

# TEORIA DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO E ONDAS

César Augusto Dartora

“E Deus disse:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho , \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 , \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} , \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} ,\end{aligned}$$

então fez-se a luz.”  
(parafrazeando o livro do Gênesis.)

“De uma perspectiva mais longa da história da humanidade, quando vista daqui a dez mil anos, haverá pouca dúvida de que o mais significativo evento do século XIX terá sido a descoberta de Maxwell a respeito das leis da eletrodinâmica. A guerra civil americana, que ocorreu nesse mesmo século, será ofuscada, em toda sua insignificância provinciana, em comparação com as equações de Maxwell.”

(Richard Feynman, em suas Lições de Física)

# Prefácio

O eletromagnetismo clássico é provavelmente a mais bem compreendida teoria da Física e seguramente uma das mais bem sucedidas. A história da humanidade costuma ser dividida em Antes e Depois de Cristo, porém, de um ponto de vista estritamente científico, poderia-se dizer ela está dividida em Antes e Depois de Maxwell, tal o impacto causado pelas aplicações do eletromagnetismo na sociedade moderna. O escocês James Clerk Maxwell, que viveu no século XIX, sintetizou em um conjunto de equações a descrição de todos os fenômenos eletromagnéticos e atualmente vivemos a plenitude da *Era Eletromagnética*. O domínio da teoria eletromagnética permitiu resolver desde os problemas mais simples, como a iluminação de residências e vias públicas, passando por complexas máquinas e equipamentos elétricos de uso residencial e industrial, e finalmente promovendo uma revolução na forma como nos localizamos e nos relacionamos com as pessoas, através do uso de comunicações móveis, sistemas de posicionamento global (GPS) e o advento da internet e das redes sociais. O desenvolvimento das telecomunicações é um marco tão relevante que, na busca pela vida inteligente fora do nosso planeta, os astrônomos classificam as possíveis civilizações existentes fora da Terra em duas categorias: as que já chegaram às comunicações eletromagnéticas e as que ainda não a dominam, sendo assim impossível rastrear-las. É portanto, fundamental que físicos e engenheiros eletricitistas tenham amplo conhecimento das leis do eletromagnetismo e domínio das técnicas matemáticas empregadas na solução de problemas práticos.

A literatura acerca da teoria eletromagnética na forma de livros didáticos é vastíssima, contemplando os mais diversos níveis de profundidade e formas de abordagem. Cabe nesse contexto a pergunta: por que mais um livro de teoria eletromagnética, em meio ao oceano de informações já disponíveis? Obviamente que não busca-se aqui apresentar um pouco mais do mesmo, embora os tópicos mais importantes e consagrados não poderiam ser omitidos. Tipicamente os livros didáticos apresentam a teoria eletromagnética sob o prisma do desenvolvimento histórico, abordando os assuntos na ordem cronológica em que os conceitos foram aparecendo, o que nem sempre traz consigo uma consistência lógica. Nesse caso, primeiro são apresentadas as leis eletrostáticas, partindo-se do conceito de carga elétrica e da lei de Coulomb, introduzindo-se o conceito de campo elétrico. Nesse primeiro contato com o conceito de campos no domínio da eletrostática, muitos alunos têm a impressão de que trata-se de um artifício puramente matemático e desnecessário. Os conceitos de energia potencial, potencial escalar elétrico e capacitância são discutidos e em alguns textos, a solução de problemas de contorno através das equações de Poisson e Laplace é considerada e discutida em maior ou menor grau de complexidade. A seguir, usualmente define-se a corrente elétrica e a ideia de conservação da carga é apresentada através da equação da continuidade, discutindo-se ainda a classificação dos materiais quanto à sua condutividade, para mais adiante apresentar as leis da magnetostática. Uma vez que os campos magnéticos estáticos são gerados pela corrente elétrica, a busca de uma simetria onde fenômenos magnéticos são capazes de produzir campo elétrico levou à descoberta da lei de Faraday, onde a dinâmica temporal não pode mais ser omitida. A apresentação de fenômenos variantes no tempo e a constatação de que a lei de Ampère não está de acordo com a conservação de carga, levou Maxwell a corrigir a lei de Ampère e apresentar as equações que levam seu nome. A partir daí são tratados os fenômenos ondulatórios, sendo que somente com a dedução e discussão do teorema de Poynting mostrando que os campos eletromagnéticos transportam energia o aluno pode se convencer totalmente da existência física real dos mesmos, não sendo meramente artifícios matemáticos. Partindo-se das equações de Maxwell várias aplicações são abordadas em diferentes livros de acordo com o que seus autores julgam mais importante ou interessante, deixando outros tópicos em segundo plano. O princípio de indução, onde a teoria é gradativamente generalizada indo do caso particular para o mais geral, é sistematicamente empregado, porque historicamente os fenômenos estáticos foram compreendidos antes daqueles variantes no tempo.

A ideia do presente texto é apresentar as equações de Maxwell do ponto de vista axiomático, e a partir delas derivar os casos particulares, ou seja, adota-se aqui uma postura lógico-dedutiva que não é a mais usual quando no estudo da teoria eletromagnética. Os conceitos matemáticos fundamentais para a compreensão rigorosa e a lei de conservação na forma da equação de continuidade são apresentados primeiro e então as equações de Maxwell são dadas como postulado fundamental da descrição dos fenômenos eletromagnéticos clássicos. Das equações de Maxwell, vários casos particulares são discutidos em maior ou menor profundidade, de acordo com a conveniência. Por exemplo, dá-se mais enfoque aos fenômenos ondulatórios e variantes no tempo do que à eletrostática e magnetostática, embora estas últimas sejam brevemente discutidas. Conceitos como homogeneidade, isotropia e linearidade em meios materiais ganharam um capítulo próprio, porque são considerados de fundamental importância. Sempre que possível, experimentos reais relacionados aos conceitos teóricos apresentados são propostos e discutidos. Exercícios são propostos ao final de cada capítulo.

A presente obra está estruturada da seguinte maneira: o primeiro capítulo contempla uma breve introdução ao assunto onde a história do eletromagnetismo é contada, situando a teoria eletromagnética em relação à Física moderna e discutindo de forma geral o espectro eletromagnético e suas aplicações. O Capítulo 2 traz, de forma bastante didática e resumida, longe de querer apresentar todo o rigor matemático necessário, (os matemáticos que me perdoem por alguma omissão ou falta), uma revisão completa dos fundamentos matemáticos necessários para compreender a teoria, como o conceito de campos e partículas, vetores e o cálculo diferencial e integral vetorial, e finalmente as transformadas de Fourier. O Capítulo 3 discute a equação de continuidade de modo bastante geral, particularizando para o caso da conservação da carga elétrica, com exemplos de processos físicos que ocorrem na natureza, onde a lei de conservação sempre se verifica. As equações de Maxwell são devidamente apresentadas no Capítulo 4, e seu significado físico é detalhadamente discutido. Indo além, verifica-se a auto-consistência interna do sistema de equações, demonstrando que são consistentes com a lei de conservação de carga elétrica e, com a definição adicional da força de Lorentz, é deduzida a lei de conservação de energia, também conhecida como teorema de Poynting. Para finalizar o Capítulo 4, apresenta-se de forma bastante simplificada a obtenção das equações de Maxwell macroscópicas a partir das equações microscópicas, justificando assim o aparecimento de dois vetores associados ao campo elétrico e outros dois associados ao campo magnético. O Capítulo 5 trata da função resposta ou susceptibilidade dos meios materiais, apresentando conceitos como homogeneidade, isotropia e linearidade. A teoria microscópica clássica para a resposta da matéria aos campos eletromagnéticos é discutida, permitindo assim inferir comportamentos gerais da matéria em função da frequência dos campos aplicados. Os Capítulos 6 e 7 são destinados a discutir de forma tão ampla quanto possível a eletrostática e a magnetostática, respectivamente, com a apresentação de problemas de contorno e suas soluções. Para o leitor interessado nos fenômenos eletromagnéticos em regime variante no tempo, a omissão desses dois capítulos é perfeitamente possível, passando diretamente ao Capítulo 8, onde são apresentados os conceitos fundamentais da ondulatória, sendo a equação de ondas deduzida em um caso geral, partindo-se de noções intuitivas que são associadas a ondas. Apresenta-se a solução da equação de ondas pelo método de separação de variáveis e desta são derivados os conceitos de comprimento de onda, frequência angular temporal e a relação entre velocidade da onda, comprimento de onda e frequência. O Capítulo 9 trata da obtenção da equação de ondas no eletromagnetismo para meios lineares, isotrópicos e homogêneos, bem como sua solução geral em meios materiais. Fenômenos de superposição de ondas e incidência em interfaces, levando ao problema de reflexão e refração e à lei de Snell, são discutidos detalhadamente. O Capítulo 10 traz a definição dos potenciais eletromagnéticos, discutindo-se a liberdade de gauge e a obtenção de equações de ondas para os potenciais. A partir da solução formal para esses potenciais, discute-se o problema de radiação eletromagnética e os conceitos mais fundamentais da teoria de antenas. O Capítulo 11 apresenta o problema das ondas guiadas,

abordando a definição geral de guia de ondas e os conceitos associados, como modos de propagação, a decomposição transversal-longitudinal, os principais tipos de guias. As linhas de transmissão e os guias metálicos são analisados de modo quantitativo, enquanto os guias dielétricos são apresentados de forma qualitativa. Os fenômenos de difração são detalhadamente discutidos através da aproximação paraxial, apresentada no Capítulo 12, enquanto a dispersão é analisada no Capítulo 13. A obra está longe de ser exaustiva e completa, e por isso, outras referências são apontadas ao longo do texto.

Curitiba, Julho de 2015.

César A. Dartora

# Contents

<b>Relações Vetoriais</b>	<b>1</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>5</b>
1.1 As Interações Fundamentais Conhecidas . . . . .	8
1.2 Limites de Validade do Eletromagnetismo . . . . .	13
1.3 O Espectro Eletromagnético e Suas Aplicações . . . . .	16
1.4 Referências deste Capítulo . . . . .	20
<b>2 Fundamentos Matemáticos</b>	<b>21</b>
2.1 Partículas e Campos . . . . .	21
2.2 Propriedades e Operações com Escalares e Vetores . . . . .	23
2.2.1 Propriedades Básicas de Escalares . . . . .	24
2.2.2 Propriedades Básicas da Soma de Vetores . . . . .	25
2.2.3 Produtos Vetoriais e Suas Propriedades . . . . .	25
2.2.4 Vetores Unitários . . . . .	27
2.3 Sistemas de Coordenadas e Transformações entre Sistemas . . . . .	28
2.3.1 Coordenadas Retangulares $(x, y, z)$ . . . . .	28
2.3.2 Coordenadas Cilíndricas $(\rho, \varphi, z)$ . . . . .	29
2.3.3 Coordenadas Esféricas $(r, \theta, \varphi)$ . . . . .	30
2.3.4 Transformações entre Coordenadas . . . . .	31
2.4 Calculo Vetorial Diferencial e Integral: Teoremas . . . . .	34
2.4.1 Diferenciação de Vetores . . . . .	35
2.4.2 Integração de Vetores . . . . .	35
2.4.3 O operador Nabla . . . . .	36
2.4.4 Derivada Direcional: Gradiente . . . . .	36
2.4.5 Fluxo de um Vetor, Divergência e Teorema de Gauss . . . . .	36
2.4.6 Circulação de um vetor, Rotacional e Teorema de Stokes . . . . .	39
2.4.7 Outras Identidades Importantes . . . . .	41
2.5 Números Complexos e Fasores . . . . .	41
2.6 Transformadas de Fourier . . . . .	43
2.7 Ponto Campo, Ponto Fonte e Função Delta de Dirac . . . . .	43
2.8 Referências Deste Capítulo . . . . .	45
2.9 Problemas Propostos . . . . .	45

<b>3</b>	<b>Lei de Conservação de Carga e Equação da Continuidade</b>	<b>51</b>
3.1	A equação de continuidade . . . . .	51
3.2	Relação entre $\rho$ e $\mathbf{J}$ . . . . .	53
3.3	A lei dos nós em circuitos elétricos . . . . .	54
3.4	Alguns Exemplos de Processos Físicos . . . . .	55
3.5	Referências Deste Capítulo . . . . .	57
3.6	Problemas Propostos . . . . .	57
<b>4</b>	<b>As Equações de Maxwell</b>	<b>59</b>
4.1	Equações de Maxwell em forma diferencial e integral . . . . .	59
4.2	Significado Físico das Equações de Maxwell . . . . .	60
4.3	Leis de Conservação e o Vetor de Poynting . . . . .	65
4.3.1	Consistência das Equações e a Equação de Continuidade . . . . .	65
4.3.2	Teorema de Poynting em Meios Lineares, Homogêneos e Isotrópicos . . . . .	66
4.4	Equações de Maxwell no Regime Harmônico . . . . .	71
4.5	Das equações de Maxwell microscópicas para o mundo macroscópico . . . . .	71
4.6	Referências Deste Capítulo . . . . .	76
4.7	Problemas Propostos . . . . .	76
<b>5</b>	<b>Propriedades Eletromagnéticas dos Meios Materiais</b>	<b>79</b>
5.1	Função Resposta ou Susceptibilidade de um Material . . . . .	79
5.1.1	Homogeneidade, Isotropia e Linearidade . . . . .	80
5.2	Teoria da Permissividade Dielétrica . . . . .	81
5.2.1	A técnica do circuito RC para medidas em baixas frequências . . . . .	86
5.3	Propriedades Magnéticas dos Materiais . . . . .	88
5.3.1	Momento de Dipolo Magnético, Magnetização e Dinâmica da Magnetização . . . . .	89
5.3.2	Momento de Dipolo Magnético de uma Carga em Movimento: Relação com o Momento Angular . . . . .	90
5.3.3	Diamagnetismo . . . . .	92
5.3.4	Paramagnetismo e a Teoria de Langevin . . . . .	93
5.3.5	Modelo de Weiss para o Ferromagnetismo . . . . .	94
5.3.6	Equação para a Dinâmica da Magnetização . . . . .	94
5.4	Susceptibilidade Dinâmica no Regime Linear . . . . .	96
5.5	Referências deste Capítulo . . . . .	98
5.6	Problemas Propostos . . . . .	98
<b>6</b>	<b>Campos Eletrostáticos e Magnetostáticos</b>	<b>99</b>
6.1	Eletrostática . . . . .	99
6.1.1	Solução integral da Equação de Poisson . . . . .	100
6.1.2	A rota histórica para a lei de Gauss-Coulomb . . . . .	101
6.1.3	A Lei de Gauss revisitada . . . . .	103
6.1.4	Energia Eletrostática e Capacitância . . . . .	104
6.2	Magnetostática . . . . .	104
6.2.1	O Potencial Escalar Magnético . . . . .	105
6.2.2	A rota história para a Magnetostática . . . . .	106

6.2.3	Lei de Biot-Savart e Forças Magnéticas entre Correntes . . . . .	107
6.2.4	Energia Magnetostática e Indutância . . . . .	115
6.3	Referências Deste Capítulo . . . . .	115
6.4	Problemas Propostos . . . . .	115
<b>7</b>	<b>Fundamentos gerais da ondulatória</b>	<b>119</b>
7.1	A Equação de Ondas . . . . .	119
7.2	Solução da Equação de Ondas Homogênea em Coordenadas Cartesianas . . . . .	126
7.3	Conceito: Ondas Planas Uniformes . . . . .	130
7.4	Referências Deste Capítulo . . . . .	132
7.5	Problemas Propostos . . . . .	132
<b>8</b>	<b>Ondas Planas Uniformes</b>	<b>135</b>
8.1	A Equação de Ondas . . . . .	136
8.1.1	Solução de Ondas Planas Uniformes . . . . .	138
8.1.2	Uma Abordagem Alternativa: A solução da Equação de Ondas no Vácuo . . . . .	142
8.2	Análise da Propagação de Ondas em Meios Materiais . . . . .	145
8.2.1	Meios Dielétricos Ideais ou Meios Sem Perdas ( $\sigma = 0$ ) . . . . .	146
8.2.2	Meios Dielétricos Reais ou com Pequenas Perdas ( $\sigma \ll \omega\varepsilon$ ) . . . . .	148
8.2.3	Meio Condutor ( $\sigma \gg \omega\varepsilon$ ) . . . . .	149
8.2.4	Meios com Perdas e Condutividade da ordem $\sigma \sim \omega\varepsilon$ . . . . .	149
8.3	Ondas planas no Espaço Recíproco . . . . .	150
8.4	Representação Geral da Polarização de Ondas Eletromagnéticas . . . . .	151
8.4.1	Polarização Linear . . . . .	152
8.4.2	Polarização Circular . . . . .	153
8.5	Condições de Contorno e Interfaces Planas entre Meios: lei de Snell, refração e reflexão, ângulo de Brewster . . . . .	157
8.5.1	A Incidência Normal . . . . .	159
8.5.2	Incidência Oblíqua . . . . .	161
8.6	Um Exemplo de Propagação em Meios Anisotrópicos . . . . .	167
8.6.1	Efeito de Rotação de Faraday . . . . .	169
8.6.2	Efeito Kerr magneto-óptico . . . . .	171
8.7	A Equação de Ondas em Meio Dielétrico Isotrópico e Não-Homogêneo . . . . .	171
8.8	Referências deste Capítulo . . . . .	172
8.9	Problemas Propostos . . . . .	172
<b>9</b>	<b>Potenciais Eletromagnéticos e Antenas</b>	<b>177</b>
9.1	Os potenciais $\phi$ e $\mathbf{A}$ e condições de calibre . . . . .	177
9.2	Solução Formal das Equações de Ondas dos Potenciais . . . . .	179
9.2.1	Solução de $\phi$ e $\mathbf{A}$ no Calibre de Lorentz pelo Método das Funções de Green . . . . .	181
9.3	Potenciais Eletromagnéticos no Regime Harmônico . . . . .	183
9.4	Teoria da Radiação e considerações sobre o vetor de Poynting . . . . .	185
9.5	Potenciais de Liénard-Wiechert e Radiação de Cargas Aceleradas . . . . .	188
9.6	O Dipolo Elétrico . . . . .	192
9.7	O Regime Quase-Estático . . . . .	198

9.8	Características Básicas de Antenas . . . . .	200
9.8.1	Principais Tipos de Antenas . . . . .	200
9.8.2	Regiões de Campo e Campos de Radiação . . . . .	201
9.8.3	Elemento Diferencial de Ângulo Sólido $d\Omega$ . . . . .	204
9.8.4	Potência Total Radiada . . . . .	206
9.8.5	O Radiador Isotrópico Ideal . . . . .	207
9.8.6	Função Diretividade Angular e Diagramas de Radiação . . . . .	207
9.8.7	Eficiência de Radiação e Ganho de Antena . . . . .	208
9.8.8	Potência Efetiva Radiada Isotropicamente - EIRP . . . . .	210
9.8.9	Largura de Feixe (Beamwidth) . . . . .	211
9.8.10	Área de Abertura Efetiva $A_{ef}$ . . . . .	211
9.8.11	Polarização de Antena . . . . .	212
9.8.12	A Fórmula de Friis . . . . .	212
9.8.13	Cálculo da Amplitude de Pico do Campo Elétrico . . . . .	214
9.8.14	A equação do radar . . . . .	215
9.9	Impedância de Antena . . . . .	216
9.9.1	Considerações sobre Ruído em Antenas . . . . .	218
9.10	Emissão e Absorção de Radiação no Espectro Óptico e Acima . . . . .	219
9.11	Referências deste Capítulo . . . . .	222
9.12	Problemas Propostos . . . . .	222
<b>10</b>	<b>Ondas guiadas</b> . . . . .	<b>227</b>
10.1	Principais Tipos de Guias de Onda . . . . .	228
10.1.1	Formas de Abordagem para o estudo de Propagação de Ondas . . . . .	229
10.2	A Decomposição Transversal-Longitudinal . . . . .	230
10.3	Conceitos Fundamentais sobre Análise Modal . . . . .	232
10.3.1	Tipos de Modos . . . . .	233
10.3.2	Equações para modos TE ou TM no regime harmônico . . . . .	235
10.4	Análise dos Modos TEM na Linha de Transmissão . . . . .	236
10.4.1	Equações do Telegrafista ou de Linhas de Transmissão . . . . .	237
10.4.2	Uma Dedução Alternativa das Equações do Telegrafista: O Modelo de Parâmetros Distribuídos . . . . .	238
10.4.3	Solução das Equações do Telegrafista . . . . .	240
10.4.4	A Carta de Smith . . . . .	242
10.5	Modo TEM em um guia coaxial . . . . .	243
10.6	Guias de Ondas Metálicos: propagação de energia e atenuação . . . . .	246
10.6.1	Modos TE em Guia Metálico . . . . .	246
10.6.2	Modos TM em Guia Metálico . . . . .	247
10.6.3	Propagação da Energia e Perdas . . . . .	247
10.6.4	Guia Metálico Retangular . . . . .	249
10.6.5	Demonstração: Ausência de Modos TEM em um guia oco . . . . .	251
10.6.6	Guia Metálico de Seção Circular . . . . .	253
10.7	Cavidade Ressonante . . . . .	255
10.8	Guias Dielétricos: a Fibra Óptica . . . . .	257

10.8.1	Estudo da Propagação através da Óptica Geométrica . . . . .	258
10.8.2	Estudo da dispersão em fibras multimodo através óptica geométrica . . . . .	259
10.8.3	Uma equação de trajetória para a Óptica Geométrica . . . . .	261
10.9	Referências deste Capítulo . . . . .	264
10.10	Problemas Propostos . . . . .	264
<b>11</b>	<b>Teoria de Difração na Aproximação Paraxial</b>	<b>269</b>
11.1	A aproximação paraxial da equação de ondas . . . . .	271
11.1.1	Analogias com a Equação de Schrödinger Não-Relativística da Mecânica Quântica . . . . .	273
11.1.2	Formulação Lagrangiana da Óptica no Regime Paraxial . . . . .	274
11.2	A equação paraxial em (1+1)-D e exemplos relevantes em óptica . . . . .	275
11.2.1	Difração por fenda simples . . . . .	276
11.2.2	Difração em Coordenadas Cilíndricas . . . . .	277
11.3	Referências deste Capítulo . . . . .	279
11.4	Problemas Propostos . . . . .	279
<b>12</b>	<b>Dispersão Temporal</b>	<b>285</b>
12.1	Efeitos de degradação de sinais na fibra óptica . . . . .	286
12.2	<b>Atenuação: Perdas na Fibra</b> . . . . .	292
12.3	Referências deste Capítulo . . . . .	293
12.4	Problemas Propostos . . . . .	293

# Relações Vetoriais

## I - Álgebra de Vetores

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = (A_1 \pm B_1)\hat{\mathbf{a}}_1 + (A_2 \pm B_2)\hat{\mathbf{a}}_2 + (A_3 \pm B_3)\hat{\mathbf{a}}_3 \quad (1)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 \quad (2)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \hat{\mathbf{a}}_1(A_2 B_3 - A_3 B_2) + \hat{\mathbf{a}}_2(A_3 B_1 - A_1 B_3) + \hat{\mathbf{a}}_3(A_1 B_2 - A_2 B_1) \quad (3)$$

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta \quad (4)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \quad (5)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (6)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (7)$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \mathbf{A} \cdot [\mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D})] = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \quad (8)$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = [(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{D}]\mathbf{C} - [(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}]\mathbf{D} \quad (9)$$

## II - Operações vetoriais em sistemas coordenados usuais

Coordenadas Retangulares  $(x, y, z)$ :

$$\text{grad } \Phi = \nabla \Phi = \hat{\mathbf{a}}_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \hat{\mathbf{a}}_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \hat{\mathbf{a}}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (10)$$

$$\text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (11)$$

$$\text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \hat{\mathbf{a}}_x \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \hat{\mathbf{a}}_y \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \hat{\mathbf{a}}_z \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \quad (12)$$

$$\nabla^2 \Phi = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi \quad (13)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \hat{\mathbf{a}}_x \nabla^2 A_x + \hat{\mathbf{a}}_y \nabla^2 A_y + \hat{\mathbf{a}}_z \nabla^2 A_z \quad (14)$$

Coordenadas Cilíndricas  $(\rho, \varphi, z)$ :

$$\nabla \Phi = \hat{\mathbf{a}}_\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \hat{\mathbf{a}}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \hat{\mathbf{a}}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (16)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \hat{\mathbf{a}}_\rho \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) + \hat{\mathbf{a}}_\varphi \left( \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) + \hat{\mathbf{a}}_z \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right) \quad (17)$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \quad (18)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \quad (19)$$

Observe que nestas coordenadas  $\nabla^2 \mathbf{A} \neq \hat{\mathbf{a}}_\rho \nabla^2 A_\rho + \hat{\mathbf{a}}_\varphi \nabla^2 A_\varphi + \hat{\mathbf{a}}_z \nabla^2 A_z$ .

**Coordenadas Esféricas**  $(r, \theta, \varphi)$ :

$$\nabla \Phi = \hat{\mathbf{a}}_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \hat{\mathbf{a}}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{a}}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \quad (20)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\hat{\mathbf{a}}_r}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] + \frac{\hat{\mathbf{a}}_\theta}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right] + \\ + \frac{\hat{\mathbf{a}}_\varphi}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (22)$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \quad (23)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \quad (24)$$

### III - Identidades Vetoriais

$$\nabla(\Phi \Psi) = \Psi \nabla \Phi + \Phi \nabla \Psi \quad (25)$$

$$\nabla \cdot \nabla \Phi = \nabla^2 \Phi \quad (26)$$

$$\nabla \cdot (\Phi \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \nabla \Phi + \Phi \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (27)$$

$$\nabla^2(\Phi \Psi) = \Psi \nabla^2 \Phi + \Phi \nabla^2 \Psi + 2 \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi \quad (28)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} - (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} \quad (29)$$

$$\nabla \times (\Phi \mathbf{A}) = \nabla \Phi \times \mathbf{A} + \Phi \nabla \times \mathbf{A} \quad (30)$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \nabla \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (31)$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0 \quad (32)$$

$$\nabla \times \nabla \Phi = 0 \quad (33)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (34)$$

**Teorema de Gauss**

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (35)$$

**Teorema de Stokes**

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (36)$$

**Identidades de Green Escalares**

$$\int_V (\nabla \Phi \cdot \nabla \Psi + \Psi \nabla^2 \Phi) \, dV = \oint_S \Psi \nabla \Phi \cdot d\mathbf{S} \quad (37)$$

$$\int_V (\Psi \nabla^2 \Psi - \Phi \nabla^2 \Psi) dV = \oint_S (\Psi \nabla \Phi - \Phi \nabla \Psi) \cdot d\mathbf{S} \quad (38)$$

### Identidades de Green Vetoriais

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{B}) dV &= \int_V [(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{B}] dV = \\ &= \oint_S \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \quad (39)$$

$$\int_V (\mathbf{B} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{B}) dV = \oint_S [\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A})] \cdot d\mathbf{S} \quad (40)$$

### Outras Identidades

$$\int_V \nabla \Phi dV = \oint_S \Phi d\mathbf{S} \quad (41)$$

$$\int_V \nabla \times \mathbf{A} dV = \oint_S \mathbf{n} \times \mathbf{A} dS \quad d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS \quad (42)$$

$$\int_S \mathbf{n} \times \nabla \Phi dS = \oint_C \Phi d\mathbf{l} \quad (43)$$

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{R} \right) = -4\pi \delta^3(\mathbf{R}) \quad (44)$$

onde  $\delta^3(\mathbf{R}) = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')$  é a função delta de Dirac em 3 dimensões e  $R = |\mathbf{R}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$

$$\nabla \cdot \mathbf{R} = 3 \quad \nabla \times \left( \frac{\mathbf{R}}{R} \right) = 0 \quad (45)$$

$$\nabla(R) = \frac{\mathbf{R}}{R} \quad (46)$$

$$\nabla'(R) = -\frac{\mathbf{R}}{R} \quad (47)$$

$$\nabla \left( \frac{1}{R} \right) = -\frac{\mathbf{R}}{R^3} \quad \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) = \frac{\mathbf{R}}{R^3} \quad (48)$$

onde  $\nabla$  opera em  $\mathbf{r}$  e  $\nabla'$  em  $\mathbf{r}'$ ,  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ . Na notação utilizada acima, os vetores são denotados por letras em negrito, enquanto escalares por letras gregas.

## Constantes Úteis

Velocidade da luz no vácuo -  $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = 2.998 \times 10^8 \text{ m/s}$ .

Permissividade dielétrica do vácuo -  $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$

Permeabilidade magnética do vácuo -  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$

Impedância do Espaço livre -  $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 376.7 \ \Omega$

Módulo da carga do elétron -  $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$

Constante de Planck -  $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J.s}$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.055 \times 10^{-34} \text{ J.s}$$

Constante de Boltzmann -  $k_B = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J/K}$

Número de Avogadro -  $N_0 = 6.023 \times 10^{23} \text{ /mol}$

Massa de repouso do elétron -  $m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg} = 0.511 \text{ MeV}/c^2$

Massa de repouso do próton -  $m_p = 1.672 \times 10^{-27} \text{ kg} = 938.3 \text{ MeV}/c^2$

Massa de repouso do nêutron -  $m_n = 1.675 \times 10^{-27} \text{ kg} = 939.6 \text{ MeV}/c^2$

Magnéton de Bohr -  $\mu_B = e\hbar/(2m_e) = 9.27 \times 10^{24} \text{ A.m}^2 \text{ (ou J/Tesla)}$

Raio de Bohr -  $a_0 = 4\pi\varepsilon_0/(m_e e^2) = 5.29 \times 10^{-11} \text{ m}$

Energia de Bohr -  $E_1 = -m_e e^4 / [(4\pi\varepsilon_0)^2 2\hbar^2] = -2.17 \times 10^{-18} \text{ J} = -13.6 \text{ eV}$

Comprimento de onda Compton do Elétron -  $\lambda_C = h/m_e c = 1.43 \times 10^{-12} \text{ m}$

Constante de estrutura fina -  $\alpha = e^2/(4\pi\varepsilon_0 \hbar c) = 1/137$

1 eV =  $1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$  ou 1 J =  $6.242 \times 10^{18} \text{ eV}$

# Chapter 1

## Introdução

Pode-se afirmar de modo seguro que a tarefa fundamental da Física é compreender as leis que governam todos os fenômenos naturais, permitindo ao campo da Engenharia a aplicação do conhecimento acumulado à solução de problemas práticos, visando promover conforto e melhoria das condições de vida das pessoas na sociedade moderna, através de projetos de construção civil e saneamento, meios de transporte, desenvolvimento de dispositivos mecânicos, elétricos e eletrônicos, concepção de equipamentos para uso doméstico, na medicina, em aplicações militares e tantos outros sistemas. A Física, por ser uma ciência empírica, ampara-se no método científico, que consiste na formulação de teorias cujas hipóteses científicas, segundo Karl Popper, são dotadas de uma propriedade fundamental, a falseabilidade ou refutabilidade. Uma hipótese falseável é aquela para a qual a realização de testes experimentais adequados permitem demonstrar se a hipótese é verdadeira ou falsa, dadas as condições do experimento, podendo a hipótese eventualmente ser refutada. Diz-se que uma teoria científica é corroborada pelo experimento, mas nunca que ela é absolutamente verdadeira, uma vez que pode haver algum experimento futuro que venha a refutá-la parcialmente, sob a luz de novos resultados. Desse modo, o papel do cientista é propor teorias contendo uma série de hipóteses e postulados científicos, de tal sorte que a teoria geral permita fazer previsões e derivar conclusões particulares, passíveis dos mais variados testes experimentais. Uma teoria é aproximadamente válida (corroborada) se suas previsões são confirmadas pela experiência sob certas condições, não significando a validade de modo geral, ou seja, a teoria pode não ser mais válida se as condições experimentais são alteradas. Em outras palavras, a teoria científica permite uma aproximação assintótica das verdadeiras leis naturais, possuindo limites de validade. Uma teoria científica bem sucedida sob determinadas condições, poderá se mostrar falha em condições mais gerais ou extremas e nesse caso uma nova teoria se faz necessária, mas esta deverá ser bem sucedida tanto nas novas condições quanto nas situações em que a teoria antiga obteve sucesso. Cada nova teoria científica deve aprimorar as anteriores, de tal forma que nos aproxima mais e mais da forma final das leis naturais. Os dados experimentais conhecidos previamente providenciam as preciosas dicas para o cientista na tarefa de propor teorias científicas.

A teoria eletromagnética é talvez a mais bem sucedida teoria da Física, com aplicações em praticamente todas as áreas da Ciência Básica e da Tecnologia, tendo se tornado o exemplo paradigmático da ciência moderna. Um pouco da história dessa fantástica jornada será contada a seguir. Os fenômenos elétricos, magnéticos e ópticos são conhecidos e estudados desde a Antiguidade e no princípio foram tratados como ramos distintos das ciências naturais e não como aspectos resultantes de uma mesma teoria. O magnetismo é conhecido desde aproximadamente 900 A.C. quando Magnus, um pastor de ovelhas grego, percebeu que o seu cajado metálico era atraído pelas pedras da região denominada Magnésia. Os gregos também já conheciam algumas propriedades elétricas, descritas em 600 A.C. por Tales de Mileto. Em especial, sabia-se que o material âmbar, denominado *elektron* em grego, era capaz de atrair objetos leves depois de ter sido atritado a uma flanela, num processo

hoje conhecido como eletrização por atrito. A hipótese atomística, considerada por Richard Feynman a mais importante de toda a ciência, segundo a qual a matéria é constituída por átomos, foi proposta originalmente ainda em 480 A.C. por Leucipo de Mileto e Demócrito de Abdera. Como sabemos, a verificação dessa hipótese só foi possível na Idade Contemporânea. Em 295 A.C. Eucilhes publicou um tratado sobre os fenômenos ópticos conhecidos até então. Sabe-se que desde 121 D.C. os chineses conheciam propriedades magnéticas e sabiam que uma barra de ferro poderia ser imantada na presença de um ímã natural, mas o efeito da bússola só foi descrito em 1088 por Shen Kua Yao. Como sabemos, a bússola foi essencial para a navegação e a descoberta do "Novo Mundo", expandindo não somente os horizontes geográficos como também os conhecimentos da humanidade.

A Idade Média foi particularmente pobre em descobertas científicas, sobretudo aquelas relacionadas ao eletromagnetismo, pelo menos no mundo ocidental. Na Idade Moderna uma nova era para a ciência é inaugurada, sob a influência de filósofos como Renè Descartes, que propõe os fundamentos básicos do método científico. Nos Séculos XVI e XVII novos conhecimentos acerca dos movimentos planetários são obtidos, Nicolau Copérnico e Johannes Kepler propõe a teoria heliocentrista, segundo a qual a Terra se move em uma órbita aproximadamente circular em torno do Sol, assim como os outros planetas, e Galileu Galilei, com seus estudos sobre cinemática e suas observações astronômicas derivadas do aprimoramento do telescópio feito por ele mesmo, é considerado o pai da Física. Em 1600 um marco para o estudo da Eletricidade e do Magnetismo é a publicação do tratado *De Magnete* pelo inglês William Gilbert. Ele descobriu que o próprio globo terrestre é um grande ímã e explicou parcialmente fenômenos ligados ao magnetismo, propondo que o magnetismo terrestre está relacionado ao seu movimento de rotação. Gilbert fez ainda o primeiro tratado sobre eletricidade, distinguindo os fenômenos magnéticos e os elétricos, e fabricou o primeiro eletroscópio. Em 1648, no estudo da Óptica o holandês Snellius descobriu a lei da refração da luz e pouco depois, em 1665 Isaac Newton formulou suas primeiras hipóteses sobre gravitação, propondo ainda a teoria corpuscular da luz. Somente em 1676 foi demonstrado pelo dinamarquês Olaus Römer que a velocidade da luz é finita. Newton publicou em 1687 o seu monumental trabalho *Philosophiae naturalis principia mathematica*, onde enunciou a lei da gravitação universal e resumiu suas descobertas científicas. A incompatibilidade da teoria corpuscular da luz proposta por Newton com as observações experimentais foi demonstrada por Huygens, que formulou em 1690 a hipótese ondulatória da luz. Huygens já havia descoberto em 1678 o fenômeno de polarização da luz. Os estudos da eletricidade avançam de forma rápida e em 1750 Benjamin Franklin propôs um modelo de fluído elétrico com dois estados de eletrificação: positivo e negativo. A conservação de carga elétrica total foi também proposta. Nessa mesma época, John Mitchell mostra que a ação de um ímã sobre outro pode ser deduzida a partir de uma lei de força que varia com o inverso do quadrado da distância entre os pólos individuais do ímã. Em 1785 o francês Charles Augustin Coulomb enunciou a lei das forças eletrostáticas que leva o seu nome e inaugurou um novo rumo para as pesquisas em eletricidade e magnetismo. Trabalhando de forma independente inventou uma balança de torsão muito precisa para demonstrar a lei do inverso do quadrado da distância para as cargas elétricas, verificando ainda a lei de Mitchell para ímãs e sugerindo ser impossível separar dois pólos magnéticos sem criar mais dois pólos em cada parte do ímã. No ano de 1799 Alessandro Volta demonstrou a pilha voltaica e o alemão Friedrich Herschel descobriu a existência do espectro infravermelho. Pouco depois, em 1801 outro alemão, Carl Ritter, descobriu o espectro ultravioleta e um avanço fundamental no campo da óptica foi feito pelo inglês Thomas Young, com a descoberta da interferência das ondas luminosas, corroborando a hipótese ondulatória da luz. Enquanto isso, o francês Augustin Fresnel realizou pesquisas independentes sobre a difração da luz e em 1819 desenvolveu a teoria ondulatória da luz. O ano de 1820 produziu avanços extraordinários e essenciais para o desenvolvimento da teoria eletromagnética. Hans C. Oersted anunciou a descoberta de que o magnetismo está diretamente ligado à eletricidade, observando o desvio produzido pelas correntes elétricas sobre a agulha de uma

bússola. Os franceses Jean-Baptiste Biot e Félix Savart encontraram a expressão matemática para a intensidade da força magnética produzida por um pequeno segmento de um fio conduzindo uma corrente elétrica. André Marie Ampère demonstrou que duas correntes se atraem quando se movem paralelamente no mesmo sentido e se repelem quando se movem paralelamente em sentidos contrários e mostrou que a deflexão da agulha de uma bússola causada por uma corrente elétrica poderia ser usada para medir a intensidade da corrente (princípio do galvanômetro). Propôs ainda um modelo dos ímãs permanentes em termos de correntes elétricas moleculares. Sua formulação inaugura o estudo da eletrodinâmica. Em 1831, buscando algum tipo de simetria entre fenômenos elétricos e magnéticos, e sabendo que a corrente elétrica gera fenômenos magnéticos, trabalhando de forma independente, o inglês Michael Faraday e o americano Joseph Henry descobriram a indução eletromagnética. A lei de indução foi complementada pelo russo Heinrich Lenz, em 1833, que determinou o sentido das correntes induzidas.

Quando James Clerk Maxwell entrou em cena no século XIX, havia sido acumulado vasto conhecimento experimental acerca dos fenômenos elétricos, magnéticos e ópticos. O valor experimental da velocidade da luz era aproximadamente conhecido e foi determinado em 1849 pelo francês Armand Fizeau, algumas leis matemáticas de validade limitada já haviam sido formuladas e o importante conceito de campo havia sido introduzido por Michael Faraday. Maxwell foi capaz de reunir todo o conhecimento acumulado ao longo dos séculos em um conjunto de equações que levam seu nome, dando forma final a uma teoria que permitiu unificar a eletricidade, o magnetismo e a óptica em um arcabouço dotado de lógica e coerência. Como resultados derivados da sua teoria, exposta por volta de 1865, Maxwell concluiu que a luz é uma onda eletromagnética, cuja velocidade calculada a partir de parâmetros eletromagnéticos independentes era concordante com os dados experimentais disponíveis para a época. Previu ainda a existência de ondas eletromagnéticas em um vasto espectro de frequências, sujeitas às mesmas leis de reflexão, refração e difração que eram conhecidas para a luz visível. Em 1873 Maxwell publica a sua obra monumental *A treatise on electricity and magnetism*, condensando todos os seus importantes trabalhos em eletromagnetismo. Experimentos posteriores conduzidos independentemente por Heinrich Hertz e Oliver Lodge, em 1888, confirmaram essas previsões, coroando triunfalmente a teoria eletromagnética. Maxwell faleceu em 1879, mesmo ano de nascimento de outro grande nome da ciência, Albert Einstein, e não pode ver o triunfo final de sua teoria eletromagnética.

A era da eletrônica foi inaugurada em 1884, quando o americano Thomas Edison produziu a primeira válvula eletrônica. No ano de 1887 o alemão Heirich Rudolf Hertz descobriu o efeito fotoelétrico e os americanos Albert Michelson e Edward Williams Morley mostram a constância da velocidade da luz em qualquer referencial. Estes dois últimos experimentos tem relação direta com as duas principais revoluções científicas do século XX, a mecânica quântica e a teoria da relatividade. Em 1895 o alemão Wilhelm Röntgen descobriu os raios X e o holandês Hendrik A. Lorentz desenvolveu um modelo atômico que permite explicar a estrutura fina dos espectros atômicos, realizando ainda contribuições fundamentais para a eletrodinâmica dos corpos em movimento (a força de Lorentz), propondo as transformações relativísticas de coordenadas que hoje levam seu nome. A radiotransmissão, importante aplicação da teoria eletromagnética, foi desenvolvida entre os anos de 1896 e 1902 pelo italiano Guglielmo Marconi e pelo brasileiro Roberto Landell de Moura, dentre outros.

Por volta de 1900 Max Planck deu início à mecânica quântica com seus estudos sobre a radiação do corpo negro, enquanto o russo Piotr Liebedev provou experimentalmente a pressão exercida pela luz sobre um corpo material. Entre 1900 e 1905 a teoria especial da relatividade foi desenvolvida de modo independente por Hendrik Lorentz, Albert Einstein, Henri Poincaré e outros. No ano de 1905 Einstein introduziu o conceito de fóton na explicação do efeito fotoelétrico, demonstrando o caráter corpuscular da radiação. Com base na hipótese quântica, em 1913 Niels Bohr explicou os níveis de energia do átomo de hidrogênio e a estabilidade

dos átomos e na década de 1920 Louis de Broglie propôs a dualidade onda-partícula, segundo a qual todos os entes físicos elementares comportam-se como onda em certas circunstâncias e como partículas em outras. A luz não seria exceção à regra. Entre 1910 e 1940, mas sobretudo na década de 1920, Louis de Broglie, Wolfgang Pauli, Werner Heisenberg, Niels Bohr, Paul A.M. Dirac, Erwin Schrodinger e outros desenvolvem formalmente a mecânica quântica. A década de 1940 viu nascer as bases da teoria quântica de campos, que emerge da fusão entre a mecânica quântica e a teoria da relatividade. A chamada eletrodinâmica quântica, cujo desenvolvimento se deveu sobretudo a Richard Feynmann, Sin-Itiro Tomonaga e Julian Schwinger, é o exemplo paradigmático mais bem sucedido de uma teoria quântica de campos.

A seguir iremos fazer uma breve digressão a respeito das interações fundamentais conhecidas e do papel do eletromagnetismo nesse contexto. Mais adiante, os limites de validade da própria teoria eletromagnética serão apresentados e para finalizar este capítulo, o espectro eletromagnético com suas aplicações será brevemente apresentado.

## 1.1 As Interações Fundamentais Conhecidas

Sabe-se que todos os fenômenos naturais conhecidos são descritos pela existência de quatro interações fundamentais, a saber:

- **Interação Gravitacional:** descreve a força atrativa entre as massas. É uma interação de longo alcance (força  $F \propto 1/r^2$ ) sempre atrativa, tendo maior relevância quando grandes massas interagem em distâncias astronômicas, sendo responsável por manter os planetas em órbitas estáveis e providenciar a força de coesão interna de planetas ou corpos celestes. A gravidade é provavelmente a mais aparente das interações porque é sentida no nosso dia-a-dia, influenciando a trajetória de todos os objetos móveis. Todavia, é a mais fraca das interações. Tomando a força forte, a ser descrita a seguir, como referência de interação, a força gravitacional entre dois prótons é 40 ordens de grandeza mais fraca que a força forte em uma distância da ordem do raio do núcleo atômico.

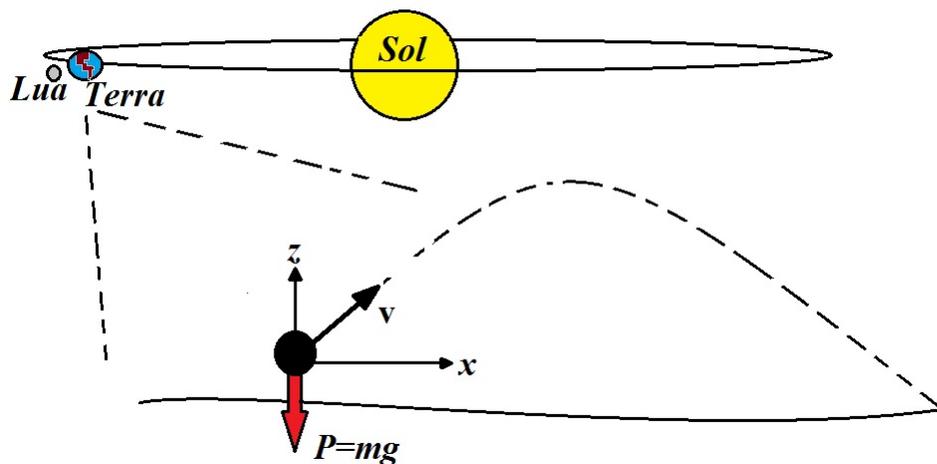


Figure 1.1: A interação gravitacional: atua desde a escala astronômica sendo responsável pelas órbitas planetárias, quanto em nosso cotidiano, nas trajetórias de corpos rígidos e fluídos, por exemplo. É a mais fraca de todas as interações, mas é sempre atrativa.

- **Interação Eletromagnética:** descreve a força entre cargas elétricas, é de longo alcance (força  $F \propto 1/r^2$ ). Pode ser atrativa ou repulsiva. A interação eletromagnética é a principal responsável pelas órbitas atômicas, pela coesão da matéria, ligações moleculares, sistemas de comunicação. O estudo e compreensão da interação eletromagnética é responsável pelo avanço tecnológico da sociedade atual: motores e geradores, circuitos eletrônicos, sistemas de comunicação, etc. Quando comparada à força forte entre dois prótons dentro de um núcleo, tem uma intensidade relativa de  $1/137 \sim 10^{-2}$ .

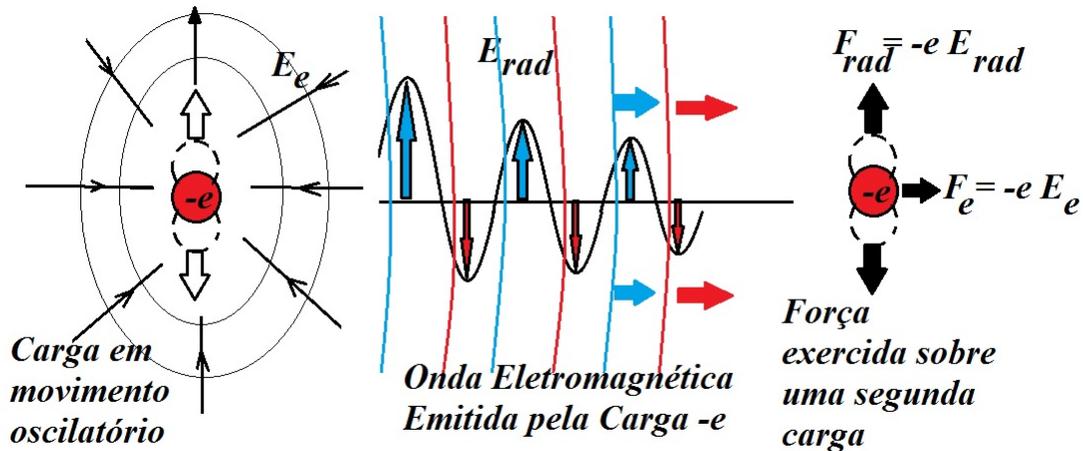


Figure 1.2: A interação eletromagnética: no exemplo mostrado uma carga em movimento oscilante produz tanto o campo eletrostático quanto radiação eletromagnética. Tanto o campo eletrostático quanto a radiação são capazes de agir sobre uma segunda carga a certa distância da primeira.

