibrio en el ejemplo de la matriz A anterior, supongamos que el jugador II es omnisciente y va a escoger siempre la mejor opción para él, sabiendo previamente la estrategia del jugador I.
Por lo tanto, en el juego asociado a la matriz A, si I elige la estrategia de la primera fila, II elegiría la segunda columna, por lo que I perdería 2 unidades. Esta pérdida se reduce a 1 si I elige la estrategia de la segunda fila. En consecuencia, eligiendo la estrategia de la segunda fila, el jugador optimiza el peor resultado posible si nos restringimos a estrategias puras, y -1 viene a ser un suelo de ganancia. En general, definimos el suelo de ganancia como:

$$v_I' = \underset{i}{max}\ \{\underset{j}{min}\ \ a_{ij}\}$$

Y equivalentemente el Jugador II tendría un techo de pérdida de 3 unidades, denotado como v'_{II}:

$$v'_I = \underset{j}{min}\ \{\underset{i}{max}\ \ a_{ij}\}.$$

Es fácil comprobar que $v'_I \leq v'_{II}$ (nótese que para todo j_0 se cumple $v'_I \leq \underset{i}{max}\ a_{ij_0}$ y consecuentemente $v'_I \leq v'_{II}$). Además, es obvio que si se da la igualdad, se alcanza la situación de pareja de estrategias en equilibrio, y si no, entonces tenemos un juego sin puntos de silla. Es aquí donde entran las estrategias mixtas.

Sean X_I el conjunto formado por todas las posibles estrategias mixtas del jugador I e X_{II} al conjunto formado por las del jugador II (definidos anteriormente como X_1 y X_2 respectivamente). Si suponemos ahora que los jugadores I y II están jugando a un juego con matriz A, entonces la función de recompensa esperada dados $x = (x_1, ..., x_{m_I}) \in X_I$ e $y = (y_1, ..., y_{m_{II}}) \in X_{II}$ es:

$$A(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j = xAy^T.$$

Volvamos un momento a la idea de que el jugador II contrario es omnisciente. El jugador II entonces escogerá $y \in X_{II}$ de tal forma que minimice $A(x, y)$. Por tanto, y asumiendo que el jugador I escoge x, su suelo de ganancia será

$$v(x) = \underset{y \in X_{II}}{min}\ \ xAy^T$$

El mínimo será alcanzado entonces de esta forma con la estrategia pura j_0, dependerá de x y cumple que:

$$v(x) = xA_{*j_0} = \underset{j}{min}\ xA_{*j}$$

siendo A_{*j} la j-ésima columna de la matriz A.
El jugador I, claramente escogerá x de tal forma que maximice $v(x)$, para obtener

$$v_I = \underset{x \in X_I}{max}\ \ \underset{j}{min}\ \ xA_{*j}$$

Obviamente el máximo para $x \in X_I$ se alcanza, porque X_I es compacto y $v(x)$ es una función continua. Se llama estrategia *maximin* a cualquier $x \in X_I$ tal que $v(x) = v_I$.

De forma equivalente para el jugador II, tendríamos bajo el mismo razonamiento

$$v_{II} = \underset{y \in X_{II}}{min}\ \ \underset{i}{max}\ \ A_{i*}y^T$$

Que daría lugar a las estrategias *minimax* para el jugador II.

Los valores v_I y v_{II} se llaman valores del juego para el jugador I y II respectivamente. Al igual que con las estrategias puras, es trivial que $v_I \leq v_{II}$. Ahora con las estrategias mixtas, se verifica además la igualdad, como se demuestra en la siguiente lección.

3.3. Teorema Minimax

Este teorema es muy probablemente el más importante de la teoría de juegos.
Aunque hay evidencias de matemáticos anteriores que trabajaron sobre esta idea, suele atribuirse a John von Neumann el principal mérito de la concepción del principio minimax, ya que fue él quien, en 1928, puso las bases de la moderna teoría de juegos y probó el teorema fundamental del minimax, en el que se demuestra que para juegos de suma cero con información perfecta entre dos competidores existe una única solución para el valor del juego.
Aunque se ha demostrado de múltiples formas, lo demostraremos como hicieron originalmente von Neumann y Morgenstern [2].

Empezaremos probando dos lemas:

Lema 3.4 (Teorema del hiperplano de soporte)**.**
Sea B un conjunto cerrado y convexo en un espacio euclídeo n-dimensional y sea $x = (x_1, ..., x_n)$ un punto en dicho espacio que no pertenece a B. Entonces, existen números $p_1, ..., \ p_n, \ p_{n+1}$ tales que

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_{n+1} \tag{3.1}$$

y

$$\sum_{i=1}^{n} p_i y_i > p_{n+1} \quad \forall \ y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in B \tag{3.2}$$

Demostración.
Sea $z = (z_1, ..., z_n) \in B$ el punto de B más próximo a x, es decir, el que minimiza en B la distancia a x. Sabemos que z existe por ser B cerrado. Entonces 3.1 se cumple si tomamos

$$p_i = z_i \ - \ x_i \ \ i = 1, ..., \ n$$
$$p_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} z_i x_i \ - \ \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Con respecto de (3.2) se tiene que:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} p_i z_i \ - \ p_{n+1} &= \sum_{i=1}^{n} z_i^2 \ - \ \sum_{i=1}^{n} z_i x_i - \ p_{n+1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} z_i^2 \ - \ 2\sum_{i=1}^{n} z_i x_i \ + \ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} (z_i \ - \ x_i)^2 > 0.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

ya que $z \neq x$, puesto que $z \in B$ y $x \notin B$.
Supongamos ahora que (3.2) no se verifica. Por tanto existe $(y_1, y_2, ..., y_n) \in B$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} p_i y_i \leq p_{n+1}. \tag{3.4}$$

Como B es convexo, $\forall r \in [0,1]$, $w_r := ry + (1-r)z \in B$, y el cuadrado de la distancia de x a w_r viene dado por:

$$\rho^2(x, w_r) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - ry_i - (1-r)z_i)^2.$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial \rho^2}{\partial r} &= 2\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)(x_i - ry_i - (1-r)z_i) \\
&= 2\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)y_i - 2\sum_{i=1}^{n}(z_i - x_i)z_i + 2\sum_{i=1}^{n} r(z_i - y_i)^2 \\
&= 2\sum_{i=1}^{n} p_i y_i - 2\sum_{i=1}^{n} p_i z_i + 2r\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2.
\end{aligned}$$

Y si evaluamos en $r = 0$ $(w_0 = z)$ y aplicamos (3.3) y (3.4), se tiene que:

$$\frac{\partial \rho^2}{\partial r}|_{r=0} = 2\sum_{i=1}^{n} p_i y_i - 2\sum_{i=1}^{n} p_i z_i < 0.$$

De aquí se sigue entonces que para un $r > 0$ suficientemente cercano a 0, $\rho(x, w_r) < \rho(x, z)$. Esto es imposible, ya que z es el punto de B que minimiza la distancia hasta x. Por ello, (3.4) es imposible y (3.2) queda demostrado. $\square$

La razón del nombre de este teorema se debe a que afirma que existe un hiperplano que contiene a x de forma que B está contenido en uno de los semiespacios abiertos determinados por el hiperplano.

Lema 3.5 (Teorema de la alternativa para matrices).
Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de dimensiones $m \times n$. Entonces debe ser cierta una de las dos afirmaciones que siguen:

(i) El punto $0 \in \mathbb{R}^m$ pertenece al conjunto convexo generado por los $n + m$ puntos:

$$\begin{array}{ll}
a_1 = (a_{11}, ..., a_{m1}), & e_1 = (1, 0, ..., 0), \\
\quad ... & \quad ... \\
a_n = (a_{1n}, ..., a_{mn}). & e_m = (0, ..., 0, 1).
\end{array}$$

(ii) Existen números $x_1, ..., x_m$ estrictamente positivos satisfaciendo

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \qquad y \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i > 0 \ \ para\ j = 1, ..., n.$$

Demostración.
Supongamos que (i) no se verifica. Si aplicamos el Lema 3.4 entonces existen números $p_1, ..., p_m, p_{m+1}$ con $p_{m+1} = 0$ tales que

$$\sum_{j=1}^{m} 0 \cdot p_j = p_{m+1} = 0 \qquad y \qquad \sum_{j=1}^{m} y_j p_j > 0.$$

para todo $(y_1, ..., y_m)$ en el conjunto convexo, por lo que

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_j > 0 \ \ \forall j, \qquad y \qquad p_i > 0 \ \ \forall i.$$

Por lo tanto $\sum p_i > 0$, y los números

$$x_i = \frac{p_i}{\sum p_i}, \ \ i = 1, ..., m$$

verifican (ii).