- **Interação Forte:** é uma força atrativa de curto alcance ( $\sim 10^{-14}$  m) responsável pela coesão dos constituintes do núcleo atômico. O núcleo atômico, constituído de prótons, de carga positiva, e nêutrons, sem carga elétrica, é pelo menos 5 ordens de grandeza menor do que o átomo todo. A interação forte produz a força mais intensa existente, daí o seu nome, e em distâncias da ordem do diâmetro do núcleo consegue superar a repulsão eletromagnética entre prótons para manter o núcleo coeso. Usualmente toma-se a força forte como referência unitária de intensidade das interações.
- **Interação Fraca:** não tem natureza atrativa ou repulsiva, também é de curto alcance ( $\sim 10^{-14}$  m) e é responsável pelo decaimento beta dos núcleos atômicos, bem como decaimentos de partículas. Exemplo: múon decai em elétron mais nêutrons, ou nêutron decai em próton, elétron e neutrino. Só é mais forte do que a força gravitacional, e tem uma intensidade relativa à força forte de  $10^{-4}$  aproximadamente.

De modo bastante simplificado, sabe-se que as partículas verdadeiramente elementares podem ser classificadas da seguinte forma: i) léptons, que incluem os elétrons e os neutrinos; ii) quarks, dos quais são feitos os prótons e os nêutrons, constituintes do núcleo atômico, mas podem ainda formar mésons, que são os mediadores da força forte em uma aproximação mais grosseira da física do núcleo, e outras partículas mais exóticas; iii) bósons de gauge, que são os mediadores das interações, aqui incluídos os fótons (quanta da radiação eletromagnética). Há seis tipos de quarks, denominados up, down, charm, strange, top e bottom, cuja carga elétrica é fracionária, havendo ainda suas correspondentes anti-partículas, cuja carga elétrica tem sinal oposto ao das partículas, mas a matéria estável é formada somente por  $u$  (carga  $+2e/3$ ) e  $d$  (carga  $-e/3$ ). Por exemplo, o próton é resultado da combinação  $p = uud$  enquanto o nêutron é obtido por  $n = udd$ . Os quarks possuem

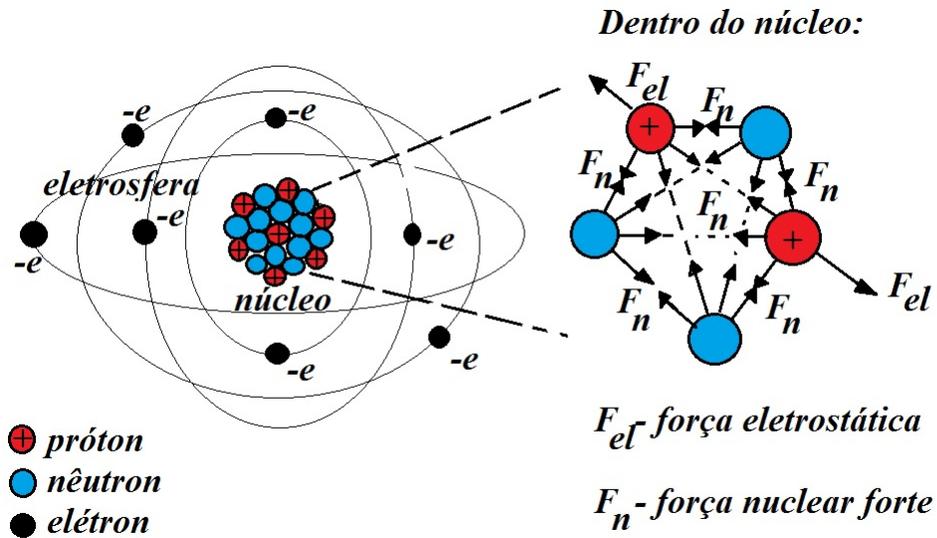


Figure 1.3: A interação nuclear forte: no interior do núcleo atômico, constituído de prótons e nêutrons, os prótons se repelem eletrostaticamente enquanto os nêutrons não tem carga elétrica. A força de coesão capaz de superar a repulsão coulombiana é a força nuclear forte, que produz atração mútua entre todos os constituintes do núcleo.

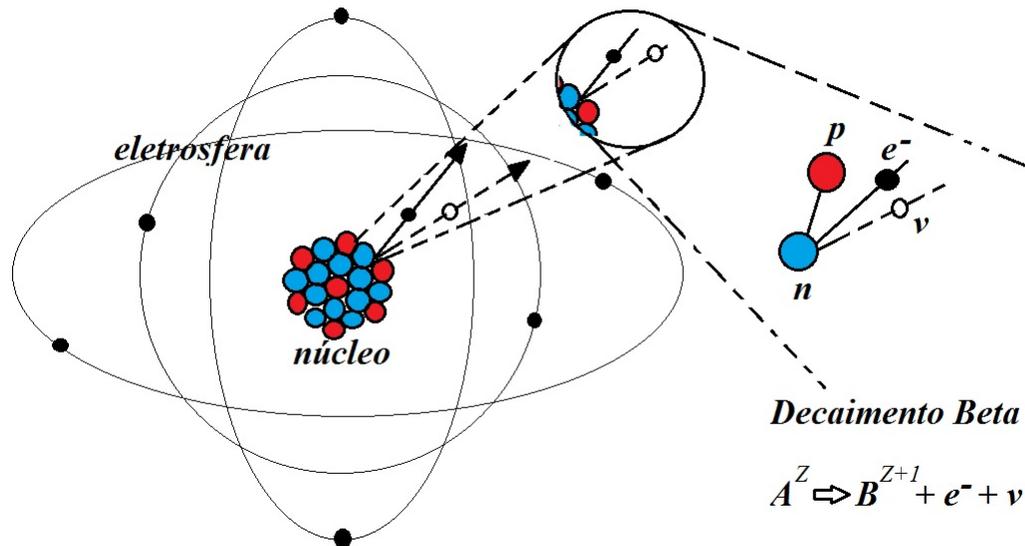


Figure 1.4: A interação fraca: decaimento beta de um átomo A de número atômico Z para um átomo B de número atômico Z + 1. Nesse caso um nêutron decai para um próton, emitindo um elétron e um neutrino na reação.

além da carga elétrica, um outro tipo de carga chamada cor, que pode assumir três valores distintos, que dá origem à chamada cromodinâmica quântica, cujo bóson de mediação é o chamado glúon. Sabe-se que a carga de cor não é observada individualmente devido à intensidade das interações, daí que os quarks sempre aparecem em partículas compostas cuja carga de cor total é nula. Há também seis tipos de léptons denominados elétron  $e^-$ , neutrino-elétron  $\nu_e$ , múon  $\mu^-$ , neutrino-múon  $\nu_\mu$ , táon  $\tau^-$  e neutrino-táon  $\nu_\tau$ , havendo ainda as correspondentes anti-partículas. Os neutrinos não possuem carga elétrica enquanto os outros léptons tem carga  $-e$  para as partículas e  $+e$  para as anti-partículas. Léptons não possuem interação forte, sofrendo ação da

força gravitacional (quando massivos), força eletromagnética (quando carregados) e força fraca. Por outro lado, os quarks são afetados por todas as quatro interações. Os bósons de gauge são as partículas responsáveis por mediar as interações. Fótons mediam a interação eletromagnética e não possuem massa, daí deriva o fato de que o eletromagnetismo é uma interação de longo alcance, assim como a gravitação, mediada pelos grávitons (ainda não foram plenamente observados experimentalmente). Os bósons conhecidos como  $W^+$ ,  $W^-$  e  $Z^0$  são massivos e respondem pelas interações fracas, enquanto os chamados glúons, já mencionados acima, são responsáveis pela mediação das interações fortes entre os quarks.

As interações fortes e fracas são de curto alcance e estão confinadas a distâncias da ordem do tamanho do núcleo atômico, sendo importantes sobretudo no estudo da física nuclear ou de altas energias. Devemos lembrar ainda que o núcleo atômico ( $r \sim 10^{-15}\text{m}$ ) é 5 ordens de grandeza menor que o átomo como um todo ( $\sim 10^{-10}\text{m}$ ) e na matéria ordinária as interações fortes são significativas somente no interior do núcleo, cuja carga elétrica total é sempre positiva, dada pelo número atômico  $Z$ . Portanto, quando não estamos interessados no que acontece no interior do núcleo, o mesmo pode ser visto como uma carga puntual  $+Ze$ . Por outro lado, a interação gravitacional, embora sempre atrativa, é muito tênue, sendo relevante apenas para grandes agregados de massa, podendo ser tipicamente negligenciada no estudo de átomos, moléculas e muitas outras situações em que o eletromagnetismo se faz presente. Podemos dizer que a interação eletromagnética é a principal responsável por boa parte dos fenômenos conhecidos, pelas propriedades físicas e pela forma como a matéria está organizada. Além disso, a interação eletromagnética possui todas as propriedades mais desejáveis, em termos de intensidade e alcance, para permitir o desenvolvimento das telecomunicações, por exemplo, uma vez que as forças nucleares tem alcance muito curto, embora intensas, enquanto as forças gravitacionais são de longo alcance mas muito fracas, sendo assim difíceis de detectá-las. A detecção de ondas gravitacionais demanda aparatos experimentais extremamente sofisticados.

A teoria eletromagnética de Maxwell é um paradigma a ser seguido pela Física atual porque se tratou da primeira teoria realmente unificadora de que se tem notícia. A Figura 1.5 mostra de modo bastante geral o panorama das teorias da Física atualmente aceitas e suas conexões lógicas e hierárquicas. Por exemplo, a teoria da gravitação proposta por Newton no século XVII foi generalizada pela teoria da relatividade geral de Einstein e Hilbert, proposta no início do século XX. A eletricidade e o magnetismo, vistos e estudados até o século XVIII como fenômenos distintos, foram unificados no século XIX por J.C. Maxwell num conjunto coerente conhecido como eletromagnetismo. O final do século XIX e início do século XX foi marcado pela descoberta da estrutura atômica da matéria, a radioatividade e o decaimento beta dos átomos, fazendo nascer o estudo das interações fracas e a Física Nuclear. Em meados do século XX, com a utilização das chamadas teorias quânticas de campos, observou-se ser possível unificar a teoria eletromagnética de Maxwell com as interações fracas, dando origem à chamada teoria eletrofraca, proposta por Steven Weinberg, Sheldon Lee Glashow e Abdus Salam. Ao mesmo passo o entendimento das forças nucleares fortes levou à proposta da existência dos quarks por Murray Gell-Mann e ao surgimento da teoria da cromodinâmica quântica, que descreve o comportamento dos quarks e suas interações. A teoria eletrofraca juntamente com a cromodinâmica quântica formam o chamado Modelo Padrão das partículas e interações elementares. Acredita-se que na escala de energias acessível nos experimentos atuais envolvendo as interações entre as partículas elementares a gravitação não desempenha nenhum papel relevante devido a sua fraca intensidade. Todavia, a busca por uma grande teoria unificada da qual todas as forças da natureza seriam originárias, incorporando assim a gravitação às demais forças da natureza, é o Santo Graal da Física teórica.

Para se ter uma ideia mais clara da importância da interação eletromagnética, é possível afirmar que toda a Química deriva da combinação entre as leis da mecânica quântica e a interação eletromagnética entre as cargas.

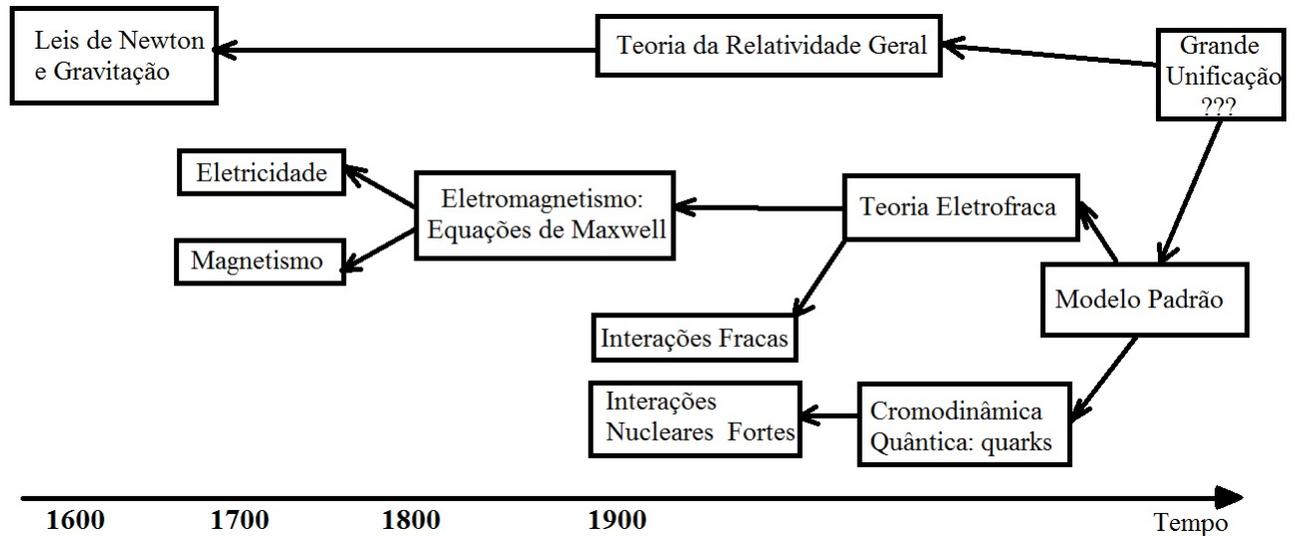


Figure 1.5: Panorama geral das teorias da Física e suas hierarquias.

Uma vez que não estamos interessados no que acontece no interior do núcleo atômico na maioria das situações, os níveis de energia dos elétrons em um átomo são derivados da interação coulombiana entre as cargas elétricas que o compõem, que providencia o termo de energia potencial na equação de Schrödinger. Do mesmo modo, a ligação química e o arranjo espacial de átomos para formar moléculas ou sólidos surge da interação eletromagnética entre as cargas constituintes dos átomos presentes. Em geral os elétrons em orbitais mais internos, cujas camadas estão totalmente preenchidas e compensadas, formam uma camada de carga negativa esféricamente simétrica que blinda parcialmente a carga do núcleo, produzindo um íon de carga efetiva  $+Z_{ef}e < +Ze$ . Os elétrons das camadas eletrônicas não totalmente preenchidas são denominados elétrons de valência, e essas camadas incompletas, camadas de valência. A teoria da ligação química é efetivamente a teoria das interações eletromagnéticas entre os íons e os elétrons das camadas de valência, tratadas de acordo com as leis da mecânica quântica.

Finalmente, o estudo do eletromagnetismo é fundamental em Engenharia Elétrica porque providencia um entendimento físico-matemático dos fenômenos eletromagnéticos e propagação de ondas eletromagnéticas. Permite entender as limitações da teoria de circuitos ou da óptica geométrica e é fundamental no estudo e desenvolvimento de dispositivos e sistemas eletromagnéticos e eletrônicos. A Figura 1.7 ilustra bem a conexão entre as equações de Maxwell e as várias derivações delas decorrentes. As equações de Maxwell formam o conjunto geral do qual se pode obter a teoria de circuitos, a óptica geométrica e a teoria de micro-ondas como casos particulares. Por exemplo, a teoria de circuitos elétricos, embora historicamente tenha sido desenvolvida de modo independente das equações de Maxwell, pode ser obtida destas últimas considerando-se que as dimensões relevantes do sistema físico em estudo são muito menores do que o comprimento de onda de operação,  $d \ll \lambda$ , permitindo assim desprezar efeitos ondulatórios por completo. No outro limite, sistemas de interesse cujas dimensões sejam muito maiores que o comprimento de onda,  $d \gg \lambda$ , leva ao estudo da óptica geométrica, enquanto a teoria das micro-ondas é um caso intermediário, do qual também é possível chegar à teoria de circuitos, fazendo um processo de limites.

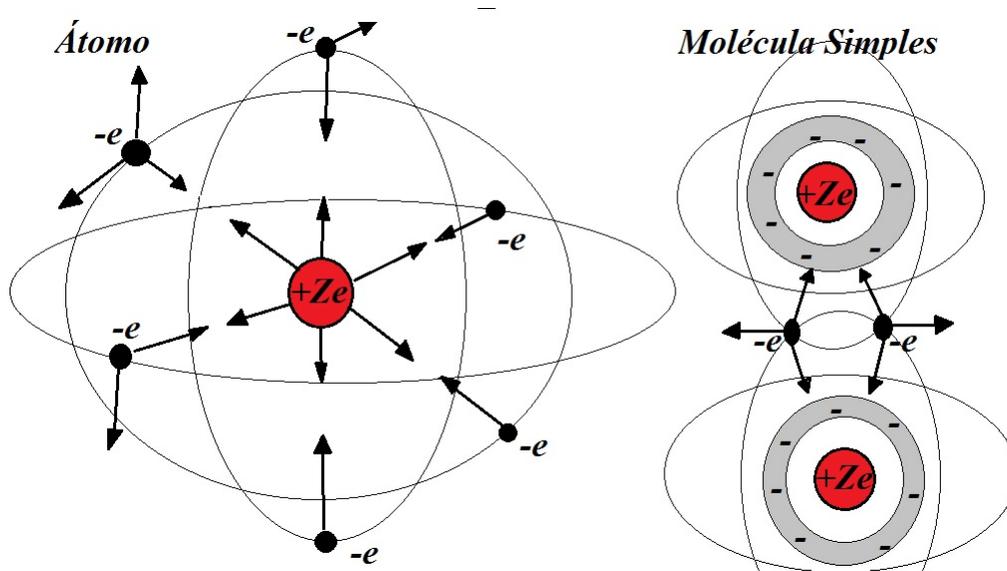


Figure 1.6: A interação eletromagnética: no interior do átomo, os elétrons são atraídos pelo núcleo de carga  $+Ze$  mas se repelem mutuamente. O estado fundamental de energia, bem como os outros estados excitados são o resultado da aplicação da mecânica quântica ao problema de múltiplas cargas. Uma molécula, por sua vez, resulta da interação eletromagnética entre os elétrons de valência, que ocupam as camadas incompletas e mais externas dos átomos, e os íons constituídos do núcleo e respectivas camadas completas que blindam parcialmente a carga do núcleo.

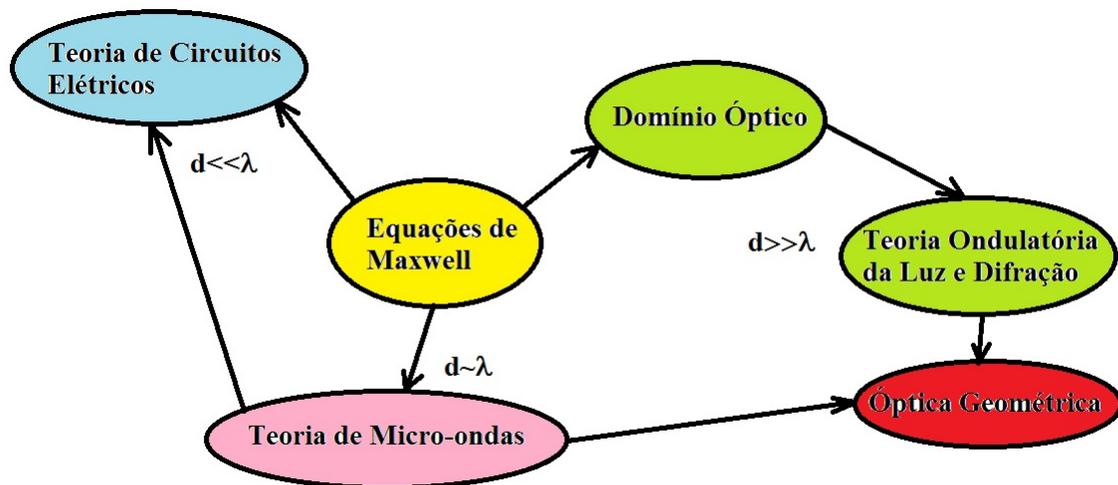


Figure 1.7: Relações entre as equações de Maxwell e suas várias aproximações.

## 1.2 Limites de Validade do Eletromagnetismo

Conforme já foi mencionado, toda teoria científica constitui-se de um conjunto de leis matemáticas e postulados com o intuito de descrever o mundo real. Podemos dizer que as teorias científicas acabam por ter um limite de validade, a partir do qual não são mais válidas para descrever os fenômenos físicos envolvidos. Como um exemplo bem conhecido podemos citar a mecânica newtoniana, válida para descrever os fenômenos físicos macroscópicos e de baixas velocidades. Para altas velocidades temos que apelar para uma teoria mais geral da relatividade especial, ao passo que o mundo microscópico deve ser descrito pela mecânica quântica, sendo

a teoria de Newton obtida da teoria da relatividade no limite de baixas velocidades, onde a velocidade da luz pode ser considerada como infinita,  $c = 3 \times 10^8 \text{m/s} \rightarrow \infty$  ou da mecânica quântica no limite em que a constante de Planck pode ser considerada nula,  $\hbar \rightarrow 0$ .

Portanto, a questão do limite de validade para a aplicação do eletromagnetismo clássico é bastante pertinente. Para todas as situações práticas do mundo macroscópico e mesmo para várias situações no mundo macroscópico as equações do eletromagnetismo são válidas, respeitando automaticamente a teoria da relatividade. De fato, pode-se afirmar que historicamente o desenvolvimento da teoria da relatividade foi consequência do estudo do eletromagnetismo e seus resultados experimentais. Mesmo no domínio da mecânica quântica as equações de Maxwell são válidas e tem a mesma aparência matemática, mas os campos elétrico e magnético, que classicamente são funções vetoriais simples, devem ser reinterpretados em termos de operadores quânticos. Classicamente a componente do campo elétrico  $E_x(x, y, z, t)$  é uma função escalar do espaço e do tempo, enquanto na mecânica quântica devemos substituí-la por um operador  $\hat{E}_x$ , que é uma matriz de dimensão infinita, dependente do espaço e do tempo. Esse operador é responsável pela criação e aniquilação de fótons, que são as partículas associadas ao campo eletromagnético.

Vamos tentar colocar alguns limites ao eletromagnetismo clássico agora. Em primeiro lugar, a teoria eletromagnética clássica pressupõe a existência de cargas pontuais. Entretanto uma carga puntual tem dimensão nula, volume nulo e energia própria infinita pois a densidade de carga é infinita no ponto onde está localizada a carga. Experimentalmente é estabelecido que a lei de Coulomb varia na forma  $1/r^2$ . Desse modo, para uma carga puntual o campo elétrico em  $r = 0$  deve divergir, tendendo ao infinito, e então não poderíamos usar o eletromagnetismo como conhecemos em  $r = 0$ . Esse problema de definição de objetos pontuais não é exclusividade da teoria eletromagnética e tem resistido a todas as tentativas de solução nas teorias da Física. Para fins de estimativa grosseira, a energia de auto-interação associada a uma carga elétrica  $-e$  é dada por:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_0} \quad (1.1)$$

onde  $r_0$  é o raio do elétron. Idealmente  $r_0 = 0$  e então teríamos energia de auto-interação infinita. Associar ao elétron um raio finito leva ao problema de coesão interna, que já foi abordado por Abraham e Lorentz, dentre outros, sem sucesso. Omitindo o problema da coesão interna, se toda a energia de auto-interação cuja origem é eletromagnética puder ser associada à energia de repouso  $mc^2$  da partícula, temos:

$$mc^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_0} \quad (1.2)$$

de onde resulta:

$$r_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{mc^2} \approx 2.8 \times 10^{-15} \text{m} . \quad (1.3)$$

Esta distância representa um limite de validade que nos mostra o quão próximos poderíamos chegar de um elétron para medir o campo eletromagnético clássico pelas leis clássicas. Quando entramos dentro do elétron, ou seja, para distâncias menores do que  $r_0$  há forças que não conseguimos compreender a partir do eletromagnetismo clássico, como a origem da coesão interna. Ou convivemos com a carga puntual e a existência de divergências (valores que vão a infinito), ou não conseguimos estabelecer a origem da coesão interna. Considerações de natureza quântica e dados experimentais atuais corrigem algumas distorções e impõe para o raio eletrônico um limite muito menor do que o valor de  $r_0$  clássico, aqui estimado. Usualmente as escalas de distâncias envolvidas nas interações eletromagnéticas entre cargas são bem maiores do que o raio clássico do elétron  $r_0$  e nunca chegamos tão próximos das cargas quanto o valor de  $r_0$  para medir os campos. O número finito de elétrons em um átomo deve se distribuir dentro de uma esfera de raio  $\sim 10^{-10} \text{m}$ , o tamanho típico do átomo, o que faz com que os elétrons fiquem bem distantes uns dos outros e mesmo do núcleo, de raio  $10^{-15} \text{m}$ , quando

comparado à distância  $r_0$ . Portanto podemos ficar tranquilos quanto à distância mínima de uma carga para a qual o eletromagnetismo clássico é válido.

O eletromagnetismo clássico deve ser substituído pela eletrodinâmica quântica no limite em que evidencie-se a dualidade onda-partícula e o caráter corpuscular da luz. De fato, na maioria das aplicações rotineiras em sistemas de comunicação ou no estudo de propriedades físicas da matéria no espectro de radiofrequências (RF) podemos utilizar o eletromagnetismo clássico porque o número de fótons associado aos campos num dado volume considerado é tão grande que é praticamente impossível observar a granulosidade da luz, ou seja, ver que ela é constituída de pequenos grãos de energia. Podemos fazer a analogia com um fluido, constituído verdadeiramente por átomos e moléculas, entes inerentemente discretos, mas para um grande número de átomos no limite macroscópico, o caráter atomístico do fluido fica mascarado e é possível assumir que o mesmo é um meio contínuo cuja descrição passa a ser feita por equações diferenciais parciais para um campo de velocidades. Para que o eletromagnetismo clássico seja válido é importante também que a interação do campo eletromagnético com a matéria possa também ser tratada do ponto de vista puramente ondulatório, o que ocorre quando fótons individuais não possuem energia suficiente para produzir transições eletrônicas entre níveis de energia distintos nos átomos ou moléculas ou ainda promover elétrons de uma banda de energia de valência para uma banda de condução em um meio material. A mínima energia necessária para promover um elétron de uma banda de energia de valência para uma banda de energia superior de condução, criando um buraco na banda de valência e um elétron na banda de condução, ambos portadores de carga, é a diferença entre o nível máximo de energia permitida da banda de valência e o nível mínimo de energia da banda de condução e é denominada bandgap. A relação de Planck estabelece que, para um único fóton, a relação entre frequência  $\omega$  da onda e energia  $E_f$  do fóton é dada por:

$$E_f = \hbar\omega = hf, \quad (1.4)$$

onde  $h = 6,626 \times 10^{-34}$  J.s é a constante de Planck ( $\hbar = h/(2\pi)$ ). Por exemplo, o silício cristalino é um semiconductor cujo gap de energia vale aproximadamente 1eV, correspondendo a um comprimento de onda de radiação de  $1,24\mu m$ , que está na faixa do infravermelho. Nessa situação, a interação do campo eletromagnético com o meio material não pode mais ser inteiramente considerado sob o aspecto ondulatório, e portanto clássico.

Para uma análise de número de fótons típica em sistemas clássicos, consideremos por simplicidade uma fonte isotrópica que emite uma potência  $P_0$  na forma de ondas eletromagnéticas esféricas, distribuindo  $P_0$  uniformemente sobre a superfície de uma esfera, cuja área vale  $4\pi r^2$ , à medida que as ondas se propagam radialmente para fora da fonte. Desse modo, a uma distância  $r$  da fonte podemos calcular a densidade de potência que é transportada pelas ondas esféricas geradas pela fonte:

$$S = \frac{P_0}{4\pi r^2}. \quad (1.5)$$

A quantidade  $S$  está associada ao módulo do vetor de Poynting  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  emitido pela fonte, onde  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  são os campos elétrico e magnético da onda, respectivamente. O significado físico de  $\mathbf{S}$  será discutido detalhadamente mais adiante, mas podemos antecipar que corresponde a uma densidade de corrente de energia, ou seja, mede a quantidade de energia  $E_T$  que atravessa uma área  $A$  em um intervalo de tempo  $\Delta t$ , na forma  $S = E_T/(A\Delta t)$ . Dessa última equação é fácil obter a energia  $E_T = SA\Delta t$  presente em um volume  $V = A\Delta l$ , sendo  $\Delta l = c\Delta t$  a distância percorrida por um fóton com velocidade  $c$ . De maneira explícita, temos:

$$E_T = \frac{S}{c}V. \quad (1.6)$$

O número médio de fótons  $N$  presente no volume  $V$  será dado simplesmente pela razão entre a energia total  $E_T$  e a energia de um fóton, ou seja:

$$N = \frac{E_T}{E_f} = \frac{P_0V}{4\pi c\hbar\omega r^2}.$$

Admitindo um volume de referência da ordem  $V = \lambda^3$ , onde  $\lambda = c/f = 2\pi c/\omega$  é o comprimento de onda associado, obtemos:

$$N = \frac{2\pi^2 c^2 P_0}{\hbar \omega^4 r^2} . \quad (1.7)$$

Para uma típica estação rádio-base (ERB) de telefonia celular operando na frequência de microondas  $f = 1800\text{MHz}$  e emitindo uma potência de  $100\text{W}$ , a uma distância da antena da ERB de  $r = 1000\text{m}$  o número de fótons  $N$  no volume  $V = \lambda^3$  é da ordem de  $10^8$ . Portanto é perfeitamente aceitável omitir o caráter discreto da radiação, uma vez que o número de fótons é muito grande e uma pequena incerteza quanto ao número verdadeiro fará pouca diferença, ou seja, o caráter granular da radiação não será facilmente perceptível [1.2]. o eletromagnetismo clássico é uma teoria estatística do comportamento de um grande número de fótons onde uma pequena incerteza no número de fótons torna-se irrelevante, o que ocorre para a maioria das aplicações práticas.

Finalmente, podemos demonstrar que o alcance infinito da interação eletromagnética está associado ao fato de que, dentro dos limites experimentais conhecidos, a massa de repouso do fóton pode ser considerada nula. Conforme proposto por Yukawa, podemos assumir para um potencial de interação esfericamente simétrico a seguinte forma genérica:

$$\phi(r) = \phi_0 \frac{e^{-\alpha r}}{r} ,$$

onde  $\phi_0$  é constante e  $\alpha = 1/L$  corresponde ao inverso da distância de alcance  $L$  da interação. Se  $\alpha = 0$  o alcance é infinito. É sabido que uma partícula livre relativística de massa  $m$  deve satisfazer a seguinte relação de dispersão:

$$\frac{E^2}{c^2} = \mathbf{p}^2 + m^2 c^2 , \quad (1.8)$$

onde  $E$  é a energia total da partícula e  $\mathbf{p}$  o seu momento linear,  $c$  é a velocidade da luz no vácuo. Para a obtenção da equação de ondas relativística da mecânica quântica valemo-nos da prescrição usual em que substituímos  $E \rightarrow i\hbar\partial/\partial t$  e  $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$ , introduzindo ainda uma função de ondas  $\Psi(x, y, z, t)$ . A rigor, toda partícula obedecerá na mecânica quântica relativística, independentemente do seu spin, à seguinte equação:

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi(x, y, z, t) = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \Psi(x, y, z, t) . \quad (1.9)$$

Suponha que  $\Psi$  é a função de ondas do fóton. Para o regime estático, as derivadas temporais são nulas e temos:

$$\nabla^2 \Psi(x, y, z, t) = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \Psi(x, y, z, t) , \quad (1.10)$$

cuja solução esfericamente simétrica é da forma:

$$\Psi(r) = \Psi_0 \frac{e^{-\alpha r}}{r} , \quad (1.11)$$

exatamente como proposto por Yukawa, com constante  $\alpha = mc/\hbar$ . Nesse caso, para  $L \rightarrow \infty$ , ou seja, para que o eletromagnetismo tenha alcance infinito, é necessário que  $\alpha = 0$ , o que implica que a massa de repouso do fóton,  $m$ , deve ser nula, conforme inicialmente mencionado. Nessa linha de raciocínio, com base no alcance da força nuclear forte Yukawa inferiu a existência de uma partícula mediadora da força forte, o pión (méson pi) e determinou a sua massa aproximada.

### 1.3 O Espectro Eletromagnético e Suas Aplicações

Tendo em vista o impacto causado pela teoria eletromagnética poderíamos dizer que a história moderna e contemporânea da humanidade pode ser dividida em Antes e Depois de Maxwell. O impacto causado pelo

domínio dos fenômenos eletromagnéticos pode ser observado em toda parte, desde a iluminação das casas e das vias públicas até a forma como nos relacionamos com as pessoas. O desenvolvimento das telecomunicações é um marco tão relevante que os astrônomos que buscam vida inteligente fora do nosso planeta classificam as possíveis civilizações existentes fora da Terra em duas categorias: as que já chegaram às comunicações eletromagnéticas e as que ainda não a dominam, sendo assim impossível rastrear-las. Dentre toda a gama de aplicações os mais importantes exemplos são:

- os sistemas de potência, responsáveis pelo fornecimento de energia para indústrias, residências, etc. Uma imensa variedade de dispositivos e máquinas, como motores e geradores, são vastamente empregados. Para levar a energia de um ponto a outro são utilizadas linhas de transmissão de energia. Tanto motores, aquecedores e outros equipamentos de uso industrial quanto pequenos aparelhos domésticos (liquidificador, secador de cabelo, televisor, lâmpadas, etc) utilizam energia elétrica;
- equipamentos biomédicos em geral, desde os sistemas de monitoramento de funções vitais de um paciente a aparelhos cirúrgicos, passando pelos lasers cirúrgicos, fontes de raios X e tomógrafos, que requerem o domínio de vários fenômenos eletromagnéticos para serem compreendidos. A preocupação na medicina inclui as instalações de potência e aterramentos;
- sistemas de uso militar, como radares de microondas para detecção de alvos, rastreamento e monitoramento, armas de pulsos eletromagnéticos, navegação aérea e marítima, e outros;
- sistemas de comunicações de todos os tipos, abrangendo um amplo espectro de frequências, desde ondas curtas em RF até os sistemas ópticos, passando pela radiodifusão e transmissão de TV, TV a cabo, telefonia móvel e fixa, internet e comunicações via satélite. O mercado das comunicações é um dos mais importantes da economia mundial, tendo modificado significativamente a forma como enxergamos o mundo e nos relacionamos;
- sistemas de radar e posicionamento civis, como o GPS, aplicações de comunicação e radar de polícia, navegação comercial em aeroportos e outros;
- sensoriamento de diversos tipos, utilizando transdutores cujo sinal de saída é sempre um sinal elétrico (para medir temperatura, movimento, campos, etc);

O espectro eletromagnético está organizado por faixas de frequências cujas características apresentam certas semelhanças de propagação e efeitos físicos sobre a matéria usual e vai idealmente desde zero até infinito. A Figura 1.8 ilustra de modo geral o espectro eletromagnético. No Brasil a agência que regulamenta a utilização do espectro, sobretudo na faixa denominada Radiofrequência (RF), que se estende de 0 a 300GHz é a ANATEL.

Convencionou-se internacionalmente dividir o espectro de RF em uma escala de potências de 10 na forma  $3 \times 10^n < f \leq 3 \times 10^{n+1}$  Hz, onde  $n = 0, 1, 2, \dots$  é um inteiro, de tal forma que, adotando-se a velocidade da luz no vácuo como  $c_0 = 3 \times 10^8$  m/s e utilizando-se a expressão  $\lambda = c_0/f$  as faixas em termos do comprimento de onda  $\lambda$  ficam dadas por  $10^{8-n} \geq \lambda \geq 10^{7-n}$  m.

A faixa de frequências denominadas de **ELF** (termo do inglês Extremely Low Frequencies ou Frequências Extremamente Baixas, também denominadas ondas megamétricas) corresponde a  $30 \leq f \leq 300$  Hz, ou em termos de comprimentos de ondas,  $10^4 \geq \lambda \geq 10^3$  km. Nesta faixa está frequência da rede elétrica, que é de 50 ou 60Hz, dependendo do país. No Brasil adotou-se 60Hz, que corresponde a um comprimento de onda  $\lambda = 5000$  km.

A faixa seguinte é denominada **VF** (Voice Frequencies ou Banda de Voz), correspondendo à região  $300 \leq f \leq 3000$  Hz, ou  $10^3 \geq \lambda \geq 10^2$  km. O som audível para algumas pessoas vai até 15 – 20kHz, porém a telefonia

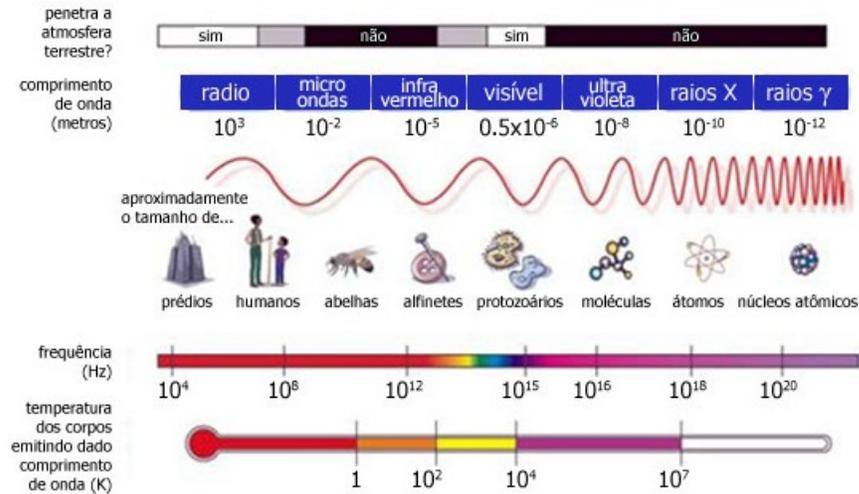


Figure 1.8: O espectro eletromagnético.

analógica, hoje praticamente em desuso, definiu a banda base de voz até 3400Hz, com transmissão por par metálico e chaveamento por relés. Na sequência aparecem as ondas muito longas ou **VLF** (do inglês Very Low Frequencies), correspondendo à faixa  $3 \leq f \leq 30 \text{ kHz}$  ( $10^2 \geq \lambda \geq 10\text{km}$ ), e as ondas longas ou **LF**, na faixa que compreende o espectro  $30 \leq f \leq 300 \text{ kHz}$  ( $10 \geq \lambda \geq 1\text{km}$ ). As faixas de VLF e de LF acima citadas encontram aplicações sobretudo militares, para comunicação submarina, por exemplo. Ainda há a emissão de sinal de relógio padrão em 125kHz e atualmente tem aplicações na tecnologia de RFID (sistemas de identificação por RF, utilizados em etiquetas e cartões de variados usos).

Os sistemas de comunicação civil começam a aparecer em grande escala a partir do espectro de ondas médias ou **MF**, que está na faixa  $300 \leq f \leq 3000\text{kHz}$  ( $1000 \geq \lambda \geq 100\text{m}$ ). Além do broadcasting de AM (usualmente a faixa se estende de 550kHz a 1850kHz), essa faixa é amplamente empregada na radionavegação. Até aqui o fenômeno de propagação envolve um tipo de ondas chamadas ondas de superfície, que tem o campo elétrico orientado verticalmente em relação ao solo e é guiado pela curvatura da Terra. Para as frequências mais altas, no MF principalmente, começam a ocorrer efeitos de ondas celestes, em que as ondas propagam-se até a camada superior da atmosfera terrestre denominada ionosfera, sendo aí refratadas de volta, bem como ondas de visada direta.

As ondas celestes por reflexão ionosférica tem grande importância para a propagação de sinais nas ondas curtas, ou **HF**, que corresponde à faixa de  $3 \leq f \leq 30 \text{ MHz}$  ( $100 \geq \lambda \geq 10 \text{ m}$ ). A variabilidade da altitude da camada ionosférica com a hora do dia, a estação do ano e as coordenadas de latitude e longitude produzem efeitos muito significativos no alcance dos sinais, fato percebido por qualquer radioamadorista. Esta faixa é destinada para várias aplicações de radionavegação, broadcasting de rádio e comunicações de longa distância (eventualmente continentais) por ondas celestes (denominadas ainda de ondas ionosféricas).

As ondas de **VHF**, ou ondas muito curtas, que se estendem na faixa  $30 \leq f \leq 300 \text{ MHz}$  ( $10 \geq \lambda \geq 1 \text{ m}$ ) se propagam sobretudo por visada direta, podendo ainda ser ondas celestes até próximo de 50MHz. Esta faixa permite o broadcasting de TV, e tem na radiodifusão de FM, que compreende a faixa 88 – 108MHz no Brasil, uma de suas principais aplicações. Telefonia, comunicações de polícia e radionavegação são aplicações características do VHF.

A próxima região do espectro de RF, onde predomina a propagação em visada direta, denomina-se **Faixa das Micro-ondas**, que compreende uma ampla região de  $300\text{MHz} \leq f \leq 300\text{GHz}$ , ou  $1\text{m} \geq \lambda \geq 1\text{mm}$ .

Pode-se dizer que nas aplicações atuais as micro-ondas constituem a faixa mais relevante do espectro de RF, permitindo desde a telefonia celular até os sistemas de radar, bem como o estudo de materiais e moléculas através de ressonâncias típicas que aparecem nessa região, devido a modos de vibração molecular. Por ser bastante grande, costuma-se dividir as micro-ondas em sub-faixas. A primeira delas é o **UHF**, que compreende  $0,3 \leq f \leq 3\text{GHz}$  ( $100 \geq \lambda \geq 10\text{cm}$ ), e tem aplicações em radares, canais de TV, o forno de micro-ondas, que opera especificamente em 2,4GHz, a internet wireless, que utiliza-se de uma banda em torno de 2,4GHz, comunicações via satélite e principalmente a telefonia móvel celular, atualmente nas faixas de 900MHz, 1800MHz e 2100MHz.

Encerrando o espectro do RF, as ondas de **SHF**, na faixa 3 – 30GHz, e de **EHF**, na faixa 30 – 300GHz, têm importantes aplicações de radar, teleguiamento, comunicações militares e via satélite, bem como outras aplicações de curta distância.

É importante notar que na faixa de micro-ondas há outra forma de subdivisão espectral que não segue o padrão de potências de 10 aqui empregado, porém comumente mencionadas na literatura da área. São as bandas L (1-2GHz), S (2-4GHz), C(4-8GHz), X(8-12GHz), Ku(12-18GHz), K(18-27GHz), Ka(27-40GHz), R(26,5-40GHz), Q(33-50GHz), V(40-75GHz), W(75-110GHz) e Ondas Milimétricas (110-300GHz).

A região abaixo do espectro visível e acima das micro-ondas é denominada genericamente de espectro infravermelho **IR** (InfraRed) e situa-se na faixa 0.3-375 THz ( $100 \geq \lambda \geq 0,8\mu\text{m}$ ). O espectro IR é, por sua vez, subdividido em outras faixas. Por exemplo as **Ondas Submilimétricas** compreendem a faixa 300-3000 GHz, que também é denominada *radiação de terahertz* ou **banda T**, ainda pouco explorada. Possíveis aplicações para a banda T estão nas áreas médica, química e bioquímica.

O chamado IR próximo, que fica somente um pouco abaixo do espectro visível, tem importantes aplicações na medicina e nas comunicações ópticas. Tipicamente a fibra óptica opera nas faixas de  $0,9\mu\text{m}$ ,  $1,3\mu\text{m}$  e  $1,55\mu\text{m}$ , denominadas primeira, segunda e terceira janelas ópticas, respectivamente.

Considera-se **Espectro Visível** aquela faixa do espectro perceptível pelo olho humano, embora outros seres vivos possam enxergar em regiões espectrais ligeiramente diferentes. Somos capazes de detectar através da visão ondas na faixa de 375 a 790 THz ou seja,  $800 \geq \lambda \geq 379\text{nm}$ . Os valores considerados podem variar ligeiramente. As principais aplicações e estudos associam-se ao estudo da propagação de ondas de luz visível, com objetivo de produzir materiais opacos ou mais transparentes, espelhos e lentes para câmeras fotográficas, telescópios e microscópios, bem como as aplicações em oftalmologia, que se ocupa do estudo da física e fisiologia do olho. O estudo pormenorizado da luz visível visa o melhoramento de lentes corretivas, aplicações de laser em cirurgias corretivas, dentre outras possibilidades. Como aplicações meramente tecnológicas podemos citar os mouses ópticos, cortes a laser, semáforos, comunicação de última milha em fibras plásticas, etc. É importante mencionar que a frequência  $f$  da luz visível aumenta (e por consequência  $\lambda = c/f$  diminui) do vermelho para o violeta, passando pelo verde e o azul.

Finalmente chegamos a uma região do espectro a partir da qual a radiação tem a capacidade de produzir ionização de átomos e moléculas, sendo portanto denominada **radiação ionizante**. Até o espectro visível considera-se que a radiação não tenha condições de ionizar a matéria, embora em altas intensidades, a ionização pode ocorrer em frequências relativamente baixas. No entanto, na radiação ionizante o aspecto corpuscular de fóton na interação da luz com a matéria não pode jamais ser negligenciado. A radiação ionizante menos energética está na região denominada de **Ultravioleta (UV)** que situa-se na faixa 790-22500 THz, ou 379 – 13 nm. Ela já é capaz de ionizar gases atmosféricos e pode causar danos à saúde, porém têm aplicações em medicina, fabricação de dispositivos, gravação óptica de memórias eletrônicas reprogramáveis, etc. Já os **Raios X e Raios Gama** estão em frequências acima de 22500 THz (ou  $\lambda < 13\text{nm}$ ) e são altamente energéticos e

ionizantes. Os raios X são amplamente utilizados em Medicina, em aparelhos de raio X, radioterapia e tomografia computadorizada, bem como para enxergar a estrutura da matéria, nas técnicas conhecidas como difração de raios X. Os raios gama são tão energéticos que permitem perceber a estrutura do núcleo atômico e estão muito presentes na chamada radiação cósmica. Utilizando o conceito de fóton com energia  $E = hf$ , podemos dizer que a radiação ultravioleta vai de 3eV a pouco mais que 100eV, os raios X ficam compreendidos entre 100eV e 100keV, enquanto os raios gama, que tem energias maiores do que os raios X, apresentam energias tipicamente maiores do que 1MeV. Nesse sentido, enquanto os raios ultravioleta tipicamente são capazes de arrancar os elétrons de valência de um átomo, os raios X produzem ionização promovendo a quebra de ligação dos elétrons mais internos e mais fortemente ligados ao átomo originalmente neutro. Já os raios gama são capazes de promover transições quânticas nos estados físicos do interior do núcleo, permitindo assim estudar a própria natureza do núcleo e seus constituintes internos.

## 1.4 Referências deste Capítulo

- [1.1] Karl Popper, *The Logic of Scientific Discovery* (Routledge Classics, New York, 2002).
- [1.2] J.C. Maxwell, *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*, 1864, Philosophical Transactions of the Royal Society of London 155: 459-512.
- [1.3] J.C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Vol. 1 and 2 (Dover, New York, 1991), 3rd. Ed. (A primeira edição dos dois volumes desta obra foi publicada no ano de 1873).
- [1.4] J.J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics* (Addison-Wesley, Los Angeles, 1967).
- [1.5] John D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (Wiley and Sons, New York, 3rd. Ed., 1998).
- [1.6] Daniel C. Mattis, *The Theory of Magnetism: An introduction to the Study of Cooperative Phenomena*, Harper and Row Publishers (1965).
- [1.7] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Vol. I, II and III, Cambridge University Press (1996).
- 1.8 L.H.Ryder, *Quantum Field Theory*, 2nd. ed. (Cambridge University Press, 1996).

## Chapter 2

# Fundamentos Matemáticos

A compreensão da teoria eletromagnética em grande profundidade requer o domínio de algumas ferramentas matemáticas imprescindíveis. São elas o cálculo vetorial, a álgebra de números complexos e a análise de Fourier. A proposta deste capítulo é ser um guia rápido de consulta, contendo os conceitos matemáticos essenciais para o entendimento do eletromagnetismo, bem como os resultados e teoremas mais importantes.

### 2.1 Partículas e Campos

É sabido que a teoria eletromagnética é uma **teoria de campos**. Surge imediatamente a pergunta: o que é um campo? Quais suas propriedades mais essenciais? É imprescindível ao leitor saber conceituar um campo e diferenciá-lo de uma partícula para poder entender o eletromagnetismo corretamente. Para que possamos dar uma definição razoável para um campo é necessário entender em linhas gerais o que é uma partícula e quais as suas diferenças essenciais com relação a um campo qualquer.

Uma **partícula** é um ente localizado no espaço, descrito essencialmente por um vetor de estado  $[\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t)]$ , onde  $\mathbf{r}(t)$  é a posição da partícula no instante de tempo  $t$ , em relação a um dado sistema de coordenadas,  $\mathbf{p}(t)$  é o momento linear da partícula, dado pelo produto entre a massa  $m$  e a velocidade instantânea  $\mathbf{v}(t)$  da mesma. Um exemplo de partícula é um carro trafegando em uma rodovia, que para um observador distante pode ser considerado um ponto material e sua dinâmica é determinada pelas leis de Newton:

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{\mathbf{p}(t)}{m} = \mathbf{v}(t) , \quad (2.1)$$

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = \mathbf{F}(t) , \quad (2.2)$$

onde  $\mathbf{F}$  é a força resultante sobre ela no instante de tempo  $t$ . Note que o único parâmetro independente é o tempo  $t$  e as coordenadas  $x(t), y(t), z(t)$  dependem de  $t$ . Nesse caso, o problema traduz-se em resolver um conjunto de equações diferenciais ordinárias, cujas derivadas são totais em relação ao tempo. O número de graus de liberdade para caracterizar uma partícula é, por definição, finito. Isso significa que para descrever corretamente a dinâmica da partícula precisamos, em um dado instante de tempo  $t$ , de um número finito de números, ditos graus de liberdade, usualmente  $\mathbf{r}(t)$  e  $\mathbf{p}(t)$ . Quando uma partícula puntual é representada no espaço e parametrizada pelo tempo, o resultado é uma trajetória dada por uma curva qualquer. A figura 2.1 ilustra essa situação.

Por outro lado, do ponto de vista da Física, um **campo** é um ente estendido no espaço e no tempo, ou seja, não pode ser localizado no espaço para um dado instante de tempo. O campo corresponde a uma grandeza física que assume um valor em cada ponto do espaço, podendo variar no tempo, tendo portanto infinitos graus de liberdade, uma vez que o espaço forma um *continuum*. Para poder representar um campo faz-se necessário

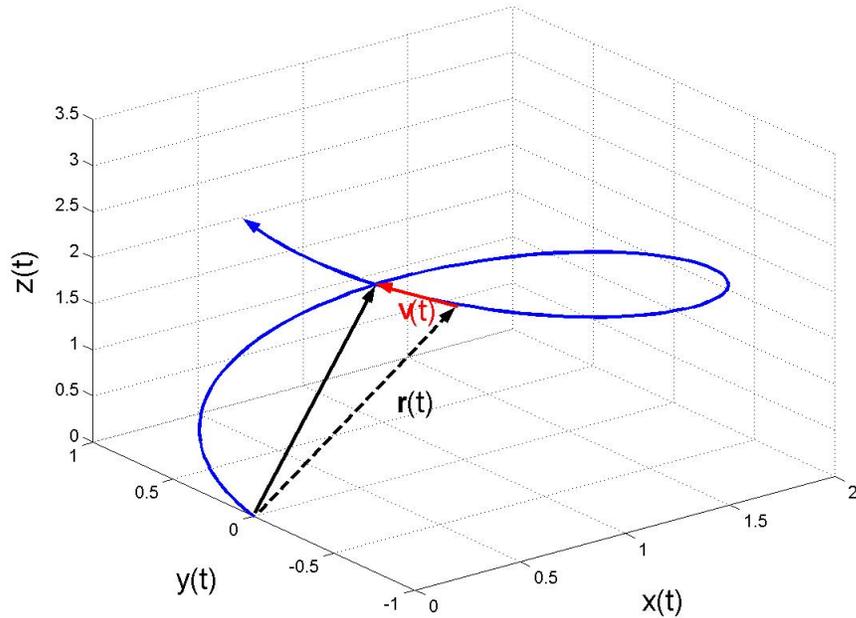


Figure 2.1: Exemplo de trajetória de uma partícula do tipo ponto no espaço. Dado um instante  $t$  a partícula é um ente bem localizado no espaço pelas suas coordenadas  $\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$ . Para caracterizá-la completamente são necessários os valores da velocidade instantânea  $\mathbf{v}(t)$ , que é sempre tangencial à trajetória.

utilizar uma função  $\psi(x, y, z, t)$  parametrizada pelas coordenadas de posição e de tempo,  $(\mathbf{r}, t) = (x, y, z, t)$ . Ao contrário do que ocorre com uma partícula, para um campo as coordenadas  $(x, y, z)$  são independentes do tempo  $t$ , e parametrizam o campo juntamente com o tempo. Espaço e tempo entram em pé de igualdade na parametrização da função do campo. Desse modo, os campos têm sua dinâmica descrita necessariamente por equações diferenciais parciais, envolvendo derivadas em relação ao tempo e ao espaço. Os campos podem ser classificados de acordo com o número de componentes necessários para descrevê-los em escalares, vetoriais ou tensoriais. Aqui serão utilizados apenas os campos escalares e vetoriais. Um campo escalar é aquele para o qual a magnitude caracteriza-o por completo. Em contrapartida, campos vetoriais são funções orientadas estendidas no espaço-tempo, precisando de módulo, direção e sentido em cada ponto do espaço e do tempo para uma descrição completa. No espaço de dimensão  $D$ , um campo vetorial possui  $D$  componentes, orientadas ao longo dos respectivos eixos do espaço. O caso de maior interesse é o espaço tridimensional ( $D = 3$ ). Funções escalares são representadas por qualquer letra do alfabeto latino ou grego, por exemplo  $f(x, y, z, t)$  ou  $\psi(x, y, z, t)$ . Funções vetoriais podem ser expressas de modo geral apresentando uma flecha sobre a letra (latina ou grega), ou ainda através de uma letra em negrito, como  $\vec{f}(x, y, z, t)$ ,  $\vec{\phi}(x, y, z, t)$  ou  $\mathbf{f}(x, y, z, t)$ , indicando a necessidade de orientação no espaço.

Exemplos de campos escalares são uma onda de pressão no ar  $p(x, y, z, t)$ , que descreve o som, a função de temperatura  $T(x, y, z, t)$  ou o potencial escalar elétrico  $\phi(x, y, z)$  utilizado na eletrostática. Note que este último é independente do tempo pois trata-se da eletrostática, e por isso o tempo  $t$  foi omitido do conjunto de parâmetros necessários para descrever o campo. Exemplos de campos vetoriais são inúmeros, como o campo de velocidades  $\mathbf{v}(x, y, z, t)$  em um fluido, e mais importante para nós, os campos eletromagnéticos  $\mathbf{E}(x, y, z, t)$  e  $\mathbf{H}(x, y, z, t)$ , que serão detalhadamente estudados aqui.

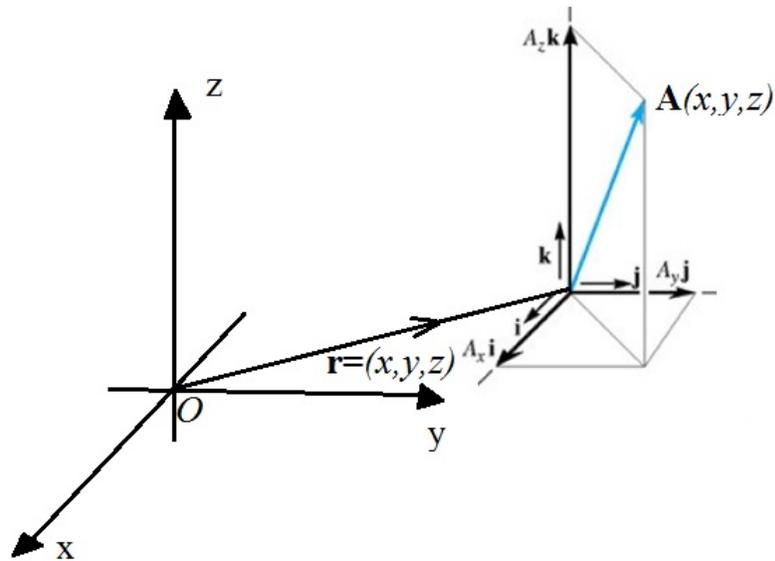


Figure 2.2: Representação gráfica de um vetor  $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$  em uma posição  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  no instante de tempo  $t$ .

Enquanto a trajetória de uma partícula pode ser visualizada facilmente no espaço, quando parametrizada pelo tempo, uma vez que essa trajetória é uma curva, ou seja, um objeto unidimensional, a visualização de um campo não é tão trivial, sobretudo se este depender de todas as coordenadas do espaço e do tempo. Em geral, um campo escalar que depende apenas de uma variável espacial,  $x$  e do tempo  $t$  pode ser representado através de uma superfície. A figura 2.3 mostra o gráfico de um campo  $\psi(x, t)$  em função de  $x$  e  $t$ . Campos cuja dependência envolva três ou quatro coordenadas já não podem ser visualizadas através de um gráfico único. Por exemplo, uma função  $\psi(x, y, t)$  pode ser visualizada no espaço  $(x, y)$  em vários instantes de tempo. A evolução temporal dessa função produz um "filme", contendo os vários quadros que mostram a evolução temporal da distribuição do campo no espaço.

Para não deixar dúvida alguma sobre as diferenças entre partículas e campos a figura ?? mostra uma partícula e um campo em  $t = 0$  e posteriormente a evolução temporal de cada um. Note que em  $t = 0$  a partícula está localizada em um ponto no espaço e à medida que o tempo passa a sua trajetória descreve uma curva no plano  $(x, t)$ , sendo  $x$  uma função do tempo. Considerando apenas uma dimensão espacial, sem perda de generalidade, o fato de que precisamos apenas do valor de  $x(0)$  em  $t = 0$  para localizá-la evidencia que a partícula é descrita por um número finito de graus de liberdade. Em contrapartida em  $t = 0$  o campo é função da coordenada espacial  $x$  e portanto, uma vez que a variável  $x$  assume valores no *continuum*, requer infinitos graus de liberdade (os valores de  $\psi$  para cada valor de  $x$ ) para ser completamente descrito, produzindo uma superfície quando mostramos o gráfico da evolução temporal.

## 2.2 Propriedades e Operações com Escalares e Vetores

Aqui vamos apresentar algumas propriedades importantes nas operações de soma, produto e diferenciação de campos escalares e vetoriais.

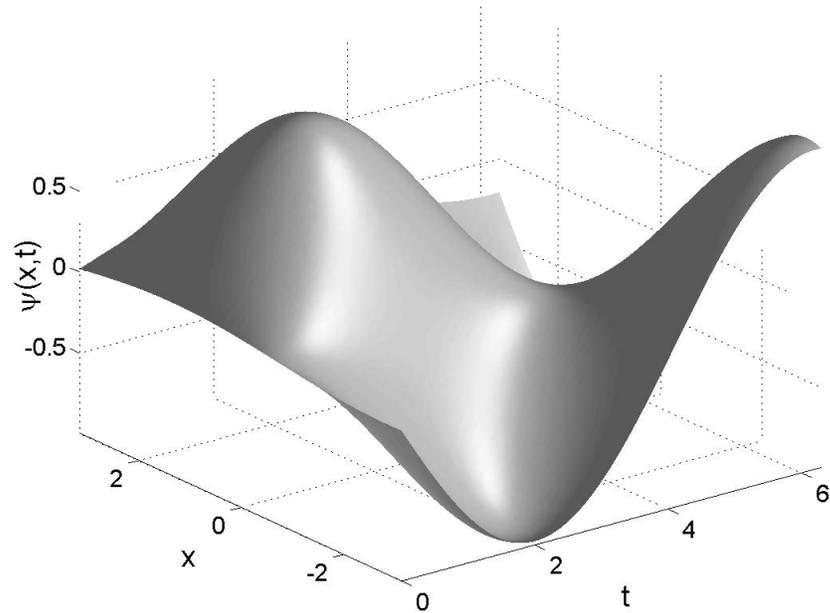


Figure 2.3: Visualização de um campo  $\psi(x,t)$  em função de  $x$  e  $t$ . A representação gráfica do campo produz uma superfície.

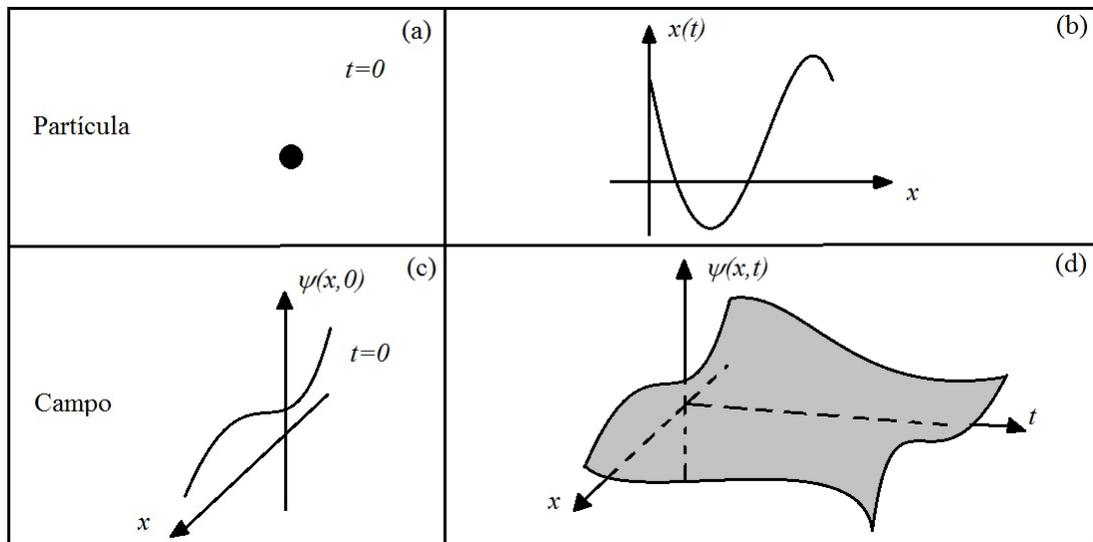


Figure 2.4: Partícula *versus* campo: em (a) uma partícula é ilustrada em  $t = 0$  e em (b) a sua trajetória  $x(t)$  em função de  $t$ . Em (c) um campo é ilustrado em  $t = 0$  em função de  $x$  e em (d) a evolução temporal desse campo é ilustrada, gerando assim uma superfície.

### 2.2.1 Propriedades Básicas de Escalares

Dentre as propriedades mais essenciais de um campo escalar está a comutatividade das operações de soma e produto. A diferenciação segue as regras usuais do cálculo. Para duas quantidades escalares  $\Phi$  e  $\Psi$  temos as

seguintes propriedades válidas:

$$\Psi \pm \Phi = \pm \Phi + \Psi \quad (2.3)$$

$$\Psi \Phi = \Phi \Psi \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\Phi \Psi) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \Psi + \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\Phi + \Psi) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \quad (2.6)$$

onde  $x_i$  é uma componente do sistema coordenado utilizado  $(x_1, x_2, x_3)$  ou o tempo  $t$ .

### 2.2.2 Propriedades Básicas da Soma de Vetores

A operação mais básica que podemos realizar com vetores é a soma. A soma de vetores é associativa, distributiva e comutativa. Sejam os vetores  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$ , então:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} , \quad (2.7)$$

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = (\mathbf{A} + \mathbf{C}) + \mathbf{B} , \quad (2.8)$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) , \quad (2.9)$$

onde vetor  $-\mathbf{B}$  tem a mesma magnitude e direção de  $\mathbf{B}$  porém com sentido contrário.

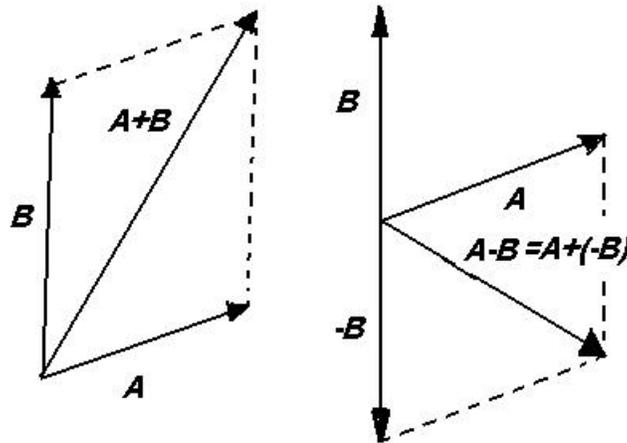


Figure 2.5: Representação Gráfica da Soma de Vetores.

Na Figura 2.2.2 mostramos a regra do paralelogramo, um método gráfico simples para adicionar vetores, útil para visualização em alguns problemas.

### 2.2.3 Produtos Vetoriais e Suas Propriedades

Diferentemente das funções escalares, para as quais só é possível definir um único tipo de produto, os produtos entre dois vetores admitem dois tipos: o produto escalar, na qual dois vetores são multiplicados de tal forma a resultar em uma quantidade escalar, e o produto vetorial, no qual dois vetores são combinados por uma multiplicação cujo resultado é também um vetor. As propriedades desses produtos não são iguais quanto à comutatividade.

#### Produto Escalar

O produto escalar de dois vetores resulta em uma quantidade escalar. Define-se produto escalar da seguinte maneira:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 \quad (2.10)$$

onde  $\theta$  é o ângulo formado pelos vetores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ . Podemos interpretar esse produto como a projeção do vetor  $\mathbf{A}$  sobre o vetor  $\mathbf{B}$  e vice-versa.

O produto escalar é comutativo, ou seja:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (2.11)$$

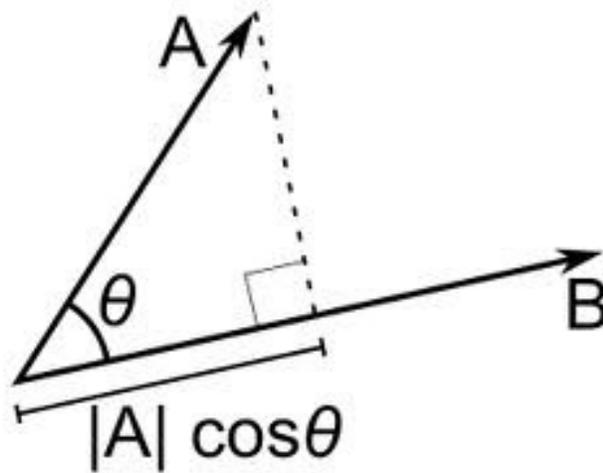


Figure 2.6: Produto Escalar: projeção de um vetor sobre o outro.

A Figura 2.2.3 mostra os dois vetores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , e o ângulo  $\theta$  formado entre eles. Do produto escalar podemos determinar a magnitude de qualquer vetor real:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{A}|^2$$

de onde tiramos portanto que:

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} . \quad (2.12)$$

Podemos generalizar a equação acima para o módulo de um vetor complexo  $\mathbf{A}$ , em que as componentes do vetor são funções complexas, escrevendo uma quantidade positiva definida na forma:

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}} \geq 0 . \quad (2.13)$$

que representa o módulo ou magnitude desse vetor complexo.

### Produto Vetorial

Define-se o produto vetorial da seguinte maneira:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \hat{\mathbf{a}}_1 (A_2 B_3 - A_3 B_2) + \hat{\mathbf{a}}_2 (A_3 B_1 - A_1 B_3) + \hat{\mathbf{a}}_3 (A_1 B_2 - A_2 B_1) \quad (2.14)$$

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta \quad (2.15)$$

onde  $\theta$  é o ângulo formado pelos vetores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ . Este produto pode ser interpretada como o vetor área do paralelogramo que pode ser formado pelos dois vetores, sendo que o vetor resultante é ortogonal aos outros dois.

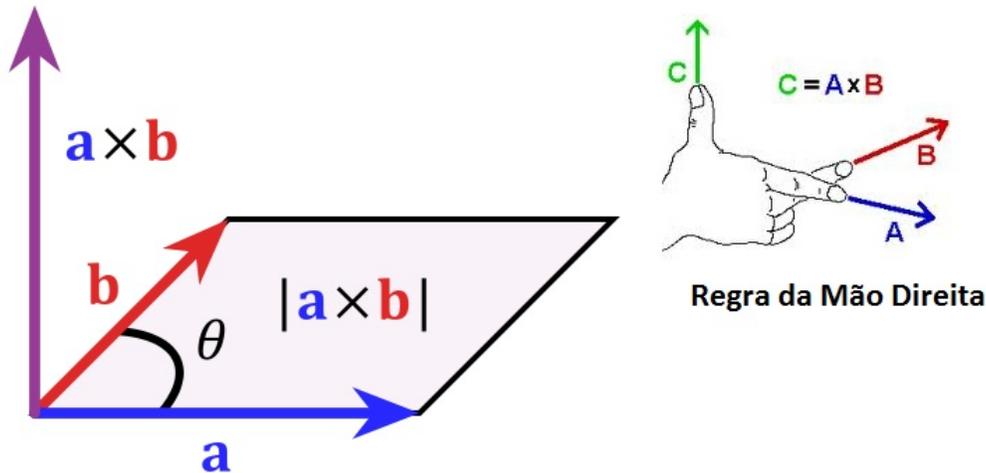


Figure 2.7: Produto Vetorial: o módulo é a área do paralelogramo definido pelos vetores,  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta$ .

O produto vetorial não é comutativo, ou seja, a ordem dos vetores importa na multiplicação, e temos:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (2.16)$$

Mostramos esquematicamente na Figura 2.2.3 um método gráfico para determinar a direção e sentido do vetor resultante, no produto vetorial. O método é o do parafuso, ou da mão direita. O produto vetorial de  $\mathbf{A}$  com  $\mathbf{B}$  tem magnitude  $|\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta$ , onde  $\theta$  é o ângulo formado pelos dois vetores. A direção do vetor resultante é ortogonal a  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  simultaneamente. Para determinar o sentido é que usa-se a regra do parafuso. Devemos rodar o vetor  $\mathbf{A}$  em direção ao vetor  $\mathbf{B}$ , e então utilizar a conhecida regra da mão direita ou do parafuso. Cria-se uma parede imaginária, na ponta do parafuso e então, roda-se o parafuso no mesmo sentido que fizemos com o vetor  $\mathbf{A}$ . Se o sentido for horário, o parafuso entra na parede hipotética e então, o sentido é para cima, ou para dentro da parede. Em caso contrário, trocamos o sinal.

## 2.2.4 Vetores Unitários

Um vetor unitário é utilizado sempre que queremos caracterizar uma direção e sentido, apenas. Dessa forma, um vetor unitário adquire magnitude unitária, tem apenas direção e sentido. Podemos caracterizar qualquer vetor de magnitude diferente de 1 através de vetores unitários. A definição segue abaixo:

$$\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} \quad (2.17)$$

onde  $\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{A}}$  é um vetor de magnitude 1 na direção e sentido do vetor  $\mathbf{A}$ . Note que para um outro vetor qualquer paralelo a  $\mathbf{A}$  mas com magnitude diferente de  $|\mathbf{A}|$ , o vetor unitário resultante é o mesmo. Por isso a importância do vetor unitário: podemos caracterizar um vetor qualquer por sua magnitude vezes o vetor unitário, que contém a informação de direção e sentido do vetor apenas.

No espaço tridimensional  $R^3$  definem-se três vetores unitários ( $\hat{\mathbf{a}}_1, \hat{\mathbf{a}}_2, \hat{\mathbf{a}}_3$ ) ortonormais entre si, que formam uma base de vetores unitários completa para a caracterização de quaisquer outros vetores do espaço tridimensional. As propriedades de produto escalar e produto vetorial entre esses vetores ficam definidas abaixo:

$$\hat{\mathbf{a}}_i \cdot \hat{\mathbf{a}}_j = \delta_{ij} \quad (2.18)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_i \times \hat{\mathbf{a}}_j = \varepsilon_{ijk} \hat{\mathbf{a}}_k \quad (2.19)$$

onde  $\delta_{ij}$  é a função de Kronecker e  $\varepsilon_{ijk}$  é o tensor de permutação:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (2.20)$$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & ijk = 1, 2, 3 \text{ e permut. cicl.} \\ -1 & ijk = 2, 1, 3 \text{ e permut. cicl.} \\ 0 & i = j \text{ ou } i = k \text{ ou } j = k \end{cases} \quad (2.21)$$

Na forma explícita temos:

$$\hat{\mathbf{a}}_1 \cdot \hat{\mathbf{a}}_1 = \hat{\mathbf{a}}_2 \cdot \hat{\mathbf{a}}_2 = \hat{\mathbf{a}}_3 \cdot \hat{\mathbf{a}}_3 = 1 \quad (2.22)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_1 \cdot \hat{\mathbf{a}}_2 = \hat{\mathbf{a}}_2 \cdot \hat{\mathbf{a}}_3 = \hat{\mathbf{a}}_3 \cdot \hat{\mathbf{a}}_1 = 0 \quad (2.23)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_1 \times \hat{\mathbf{a}}_1 = \hat{\mathbf{a}}_2 \times \hat{\mathbf{a}}_2 = \hat{\mathbf{a}}_3 \times \hat{\mathbf{a}}_3 = 0 \quad (2.24)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_1 \times \hat{\mathbf{a}}_2 = \hat{\mathbf{a}}_3 = -\hat{\mathbf{a}}_2 \times \hat{\mathbf{a}}_1 \quad (2.25)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_2 \times \hat{\mathbf{a}}_3 = \hat{\mathbf{a}}_1 = -\hat{\mathbf{a}}_3 \times \hat{\mathbf{a}}_2 \quad (2.26)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_3 \times \hat{\mathbf{a}}_1 = \hat{\mathbf{a}}_2 = -\hat{\mathbf{a}}_1 \times \hat{\mathbf{a}}_3 \quad (2.27)$$

## 2.3 Sistemas de Coordenadas e Transformações entre Sistemas

Existe uma infinidade de sistemas coordenados, dos quais, os mais úteis e usuais são os sistemas cartesiano ou retangular, cilíndrico circular e esférico. Como dito anteriormente, um vetor não depende do sistema coordenado que está sendo utilizado, e por isso, é importante levar em conta as simetrias do problema a ser resolvido e optar pelo sistema de coordenadas mais adequado.

### 2.3.1 Coordenadas Retangulares $(x, y, z)$

Este sistema é o mais convencional. Para caracterizar um ponto utilizamos 3 números  $(x, y, z)$  que representam simplesmente profundidade, largura e altura, em relação a uma origem  $(0, 0, 0)$ .

Um vetor  $\mathbf{A}$  qualquer nessas coordenadas é representado por:

$$\mathbf{A} = A_x \hat{\mathbf{a}}_x + A_y \hat{\mathbf{a}}_y + A_z \hat{\mathbf{a}}_z \quad (2.28)$$

sendo  $(\hat{\mathbf{a}}_x, \hat{\mathbf{a}}_y, \hat{\mathbf{a}}_z)$  os vetores unitários nessa representação:

$$\hat{\mathbf{a}}_x \cdot \hat{\mathbf{a}}_x = \hat{\mathbf{a}}_y \cdot \hat{\mathbf{a}}_y = \hat{\mathbf{a}}_z \cdot \hat{\mathbf{a}}_z = 1$$

$$\hat{\mathbf{a}}_x \cdot \hat{\mathbf{a}}_y = \hat{\mathbf{a}}_y \cdot \hat{\mathbf{a}}_z = \hat{\mathbf{a}}_z \cdot \hat{\mathbf{a}}_x = 0$$

$$\hat{\mathbf{a}}_x \times \hat{\mathbf{a}}_x = \hat{\mathbf{a}}_y \times \hat{\mathbf{a}}_y = \hat{\mathbf{a}}_z \times \hat{\mathbf{a}}_z = 0$$

$$\hat{\mathbf{a}}_x \times \hat{\mathbf{a}}_y = \hat{\mathbf{a}}_z = -\hat{\mathbf{a}}_y \times \hat{\mathbf{a}}_x$$

$$\hat{\mathbf{a}}_y \times \hat{\mathbf{a}}_z = \hat{\mathbf{a}}_x = -\hat{\mathbf{a}}_z \times \hat{\mathbf{a}}_y$$

$$\hat{\mathbf{a}}_z \times \hat{\mathbf{a}}_x = \hat{\mathbf{a}}_y = -\hat{\mathbf{a}}_x \times \hat{\mathbf{a}}_z$$

### Elemento diferencial de comprimento, área e volume

$$dl = dx \hat{\mathbf{a}}_x + dy \hat{\mathbf{a}}_y + dz \hat{\mathbf{a}}_z \quad (2.29)$$

$$d\mathbf{S} = dy dz \hat{\mathbf{a}}_x + dz dx \hat{\mathbf{a}}_y + dx dy \hat{\mathbf{a}}_z \quad (2.30)$$

$$dV = dx dy dz \quad (2.31)$$

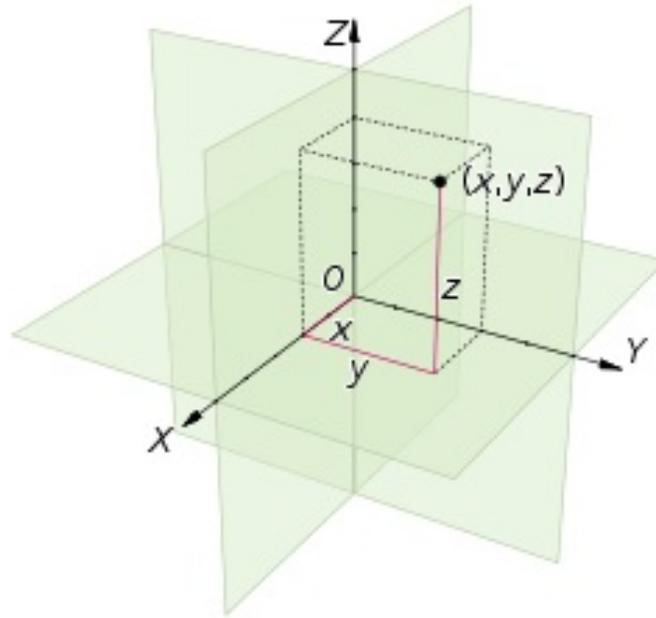


Figure 2.8: Sistema de Coordenadas Cartesianas.

??

Onde devemos tomar cuidado sempre com o sinal de  $d\mathbf{S}$ , pois um elemento de área aponta sempre para fora da superfície. Um elemento diferencial de área é sempre obtido através de

$$d\mathbf{S} = d\mathbf{l}_1 \times d\mathbf{l}_2$$

ou seja, o produto vetorial entre dois elementos de comprimento, por isso o vetor área é sempre perpendicular à superfície. Já um elemento diferencial de volume é dado por um produto triplo de vetores.

$$dV = dx \, dy \, dz \, \hat{\mathbf{a}}_x \cdot (\hat{\mathbf{a}}_y \times \hat{\mathbf{a}}_z) = dx \, dy \, dz$$

### 2.3.2 Coordenadas Cilíndricas $(\rho, \varphi, z)$

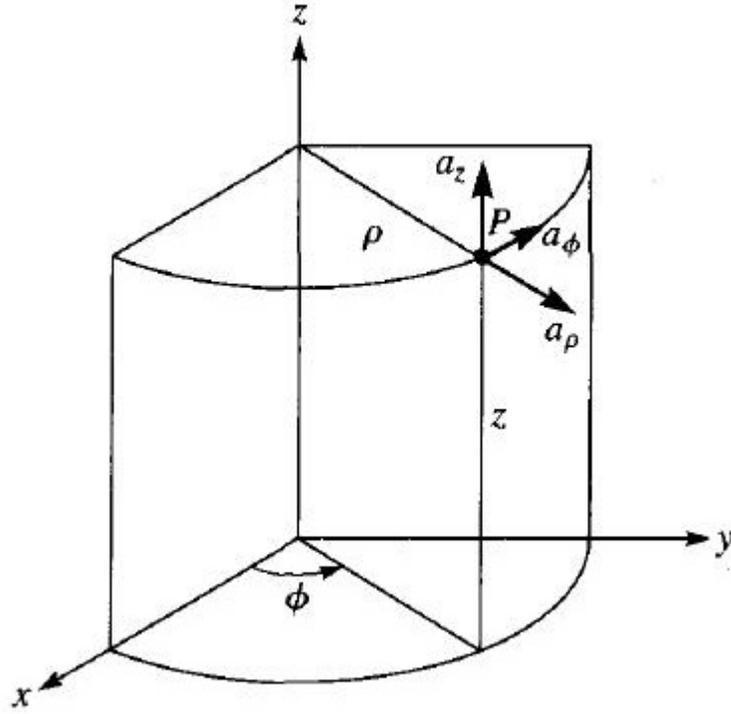
Este sistema é muito útil em problemas de simetria cilíndrica. Para caracterizar um ponto utilizamos 3 números  $(\rho, \varphi, z)$  que representam simplesmente uma distância radial em relação ao eixo  $z$ , dado por  $\rho$ , um ângulo azimutal  $\varphi$  em relação ao eixo  $x$  e uma altura  $z$ .

Um vetor  $\mathbf{A}$  qualquer em coordenadas cilíndricas é representado por:

$$\mathbf{A} = A_\rho \hat{\mathbf{a}}_\rho + A_\varphi \hat{\mathbf{a}}_\varphi + A_z \hat{\mathbf{a}}_z \quad (2.32)$$

sendo  $(\hat{\mathbf{a}}_\rho, \hat{\mathbf{a}}_\varphi, \hat{\mathbf{a}}_z)$  os vetores unitários nessa representação:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}_\rho \cdot \hat{\mathbf{a}}_\rho &= \hat{\mathbf{a}}_\varphi \cdot \hat{\mathbf{a}}_\varphi = \hat{\mathbf{a}}_z \cdot \hat{\mathbf{a}}_z = 1 \\ \hat{\mathbf{a}}_\rho \cdot \hat{\mathbf{a}}_\varphi &= \hat{\mathbf{a}}_\varphi \cdot \hat{\mathbf{a}}_z = \hat{\mathbf{a}}_z \cdot \hat{\mathbf{a}}_\rho = 0 \\ \hat{\mathbf{a}}_\rho \times \hat{\mathbf{a}}_\rho &= \hat{\mathbf{a}}_\varphi \times \hat{\mathbf{a}}_\varphi = \hat{\mathbf{a}}_z \times \hat{\mathbf{a}}_z = 0 \\ \hat{\mathbf{a}}_\rho \times \hat{\mathbf{a}}_\varphi &= \hat{\mathbf{a}}_z = -\hat{\mathbf{a}}_\varphi \times \hat{\mathbf{a}}_\rho \\ \hat{\mathbf{a}}_\varphi \times \hat{\mathbf{a}}_z &= \hat{\mathbf{a}}_\rho = -\hat{\mathbf{a}}_z \times \hat{\mathbf{a}}_\varphi \\ \hat{\mathbf{a}}_z \times \hat{\mathbf{a}}_\rho &= \hat{\mathbf{a}}_\varphi = -\hat{\mathbf{a}}_\rho \times \hat{\mathbf{a}}_z \end{aligned}$$



scalebox0.9

Figure 2.9: Sistema de Coordenadas Cilíndricas Circulares

### Elemento diferencial de comprimento, área e volume

$$dl = d\rho \hat{\mathbf{a}}_\rho + \rho d\phi \hat{\mathbf{a}}_\phi + dz \hat{\mathbf{a}}_z \quad (2.33)$$

$$d\mathbf{S} = \rho d\phi dz \hat{\mathbf{a}}_\rho + d\rho dz \hat{\mathbf{a}}_\phi + \rho d\rho d\phi \hat{\mathbf{a}}_z \quad (2.34)$$

$$dV = \rho d\rho d\phi dz \quad (2.35)$$

### 2.3.3 Coordenadas Esféricas $(r, \theta, \varphi)$

Este sistema é útil em problemas de simetria esférica. Para caracterizar um ponto utilizamos 3 números  $(r, \theta, \varphi)$  que representam simplesmente uma distância radial em relação ao ponto  $(0, 0, 0)$ , e dois ângulos  $\theta$  e  $\varphi$  que caracterizam o ponto através da inclinação de  $r$  em relação aos eixos  $x$  e  $z$ , respectivamente.

Um vetor  $\mathbf{A}$  qualquer nessas coordenadas é representado por:

$$\mathbf{A} = A_r \hat{\mathbf{a}}_r + A_\theta \hat{\mathbf{a}}_\theta + A_\varphi \hat{\mathbf{a}}_\varphi \quad (2.36)$$

sendo  $(\hat{\mathbf{a}}_r, \hat{\mathbf{a}}_\theta, \hat{\mathbf{a}}_\varphi)$  os vetores unitários nessa representação:

$$\hat{\mathbf{a}}_r \cdot \hat{\mathbf{a}}_r = \hat{\mathbf{a}}_\theta \cdot \hat{\mathbf{a}}_\theta = \hat{\mathbf{a}}_\varphi \cdot \hat{\mathbf{a}}_\varphi = 1 \quad (2.37)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_r \cdot \hat{\mathbf{a}}_\theta = \hat{\mathbf{a}}_\theta \cdot \hat{\mathbf{a}}_\varphi = \hat{\mathbf{a}}_\varphi \cdot \hat{\mathbf{a}}_r = 0 \quad (2.38)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_r \times \hat{\mathbf{a}}_r = \hat{\mathbf{a}}_\theta \times \hat{\mathbf{a}}_\theta = \hat{\mathbf{a}}_\varphi \times \hat{\mathbf{a}}_\varphi = 0 \quad (2.39)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_r \times \hat{\mathbf{a}}_\theta = \hat{\mathbf{a}}_\varphi = -\hat{\mathbf{a}}_\theta \times \hat{\mathbf{a}}_r \quad (2.40)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_\theta \times \hat{\mathbf{a}}_\varphi = \hat{\mathbf{a}}_r = -\hat{\mathbf{a}}_\varphi \times \hat{\mathbf{a}}_\theta \quad (2.41)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_\varphi \times \hat{\mathbf{a}}_r = \hat{\mathbf{a}}_\theta = -\hat{\mathbf{a}}_r \times \hat{\mathbf{a}}_\varphi \quad (2.42)$$

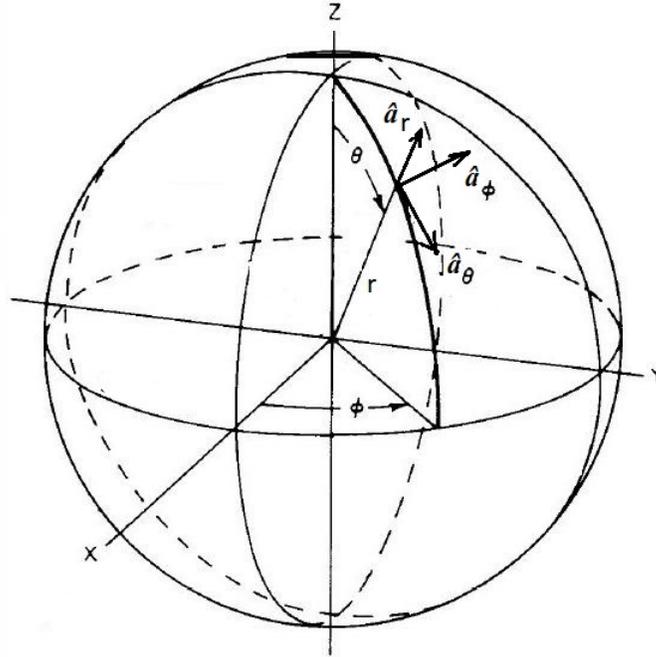


Figure 2.10: Sistema de Coordenadas Esféricas.

#### Elemento diferencial de comprimento, área e volume

$$d\mathbf{l} = dr \hat{\mathbf{a}}_r + r d\theta \hat{\mathbf{a}}_\theta + r \sin \theta d\varphi \hat{\mathbf{a}}_\varphi \quad (2.43)$$

$$d\mathbf{S} = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \hat{\mathbf{a}}_r + r \sin \theta dr d\varphi \hat{\mathbf{a}}_\theta + r dr d\theta \hat{\mathbf{a}}_\varphi \quad (2.44)$$

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \quad (2.45)$$

#### 2.3.4 Transformações entre Coordenadas

Como dito anteriormente um vetor pode ser representado, equivalentemente, em diferentes sistemas coordenados. O vetor é independente da representação, mas suas componentes dependem dela. Muitas vezes um vetor está representado em um sistema de coordenadas e desejamos converter suas componentes para outro sistema de coordenadas. É o que demonstraremos aqui. Dado um vetor  $\mathbf{A}$ , a representação de  $\mathbf{A}$  em um sistema coordenado é obtida pela projeção de  $\mathbf{A}$  sobre cada um dos vetores unitários do sistema adotado, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{a}}_1) \hat{\mathbf{a}}_1 + (\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{a}}_2) \hat{\mathbf{a}}_2 + (\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{a}}_3) \hat{\mathbf{a}}_3 \\ &= (\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{a}}_x) \hat{\mathbf{a}}_x + (\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{a}}_y) \hat{\mathbf{a}}_y + (\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{a}}_z) \hat{\mathbf{a}}_z \\ &= (\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{a}}_\rho) \hat{\mathbf{a}}_\rho + (\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{a}}_\varphi) \hat{\mathbf{a}}_\varphi + (\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{a}}_z) \hat{\mathbf{a}}_z \\ &= (\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{a}}_r) \hat{\mathbf{a}}_r + (\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{a}}_\theta) \hat{\mathbf{a}}_\theta + (\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{a}}_\varphi) \hat{\mathbf{a}}_\varphi \end{aligned} \quad (2.46)$$

portanto a componente  $A_i$  de um vetor, num sistema coordenado com vetores unitários  $(\hat{\mathbf{a}}_1, \hat{\mathbf{a}}_2, \hat{\mathbf{a}}_3)$  será dada por:

$$A_i = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{a}}_i$$

#### Transformação entre coordenadas cartesianas e cilíndricas

Para a transformação de coordenadas  $(x, y, z) \rightarrow (\rho, \varphi, z)$ , temos:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2.47)$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (2.48)$$

$$z = z \quad (2.49)$$

ou  $(\rho, \varphi, z) \rightarrow (x, y, z)$ :

$$x = \rho \cos \varphi \quad (2.50)$$

$$y = \rho \sin \varphi \quad (2.51)$$

$$z = z \quad (2.52)$$

Dado um vetor  $\mathbf{A}$  cuja representação em coordenadas retangulares é conhecida:

$$\mathbf{A} = A_x \hat{\mathbf{a}}_x + A_y \hat{\mathbf{a}}_y + A_z \hat{\mathbf{a}}_z$$

queremos a sua representação em coordenadas cilíndricas. Para tanto devemos projetar o vetor nos vetores unitários das coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} A_\rho &= \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{a}}_\rho = A_x \hat{\mathbf{a}}_x \cdot \hat{\mathbf{a}}_\rho + A_y \hat{\mathbf{a}}_y \cdot \hat{\mathbf{a}}_\rho + A_z \hat{\mathbf{a}}_z \cdot \hat{\mathbf{a}}_\rho \\ A_\varphi &= \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{a}}_\varphi = A_x \hat{\mathbf{a}}_x \cdot \hat{\mathbf{a}}_\varphi + A_y \hat{\mathbf{a}}_y \cdot \hat{\mathbf{a}}_\varphi + A_z \hat{\mathbf{a}}_z \cdot \hat{\mathbf{a}}_\varphi \\ A_z &= \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{a}}_z = A_x \hat{\mathbf{a}}_x \cdot \hat{\mathbf{a}}_z + A_y \hat{\mathbf{a}}_y \cdot \hat{\mathbf{a}}_z + A_z \hat{\mathbf{a}}_z \cdot \hat{\mathbf{a}}_z \end{aligned}$$

e que podemos escrever em termos de uma equação matricial:

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_x \cdot \hat{\mathbf{a}}_\rho & \hat{\mathbf{a}}_y \cdot \hat{\mathbf{a}}_\rho & \hat{\mathbf{a}}_z \cdot \hat{\mathbf{a}}_\rho \\ \hat{\mathbf{a}}_x \cdot \hat{\mathbf{a}}_\varphi & \hat{\mathbf{a}}_y \cdot \hat{\mathbf{a}}_\varphi & \hat{\mathbf{a}}_z \cdot \hat{\mathbf{a}}_\varphi \\ \hat{\mathbf{a}}_x \cdot \hat{\mathbf{a}}_z & \hat{\mathbf{a}}_y \cdot \hat{\mathbf{a}}_z & \hat{\mathbf{a}}_z \cdot \hat{\mathbf{a}}_z \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

onde  $U$  é a matriz de transformação

$$U = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_x \cdot \hat{\mathbf{a}}_\rho & \hat{\mathbf{a}}_y \cdot \hat{\mathbf{a}}_\rho & \hat{\mathbf{a}}_z \cdot \hat{\mathbf{a}}_\rho \\ \hat{\mathbf{a}}_x \cdot \hat{\mathbf{a}}_\varphi & \hat{\mathbf{a}}_y \cdot \hat{\mathbf{a}}_\varphi & \hat{\mathbf{a}}_z \cdot \hat{\mathbf{a}}_\varphi \\ \hat{\mathbf{a}}_x \cdot \hat{\mathbf{a}}_z & \hat{\mathbf{a}}_y \cdot \hat{\mathbf{a}}_z & \hat{\mathbf{a}}_z \cdot \hat{\mathbf{a}}_z \end{pmatrix}$$

Uma vez conhecida essa transformação, podemos obter a transformação inversa, que significa que conhecemos o vetor  $\mathbf{A}$  em coordenadas cilíndricas inicialmente e o projetamos na representação cartesiana. É possível fazer a análise novamente, ou inverter diretamente a matriz  $U$  de forma que:

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = U^{-1} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

Vamos agora utilizar um princípio físico: o vetor  $\mathbf{A}$  possui a mesma magnitude, não importa a representação, ou seja, a matriz de transformação deve preservar a norma do vetor. Isso só pode ser feito através de uma matriz unitária, que é aquela, em que a transposta conjugada é igual à inversa da matriz original, ou:

$$UU^\dagger = U^\dagger U = 1 \rightarrow U^{-1} = U^\dagger$$

e o sinal  $\dagger$  denota transposta conjugada.

Como os vetores unitários que estamos utilizando são todos reais, a transposta conjugada acaba sendo simplesmente a transposta.

$$U(\text{Ret} \rightarrow \text{Cil}) = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_x \cdot \hat{\mathbf{a}}_\rho & \hat{\mathbf{a}}_y \cdot \hat{\mathbf{a}}_\rho & \hat{\mathbf{a}}_z \cdot \hat{\mathbf{a}}_\rho \\ \hat{\mathbf{a}}_x \cdot \hat{\mathbf{a}}_\varphi & \hat{\mathbf{a}}_y \cdot \hat{\mathbf{a}}_\varphi & \hat{\mathbf{a}}_z \cdot \hat{\mathbf{a}}_\varphi \\ \hat{\mathbf{a}}_x \cdot \hat{\mathbf{a}}_z & \hat{\mathbf{a}}_y \cdot \hat{\mathbf{a}}_z & \hat{\mathbf{a}}_z \cdot \hat{\mathbf{a}}_z \end{pmatrix}$$

$$U(\text{Cil} \rightarrow \text{Ret}) = U^{-1}(\text{Ret} \rightarrow \text{Cil}) = U^\dagger(\text{Ret} \rightarrow \text{Cil}) = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_x \cdot \hat{\mathbf{a}}_\rho & \hat{\mathbf{a}}_x \cdot \hat{\mathbf{a}}_\varphi & \hat{\mathbf{a}}_x \cdot \hat{\mathbf{a}}_z \\ \hat{\mathbf{a}}_y \cdot \hat{\mathbf{a}}_\rho & \hat{\mathbf{a}}_y \cdot \hat{\mathbf{a}}_\varphi & \hat{\mathbf{a}}_y \cdot \hat{\mathbf{a}}_z \\ \hat{\mathbf{a}}_z \cdot \hat{\mathbf{a}}_\rho & \hat{\mathbf{a}}_z \cdot \hat{\mathbf{a}}_\varphi & \hat{\mathbf{a}}_z \cdot \hat{\mathbf{a}}_z \end{pmatrix}$$

Podemos generalizar o resultado acima, para a transformação entre dois sistemas de coordenadas  $S(\hat{\mathbf{a}}_1, \hat{\mathbf{a}}_2, \hat{\mathbf{a}}_3)$  e  $S'(\hat{\mathbf{a}}'_1, \hat{\mathbf{a}}'_2, \hat{\mathbf{a}}'_3)$ :

$$\begin{bmatrix} A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = U^\dagger \begin{bmatrix} A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

sendo

$$U(S \rightarrow S') = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}'_1 \cdot \hat{\mathbf{a}}_1 & \hat{\mathbf{a}}'_1 \cdot \hat{\mathbf{a}}_2 & \hat{\mathbf{a}}'_1 \cdot \hat{\mathbf{a}}_3 \\ \hat{\mathbf{a}}'_2 \cdot \hat{\mathbf{a}}_1 & \hat{\mathbf{a}}'_2 \cdot \hat{\mathbf{a}}_2 & \hat{\mathbf{a}}'_2 \cdot \hat{\mathbf{a}}_3 \\ \hat{\mathbf{a}}'_3 \cdot \hat{\mathbf{a}}_1 & \hat{\mathbf{a}}'_3 \cdot \hat{\mathbf{a}}_2 & \hat{\mathbf{a}}'_3 \cdot \hat{\mathbf{a}}_3 \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

e  $U^\dagger$  é a matriz transposta de  $U$ , que é igual a sua inversa.