□

Teorema 3.6 (Teorema Minimax)**.**
Todo juego de suma cero para dos personas satisface que $\underset{x\in X_I}{max}\ \underset{y\in X_{II}}{min}\ \ \pi_I(x,y) = \underset{y\in X_{II}}{min}\ \underset{x\in X_I}{max}$ $\pi_{II}(x,y)$*, por lo que* $v_I = v_{II}$.

Demostración.
Nos centraremos primero en probar que v_I y v_{II} tienen el mismo signo, y a partir de ahí demostraremos que $v_I = v_{II}$.

Sea $A = (a_{ij})$ la matriz de un juego con dimensiones $n \times m$. Por el Lema 3.5, o (i) o (ii) deben ser ciertas. Si lo es (i), entonces 0 es una combinación lineal convexa de los vectores $a_1, ..., a_n$ y $e_1, ..., e_m$ definidos en dicho lema. Existen entonces $s_1, ..., s_{m+n} \geq 0$ tales que $\sum_{j=1}^{m+n} s_j = 1$ y $\sum_{j=1}^{n} s_j a_{ij} + s_{n+i} = 0, \ \ i = 1, ..., \ m.$

Por lo tanto, si $s_1 = s_2 = ... = s_n = 0$ entonces también serán cero los restantes s_i (y por ende el cero sería combinación de los vectores $e_1, \ e_2, ..., \ e_m$) lo que es imposible, así que existe al menos un s_i con $i \leq m$ estrictamente positivo, y $\sum_{j=1}^{n} s_j > 0$. Podemos entonces definir:

$$y_j = \frac{s_j}{\sum_{j=1}^{n} s_j}$$

y tenemos $y_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$, y

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i = \frac{-s_{n+i}}{\sum_{j=1}^{n} s_j} \leq 0 \ \ \forall\ i.$$

entonces $v(y) \leq 0$ y $v_{II} \leq 0$, y por lo tanto $v_I \leq v_{II} \leq 0$.
Si suponemos que en vez de (i), lo que se verifica es (ii), tendríamos que existe $x \in X_I$ tal que $v(x) = \underset{j}{min}\ xA_{*j} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i > 0$. En consecuencia, $v_I > 0$, lo que prueba que v_I y v_{II} tienen el mismo signo.

Para finalizar la demostración, vamos a llamar A a la matriz del juego que nos ocupa. Dado $k \in \mathbb{R}$, consideremos el juego cuya matriz $B = (b_{ij})$ cumple que $b_{ij} = a_{ij} + k,\ \forall i, j$.

Dados $x \in X_I$ e $y \in X_{II}$, como $\sum_i x_i = \sum_j y_j = 1$, está claro que $xBy^T = xAy^T + k$, por lo tanto

$$v_I(B) = v_I(A) + k \qquad \text{y} \qquad v_{II}(B) = v_{II}(A) + k.$$

De acuerdo con el paso 1, no es posible que $v_I(B) < 0 < v_{II}(B)$; y, por lo tanto tampoco es posible que $v_I(A) < -k < v_{II}(A)$. Pero k es un valor arbitrario, por lo que no puede ser $v_I < v_{II}$, y como hemos visto $v_I \leq v_{II}$, se debe dar que $v_I = v_{II}$.

□

La conclusión que sacamos de este teorema, es que el techo de pérdida del jugador II y el piso de ganancia del I son iguales. Esto implica que en realidad solo existe un valor para el juego, v, cuando tratamos con estrategias mixtas, que debe satisfacer:

$$xAy^T = v,$$

siendo x e y estrategias optimas para el jugador I y el jugador II respectivamente, ya que no hay ninguna estrategia para el jugador I o el jugador II que le aporte una mayor esperanza del valor del juego teniendo en cuenta que el otro jugador también escogerá su mejor estrategia. Por lo tanto,x e y satisfacen respectivamente lo siguiente:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} \geq v \ \ j = 1, ..., \ n, \qquad y \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq v \ \ i = 1, ..., \ m.$$

Nota 3.7. Por definición, estas estrategias están ademas en equilibrio. Es evidente que existe una relación entre el Teorema 2.5 y el Teorema Minimax, y es que todas las estrategias de Nash son óptimas y llevan a cada jugador a obtener el mismo valor del juego al que llegamos con el Teorema Minimax (ver [7]).

Definición 3.8.
Llamaremos solución del juego a cualquier pareja (x, y) de estrategias óptimas.

3.4. Cómputo de estrategias óptimas

Visto ya la esencia de los juegos y la posible existencia o no de estrategias óptimas y equilibrio con estrategias puras o mixtas, ¿cómo calculamos la estrategia óptima? Los casos más sencillos son los siguientes:

3.4.1. Puntos de silla

Este caso ha sido comentado con anterioridad: cuando una matriz tiene un punto de silla, las estrategias puras asociadas son óptimas.

3.4.2. Dominación

En un juego de matriz A, se dice que *la i-ésima fila domina a la k-ésima* si $a_{ij} \geq a_{kj}, \ \forall j$ y $a_{ij} > a_{kj}$ para al menos una j.
Se dice que *la j-ésima columna domina a la l-ésima* si $a_{ij} \leq a_{il} \ \ \forall i$ y $a_{ij} < a_{il}$ para al menos una i.
Es evidente que toda estrategia dominada se puede desechar, y se tiene que

Teorema 3.9.
Sea A la matriz de un juego en donde las filas (resp. columnas) $i_1, \ i_2, ..., \ i_k$ (resp. $(j_1, j_2, ..., j_h)$) son dominadas. entonces, cualquier estrategia óptima para I (resp. II) satisface que $x_{i_1} = x_{i_2} = ... = x_{i_k} = 0$ (resp. $y_1 = y_2 = ... = y_h = 0$).

3.4.3. Juegos 2x2

Supongamos que tenemos una matriz $A = (a_{ij})$ de dimensiones 2×2 sin puntos de silla ni estrategias dominadas. Como las estrategias óptimas no pueden ser puras, es obvio que todas las componentes de las estrategias óptimas $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ deben ser positivas, y siendo v el valor del juego, se tiene que:

$$x_1(a_{11}y_1 + a_{12}y_2) + x_2(a_{21}y_1 + a_{22}y_2) = v$$

Como los términos en paréntesis deben ser menores o iguales a v y vienen multiplicados por x_1 y x_2 que, siendo positivos, cumplen que $x_1 + x_2 = 1$, entonces ha de ser

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = v \quad y \quad a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = v$$

Esto último, puede verse como: $Ay^T = (v, v)^T$, y análogamente $xA = (v, v)$.
Si A es no singular: $x = vIA^{-1}$, donde I es el vector $(1, 1)$. Contando que $x_1 + x_2 = 1$, entonces tenemos $vIA^{-1}I^T = 1$, o equivalente

$$v = \frac{1}{IA^{-1}I^T} \tag{3.5}$$

$$x = \frac{IA^{-1}}{IA^{-1}I^T} \quad e \quad y = \frac{A^{-1}I^T}{IA^{-1}I^T} \tag{3.6}$$

Siendo además A^* la adjunta transpuesta de A, hemos demostrado el siguiente teorema:

Teorema 3.10.
Sea A una matriz regular cualquiera de dimensiones 2x2. Si A no tiene un punto de silla, ni ninguna estrategia dominada, entonces sus únicas estrategias óptimas son:

$$x = \frac{IA^*}{IA^*I^T} \tag{3.7}$$

$$y = \frac{A^*I^T}{IA^*I^T} \tag{3.8}$$

$$v = \frac{|A|}{IA^*I^T} \tag{3.9}$$

Siendo A^* la adjunta transpuesta de A, $|A|$ el determinante de A, e I el vector $(1, 1)^T$.