Devemos agora calcular os produtos escalares entre os vetores unitários das coordenadas cilíndricas e cartesianas:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}_\rho \cdot \hat{\mathbf{a}}_x &= \cos \varphi & \hat{\mathbf{a}}_\rho \cdot \hat{\mathbf{a}}_y &= \sin \varphi & \hat{\mathbf{a}}_\rho \cdot \hat{\mathbf{a}}_z &= 0 \\ \hat{\mathbf{a}}_\varphi \cdot \hat{\mathbf{a}}_x &= -\sin \varphi & \hat{\mathbf{a}}_\varphi \cdot \hat{\mathbf{a}}_y &= \cos \varphi & \hat{\mathbf{a}}_\varphi \cdot \hat{\mathbf{a}}_z &= 0 \\ \hat{\mathbf{a}}_z \cdot \hat{\mathbf{a}}_x &= 0 & \hat{\mathbf{a}}_z \cdot \hat{\mathbf{a}}_y &= 0 & \hat{\mathbf{a}}_z \cdot \hat{\mathbf{a}}_z &= 1 \end{aligned} \quad (2.57)$$

e então podemos escrever explicitamente a matriz  $U(\text{Ret} \rightarrow \text{Cil})$ , cuja transposta dá a transformação inversa:

$$U(\text{Ret} \rightarrow \text{Cil}) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

$$U(\text{Cil} \rightarrow \text{Ret}) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

Com base nestas matrizes agora é fácil escrever os vetores unitários de uma base, em termos da outra:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}_\rho &= \cos \varphi \hat{\mathbf{a}}_x + \sin \varphi \hat{\mathbf{a}}_y \\ \hat{\mathbf{a}}_\varphi &= -\sin \varphi \hat{\mathbf{a}}_x + \cos \varphi \hat{\mathbf{a}}_y \\ \hat{\mathbf{a}}_z &= \hat{\mathbf{a}}_z \end{aligned} \quad (2.60)$$

ou

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}_x &= \cos \varphi \hat{\mathbf{a}}_\rho - \sin \varphi \hat{\mathbf{a}}_\varphi \\ \hat{\mathbf{a}}_y &= \sin \varphi \hat{\mathbf{a}}_\rho + \cos \varphi \hat{\mathbf{a}}_\varphi \\ \hat{\mathbf{a}}_z &= \hat{\mathbf{a}}_z \end{aligned} \quad (2.61)$$

Como o procedimento foi aqui demonstrado, não iremos dar detalhes para as próximas relações de transformação, ficando como exercício para o aluno interessado e apenas os principais resultados serão mostrados.

### Transformação entre coordenadas cartesianas e esféricas

Para a transformação de coordenadas  $(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, \varphi)$ , temos:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (2.62)$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right) \quad (2.63)$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (2.64)$$

ou  $(r, \theta, \varphi) \rightarrow (x, y, z)$ :

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \quad (2.65)$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi \quad (2.66)$$

$$z = r \cos \theta \quad (2.67)$$

enquanto para a matriz  $U$  temos

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = U^\dagger \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

$$U(\text{Ret} \rightarrow \text{Esf}) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \quad (2.69)$$

$$U(\text{Esf} \rightarrow \text{Ret}) = \begin{pmatrix} \sin \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

### Transformação entre coordenadas cilíndricas e esféricas

Para a transformação de coordenadas  $(\rho, \varphi, z) \rightarrow (r, \theta, \varphi)$ , temos:

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \quad (2.71)$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right) \quad (2.72)$$

$$\varphi = \varphi \quad (2.73)$$

ou  $(r, \theta, \varphi) \rightarrow (\rho, \varphi, z)$ :

$$\rho = r \sin \theta \quad (2.74)$$

$$\varphi = \varphi \quad (2.75)$$

$$z = r \cos \theta \quad (2.76)$$

enquanto para a matriz  $U$  temos

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} = U^\dagger \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

$$U(\text{Cil} \rightarrow \text{Esf}) = \begin{pmatrix} \sin \theta & 0 & \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.78)$$

$$U(\text{Cil} \rightarrow \text{Esf}) = \begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \quad (2.79)$$

Apenas como um último comentário, o módulo do determinante das matrizes de transformação é 1, significando que os vetores preservam a norma.

## 2.4 Cálculo Vetorial Diferencial e Integral: Teoremas

Os vetores, além das operações de somas e produtos, podem ser integrados, ou diferenciados, conforme será mostrado a seguir.

### 2.4.1 Diferenciação de Vetores

De maneira simplista, a diferenciação de um vetor é definida como:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(x_i + \Delta x_i) - \mathbf{A}(x_i)}{\Delta x_i} \quad (2.80)$$

muito embora uma discussão sobre as formalidades e dificuldades adicionais com a definição possam ser encontradas na literatura. Aqui damos algumas propriedades de diferenciação de vetores:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i} = \frac{\partial A_x}{\partial x_i} \hat{\mathbf{a}}_x + \frac{\partial A_y}{\partial x_i} \hat{\mathbf{a}}_y + \frac{\partial A_z}{\partial x_i} \hat{\mathbf{a}}_z \quad (2.81)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_i} \quad (2.82)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\Phi \mathbf{A}) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \mathbf{A} + \Phi \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i} \quad (2.83)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i} \cdot \mathbf{B} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_i} \cdot \mathbf{A} \quad (2.84)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_i} \quad (2.85)$$

$$(2.86)$$

Se decomposmos o vetor em sua magnitude e direção,  $\mathbf{A} = A \hat{\mathbf{a}}_A$ , temos:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (A \hat{\mathbf{a}}_A) = \frac{\partial A}{\partial x_i} \hat{\mathbf{a}}_A + A \frac{\partial \hat{\mathbf{a}}_A}{\partial x_i} \quad (2.87)$$

Acima  $x_i$  pode representar qualquer coordenada cartesiana, ou o tempo.

### 2.4.2 Integração de Vetores

É usual também em Eletromagnetismo aparecerem integrais, que são de caminho, de superfície (dupla) ou de volume (tripla). De maneira geral temos:

$$\int \mathbf{A} dx_i = \int A_x dx_i \hat{\mathbf{a}}_x + \int A_y dx_i \hat{\mathbf{a}}_y + \int A_z dx_i \hat{\mathbf{a}}_z \quad (2.88)$$

$$\int \mathbf{A} dS = \int A_x dS \hat{\mathbf{a}}_x + \int A_y dS \hat{\mathbf{a}}_y + \int A_z dS \hat{\mathbf{a}}_z \quad (2.89)$$

onde  $dS$  aqui pode denotar uma integral de superfície ou de volume.

#### Integrais de Caminhos

São representadas por:

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_C A_x dx + \int_C A_y dy + \int_C A_z dz \quad (2.90)$$

e o resultado destas integrais de vetores é sempre um escalar, haja vista o produto escalar. Para um caminho fechado, que encerre uma determinada superfície  $S$  denotamos a integral acima por  $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ .

#### Integrais de Superfície

São integrais duplas, que no caso mostrado abaixo redundarão em um escalar:

$$\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_S A_x dS_x + \int_S A_y dS_y + \int_S A_z dS_z \quad (2.91)$$

onde uma superfície orientada, ou vetor área, sempre aponta para fora da superfície em questão, por isso, em coordenadas cartesianas temos:

$$d\mathbf{S} = dS_x \hat{\mathbf{a}}_x + dS_y \hat{\mathbf{a}}_y + dS_z \hat{\mathbf{a}}_z$$

sendo:

$$dS_x = dydz \quad , \quad dS_y = dx dz \quad , \quad dS_z = dx dy$$

Uma integral de superfície fechada, envolvendo um volume total  $V$  é denotada por  $\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ .

### Integrais de Volume

São integrais triplas, onde o elemento  $dV$  ou ainda denotado por  $d^3x$  é um escalar, diferentemente do elemento diferencial de comprimento e do elemento diferencial de superfície. A integral de um escalar em um volume resulta em um escalar, enquanto a de um vetor resulta em um vetor, como exemplo vamos ter:

$$\int_V \mathbf{A} dV = \int_V A_x dV \hat{\mathbf{a}}_x + \int_V A_y dV \hat{\mathbf{a}}_y + \int_V A_z dV \hat{\mathbf{a}}_z \quad (2.92)$$

$$\int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} dV = \int_V A_x B_x dV + \int_V A_y B_y dV + \int_V A_z B_z dV \quad (2.93)$$

A seguir alguns teoremas e definições importantes serão demonstrados e discutidos.

### 2.4.3 O operador Nabla

Define-se o operador Nabla ( $\nabla$ ) como um operador diferencial vetorial, que pode ser representado de forma simples em coordenadas cartesianas, conforme mostrado abaixo:

$$\nabla = \hat{\mathbf{a}}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{a}}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{a}}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.94)$$

e que é útil para simplificar a notação das operações com vetores.

### 2.4.4 Derivada Direcional: Gradiente

Quando temos uma função escalar  $\Phi$  qualquer, esta é representada apenas por uma magnitude, entretanto, muitas vezes é importante conhecer não somente a função escalar  $\Phi$ , mas sim sua variação de ponto para ponto. Esta variação não é idêntica em todas as direções e portanto adquire um caráter vetorial, já que precisa ser caracterizada pela magnitude da variação, e pela direção da variação. Define-se então, para uma direção  $\hat{\mathbf{n}} = n_x \hat{\mathbf{a}}_x + n_y \hat{\mathbf{a}}_y + n_z \hat{\mathbf{a}}_z$  arbitrária, a variação da função:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} n_y + \frac{\partial \Phi}{\partial z} n_z$$

o que podemos escrever em termos do operador nabla, na forma:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = (\nabla \Phi) \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (2.95)$$

Nesse sentido definimos o gradiente de uma função escalar: é a derivada direcional na direção de máxima variação da função  $\Phi$ . De forma mais simplista, o gradiente é uma maneira de quantificar a variação de  $\Phi$  no espaço dando direção e sentido para a variação.

### 2.4.5 Fluxo de um Vetor, Divergência e Teorema de Gauss

Define-se o fluxo de um vetor através de uma superfície  $S$ , de área total  $s$  como a integral abaixo:

$$\Psi = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.96)$$

Para dar um exemplo, vamos considerar a vazão de um líquido, através de uma superfície  $\mathbf{S}$ . A velocidade do líquido sendo  $\mathbf{v}$  e dependente da posição na superfície, nos dá para a vazão (em unidades de volume/unidade de tempo) a seguinte expressão:

$$Q = \int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$$

Existe uma outra quantidade importante, quando consideramos uma superfície fechada, englobando um volume total  $V$ , e queremos saber o fluxo total de um vetor  $\Psi_{total}$ , que entra ou sai do volume. Este fluxo é obtido pela integração da superfície total que engloba o volume, ou seja:

$$\Psi_{total} = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.97)$$

Daqui surge o conceito de divergência de um vetor, que representa a quantidade de fluxo que deixa um volume  $\Delta V$  infinitesimal, por unidade de volume:

$$\text{div } \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.98)$$

É importante observar que o fluxo total que deixa uma superfície fechada está associada a um volume finito. Quando definimos a divergência do vetor, que é uma medida do fluxo de um vetor, transformamos a medida de fluxo, em uma medida puntual, dado que tratamos de um volume infinitesimal, e por isso a superfície que o encerra também é infinitesimal.

Consideremos agora a integral de fluxo total

$$\Psi_T = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S},$$

em um cubo infinitesimal de volume  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ . Como havíamos mencionado, o vetor  $\mathbf{A}$  independe do sistema adotado, e por conveniência, adotamos o sistema cartesiano. Suponha que o centro desse cubo infinitesimal está no ponto  $P = (x_0, y_0, z_0)$ , e o vetor  $\mathbf{A}(x, y, z)$  em  $P$  seja conhecido.

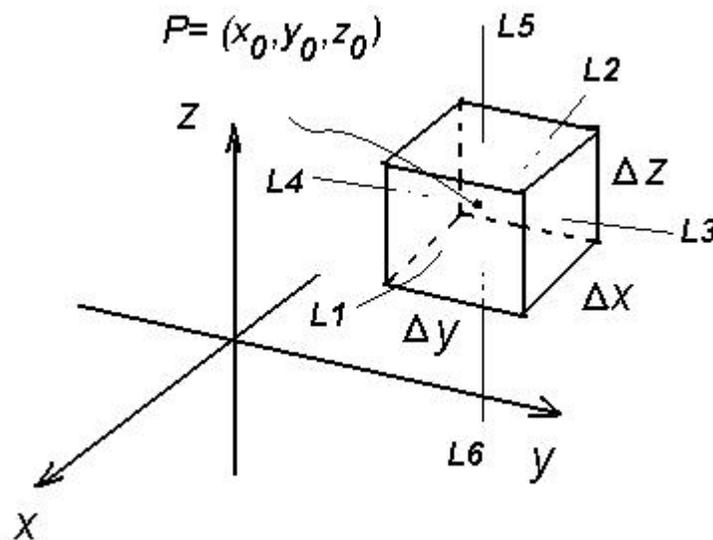


Figure 2.11: Cubo Infinitesimal

Vamos integrar sobre todas as faces do cubo envolvendo o volume  $\Delta V$  para obter o fluxo total:

$$\begin{aligned}\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= \int_{L1} A_x(x, y, z) dS_x - \int_{L2} A_x(x, y, z) dS_x + \\ &+ \int_{L3} A_y(x, y, z) dS_y - \int_{L4} A_y(x, y, z) dS_y + \\ &+ \int_{L5} A_z(x, y, z) dS_z - \int_{L6} A_z(x, y, z) dS_z\end{aligned}$$

sendo  $dS_x = dy dz \approx \Delta y \Delta z$ ,  $dS_y = dz dx \approx \Delta z \Delta x$  e  $dS_z = dx dy \approx \Delta x \Delta y$ .  $L1$  a  $L6$  são as faces do cubo, conforme mostrado na Figura 2.4.5. Podemos expandir agora o campo  $\mathbf{A}$ , em cada uma das faces, em termos de séries de Taylor, até primeira ordem apenas:

$$\begin{aligned}A_x(x, y, z) \Big|_{L1} &= A_x(x_0, y_0, z_0) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \dots \\ A_x(x, y, z) \Big|_{L2} &= A_x(x_0, y_0, z_0) - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \dots \\ A_y(x, y, z) \Big|_{L3} &= A_y(x_0, y_0, z_0) + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial A_y}{\partial y} + \dots \\ A_y(x, y, z) \Big|_{L4} &= A_y(x_0, y_0, z_0) - \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial A_y}{\partial y} + \dots \\ A_z(x, y, z) \Big|_{L5} &= A_z(x_0, y_0, z_0) + \frac{\Delta z}{2} \frac{\partial A_z}{\partial z} + \dots \\ A_z(x, y, z) \Big|_{L6} &= A_z(x_0, y_0, z_0) - \frac{\Delta z}{2} \frac{\partial A_z}{\partial z} + \dots\end{aligned}$$

Se  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  e  $\Delta z$  são infinitésimos, termos de ordem maior são insignificantes. Temos então, a soma de todas as integrais:

$$\begin{aligned}\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= \left( A_x(x_0, y_0, z_0) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial A_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z - \left( A_x(x_0, y_0, z_0) - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial A_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z + \\ &+ \left( A_y(x_0, y_0, z_0) + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial A_y}{\partial y} \right) \Delta z \Delta x - \left( A_y(x_0, y_0, z_0) - \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial A_y}{\partial y} \right) \Delta z \Delta x + \\ &+ \left( A_z(x_0, y_0, z_0) + \frac{\Delta z}{2} \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y - \left( A_z(x_0, y_0, z_0) - \frac{\Delta z}{2} \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y\end{aligned}$$

cujos resultados da soma é dado por:

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.99)$$

e para esse fluxo em um volume infinitesimal, conforme havíamos definido, temos a divergência:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

efetuando o limite, já que o termo em  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$  se simplifica, e utilizando o operador nabla, temos

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \quad (2.100)$$

Agora segue um importante teorema, chamado teorema de Gauss, que é muito útil em Eletromagnetismo. Havíamos tomado o volume  $\Delta V$  como infinitesimal, para o cubo centrado em  $(x_0, y_0, z_0)$ , mas podemos tomar um volume arbitrariamente grande agora, somando sucessivos volumes infinitesimais, e sucessivas superfícies que contenham esses volumes. De (2.98), podemos escrever, para o  $i$ -ésimo infinitésimo de volume  $\Delta V_i$ :

$$\nabla \cdot \mathbf{A} \Delta V_i = \oint_{S_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

Para o volume total particionado na forma  $\Delta V = V/N$ , queremos integrar o fluxo total, então:

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^N \oint_{S_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^N \nabla \cdot \mathbf{A} \Delta V_i$$

o que resulta em:

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int \nabla \cdot \mathbf{A} dV \quad (\text{Teorema de Gauss}) \quad (2.101)$$

## 2.4.6 Circulação de um vetor, Rotacional e Teorema de Stokes

Da mesma forma que definimos o fluxo de um vetor, podemos definir a circulação de um vetor  $C$ , que é o uma medida de como o vetor se encurva ou rotaciona em uma dada região do espaço:

$$C = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.102)$$

que significa que a circulação do vetor  $\mathbf{A}$  é igual à integral em um caminho fechado  $C$  do vetor vezes o elemento diferencial de deslocamento. Se um vetor não rotaciona em uma região evidentemente que a integral de circulação será nula. Esse é o caso de um vetor constante em todo o espaço.

Mas o conceito de circulação pode envolver um caminho arbitrariamente grande. O que queremos é um caminho infinitesimal, fechado, de modo a dar para a circulação uma interpretação ponto a ponto. Um caminho qualquer  $C$  sempre encerra uma superfície  $S$ . Se fizermos  $C$  infinitesimal temos uma pequena superfície  $\Delta S$  encerrada pelo caminho, e então podemos definir o rotacional de um vetor, que é uma medida da rotacionalidade de um vetor, ponto a ponto:

$$\text{rot } \mathbf{A} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \hat{\mathbf{s}} \quad (2.103)$$

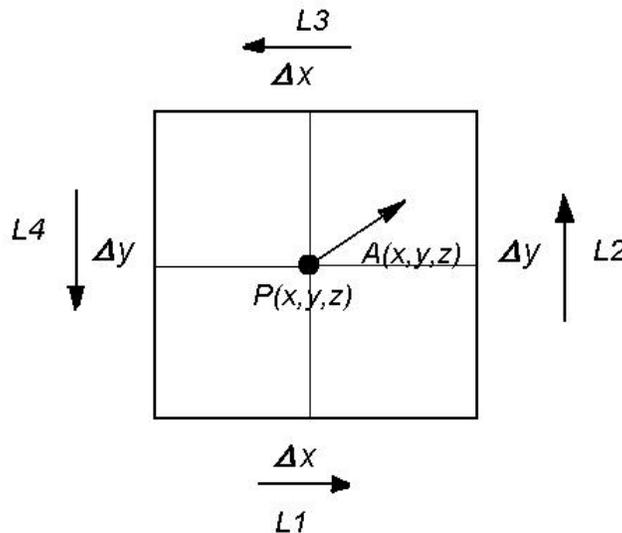


Figure 2.12: Caminho Infinitesimal

Vamos fazer um procedimento análogo ao que foi feito na dedução do teorema de Gauss. Consideremos por simplicidade, um caminho infinitesimal, conforme mostrado na Figura 2.4.6, cuja superfície orientada aponta na direção  $\hat{\mathbf{z}}$  e tem magnitude  $\Delta S = \Delta x \Delta y$ . A integral de circulação total é dada por

$$C = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{L1} A_x dx - \int_{L3} A_x dx + \int_{L2} A_y dy - \int_{L4} A_y dy \quad (2.104)$$

Vamos expandir os campos  $A_x$  e  $A_y$  em séries de Taylor até primeira ordem:

$$\begin{aligned} A_x(x, y - \Delta y/2, z) \Big|_{L1} &= A_x(x, y, z) - \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial A_x}{\partial y} + \dots \\ A_x(x, y + \Delta y/2, z) \Big|_{L1} &= A_x(x, y, z) + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial A_x}{\partial y} + \dots \\ A_y(x + \Delta x/2, y, z) \Big|_{L2} &= A_y(x, y, z) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial A_y}{\partial x} + \dots \\ A_y(x - \Delta x/2, y, z) \Big|_{L4} &= A_y(x, y, z) - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial A_y}{\partial x} + \dots \end{aligned}$$

e substituindo, isto na integral de circulação:

$$\begin{aligned} C = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} &= \left[ \left( A_x(x, y, z) - \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \left( A_x(x, y, z) + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \right] \Delta x + \\ &\left[ \left( A_y(x, y, z) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) - \left( A_y(x, y, z) - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) \right] \Delta y = \\ &= \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y = \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \Delta S \end{aligned} \quad (2.105)$$

substituindo este resultado na expressão (2.103) temos:

$$(\text{rot } \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{a}}_z = \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

Como especificamos a superfície para ter direção  $z$ , tivemos este resultado. Utilizando o mesmo procedimento é possível considerar em um cubo infinitesimal, as outras superfícies orientadas, sendo o resultado:

$$\text{rot } \mathbf{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{a}}_x + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{a}}_y + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{a}}_z$$

Também aqui é possível utilizar o operador nabla, para colocar na forma:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{a}}_x + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{a}}_y + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{a}}_z \quad (2.106)$$

O rotacional é dado, em outros sistemas coordenados, no formulário.

Agora utilizando novamente (2.103) podemos deduzir o teorema de Stokes. Uma vez que a definição de rotacional é dada, se quisermos, agora a circulação em um caminho arbitrariamente grande, podemos somar sobre caminhos infinitesimais, sendo a superfície encerrada total  $S$  em um caminho qualquer, particionada em  $N$  partes infinitesimais,  $N \rightarrow \infty$ . Formalmente temos para uma circulação infinitesimal:

$$C_i = \text{rot } \mathbf{A} \cdot \Delta S_i \hat{\mathbf{a}}_i = \oint_{L_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_i$$

Somando sobre os  $N$  infinitésimos temos, com  $\Delta \mathbf{S}_i = \Delta S_i \hat{\mathbf{a}}_i$ :

$$C = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^N C_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^N \text{rot } \mathbf{A} \cdot \Delta S_i \hat{\mathbf{a}}_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^N \oint_{L_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_i$$

de onde resulta o seguinte teorema, tão importante quanto o teorema de Gauss:

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.107)$$

### 2.4.7 Outras Identidades Importantes

Algumas identidades importantes em Eletromagnetismo, que serão muito utilizadas nos capítulos futuros são mostradas abaixo, e fica para o leitor a demonstração, como exercício.

$$\nabla \times (\nabla \Phi) = 0 \quad (2.108)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (2.109)$$

As duas expressões acima afirmam que o rotacional de um campo gerado a partir do gradiente de um escalar é nulo, ou seja, o campo é irrotacional. A segunda identidade diz que o divergente do rotacional de um vetor é sempre nulo. Como o rotacional de um vetor gera um campo rotacional, cujas linhas se fecham, é natural que o seu divergente seja nulo.

Além disso temos a definição do operador Laplaciano  $\nabla^2$ , que é definido para um escalar como sendo:

$$\nabla^2 \Phi = \nabla \cdot \nabla \Phi = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi \quad (2.110)$$

acima mostramos em coordenadas cartesianas a expressão explícita do operador laplaciano, mas em outras coordenadas é dado no formulário. Para vetores, em coordenadas cartesianas temos:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla^2 A_x \hat{\mathbf{a}}_x + \nabla^2 A_y \hat{\mathbf{a}}_y + \nabla^2 A_z \hat{\mathbf{a}}_z \quad (2.111)$$

mas apenas em cartesianas a expressão é tão simples, pois em outros sistemas a expressão deve ser obtida de outra maneira. Temos então uma outra identidade, da qual, em qualquer sistema coordenado podemos calcular o laplaciano de um vetor:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (2.112)$$

que também será amplamente utilizada. Outras expressões e identidades são mostradas no formulário, no início da apostila.

## 2.5 Números Complexos e Fasores

Em Eletromagnetismo é conveniente trabalhar com números complexos e fasores. Dado um número complexo temos alguns resultados importantes abaixo:

$$\Psi = \Psi_R + i\Psi_I = |\Psi| \exp(i\theta_\Psi) , \quad (2.113)$$

$$|\Psi| = \sqrt{\Psi_R^2 + \Psi_I^2} , \quad (2.114)$$

$$\theta_\Psi = \arctan\left(\frac{\Psi_I}{\Psi_R}\right) , \quad (2.115)$$

$$\Psi^* = \Psi_R - i\Psi_I = |\Psi| \exp(-i\theta_\Psi) , \quad (2.116)$$

$$|\Psi| = \sqrt{\Psi^* \Psi} , \quad (2.117)$$

$$\Psi_R = \Re(\Psi) = \frac{\Psi + \Psi^*}{2} , \quad (2.118)$$

$$\Psi_I = \Im(\Psi) = \frac{\Psi - \Psi^*}{2i} , \quad (2.119)$$

$$\exp(\pm i\theta) = \cos \theta \pm i \sin \theta , \quad (2.120)$$

onde acima o sinal \* denota conjugação complexa,  $\Psi$  é uma quantidade complexa qualquer,  $\Psi_R$  a parte real de  $\Psi$  e  $\Psi_I$  a parte imaginária. Perceba que  $|e^{i\theta}| = 1$ .

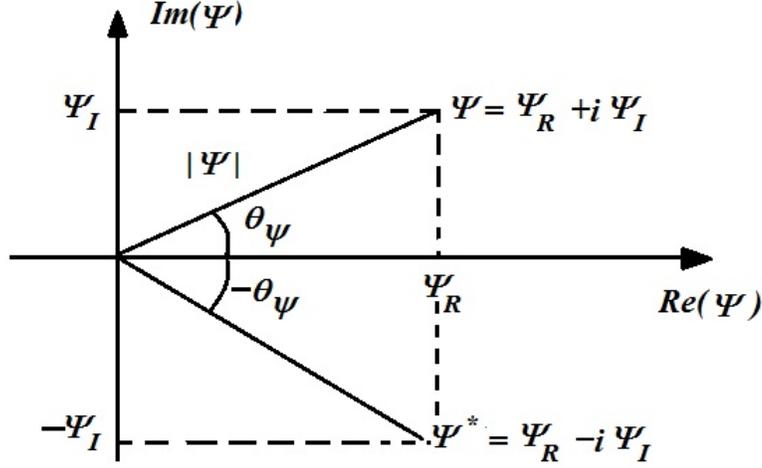


Figure 2.13: Representação no Plano Complexo:  $\Psi = \Psi_R + i\Psi_I = |\Psi| \exp(i\theta_\Psi)$ .

Em regime senoidal ou harmônico, analogamente aos Circuitos Elétricos, temos o regime  $\mathbf{A}(x, y, z, t) = \mathbf{A}(x, y, z) \cos(\omega t)$  ou  $\mathbf{A}(x, y, z, t) = \mathbf{A}(x, y, z) \sin(\omega t)$ , ou combinações dessas possibilidades. Para representar a primeira alternativa podemos fazer:

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = \Re(\mathbf{A}(x, y, z) \exp(i\omega t)) , \quad (2.121)$$

enquanto para a segunda temos:

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = \Re(-i\mathbf{A}(x, y, z) \exp(i\omega t)) . \quad (2.122)$$

De uma forma geral, consideramos  $\mathbf{A}(x, y, z)$  um fasor, ou seja, um vetor com cada componente sendo representada por um número complexo, sendo o campo vetorial real dado por:

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = \frac{\mathbf{A}(x, y, z) \exp(i\omega t) + \mathbf{A}^*(x, y, z) \exp(-i\omega t)}{2} , \quad (2.123)$$

com

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \mathbf{A}_R(x, y, z) + i\mathbf{A}_I(x, y, z) .$$

Podemos trabalhar portanto, com o fasor  $\mathbf{A}(x, y, z)$ . O produto de dois vetores será dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(x, y, z, t) \cdot \mathbf{B}(x, y, z, t) &= \Re[\mathbf{A} \exp(i\omega t)] \cdot \Re[\mathbf{B} \exp(i\omega t)] = \\ &= \frac{\mathbf{A}(x, y, z) \exp(i\omega t) + \mathbf{A}^*(x, y, z) \exp(-i\omega t)}{2} \cdot \frac{\mathbf{B}(x, y, z) \exp(i\omega t) + \mathbf{B}^*(x, y, z) \exp(-i\omega t)}{2} \\ \mathbf{A}(x, y, z, t) \cdot \mathbf{B}(x, y, z, t) &= \frac{1}{4}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^* + \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{B}) + \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} e^{i2\omega t} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^* e^{-i2\omega t}}{4} \end{aligned}$$

A expressão acima representa o produto de dois vetores que dependem do tempo de forma harmônica, e por isso é usual considerar a média sobre um período, e nesse caso os termos de variação rápida  $e^{\pm 2i\omega t}$  desaparecem na média sobre o período:

$$\langle F(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt , \quad (2.124)$$

temos então:

$$\langle \mathbf{A}(x, y, z, t) \cdot \mathbf{B}(x, y, z, t) \rangle = \frac{1}{2} \Re [\mathbf{A}(x, y, z) \cdot \mathbf{B}^*(x, y, z)] . \quad (2.125)$$

O resultado vale para outras quantidades, como o produto vetorial, ou seja:

$$\langle \mathbf{A}(x, y, z, t) \times \mathbf{B}(x, y, z, t) \rangle = \frac{1}{2} \Re [\mathbf{A}(x, y, z) \times \mathbf{B}^*(x, y, z)] . \quad (2.126)$$

## 2.6 Transformadas de Fourier

Vamos definir aqui o par de transformadas de Fourier que comumente utilizamos:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp(-i\omega t) f(t) , \quad (2.127)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp(i\omega t) F(\omega) , \quad (2.128)$$

e de forma mais geral ainda, para uma função ou um vetor  $\mathbf{A}$  ,

$$\mathbf{A}(\mathbf{k}, \omega) = \int d^3x \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) , \quad (2.129)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp[-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \mathbf{A}(\mathbf{k}, \omega) , \quad (2.130)$$

onde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$  e a notação utilizada é:

$$\int d^3x = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz$$

$$\int d^3k = \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} dk_z$$

Para um escalar também temos a transformada generalizada, basta substituir o vetor pelo escalar nas expressões acima. Algumas propriedades importantes de transformadas de Fourier, que também podem ser encontradas na literatura corrente, são mostradas abaixo:

$$\mathcal{F}(\exp(i\omega_0 t) f(t)) = F(\omega - \omega_0) \quad (2.131)$$

$$\mathcal{F}[(f(t) * g(t))] = \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau\right] = F(\omega)G(\omega) \quad (2.132)$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) = (i\omega)^n F(\omega) \quad (2.133)$$

onde  $\mathcal{F}$  denota transformação de Fourier da função. Importante também é a identidade de Parseval, mostrado abaixo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt |f(t)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |F(\omega)|^2 , \quad (2.134)$$

Tabelas de pares de transformadas podem ser encontradas na literatura corrente.

## 2.7 Ponto Campo, Ponto Fonte e Função Delta de Dirac

Como último tópico neste capítulo, vamos definir como notação que os pontos de observação dos efeitos eletromagnéticos, ou ponto campo, sejam denotados por  $\mathbf{r}$  (ou  $\mathbf{x}$ ) e os pontos de fonte do campo, por  $\mathbf{r}'$  (ou  $\mathbf{x}'$ ). Dessa

forma:

$$\mathbf{r} = x \hat{\mathbf{a}}_x + y \hat{\mathbf{a}}_y + z \hat{\mathbf{a}}_z \quad (2.135)$$

$$\mathbf{r}' = x' \hat{\mathbf{a}}_x + y' \hat{\mathbf{a}}_y + z' \hat{\mathbf{a}}_z \quad (2.136)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = (x - x')\hat{\mathbf{a}}_x + (y - y')\hat{\mathbf{a}}_y + (z - z')\hat{\mathbf{a}}_z \quad (2.137)$$

$$|\mathbf{R}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \quad (2.138)$$

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{R} \right) = -4\pi\delta^3(\mathbf{R}) \quad (2.139)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{R} = 3 \quad \nabla \times \mathbf{R} = 0 \quad (2.140)$$

$$\nabla \left( \frac{1}{R} \right) = -\frac{\mathbf{R}}{R^3} \quad \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) = \frac{\mathbf{R}}{R^3} \quad (2.141)$$

onde  $\nabla$  opera em  $\mathbf{r}$  e  $\nabla'$  em  $\mathbf{r}'$  e as expressões devem ser demonstradas pelo leitor interessado, como exercício. Na equação (2.139) aparece a função delta de Dirac generalizada para o espaço tridimensional. A função delta de Dirac, denotada por  $\delta(x - x_0)$  é definida conforme a Figura 2.14 no limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

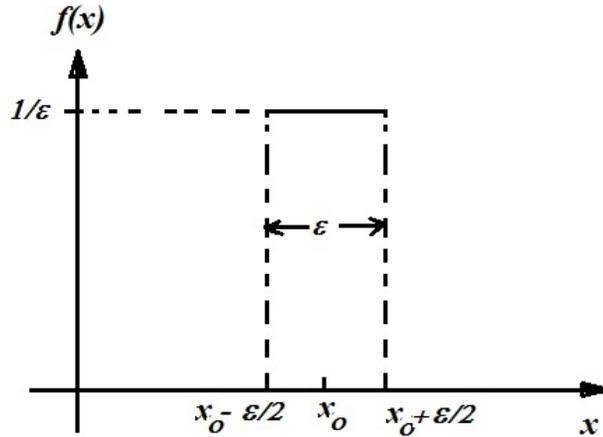


Figure 2.14: Função Delta de Dirac: próximo de  $x = x_0$  a função é retangular, tem altura  $1/\varepsilon$  e largura  $\varepsilon$  em torno de  $x_0$ . Observe que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x = x_0) \rightarrow \infty$  enquanto a largura tende para zero, mas a área da função é unitária.

Define-se então:

$$\begin{aligned} \delta(x - x_0) &= 0, \text{ se } x \neq x_0 \\ &= \infty, \text{ se } x = x_0 \end{aligned} \quad (2.142)$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = 1, \quad (2.143)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x') \delta(x' - x) dx' = f(x), \quad (2.144)$$

Então podemos estender o conceito ao espaço tridimensional na forma:

$$\int dV \delta^3(\mathbf{r}) = 1 \quad (2.145)$$

$$\int dV' \phi(\mathbf{r}') \delta^3(\mathbf{R}) = \phi(\mathbf{r}) \quad (2.146)$$

$$\int dV' \mathbf{A}(\mathbf{r}') \delta^3(\mathbf{R}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (2.147)$$

sendo  $dV$  o elemento diferencial de volume,  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  e a função delta de Dirac  $\delta^3(\mathbf{R}) = \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')$ . As integrais acima devem ser realizadas em todo o espaço, de  $-\infty$  até  $\infty$  nas três variáveis cartesianas  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$ . Podemos entender a função delta tridimensional como a densidade de uma carga puntual no espaço. Perceba que a função  $\delta^3(\mathbf{R})$  deve valer zero em todo o espaço, exceto em  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = 0$ , onde ela vale infinito. Veja que a função de densidade espacial de uma carga puntual obedece exatamente essas propriedades, ou seja, a densidade de carga é zero em todo o espaço, exceto onde a carga está colocada. Mas nesse ponto há uma carga finita em um volume que tende a zero, dando à densidade o valor infinito.

## 2.8 Referências Deste Capítulo

- 2.1 Matthew N.O. Sadiku, *Elementos do Eletromagnetismo* (Ed. Bookman, Porto Alegre, 5a. Ed, 2005).
- 2.2 John D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (Wiley and Sons, New York, 3rd. Ed., 1998).
- 2.3 William H. Hayt, *Eletromagnetismo* (LTC, 6a Ed.).
- 2.4 Erwin Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics* (Wiley, 1988, 6th ed.).
- 2.5 Erwin Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications* (Wiley, 1989).
- 2.6 George B. Arfken, Hans J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists* (Elsevier, 2013, 7th Ed.)

## 2.9 Problemas Propostos

- 1) Uma partícula de carga  $q$  e massa  $m$  sofre a ação de um campo magnético constante  $\mathbf{B} = (0, 0, B)\mathbf{T}$ . Dadas as condições iniciais  $\mathbf{r}_0 = (A, 0, 0)\mathbf{m}$  em  $t = 0\mathbf{s}$  e  $\mathbf{v}_0 = (0, v_0, 0)$  encontre as equações de movimento e resolva  $\mathbf{r}(t)$  e  $\mathbf{v}(t)$  para todo o tempo  $t$ . Qual é a trajetória da partícula? Faça um esboço gráfico.

Dica: A força de Lorentz que age sobre a partícula é dada por:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) ,$$

onde  $\mathbf{E}$  é o campo elétrico e  $\mathbf{B}$  é o campo magnético na posição em que a partícula se encontra.

- 2) Escreva a equação de ondas e a equação da difusão e discuta suas diferenças, dando exemplos de campos que satisfazem uma ou outra dessas equações.
- 3) Seja  $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$  o vetor que une os pontos de medida de um campo  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  e um ponto na região fonte  $\mathbf{x}' = (x', y', z')$ .
  - a) Represente  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}'$  graficamente.
  - b) Calcule a divergência e o rotacional de  $\mathbf{R}$ .
  - c) Seja  $R$  o módulo de  $\mathbf{R}$ , determine:

$$\nabla(R) , \nabla\left(\frac{1}{R}\right) , \nabla \times (\nabla R)$$

d) Mostre que

$$\oint_{a(R)} \mathbf{R} \cdot d\mathbf{a} = 3V ,$$

sendo  $d\mathbf{a}$  o vetor diferencial de superfície.

e) Demonstre que

$$\oint \nabla \left( \frac{1}{R} \right) \cdot d\mathbf{a} = -4\pi = \int_{V(a)} \nabla^2 \left( \frac{1}{R} \right) dV ,$$

isso mostra que

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{R} \right) = -4\pi\delta^3(\mathbf{R}) = \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')$$

sendo  $\delta(a-b)$  a função impulso ou delta de Dirac.

4) Demonstre explicitamente, por aplicação das derivadas, ou utilizando os teoremas de Gauss e Stokes que:

$$\nabla \times (\nabla\Phi) = 0 \quad (2.148)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (2.149)$$

Qual é a versão integral das duas identidades vetoriais acima (utilize os teoremas de Gauss e Stokes apropriadamente)?

5) Para um número complexo qualquer

$$\psi = \beta + i\alpha$$

onde  $i = \sqrt{-1}$ . Se preferir utilize  $j$  no lugar de  $i$ . a) represente o número no plano complexo.

b) determine o módulo desse número.

c) determine o ângulo formado pelo número com o eixo dos reais.

d) denotando conjugação complexa por  $*$ , o que é o conjugado  $\psi^*$ ? O que significa a conjugação complexa no plano complexo?

e) demonstre que  $|\psi|^2 = \psi\psi^*$ .

f) demonstre que o conjugado do produto de números complexos é o produto dos complexos conjugados. Para isso você pode demonstrar para dois números  $\psi_1$  e  $\psi_2$  e depois generalizar o resultado.

$$(\psi_1\psi_2)^* = \psi_1^*\psi_2^*$$

$$(\psi_1\psi_2\dots\psi_n)^* = \psi_1^*\psi_2^*\dots\psi_n^*$$

g) determine a ação do número  $i$  sobre um número complexo no plano complexo. Ou seja, qual o resultado de multiplicar um número complexo por  $i$ ? Qual o efeito de sucessivas operações  $i^n$  sobre o número complexo no plano complexo?

Obs.: em Matemática diz-se que a álgebra dos números complexos é isomórfica à dos vetores no plano, pois os vetores em duas dimensões,  $R^2$  tem as mesmas propriedades que um número complexo  $C$ .

6) Demonstre através da expansão em séries de Taylor que:

$$e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta ,$$

e verifique que para o módulo temos:

$$|e^{i\pm\theta}| = 1 ,$$

sendo  $\theta = \theta^*$ , ou seja,  $\theta$  é real. Que figura geométrica descreve o resultado acima no plano complexo? Mostre que qualquer número complexo pode ser expresso na forma:

$$\psi = \beta + i\alpha = |\psi|e^{i\theta_\psi}$$

onde

$$|\psi| = \sqrt{\beta^2 + \alpha^2}$$

$$\tan \theta_\psi = \frac{\alpha}{\beta}.$$

7) Verifique que:

$$\operatorname{Re}(\psi) = \beta = \frac{\psi + \psi^*}{2}$$

$$\operatorname{Im}(\psi) = \alpha = \frac{\psi - \psi^*}{2i}$$

$$\operatorname{Re}(-i\psi) = \operatorname{Im}(\psi)$$

$$\operatorname{Im}(-i\psi) = -\operatorname{Re}(\psi)$$

8) Escreva  $\cos \theta$  e  $\sin \theta$  em termos de exponenciais  $e^{i\theta}$  e  $e^{-i\theta}$ .

9) Verifique que

$$\operatorname{Re}(\psi_1\psi_2) \neq \operatorname{Re}(\psi_1)\operatorname{Re}(\psi_2)$$

Quais as condições para que a igualdade passe a valer?

- 10) Dados  $\psi_1 = 5 + 4i$  e  $\psi_2 = 4 - 7i$ , represente os números na forma polar, calculando seus módulos e ângulos com o eixo real. Determine : a) o produto  $\psi_1\psi_2$ .  
 b) o complexo conjugado do produto e o produto dos complexos conjugados.  
 c) a parte real do produto.  
 d) o produto das partes reais.

- 11) Demonstre que o produto de dois números complexos pode ser expresso como o produto dos módulos com fase resultante dada pela soma das fases:

$$\psi_1\psi_2 = |\psi_1||\psi_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

- 12) Podemos generalizar a álgebra dos números complexos para trabalhar com vetores. Tal procedimento é muito útil no regime harmônico onde no domínio do tempo um vetor que oscila com frequência  $\omega$ , pode ser escrito na forma geral:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}_1(\mathbf{x}) \cos(\omega t) + \mathbf{A}_2(\mathbf{x}) \sin(\omega t)$$

ou ainda

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re}(\mathbf{A}_c(\mathbf{x})e^{i\omega t}),$$

sendo  $\mathbf{A}_c(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_1(\mathbf{x}) - i\mathbf{A}_2(\mathbf{x})$ . Verifique que

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{A}_c(\mathbf{x})e^{i\omega t} + \mathbf{A}_c^*(\mathbf{x})e^{-i\omega t}}{2}.$$

Definido-se a média temporal de uma função qualquer sobre um período  $T$  na forma abaixo:

$$\langle F(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt \quad (2.150)$$

mostre que, para dois objetos  $f$  e  $g$  quaisquer submetidos a uma operação de multiplicação  $\otimes$  qualquer: obtém-se em regime harmônico:

$$\langle f(x, y, z, t) \otimes g(x, y, z, t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} [F(x, y, z) \otimes G^*(x, y, z)] \quad (2.151)$$

sendo  $F$  e  $G$  representações fasoriais de  $f$  e  $g$ . O resultado vale para quantidades vetoriais, como o produto escalar e vetorial, ou seja:

$$\langle \mathbf{A}(x, y, z, t) \cdot \mathbf{B}(x, y, z, t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} [\mathbf{A}(x, y, z) \cdot \mathbf{B}^*(x, y, z)] \quad (2.152)$$

$$\langle \mathbf{A}(x, y, z, t) \times \mathbf{B}(x, y, z, t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} [\mathbf{A}(x, y, z) \times \mathbf{B}^*(x, y, z)] \quad (2.153)$$

13) Dados os vetores abaixo:

$$\mathbf{E}(z, t) = 10 \cos(\omega t - kz) \hat{\mathbf{a}}_x - 6 \sin(\omega t - kz) \hat{\mathbf{a}}_y$$

$$\mathbf{H}(z, t) = \frac{1}{377} (6 \sin(\omega t - kz) \hat{\mathbf{a}}_x + 10 \cos(\omega t - kz) \hat{\mathbf{a}}_y)$$

Note que os vetores não dependem de  $x, y$ , ou seja, são constantes em um plano  $x, y$  definido para um dado instante  $(z, t)$ .

a) Encontre representações fasoriais para  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$ .

b) Determine o valor médio de  $\mathbf{E}(z, t) \times \mathbf{H}(z, t)$ , tanto realizando a integral de média dos vetores acima, quanto utilizando as representações fasoriais e os resultados demonstrados na questão anterior.

14) Dados os vetores em representação fasorial abaixo:

$$\mathbf{E} = [(5 + 4i) \hat{\mathbf{a}}_x + (3 - 4i) \hat{\mathbf{a}}_y] e^{i(\omega t - kz)}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{377} \hat{\mathbf{a}}_z \times \mathbf{E}$$

a) Determine a parte real de  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$ . Tome cuidado pois tanto o termo entre colchetes quanto a exponencial são números complexos e a parte real do produto é diferente do produto das partes reais!!

b) Encontre o valor médio de  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ .

15) Demonstre que:

$$\begin{aligned} \nabla [e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}] &= -i \mathbf{k} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} , \\ \nabla^2 [e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}] &= -\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} , \end{aligned}$$

sendo  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  o vetor posição e  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$  denominado vetor de onda.

Para uma função vetorial complexa na forma

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = -i \mathbf{k} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} ,$$

onde  $\mathbf{A}_0$  é independente de  $\mathbf{r}$  e do tempo  $t$  mostre que:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= -i \mathbf{k} \cdot \mathbf{A} , \\ \nabla \times \mathbf{A} &= -i \mathbf{k} \times \mathbf{A} . \end{aligned}$$

O que você pode concluir nesse caso?

- 16) Encontre a transformada de Fourier  $\tilde{\phi}(\mathbf{k})$  do potencial eletrostático  $\phi(\mathbf{r})$  gerado por uma carga puntual  $q$  localizada na origem, dado pela seguinte expressão:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r},$$

onde  $r = |\mathbf{r}|$



## Chapter 3

# Lei de Conservação de Carga e Equação da Continuidade

A ideia de conservação constitui um dos pilares da Física Moderna, contida essencialmente na famosa expressão atribuída a Lavousier de que na natureza "nada se perde, nada se cria, tudo se transforma". É um fato corroborado empiricamente que certas quantidades físicas são conservadas em todos os processos conhecidos, como por exemplo, a energia, o momento linear, o momento angular, a carga elétrica de sistemas fechados. Em sistemas não relativísticos a massa total do sistema é conservada, enquanto que em processos relativísticos a massa de repouso das partículas presentes constitui apenas parte da energia total do sistema, e esta última é que deve se conservar. Neste capítulo será deduzida uma lei geral de conservação de algum tipo de "carga" do sistema, levando à famosa equação da continuidade, que pode ser aplicada para a conservação da carga elétrica, no caso particular do eletromagnetismo, mas também ao caso da conservação de massa em um fluido, ou da energia de um sistema qualquer. O teorema de Poynting, que será visto mais adiante, demonstra a conservação da energia total em um sistema fechado contendo cargas elétricas e campos eletromagnéticos e é, portanto, um caso particular da equação da continuidade.

### 3.1 A equação de continuidade

Considere um tipo de carga  $Q(t)$  que pode variar no tempo (pode ser a carga elétrica, ou então a massa em uma aproximação não-relativística, por exemplo), contida em determinado volume  $V$  do espaço, conforme a figura 3.1.