Obsérvese que la demostración del Teorema 3.10 está basada en el hecho de que, en caso de necesitar utilizar estrategias mixtas, la única forma de garantizar una ganancia mínima de v para el jugador I es encontrar una estrategia que satisfaga $xA = (v, v)$, y similarmente el jugador II debe buscar una estrategia con $Ay^T = (v, v)$. Cabe destacar aquí que no hay un único par (x, y) de estrategias en las que se alcance el valor del juego, sino que hay un único par de estrategias en las que se alcance el valor del juego garantizando un beneficio mínimo de v (o unas pérdidas máximas de v). Veamos un ejemplo:

Ejemplo 3.11.
Sea la matriz de un juego $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ Es fácil ver que el juego no tiene puntos de silla.

Usando el teorema anterior, siendo $A^* = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ la matriz adjunta transpuesta de A tenemos que

$$x = \frac{(1,1)A^*}{(1,1)A^*(1,1)^T} = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \qquad y = \frac{A^*(1,1)^T}{(1,1)A^*(1,1)^T} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \qquad v = \frac{5}{2}$$

Si cogemos entonces la estrategia $x = (1/4, 3/4)$, se tiene que $xA = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ por lo que, elija el jugador II la estrategia que elija, seguro que la recompensa de I es $\frac{5}{2}$. En cambio, si el jugador I elige la estrategia $z = (1/2, 1/2)$, se tiene que $zA = (3, 2)$, que, efectivamente, da lugar a una ganancia de $5/2$ si el II elige la estrategia $y = (1/2, 1/2)$. Pero z da lugar a una ganancia de 2 si el jugador II elige la estrategia $(0, 1)$. Por lo tanto, con la estrategia z el jugador I no garantiza que su menor recompensa sea $5/2$.

□

3.4.4. Juegos de 2xn y mx2

Trataremos en este apartado solo el juego de $2 \times n$, puesto que el caso $m \times 2$ es análogo. Desde el punto de vista del jugador I, el objetivo es maximizar la función $v(x_1, x_2) = \min_j \{a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2\}$ con $x_1, x_2 \geq 0$ y $x_1 + x_2 = 1$. Como $x_1 = 1 - x_2$, es equivalente a maximizar $w(x) = \min_j \{(a_{2j} - a_{1j})x + a_{1j}\}$ con $x \in [0, 1]$.

El hecho de que el jugador I tenga únicamente dos estrategias puras, permite realizar una representación gráfica de la situación para visualizar el problema e identificar la solución. Para facilitar su comprensión, expondremos las ideas con el siguiente ejemplo donde se utiliza un juego concreto.

Ejemplo 3.12. Consideremos un juego con matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

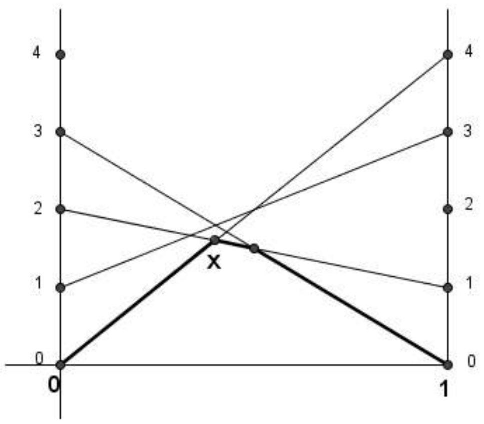

Figura 3.1: Gráfico del Ejemplo 3.12

Cada segmento de la Figura 3.1 que une el punto $(0, a_{1j})$ con $(1, a_{2j})$ representa la función $f(x) = (a_{2j} - a_{1j})x + a_{ij}$ para $x \in [0, 1]$.
La poligonal en negrita representa la función $x \mapsto w(x)$, y la X representa el punto máximo de w para el jugador I, cuya abscisa determina su estrategia óptima. El punto X pertenece a la intersección de los segmentos que unen los elementos de la primera y última columnas, y se encuentra en el punto 2/5 del eje de abscisas y 8/5 del eje de ordenadas. Por lo tanto, $v = \frac{8}{5}$ y la estrategia óptima para I es $x = (\frac{3}{5}, \frac{2}{5})$.
Usando además las fórmulas del Teorema 3.10 aplicadas a la matriz 2×2 formada por la primera columna y última de A, averiguar las estrategias óptimas para el jugador I y II, así como el valor del juego, obteniendo que $x = (\frac{3}{5}, \frac{2}{5})$, $y = (\frac{1}{5}, 0, 0, \frac{4}{5})$ y $v = \frac{8}{5}$.

$\square$

3.5. Juegos de n x m

El cálculo de estrategias óptimas en este caso se vuelve considerablemente más complejo. Es la forma más útil ya que engloba los anteriores casos, pero se hace a su vez más laboriosa, y debemos recurrir a la programación lineal y resolver esta situación con el uso del algoritmo símplex.
En el caso de tener una matriz A de dimensiones $n \times m$ asociada al juego T, para calcular las estrategias óptimas del jugador I y II, recurriríamos a la resolución del programa lineal dual mediante el algoritmo del símplex, que fue visto en detalle en la carrera y no haremos más hincapié en ello en este trabajo (ver capítulo III de [5]).

3.6. Juegos simétricos

Trataremos en este apartado unos juegos muy específicos que vienen a ser el paradigma de juego justo en el que cualquier situación con ganancia se corresponde con otra que da lugar una pérdida idéntica:

Definición 3.13.
Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ se dice antisimétrica si $a_{ij} = -a_{ji}$ $\forall i, j$. Se dice que un juego es simétrico si su matriz es antisimétrica.

Teorema 3.14.
El valor de un juego asociado a una matriz antisimétrica sin puntos de silla ni estrategias dominadas es cero, y además cualquier estrategia óptima para un jugador, también lo es para el otro.

Demostración.

Sea x una estrategia. Está claro que $A = -A^T$, y por lo tanto $xAx^T = -xA^Tx^T = -(xAx^T)^T = -xAx^T$, por lo que $xAx^T = 0$ para cualquier x. Entonces: $\underset{y}{min}\ xAy^T \leq 0$ y $\underset{x}{max}\ xAy^T \geq 0$.

Si suponemos que x es óptima para I, entonces: $xA \geq 0$ para cada componente, o, equivalente, que $x(-A^T) \geq 0$ por lo que $xA^T \leq 0$, y por lo tanto y $Ax^T \leq 0$, y x es óptimo también para II y el valor del juego es cero. $\square$

Un ejemplo de este tipo de juegos, es el expuesto al principio del trabajo "Piedra, papel y tijera", si suponemos que la matriz del juego es $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
Es obvio que este juego es simétrico y sin puntos de silla, y sería más ventajoso para los jugadores que cada componente de cada estrategia mixta fuera estrictamente positivo para mejorar sus expectativas de recompensa. Sería simplemente resolver la ecuación $xA = 0$ para concluir que las estrategias óptimas para los jugadores son $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

$\square$

Capítulo 4

Juegos de multietapas

4.1. Etapas de un juego

Recordemos que una estrategia pura es una función que asigna a cada conjunto de información de un jugador un elemento entre 1 y k, siendo k el número de nodos seguidores inmediatos. De aquí, podemos intuir que el número de posibles estrategias puras de un juego puede llegar a ser increíblemente grande, del orden de k^N, donde N es el número de movimientos.

Pensemos en un juego muy sencillo como el "Tres en raya": El primer jugador tiene 9 opciones de estrategias puras para el primer movimiento. En el tercer movimiento, el jugador I tiene 8 conjuntos de información asociados a cada uno de sus posibles movimientos iniciales. A su vez, cada uno de estos conjuntos tiene tiene 7 nodos inmediatos. Si paramos ahora el juego en el tercer movimiento, el jugador I tiene $9 \times 7^8 = 51{,}883{,}209$ estrategias puras posibles. Si considerásemos el juego entero, resulta que el jugador I tiene más de 65 billones de estrategias puras distintas.

Está claro que un número tan grande hace difícil su manejo, y si considerásemos otro juego más complejo como el ajedrez, el número de estrategias puras posibles es incalculable.

Está claro que visto así, el conjunto formado por las estrategias puras en un juego es difícil de manejar.
Habitualmente, lo que hace un jugador en un juego al pensar en sus estrategias, es pensar cada parte del juego como un "minijuego" en donde considerar sólo el movimiento siguiente. Esto en el "tres en raya" simplificaría mucho las cosas, porque se pasaría de estudiar 65 billones de estrategias puras a estudiar un máximo de 9 casos en 4 o 5 'minijuegos" en total, a los que llamaremos "etapas".

Definición 4.1.
Llamaremos estrategia conductual a la colección de N distribuciones de probabilidad definidas en los conjuntos de posibles opciones a escoger asociados a los N conjuntos de información de un juego.

Lo que se estudia en una estrategia conductual son las etapas por separado, pero de forma conjunta.
La definición de etapa no es muy exacta, pero a grandes rasgos la veremos como un juego en donde mueven los jugadores I y II de forma consecutiva conociendo o sin conocer el movimiento del contrincante, y después de un posible movimiento aleatorio, se les dota a ambos jugadores de información perfecta. Al final de cada etapa, puede haber una recompensa o la probabilidad u obligación de jugar otra etapa del juego.

Estudiaremos de esta forma varios tipos de juegos, divididos por etapas según convenga; *juegos de agotamiento*, *juegos recursivos* y *juegos estocásticos.* Estos son los juegos que para mí son los más atractivos, ya que no tienen una complejidad excesivamente elevada y los tres representan situaciones comunes.
Existen muchos más tipos de juegos, como los *juegos diferenciales*, *juegos de agrupación...* que son igualmente interesantes, pero que por su complejidad y por cuestión de espacio no estudiaremos en este trabajo.

4.2. Juegos de agotamiento

Llamaremos *juego de agotamiento* a todo juego que dependa de una cantidad finita de etapas que puedan ser tratadas como juegos separados. En este tipo de juegos, en cada etapa la recompensa será o una verdadera recompensa unida al final del juego o la obligación de seguir jugando.
Como podemos calcular el valor esperado de un juego, podemos reemplazar la obligación de seguir jugando a un juego por el valor de dicho juego. Es decir, que si tenemos la matriz de un juego $A = \begin{pmatrix} a_{11} & T_1 \\ T_2 & a_{12} \end{pmatrix}$ donde T_1 y T_2 representan la obligación de jugar una siguiente etapa o juego, éstos elementos pueden ser sustituidos respectivamente por el valor de cada juego dando lugar a la matriz $A'=\begin{pmatrix} a_{11} & v_1 \\ v_2 & a_{12} \end{pmatrix}$ siendo v_1 y v_2 el valor de los juegos T_1 y T_2 respectivamente. De esta forma, aparte de resolver juegos de una etapa directamente, se pueden resolver juegos de n etapas con sus respectivos valores.
Para juegos con pocas etapas es sencillo calcular su valor y las estrategias óptimas, pero con juegos largos es más complicado. En el caso de que el juego pueda tener una gran cantidad de etapas, una relación de recurrencia podría proporcionar el valor de cada una de ellas, pero estas relación generaría una ecuación que puede ser difícil de resolver, y

complicaría la obtención exacta del valor del juego y las estrategias óptimas. Sí que se puede sin embargo, calcular valores aproximados.

Veamos un ejemplo para este tipo de juegos:

Ejemplo 4.2. En este juego, el jugador I es un contrabandista que quiere elegir uno de los N periodos del día para tratar de introducir un alijo. Por limitaciones técnicas, la lancha de la policía (jugador II) solo puede patrullar durante un único periodo de los N del día. La lancha tiene la intención de interceptar al contrabandista, pero solo tiene una oportunidad y no sabe en qué momento del día actuará el contrabandista.
Asumiremos que la recompensa es $+1$ si el jugador I logra introducir el alijo sin que le intercepte la policía, -1 si la policía le intercepta y 0 si el Jugador I no actúa en la i-ésima etapa, que será el i-ésimo momento del día.
En la primera etapa, el jugador I puede elegir entre actuar y no actuar, y el jugador II tiene las mismas opciones de elección. Si el jugador I actúa y el jugador II también, la recompensa es -1. Si el jugador I actúa pero el jugador II no, entonces la recompensa es $+1$. Si el jugador I no actúa y el jugador II sí, entonces el jugador I actuará en una de las siguientes etapas (si $N > 1$) y se asume que la recompensa será $+1$. Si en una etapa no actúa ningún jugador, la recompensa es 0 y se pasaría a la siguiente etapa.

La matriz del juego, sería entonces $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & T_2 \end{pmatrix}$
Y siendo $v_2, ..., v_N$ los valores de los juegos sucesivos, tendríamos la relación recursiva $v_i = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & v_{i+1} \end{pmatrix}$
Está claro que $v_{N-1} < 1$, ya que obviamente $v_N = 0$, y por la relación de recurrencia esto implica que v_i debe ser menor que 1 considerando la matriz anterior si $i \geq 3$; Por lo tanto, $v_1 < 1$ y su matriz asociada A_1 no tiene un punto de silla. Usamos en este caso 3.9 para obtener la ecuación:

$$v_1 = \frac{v_2 + 1}{-v_2 + 3}$$

Como $v_N = 0$, entonces podemos resolver la ecuación por la sustitución:

$$t_1 = \frac{1}{v_1 - 1}$$

Lo que nos da las ecuaciones recursivas:

$$t_1 = t_2 - \frac{1}{2}\ ,\ t_N = -1$$

que tienen la solución:

$$t_1 = -\frac{N+1}{2}$$

por lo que:

$$v_1 = \frac{N-1}{N+1}$$

Y ésta última ecuación nos da el valor del juego para la primera etapa. Podemos entonces calcular cada v_i y las estrategias óptimas para cada jugador en cada etapa con las anteriores relaciones recursivas, convirtiéndose la matriz inicial A_1 en $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \frac{N-2}{N} \end{pmatrix}$.
Sirviéndonos ahora de las ecuaciones (3.7) y (3.8), obtenemos las estrategias óptimas para $N \geq 2$:

$$x^1 = \left(\frac{1}{N+1}, \frac{N}{N+1}\right) \quad , \quad y^1 = \left(\frac{1}{N+1}, \frac{N}{N+1}\right)$$

□

4.3. Juegos estocásticos

Este tipo de juegos tienen cierto parecido con los anteriores, pero añaden la peculiaridad de no tener una secuencia dirigida de etapas, de modo que una etapa puede llevar a una posición anterior. Teóricamente esto proporciona al juego la capacidad de jugarlo indefinidamente, e incluso en el caso de que cada etapa incluya una recompensa, obtenerla infinita. Para evitar esto, normalmente hay una aleatorización que asegura un final para el juego.
Definiremos entonces un juego estocástico como un conjunto de p *elementos de juego* o posiciones T_k con $k = 1, ..., p$ distintas entre sí. Cada elemento del juego, T_k, se representa por una matriz $m_k \times n_k$ cuyas entradas son:

$$\alpha_{ij}^k = a_{ij}^k + \sum_{l=1}^{p} q_{ij}^{kl} T_l \tag{4.1}$$

con

$$q_{ij}^{kl} \geq 0 \quad y \quad \sum_{l=1}^{p} q_{ij}^{kl} < 1. \tag{4.2}$$

La entrada dada por (4.1) significa que si en el k-ésimo elemento del juego, el jugador I escoge su i-ésima estrategia pura y el jugador II su j-ésima, entonces habrá un pago de a_{ij}^k

unidades desde el jugador II al I con la probabilidad q_{ij}^{kl} de jugar el l elemento del juego T_l de entre los p posibles, y una probabilidad de $q_{ij}^{k0} = 1 - \sum_{l=1}^{p} q_{ij}^{kl}$ de que el juego termine. La condición (4.2) afirma que todas las probabilidades de jugar un siguiente elemento son mayores o iguales a cero y la de terminar es estrictamente positiva, para que la probabilidad de juego infinito sea cero.