Se dividirmos o volume  $V$  em pequenos volumes menores  $\Delta V$  a carga total também será particionada em pequenas quantidades  $\Delta Q(\mathbf{r}, t)$  correspondentes à quantidade de carga contida no volume  $\Delta V$  em torno do ponto  $\mathbf{r}$  no instante de tempo  $t$ . Desse modo podemos definir a densidade volumétrica de carga,  $\rho(\mathbf{r}, t)$ , como uma variável contínua que mede de modo puntual a quantidade de carga contida em um volume  $\Delta V$  infinitesimal, em torno de um ponto  $\mathbf{r}$  no instante de tempo  $t$ , por unidade de volume, ou seja:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q(\mathbf{r}, t)}{\Delta V} = \frac{dQ(\mathbf{r}, t)}{dV} . \quad (3.1)$$

Tendo em conta a densidade de cargas em cada ponto podemos determinar a carga total contida no volume  $V$  simplesmente integrando a densidade de cargas, na forma abaixo:

$$Q(t) = \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV . \quad (3.2)$$

Admitimos agora que a carga  $Q$  não pode ser criada nem destruída, apenas transportada de uma região para outra. O fluxo de cargas de uma região para outra é representado por uma quantidade denominada densidade

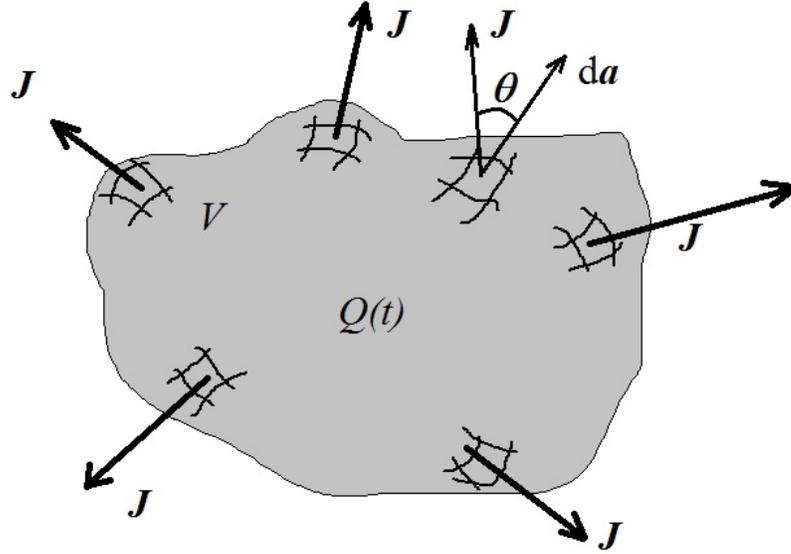


Figure 3.1: A carga  $Q(t)$  é contida no interior do volume  $V$ , mas pode variar no tempo, uma vez que pode haver fluxo de cargas através das fronteiras do volume. O transporte de cargas é mensurado pela densidade de corrente  $\mathbf{J}$ . Se ocorre fluxo líquido de cargas para fora do volume  $V$ , medido através da integral de fluxo de  $\mathbf{J}$  atravessando a superfície fechada  $a(V)$  que delimita o volume  $V$ , necessariamente a carga total contida no volume deve diminuir em função do tempo.

de corrente de cargas, uma grandeza vetorial dada pela quantidade de carga  $\Delta Q(\mathbf{r}, t)$  que atravessa uma área  $\Delta A$  nas vizinhanças do ponto  $\mathbf{r}$  em um intervalo de tempo  $\Delta t$  em torno do instante  $t$ , por unidade de área e por unidade de tempo, ou seja:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q(\mathbf{r}, t)}{\Delta A \Delta t} \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{A}}, \quad (3.3)$$

onde  $\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{A}} = \Delta \mathbf{A} / \Delta A$  é um vetor unitário normal à superfície  $\Delta A$  para a qual o máximo valor de densidade de corrente, em módulo, é obtida. Desse modo a corrente de cargas  $Q$  que atravessa uma superfície  $a$  no instante  $t$  é dada simplesmente por:

$$I_a(t) = \int_a \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}, \quad (3.4)$$

onde  $d\mathbf{a}$  é o elemento diferencial de área. A máxima corrente ocorre quando o vetor normal à superfície em consideração é orientado paralelamente ao vetor densidade de corrente  $\mathbf{J}$ .

Agora, se queremos saber qual o fluxo líquido de cargas que atravessa uma superfície fechada determinando um certo volume  $V$  por unidade de tempo, ou seja, a quantidade total de carga que entra ou sai do volume  $V$  por unidade de tempo, temos:

$$I_{\text{liq}}(t) = \oint_{a(V)} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}. \quad (3.5)$$

No entanto, se há cargas entrando ou saindo do volume  $V$  através de suas fronteiras, fato que é mensurado pela quantidade  $I_{\text{liq}}(t)$ , deve haver uma variação da carga total contida no interior do volume  $V$ , porque não podemos criar ou destruir cargas, ou seja, transcorrido um intervalo de tempo  $\Delta t$  a carga contida no volume é dada por:

$$Q(t + \Delta t) = Q(t) - I_{\text{liq}} \Delta t. \quad (3.6)$$

Note que o sinal do segundo termo na equação acima é negativo porque a convenção na definição (3.5) assume que  $I_{\text{liq}} > 0$  se a carga flui para fora do volume  $V$ , fazendo com que a carga total diminua no seu interior à

medida que o tempo passa. Introduzindo (3.5) em (3.6) e levando ao limite  $\Delta t \rightarrow 0$  obtemos facilmente:

$$\oint_{a(V)} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV . \quad (3.7)$$

A equação acima é conhecida como equação da continuidade da carga (na forma integral), porque representa a conservação e a impossibilidade de criar ou destruir cargas.

Por simplicidade e sem perda da generalidade para o resultado final da equação da continuidade na forma diferencial, que pretendemos obter a seguir, vamos admitir que o volume  $V$  considerado não dependa do tempo, de tal modo que possamos converter a derivada temporal total  $d/dt$  que aparece na equação acima, na derivada parcial da densidade de cargas  $\rho$  em relação ao tempo:

$$\oint_{a(V)} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV . \quad (3.8)$$

Mesmo que o volume varie com o tempo, é possível encontrar uma transformação de coordenadas, no qual o volume seja constante. Aplicando o teorema de Gauss ao lado esquerdo da equação acima obtém-se:

$$\oint_{a(V)} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{J} dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV . \quad (3.9)$$

Agora, uma vez que as integrais de volume tem que ser iguais na expressão acima, independentemente do volume escolhido, podemos perceber que:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} , \quad (3.10)$$

o que é convencionalmente expressado na forma

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 . \quad (3.11)$$

Na forma diferencial, válida ponto a ponto, fica claro que se as linhas da densidade de corrente  $\mathbf{J}$  divergem no ponto  $\mathbf{r}$  então deve haver fluxo de carga para fora daquele ponto, e como deve haver conservação de carga, é inevitável que a densidade de cargas  $\rho$  naquele ponto deve diminuir à taxa dada pela divergência de  $\mathbf{J}$ .

## 3.2 Relação entre $\rho$ e $\mathbf{J}$

Existe uma importante relação entre a densidade de carga volumétrica  $\rho$ , a velocidade  $\mathbf{v}$  com que as cargas se deslocam e o vetor densidade de corrente  $\mathbf{J}$ . Para obtê-la considere a situação mostrada na figura 3.2. Há uma quantidade de carga  $\Delta q$  no ponto  $\mathbf{r}$ , em torno do qual podemos definir um volume infinitesimal  $\Delta V = \Delta A \Delta L$ . Escolhe-se a superfície de tal forma que o vetor unitário perpendicular à superfície  $\Delta A$  está orientado paralelamente ao vetor velocidade  $\mathbf{v}$  com que a carga  $\Delta q$  se desloca. Podemos fazer o volume  $\Delta V$  tão pequeno quanto o necessário para conter apenas uma unidade de carga  $\Delta q$ , fazendo com que uma carga  $\Delta q$  está separada das outras por uma distância mínima  $\Delta L$  que corresponderá à distância percorrida pelas cargas  $\Delta q$  no intervalo de tempo  $\Delta t$ , ou seja,  $\Delta L = v \Delta t$ .

Da definição de densidade de corrente dada pela equação (3.3) e sabendo que  $\Delta t = \Delta L/v$  temos:

$$\mathbf{J} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta A \Delta t} \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{A}} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta A (\Delta L/v)} \hat{\mathbf{v}} , \quad (3.12)$$

lembrando que o vetor unitário  $\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{A}}$  coincide com o vetor unitário  $\hat{\mathbf{v}}$  na direção do vetor velocidade  $\mathbf{v}$ . Uma vez que  $\Delta A \Delta L = \Delta V$  e utilizando a definição de densidade de cargas dada pela equação (3.1) obtemos facilmente a relação desejada, dada abaixo:

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} . \quad (3.13)$$

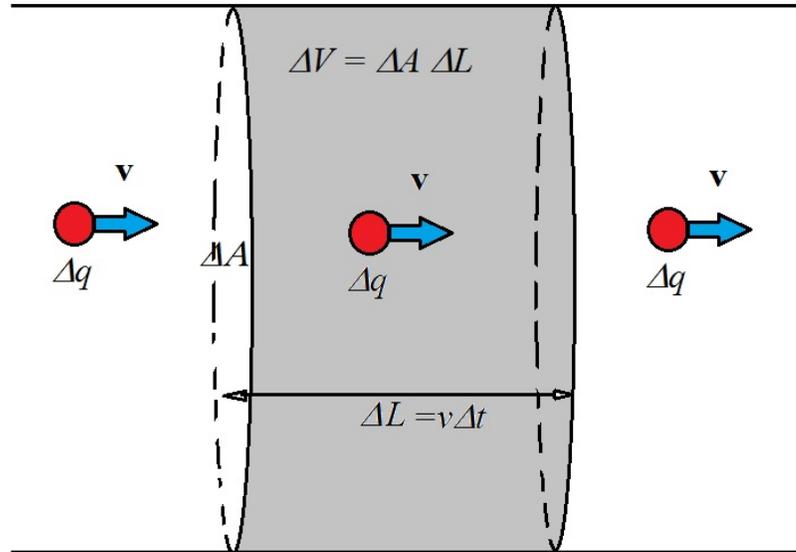


Figure 3.2: A carga  $\Delta q$  contida em um volume  $\Delta V$  atravessa a superfície  $\Delta A$  com velocidade  $\mathbf{v}$  no intervalo de tempo  $\Delta t$ .

Quando há mais de uma espécie de portador de carga, basta somar vetorialmente as contribuições na forma  $\mathbf{J} = \sum_i \rho_i \mathbf{v}_i$ , sendo  $\rho_i$  a densidade de cargas do  $i$ -ésimo tipo e  $\mathbf{v}_i$  a sua velocidade. Aqui cabe uma análise interessante no caso da carga elétrica. Geralmente os meios materiais são eletricamente neutros de tal forma que a densidade de cargas localmente se anula, na média, ou seja,  $\rho = \sum_i \rho_i = 0$ . Para ser mais exato, é sua integral sobre todo o volume do material que deve se anular, mas em análises macroscópicas pode-se supor que  $\rho = 0$  em boa aproximação. Todavia, a densidade de corrente não precisa se anular, mesmo que a densidade de carga resultante de contribuições de diversas espécies leve a um material macroscopicamente neutro. Para isso basta que as velocidades dos portadores de carga sejam diferentes. De fato, um meio material é constituído de íons de carga positiva e muito mais massivos do que os elétrons negativos. Dessa forma, sob a ação de uma força, os íons pouco alteram sua condição de quase repouso, no equilíbrio termodinâmico, mas os elétrons muito mais leves do que os íons que formam o material adquirem velocidades tipicamente três ou quatro ordens de grandeza maiores, fazendo com que a densidade de corrente  $\mathbf{J}$  seja dominada pelo movimento dos elétrons. Em alguns materiais, sobretudo os chamados semicondutores, a ausência de elétrons na banda de valência tem comportamento de uma carga positiva, com massa similar à do elétron, sendo denominada lacuna. Nos semicondutores tanto elétrons quanto lacunas contribuem significativamente para a densidade de corrente total no material.

### 3.3 A lei dos nós em circuitos elétricos

A equação da continuidade da carga quando expressa na forma integral, toma a forma da lei dos nós da teoria de circuitos. Suponha um conjunto de condutores metálicos  $i = 1, 2, \dots, N$  que se encontram em um nó, conforme mostrado na figura 3.3, transportando cada um deles uma densidade de corrente  $\mathbf{J}_i$ , sendo nula a densidade de corrente fora dos caminhos condutores. Podemos utilizar a equação da continuidade nesse nó, envolvendo-o por um volume  $V$  que o contenha completamente.

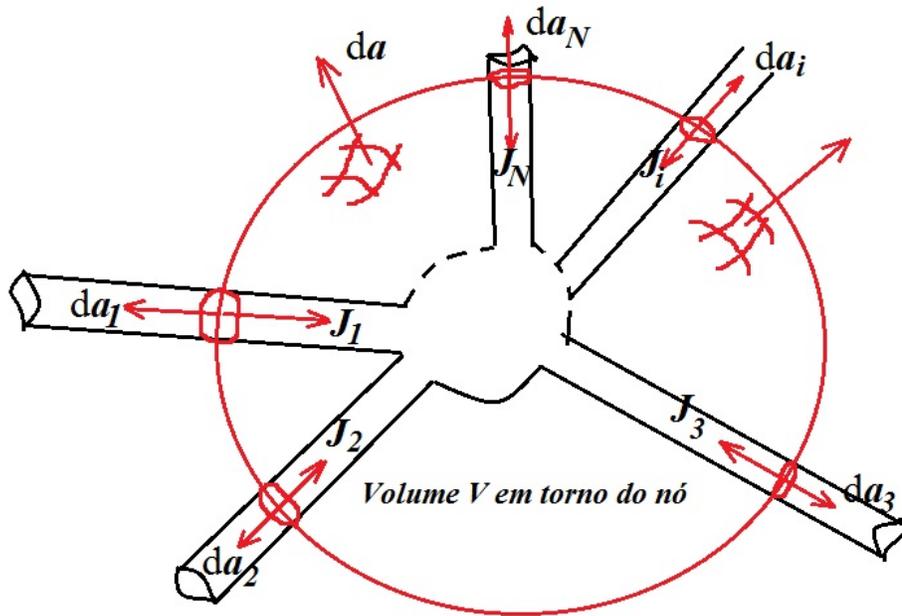


Figure 3.3: A Lei dos Nós: como não há acúmulo de carga no nó encerrado pelo volume  $V$ , a soma de todas as correntes que adentram o volume  $V$  através de suas fronteiras deve se anular.

Desse modo temos:

$$\oint_{a(V)} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = \sum_{i=1}^N \int_{a_i} \mathbf{J}_i \cdot d\mathbf{a}_i = -\frac{dQ}{dt}, \quad (3.14)$$

sendo a corrente  $I_i$  que atravessa a seção transversal do  $i$ -ésimo condutor metálico dada pela integral da densidade de corrente  $\mathbf{J}_i$  em relação à seção transversal do condutor, ou seja:

$$I_i = \int_{a_i} \mathbf{J}_i \cdot d\mathbf{a}_i. \quad (3.15)$$

Uma vez que a teoria de circuitos é válida em baixas frequências, a derivada temporal  $d/dt$  é desprezível, o que significa supor, de outro modo, que não pode haver acúmulo de carga em um nó e portanto:

$$\sum_{i=1}^N I_i = 0, \quad (3.16)$$

representando que, se a teoria de circuitos é válida, a soma de todas as correntes que entram em um nó deve ser nula. O acúmulo de cargas pode ser ainda incorporado, através da utilização da definição de capacitância.

### 3.4 Alguns Exemplos de Processos Físicos

A validade da conservação de carga elétrica, bem como massa-energia, momento linear, etc, pode ser constatada em uma série de processos físicos, como por exemplo a ionização de átomos e a aniquilação ou criação de pares partícula e anti-partícula.

Começamos pelo caso do processo de ionização de um átomo qualquer. Por simplicidade escolhemos o hidrogênio (H), cujo processo está ilustrado na figura [figionizH](#).

O átomo H inicialmente neutro é constituído de apenas um próton de carga  $+e$  e um elétron de carga  $-e$ , tendo carga total  $Q = 0$ , portanto. Irradiando o átomo com fótons de energia  $E = hf$  apropriada (onde  $h$  é

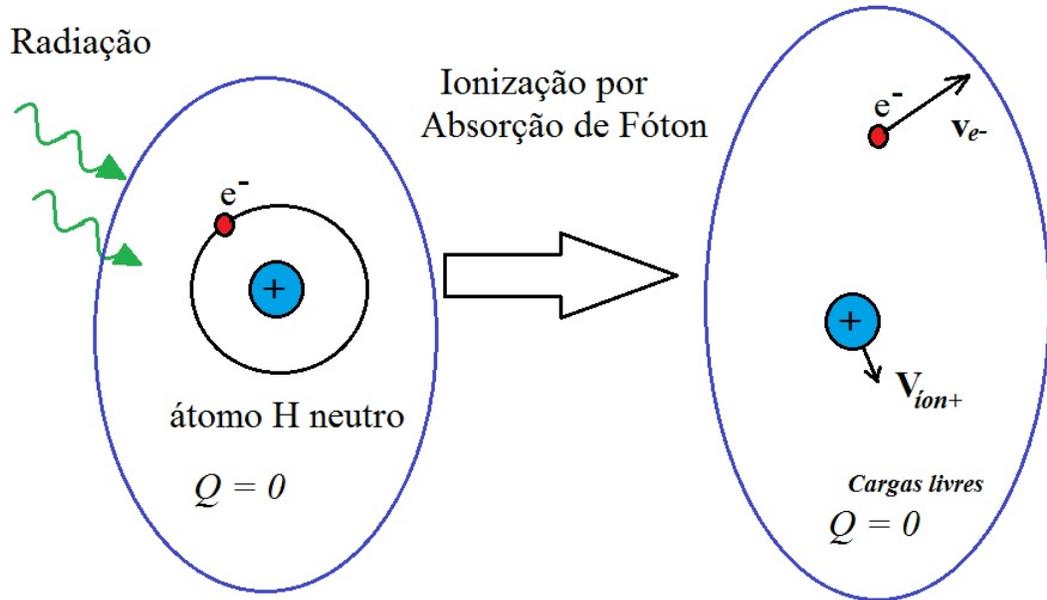


Figure 3.4: Conservação da carga no processo de ionização do átomo de hidrogênio.

a constante de Planck e  $f$  a frequência do fóton), tipicamente maior do que  $13,6\text{eV}$ , que está no espectro do ultravioleta e acima, a absorção de um ou mais fótons faz com que o elétron adquira energia suficiente para se dissociar do próton, gerando assim um elétron livre e um íon positív livre, nesse caso o próprio próton. Ao final do processo, em um volume  $V$  muito grande a carga total continua nula,  $Q = 0$ , ou seja, a carga total se conserva. No entanto, se consideramos um volume  $V$  de dimensões do átomo, inicialmente, dentro desse volume há um próton e um elétron, fazendo com que  $Q = 0$  no interior desse volume. Após o processo de ionização por absorção de fóton, o próton, três ordens de grandeza mais massivo que o elétron, permanece praticamente imóvel no interior do volume, ao passo que o elétron pode cruzar as fronteiras do volume. Nesse caso há uma corrente de um elétron (carga negativa) para fora do volume  $V$ , cujo efeito físico é o equivalente à entrada de uma carga positiva no interior do volume  $V$ , havendo no intervalo de tempo  $\Delta t$  uma variação de carga  $\Delta Q = +e$ , que corresponde justamente à carga do próton que ficou no interior do volume.

Já nos processos de aniquilação e criação de pares de partícula e anti-partícula consideremos o caso de um elétron e um pósitron, a anti-partícula do elétron, por simplicidade, conforme ilustrado na figura ?? . A anti-partícula possui a mesma massa que a partícula, enquanto sua carga tem sinal contrário. Inicialmente, um sistema contendo um elétron e um pósitron tem carga total nula,  $Q = 0$ , porque a carga do pósitron é  $+e$ , enquanto que a carga do elétron vale  $-e$ . Ao colidirem, há uma região muito pequena onde processos quânticos acontecem e ao final, o par é aniquilado, dando resultado à energia na forma de radiação eletromagnética. Por uma questão de conservação de energia, o número mínimo de fótons gerados a partir da reação é 2. Claramente, após a aniquilação do par, a carga total do sistema continua nula, uma vez que fótons não transportam carga elétrica. A energia mínima dos dois fótons finais será  $E_{\gamma_1} + E_{\gamma_2} = hf_1 + hf_2 = 2mc^2$ , correspondendo a soma das energias de repouso de um pósitron e um elétron. Uma vez que para um elétron a energia de repouso é dada por  $E_r = mc^2 = 0,511\text{MeV}$ , os fótons gerados estarão no espectro de radiação gama, sendo altamente energéticos, portanto. Por outro lado, dois fótons gama podem interagir e através de efeitos inerentemente quânticos, podem dar origem a um par elétron-pósitron. Esse processo é conhecido como criação de pares. Mais uma vez a carga total se conserva, assim como a energia, o momento linear, etc. O processo de aniquilação ou

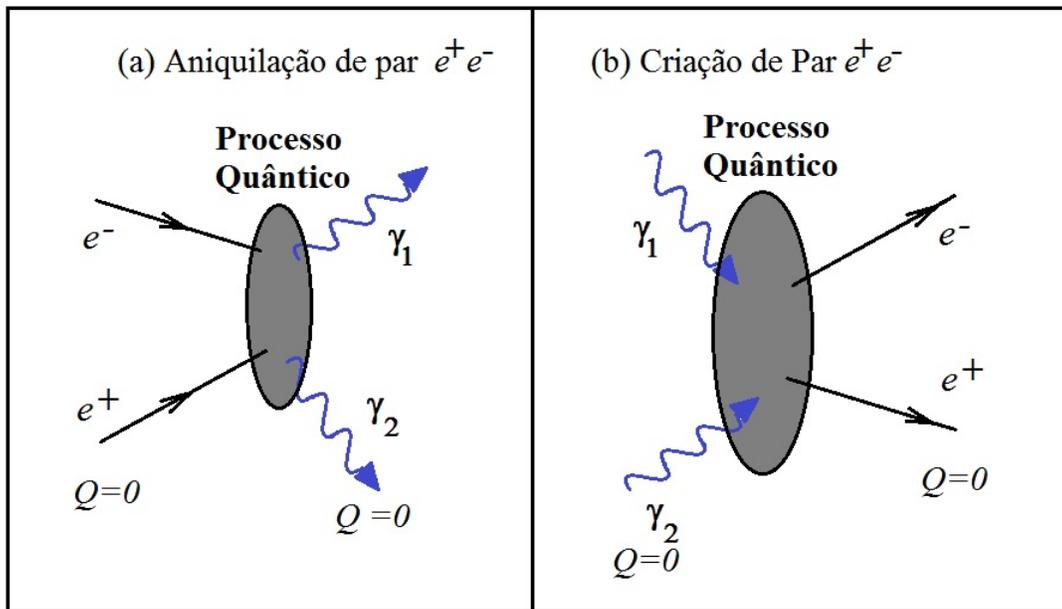


Figure 3.5: Processos de aniquilação de par elétron-pósitron, gerando dois fótons gama, e criação de par elétron-pósitron a partir da interação entre dois fótons gama. Esses processos são inerentemente quânticos e relativísticos e a carga elétrica total é conservada.

criação pode ocorrer com um número maior do que apenas dois fótons, sendo 2 ou 3 os casos mais prováveis. Observe que a aniquilação em apenas um fóton não seria proibida pela conservação de carga, mas violaria a conservação de energia ou momento linear, que não poderiam ser satisfeitas simultaneamente com apenas um fóton.

### 3.5 Referências Deste Capítulo

- [3.1] Matthew N.O. Sadiku, *Elementos do Eletromagnetismo* (Ed. Bookman, Porto Alegre, 5a. Ed, 2005).
- [3.2] John D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (Wiley and Sons, New York, 3rd. Ed., 1998).
- [3.3] William H. Hayt, *Eletromagnetismo* (LTC, 6a Ed.).
- [3.4] D.J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics* (3rd Edition, Pearson Education Inc, 1999).

### 3.6 Problemas Propostos

- 1) Embora alguns conceitos importantes no completo entendimento deste exercício serão apresentados somente mais adiante, admita que seja dada a lei de Ohm vetorial, relacionando a densidade de corrente elétrica no interior de um material ao campo elétrico  $\mathbf{E}$  na forma que segue:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} , \quad (3.17)$$

onde  $\sigma$  é denominada condutividade elétrica do material. Se uma densidade volumétrica de cargas  $\rho$  está presente no interior desse meio material o campo elétrico  $\mathbf{E}$  estará relacionado à  $\rho$  através da famosa lei de Gauss, dada por simplicidade na forma abaixo:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon} , \quad (3.18)$$

sendo a quantidade  $\varepsilon$  a permissividade dielétrica do meio material. Utilizando as equações (3.17) e (3.18) na equação da continuidade e admitindo que  $\sigma$  e  $\varepsilon$  sejam independentes da posição e do tempo, demonstre que

$$\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 .$$

Se uma certa quantidade de carga  $\rho_0$  está presente no material em  $t = 0$  mostre que

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-t/\tau} ,$$

onde  $\tau = \varepsilon/\sigma$  é um tempo característico relacionado à taxa de extinção da densidade de carga nesse meio material. Explique esse resultado fisicamente.

Calcule  $\tau$  em um meio bom condutor como o cobre onde  $\varepsilon \approx \varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{F/m}$  e  $\sigma = 5,7 \times 10^7 \text{S/m}$ . Faça o mesmo para um vidro com  $\varepsilon = 4\varepsilon_0$  e  $\sigma = 10^{-11} \text{S/m}$ . Explique os resultados.

- 2) **Lei de Fourier para o transporte de calor:** sabe-se que o fluxo de calor em um material se dá das regiões mais quentes para as mais frias, sendo representado pelo vetor  $\mathbf{Q} = -\sigma_T \nabla T$ , onde  $T$  é a temperatura e  $\sigma_T$  a condutividade térmica do material. Considerando que a densidade de energia em um dado ponto do material pode ser representada como  $u = nk_B T$  sendo  $n$  a densidade de portadores de energia calorífica no material,  $k_B$  a constante de Boltzmann, e supondo que  $n$  não seja dependente de  $T$  numa primeira aproximação, encontre a equação de difusão do calor com base na equação da continuidade (conservação da energia).

## Chapter 4

# As Equações de Maxwell

Tradicionalmente as equações de Maxwell são apresentadas ao estudante na ordem cronológica em que foram descobertas ao longo do desenvolvimento da teoria eletromagnética. Essa abordagem histórica não segue um roteiro lógico e consistente, uma vez que as leis fundamentais foram sendo modificadas ao longo do tempo em função de novas descobertas experimentais, até chegarem à forma final conhecida atualmente. Desse modo, parece mais natural uma apresentação axiomática das equações de Maxwell, onde os resultados particulares podem ser derivados da teoria geral. O objetivo do presente capítulo é apresentar as equações de Maxwell como um postulado fundamental da teoria eletromagnética, explicar suas consequências e significados físicos, bem como demonstrar algumas leis de conservação consideradas importantes.

### 4.1 Equações de Maxwell em forma diferencial e integral

*Postulado fundamental:* Todos os fenômenos eletromagnéticos clássicos são descritos pelas equações de Maxwell, que são expressas abaixo em notação vetorial:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (4.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (4.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (4.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (4.4)$$

juntamente com as relações constitutivas dos meios materiais, que discutiremos mais adiante:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}). \quad (4.6)$$

Nas equações acima:

$\mathbf{D}$  → vetor densidade de fluxo elétrico [C/m<sup>2</sup>];

$\mathbf{E}$  → vetor campo elétrico [V/m];

$\mathbf{B}$  → vetor densidade de fluxo magnético [T ou Wb/m<sup>2</sup>];

$\mathbf{H}$  → vetor campo magnético [A/m];

$\mathbf{P}$  → vetor polarização dielétrica [C/m<sup>2</sup>];

$\mathbf{M} \rightarrow$  vetor magnetização do meio [A/m];

$\rho \rightarrow$  densidade de carga elétrica [C/m<sup>3</sup>];

$\mathbf{J} \rightarrow$  vetor densidade de corrente elétrica [A/m<sup>2</sup>];

onde as unidades do SI são mostradas.

Em meios lineares e isotrópicos, a polarização e a magnetização podem ser escritas como:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi_e(t - \tau) \mathbf{E}(\tau) d\tau \quad (4.7)$$

$$\mathbf{M} = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_m(t - \tau) \mathbf{H}(\tau) d\tau \quad (4.8)$$

onde  $\chi_e$  e  $\chi_m$  são ditas susceptibilidade dielétrica e magnética do meio, respectivamente. As expressões mostradas são para campos de variação geral no tempo, em meios lineares, em que a polarização  $\mathbf{P}$  e/ou a magnetização  $\mathbf{M}$  dependem diretamente do campo elétrico  $\mathbf{E}$  e/ou magnético  $\mathbf{H}$  aplicado.

A forma integral é obtida aplicando-se o teorema de Gauss às equações (4.1) e (4.2) e o teorema de Stokes às equações (4.3) e (4.4), resultando nas seguintes equações:

$$\oint_a \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \rho dV, \quad (4.9)$$

$$\oint_a \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0, \quad (4.10)$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_a \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}, \quad (4.11)$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} + \frac{d}{dt} \int_a \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a}. \quad (4.12)$$

onde  $a$  denota superfície e  $V$  denota volume.

Na compreensão de propagação de ondas eletromagnéticas é preferível a utilização da forma diferencial. Todavia as expressões integrais podem ser muito úteis na solução de problemas de alta simetria, sobretudo em eletrostática e magnetostática.

## 4.2 Significado Físico das Equações de Maxwell

Para uma compreensão correta dos fenômenos eletromagnéticos e não perder-se no meio da selva de símbolos meramente matemáticos, é fundamental entender o significado físico de cada uma das equações de Maxwell e isto se dá pela correta leitura das equações.

A equação (4.1) é conhecida como Lei de Gauss-Coulomb e é novamente mostrada abaixo:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho.$$

Nessa equação lê-se que a divergência do vetor deslocamento elétrico  $\mathbf{D}$  é igual à densidade volumétrica de carga elétrica  $\rho$ . Fisicamente significa que existe fonte de divergência para o campo elétrico, e na região fonte as linhas do campo podem divergir, se  $\rho > 0$  naquela região, ou convergir na situação oposta,  $\rho < 0$ . Em outras palavras linhas de campo elétrico nascem (divergem) nas regiões que contém densidade de cargas positivas e terminam (convergem) nas regiões de densidade de cargas negativas. A figura 4.2 ilustra de modo simplificado o significado dessa equação.

A equação (4.2) é conhecida como lei de Gauss magnética ou lei da ausência do monopolo magnético, sendo novamente mostrada abaixo:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

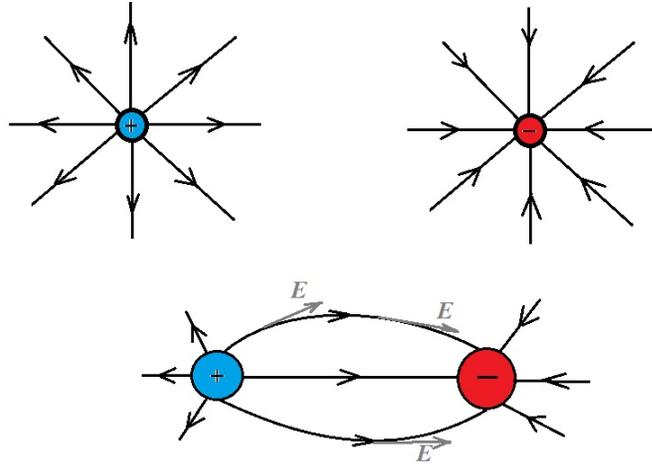


Figure 4.1: A Lei de Gauss-Coulomb: as linhas de campo elétrico divergem nas regiões de cargas positivas e convergem para as regiões onde existam cargas negativas. Para uma carga puntual positiva a linha de campo é descontínua exatamente no ponto onde a carga se localiza, divergindo desse ponto.

Diz-se que a divergência do vetor densidade de fluxo magnético  $\mathbf{B}$  é exatamente igual a zero, significando que não há fonte de divergência para o campo magnético. Em outras palavras, não há monopolo magnético (ou carga magnética) e portanto, não havendo fontes de divergência para as linhas do campo  $\mathbf{B}$ , estas devem ser fechadas. Pode-se inferir daqui que o campo magnético só pode ter natureza solenoidal. Antes da unificação da eletricidade e do magnetismo, imaginou-se a existência de dois pólos magnéticos (análogos às cargas elétricas positivas e negativas), das quais emanariam as linhas de campo magnético. Se fosse verdadeira a existência dessas cargas magnéticas, usualmente denominadas pólo norte e pólo sul, a divergência do vetor  $\mathbf{B}$  necessariamente seria diferente de zero. No entanto o próprio Coulomb demonstrou que é impossível separar os pólos norte e sul de um ímã permanente, e sempre que tal ímã é dividido ao meio, na intenção de separar seus pólos norte e sul, dois novos pólos surgem e cada metade carregará um pólo norte e um pólo sul. Daí conclui-se que os pólos magnéticos são entes fictícios, embora úteis em algumas descrições práticas do magnetismo, mas não são de forma alguma cargas magnéticas reais. Dentro de todos limites experimentais conhecidos hoje, sabe-se que o monopolo magnético não existe. A figura 4.2 ilustra as linhas de campo magnético fechando-se sobre si mesmas.

A Lei de Faraday, também conhecida como lei da indução eletromagnética, dada pela equação (4.3), que é reproduzida abaixo

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

foi descoberta em 1831 por Michael Faraday e por Joseph Henry, independentemente. O sinal  $-$  no lado direito foi descoberto por Lenz. Matematicamente, lê-se que o rotacional do campo elétrico  $\mathbf{E}$  é igual ao negativo da variação temporal do campo magnético  $\mathbf{B}$ . Do ponto de vista físico, podemos afirmar que o negativo da variação temporal do campo magnético,  $-\partial \mathbf{B} / \partial t$ , atua como uma espécie de "densidade de corrente magnética" capaz de produzir um campo elétrico de natureza solenoidal (ou rotacional), cujas linhas devem ser fechadas. Em outras palavras, o campo elétrico tem fonte de circulação na variação temporal do campo magnético, que induz um campo elétrico de natureza solenoidal, cujas linhas devem ser fechadas. A figura 4.3 ilustra a geração do campo elétrico não-eletrostático, de natureza solenoidal, proveniente da lei de indução, tendo por fonte o vetor  $-\partial \mathbf{B} / \partial t$ . Note que as linhas do campo elétrico circulam em torno de  $-\partial \mathbf{B} / \partial t$  em cada ponto do espaço. É importante observar alguns aspectos históricos em contraste com o significado físico da equação (4.3) como a

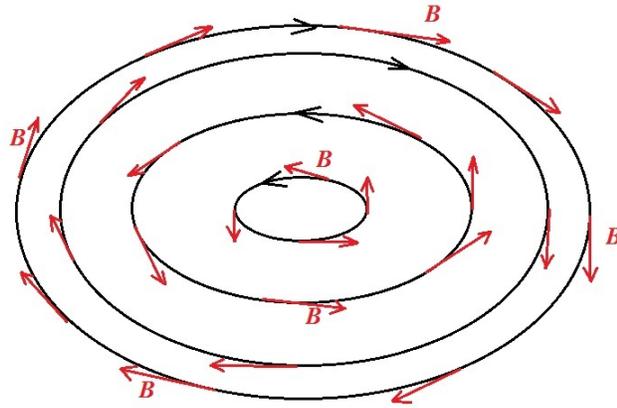


Figure 4.2: Lei de Gauss magnética: as linhas de campo magnético  $\mathbf{B}$  são fechadas porque não existem cargas magnéticas monopolares.

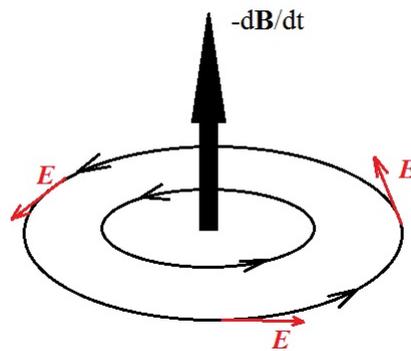


Figure 4.3: Linhas de campo elétrico geradas pela variação temporal do campo magnético, conforme a Lei de Faraday, circulam em torno de  $-\partial\mathbf{B}/\partial t$  e são fechadas.

conhecemos hoje. Sempre em busca de simetrias na natureza, e sabendo-se que uma corrente elétrica era capaz de produzir campos magnéticos, ou seja, fenômenos magnéticos estavam intrinsecamente ligados à propriedade carga elétrica em movimento ou corrente elétrica, por volta de 1820 os cientistas perguntavam-se: é possível o campo magnético gerar fenômenos elétricos? Já que uma corrente elétrica gera campo magnético, seria possível que reciprocamente um campo magnético possa gerar um fenômeno elétrico, como uma corrente elétrica? Como sabemos, as respostas para essas perguntas foram dadas quase simultaneamente por Michael Faraday e Joseph Henry por volta de 1831, mas não exatamente como era esperado. Na verdade um campo magnético por si mesmo, constante no tempo, era incapaz de gerar qualquer corrente ou efeito observável em um circuito vizinho, mas Faraday e Henry perceberam que ao modificar o estado do campo magnético, ou seja, variando o campo magnético no tempo, uma força eletromotriz surgia, induzindo no circuito próximo uma corrente elétrica, que era medida através de um galvanômetro. Considerando-se um um circuito elétrico cuja corrente é determinada através de um galvanômetro as observações eram as seguintes: i) na presença de um ímã em repouso, nada acontecia no circuito; ii) quando o ímã permanente, fonte de campo magnético era aproximado ou afastado do circuito, fazendo variar assim o fluxo magnético que atravessava o circuito (quanto mais próximo o ímã mais forte o campo e afastando-o ou aproximando-o do circuito resulta na variação temporal do fluxo magnético), Faraday percebeu que a agulha do galvanômetro era defletida, ou seja, uma pequena corrente era induzida

no circuito. O sentido dessa corrente foi determinado por Lenz, daí o nome Lei de Faraday-Lenz. Conclusões idênticas são obtidas quando um circuito elétrico adicional é utilizado para gerar o campo magnético. No regime permanente nada ocorria no circuito vizinho onde se media a corrente induzida, mas nos transientes ocasionados pelo chaveamento do circuito gerador de campo magnético era possível observar a geração de uma fem induzida, tanto maior quanto mais rápida era a variação temporal do campo magnético. A expressão matemática para a lei da indução somente foi estabelecida por James Clerk Maxwell e pode ser expressa na forma:

$$\text{f.e.m.} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt} . \quad (4.13)$$

Na forma integral lê-se que a integral de caminho do campo elétrico  $\mathbf{E}$  sobre um caminho fechado  $C$  deve ser igual ao negativo da taxa de variação temporal do fluxo magnético  $\Phi_m$  que atravessa uma das superfícies encerradas pelo caminho  $C$ , dado por:

$$\Phi_m = \int_{a(C)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (4.14)$$

onde  $a(C)$  é uma superfície delimitada pelo caminho  $C$ . Note que não se trata de uma superfície fechada. Em outras palavras, em um circuito fechado  $C$ , surgirá uma força eletromotriz induzida, ou diferença de potencial ao longo do caminho, que é igual à taxa de variação temporal do fluxo magnético  $\Phi_m$ . O sinal indica que a força eletromotriz tem sentido contrário ao da variação, na tentativa de, ao produzir uma corrente induzida (se houver um caminho condutor para tanto), contrabalançar a variação do fluxo e manter constante o fluxo magnético que atravessa a superfície encerrada por  $C$ . O campo elétrico  $\mathbf{E}$  que surge devido à indução pela variação do fluxo magnético não pode ser escrito na forma de um gradiente de potencial, como no caso de um campo eletrostático  $\mathbf{E}_e$ . Esse novo campo, que surge devido à variação do campo magnético é um campo rotacional e não conservativo. O campo obtido através do gradiente de um escalar tem integral de circulação total nula, ou seja, é um campo irrotacional, ou ainda:

$$\oint \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{l} = \oint \nabla\phi \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Este novo campo produzido através da lei de Faraday apresenta  $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \neq 0$ , e por isso não pode ser um campo gerado a partir do gradiente do potencial escalar  $\phi$ . Expressando a lei de Faraday na forma integral explicitamente em termos do campo magnético:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_a \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} . \quad (4.15)$$

Embora essa forma integral seja amplamente utilizada em Engenharia Elétrica na análise de máquinas elétricas e transformadores, onde os caminhos fechados  $C$  escolhidos são circuitos condutores fechados, é preciso deixar claro que a lei de Faraday se aplica a qualquer caminho virtual que se queira, sendo válida inclusive no vácuo, onde não há condutores ou cargas livres. Nesse sentido a lei de Faraday é uma relação muito mais geral entre os campos eletromagnéticos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ , que prescinde da existência de caminhos condutores propriamente ditos. Os circuitos condutores são meramente “sensores” para a realização de medidas experimentais. Dada uma região qualquer do espaço, que pode ser o vácuo, o negativo da variação temporal do campo magnético irá induzir um campo elétrico solenoidal em qualquer caminho fechado escolhido. Se nesse caminho colocarmos um condutor contendo muitas cargas livres, o campo elétrico induzido presente no espaço irá atuar sobre as cargas, produzindo correntes, que são facilmente mensuráveis. Todavia o campo elétrico induzido na lei de Faraday estará lá desde que haja variação temporal do campo magnético que permeia aquela região do espaço, independentemente da existência de um caminho condutor propriamente dito.

Note que a derivada temporal no lado direito da forma integral da lei de Faraday é total, indicando que atua sobre o resultado da integral de superfície. Tanto o valor de  $d\mathbf{a}$  quanto  $\mathbf{B}$ , ou ainda a área total  $a$  podem variar

com o tempo  $t$ . Todavia vamos admitir por simplicidade, e sem perder a generalidade do resultado final, que somente  $\mathbf{B}$  possa depender do tempo, permitindo substituir a derivada temporal total pela derivada parcial do campo magnético, conforme abaixo:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_a \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} . \quad (4.16)$$

Agora aplicamos o teorema de Stokes para obter o resultado de interesse:

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} . \quad (4.17)$$

Finalmente a lei de Ampère-Maxwell, dada pela equação (4.4) e reproduzida abaixo, por conveniência,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} ,$$

significa que um campo magnético  $\mathbf{H}$  de natureza solenoidal, cujas linhas são fechadas, pode ser produzido tanto pela densidade de corrente elétrica de condução  $\mathbf{J}$ , que constitui-se de cargas em movimento, quanto pela densidade de corrente de deslocamento  $\partial \mathbf{D} / \partial t$ , que representam a taxa de variação temporal do vetor de deslocamento elétrico  $\mathbf{D}$ . Em outras palavras, tanto as cargas em movimento quanto a variação temporal do campo elétrico são capazes de produzir campo magnético de natureza solenoidal, cujas linhas devem ser fechadas. A figura 4.4 ilustra as linhas de campo magnético que circulam em torno do vetor densidade de corrente resultante  $\mathbf{J} + \partial \mathbf{D} / \partial t$ .

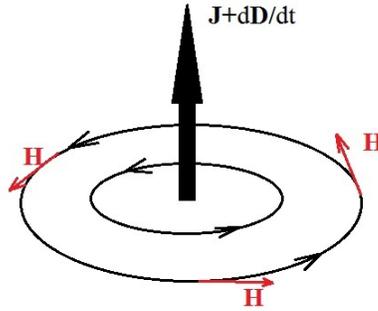


Figure 4.4: Lei de Ampère-Maxwell: as linhas de campo magnético  $\mathbf{H}$  são fechadas e circulam em torno da densidade de corrente total, dada pela soma vetorial da densidade de corrente de conduções  $\mathbf{J}$  e da densidade de corrente de deslocamento  $\partial \mathbf{D} / \partial t$ .

O passo fundamental para a versão final das equações de Maxwell, unificando o campo elétrico e o magnético em um campo eletromagnético, foi dado por James Clerk Maxwell, que percebeu que a lei de Ampère contém um erro. Consideremos a equação da lei de Ampère:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

e tomemos o divergente dessa equação:

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \cdot \mathbf{J}$$

O divergente do rotacional de um vetor é sempre nulo, de tal forma que isso implica que:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

mas isso somente é válido no caso em que  $\partial \rho / \partial t = 0$ , ou seja, quando não há variação no tempo. Caso assumimos que mesmo no regime de variação temporal  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$  a conservação da carga elétrica será violada, e isso não

ocorre experimentalmente, pois sabemos que

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

De modo a tornar a equação de Ampère verdadeira, Maxwell adicionou o termo que falta, que nada mais é do que completar a equação de continuidade:

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 ,$$

mas  $\rho = \nabla \cdot \mathbf{D}$ , e então:

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 ,$$

A derivada temporal e a divergência comutam, e podem ser trocadas de ordem, de tal modo que:

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \nabla \cdot \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0 ,$$

o que implica a lei de Ampère-Maxwell, escrita novamente abaixo por conveniência

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} . \quad (4.18)$$

O termo de densidade de corrente de deslocamento,  $\partial \mathbf{D} / \partial t$ , assim denominado por Maxwell, não é causado pela condução de cargas, e sim pela variação temporal da densidade de fluxo elétrico  $\mathbf{D}$ . Maxwell conseguiu inferir que não somente uma corrente de condução  $\mathbf{J}$  dá origem a um campo magnético, mas também a variação temporal do vetor elétrico  $\mathbf{D}$ .

### 4.3 Leis de Conservação e o Vetor de Poynting

Dentre os pilares da física e da Ciência moderna em geral está o conceito de conservação, ilustrado de forma simples pela sentença atribuída a Lavoisier de que "na natureza nada se perde e nada se cria, tudo se transforma". Sabe-se que em sistemas fechados tanto a carga elétrica, quanto a energia, o momento linear e outras quantidades físicas relevantes são sempre conservadas. Quantidades de energia podem ser trocada entre as partículas e os campos presentes no sistema, mas sempre a energia total do sistema será conservada, ou seja, é uma constante. Notadamente, a lei de Ampère-Maxwell foi proposta por Maxwell a fim de corrigir a lei de Ampère e compatibilizá-la com a conservação de carga elétrica, uma vez que esta última está fortemente amparada pela experiência. Já o teorema de Poynting foi deduzido por John Henry Poynting, aluno de Maxwell, demonstrando a conservação de energia em um sistema eletromagnético fechado.

#### 4.3.1 Consistência das Equações e a Equação de Continuidade

Uma vez conhecidas as equações de Maxwell podemos questionar a consistência interna da teoria. Uma inconsistência interna da teoria poderia ocorrer caso uma das equações fosse incompatível com as demais, contradizendo uma ou todas as demais equações. Primeiramente vamos considerar a lei de Faraday e demonstrar que ela é perfeitamente consistente com as demais equações. Aplicando a operação de divergência à lei de Faraday, obtemos a seguinte equação:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) . \quad (4.19)$$

O lado esquerdo corresponde à uma identidade matemática que diz que o divergente de um rotacional é sempre nulo, ou seja,  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = 0$ . No lado direito podemos trocar a ordem das derivadas, uma vez que estas comutam entre si, para obter:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0 . \quad (4.20)$$

Para a situação mais genérica possível, o campo magnético  $\mathbf{B}$  pode variar arbitrariamente no tempo. Lembrando que qualquer campo  $\mathbf{B}$  pode ser expresso através de produtos de funções do espaço e funções do tempo, o operador divergente,  $\nabla \cdot \mathbf{B}$ , somente atua sobre as coordenadas espaciais, não alterando a dependência temporal. Nesse caso, para satisfazer (4.20) faz-se imperativo que

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 ,$$

o que é totalmente consistente com a ausência de cargas magnéticas dada pela equação (4.2) e também com as demais equações. Se não conhecêssemos a lei de ausência do monopolo magnético, a lei de Faraday nos levaria a concluir esse fato para que o sistema de equações seja autoconsistente. Portanto a ausência de monopolos e a lei de Faraday não são linearmente independentes entre si. O leitor poderia argumentar em favor da possibilidade de considerar ainda que  $\nabla \cdot \mathbf{B}$  é uma constante, cuja derivada temporal é nula e satisfazendo a equação (4.20). Todavia, isso restringe a variação temporal ao caso de um campo puramente estático, o que fere a nossa premissa original de que  $\mathbf{B}$  pode variar arbitrariamente no tempo.