Definición 4.3.
Una estrategia estocástica para el jugador I es una colección x^{kt} de vectores m_k-dimensionales, para $k = 1, ..., \ p$ y $t \in \mathbb{N}$ con $x^{kt} = (x_1^{kt}, ..., x_{m_k}^{kt})$ satisfaciendo

$$x_i^{kt} \geq 0 \qquad \sum_{i=1}^{m_k} x_i^{kt} = 1 \tag{4.3}$$

De forma equivalente, una estrategia estocástica para el jugador II es una colección y^{kt} de vectores n_k-dimensionales, para $k = 1, ..., \ p$ y $t \in \mathbb{N}$ con $y^{kt} = (y_1^{kt}, ..., y_{m_k}^{kt})$ satisfaciendo las condiciones similares a (4.3).

Como teniendo en cuenta que los juegos son invariantes con el tiempo, (la cantidad de etapas t) las estrategias tampoco deberían depender de t y se debería actuar de la misma manera todas las veces que se juegan. Por lo tanto, presentamos la siguiente definición:

Definición 4.4.
Se llama estrategia estacionaria a x si para todo k, el vector x^{kt} es independiente de t, es decir, que la cantidad de etapas que se lleven jugando (t) no afecta a la elección de estrategia.

Brevemente, esto último quiere decir que el número x_i^{kt} es la probabilidad de que el jugador I use su i-ésima estrategia asumiendo que, en la t-ésima etapa del juego, el jugador se encuentre jugando al k-ésimo elemento del juego T_k. Como el elemento del juego T_k puede haber sido jugado varias veces, el jugador puede cambiar su estrategia para T_k, y en ese caso no sería una estrategia estacionaria, que obviamente es la mejor elección desde el punto de vista de la simplicidad computacional.

Dado un par de estrategias estacionarias para I y II, podemos calcular la recompensa esperada para cada T_k con $k = 1, \ 2, ..., \ p$, por lo que para cada par de estrategias, podemos considerar un p-vector de recompensa esperado $v = (v_1, \ v_2, ..., \ v_p)$. Podríamos entonces reemplazar la matriz de T_k por v_k y simplificaría el juego completo. Tendríamos:

$$v_k = valor(T_k) \quad para \quad k = 1, ..., p$$

Nótese que por definición de v_k, se tiene v_k es el valor del juego asociado a la matriz $B_k = (b_{ij}^k)$ de dimensiones $m_k \times n_k$ que satisface:

$$b_{ij}^k = a_{ij} + \sum_{l=1}^{p} q_{ij}^{kl} v_l, \tag{4.4}$$

por lo que también es

$$v_k = valor(B_k) \quad para \quad k = 1, ..., p \tag{4.5}$$

Por lo tanto, el cálculo e incluso la existencia de v no es trivial. A continuación, probaremos que existe un único vector de valores del juego cuyas componentes satisfacen (4.5) y (4.4).

Lema 4.5.
Sea $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ matrices de dimensiones $m \times n$ satisfaciendo para algún h:

$$a_{ij} < b_{ij} + h, \quad i = 1, ..., \ m, \quad j = 1, ..., \ n \tag{4.6}$$

Entonces $valor(A) < valor(B) + h$.

Demostración.
Sea v el valor de B e $y = (y_1, ..., y_n)$ una estrategia óptima para el jugador II en B. Entonces, para todo i, $\sum a_{ij} y_j < \sum b_{ij} y_j + h \sum y_j \leq v + h$, por lo que y aporta un techo de pérdida menor que $v + h$ en A. $\square$

Teorema 4.6.
Existe exactamente un vector $v = (v_1, \ v_2, ..., \ v_p)$ satisfaciendo (4.5) y (4.4).

Demostración.
Unicidad :
Supongamos que existen dos vectores distintos v y w satisfaciendo (4.5) y (4.4). Sea k la componente en donde se alcanza el máximo de $|v_g - w_g|$ con $g = 1, ..., p$. Supondremos sin pérdida de generalidad que $c := v_k - w_k > 0$.
Definimos también las dos matrices $B_k = (b_{ij}^k)$ y $\hat{B}_k = (\hat{b}_{ij}^k)$ siendo:

$$b_{ij}^k = a_{ij}^k + \sum_{l=1}^{p} q_{ij}^{kl} v_l \quad y \quad \hat{b}_{ij}^k = a_{ij}^k + \sum_{l=1}^{p} q_{ij}^{kl} w_l \tag{4.7}$$

Entonces, aplicando (4.2):

$$|b_{ij}^k - \hat{b}_{ij}^k| \leq \sum_{l=1}^{p} q_{ij}^{kl} |v_l - w_l| < c \tag{4.8}$$

Y por el Lema 4.5, $valor(B_k) < valor(\hat{B}_k) + c$, pero por (4.5) esto supondría que $v_k < w_k + c$, habiendo asumido que $v_k - w_k = c$. Esta contradicción prueba la unicidad.

Existencia :
Vamos a construir una sucesión de vectores que converjan a un vector v cumpliendo (4.5) y (4.4). Para ello, sea $v^0 = (0, 0, ..., 0)$. Para $r = 0, 1, ...$, definimos inductivamente:

$$b_{ij}^{kr} = a_{ij} + \sum_{l=1}^{p} q_{ij}^{kl} v_l^r \ , \qquad v_k^{r+1} = valor(B_k^r) = valor(b_{ij}^{kr}) \tag{4.9}$$

Debemos probar primero que la secuencia de vectores $v^r = (v_l^r, ..., \ v_p^r)$ converge, y después que el límite tiene las propiedades (4.5) y (4.4). Para ello sea

$$s = \max_{k,i,j} \sum_{l=1}^{p} q_{ij}^{kl} \tag{4.10}$$

por (4.2), $s < 1$. Si definimos $t_r = \max_k |v_k^{r+1} - v_k^r|$ es relativamente fácil ver que, un razonamiento similar al del Lema 4.5 conduce a que $t_r \leq s \cdot t_{r-1}$ y por lo tanto $t_r \leq s^r \cdot t_0$. La sucesión de vectores v^r es por lo tanto una sucesión de Cauchy, y en consecuencia converge. Llamemos v a este límite siendo $w_k = valor(B_k)$ donde $b_{ij}^k = a_{ij}^k + \sum_{l=1}^{p} q_{ij}^{kl} v_l$.

Debemos ver aquí que $w_k = v_k \ \forall k$. Por ello, dado $\epsilon > 0$, podemos escoger un r suficientemente grande tal que para todo k,

$$|v_k^r - v_k| < \frac{\epsilon}{2}, \quad y \quad \left|v_k^{r+1} - v_k\right| < \frac{\epsilon}{2} \tag{4.11}$$

De aquí, el Lema 4.5 nos permite concluir que $\forall k, \ \left|v_k^{r+1} - w_k\right| < \frac{\epsilon}{2}$, lo que junto a (4.11), implica que; $|w_k - v_k| < \epsilon \ \ \forall k$. Finalmente, como ϵ es arbitrario, se tiene que $v_k = w_k$.

□

En la última parte de la demostración del teorema hemos probado que las diferencias $\left|v_k^{r+1} - v_k\right|$ convergen a cero a velocidad exponencial.
Si asumimos que el juego continua como un juego estocástico hasta haber jugado r etapas y luego necesariamente deba terminar, obtendríamos un juego de agotamiento. Si resolvemos este juego de agotamiento por los métodos de (3.4), obtendremos los valores v^r junto con las estrategias óptimas para las matrices B_k^r.
El número s^r (definido en (4.10)) es una cota superior de la probabilidad de que el juego continue más allá de r etapas para cualesquiera estrategias. En el caso de que r sea lo suficientemente grande como para que s^r sea despreciable, podríamos aproximar las soluciones del juego estocástico truncado con v^r después de las r etapas, por lo que tendríamos una solución aproximada a un juego aproximado al juego original. Esto es precisamente lo que hace la secuencia de vectores v^r. Además, las estrategias óptimas x^{kr} e y^{kr} en ese caso serán una aproximación de estrategias estacionarias óptimas.
Veamos un ejemplo de juego estocástico:

Ejemplo 4.7. Existen en total cinco unidades repartidas entre los jugadores I y II. En cada etapa del juego, ambos jugadores deben elegir "cara" (H) o "cruz" (X) desconociendo la elección del oponente. Si la elección de ambos jugadores coincide, entonces el jugador II paga al jugador I tres unidades si la elección es H, y una unidad si es X. Si la elección de ambos jugadores es distinta, el jugador I paga al jugador II dos unidades.
Después de cada etapa, se lanza una moneda para decidir si se pasa a la siguiente etapa del juego o se termina. El juego terminará también si uno de los dos jugadores se queda sin unidades, pues no puede pagar con más de lo que tiene.

Representaremos este juego con cuatro matrices T_k, que serán los elementos del juego, siendo k el montante acumulado por el jugador I (y $5-k$ el montante del jugador II) al principio de cada etapa. Expondremos así cada posible inicio del juego y cada posible caso, en el que el jugador I tiene una (T_1), dos (T_2), tres (T_3) o cuatro (T_4) unidades, mientras que el jugador II tiene las unidades restantes.

$$T_1 = \begin{pmatrix} 3+\frac{1}{2}T_4 & -1 \\ -1 & 1+\frac{1}{2}T_2 \end{pmatrix} \qquad T_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1+\frac{1}{2}T_3 \end{pmatrix}$$
$$T_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2+\frac{1}{2}T_1 \\ -2+\frac{1}{2}T_1 & 1+\frac{1}{2}T_4 \end{pmatrix} \qquad T_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2+\frac{1}{2}T_2 \\ -2+\frac{1}{2}T_2 & 1 \end{pmatrix}$$

Si usamos ahora las fórmulas inductivas (4.9), obtendremos aproximaciones a los valores de cada elemento del juego:

$$\begin{aligned} v^0 &= (0,\ 0\ ,0,\ 0), \\ v^1 &= (0{,}33,\ -0{,}13,\ -0{,}29,\ -0{,}5), \\ v^2 &= (0{,}26,\ -0{,}19,\ -0{,}29,\ -0{,}53), \\ v^3 &= (0{,}26,\ -0{,}19,\ -0{,}31,\ -0{,}55), \\ v^4 &= (0{,}26,\ -0{,}19,\ -0{,}32,\ -0{,}55). \end{aligned}$$

Los dos decimales de cada valor de juego del vector v^4 coinciden con los valores reales, y usaremos este vector para determinar las estrategias óptimas para cada elemento del juego. Tenemos entonces:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2{,}72 & -1 \\ -1 & 0{,}91 \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0{,}84 \end{pmatrix}$$
$$B_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1{,}87 \\ -1{,}87 & 0{,}72 \end{pmatrix} \qquad B_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2{,}10 \\ -2{,}10 & 1 \end{pmatrix}$$

Y estas matrices de elementos tienen las siguientes estrategias óptimas respectivamente:

$$
\begin{aligned}
x^1 &= (0{,}34,\ 0{,}66)\ , \quad y^1 = (0{,}34,\ 0{,}66) \\
x^2 &= (0{,}38,\ 0{,}62)\ , \quad y^2 = (0{,}38,\ 0{,}62) \\
x^3 &= (0{,}40,\ 0{,}60)\ , \quad y^3 = (0{,}40,\ 0{,}60) \\
x^4 &= (0{,}50,\ 0{,}50)\ , \quad y^4 = (0{,}50,\ 0{,}50)
\end{aligned}
$$

Estos vectores, entonces, dan las estrategias óptimas para el juego estocástico.

□

4.4. Juegos recursivos

Este tipo de juegos guardan similitudes con los estocásticos y los de agotamiento, pero con ciertas complicaciones añadidas. Al igual que en los juegos estocásticos, en los juegos recursivos pueden haber elementos de juego repetidos, y al igual que en los juegos de agotamiento, la probabilidad de terminar el juego en una etapa puede ser menor que uno, o incluso cero. Esto implica una probabilidad positiva de que un juego se extienda de forma infinita.

Generalmente lo que se hace es aplicar la función de recompensa únicamente cuando el juego termina, o si no hay fin del juego, una recompensa en un caso estipulado.

La principal dificultad para “parar” un juego en un caso específico, como hacíamos “truncando” en los juegos estocásticos, es precisamente que normalmente no es posible truncar de forma relativamente segura. Esto se debe a que al haber una probabilidad distinta de cero de juego infinito, no hay una etapa suficientemente avanzada con la que estemos seguros de que “truncar” no supondrá mucho desperdicio, y es que al cambiar la condición (4.2) por

$$
q_{ij}^{kl} \geq 0 \quad y \quad \sum_{l=1}^{p} q_{ij}^{kl} \leq 1 \tag{4.12}
$$

entonces un sistema de condiciones (4.5) y (4.4) no tienen porqué tener una única solución, y por ende los vectores v^r definidos en la demostración del Teorema 4.6 no tienen porqué converger al verdadero valor del juego.

Dadas las matrices $A_k = (a_{ij}^k)$ de dimensiones $m_k \times n_k$ para $k = 1, ..., p$, un juego recursivo consistirá en un conjunto finito de elementos del juego T_k asociados a las matrices cuyas entradas son:

$$
\alpha_{ij}^k = q_{ij}^{k0} a_{ij}^k + \sum_{l=1}^{p} q_{ij}^{kl} T_l.
$$

Estando los $q's$ sujetos a las restricciones (4.12).

consideramos las matrices $B_k = (b_{ij}^k)$ y tomamos las siguientes relaciones

$$v_k = valor(B_k), \qquad b_{ij}^k = q_{ij}^{k0} a_{ij}^k + \sum_{l=1}^{p} q_{ij}^{kl} v_l,$$

encontramos que existe una solución pero que no tiene porqué ser única, y es que la función $f(v_1,\ v_2, ...,\ v_p) = (Valor(B_1), ..., Valor(B_p))$ es continua (satisfaciendo además la condición de Lipschitz para la constante).

Como todas las v_k pertenecen al intervalo $[\underset{k,i,j}{min} a_{ij}^k,\ \underset{k,i,j}{max} a_{ij}^k]$, entonces las b_{ij}^k pertenecen también a ese intervalo, y por lo tanto también todos los valores de las matrices B_k. Por el teorema del punto fijo de Brouwer, debe haber un vector tal que $f(v) = v$, pero, como hemos señalado, no tiene porqué ser único.

La posible infinitud del juego y su difícil truncamiento provoca que puedan no existir estrategias óptimas, pero sí estrategias cuasi-óptimas.

Veremos las anteriores dificultades con un ejemplo de los llamados "Juegos Blotto".

Ejemplo 4.8. Un caso del juego del coronel Blotto es el siguiente: el coronel tiene una base militar con tres soldados defendiéndola, y planea mandar soldados a invadir una base enemiga que, a su vez, está siendo protegida por dos soldados. Cada ataque está formado por n soldados, los cuales invaden con éxito la base objetivo si hay como mucho $n-1$ soldados protegiéndola. En caso de no invadir con éxito, los soldados se retiran y se preparan para otro ataque en otro momento. La misión del coronel es invadir la base enemiga sin que éstos invadan la suya.

La recompensa es $+1$ si el coronel invade la base enemiga sin que los enemigos invadan la suya, y -1 en el caso de que la base del coronel sea invadida por los enemigos. La recompensa por una repetición del juego es cero.

Llamaremos T al juego y A a la matriz asociada. Las estrategias de ambos jugadores consistirán en defender y atacar con el número adecuado de soldados en cada caso. El jugador I, el coronel, tendrá la opción de enviar a 0, 1, 2, ó 3 soldados (4 estrategias) a invadir la base enemiga (el resto de soldados si los hubiera, se quedarían defendiendo su base), mientras que el jugador II, la base enemiga, tendrá la opción de enviar 0, 1 o 2 soldados (3 estrategias) a invadir la base del coronel. La matriz quedaría de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} T & T & T \\ T & T & 1 \\ T & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

El valor del juego se puede ver como $v < 1$ pero siendo v muy aproximado a $+1$, y es que la estrategia ϵ-óptima tiene la forma $x = (0, 1 - \gamma - \gamma^2, \gamma, \gamma^2)$. Ahora, cuanto menor sea γ, mayor será la probabilidad de victoria para el Coronel Blotto, pero también aumentará la duración del juego. Por lo tanto, parece que la paciencia de Blotto es importante aquí, porque la solución óptima está correlacionada con la paciencia del Coronel por esperar el ataque. Darse cuenta que para $\gamma = 0$, el juego podría extenderse indefinidamente, por lo tanto no existe una estrategia óptima para este juego.