Essa análise de consistência deixa claro que as modificações impostas às equações de Maxwell na sua forma atual seriam pequenas caso se verificasse a existência do monopolo magnético. Nesse caso, uma vez que  $\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m$ , onde  $\rho_m$  é uma densidade de cargas magnéticas, a conservação de carga magnética demandaria o acréscimo de um termo  $-\mathbf{J}_m$  à lei de Faraday, onde  $\mathbf{J}_m$  seria uma densidade de corrente de cargas magnéticas formada por monopolos magnéticos em movimento.

Considerando agora a lei de Ampère-Maxwell, podemos aplicar a divergência em (4.4):

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0 . \quad (4.21)$$

Mais uma vez utilizando a comutatividade das derivadas e substituindo na equação acima a lei de Gauss-Coulomb (4.1) obtemos a equação da continuidade da carga elétrica:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 , \quad (4.22)$$

que nos mostra que as equações de Maxwell são consistentes com a conservação de cargas elétricas. Além disso, a lei de Ampère-Maxwell é totalmente consistente com as outras equações, e não é linearmente independente da lei de Gauss-Coulomb por intermédio da equação da continuidade de carga.

### 4.3.2 Teorema de Poynting em Meios Lineares, Homogêneos e Isotrópicos

Vamos agora deduzir um importante teorema, que mostra que o campo eletromagnético é capaz de transportar energia, ou seja, o campo eletromagnético é um ente físico real, e não meramente um artifício matemático utilizado na solução de problemas eletromagnéticos. Além disso, o campo eletromagnético é capaz de transportar momento linear, quantidade de movimento análogo ao termo  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  para uma partícula, sendo capaz de produzir pressão e também momento angular, podendo produzir torque, mas é importante mencionar que o campo eletromagnético propriamente dito não transporta carga elétrica ou massa.

Para o vácuo ou em meios lineares, isotrópicos e homogêneos podemos escrever as seguintes relações entre  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{H}$ , respectivamente:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} , \quad (4.23)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} , \quad (4.24)$$

onde  $\varepsilon$  e  $\mu$  são conhecidas como permissividade dielétrica e permeabilidade magnética do meio material, respectivamente. Nesse caso, as equações de Maxwell tomam a forma que segue

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}, \quad (4.25)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (4.26)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (4.27)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (4.28)$$

Em um sistema físico fechado, não somente as cargas são capazes de produzir campos, como estes reagem, produzindo forças sobre as cargas. A força total exercida sobre uma partícula puntual de carga  $q$  é denominada **força de Lorentz** e é dada pela expressão abaixo:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (4.29)$$

onde  $\mathbf{F}$  é a força medida em newtons,  $q$  é a carga da partícula e  $\mathbf{v}$  a sua velocidade. Considere um volume  $V$  que pode ser particionado em elementos infinitesimais  $dV$ , conforme ilustrado na Figura 4.3.2. Um elemento

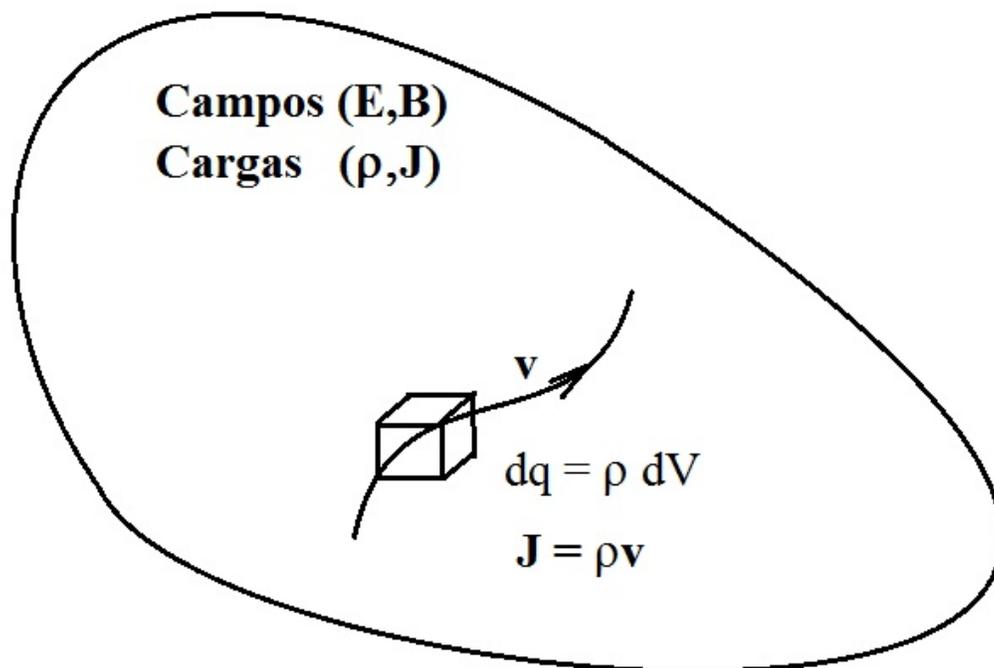


Figure 4.5: Sistema fechado de cargas elétricas e campos confinados a um volume  $V$  que pode ser particionado em infinitesimais  $dV$ .

infinitesimal  $dV$  contém uma carga puntual de valor  $dq = \rho dV$ , tal que possamos utilizar a força de Lorentz sobre esse elemento, para determinar a sua trajetória:

$$d\mathbf{F} = dq(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = dV(\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}). \quad (4.30)$$

A força total é simplesmente obtida integrando sobre o volume  $V$ :

$$\mathbf{F} = \int (\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) dV . \quad (4.31)$$

Nesse caso o termo  $(\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B})$  tem unidades de  $[\text{N}/\text{m}^3]$  e portanto corresponde à uma **densidade de força de Lorentz**:

$$\vec{\mathcal{F}} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} . \quad (4.32)$$

O trabalho realizado pelos campos no sistema de partículas é simplesmente dado por:

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int \int (\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} dV . \quad (4.33)$$

Ainda é conveniente definir uma densidade de trabalho realizado  $\mathcal{W}$ , e neste caso temos simplesmente:

$$\mathcal{W} = \frac{dW}{dV} = \int (\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} . \quad (4.34)$$

O elemento de trajetória  $d\mathbf{l}$  pode ser escrito utilizando a velocidade do elemento de carga  $dq$  no ponto  $\mathbf{r}$ , na forma  $d\mathbf{l} = \mathbf{v} dt$ , onde  $dt$  é um infinitésimo de intervalo temporal. Fazendo uso de  $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$ , sendo portanto a densidade de corrente paralela à velocidade  $\mathbf{v}$  podemos perceber facilmente que o termo de força magnética não realiza trabalho permitindo reescrever a expressão (4.34) na forma que segue:

$$\mathcal{W} = \int \rho \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} dt = \int dt \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} . \quad (4.35)$$

Considerando o elemento diferencial da equação abaixo e dividindo toda a equação acima por  $dt$  temos a densidade de potência  $\mathcal{P}$ :

$$\mathcal{P} = \frac{dP}{dV} = \frac{d\mathcal{W}}{dt} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} , \quad (4.36)$$

cuja unidade de medida é o  $\text{W}/\text{m}^3$ . Fazendo uso das equações de Maxwell, podemos expressar a densidade de corrente elétrica em função dos campos eletromagnéticos:

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} ,$$

e portanto a densidade de potência toma a forma:

$$\mathcal{P} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \left( \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{E} . \quad (4.37)$$

É conveniente ainda incluir um termo contendo  $\nabla \times \mathbf{E} + \partial \mathbf{B} / \partial t = 0$ , que é um termo nulo para simetrizar as equações, de modo a obter uma identidade vetorial a seguir:

$$\mathcal{P} = \left( \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{E} - \left( \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{H} . \quad (4.38)$$

Agora podemos reagrupar os fatores dessa última equação, na forma que segue:

$$\mathcal{P} = (\nabla \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{E} - \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{H}) - \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{H} \right) , \quad (4.39)$$

o que permite utilizar a seguinte propriedade vetorial:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{H} - \nabla \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{E}$$

e ainda, uma vez que assumimos  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$  e  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ :

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})$$

para finalmente obter a expressão desejada:

$$\mathcal{P} = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \varepsilon \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu} \mathbf{B}^2 \right) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (4.40)$$

A equação acima pode ser reescrita agora, na sua forma final e mais elegante:

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial u_{em}}{\partial t} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (4.41)$$

onde:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (4.42)$$

$$u_{em} = \frac{1}{2} \left( \varepsilon \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu} \mathbf{B}^2 \right) \quad (4.43)$$

Esta é a forma pontual da equação de conservação da energia, ou Teorema de Poynting. O vetor  $\mathbf{S}$  é o vetor de Poynting e tem unidades de potência por unidade de área, ou seja, corresponde a uma densidade de fluxo de energia [ $\text{W}/\text{m}^2$ ] ou [ $\text{J}/(\text{s}\cdot\text{m}^2)$ ], no SI. Já  $u_{em}$  é uma densidade de energia eletromagnética, medida em [ $\text{J}/\text{m}^3$ ] no SI. O termo  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$  é o termo dissipativo para o campo eletromagnético, mas está associado à energia de movimento das partículas, pois podemos escrever:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} . \quad (4.44)$$

Definindo a densidade de energia total do sistema  $u$  como a soma das densidades de energia associadas aos campos, denotada por  $u_{em}$ , e a densidade de energia mecânica associada às partículas, denotada por  $\mathcal{W}$ :

$$u = u_{em} + \mathcal{W} , \quad (4.45)$$

podemos colocar o teorema de Poynting na forma de uma **equação de continuidade para a energia**:

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 . \quad (4.46)$$

Podemos concluir que o vetor de Poynting é responsável pelo transporte de energia. Se a densidade de energia total  $u$  decresce com o tempo em um dado ponto do espaço, isso deve significar que há energia fluindo para fora daquele ponto, sendo transportada pelo vetor de Poynting.

### Teorema de Poynting na forma integral:

Podemos colocar a equação (4.41) na sua forma integral (basta usar o teorema de Gauss, integrando sobre o volume):

$$\oint_a \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} + \frac{d}{dt} \int_V u_{em} dV = - \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV \quad (4.47)$$

onde  $d\mathbf{a}$  é o diferencial de superfície,  $a$  é a superfície que encerra o volume total  $V$ . O termo  $\oint_a \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a}$  representa o fluxo de energia eletromagnética que atravessa os contornos do volume  $V$ , encerrado pela superfície de contorno  $a$ , na forma do vetor de Poynting. Em outras palavras o fluxo de energia eletromagnética para fora de uma superfície  $a$  fechada, deve ser igual à diminuição da energia eletromagnética armazenada no interior do volume adicionada a uma taxa dissipativa de trabalho dos campos sobre as partículas.

### Termos correspondentes em circuitos elétricos

⇒ A dissipação está contida no termo:

$$\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV = V_e I .$$

⇒ A energia armazenada na forma do campo elétrico está associada ao capacitor  $C$  e à diferença de potencial  $V_e$ :

$$\frac{1}{2} \int_V \varepsilon \mathbf{E}^2 dV = \frac{1}{2} C V_e^2 .$$

⇒ A energia armazenada na forma do campo magnético está associada ao indutor  $L$  e à corrente elétrica  $I$ :

$$\frac{1}{2} \int_V \frac{1}{\mu} \mathbf{B}^2 dV = \frac{1}{2} L I^2 .$$

⇒ O termo de radiação não tem análogo direto em circuitos:

$$P_{rad} = \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_a \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} .$$

### Vetor de Poynting em Regime Harmônico

⇒ Em regime harmônico interessa-nos a média sobre um período de oscilação, ou valor RMS do vetor de Poynting  $\mathbf{S}$ :

$$\mathbf{S}_{med} = \langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dt . \quad (4.48)$$

Fica como exercício demonstrar que

$$\mathbf{S}_{med} = \frac{1}{2} \text{Re} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*] , \quad (4.49)$$

de acordo com os resultados mostrados na revisão de Vetores e Fasores.

### Radiação Eletromagnética:

Vamos considerar o valor médio do teorema de Poynting:

$$\nabla \cdot \mathbf{S}_{med} = - \left\langle \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle = f(\mathbf{r}) , \quad (4.50)$$

onde  $f(\mathbf{r})$  atua como fonte para a divergência de  $\mathbf{S}_{med}$  em analogia com a densidade de carga  $\rho$  em relação ao vetor  $\mathbf{D}$ . Se pudermos assumir que  $f(\mathbf{r})$  é dominada por um termo de fonte externa que cede energia ao sistema:

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \text{Re} [\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}_{ext}] ,$$

desprezando outros efeitos temos como solução:

$$\mathbf{S}_{med} = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} f(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' . \quad (4.51)$$

Para uma fonte puntual isotrópica colocada na origem podemos escrever:

$$f(\mathbf{r}) = P_0 \delta^3(\mathbf{r}) ,$$

onde  $P_0$  é a potência emitida por essa fonte. Substituindo em (4.52) nos dá como resultado:

$$\mathbf{S}_{med} = \frac{P_0}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{r}} . \quad (4.52)$$

Observe o decaimento na forma  $1/r^2$ . Esse resultado mantém-se para fontes não isotrópicas, na chamada região de campo distante, conforme será visto mais adiante.

## 4.4 Equações de Maxwell no Regime Harmônico

Considerando-se o regime harmônico, com variação do tipo  $f(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t$ , onde  $a$  e  $b$  são constantes reais, podemos, analogamente ao que é feito na teoria de circuitos elétricos, escrever um campo vetorial qualquer na forma:

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = \Re [\mathbf{A}(x, y, z) e^{i\omega t}]$$

onde  $\mathbf{A}(x, y, z)$  é uma grandeza complexa, ou um fasor. Todas as operações podem ser realizadas sobre a quantidade complexa, e então, tomar a parte real do resultado, dada a linearidade das operações com que trabalharemos. Nesse caso fazemos:

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}(x, y, z) e^{i\omega t}$$

$$\mathbf{B}(x, y, z, t) = \mathbf{B}(x, y, z) e^{i\omega t}$$

Tomar o regime harmônico é o equivalente à tomar a transformada de Fourier das equações de Maxwell em relação ao tempo, para ir para o domínio da frequência. Para meios lineares e isotrópicos as relações entre  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{E}$  podem ser escritas na forma simplificada:

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\omega) \mathbf{E} \quad (4.53)$$

$$\mathbf{B} = \mu(\omega) \mathbf{H} \quad (4.54)$$

onde  $\varepsilon = \varepsilon_0 [1 + \chi_e(\omega)]$  é a permissividade dielétrica e  $\mu = \mu_0 [1 + \chi_m(\omega)]$  é a permeabilidade magnética do meio. Para meios homogêneos  $\varepsilon$  e  $\mu$  não dependem da posição, e fazendo essas considerações podemos escrever as equações de Maxwell no regime harmônico:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (4.55)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (4.56)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega \mu \mathbf{H} \quad (4.57)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + i\omega \varepsilon \mathbf{E} \quad (4.58)$$

o que nos permite utilizar apenas os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$ . Qualquer campo com dependência temporal mais complicada pode ser decomposto em componentes de Fourier, para cada componente estudamos as equações de Maxwell no regime harmônico, e depois o resultado é a soma de todas as componentes.

## 4.5 Das equações de Maxwell microscópicas para o mundo macroscópico

Qualquer teoria dos fenômenos eletromagnéticos baseada na Física Clássica está fundamentada nas famosas equações de Maxwell no domínio clássico. Assumindo que o espaço inter-atômico ou inter-molecular seja o vácuo e que todas as cargas do meio material, constituído de elétrons e núcleos sejam cargas pontuais, podemos postular as equações microscópicas de Maxwell na forma abaixo:

$$\nabla \cdot \mathbf{e} = \frac{1}{\varepsilon_0} \eta, \quad (4.59)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0, \quad (4.60)$$

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}, \quad (4.61)$$

$$\nabla \times \mathbf{b} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t}, \quad (4.62)$$

sendo  $\mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2$  e  $c$  a velocidade da luz no vácuo,  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética do vácuo,  $\varepsilon_0$  a permissividade dielétrica do vácuo e  $\mathbf{e}$  e  $\mathbf{b}$  são os campos elétrico e magnético microscópicos, respectivamente.  $\eta$  e  $\mathbf{j}$  são as densidades de carga e corrente microscópicas, levando em conta todas as cargas estando elas ligadas ou não. No espaço microscópico as oscilações de  $\mathbf{e}$  e  $\mathbf{b}$  são muito grandes. Por exemplo, em um átomo à medida em que nos afastamos do núcleo positivo em direção aos elétrons, vemos grande variação do campo, inclusive com inversão de sinal, ou seja o campo adquire caráter oscilatório. Além disso a agitação das partículas e o movimento eletrônico provoca grandes flutuações dos valores de campo eletromagnético. Se realizamos uma média sobre grande número de partículas, uma vez que as variações tendem a ser aleatórias e as oscilações muito rápidas, há a tendência de cancelamento de variações muito rápidas, restando apenas uma envoltória de campo. Em geral nos experimentos usualmente realizados em escala macroscópica é esse valor médio sobre grande número de partículas que se obtêm. Precisamos então calcular o valor médio das funções microscópicas e das equações de Maxwell.

Em geral, para o cálculo de média necessitamos definir uma função peso. No caso de quisermos conhecer o valor médio do campo eletromagnético para um volume macroscópico, devemos definir uma função peso capaz de levar em conta o campo eletromagnético de vários átomos e moléculas simultaneamente em um volume que possa ser considerado infinitesimal para todos os fins de medidas macroscópicas, tal que para cada um desses volumes de amostragem possamos atribuir um único valor de campo correspondente ao valor médio do campo microscópico naquele dado volume infinitesimal. A definição desse volume infinitesimal deve ser tal que preserve todas as características do meio material macroscópico. A função peso mais comum seria então, constante sobre um cubo infinitesimal centrado em um certo ponto  $\mathbf{x}$  e contendo vários átomos e moléculas, e deve se anular para fora desse cubo. Outra possibilidade é a utilização de funções gaussianas. Definindo a média de uma variável qualquer  $a(\mathbf{x}, t)$  na forma abaixo:

$$A(\mathbf{x}, t) = \langle a(\mathbf{x}, t) \rangle = \int_{V'} f(\mathbf{x} - \mathbf{x}') a(\mathbf{x}', t) dV' , \quad (4.63)$$

onde  $f(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  é a função peso, podemos tomar as médias das equações de Maxwell. Dessa forma:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \langle \mathbf{e}(\mathbf{x}, t) \rangle = \int_{V'} f(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{e}(\mathbf{x}', t) dV' , \quad (4.64)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \langle \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \rangle = \int_{V'} f(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{b}(\mathbf{x}', t) dV' . \quad (4.65)$$

Lembrando que  $f(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  deve ser uma função de suporte compacto centrada na região de interesse, temos:

$$\begin{aligned} \langle \nabla \cdot \mathbf{e}(\mathbf{x}, t) \rangle &= \int_{V'} f(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \nabla' \cdot \mathbf{e}(\mathbf{x}', t) dV' = \\ &= \int_{V'} \nabla' \cdot [f(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{e}(\mathbf{x}', t)] dV' - \int_{V'} \nabla' [f(\mathbf{x} - \mathbf{x}')] \cdot \mathbf{e}(\mathbf{x}', t) dV' = \\ &= \oint_{a(V')} [f(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{e}(\mathbf{x}', t)] \cdot d\mathbf{a}' - \int_{V'} \nabla' [f(\mathbf{x} - \mathbf{x}')] \cdot \mathbf{e}(\mathbf{x}', t) dV' , \end{aligned} \quad (4.66)$$

onde aplicamos propriedades do cálculo vetorial e o teorema de Gauss. Lembrando que se o volume de integração é grande o suficiente, a função  $f$  deve se anular nas fronteiras, e o primeiro termo se anula. Pelas propriedades de derivadas de  $(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  é fácil ver que  $\nabla' f(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = -\nabla f(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ , ficando fácil mostrar que:

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{e}(\mathbf{x}, t) \rangle = \nabla \cdot \langle \mathbf{e}(\mathbf{x}, t) \rangle = \nabla \cdot \mathbf{E} . \quad (4.67)$$

Aplicando argumentos similares é fácil mostrar que:

$$\langle \nabla \times \mathbf{e}(\mathbf{x}, t) \rangle = \nabla \times \langle \mathbf{e}(\mathbf{x}, t) \rangle = \nabla \times \mathbf{E} . \quad (4.68)$$

Do mesmo modo para as médias temporais, tem-se

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{e}(\mathbf{x}, t) \rangle = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} . \quad (4.69)$$

Generalizando, aplicando a propriedade: a derivada da média é igual à média da derivada, podemos tomar a média das equações (4.59)-(4.62). As equações (4.60) e (4.61) são prontamente obtidas:

$$\begin{aligned} \langle \nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \rangle &\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 , \\ \left\langle \nabla \times \mathbf{e} = -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \right\rangle &\Rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} . \end{aligned}$$

As equações (4.59) e (4.62) necessitam maiores cuidados, sobretudo com relação às fontes  $\eta$  e  $\mathbf{j}$ . Devemos lembrar que a densidade de cargas  $\eta$  é microscópica e deve levar em conta todas as cargas, livres ou ligadas. O mesmo vale para  $\mathbf{j}$ , que deve levar em conta correntes livres e correntes atômico-moleculares.

Utilizaremos aqui a função delta de Dirac para descrever todas as cargas como pontuais. São propriedades da função delta de Dirac:

$$\int_{V'} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') dV' = 1 \quad (4.70)$$

$$\int_{V'} f(\mathbf{x}') \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') dV' = f(\mathbf{x}) \quad (4.71)$$

Uma distribuição macroscópica contínua é o resultado da suavização da função de Dirac pelo efeito da média, ou seja, pela função peso. Vejamos:

$$\eta = \sum (\text{cargas livres}) + \sum (\text{cargas ligadas})$$

Definindo por antecipação o momento de dipolo elétrico na forma:

$$\mathbf{p}_e = Q \mathbf{d} \quad (4.72)$$

onde  $Q$  é a carga positiva e  $\mathbf{d}$  é o vetor que aponta de  $-Q$  para  $+Q$ , podemos escrever:

$$\eta = \sum_i q_i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) + \sum_{nj} Q_j^n \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n - \mathbf{d}_{nj}) \quad (4.73)$$

sendo a somatória sobre o índice  $i$  realizado sobre as cargas livres sem vínculos e a somatória sobre os índices  $n_j$  realizado sobre as cargas ligadas na forma atômico-molecular. Nesse caso  $\mathbf{x}_i$  é a posição instantânea da carga livre  $q_i$  enquanto para a  $j$ -ésima carga no  $n$ -ésimo átomo,  $Q_j^n$  a posição é dada em relação ao centro geométrico do sistema atômico,  $\mathbf{x}_n$ . Em geral o vetor de posição relativa  $\mathbf{d}_{nj}$  dessa carga em relação ao centro é em módulo muito menor do que o próprio valor de  $\mathbf{x}_n$ , permitindo conforme veremos logo adiante, uma adequada expansão em séries de Taylor. Devemos realizar a média de (4.73):

$$\langle \eta \rangle = \int_{V'} f(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \left( \sum_i q_i \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_i) + \sum_{nj} Q_j^n \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_n - \mathbf{d}_{nj}) \right) dV' \quad (4.74)$$

Fazendo a integral sobre o volume na equação acima traz como resultado:

$$\langle \eta \rangle = \sum_i q_i f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) + \sum_{nj} Q_j^n f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n - \mathbf{d}_{nj}) . \quad (4.75)$$

Conforme já comentado,  $\mathbf{d}_{nj}$  tem dimensões atômicas e portanto iremos expandir  $f$  em séries de Taylor, levando em conta até a primeira ordem, na forma abaixo:

$$f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n - \mathbf{d}_{nj}) = f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) - \mathbf{d}_{nj} \cdot \nabla f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) + \dots$$

Termos de ordem maior na série de Taylor levam às definições de quadrupolo elétrico e momentos de ordem maior, que dá origem às chamadas expansões em multipolos. Para o que nos interessa basta até a primeira ordem e então:

$$\langle \eta \rangle = \sum_i q_i f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) + \sum_{nj} Q_j^n f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) - \sum_{nj} Q_j^n \mathbf{d}_{nj} \cdot \nabla f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n). \quad (4.76)$$

Vamos trabalhar o último termo:

$$\sum_{nj} Q_j^n \mathbf{d}_{nj} \cdot \nabla f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) = \nabla \cdot \sum_{nj} \int_{V'} f(\mathbf{x} - \mathbf{x}') (Q_j^n \mathbf{d}_{nj}) \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_n) dV'$$

sendo  $\mathbf{p}_e^{nj} = Q_j^n \mathbf{d}_{nj}$  o momento de dipolo elétrico da  $j$ -ésima carga na  $n$ -ésima molécula. Se definirmos a densidade de polarização dielétrica, ou simplesmente polarização:

$$\mathbf{P} = \sum_{nj} \int_{V'} f(\mathbf{x} - \mathbf{x}') (Q_j^n \mathbf{d}_{nj}) \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_n) dV' = \sum_{nj} \int_{V'} f(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{p}_e^{nj} \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_n) \quad (4.77)$$

temos:

$$\langle \eta \rangle = \rho - \nabla \cdot \mathbf{P}, \quad (4.78)$$

onde:

$$\rho = \sum_i q_i f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) + \sum_{nj} Q_j^n f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n).$$

Observe que o vetor de polarização  $\mathbf{P}$  é proporcional a  $\sum_{nj} \mathbf{p}_e^{nj}/V$  e podemos interpretá-lo como a densidade de momentos de dipolo elétrico. Dessa forma a média da equação (4.59) torna-se

$$\left\langle \nabla \cdot \mathbf{e} = \frac{1}{\varepsilon_0} \eta \right\rangle \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}}{\varepsilon_0},$$

ou  $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ , sendo  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$

Agora realizando a média de (4.62) temos:

$$\left\langle \nabla \times \mathbf{b} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} \right\rangle \Rightarrow \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \langle \mathbf{j} \rangle + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Resta agora calcular o valor médio  $\langle \mathbf{j} \rangle$ . Lembrando dos conceitos básicos da eletrodinâmica:

$$\mathbf{j} = \eta_i \mathbf{v}_i$$

onde  $\eta_i$  é a densidade de carga da  $i$ -ésima carga e  $\mathbf{v}_i$  é a velocidade instantânea dessa carga, podemos escrever:

$$\mathbf{j} = \sum_i q_i \mathbf{v}_i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) + \sum_{nj} Q_n^j (\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_{nj}) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n - \mathbf{d}_{nj}), \quad (4.79)$$

onde a somatória em  $i$  se dá sobre cargas livres e a somatória em  $nj$  sobre as cargas ligadas. É interessante notar que  $\mathbf{v}_n$  é a velocidade do centro do sistema molecular e  $\mathbf{v}_{nj}$  é a velocidade relativa a esse centro da  $j$ -ésima carga na  $n$ -ésima estrutura ligada. Realizando a média temos:

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \sum_i q_i \mathbf{v}_i f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) + \sum_{nj} Q_n^j (\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_{nj}) f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n - \mathbf{d}_{nj}), \quad (4.80)$$

e podemos novamente utilizar a expansão em séries de Taylor:

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \sum_i q_i \mathbf{v}_i f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) + \sum_{nj} Q_n^j (\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_{nj}) [f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) - \mathbf{d}_{nj} \cdot \nabla f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)], \quad (4.81)$$

Podemos expandir a expressão acima e definir:

$$\mathbf{J} = \sum_i q_i \mathbf{v}_i f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) + \sum_{nj} Q_n^j \mathbf{v}_n f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) . \quad (4.82)$$

É bom lembrar ainda que uma vez que  $\mathbf{d}_{nj}$  é a posição relativa da  $j$ -ésima carga na  $n$ -ésima molécula, a velocidade relativa  $\mathbf{v}_{nj}$  é dada por:

$$\mathbf{v}_{nj} = \frac{d}{dt} \mathbf{d}_{nj} ,$$

e podemos então escrever:

$$\sum_{nj} Q_n^j \mathbf{v}_{nj} f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} .$$

Resta analisar o termo seguinte:

$$- \sum_{nj} Q_n^j (\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_{nj}) \mathbf{d}_{nj} \cdot \nabla f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) .$$

A demonstração é bastante trabalhosa, envolvendo um termo de quadrupolo elétrico, ficando a encargo do leitor interessado a demonstração, que envolve uso de identidades do cálculo vetorial. Aquele termo que nos interessa é a magnetização:

$$- \sum_{nj} Q_n^j (\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_{nj}) \mathbf{d}_{nj} \cdot \nabla f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \approx \nabla \times \mathbf{M}$$

sendo

$$\mathbf{M} = \left\langle \sum_n \mathbf{m}_n \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \right\rangle , \quad (4.83)$$

onde  $\mathbf{m}_n$  é denominado momento de dipolo magnético da  $n$ -ésima molécula:

$$\mathbf{m}_n = \sum_j \frac{1}{2} Q_n^j (\mathbf{d}_{nj} \times \mathbf{v}_{nj}) . \quad (4.84)$$

Dessa forma temos:

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} . \quad (4.85)$$

e finalmente

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Definindo o vetor:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$$

temos

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

E resumam-se assim as equações de Maxwell macroscópicas:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho , \quad (4.86)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 , \quad (4.87)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} , \quad (4.88)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} , \quad (4.89)$$

juntamente com as denominadas relações constitutivas

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} , \quad (4.90)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) , \quad (4.91)$$

$$\mathbf{P} = \left\langle \sum_{nj} \mathbf{p}_e^{nj} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \right\rangle , \quad (4.92)$$

$$\mathbf{M} = \left\langle \sum_{nj} \mathbf{m}_{nj} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \right\rangle , \quad (4.93)$$

onde  $\mathbf{M}$  é denominado vetor magnetização e corresponde à densidade de momento de dipolo magnético no meio material. São definidos ainda o momento de dipolo elétrico e momento de dipolo magnético:

$$\mathbf{p}_e^{nj} = Q_n^j \mathbf{d}_{nj} , \quad (4.94)$$

$$\mathbf{m}_{nj} = \frac{1}{2} Q_n^j \mathbf{d}_{nj} \times \mathbf{v}_{nj} . \quad (4.95)$$

Para os interessados em maiores detalhes sugere-se a Referência [4.1] de J.D. Jackson, que é referência obrigatória na área de Eletrodinâmica Clássica.

Nesta última Seção demonstramos que para ir do domínio atômico para a escala macroscópica, devemos definir além dos campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ , campos auxiliares  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{H}$ , que levam em conta a polarização dielétrica e a magnetização do meio. Surgem naturalmente através da realização das médias as definições do momento de dipolo elétrico e momento de dipolo magnético. Entretanto a definição clássica do momento de dipolo magnético não leva em conta o momento angular intrínseco das partículas que é conhecido como spin, cujo entendimento só pode ser feito através da mecânica quântica, além do escopo desta obra.

## 4.6 Referências Deste Capítulo

- 4.1 John D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (Wiley and Sons, New York, 3rd. Ed., 1998).
- 4.2 Matthew N.O. Sadiku, *Elementos do Eletromagnetismo* (Ed. Bookman, Porto Alegre, 5a. Ed, 2005).
- 4.3 William H. Hayt, *Eletromagnetismo* (LTC, 6a Ed.).
- 4.4 John R. Reitz, Frederick J. Milford, Robert W. Christy, *Fundamentos da Teoria Eletromagnética* (Ed. Campus).
- 4.5 J.C. Maxwell, A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field, Philosophical Transactions of the Royal Society of London 155, 459-512 (1865); J.C. Maxwell, A Treatise on Electricity and Magnetism, Vol. 1 and 2 (Dover, New York, 1991), 3rd. Ed. (A primeira edição dos dois volumes desta obra foi publicada no ano de 1873).

## 4.7 Problemas Propostos

- 1) Faça um resumo histórico da descoberta da Lei de Indução e da Lei de Ampère-Maxwell, explicando as motivações históricas que levaram a descoberta desses princípios físicos. Descreva o significado físico das

equações de Maxwell na forma puntual ou diferencial:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},\end{aligned}$$

Observação: as relações constitutivas para meios materiais são

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu \mathbf{H}\end{aligned}$$

Faça as ilustrações que julgar importantes.

- 2) Encontre as equações de Maxwell na forma integral, a partir dos teoremas de Gauss e Stokes e das equações de Maxwell na forma puntual.

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV \quad (\text{Teorema de Gauss})$$

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{Teorema de Stokes})$$

Descreva o significado das equações na forma integral.

- 3) Mostre a partir da Lei de Ampère-Maxwell e da Lei de Gauss-Coulomb ( $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ ), que a equação da continuidade é consequência das equações de Maxwell.
- 4) Obtenha no regime estático as leis da eletrostática e da magnetostática. Mostre que o campo eletrostático pode ser expresso na forma  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  onde  $\phi$  é o potencial escalar elétrico. Por que isso é válido? Obtenha a equação de Poisson na Eletrostática.
- 5) O vetor densidade de fluxo magnético associado a um fio infinitamente longo transportando uma corrente  $I$  é dado por:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{\mathbf{a}}_\varphi$$

Mostre por um cálculo direto que  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ . Mostre ainda que este campo satisfaz a Lei de Ampère, utilizando a forma integral.

- 6) Uma esfera de cargas no espaço livre é caracterizada por uma densidade de cargas volumétrica dada por:

$$\rho = \begin{cases} \rho_0(1 - r^2/a^2) & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

sendo  $a$  o raio da esfera e  $\rho_0$  uma constante. Encontre o vetor campo elétrico  $\mathbf{E}$  para qualquer valor de  $r$  e calcule  $\nabla \times \mathbf{E}$ .

- 7) Um campo magnético é descrito em coordenadas cilíndricas por

$$\begin{aligned}B_z &= B_0 \rho^2 t \cos(2\pi z/L) \\ B_\varphi &= 0\end{aligned}$$

Sabendo que não há variações em  $\varphi$  tanto no campo elétrico quanto no campo magnético, encontre as componentes  $B_\rho$  e  $E_\varphi$ . Sugestão: Encontre  $B_\rho$  a partir da equação em divergência para o campo magnético, e o campo  $E_\varphi$  a partir da Lei de Faraday.

- 8) Dado o campo elétrico no vácuo  $E_x = E_0 \cos(\omega t - kz)$  e sabendo que  $E_y = E_z = 0$ , encontre a partir das equações de Maxwell o campo magnético  $\mathbf{B}$ . Escreva os campos na forma de fasores.
- 9) Com base nos princípios físicos da lei de Faraday-Lenz projete um medidor de corrente que passa em um fio longo em regime de corrente alternada na frequência angular  $\omega$ , monte o dispositivo e faça testes experimentais com o aparato desenvolvido.
- 10) Dado o teorema de Poynting na forma puntual:

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial u_{em}}{\partial t} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$$

onde

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

$$u_{em} = \frac{1}{2} \left( \varepsilon \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu} \mathbf{B}^2 \right)$$

dê o significado físico desta equação (explique o que representa cada termo desta equação) e através do teorema de Gauss encontre a forma integral da equação, também dando a descrição física para a forma integral.

Para uma fonte de energia puntual concentrada na origem, emanando uma quantidade de potência constante ao longo do tempo, podemos escrever:

$$\nabla \cdot \mathbf{S}_{med} = f(\mathbf{r}) , \tag{4.96}$$

onde  $\mathbf{S}_{med}$  é o valor médio do vetor de Poynting e  $f(\mathbf{r})$  é o valor médio de  $-\frac{\partial u_{em}}{\partial t} - \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$  no tempo. Qual é a forma integral de solução de  $\mathbf{S}_{med}$ ? O que se espera para distâncias muito grandes em relação à origem, se a fonte  $f(\mathbf{r})$  está localizada na origem e é pequena em relação à distância ao observador?

## Chapter 5

# Propriedades Eletromagnéticas dos Meios Materiais

Os meios materiais costumam ser caracterizados por inúmeras propriedades físicas e químicas. Por exemplo, a água em condições normais de pressão e temperatura apresenta-se no estado líquido. O resfriamento da água pode levá-la ao estado sólido e o aquecimento acentuado ao estado de vapor. As ligas metálicas são caracterizadas por suas propriedades mecânicas de maleabilidade, ductibilidade, dureza etc. Assim como os meios materiais respondem à presença de um campo de temperatura ou a tensões mecânicas aplicadas, também o farão em relação à presença de campos eletromagnéticos. A resposta dos meios a campos eletromagnéticos aplicados pode depender da amplitude, direção e/ou frequência desses campos. O objetivo deste Capítulo é apresentar os principais conceitos associados à caracterização eletromagnética dos meios materiais, como homogeneidade, isotropia e linearidade, descrever a função resposta em relação a campos elétricos e magnéticos, e classificar de modo simplificado os meios materiais de acordo com suas principais características.

### 5.1 Função Resposta ou Susceptibilidade de um Material

Um dos conceitos mais fundamentais da Física é a causalidade, ou seja, um efeito somente é observável depois que uma excitação ou causa externa anterior lhe deu origem, ou seja, o efeito é sempre precedido por uma causa. Aqui vamos considerar uma teoria geral para o efeito produzido em um meio material por um estímulo exterior aplicado a esse meio. Espera-se a existência de uma relação entre causa e efeito, que não é necessariamente linear. Essa relação é denominada função resposta ou susceptibilidade. Suponha agora que um estímulo externo  $\mathbf{e}(\mathbf{r}, t)$  é aplicado a um material qualquer. Espera-se que alguma característica física desse meio material, denominada  $\mathbf{s}(\mathbf{r}, t)$ , seja afetada pelo estímulo, apresentando uma resposta típica do material. A relação entre a componente  $i$ -ésima do vetor de saída,  $s_i$  e a  $j$ -ésima componente do vetor de estímulo,  $e_j$  é dada por uma convolução na forma abaixo:

$$s_i(\mathbf{r}, t) = \sum_j \int_{V'} d^3\mathbf{r}' \int_{-\infty}^t dt' \Xi_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') e_j(\mathbf{r}', t'). \quad (5.1)$$

Note que a saída  $s_i(\mathbf{r}, t)$  pode depender de todos os instantes de tempo anteriores a  $t$  mas nenhum instante  $t' > t$ , ou seja, não há efeito sem causa. A função  $\Xi_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$  é denominado tensor de susceptibilidade no espaço real, conectando as diversas componentes dos vetores de entrada e saída,  $e_j$  e  $s_i$ , respectivamente. Geralmente podemos assumir por simplicidade que a resposta do material no ponto  $\mathbf{r}$  não depende do estímulo que ocorre em outros pontos, ou seja:

$$\Xi_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \chi_{ij}(\mathbf{r}', t - t'), \quad (5.2)$$

onde  $\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  é a função delta de Dirac em relação às variáveis espaciais e  $\chi_{ij}(\mathbf{r}', t - t')$  é também denominado tensor de susceptibilidade, mas agora somente localmente da posição, adicionalmente à dependência temporal e implicitamente do estímulo  $\mathbf{e}$ . Inserindo (5.2) em (5.1) obtém-se:

$$s_i(\mathbf{r}, t) = \sum_j \int_{-\infty}^t dt' \chi_{ij}(\mathbf{r}, t - t') e_j(\mathbf{r}, t'). \quad (5.3)$$

É conveniente aplicar a transformada de Fourier em relação ao tempo à expressão acima, porque nesse caso a integral de convolução no tempo resulta em um simples produto no domínio da frequência angular temporal  $\omega$  e tem-se:

$$s_i(\mathbf{r}, \omega) = \sum_j \chi_{ij}(\mathbf{r}, \omega) e_j(\mathbf{r}, \omega). \quad (5.4)$$

Agora podemos analisar algumas propriedades da função de susceptibilidade no domínio da frequência para os mais diversos meios materiais.

### 5.1.1 Homogeneidade, Isotropia e Linearidade

A função susceptibilidade pode ser representada na forma de uma matriz, que no espaço tridimensional tem 9 componentes distintas, mostradas abaixo em coordenadas cartesianas:

$$\bar{\chi} = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

onde cada elemento  $\chi_{ij}(\mathbf{e}, \mathbf{r}, \omega)$  pode depender do estímulo  $\mathbf{e}$ , da posição  $\mathbf{r}$  e da frequência  $\omega$ . Os meios podem ser classificados pela forma com que  $\bar{\chi}$  depende de  $\mathbf{e}$  e  $\mathbf{r}$ . Para fazer tal classificação precisamos definir precisamente os conceitos de homogeneidade, isotropia e linearidade.

**Homogeneidade** refere-se à independência da função susceptibilidade em relação à posição  $\mathbf{r}$ . Isso significa que o meio material tem as mesmas propriedades em todos os pontos do espaço e é dito meio homogêneo. Nesse caso a função resposta é função apenas de  $\omega$ , e eventualmente poderá ser função da amplitude estímulo  $\mathbf{e}$  desde que o próprio estímulo seja uniforme no espaço. Na prática, a homogeneidade de um meio é apenas uma aproximação, embora válida em diversas situações, uma vez que imperfeições e flutuações microscópicas são sempre presentes nos meios materiais. Para citar um exemplo, considere o ar como meio material: se desprezarmos as diferenças de densidade causadas por efeitos de temperatura e pressão, ou impurezas devidas a partículas de poeira e poluição, o ar é um meio homogêneo, o que é válido geralmente em frequências baixas. Mas no domínio de frequências ópticas, o efeito do gradiente de temperatura bastante acentuado próximo de uma superfície muito aquecida, como o pavimento de uma rodovia em um dia muito quente, faz com que surjam diferenças na densidade do ar, modificando seu índice de refração em função da distância em relação à superfície aquecida, tornando-o um meio não-homogêneo. Os efeitos dessa não-homogeneidade são bem conhecidos por todos que já vivenciaram a refração de baixo ângulo que produz uma sensação de espelhamento no pavimento, dificultando a visibilidade em uma rodovia.

**Isotropia** refere-se a uma propriedade do espaço, que deve ser igual em todas as direções possíveis. Para tanto, o espaço deve ter as mesmas propriedades quando observado de qualquer direção. Imagine todas as direções representadas pelos vetores unitários normais à superfície de uma esfera. Um meio verdadeiramente isotrópico tem suas propriedades inalteradas pela direção escolhida, ou seja, a função de susceptibilidade do material não poderá depender da direção de aplicação do estímulo, já que todas as direções no interior do

material tem propriedades iguais. Nesse caso tensor de susceptibilidade deve ser expresso na forma que segue:

$$\bar{\chi} = \chi(\mathbf{r}, \omega) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.6)$$

ou seja, é uma função susceptibilidade  $\chi(\mathbf{r}, \omega)$  idêntica em todas as direções, multiplicada pela matriz identidade, significando que a resposta é sempre paralela ao estímulo e além disso, em qualquer direção que o estímulo é aplicado obtém-se a mesma amplitude e fase da resposta, relativa ao estímulo. Nesse caso, a relação entre a resposta do material e o estímulo possa ser expressa na forma simples abaixo:

$$\mathbf{s}(\mathbf{r}, \omega) = \chi(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{e}(\mathbf{r}, \omega). \quad (5.7)$$

Embora a maioria das aplicações práticas possam ser aproximadas por uma situação isotrópica, existem inúmeros exemplos onde esta aproximação não é válida. Um meio que tem respostas diferentes em diferentes direções é denominado *anisotrópico*. Se o tensor da função resposta puder ser expresso na forma diagonal, mas os elementos da diagonal não são idênticos, dizemos que se trata de uma anisotropia diagonal. Toda matriz pode ser diagonalizada por uma transformação de similaridade, e nesse caso os eixos de referência, não necessariamente ortogonais, tem que ser adequadamente escolhidos e são considerados eixos de simetria do material. A anisotropia leva a interessantes efeitos, como por exemplo a birrefringência, em que o índice de refração do material é dependente da orientação dos campos aplicados e/ou da direção de propagação da onda.

**Linearidade** é a propriedade genérica em que a função resposta ou susceptibilidade do sistema não depende da amplitude do estímulo, ou seja, a saída e a entrada estão relacionados por uma constante de proporcionalidade, independente do estímulo  $e_j$ . Nesse caso o gráfico de  $s_j$  versus  $e_i$  é uma reta cuja tangente é igual à susceptibilidade. Geralmente essa propriedade é válida para baixos campos de estímulo aplicados ao material. Para altos campos o meio material acaba por apresentar algum comportamento não-linear. Exemplos de meios lineares e não lineares são o resistor ôhmico e o diodo, respectivamente, em relação à condutividade elétrica.

## 5.2 Teoria da Permissividade Dielétrica

As equações de Maxwell no domínio do tempo descrevem todos os fenômenos eletromagnéticos conhecidos e são dadas abaixo:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (5.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (5.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (5.10)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (5.11)$$

onde  $\rho = \sum_a q_a n_a$  e  $\mathbf{J} = \sum_a n_a q_a \mathbf{v}_a$  são a densidade de carga volumétrica total e vetor densidade de corrente, medidas em  $C/m^3$  e  $A/m^2$ , em respectivamente, produzidas pelas cargas  $q_a$ , que se movem com velocidade  $\mathbf{v}_a$  e cuja densidade volumétrica em partículas por unidade de volume é dada por  $n_a$ ,  $\mathbf{E}$  é o vetor intensidade de campo elétrico, medido em  $V/m$ ,  $\mathbf{D}$  é o vetor deslocamento elétrico em  $C/m^2$ ,  $\mathbf{H}$  é o vetor intensidade de campo magnético em  $A/m$  e  $\mathbf{B}$  é o vetor densidade de fluxo magnético em  $Wb/m^2$ . Todas as unidades utilizadas estão dadas no sistema internacional de medidas (SI).

Para completar o conjunto das equações, é necessário conhecer as relações constitutivas dos meios, que contém a resposta dos meios materiais à aplicação dos campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$ . Para um meio material não-magnético

isotrópico e homogêneo, na presença de campos eletromagnéticos  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  e  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  que variam suavemente no espaço em comparação com a escala atômico-molecular, a resposta de um material é dada pelas relações abaixo:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} , \quad (5.12)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} , \quad (5.13)$$

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi_e(t' - t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt' , \quad (5.14)$$

onde  $\mathbf{P}$  é a densidade de polarização dielétrica do meio,  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H/m}$  é a permeabilidade magnética do vácuo,  $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{F/m}$  é a permissividade dielétrica do vácuo e  $\chi_e(t - t')$  a função resposta ou susceptibilidade dielétrica no domínio do tempo.

A transformada de Fourier, conectando os espaços duais de tempo  $t$  e frequência  $\omega$ , já definida anteriormente, está dada na forma abaixo:

$$f(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega , \quad (5.15)$$

$$F(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega t} dt , \quad (5.16)$$

assumindo meios macroscopicamente neutros tem-se que  $\rho = 0$ , e como regra geral, que os meios materiais satisfaçam a chamada lei vetorial de Ohm, onde a densidade de corrente  $\mathbf{J}$  e o campo elétrico  $\mathbf{E}$  são proporcionais no domínio da frequência,

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} , \quad (5.17)$$

onde  $\sigma$  é a condutividade elétrica do material, as equações de Maxwell são expressas na forma abaixo:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 , \quad (5.18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 , \quad (5.19)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu_0 \mathbf{H} , \quad (5.20)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = i\omega\varepsilon_c \mathbf{E} . \quad (5.21)$$

A permissividade dielétrica complexa do material,  $\varepsilon_c$  aparecendo na equação (5.21) é dada pela seguinte expressão:

$$\varepsilon_c = \varepsilon_1 - i\varepsilon_2 = \varepsilon_1 - i\frac{\sigma}{\omega} , \quad (5.22)$$

ou seja, a grandeza física  $\varepsilon_c$  incorpora os efeitos da condutividade elétrica do material através da parte imaginária.

Pode-se ainda aplicar a transformação de Fourier às equações (5.12) e (5.14). No domínio da frequência a integral de convolução (5.14) reduz-se a um produto  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega) = \chi_e(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ . Nesse caso a equação (5.12) toma a forma abaixo:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_c(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) , \quad (5.23)$$

onde a permissividade dielétrica complexa é relacionada à função resposta susceptibilidade dielétrica  $\chi_e(\omega)$  pela equação abaixo:

$$\varepsilon_c(\omega) = \varepsilon_0 [1 + \chi_e(\omega)] . \quad (5.24)$$

Observe que no domínio da frequência a relação entre a polarização dielétrica e o campo elétrico aplicado é dada diretamente pela equação  $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$ .