No entraremos en más detalles porque el cálculo del valor del juego y de la estrategia ϵ-óptima es bastante complejo (ver [5] para más detalles).

$\square$

Capítulo 5

Teoría de la utilidad

La teoría de la utilidad estudia el comportamiento de los jugadores en base a la medida de felicidad o satisfacción personal que les proporciona un bien útil, ya sea monetario, sentimental...
El interés de esta teoría radica en que explica que los individuos actúan adjudicando un valor numérico a las cosas de forma distinta para cada persona y cada recompensa, utilizando además, una función lineal.

5.1. Noción de utilidad

Hemos utilizado mayormente "unidades" sin hacer mayor hincapié en ellas para evitar dar un valor real a los jugadores, una utilidad real, y asumir únicamente que una mayor cantidad de unidades corresponden proporcionalmente con un valor mayor.
Hemos basado además nuestro razonamiento en el valor esperado de las recompensas, y que por lo tanto, a los jugadores les da igual recibir 10 millones de euros de seguro que 0 euros con probabilidad $\frac{1}{2}$ y 20 millones de euros con probabilidad $\frac{1}{2}$. Lo cual no suele ser el caso.
Una vez demos un valor real, una recompensa real a los jugadores, el valor de éstas cambia para cada cual. Esto es así, porque una persona pobre no da la misma importancia a una cantidad fija de dinero que una persona rica, al igual que una persona no valora igual un anillo heredado generación tras generación de su familia que una persona ajena a esa familia. Esto es lo que estudia la teoría de la utilidad.

Empezaremos estudiando la relación entre varios eventos.

Definición 5.1. *Dada una relación de orden p y dos eventos A y B, diremos que ApB si $A \geq B$ y $A \not\geq B$ siendo entonces A preferible a B, y diremos que AiB si $A \geq B$ y $B \geq A$ siendo entonces A indiferente a B.*

Es sencillo comprobar que se verifican las siguientes propiedades:

Proposición 5.2.
Las relaciones i y p satisfacen las siguientes propiedades:

1) *Dados cualquiera dos eventos A y B, se debe dar uno de los siguientes casos: ApA, BpA, AiB.*

2) *AiA $\forall A$.*

3) *Si AiB, entonces BiA.*

4) *Si AiB y BiC, entonces AiC.*

5) *Si ApB y BpC, entonces ApC.*

6) *Si ApB y BiC, entonces ApC.*

7) *Si AiB y BpC, entonces ApC.*

La primera propiedad es conocida como la *Ley de tricotomía*. Las propiedades 2,3 y 4 proporcionan a i una relación de equivalencia. La propiedad 5 junto con la 1 significan que p es una relación de orden. Las últimas propiedades 6 y 7 dotan de una relación transitiva entre p e i.

Esencialmente, estas propiedades nos proporcionan una línea de orden para los eventos. Consideraremos entonces que un evento es más útil si es más deseable que otro.
Desafortunadamente, aunque sepamos que un evento es más útil que otro, no sabemos cómo de grande es esa diferencia. Esta diferencia en algunos casos puede no ser importante, y basta con saber cuál de los dos eventos es más útil, pero en otros casos sí que puede ser importante. Un ejemplo es que si a una persona la dan a escoger entre los eventos B y D, siendo D una lotería en la cual pueden suceder los eventos A y C tales que $ApBpC$, esta persona querría determinar las posibilidades de que salga un evento u otro en la lotería, y saber si es suficiente para compensar el riesgo de pérdida.

Si existieran bienes para las cuales la utilidad fuera lineal (que la utilidad fuera proporcional a la cantidad) no habría mayor dificultad, pero esto no es aplicable ni siquiera con el dinero, ya que una persona que tenga 80 millones de euros, el tener 81 millones no le supondrá mucha diferencia ni mucha utilidad de más, sin embargo a una persona que tenga mil euros, el tener un millón y mil euros sí que le supondrá una diferencia y una utilidad considerable.

Debido a que casi ningún bien se comporta de forma lineal en cuanto a su utilidad-cantidad, su medición se hace bastante compleja, pero estudiaremos formas de tratar con ellas.

5.2. Loterías

Uno de los casos más sencillos con los que podemos tratar bienes o útiles es en la toma de riesgos, que coincide con la idea de las loterías.

Definición 5.3. *Sean A y B dos eventos y un $r \in [0,1]$. Entonces llamaremos lotería a la distribución de probabilidad que elige A con probabilidad r y B con probabilidad $1-r$. La representaremos con la notación $rA + (1-r)B$.*

De forma equivalente al primer ejemplo del apartado anterior, un evento puede ser a su vez una lotería, por lo que la expresión anterior podría guardar tantas posibles salidas como uno quisiera. La combinación de eventos por medio de las loterías obedece a las leyes de la aritmética y el álgebra lineal. Tendríamos entonces las siguientes evidencias:

1) rA+(1-r)B=(1-r)B+rA,

2) rA + (1-r){sB+(1-s)C}=rA+(1-r)sB + (1-r)(1-s)C,

3) rA+(1-r)A=A.

Para algún $s \in [0,1]$.
Por otro lado, vamos a suponer que las relaciones p e i satisfacen los dos axiomas que siguen y que son intuitivamente razonables:

i) Si AiC, entonces para todo $r \in [0,1]$ y todo evento B, se tiene que $\{rA + (1-r)B\}i\{rC + (1-r)B\}$

ii) Y si ApC, entonces para todo $r \in (0,1]$ y todo evento B, se tiene que $\{rA + (1-r)B\}p\{rC + (1-r)B\}$

Los axiomas anteriores nos dan el siguiente teorema:

Teorema 5.4.
Sean A, B y C eventos tales que $ApCpB$, entonces existe algún $r \in (0,1)$ tal que $\{rA + (1-r)B\}iC$ siendo ademas r única.

Demostración. Es obvio que r no puede ser igual a cero ni uno. Supongamos que existe un $s \neq r$ tal que $A + (1-s)B)iC)$ y que pertenece al intervalo $(0,1)$. Si asumimos que $s < r$, entonces tenemos que $0 < r-s < 1-s$, y por lo tanto tenemos $B = \{\frac{r-s}{1-s}B + \frac{1-r}{1-s}B\}$. Como ApB, el axioma $ii)$ da que $\{\frac{r-s}{1-s}A + \frac{1-r}{1-s}B\}pB$. Además tenemos que: $rA + (1-r)B = sA + (1-s)\{\frac{r-s}{1-s}A + \frac{1-r}{1-s}B\}$. Y por el axioma $ii)$; $\{rA + (1-r)B\}p\{sA + (1-s)B\}$. □

Los axiomas vistos hasta ahora, son suficientes para construir una función de utilidad.

Teorema 5.5. *Existe una función u definida sobre el conjunto de todos los eventos que los envía al conjunto de los números reales, tal que para cualesquiera eventos A y B y $r \in [0,1]$, entonces:*

$$u(A) > u(B) \Leftrightarrow ApB \tag{5.1}$$

$$u(rA + (1-r)B) = ru(A) + (1-r)u(B) \tag{5.2}$$

Para cualesquiera eventos A y B y $r \in [0,1]$. Además, la función u es única salvo por transformación lineal (esto es, que asumiendo 5.1 y 5.2, existen números reales $\alpha > 0$ y β tales que $w(A) = \alpha u(A) + \beta$).

Demostración. Si $\forall A, B$ se cumple AiB, podemos definir $u(A) = 0$ para todo evento. Supongamos entonces que existen dos eventos E_1 y E_0 tales que $E_1 p E_0$. Por las propiedades 5.2, hay cinco posibilidades para cualquier evento A:

1) ApE_1 2) AiE_1 3) E_1pApE_0 4) AiE_0 5) E_0pA

Definamos $u(E_1) = 1$ y $u(E_0) = 0$. Podemos definir entonces $u(A)$ según las expresiones anteriores en base a las definiciones de $u(E_1)$ y $u(E_0)$. Vayamos en orden:
1) Tenemos que ApE_1pE_0. Por el teorema 5.4, existe $r \in (0,1)$ tal que $\{rA+(1-r)E_0\}iE_1$, por lo que definiremos $u(A) = \frac{1}{r}$
2) En este caso, claramente $u(A) = u(E_1) = 1$.
3) Aquí existe $s \in (0,1)$ tal que $\{sE_1 + (1-s)E_0\}$, por lo que podemos definir $u(A) = s$.
4) También está claro en este caso que $u(A) = 0$.
5) En este caso, existe un $t \in (0,1)$ tal que $\{tA+(1-t)E_1\}iE_0$, por lo que debe satisfacerse que $u(A) = \frac{(t-1)}{t}$.

Hemos definido entonces una función $u(A)$ para todos los posibles eventos A, y veremos que además se satisfacen 5.1 y 5.2.
Haremos la demostración asumiendo que ambos eventos A y B están en el caso 3), ya que el resto de casos son de demostración similar y se haría muy largo probar uno a uno.
Asumiremos entonces que, estando A y B en 3), $u(A) = s_A$ y $u(B) = s_B$. Si ahora tenemos que $s_A = s_B$, entonces A y B son equivalentes (respecto a i) a la lotería $s_AE_1 + (1-s_A)E_0$ y por lo tanto AiB y $u(A) = u(B)$. Si por el contrario, $s_A > s_B$, usando la demostración de 5.4 tenemos que $\{s_AE_1 + (1-s_A)E_0\}p\{s_BE_1 + (1-s_B)E_0\}$ y por lo tanto ApB. De forma equivalente, llegaríamos al caso de que BpA si $s_A < s_B$.
Demostrado ya 5.1, probaremos 5.2:

Sea $r \in (0,1)$. Tenemos $Ai\{s_AE_1 + (1-s_A)E_0\}$ y $Bi\{s_BE_1 + (1-s_B)E_0\}$ y por tanto, teniendo 5.2;

$\{rA+(1-r)B\}i\{r[s_A E_1+(1-s_A)E_0]+(1-r)[s_B E_1+(1-s_B)E_0]\}$.
y por lo tanto, $\{rA+(1-r)B\}i\{[rs_A+(1-r)s_B]E_1+[r(1-s_A)+(1-r)(1-s_B]E_0\}$, y por lo tanto, por definición de v, se tiene $E(rA+(1-r)B = rs_A+(1-r)s_B$ ó $u(rA+(1-r)B) = ru(A)+(1-r)u(B)$.

Nos falta probar que u es única salvo transformaciones lineales.
Sea v cualquier otra función que satisfaga 5.1 y 5.2. Como $E_1 p E_0$, entonces debe darse $v(E_1) > v(E_0)$, por lo que podemos definir $\beta = v(E_0)$ y $\alpha = v(E_1) - v(E_0) > 0$.
Supongamos ahora que $E_1 pApE_0$. Si $u(A) = s$, sabemos que $Ai\{sE_1+(1-s)E_0\}$, y por lo tanto $v(A) = v(sE_1+(1-s)E_0) = sv(E_1)+(1-s)v(E_0) = s(\alpha+\beta)+(1-s)\beta = s\alpha+\beta = \alpha u(A)+\beta$.

Se llegaría de forma similar a la misma conclusión para los casos 1), 2), 4) y 5) para cualesquiera eventos A y B. $\square$

Desde un punto de vista teórico, es práctico asignar una utilidad a todo tipo de eventos. Desde un punto de vista económico, además, es práctico también dirigir esta teoría a la toma de decisiones.

5.3. Utilidad absoluta

En el campo de la economía del bienestar es muchas veces deseable saber si un evento ayudará a un individuo a más de lo que dañara a otro individuo b. Esto no puede determinarse simplemente midiendo el incremento y decremento de la utilidad que causa cada evento a cada jugador, ya que las unidades de cada escala de utilidad son arbitrarias e imposibles de comparar de forma interpersonal.
La dificultad aquí está vinculada a la no existencia de una escala absoluta en donde poder medir estas utilidades.

Por otro lado, si las utilidades de las diferentes personas estuvieran acotadas, podríamos normalizarlas de modo que una imagen fuera el intervalo $[0,1]$ (probablemente abierto o semiabierto) y existiría una escala de cero a uno en donde poder comparar utilidades.

El hecho de que las utilidades sean acotadas o no, es una pregunta abierta que se sale del ámbito de las matemáticas, no obstante Isbell en [3] propone tres argumentos a favor de las utilidades acotadas:

1. Asumamos que mi utilidad sea no acotada por arriba. Sea A el evento “nada cambia”, y B el evento “soy hervido en aceite”. Como la utilidad no está acotada superiormente, debe haber algún evento C tal que; $u(C) > 2u(A) - u(B)$. Pero esto significa que $\{\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}B\}pA$,

y me resulta difícil concebir un evento C que me hiciera preferir la lotería $\{\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}B\}$ a mi actual estado de vida. Por tanto, u debe estar acotado por arriba.

2. Asumamos que u es no acotada por abajo. Sea A el evento “nada cambia” y B el evento “gano un millón de euros” . Ahora, siendo u no acotada por abajo, habrá algún evento C tal que $Ap\{0{,}9999999A + 0{,}0000001C\}$. Me resulta difícil concebir tal evento C. Por tanto u debe estar acotada por abajo.

3. Supongamos además que mi espacio de utilidad es no acotado por arriba. Entonces, existe una secuencia de eventos $A_1, A_2, ...,$ tal que $u(A_n) = 2^n$. Entonces, la lotería

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} A_n$$

Tendrá infinita utilidad. Sin embargo, el comportamiento de la gente no parece estar de acuerdo con este hecho. Esta paradoja se conoce como la paradoja de San Petersburgo.

5.3.1. Paradoja de San Petersburgo

La formulación original de la paradoja aparece en una carta de Nicolaus Bernoulli de 1713. La formulación de la paradoja es la siguiente: Un jugador tiene que pagar una entrada para participar en un juego que consiste en realizar lanzamientos sucesivos de una moneda hasta que salga cruz por primera vez. Entonces se detiene el juego, y si llamamos n al número de lanzamientos que se han producido, el jugador obtiene 2^n euros. Por tanto, si sale cruz la primera vez, el jugador gana 2^1 euros; si la cruz sale en el segundo lanzamiento, gana 2^2 euros; si sale en el tercero 2^3...; Entonces, ¿cuál sería el precio justo por jugar este juego?.
Si asumimos que el precio justo es el valor del juego, es decir, la suma de los premios asociados a cada uno de los ∞ posibles resultados del juego $(l_1, l_2, ..., l_n, ...)$, ponderados por la probabilidad de que se produzca cada uno de ellos $(p_1, p_2, ..., p_n, ...)$. El precio justo es entonces

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i l_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} 2^n = \sum_{i=1}^{\infty} 1 = \infty$$

Pero lógicamente nadie va a pagar ese precio para participar en el juego. La solución de este juego no está aún clara, pero la idea es que aunque la ganancia monetaria pueda incrementarse indefinidamente, la utilidad de esa ganancia no se incrementa de modo paralelo. Esto implica que el valor utilitario de las recompensas (que al fin y al cabo es el valor verdadero que le daría un jugador) es menor y por tanto el precio justo, y si consideramos ademas el espacio de utilidad acotado, entonces el precio justo es un valor finito.

Bibliografía

[1] Nash J., Non-cooperative Games. Annals of Mathematics 54: 286-295, 1951.

[2] von Neumann J. and O. Morgenstern, Theory of Games and Economic Behavior. Princeton, New Jersey (Princeton Univ. Press), 1944, 1947.

[3] Dresher, M., L.S. Shapley, and A.W. Tucker eds., Advances in Game Theory, Annals of Mathematics Studies N0. 52, Princeton, New Jersey (Princeton Univ. Press), 1964.

[4] Urquidi J.M., Teoremas de Punto Fijo y la Existencia de Equilibrios de Nash para Juegos no Cooperativos, 2008.

[5] Owen G., Game Theory, Academic Press, INC.

[6] Milnor J., Analytic Proofs of the "Hairy Ball Theorem" and the Brouwer Fixed Point Theorem. American Mathematical Monthly 85-7: 521-524, 1978.

[7] Ricard J. E., Una introducción a la teoría de juegos, Documento de Investigación DI-138, IESE Bussiness School Universidad de Navarra, 1988.