É possível obter a partir das leis de Newton da mecânica uma equação diferencial que descreva a dinâmica do vetor  $\mathbf{P}$ . O resultado no domínio do tempo é o seguinte:

$$\frac{d^2\mathbf{P}}{dt^2} + \nu \frac{d\mathbf{P}}{dt} + \omega_0^2 \mathbf{P} = \omega_p^2 \varepsilon_0 \mathbf{E} , \quad (5.25)$$

onde  $\omega_p = n_q q^2 / (m \varepsilon_0)$  é denominada frequência de plasma associada à carga  $q$ , cuja massa vale  $m$  e densidade de partículas de carga  $q$  sendo dada por  $n_q$ ,  $\omega_0$  é a frequência de ressonância, associada a uma força de ligação da carga  $q$  ao sistema material e  $\nu = 1/\tau$  é a frequência de colisões associada à dissipação sempre presente em um sistema físico real. Resolvendo a equação acima no domínio da frequência, e generalizando para o caso de mais de um tipo de portador de carga e/ou mais de uma frequência de ressonância do material obtém-se uma expressão geral para a permissividade dielétrica complexa do material, dada abaixo:

$$\varepsilon_c(\omega) = \varepsilon_1(\omega) - i\varepsilon_2(\omega) , \quad (5.26)$$

$$\frac{\varepsilon_1(\omega)}{\varepsilon_0} = 1 + \sum_n \frac{\omega_{pn}^2 (\omega_{0n}^2 - \omega^2)}{(\omega_{0n}^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \nu_n^2} , \quad (5.27)$$

$$\frac{\varepsilon_2(\omega)}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma(\omega)}{\omega \varepsilon_0} = \sum_n \frac{\omega_{pn}^2 \omega \nu_n}{(\omega_{0n}^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \nu_n^2} . \quad (5.28)$$

Pode-se perceber das equações acima que  $\varepsilon_1(\omega) = \varepsilon_1(-\omega)$  e  $\varepsilon_2(\omega) = -\varepsilon_2(-\omega)$ . Essa relação de paridade das funções  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  estão associadas à causalidade e podem ser diretamente correlacionadas através das relações de Kramers-Krönig, mostradas abaixo:

$$\varepsilon_1(\omega) = 1 + \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_2(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' , \quad (5.29)$$

$$\varepsilon_2(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\varepsilon_1(\omega') - 1]}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (5.30)$$

onde o símbolo  $P$  acima denota parte principal da integral, que significa remover os pontos para os quais a integral diverge.

É interessante considerar o comportamento idealizado em frequência de meios materiais que são considerados isolantes ou condutores no regime DC. Suponha por simplicidade que somente haja uma frequência de ressonância  $\omega_0$  no material, reduzindo as expressões (5.27) e (5.28) às seguintes:

$$\frac{\varepsilon_1(\omega)}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{\omega_p^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \nu^2} , \quad (5.31)$$

$$\frac{\varepsilon_2(\omega)}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma(\omega)}{\omega \varepsilon_0} = \frac{\omega_p^2 \omega \nu}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \nu^2} . \quad (5.32)$$

Agora considere o caso de materiais dielétricos de poucas perdas, tendo como exemplos os isolantes dielétricos utilizados em dispositivos de alta tensão e ainda as fibras ópticas. O caso ideal corresponde a levar as expressões acima ao limite  $\nu \rightarrow 0$  e nesse caso obtém-se:

$$\frac{\varepsilon_1(\omega)}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} , \quad (5.33)$$

$$\frac{\varepsilon_2(\omega)}{\varepsilon_0} = \pi \frac{\omega_p^2}{2\omega} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] . \quad (5.34)$$

Na frequência de ressonância  $\omega = \omega_0$ , a parte imaginária  $\varepsilon_2$  diverge, o que significa que um meio dielétrico de poucas perdas tem comportamento de um condutor, com alta condutividade efetiva. Todavia, longe das ressonâncias do material  $\varepsilon_2 = 0$  e obtém-se a equação de Sellmeier (se o material tem várias frequências de

ressonância  $\omega_{0n}$ , somam-se sobre elas):

$$\varepsilon_1(\omega) = 1 + \sum_n \frac{\omega_{pn}^2}{\omega_{0n}^2 - \omega^2}. \quad (5.35)$$

É bastante fácil verificar a validade das relações de Kramers-Krönig para as equações (5.31) e (5.32), o que permite vislumbrar um método de caracterização experimental da permissividade dielétrica complexa. Determina-se experimentalmente a parte imaginária da permissividade dielétrica complexa em frequência e obtém-se a parte real a partir da equação (5.30). É fácil verificar que a parte imaginária da permissividade dielétrica complexa está associada à absorção do material, pois o campo aplicado a um dado material  $\mathbf{E}$  induz uma corrente  $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$  que leva à uma dissipação média de potência cuja densidade volumétrica é dada por:

$$\mathcal{P}_{dis} = \frac{1}{2}\sigma|\mathbf{E}|^2 = \frac{1}{2}\omega\varepsilon_2|\mathbf{E}_{inc}|^2. \quad (5.36)$$

Pode-se definir a Absortividade do Material na forma abaixo:

$$A = \frac{\mathcal{P}_{dis}}{|\mathbf{E}|^2} = \frac{1}{2}\omega\varepsilon_2. \quad (5.37)$$

Conhecendo a amplitude do campo elétrico de frequência  $\omega$  aplicado ao material e medindo a densidade de potência média dissipada no material tem-se a medida desejada de  $\varepsilon_2$ . Essa técnica é muito útil em altas frequências, onde  $|\mathbf{E}|^2$  está diretamente relacionado à densidade de fluxo de energia incidente no material e providenciado por uma fonte de radiação.

Nos meios condutores os elétrons são quase livres, o que corresponde a não haver ressonâncias e  $\omega_0 \rightarrow 0$ . Condutores metálicos usuais ainda satisfazem a condição  $\nu \gg \omega$  para frequências abaixo do espectro ultravioleta, o que resulta na seguinte expressão:

$$\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} = \varepsilon_r - i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} \approx 1 - i\frac{\omega_p^2}{\omega\nu}. \quad (5.38)$$

Por comparação,  $\sigma = \omega_p^2\varepsilon^0/\nu = n_q q^2\tau/m$ , o que corresponde à condutividade de Boltzmann dos metais.

A Figura 5.1 mostra curvas típicas da permissividade dielétrica complexa para um meio dielétrico hipotético com frequências de plasma  $\omega_p/\omega_0 = 3$  e de colisões  $\nu/\omega_0 = 0.5 < \omega_p/\omega_0$ , normalizadas pela frequência de ressonância  $\omega_0$ , em função da frequência normalizada  $\omega/\omega_0$ . É fácil ver que no valor de pico da parte imaginária  $\varepsilon_2$  há uma diminuição abrupta da parte real  $\varepsilon_1$ . Um caso distinto é ilustrado na Figura 5.2 para outro meio hipotético, que poderia ilustrar um material com condutividade iônica, por exemplo, fazendo  $\omega_p < \nu$ . Foram escolhidos os valores normalizados  $\omega_p/\omega_0 = 1.5$  e  $\nu/\omega_0 = 3$ .

Cabe destacar que é um tanto usual na área de materiais dielétricos apresentar o comportamento da permissividade dielétrica complexa através o gráfico (ou diagrama) de Nyquist, onde a parte real  $\varepsilon_1(\omega)/\varepsilon_0$  é plotada versus a parte imaginária  $\varepsilon_2(\omega)/\varepsilon_0$ , ambas obviamente parametrizadas pela frequência  $\omega$ . Na Figura 5.3 ilustra-se o caso de um material que possui duas ressonâncias distintas  $\omega_{01}$  e  $\omega_{02}$  é apresentado ao leitor, fazendo  $\omega_{02} = 4\omega_{01}$ . As frequências de plasma e colisões associadas às duas ressonâncias foram tomadas idênticas por simplicidade, sendo adotados os valores  $\omega_p/\omega_{01} = 2$  e  $\nu/\omega_{01} = 0.5$ . Note que há um loop interno correspondendo à segunda ressonância no gráfico de Nyquist.

É possível que haja em um meio material uma banda de ressonâncias, ou seja, um intervalo de frequências  $\omega_0$  onde é permitido que haja máxima absorção da radiação eletromagnética, como ocorre em um semicondutor por exemplo, em que a frequência mínima para que haja efeito fotoelétrico interno, correspondendo à ressonância é igual ao gap de energia dividido pela constante de Planck,  $f_0 = \omega_0/(2\pi) = E_g/h$ , mas uma vez atingido esse valor de frequência, qualquer frequência na banda  $\omega_1 \leq \omega_0 \leq \omega_2$  com  $\omega_2$  correspondendo a um possível limite

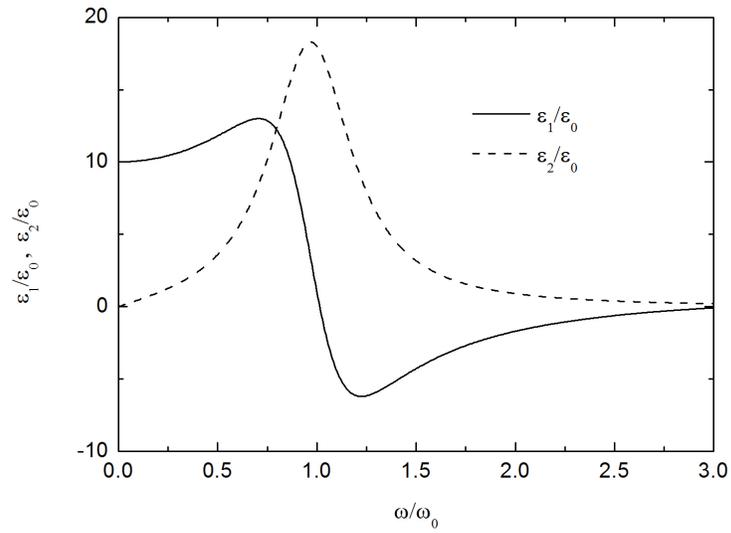


Figure 5.1: Permissividade dielétrica para um dielétrico hipotético em função da frequência normalizada  $\omega/\omega_0$  com valores  $\omega_p/\omega_0 = 3$  e  $\nu/\omega_0 = 0.5$ .

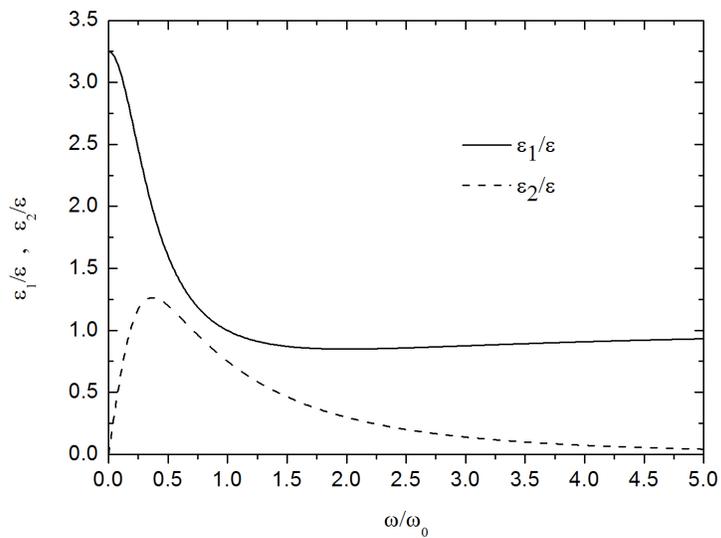


Figure 5.2: Permissividade dielétrica para um meio hipotético em função da frequência normalizada  $\omega/\omega_0$  com valores  $\omega_p/\omega_0 = 1.5$  e  $\nu/\omega_0 = 3$ .

superior, pode promover um elétron da banda de valência para a a banda de condução do material, gerando assim grande absorção, o que corresponde à ressonância. Nesse caso, as somas que aparecem em (5.27) e (5.28)

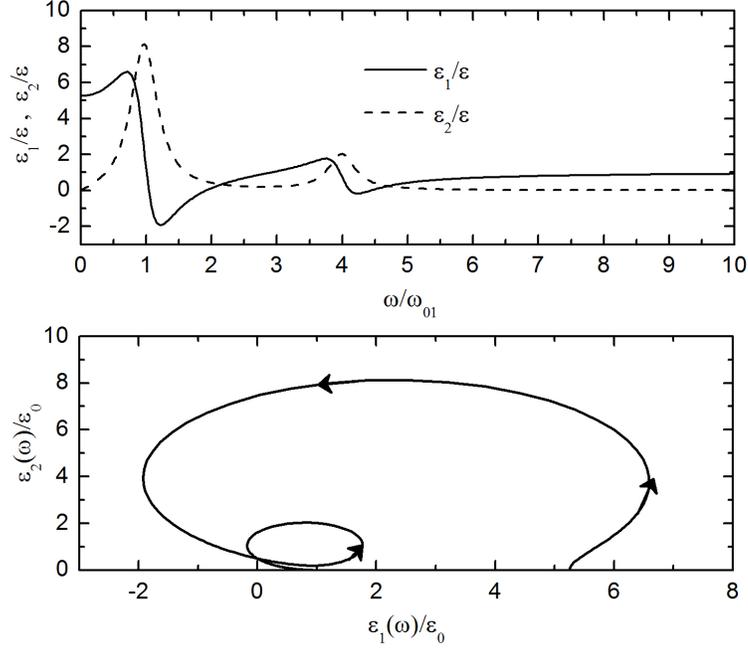


Figure 5.3: (a) Permissividade dielétrica e (b) Diagrama de Nyquist para um meio hipotético com duas ressonâncias em função da frequência normalizada  $\omega/\omega_{01}$ , com valores normalizados  $\omega_{02} = 4\omega_{01}$ ,  $\omega_p/\omega_{01} = 2$  e  $\nu/\omega_{01} = 0.5$ .

são substituídas por integrais, resultando nas expressões abaixo:

$$\frac{\varepsilon_1(\omega)}{\varepsilon_0} = 1 + \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\nu^2} \rho(\omega_0) d\omega_0, \quad (5.39)$$

$$\frac{\varepsilon_2(\omega)}{\varepsilon_0} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{\omega_p^2 \omega \nu}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\nu^2} \rho(\omega_0) d\omega_0, \quad (5.40)$$

onde  $\rho(\omega_0)$  é uma função de densidade de estados de ressonância. Na Figura 5.4 é mostrado um gráfico típico dessa situação, com  $\rho(\omega_0) = 2.5\sqrt{\omega_0}$ ,  $\omega_2/\omega_1 = 3$ ,  $\omega_p/\omega_1 = 2$  e  $\nu/\omega_1 = 0.4$ . Observe que  $\varepsilon_2(\omega)$  assume valores significativos em todo o intervalo de ressonância, enquanto nessa faixa  $\varepsilon_1(\omega)$  decresce como uma função praticamente linear da frequência. Em geral  $\omega_1$  está localizada no espectro infravermelho ou acima para o caso ilustrado e a técnica de medida geralmente envolve medidas de refletividade e absorvidade de uma amostra do material. A refletividade do material na incidência normal está diretamente associada ao índice de refração complexo  $n(\omega) = \sqrt{\varepsilon_c(\omega)}$  através da relação  $R = |(n - 1)/(n + 1)|^2$ .

### 5.2.1 A técnica do circuito RC para medidas em baixas frequências

No regime de baixas frequências, para as quais o comprimento de onda  $\lambda = c/f$  é muito maior do que todas as dimensões físicas envolvidas no sistema considerado, métodos muito simples, baseados na teoria de circuitos elétricos, podem ser usados para determinar a função  $\varepsilon_c$ . Uma possível realização experimental é um circuito RC, conforme ilustrado na Figura 5.5.

Tendo um osciloscópio à disposição, pode-se medir a relação de amplitude e fase entre a tensão  $V e^{i\omega t}$  medida na admitância  $Y = G + i\omega C$  e a corrente  $I = (V_0 - V)/R$  que circula pelo circuito, medida sobre o resistor  $R$ . Da teoria de circuitos sabe-se que  $I = YV = (V_0 - V)/R$  e pode-se calcular  $Y$  conforme a equação abaixo:

$$Y = \frac{\Delta V}{RV} = G + i\omega C, \quad (5.41)$$

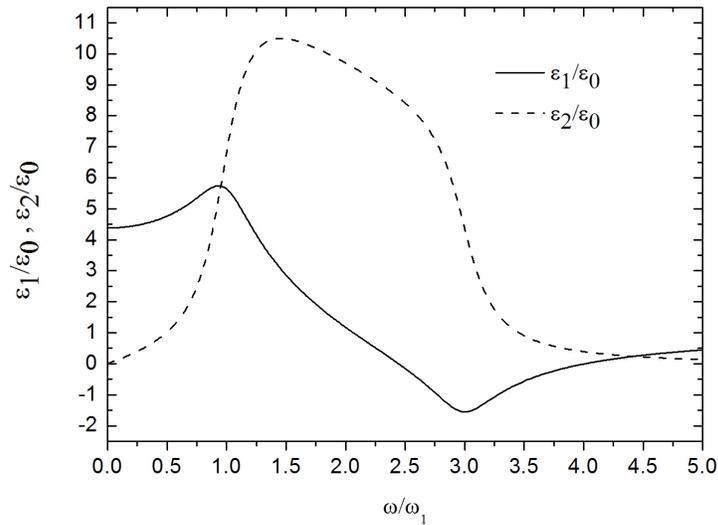


Figure 5.4: Permissividade dielétrica para um meio semiconductor hipotético com uma banda de ressonâncias  $\omega_1 \leq \omega_0 \leq \omega_2$ , em função da frequência normalizada  $\omega/\omega_1$ , com valores normalizados  $\omega_2 = 3\omega_1$ ,  $\omega_p/\omega_1 = 2$  e  $\nu/\omega_1 = 0.4$ .

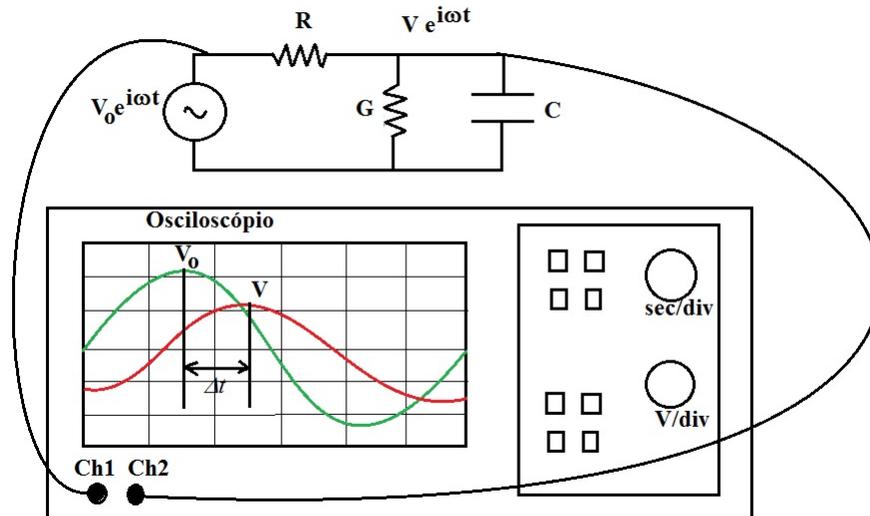


Figure 5.5: Esquema para a medida da permissividade dielétrica utilizando o modelo de circuito RC. A condutância  $G$  e a capacitância  $C$  dependem do meio material que se quer caracterizar.

onde  $\Delta V = V_0 - V$ . A essência da medida está na confecção de um capacitor  $C_m$ , que é preenchido pelo material que se quer caracterizar, ou seja, o material a ser medido faz o papel de dielétrico do capacitor. A geometria desse capacitor pode ser variada de acordo com a conveniência. Para sólidos que podem ser facilmente moldados em formas de blocos com faces planas e perfeitamente paralelas a geometria mais simples é a do capacitor de placas paralelas. É importante ressaltar que usualmente  $C_m$  tem valor de algumas dezenas ou poucas centenas de pF e nesse caso é importante levar em conta o efeito das pontas de prova utilizadas na medida experimental. Geralmente a ponta de prova é caracterizada por uma admitância  $Y_p = 1/R_p + i\omega C_p$ , onde  $R_p$  é a resistência

e  $C_p$  a capacitância da ponta de prova, respectivamente. Essa admitância  $Y_p$  que associa-se em paralelo com o capacitor  $C_m$  contendo material a ser caracterizado, que é representado por uma admitância  $Y_m$ . Valores típicos de  $C_p$  estão na faixa de 10pF, enquanto  $R_p$  na escala de  $M\Omega$ . Para obter a admitância do material tem-se que  $Y_m = Y - Y_p$ . As perdas por corrente de fuga no material dielétrico que preenche o capacitor  $C_m$  estão incorporadas na parte real de  $Y_m$ . Na medida, o valor do resistor  $R$  é perfeitamente conhecido e não pode depender da frequência  $\omega$ . A admitância  $Y_m = G_m + i\omega C_m$  é função do produto da permissividade dielétrica do material  $\varepsilon_c$  e da geometria do capacitor, através do fator geométrico  $F_g$ , ou seja,  $Y_m = i\omega\varepsilon_c(\omega)F_g$ . Para um capacitor de placas paralelas de área  $A$  separadas por uma distância  $d$ , no interior do qual é colocado o material que se quer analisar,  $F_g = A/d$ . Observe que o volume da amostra de material que se quer medir é simplesmente dada pelo produto  $Ad$ , na situação mais simples, ou seja, o meio material a ser caracterizado preenche totalmente a área interna do capacitor de placas paralelas. Nesse caso tem-se  $G_m = \sigma A/d$  e  $C_m = \varepsilon_1 A/d$ , onde  $\sigma$  é a condutividade do material e  $\varepsilon_1$  a parte real de sua permissividade dielétrica complexa. Pode-se ainda expressar a admitância complexa dessa estrutura de placas paralelas na forma abaixo:

$$Y_m = (\sigma + i\omega\varepsilon_1)\frac{A}{d} = i\omega\frac{A}{d}\left(\varepsilon_1 - i\frac{\sigma}{\omega}\right). \quad (5.42)$$

Combinando as equações (5.41) e (5.42) obtém-se prontamente os valores de  $\varepsilon_1$  e  $\sigma$ , uma vez conhecidos dos valores medidos experimentalmente para  $V$  e  $\Delta V$ , utilizando o osciloscópio para medir máxima amplitude da tensão no capacitor  $|V|$  e a máxima amplitude da tensão no resistor  $|\Delta V|$ , bem como a fase relativa entre  $V$  e  $\Delta V = V_0 - V$ , dada por  $\theta = \omega\Delta t$ , onde  $\Delta t$  é o intervalo temporal transcorrido entre o máximo de amplitude da fonte e o máximo de amplitude de sinal medido no capacitor, conforme ilustrado na Figura 6. O resultado final é mostrado abaixo:

$$\varepsilon_1 = \frac{d}{A\omega} \left( \frac{1}{R} \frac{|\Delta V|}{|V|} \text{sen}\theta - \omega C_p \right), \quad (5.43)$$

$$\sigma = \frac{d}{A} \left( \frac{1}{R} \frac{|\Delta V|}{|V|} \text{cos}\theta - \frac{1}{R_p} \right). \quad (5.44)$$

A maior dificuldade experimental é a precisa medição da fase  $\theta$  quando uma característica é muito predominante, como um material muito bom condutor, onde  $\sigma$  é um valor bastante elevado, na maior parte das vezes algumas ordens de grandeza maior que  $\omega\varepsilon_1$ .

### 5.3 Propriedades Magnéticas dos Materiais

Em termos de um tensor de susceptibilidade magnética  $\chi_{ij}$  podemos escrever:

$$M_i = \sum_{j=1}^3 \chi_{ij} H_j, \quad (5.45)$$

onde  $M_i$  é a  $i$ -ésima componente da magnetização do material e  $H_j$  o campo magnético externamente aplicado ao material. Os materiais podem ser classificados de acordo com a resposta à aplicação do campo em três categorias principais:

- Diamagnéticos  $\chi_m < 0$  (linear).
- Paramagnéticos  $0 < \chi_m < 1$  (linear).
- Ferromagnéticos  $\chi_m \gg 1$  (não-linear e anisotrópico).

Há ainda outros tipos de materiais exóticos que podem ser classificados como antiferromagnéticos, superparamagnéticos, vidros de spin, ferrofluidos, que somente podem ser compreendidos com base nas leis da mecânica quântica, embora qualquer teoria séria dos fenômenos magnéticos na matéria não possa prescindir de uma teoria quântica.

### 5.3.1 Momento de Dipolo Magnético, Magnetização e Dinâmica da Magnetização

Vamos tentar aqui definir o momento de dipolo magnético através de uma visão mais intuitiva. Consideremos a força de Lorentz exercida sobre uma carga  $q$  por campos eletromagnéticos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) , \quad (5.46)$$

com a generalização para a densidade de força na forma:

$$\vec{\mathcal{F}} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} . \quad (5.47)$$

Estamos interessados em efeitos magnéticos e sem perda de generalidade vamos por ora considerar que  $\mathbf{E} = 0$ , resultando portanto:

$$\mathbf{F}_m = \int_V \mathbf{J} \times \mathbf{B} dV , \quad (5.48)$$

que em um circuito fechado resulta na seguinte expressão:

$$\mathbf{F}_m = \oint_C I d\mathbf{L} \times \mathbf{B} , \quad (5.49)$$

sendo  $C$  o caminho fechado percorrido pela corrente no circuito. Na Mecânica Clássica costuma-se definir também o torque, que tem a tendência de produzir rotação sobre alguma estrutura:

$$\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} , \quad (5.50)$$

sendo  $\mathbf{T}$  o torque exercido sobre um ponto  $P$  cujo vetor posição vale  $\mathbf{r}$  relativamente à um eixo  $O$  de referência.

Por simplicidade vamos considerar uma espira retangular sendo percorrida por uma corrente  $I$  imersa em um campo magnético constante  $\mathbf{B}$ , conforme mostra a figura. Se o campo  $\mathbf{B}$  é constante, claramente a força total resultante sobre a espira será nula, exceto por forças de tração internas, mas o torque resultante não se anula. Vejamos o que ocorre se consideramos que  $\mathbf{r}$  está contido no plano da espira:

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4$$

sendo  $\mathbf{F}_i$  a força exercida sobre o lado  $i$ -ésimo do retângulo. Note que cada lado da espira pode ser descrito por um vetor de comprimento  $\mathbf{L}_i$ , sendo  $\mathbf{L}_1 = -\mathbf{L}_3$  e  $\mathbf{L}_2 = -\mathbf{L}_4$ . Em termos de força têm-se portanto:

$$\mathbf{F}_i = I \mathbf{L}_i \times \mathbf{B}$$

e é fácil mostrar que a força resultante se anula, ou seja,  $\mathbf{F} = 0$ . Entretanto, o torque não será nulo:

$$\mathbf{T} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

sendo  $\mathbf{r}_i$  medido em relação ao eixo de referência da espira. Note ainda que a área da espira é dada por:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}_1 \times \mathbf{L}_2$$

Após alguns cálculos fica fácil mostrar que:

$$\mathbf{T} = I \mathbf{L}_1 \times (\mathbf{L}_2 \times \mathbf{B})$$

Se a espira é retangular então  $\mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{L}_2 = 0$  e temos:

$$\mathbf{T} = I(\mathbf{L}_1 \times \mathbf{L}_2) \times \mathbf{B}$$

Se definimos agora o momento de dipolo magnético da espira:

$$\mathbf{m} = IA \quad (5.51)$$

temos a equação de torque na forma abaixo:

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (5.52)$$

Note que se  $\mathbf{m}$  é ortogonal a  $\mathbf{B}$  o torque é máximo, e tende a rotacionar a espira para que o momento de dipolo magnético fique orientado na mesma direção do campo, enquanto que se  $\mathbf{m}$  é paralelo a  $\mathbf{B}$  não há torque. Podemos definir a energia potencial de um dipolo magnético na presença de um campo magnético como a energia necessária para rotacionar o mesmo até a posição de equilíbrio:

$$U_m = \int_{\theta}^0 \mathbf{T} \cdot d\vec{\theta} = \int_{\theta}^0 T d\theta .$$

Observando que o valor do torque em módulo é dado por:

$$T = mB \sin \theta ,$$

onde  $\theta$  é o ângulo formado entre os vetores  $\mathbf{m}$  e  $\mathbf{B}$  podemos fazer

$$U_m = \int_{\theta}^0 mB \sin \theta d\theta = -mB \cos \theta .$$

Lembrando da definição de produto escalar, fica claro que:

$$U_m = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} . \quad (5.53)$$

Esta definição acima irá nos acompanhar ao longo de todo o restante do texto. Aos interessados nessa dedução básica recomendam-se textos introdutórios de Física. Observe que:

- Se  $\mathbf{m} \parallel \mathbf{B}$  não há torque sobre o dipolo magnético e a energia é mínima;
- Se  $\mathbf{m} \perp \mathbf{B}$  o torque é máximo e o estado de energia não é mais o mínimo mas também não é máximo;
- Se  $\mathbf{m}$  é anti-paralelo a  $\mathbf{B}$  não há torque mas a energia é máxima. Isso significa que qualquer perturbação produzirá torque no sentido de rotacionar o dipolo até a posição de equilíbrio, mas nesse caso o trabalho realizado pelo campo aplicado será máximo.

### 5.3.2 Momento de Dipolo Magnético de uma Carga em Movimento: Relação com o Momento Angular

Agora vamos analisar o momento de dipolo magnético para o movimento orbital de uma partícula. Considere a Figura 5.6, tendo em consideração a definição (5.51).

Em relação a um ponto de referência  $O$  uma carga descreve um movimento descrito pelo conjunto  $[\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t)]$ . O deslocamento  $d\mathbf{l}$  infinitesimal é dado simplesmente por:

$$d\mathbf{l} = \mathbf{v} dt ,$$

e em relação à origem  $O$  a área varrida pelo vetor  $\mathbf{x}$  de posição instantânea será dada por:

$$A = \frac{1}{2} |\mathbf{x}| |d\mathbf{l}| \sin \theta$$

ou em termos vectoriais:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{x} \times d\mathbf{l}$$

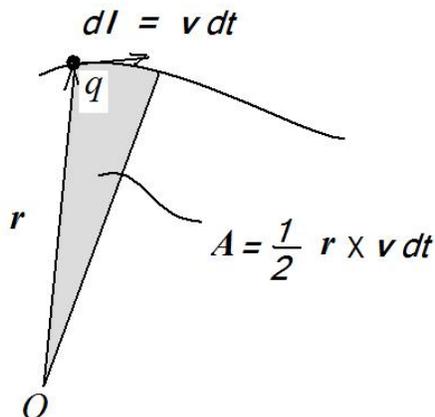


Figure 5.6: Área varrida por uma partícula em movimento curvilíneo em torno da origem  $O$ .

Agora utilizando  $d\mathbf{l} = \mathbf{v} dt$  na equação acima temos:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{x} \times d\mathbf{v} dt .$$

É interessante agora substituir  $\mathbf{A}$  na definição (5.51):

$$\mathbf{m} = I\mathbf{A} = \frac{I dt}{2} \mathbf{x} \times d\mathbf{v} .$$

Mas  $I dt = q$  é a carga e portanto:

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2} \mathbf{x} \times \mathbf{v} . \quad (5.54)$$

Este resultado já foi obtido na Seção anterior. Vamos agora utilizar um resultado da Mecânica Clássica que define o momento angular através da expressão abaixo:

$$\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p} , \quad (5.55)$$

onde  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  é o momento linear de uma partícula de massa  $m$ . (Não devemos confundir  $\mathbf{p}$  com o momento de dipolo elétrico nem tampouco a massa  $m$  com o módulo do vetor  $\mathbf{m}$ . Para a carga  $q$  vamos escrever a massa na forma  $m_q$ , para evitar confusão.) Temos então:

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2} \mathbf{x} \times \mathbf{v} = \frac{q}{2m_q} \mathbf{x} \times (m_q \mathbf{v}) . \quad (5.56)$$

Observando que  $m_q \mathbf{v} = \mathbf{p}$  e que  $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$  temos:

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2m_q} \mathbf{L} . \quad (5.57)$$

Este resultado é também muito importante: o momento de dipolo magnético associado ao movimento orbital é proporcional ao momento angular da partícula! O fator  $q/(2m_q)$  depende somente da carga e da massa da partícula. Observa-se facilmente que quanto maior a massa menor será o momento de dipolo magnético da partícula, para o mesmo valor de momento angular  $\mathbf{L}$ . Para a magnetização associada a um conjunto de partículas, considerando-se apenas movimento orbital, temos:

$$\mathbf{M} = \sum_i \frac{q_i}{2m_{q_i}} \mathbf{L}_i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \quad (5.58)$$

e conforme já havíamos comentado, o vetor de magnetização  $\mathbf{M}$  corresponde à densidade de momentos de dipolo magnético em um certo volume do material.

Classicamente o momento de dipolo magnético  $\mathbf{m}$  é associado diretamente ao movimento orbital, através do momento angular  $\mathbf{L}$ . Somente com os conceitos da Mecânica Quântica é que se torna possível incluir um momento angular intrínseco das partículas, denominado spin, e que contribui fortemente para o momento de dipolo magnético das partículas. Na verdade é possível classicamente, dotar corpos materiais de movimento de rotação. O momento angular correspondente é dado por  $L = I_m \omega$ , em módulo, onde  $I_m$  é o momento de inércia do corpo e  $\omega$  a velocidade angular de rotação em torno de um eixo de referência. Partículas puramente pontuais não tem volume e por esse motivo não poderiam possuir um momento angular intrínseco. Além disso o momento angular intrínseco ou de spin pode assumir classicamente qualquer valor, assim como o momento angular orbital. Veremos que na Mecânica Quântica ambos serão quantizados, ou seja, assumirão somente certos valores discretos. Até os limites de erros experimentais, na Mecânica Quântica o elétron pode ser considerado uma partícula puntual, mas ainda assim dotada de momento angular intrínseco ou spin, que não tem análogo clássico. Modelos clássicos do elétron com spin foram propostos por Uhlenbeck e Goudsmit, mas é possível demonstrar várias inconsistências da teoria clássica do spin com a teoria da relatividade: se o elétron é puntual, classicamente não pode ter spin, enquanto que se tiver um certo volume, para os valores experimentais encontrados sua velocidade de rotação deveria exceder à velocidade da luz.

Demonstra-se através da força de Lorentz, que a força sobre um dipolo magnético  $\mathbf{m}$  imerso em um campo magnético  $\mathbf{B}$  é dada por:

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) , \quad (5.59)$$

resultado esse que é fundamental no entendimento dos experimentos de Stern e Gerlach que demonstraram a existência do spin. Para haver força resultante, note que  $\mathbf{B}$  deve ser não uniforme sobre a região do dipolo magnético.

### 5.3.3 Diamagnetismo

A origem do diamagnetismo pode ser entendida de maneira bastante simplificada com base na Lei de Lenz, que discutiremos a seguir. Sempre haverá uma contribuição diamagnética para a susceptibilidade magnética de qualquer material. O material será diamagnético se as outras interações são negligenciáveis e é característica de um material diamagnético:

$$\chi < 0 \quad \text{e} \quad \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi < 1 . \quad (5.60)$$

Em materiais diamagnéticos geralmente a susceptibilidade é muito menor do que a unidade, ou seja,  $\chi \ll 1$  e é perfeitamente aceitável para estudo de propagação de ondas por exemplo fazer a aproximação  $\mu \approx \mu_0$ .

São exemplos de materiais diamagnéticos notavelmente o Bismuto ( $\chi = -1.66 \times 10^{-4}$ ), a água  $\chi = -9.05 \times 10^{-6}$ , bem como o carbono na forma diamante e na forma grafite, o cobre, mercúrio, a prata, dentre outros.

Baseados na Lei de Lenz, podemos interpretar o diamagnetismo da seguinte maneira: imagine um elétron em movimento orbital. Ao aplicar um campo  $\mathbf{H}$  externo o fluxo magnético que atravessa a área  $A$  definida pela órbita do elétron irá aumentar. De acordo com a Lei de Lenz deve surgir um efeito contrário na tentativa de manter o fluxo magnético inicial. Nesse caso o momento angular do elétron irá alterar a sua direção, produzindo assim um campo magnético interno tal que se oponha ao campo aplicado externamente.

Um cálculo utilizando os procedimentos da mecânica quântica, devido a Lev Landau, mostrou que a susceptibilidade diamagnética de um material,  $\chi = M/H$ , é dada por:

$$\chi_{dia} = -\frac{1}{3} \frac{n \mu_B}{k_B T} . \quad (5.61)$$

Note a dependência dessa susceptibilidade de Landau com  $T^{-1}$ . Diversos materiais não se enquadram nesse cenário. Por exemplo, os supercondutores são materiais que, abaixo da temperatura crítica, tem pronunciada resposta ao campo magnético, o chamado efeito Meissner, que repele as linhas de campo magnético do seu interior, devido às supercorrentes que surgem na sua superfície em resposta ao campo magnético externo, mas que pode ser interpretada como um tipo diamagnetismo ideal de forma efetiva, embora a própria supercondutividade, que define esse comportamento, seja uma fase da matéria.

### 5.3.4 Paramagnetismo e a Teoria de Langevin

Langevin em 1905 descreveu o paramagnetismo assumindo que cada átomo ou molécula do material devia possuir momento de dipolo magnético bem definido de módulo  $\mu$ , que poderia se orientar aleatoriamente. Na presença de um campo magnético  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  a energia magnética  $E_m$  desse momento de dipolo magnético seria dada por:

$$E_m(\cos \theta) = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = -\mu \mu_0 H \cos \theta , \quad (5.62)$$

onde  $\theta$  é o ângulo formado entre a orientação do momento de dipolo magnético e o campo aplicado. Não confundir aqui  $\boldsymbol{\mu}$  com o tensor de permeabilidade magnética. Nesse caso a função de probabilidade de encontrar o momento de dipolo orientado a um ângulo  $\theta$  com o campo magnético é dada pela distribuição de Boltzmann:

$$\rho(\theta) = \frac{1}{Z} e^{-\beta \mu B \cos \theta} , \quad (5.63)$$

onde  $\beta = 1/(k_B T)$  é o recíproco da temperatura  $T$  e  $Z$  é a normalização, conhecida como função de partição, dada por:

$$Z = \int_{-1}^1 d(\cos \theta) e^{-\beta \mu B \cos \theta}$$

O valor médio da projeção da magnetização na direção do campo, ou seja, de  $\mu \cos \theta$  será dado por:

$$M = n \mu \frac{\int_{-1}^1 d(\cos \theta) \cos \theta e^{-\beta \mu B \cos \theta}}{\int_{-1}^1 d(\cos \theta) e^{-\beta \mu B \cos \theta}} \quad (5.64)$$

onde  $n$  é a densidade de momentos de dipolo magnético de módulo  $\mu$  no material. Realizando as integrais acima, obtém-se o resultado de Langevin:

$$M = n \mu \mathcal{L}(\beta \mu B) , \quad (5.65)$$

onde  $\mathcal{L}(x)$  é denominada função de Langevin:

$$\mathcal{L}(x) = \coth(x) - \frac{1}{x} . \quad (5.66)$$

Para a temperatura  $T$  muito alta,  $\beta \rightarrow 0$  e podemos expandir a função de Langevin em séries de Taylor:

$$\mathcal{L}(x)|_{x \ll 1} \approx \frac{x}{3} .$$

No caso  $\beta \mu B \ll 1$  obtém-se a relação:

$$M(H) = \frac{n \mu^2}{3 k_B T} \mu_0 H , \quad (5.67)$$

ou seja, a susceptibilidade de Langevin,  $\chi = M/H$ , é dada simplesmente por:

$$\chi_{Lang} = \mu_0 \frac{n \mu^2}{3 k_B T} , \quad (5.68)$$

e verifica-se uma variação na forma  $1/T$  para a susceptibilidade de um material paramagnético. Este resultado realmente é observado na prática, para muitos materiais, conforme ilustrado na Figura 5.7.

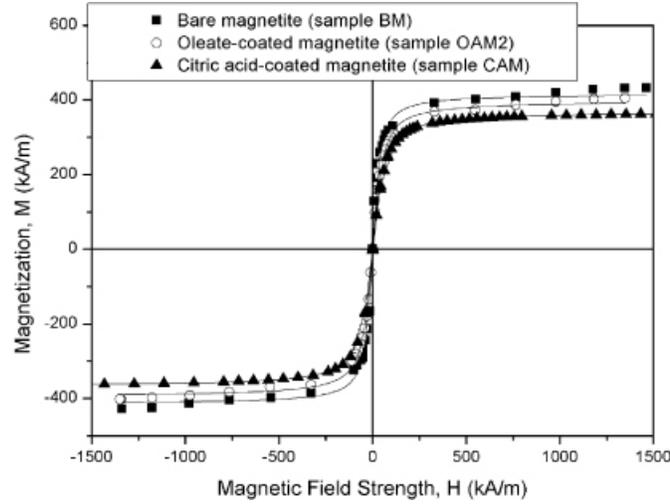


Figure 5.7: Curva característica de magnetização seguindo a função de Langevin.

Uma vez que a resposta diamagnética está sempre presente, é necessário levar em conta tanto a contribuição dia quanto paramagnética para determinar o comportamento do material. Há materiais em que a resposta paramagnética não segue a lei de Langevin, como é o caso do paramagnetismo de Pauli, para materiais alcalinos ou o de van Vleck, que ocorre em materiais de terras raras, cujo tratamento requer a aplicação dos procedimentos da mecânica quântica.

### 5.3.5 Modelo de Weiss para o Ferromagnetismo

Pierre Weiss prontamente estendeu o modelo de Langevin para tratar do Ferromagnetismo em uma aproximação conhecida como aproximação do campo molecular. Admitindo que o campo experimentado por um momento de dipolo  $\mu$  no interior do ferromagneto é a soma do campo externo aplicado com um campo interno proporcional à magnetização  $M$ , na forma  $B = \mu_0(H + qM)$  e introduzindo este campo total na função de Langevin encontra-se a expressão abaixo:

$$M = n\mu\mathcal{L}(\mu_0\beta\mu(H + qM)) \approx \frac{n\mu^2\mu_0(H + qM)}{3k_B T}, \quad (5.69)$$

Da última expressão obtemos a susceptibilidade do ferromagneto:

$$\chi_{FM} = \mu_0 \frac{n\mu^2}{3k_B(T - T_c)}, \quad (5.70)$$

onde  $T_c$  é uma temperatura crítica, denominada temperatura de Curie do ferromagneto.

$$T_c = \frac{Nq\mu^2}{3k_B}. \quad (5.71)$$

No modelo de Weiss,  $\chi_{FM}$  diverge para  $T = T_c$ , indicando que abaixo de  $T_c$  pode haver magnetização espontânea. A função de Langevin e o modelo de Curie-Weiss descrevem bem o comportamento da matéria em altas temperaturas, mas falham para temperaturas mais baixas.

### 5.3.6 Equação para a Dinâmica da Magnetização

Considere a definição de momento angular  $\mathbf{L}$  vista anteriormente e tomemos a derivada temporal do mesmo:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L} = \frac{d}{dt}(\mathbf{x} \times \mathbf{p}) = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{x} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

Lembremos que a Segunda Lei de Newton nos dá:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

e além disso  $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$  e portanto paralelo a  $\mathbf{p}$ . Portanto temos:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{F}$$

mas o lado direito é o próprio torque! Podemos escrever o análogo da Segunda Lei de Newton para o Momento Angular:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{T} . \quad (5.72)$$

Agora consideremos a magnetização, na forma (5.58), onde vamos escrever:

$$\gamma_i = \frac{q_i}{2m_{q_i}}$$

$$\mathbf{M} = \sum_i \gamma_i \mathbf{L}_i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$$

Tomando a derivada temporal de  $\mathbf{M}$  temos:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \sum_i \gamma_i \frac{d\mathbf{L}_i}{dt} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) ,$$

e podemos utilizar então a equação (5.72):

$$\frac{d\mathbf{L}_i}{dt} = \mathbf{T}_i = \mathbf{m}_i \times \mathbf{B} .$$

Dessa forma

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \left( \sum_i \gamma_i \mathbf{m}_i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \right) \times \mathbf{B} .$$

Se pudermos assumir que  $\gamma_i = \gamma$  então, finalmente obtemos:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \gamma \mathbf{M} \times \mathbf{B} . \quad (5.73)$$

A equação acima é a equação de dinâmica temporal da magnetização  $\mathbf{M}$  na presença de um campo  $\mathbf{B}$ . Note que o próprio campo  $\mathbf{B}$  é função da magnetização então a equação de movimento é na verdade dependente do campo aplicado  $\mathbf{H}$ , uma vez que  $\mathbf{M} \times \mathbf{M} = 0$ , pelas propriedades do cálculo vetorial. Esta última equação é válida quando não há dissipação. É possível incluir perdas de maneira fenomenológica, e a equação resultante é conhecida como equação de Landau-Lifschitz-Gilbert (LLG equation):

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \gamma \mathbf{M} \times \mathbf{B} + \frac{\alpha}{\tau} \mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{B}) . \quad (5.74)$$

As equações acima podem ser utilizadas para determinar a susceptibilidade de um sistema magnético, ou então para descrever a dinâmica da magnetização classicamente. É interessante que classicamente  $\mathbf{M}$  é um vetor que depende do momento angular das partículas constituintes do sistema, mas que pode assumir valores contínuos. Na mecânica quântica  $\mathbf{M}$  torna-se um operador, também dependente do momento angular, que é um operador quântico com auto-valores discretos. Entretanto a equação quântica tem forma muito semelhante às equações acima.

## 5.4 Susceptibilidade Dinâmica no Regime Linear

Usualmente meios magnéticos apresentam propriedades anisotrópicas, sendo amplamente utilizados em dispositivos de microondas onde a não-reciprocidade é bem-vinda. Exemplos típicos são as ferrites, compostos da forma  $MO.FeO_2$ , onde  $M$  é um metal. Na natureza é comum o composto  $FeO.FeO_2$ . Costuma-se definir dois eixos de referência:

- \* Easy Axis (Eixo Fácil): onde a magnetização é preferencial. Em estado natural a magnetização tende a se alinhar ao easy axis do material, sendo necessária a aplicação do campo externo para reorientar a magnetização em outra direção;
- \* Hard Axis (Eixo Duro): corresponde ao eixo onde é necessária maior energia para alinhar a magnetização paralela a este eixo.

A partir da equação de dinâmica de magnetização vamos determinar a susceptibilidade dinâmica. Podemos assumir em um material qualquer cuja magnetização DC, correspondente a um campo aplicado em um dado eixo de referência, seja dada na forma:

$$\mathbf{M} = \chi_{dc} \cdot \mathbf{H}_0 = M_0 \hat{\mathbf{a}}_z . \quad (5.75)$$

Para pequenas perturbações em torno do valor  $\mathbf{H}_0$  temos:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}(t) + \mu_0 (\delta M_x, \delta M_y, M_0 + \delta M_z) , \quad (5.76)$$

sendo o campo total aplicado dado por:

$$\mathbf{H}(t) = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}(t) . \quad (5.77)$$

A susceptibilidade dinâmica, correspondendo a uma relação de linearidade entre  $\delta \mathbf{M}(t)$  e  $\mathbf{h}(t)$ , será obtida através da expressão:

$$\chi_{ij} = \frac{\delta M_i}{h_j} . \quad (5.78)$$

Para resolver o problema em questão vamos utilizar a equação de movimento na forma abaixo:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \gamma \mathbf{M} \times \mathbf{B} . \quad (5.79)$$

A equação acima pode ser reescrita na linguagem de componentes:

$$\frac{dM_x}{dt} = \gamma (M_y B_z - M_z B_y) , \quad (5.80)$$

$$\frac{dM_y}{dt} = \gamma (M_z B_x - M_x B_z) , \quad (5.81)$$

$$\frac{dM_z}{dt} = \gamma (M_x B_y - M_y B_x) , \quad (5.82)$$

onde temos:

$$B_x = \mu_0 (\delta M_x + h_x) , \quad (5.83)$$

$$B_y = \mu_0 (\delta M_y + h_y) , \quad (5.84)$$

$$B_z = \mu_0 (M_0 + \delta M_z + h_z) . \quad (5.85)$$

Substituindo o campo  $\mathbf{B}$  nas equações (5.80)-(5.82) obtém-se as seguintes equações:

$$\frac{d\delta M_x}{dt} = \mu_0 \gamma [\delta M_y (M_0 + \delta M_z + h_z) - (M_0 + \delta M_z) (\delta M_y + h_y)] , \quad (5.86)$$

$$\frac{d\delta M_y}{dt} = \mu_0 \gamma [(M_0 + \delta M_z) (\delta M_x + h_x) - \delta M_x (M_0 + \delta M_z + h_z)] , \quad (5.87)$$

$$\frac{d\delta M_z}{dt} = \mu_0 \gamma [\delta M_x (\delta M_y + h_y) - \delta M_y (\delta M_x + h_x)] , \quad (5.88)$$

Se assumimos que  $|\mathbf{h}| \ll |\mathbf{H}_0|$  e que  $|\delta\mathbf{M}| \ll M_0$ , podemos linearizar as equações. Fica a encargo do leitor demonstrar que em regime harmônico, ou seja, para

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_0 e^{i\omega t} ,$$

negligenciando termos quadráticos em  $\delta M$  e harmônicas, ou seja, termos na forma  $e^{\pm 2i\omega t}$ , encontramos as seguintes equações:

$$i\omega\delta M_x = \omega_0\delta M_y - \gamma\mu_0 M_0 h_y , \quad (5.89)$$

$$i\omega\delta M_y = \mu_0\gamma M_0 h_x - \omega_0\delta M_x , \quad (5.90)$$

$$i\omega\delta M_z = 0 , \quad (5.91)$$

onde definiu-se que:

$$\omega_0 = \mu_0\gamma H_0 = \frac{q}{2m}(B_0 - \mu_0 M_0) . \quad (5.92)$$

Expressando o sistema acima na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \delta M_x \\ \delta M_y \\ \delta M_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & 0 \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{zz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{pmatrix} , \quad (5.93)$$

podemos resolvê-lo, apra obter

$$\chi_{xx} = \chi_{yy} = \chi = \frac{\gamma\mu_0 M_0 \omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2} , \quad (5.94)$$

$$\chi_{xy} = -\chi_{yx} = -i\eta = -i\frac{\gamma\mu_0 M_0 \omega}{\omega^2 - \omega_0^2} , \quad (5.95)$$

$$\chi_{zz} = 0 . \quad (5.96)$$

Observe que  $\chi$  e  $\eta$  são funções diretas da magnetização DC. Podemos escrever agora o tensor de permeabilidade magnética na forma:

$$\boldsymbol{\mu} = \mu_0 \begin{bmatrix} \mu & -i\eta & 0 \\ i\eta & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad (5.97)$$

onde  $\boldsymbol{\mu}$  representa a matriz de permeabilidade e  $\mu = 1 + \chi$ .

Um meio com o tensor na forma (5.97) é dito meio *giromagnético*. Meios com a permissividade dielétrica  $\epsilon$  de caráter tensorial com a mesma forma acima mas permeabilidade  $\mu$  escalar são ditos meios *giroelétricos*. Um exemplo de meio giroelétrico é a ionosfera terrestre. Já os meios com permeabilidade e permissividade dielétrica de caráter tensorial são ditos meios girotrópicos.

É fácil ver que, dada a aplicação de um campo magnético  $\mathbf{H}_0$ , gerando magnetização DC, a superposição de um campo ac( $e^{i\omega t}$ ) será responsável por uma magnetização AC descrita por um tensor de susceptibilidade. Uma vez que um campo  $\mathbf{h} = (h_x, 0, 0)$  gera magnetização tanto na direção  $x$  quanto na direção  $y$ , vê-se logo que o meio é anisotrópico. Além disso o eixo ao longo do campo magnético dc é diferenciado em relação ao plano ortogonal a ele. A propagação de ondas em um meio giromagnético (ou giroelétrico) dá origem a alguns efeitos interessantes:

→ birrefringência e dicroísmo;

→ efeito de rotação de Faraday e efeito Kerr magneto-óptico.

## 5.5 Referências deste Capítulo

- [5.1] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd Edition John Wiley and Sons, 1998.
- [5.2] Paul S. Epstein, “Theory of Wave Propagation in a Gyromagnetic Medium”, *Reviews of Modern Physics* **28**(1956), pp 3-17.
- [5.3] R.E. Collin, *Engenharia de Microondas*,
- [5.4] Z.Q. Qiu, S.D. Bader, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* **200**(1999), 664-678;
- [5.5] Chun-Yeol You, S. Chul Shin, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* **198-199** (1999), 573-577.
- [5.6] J.H. van Vleck, “Quantum Mechanics - the key to understanding magnetism”, *Reviews of Modern Physics* **50** (1978), 181.
- 5.7] C.A. Dartora, A. Heilmann, F. Thomazi, E. Burkarter “Caracterização experimental da permissividade dielétrica de materiais através da técnica de refletometria no domínio do tempo”, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **37** (2015), 1315.

## 5.6 Problemas Propostos

- 1) Considerando a condutividade dos meios materiais do ponto de vista eletromagnético, dê exemplos práticos de: i) materiais condutores; ii) materiais dielétricos; iii) materiais semicondutores; iv) materiais ferromagnéticos condutores; v) materiais ferromagnéticos isolantes; vi) materiais supercondutores.  
 Apresente valores de condutividade para os exemplos apresentados. Apresente a temperatura crítica dos supercondutores, quais são os tipos de supercondutores?
- 2) Considere a resposta magnética dos meios materiais e dê exemplos de: i) materiais diamagnéticos; ii) materiais paramagnéticos; iii) elementos ferromagnéticos em temperatura ambiente; iv) ligas ferromagnéticas;  
 Apresente valores de susceptibilidade magnética e temperatura de Curie no caso dos materiais ferromagnéticos.
- 3) O que é histerese? Não-linearidade e histerese são sinônimos? Explique.
- 4) Dê exemplos de meios anisotrópicos, não-homogêneos e não-lineares. Discuta possíveis aplicações ou situações em que ocorrem. O que é birrefringência e a que se deve? Cite exemplos.

## Chapter 6

# Campos Eletrostáticos e Magnetostáticos

O regime estático é um caso particular das equações de Maxwell, em que as fontes  $\rho$  e  $\mathbf{J}$  não variam no tempo, produzindo desse modo campos elétricos e magnéticos estáticos, ou seja, que também não variam no tempo. Relaxando um pouco essa condição, pode-se afirmar que quando as variações temporais são muito lentas, ou seja, mudanças acontecem numa escala de tempo muito maior do que o tempo necessário para a informação se propagar da fonte até o ponto onde os campos são observados, o regime estático ainda continua aproximadamente válido. Partindo das equações de Maxwell variantes no tempo, mostradas abaixo novamente:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (6.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (6.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (6.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (6.4)$$

em regime estático devemos descartar as derivadas temporais, fazendo  $\partial/\partial t \rightarrow 0$ . Nesse caso o conjunto resultante é o seguinte:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (6.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (6.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (6.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}. \quad (6.8)$$

Note que agora os campos elétricos e magnéticos desacoplam, havendo duas equações onde somente aparecem quantidades elétricas, e duas outras onde somente aparecem quantidades magnéticas, descrevendo a Eletrostática e a Magnetostática, respectivamente, quando consideradas adicionalmente as relações constitutivas dos meios.

### 6.1 Eletrostática

Consideremos as leis de Maxwell que governam a eletrostática, dadas abaixo:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (6.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (6.10)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (6.11)$$

Note que a equação em divergência apresenta fonte  $\rho$  enquanto que a equação em rotacional tem fonte nula, significando que o campo elétrico estático tem natureza não-solenoidal. A solução para esta equação rotacional apresenta-se prontamente com a ajuda da identidade vetorial abaixo:

$$\nabla \times \nabla \phi = 0 ,$$

onde  $\phi$  é uma função escalar, denominada potencial escalar elétrico. Define-se o campo elétrico  $\mathbf{E}$  em termos do potencial escalar elétrico na forma abaixo:

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi , \quad (6.12)$$

onde o sinal  $-$  é adotado convencionalmente, por razões que serão discutidas mais adiante. Nesse caso a equação (6.10) está automaticamente satisfeita. Passamos então para as equações restantes, uma vez que o problema agora é determinar o potencial escalar  $\phi$ . Utilizando a relação constitutiva (6.11) e (6.12), podemos reescrever a lei de Gauss (6.9) na forma abaixo:

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}}{\varepsilon_0} . \quad (6.13)$$

Esta é a equação de Poisson para um caso geral. No caso de meios lineares, isotrópicos e homogêneos, pelo menos por partes, podemos escrever  $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$ , de forma que:

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon} , \quad (6.14)$$

sendo  $\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \chi_e)$  a permissividade dielétrica DC do meio material.

### 6.1.1 Solução integral da Equação de Poisson

Considere um meio linear, isotrópico e homogêneo, sem fronteiras, onde é válida a equação (6.14). A solução integral da equação de Poisson pode ser obtida através do método de funções de Green. Caso haja fronteiras, não-homogeneidades e condições de contorno, o método também pode ser utilizado, embora a dificuldade matemática aumente significativamente. Nesse método, o potencial eletrostático  $\phi(\mathbf{r})$  na presença de uma fonte  $\rho(\mathbf{r})$  é simplesmente dado pela convolução espacial entre a fonte  $\rho$  e a resposta do meio a uma carga puntual, tal que:

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{V'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') dV' , \quad (6.15)$$

onde  $dV'$  é um infinitésimo de volume na região fonte e  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  é denominada função de Green. Considerações de homogeneidade podem ser utilizadas para concluir que  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ . Substituindo (6.15) em (6.14) e lembrando que  $\int_{V'} \delta^D(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') dV' = \rho(\mathbf{r})$ , onde  $\delta^D(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  é a delta de Dirac em  $D$  dimensões espaciais, permite-nos obter a equação para a função de Green:

$$\nabla^2 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{1}{\varepsilon} \delta^D(\mathbf{r} - \mathbf{r}') . \quad (6.16)$$

Como vemos,  $G$  é a resposta do meio a uma carga puntual situada em  $\mathbf{r}'$ . Podemos definir agora o par de transformadas de Fourier:

$$G(\mathbf{R}) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D \mathbf{k} \tilde{G}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} , \quad (6.17)$$

$$\tilde{G}(\mathbf{k}) = \int d^D \mathbf{R} G(\mathbf{R}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} , \quad (6.18)$$

para obter a equação de Poisson no domínio  $\mathbf{k}$ :

$$\tilde{G}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\varepsilon k^2} , \quad (6.19)$$

sendo  $k^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$ . O trabalho maior é a obtenção da transformada inversa da solução acima, cujo resultado depende da dimensionalidade do espaço. Vamos considerar aqui o caso  $D = 3$ , pela sua importância óbvia. Temos então:

$$G(\mathbf{R}) = \frac{1}{(2\pi)^3 \varepsilon} \int d^3 \mathbf{k} \frac{1}{k^2} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} . \quad (6.20)$$

Levando as integrais para coordenadas esféricas, sendo  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ , temos:

$$G(\mathbf{R}) = \frac{1}{(2\pi)^3 \varepsilon} \int_{k=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} k^2 \sin \theta dk d\theta d\varphi \frac{1}{k^2} e^{-ikR \cos \theta} . \quad (6.21)$$

A integração somente é possível introduzindo um pequeno componente imaginário em  $k$  para fazer a integral convergir no limite  $R \rightarrow \infty$ . O resultado é dado abaixo:

$$G(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi \varepsilon R} . \quad (6.22)$$

Inserindo o resultado acima em (6.15) temos a forma integral bem conhecida:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi \varepsilon} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} dV' . \quad (6.23)$$

É fácil perceber que uma carga puntual  $q$  situada na origem, cuja densidade de carga vale  $\rho = q\delta(\mathbf{r})$  produz um potencial escalar na forma:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi \varepsilon r} , \quad (6.24)$$

que varia na forma do inverso da distância  $r$ .

Tendo em mãos o conhecido resultado matemático  $\nabla(1/R) = -\mathbf{R}/R^3$  e o potencial escalar dado por (6.23) podemos utilizar a definição  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  para obter o campo elétrico gerado por uma distribuição genérica de cargas:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi \varepsilon} \int_{V'} \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{R}}{R^3} dV' . \quad (6.25)$$

### 6.1.2 A rota histórica para a lei de Gauss-Coulomb

O primeiro estudo consistente das forças elétricas se deu por volta de 1785, por Charles Augustin Coulomb que experimentalmente verificou a lei da força elétrica entre duas cargas consideradas puntuais, tendo esta lei a mesma forma que a lei de Newton para a gravitação, ou seja:

$$\mathbf{F}_e = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{qq'}{R^2} \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{R}} \quad (6.26)$$

onde  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  e  $\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{R}} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \mathbf{R}/R$ . Uma vez definida essa lei para a força, tornou-se conveniente, para os casos em que tenhamos distribuições de cargas criando suas linhas de força e atuando sobre uma outra carga-teste, o conceito de campo elétrico  $\mathbf{E}$ , que na verdade vai muito além de mera formalidade matemática como já vimos. Na estática o campo é definido através da força que atua sobre uma carga elétrica  $q$  de teste:

$$\mathbf{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}_e}{q} \quad (6.27)$$

Dessa forma a força elétrica é definida através da equação:

$$\mathbf{F}_e = q\mathbf{E} . \quad (6.28)$$

O significado de  $q \rightarrow 0$  é que a carga de teste deve ser suficientemente pequena para que a força que ela faz sobre as cargas que geraram o campo  $\mathbf{E}$  não perturbe suas posições, o que destruiria sua configuração e alteraria o valor original do campo que se quer medir. Para uma única carga  $q'$  gerando o campo temos, portanto:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{q'}{R^2} \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{R}} . \quad (6.29)$$

Admitido que o princípio de superposição seja válido, um conjunto de cargas  $q_i$  distribuídas aleatoriamente, irá produzir um campo dado pela soma vetorial dos campos gerados pelas cargas individualmente, ou seja,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \quad (6.30)$$

Sendo  $\mathbf{r}$  o ponto onde estamos observando o campo, e  $\mathbf{r}_i$  a posição da  $i$ -ésima carga. Levando a distribuição de cargas ao limite do *continuum*, ou seja a carga individual  $q_i \rightarrow 0$  e o número de cargas  $N \rightarrow \infty$  em um determinado volume do espaço, podemos converter a última expressão em uma integral:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \rho(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (6.31)$$

onde  $\rho$  agora é a densidade de cargas, ou seja, é a razão entre a quantidade de carga  $\Delta q(\mathbf{r}')$  contida em um volume  $\Delta V$  em torno do ponto  $\mathbf{r}'$ , e o volume,  $\rho = \Delta q/\Delta V$ . A expressão (6.31) é idêntica a (8.59).

Já o potencial escalar elétrico, na estática, é obtido usualmente a partir de uma análise do trabalho realizado por uma força externa  $\mathbf{F}$  em uma carga de teste para contrabalançar o efeito da força elétrica  $\mathbf{F}_e = q\mathbf{E} = -\mathbf{F}$ , para transportá-la de um ponto  $a$  até um ponto  $b$ . O trabalho realizado é dado por:

$$W = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -q \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} , \quad (6.32)$$

e a diferença de potencial entre esses pontos é definida como a razão entre o trabalho realizado e a carga  $q$ .

$$V_{ab} = \frac{W}{q} = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V_a - V_b$$

$V_{ab}$  tem o significado de diferença de potencial elétrico. No caso da Eletrostática é fácil verificar que  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  satisfaz a condição acima, onde  $\phi$  é um função escalar e  $\phi_a - \phi_b = V_{ab}$ . A expressão para a função  $\phi$  em termos da distribuição de cargas pode ser obtida diretamente da definição de campo elétrico, utilizando algumas identidades do cálculo vetorial. Considerando a seguinte relação:

$$\nabla \left( \frac{1}{R} \right) = -\frac{\mathbf{R}}{R^3} ,$$

com  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ , e o campo elétrico sendo dado por:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \rho(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ,$$

podemos escrever:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \rho(\mathbf{r}') \nabla \left( \frac{1}{R} \right) .$$

Como o operador  $\nabla$  está operando sobre as variáveis de observação do campo  $\mathbf{r}$  e a integral é realizada sobre as variáveis de fonte  $\mathbf{r}'$ , podemos escrever:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \int dV' \rho(\mathbf{r}') \left( \frac{1}{R} \right) .$$

Desse modo o campo elétrico é dado pelo gradiente de uma função escalar  $\phi$  que, no caso da eletrostática, é o potencial elétrico. Podemos chamar  $\phi$  de potencial de Coulomb e temos:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi ,$$

conforme definido anteriormente. Para um campo vetorial obtido a partir de um gradiente, a integral de caminho fechado anula-se, como podemos verifica:

$$\oint \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{l} = - \oint \nabla\phi \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \nabla \times \nabla\phi \cdot d\mathbf{S} = 0 ,$$

já que:

$$\nabla \times \nabla \phi = 0 ,$$

então para o campo eletrostático temos:

$$\nabla \times \mathbf{E}_e = 0 \Leftrightarrow \oint \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{l} = 0 . \quad (6.33)$$

A forma integral nessa última equação é a essência da **lei das malhas** em circuitos elétricos em baixas frequências. Note que a integral de caminho fechado  $C$  pode ser separada em  $N$  trajetos,  $C = L_1 + L_2 + \dots + L_N$ , tal que:

$$\oint \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{l} = - \sum_{n=1}^N \int_{L_n} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \sum_{n=1}^N V_{n,n+1} = 0 , \quad (6.34)$$

sendo  $V_{n,n+1} = - \int_{a_n}^{a_{n+1}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  e  $a_{N+1} = a_1$ , fechando o circuito.

### 6.1.3 A Lei de Gauss revisitada

A lei de Gauss é uma importante relação experimental, que pode ser deduzida a partir da expressão do campo elétrico:

$$\mathbf{E} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \int dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} .$$

Tomemos o divergente da expressão acima, e temos:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \nabla \int dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla^2 \int dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} ,$$

ou ainda, podemos operar diretamente em  $1/R$ , já que o laplaciano somente atua nas coordenadas de campo:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \rho(\mathbf{r}') \nabla^2 \left( \frac{1}{R} \right) .$$

Utilizando mais uma vez as propriedades de cálculo vetorial temos:

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{R} \right) = -4\pi\delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) ,$$

e fazendo uso dela, temos:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \rho(\mathbf{r}') [-4\pi\delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)] .$$

Como a integral de uma função delta de Dirac multiplicada por outra função em todo o espaço nos dá a própria função no ponto em que o argumento da delta se anula, temos:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} . \quad (6.35)$$

Para o caso de meios materiais, podemos mostrar que:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho , \quad (6.36)$$

com  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ , onde  $\mathbf{P}$  é a polarização dielétrica do meio. As equações acima são a versão diferencial da primeira equação de Maxwell, no vácuo, e num meio qualquer, respectivamente. Vamos utilizar a expressão mais geral, em que aparece  $\mathbf{D}$  para deduzir a Lei de Gauss.

Uma vez que temos (6.36) podemos integrar sobre o volume, para obter um fluxo total:

$$\Psi_T = \int_V dV \nabla \cdot \mathbf{D} = \int_V dV \rho ,$$

mas aplicando o teorema de Gauss temos

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dV . \quad (6.37)$$

### 6.1.4 Energia Eletrostática e Capacitância

Sabemos que a densidade de energia armazenada pelo campo elétrico pode ser expressa na forma abaixo:

$$u_e = \frac{1}{2} \varepsilon \mathbf{E}^2 , \quad (6.38)$$

onde considera-se aqui um meio material isotrópico e linear. Na teoria de circuitos elétricos, sabemos que a energia total armazenada no capacitor é dada por:

$$U_C = \frac{1}{2} C V^2 , \quad (6.39)$$

onde  $C$  é a capacitância, medida em farads [F] e  $V = -\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  a diferença de potencial entre seus terminais. Uma vez que a energia total armazenada no interior do capacitor está associada à integral de volume da densidade de energia armazenada na forma do campo elétrico, temos:

$$C = \frac{1}{V^2} \int \varepsilon \mathbf{E}^2 d\text{Vol} . \quad (6.40)$$

Note-se que aqui utilizamos  $d\text{Vol}$  para designar a integração sobre o volume, uma vez que  $V$  está sendo utilizada para designar a diferença de potencial entre os terminais do capacitor.

Agora, o problema de determinar a capacitância está em resolver o potencial eletrostático  $\phi$  na região interna do capacitor, dadas as condições de contorno impostas pela geometria do mesmo, e os materiais que são utilizados para fabricá-lo.

## 6.2 Magnetostática

Vamos agora estudar as principais relações da magnetostática, como a definição de campo magnético, e as principais leis matemáticas que regem os campos magnéticos que não dependem do tempo. As seguintes equações formam a base da magnetostática:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 , \quad (6.41)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} , \quad (6.42)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) , \quad (6.43)$$

Para satisfazer automaticamente a equação (6.41), podemos utilizar uma identidade do cálculo vetorial que diz que  $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$  e portanto definir:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} . \quad (6.44)$$

Utilizando ainda a equação constitutiva (6.43) na forma abaixo:

$$\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M} ,$$

podemos fazer a substituição da equação (6.44) em (6.42) para obter a seguinte equação, denominada equação de Poisson vetorial:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0(\mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{M}) , \quad (6.45)$$

onde adotou-se a condição de calibre  $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ . A solução formal desta equação é, *mutatis mutandis*, análoga à equação de Poisson escalar, sendo dada simplesmente por:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{(\mathbf{J}(\mathbf{x}') + \nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{x}'))}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' . \quad (6.46)$$

### 6.2.1 O Potencial Escalar Magnético

No caso em que  $\mathbf{J} = 0$  fazemos:

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \Rightarrow \mathbf{H} = -\nabla\phi_m, \quad (6.47)$$

onde  $\phi_m$  é dito potencial escalar magnético. A equação de Gauss magnética pode ser escrita na forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M}$$

e podemos fazer então as seguintes definições:

$$\mathbf{H} = -\nabla\phi_m, \quad (6.48)$$

$$\rho_m = -\nabla \cdot \mathbf{M}, \quad (6.49)$$

$$\nabla^2\phi_m = -\rho_m, \quad (6.50)$$

onde define-se uma densidade de carga magnética fictícia,  $\rho_m$  e nesse caso a solução dos problemas magnetostáticos seguem completa analogia com a Eletrostática. A solução formal para o potencial  $\phi_m$  é dada abaixo:

$$\phi_m = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'. \quad (6.51)$$

Para um único momento de dipolo magnético  $\mathbf{m}$  localizado na posição  $\mathbf{x}_0$  temos:

$$\mathbf{M} = \mathbf{m}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (6.52)$$

Pede-se ao leitor que demonstre que:

$$\phi_m = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{R}}{4\pi R^3}, \quad (6.53)$$

onde  $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ . Realizando o cálculo de  $\mathbf{B} = -\mu_0 \nabla\phi_m$  obtém-se:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi R^5} [3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{R})\mathbf{R} - R^2\mathbf{m}]. \quad (6.54)$$

A energia de interação entre dois dipolos magnéticos  $\mathbf{m}_1$  e  $\mathbf{m}_2$  pode ser calculada facilmente considerando-se a energia de um dos dipolos imerso no campo gerado pelo outro, ou seja:

$$U_m = -\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{B}_2 = -\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{B}_1$$

onde  $\mathbf{B}_1$  ou  $\mathbf{B}_2$  tem a forma (6.54), substituindo-se  $\mathbf{m}$  por  $\mathbf{m}_1$  ou  $\mathbf{m}_2$ , respectivamente. Temos então:

$$U_m = -\frac{\mu_0}{4\pi R^5} [3(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{R})(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{R}) - R^2\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2]. \quad (6.55)$$

Podemos generalizar a expressão acima para um conjunto de dipolos. Para um par temos:

$$U_m^{ij} = -\frac{1}{2}(\mathbf{m}_i \cdot \mathbf{B}_j + \mathbf{m}_j \cdot \mathbf{B}_i)$$

onde colocamos a energia na forma simétrica para que a soma sobre todos os índices  $i, j$  possa ser feita sem restrições e evitar a dupla contagem da energia. Obtém-se da expressão  $U_m = \sum_{ij} U_m^{ij}$  o seguinte resultado:

$$U_m = -\frac{\mu_0}{8\pi} \sum_{ij} \frac{1}{R_{ij}^5} [3(\mathbf{m}_i \cdot \mathbf{R}_{ij})(\mathbf{m}_j \cdot \mathbf{R}_{ij}) - R_{ij}^2 \mathbf{m}_i \cdot \mathbf{m}_j] \quad (6.56)$$

A interação acima é conhecida como interação dipolo-dipolo ou simplesmente interação dipolar. Ela é de longo alcance porém relativamente mais fraca do que outra denominada interação de troca, que é de curto alcance mas tende a alinhar os dipolos paralelamente. A interação dipolo-dipolo usualmente é responsável por "destruir" configurações magnéticas, criando regiões de domínios magnéticos.

## 6.2.2 A rota história para a Magnetostática

Foi verificado experimentalmente que na presença de um campo magnético de magnitude  $B$ , gerado por um ímã permanente por exemplo, a força magnética agindo sobre uma carga de teste de carga  $q$  e velocidade  $v$  é:

$$F = qvB \sin \theta$$

ou seja,  $v$  e  $B$  devem estar ortogonais entre si para que a força seja máxima. Entretanto o sentido da força deve ser determinado através da regra da mão direita, ou ainda, fazendo uso do cálculo vetorial, para colocar numa forma mais rigorosa:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} . \quad (6.57)$$

A equação (6.57) permite definir o campo magnético. Dada uma carga de teste  $q$  e velocidade  $v$ , em módulo, sabemos que esta, por estar em movimento também cria campo magnético. De modo a medir um campo magnético resultante gerado por uma distribuição de correntes, a carga de teste não pode influir na distribuição de campo gerado pelos demais elementos de corrente. Dessa forma:

$$B = \lim_{qv \rightarrow 0} \frac{F}{qv} . \quad (6.58)$$

Note que tal expressão não é completa dado que o campo  $\mathbf{B}$  tem três componentes e apenas as componentes ortogonais à velocidade são medidas para uma dada direção do vetor velocidade. É necessário portanto uma série de medidas, para determinar as 3 componentes. Experimentalmente mostrou-se que a força magnética entre duas cargas pontuais é dada por:

$$\mathbf{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qq'\mathbf{v} \times (\mathbf{v}' \times \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{R}})}{R^2} , \quad (6.59)$$

sendo  $\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{R}} = \mathbf{R}/R$  e  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  que pode ser colocado na forma de Lorentz:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} ,$$

sendo o campo gerado  $\mathbf{B}$  por uma carga puntual  $q$  em movimento retilíneo uniforme, omitindo os índice ', dado por:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{R}}}{R^2} . \quad (6.60)$$

Para uma distribuição de cargas pontuais o campo gerado em um ponto  $\mathbf{r}$  é sempre dado pela soma vetorial, novamente admitindo válido o princípio de superposição e linearidade:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N q_i \frac{\mathbf{v}_i \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} . \quad (6.61)$$

Quando fazemos  $N \rightarrow \infty$  e  $q_i \rightarrow \Delta q_i \sim 0$ , sendo

$$\mathbf{J} = \frac{\Delta q_i}{\Delta V} \mathbf{v}_i = \rho(\mathbf{r}') \mathbf{v}(\mathbf{r}'),$$

obtemos uma expressão integral na forma:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} . \quad (6.62)$$

Considerando novamente a seguinte relação:

$$\nabla \left( \frac{1}{R} \right) = -\frac{\mathbf{R}}{R^3} ,$$

podemos escrever:

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \nabla \left( \frac{1}{R} \right) ,$$

ou ainda, utilizando o fato de que

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \nabla \left( \frac{1}{R} \right) = -\nabla \left( \frac{1}{R} \right) \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') = -\nabla \times \left( \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} \right) + \frac{1}{R} \nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') ,$$

e dado que  $\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') = 0$ , pois  $\nabla$  opera somente em  $\mathbf{r}$  e a densidade de corrente  $\mathbf{J}$  é função de  $\mathbf{r}'$  apenas, temos

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int dV' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R}$$

que pode ser escrito em termos de um potencial vetor magnético  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} , \quad (6.63)$$

sendo o potencial vetor dado por

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} , \quad (6.64)$$

que coincide com nossos resultados anteriores.

Percebemos das equações acima que o campo magnético é um campo rotacional e sendo assim podemos escrever:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$$

e temos a equação de Maxwell para fontes magnéticas:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 , \quad (6.65)$$

ou, utilizando o teorema de Gauss, temos na forma integral:

$$\oint_a \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0 . \quad (6.66)$$

### 6.2.3 Lei de Biot-Savart e Forças Magnéticas entre Correntes

Consideremos uma coleção de cargas elétricas em movimento, ou seja, uma corrente elétrica. De forma simplista podemos escrever, para uma parcela de carga  $dq$  e velocidade  $\mathbf{v}$ :

$$dq \mathbf{v} = dq \frac{d\mathbf{l}}{dt} = I d\mathbf{l}$$

O campo gerado por aquela pequena parcela de carga será:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dq \mathbf{v} \times \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{r}}}{r^2}$$

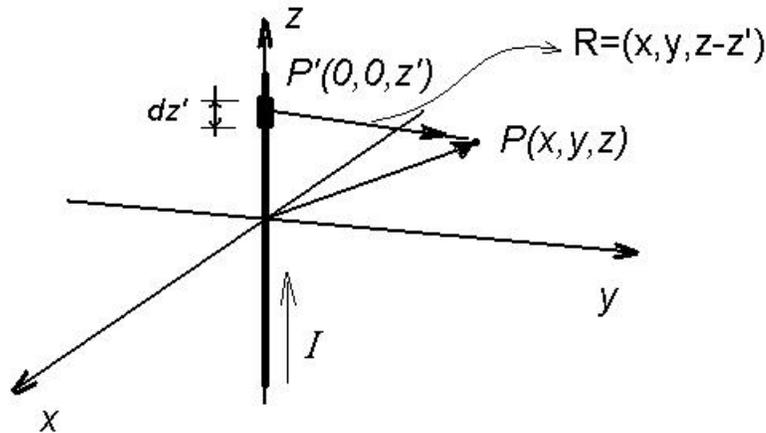
ou ainda:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{r}}}{r^2}$$

A expressão acima deve ser integrada por toda a extensão que transporta a corrente  $I$ :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (6.67)$$

A expressão acima é conhecida como Lei de Biot-Savart. Biot e Savart em 1820, bem como Ampère entre 1820 e 1825 estabeleceram as leis básicas relacionando o campo magnético  $\mathbf{B}$  às correntes elétricas e as leis de forças entre correntes elétricas.



Consideremos um fio infinitamente longo, sendo percorrido por uma corrente  $I$ , conforme a figura. O campo será dado por:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I dz' \hat{\mathbf{a}}_z \times \hat{\mathbf{a}}_r}{r^2}$$

e como resultado:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{\mathbf{a}}_\varphi$$

sendo  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

Dado o campo de uma distribuição de correntes podemos então determinar a força entre dois condutores transportando correntes. As forças entre condutores foram medidas experimentalmente por Ampère. Tem-se:

$$d\mathbf{F} = dq \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

ou ainda:

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

que podemos escrever como:

$$\mathbf{F} = \int I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (6.68)$$

e substituindo o campo gerado por uma corrente:

$$\mathbf{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \frac{I_1 d\mathbf{l}_1 \times (I_2 d\mathbf{l}_2 \times \hat{\mathbf{a}}_r)}{r^2} \quad (6.69)$$

Considerando dois fios longos, podemos utilizar a expressão (6.68) e o campo magnético para um fio infinitamente longo, para encontrar que a força por unidade de comprimento entre dois fios percorridos por correntes  $I_1$  e  $I_2$ , paralelos é:

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi\rho}$$

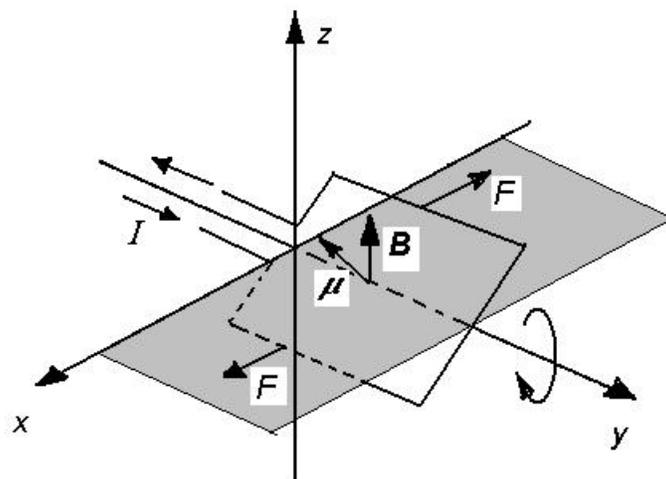
### Torque sobre uma espira de corrente: O Dipolo Magnético

Observe a figura a seguir:

Uma espira de corrente está sujeita a um torque provocado pelas forças magnéticas, dado por:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_m = \mathbf{r} \times (I\mathbf{l} \times \mathbf{B})$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times (I\mathbf{l} \times \mathbf{B})$$



A expressão pode ser escrita ainda na seguinte forma:

$$\tau = \vec{\mu} \times \mathbf{B}$$

sendo o momento de dipolo magnético definido abaixo:

$$\vec{\mu} = I \mathbf{r} \times \mathbf{l}$$

O produto  $\mathbf{r} \times \mathbf{l}$  é a área da espira, de na direção do vetor superfície, então podemos escrever:

$$|\vec{\mu}| = IA$$

Ao girar a espira o torque produz trabalho. Vejamos:

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int Fr \sin \theta d\theta$$

pois  $d\mathbf{l} = r d\theta \hat{\mathbf{a}}_\theta$ , mas reconhecendo:

$$Fr \sin \theta = \tau$$

temos:

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int \tau d\theta$$

Da definição  $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \mathbf{B}$  temos

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mu B \sin \theta d\theta = -\mu B \cos \theta_2 + \mu B \cos \theta_1$$

$$W = -\vec{\mu}_1 \cdot \mathbf{B} + \vec{\mu}_2 \cdot \mathbf{B}$$

e podemos definir então a energia potencial devido ao momento do dipolo magnético :

$$U = -\vec{\mu} \cdot \mathbf{B}$$

A direção de menor energia, que é uma posição de equilíbrio é quando o momento magnético fica paralelo ao campo aplicado. A máxima energia é encontrada na condição anti-paralela.

Um exemplo adicional: consideremos um elétron órbita circular no átomo de hidrogênio. podemos calcular o momento magnético dado que a área é simplesmente  $\pi r^2$  onde  $r$  é o raio da órbita.

A corrente de um elétron é a carga eletrônica dividido pelo tempo gasto para cumprir uma revolução, ou seja, o período da órbita  $T$ . Temos então:

$$\mu = \frac{e}{T} \pi r^2 = e f \pi r^2 = \frac{e \omega r^2}{2}$$

Adicionalmente, a quantização proposta por Bohr diz que:

$$m v r = m \omega r^2 = \frac{n h}{2\pi}$$

onde  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Para a primeira órbita,  $n = 1$  e temos:

$$\omega r^2 = \frac{h}{2\pi m}$$

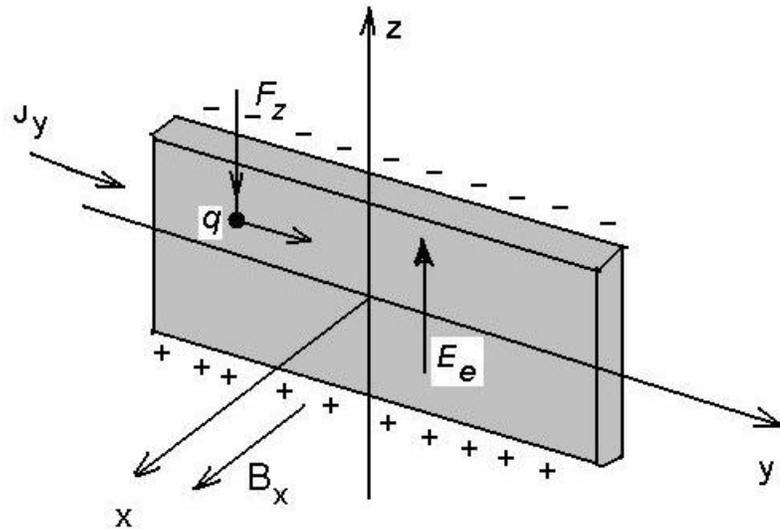
e o módulo do momento magnético do elétron é então:

$$\mu_B = \frac{e h}{4\pi m}$$

a quantidade acima é conhecida como magnéton de Bohr.

### Efeito Hall

Considere a figura a seguir:



A corrente que passa pelo material  $J_y$  sobre a ação do campo magnético  $\mathbf{B}$  aplicado, que consideramos na direção  $x$ . A densidade de corrente pode ser escrita simplesmente como:

$$J_y = n q v_y$$

onde  $n$  é o número de portadores de carga  $q$ . A força elétrica sobre a carga  $q$  é simplesmente:

$$F_z = -q v_y B_x$$

que efetivamente representa um campo não-eletrostático:

$$E_z = -v_y B_x$$

Esse campo tende a acumular portadores positivos na superfície inferior do material, enquanto que na parte superior temos um acúmulo de cargas negativas. Devido ao acúmulo surge um campo eletrostático em oposição a esse campo não-eletrostático, que no equilíbrio tem o mesmo módulo. Dessa forma uma diferença de potencial pode ser medida entre as duas superfícies:

$$V = \pm v_y B_x d$$

O efeito Hall permite inferir a densidade de portadores de carga, uma vez que podemos conhecer a densidade de corrente  $J_y$  e o campo magnético aplicado. Define-se o coeficiente Hall da seguinte maneira:

$$R_H = \frac{E_z}{J_y B_x} = -\frac{1}{nq}$$

e em termos desse coeficiente temos:

$$V_H = \pm v_y B_x d = \pm \frac{J_y}{nq} B_x d = \mp R_H \frac{I d B_x}{A}$$

ou:

$$R_H = -\frac{1}{nq} = \frac{V_H \cdot A}{I \cdot d \cdot B_x}$$

### A Lei de Ampère

Para o que segue considere o campo magnético gerado por um fio infinitamente longo, cuja expressão já foi demonstrada através da lei de Biot:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\mathbf{a}}_\varphi$$

e queremos realizar a integral de caminho desse campo:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$

Observe a figura

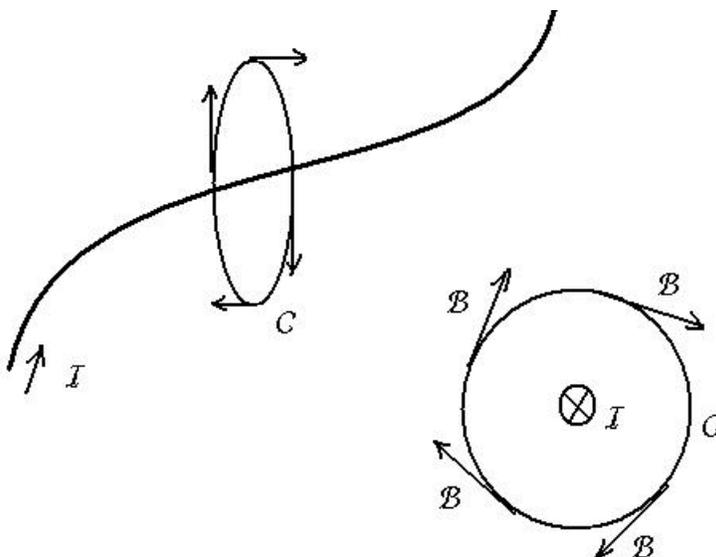


Figure 6.1:  $\Delta V = A \cdot \Delta l = A \cdot v \cdot \Delta t$

Na figura mostrada o caminho adotado é uma circunferência de raio  $r$  e portanto

$$d\mathbf{l} = r d\varphi \hat{\mathbf{a}}_\varphi$$

Tem-se então:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\mathbf{a}}_\varphi \cdot r d\varphi \hat{\mathbf{a}}_\varphi = \mu_0 I \int_0^{2\pi} d\varphi = \mu_0 I$$

O resultado obtido é válido para qualquer caminho de integração adotado e para qualquer distribuição de correntes, e leva o nome de Lei de Ampère:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \quad (6.70)$$

Considere a figura:

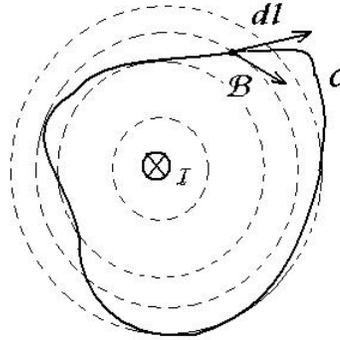


Figure 6.2:  $d\mathbf{l} = r d\varphi \hat{\mathbf{a}}_\varphi + dr \hat{\mathbf{a}}_r$

Vamos demonstrar a independência da integral com relação ao caminho. No caso o campo adotado é azimutal, e o caminho adotado é:

$$d\mathbf{l} = r d\varphi \hat{\mathbf{a}}_\varphi + dr \hat{\mathbf{a}}_r$$

e portanto:

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B_\varphi r d\varphi$$

e o resultado é o mesmo que se tivéssemos escolhido um caminho arbitrário.

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \quad (6.71)$$

A lei ainda pode ser escrita na forma:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 I \quad (6.72)$$

Podemos considerar ainda um meio geral no qual  $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ . Neste caso podemos mostra que:

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = I \quad (6.73)$$

e aplicando o teorema de Stokes aqui temos:

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

de onde tiramos a forma diferencial da Lei de Ampère:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (6.74)$$

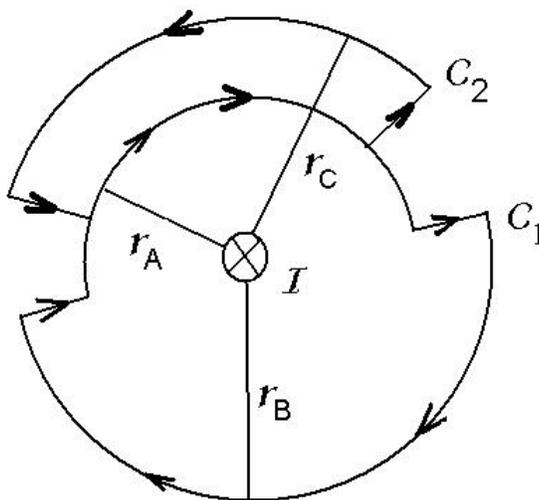
**Interpretação da Lei de Ampère:**

A lei de Ampère na sua forma integral afirma, que a integral de caminho do campo magnético  $\mathbf{B}$  em um caminho fechado e arbitrário  $C$  é igual a  $\mu_0$  vezes a corrente total encerrada pelo caminho  $C$ .

Dessa forma, para um caminho arbitrário que não encerre nenhuma corrente a integral é nula, ao passo que uma vez encerrada a totalidade da corrente, a escolha do caminho é arbitrária.

Vamos mais uma vez provar o que foi dito, através do exemplo do campo de um fio infinito carregando uma corrente  $I$ .

Observe a figura seguinte: Para o caminho 1:



$$\oint_{C_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^\pi \frac{\mu_0 I}{2\pi r_A} r_A d\varphi + \int_\pi^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r_B} r_B d\varphi = \mu_0 I$$

Para o caminho 2: Sabemos que o resultado deve ser nulo pois não há corrente envolvida pelo caminho, mas vamos calcular.

$$\begin{aligned} \oint_{C_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi r_A} r_A d\varphi + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi r_C} (-r_C d\varphi) = \\ &= \oint_{C_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0 \end{aligned}$$

Na sua forma diferencial a lei de Ampère, que é equivalente à forma integral, afirma que a densidade de correntes  $\mathbf{J}$  é fonte de campo magnético na forma de um campo rotacional, cujas linhas se fecham sobre si mesmas.

### Aplicações da Lei de Ampère

Embora tenha validade geral, a lei de Ampère na forma integral tem mais utilidade em casos bastante simétricos. Tem o mesmo papel em problemas de determinação de campo magnético que a lei de Gauss tem para a eletrostática. Alguns princípios básicos para aplicar a lei:

Se  $\mathbf{B}$  é tangente à trajetória em todos os pontos da trajetória então a integral será igual ao módulo  $B$  multiplicado pela circunferência da trajetória;

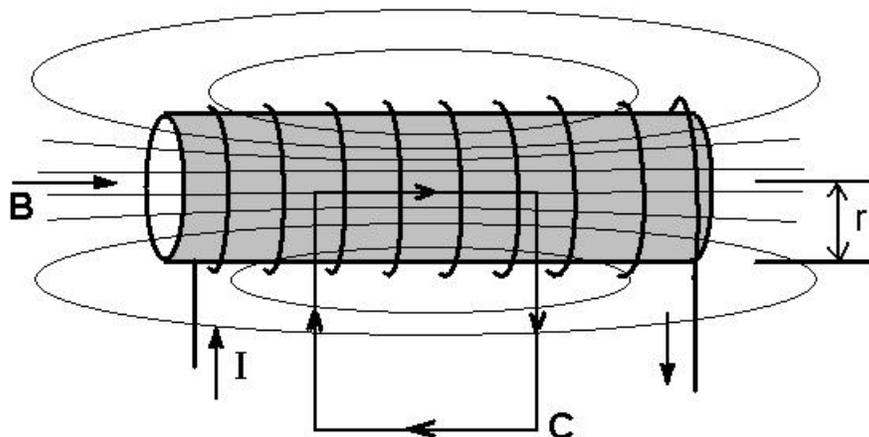
Se  $\mathbf{B}$  é perpendicular à trajetória em parte da trajetória, essa parte não contribui para a integral;

$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$  se o caminho escolhido não englobar nenhuma corrente, mas isso não quer dizer que o campo magnético  $\mathbf{B}$  seja nulo na trajetória;

Devemos escolher a trajetória mais simétrica possível para que a integral possa ser calculada.

### Campo de um solenóide

Consideremos um solenóide longo, com  $n$  espiras por unidade de comprimento e carregando uma corrente  $I$ , conforme mostrado na figura:



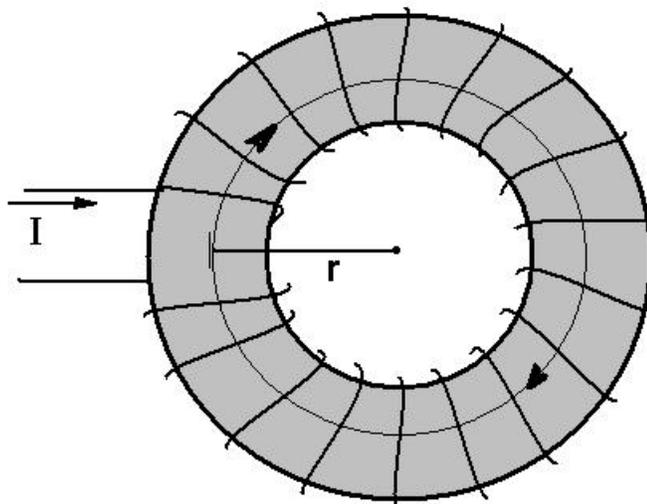
Quanto maior o comprimento  $L$  do solenoide mais concentradas ficam as linhas de campo em seu interior. Um solenóide infinitamente longo deve concentrar o campo todo no seu interior, sendo uniforme. Aplicando a lei de Ampère:

$$B = \mu_0 n I$$

sendo  $n$  o número de espiras por unidade de comprimento.

### Campo Magnético em um Toróide

Consideremos um toróide de raio médio  $r$ , envolvido por  $N$  espiras de corrente.



Utilizando o caminho mostrado na figura temos

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B2\pi r = \mu_0 NI$$

de onde tiramos que o campo  $\mathbf{B}$  é azimutal e dado por:

$$B = \mu_0 I \frac{N}{2\pi r}$$

se  $n = N/(2\pi r)$  temos o mesmo resultado que o exemplo anterior.

### 6.2.4 Energia Magnetostática e Indutância

Sabemos que a densidade de energia armazenada pelo campo magnético é dada por:

$$u_m = \frac{1}{2} \mu \mathbf{H}^2, \quad (6.75)$$

para um meio material isotrópico e linear, por simplicidade. Na teoria de circuitos elétricos, sabemos que a energia total armazenada no indutor vale:

$$U_L = \frac{1}{2} LI^2, \quad (6.76)$$

onde  $L$  é a indutância, medida em henries [H] e  $I = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$  a corrente que circula no indutor. Uma vez que para obter a energia total armazenada no interior do indutor devemos integrar sobre o volume total do mesmo a densidade de energia armazenada na forma do campo magnético, obtemos a expressão para a indutância:

$$L = \frac{1}{I^2} \int \mu \mathbf{H}^2 d\text{Vol}. \quad (6.77)$$

Dessa forma, a determinação de indutância consiste em um problema de contorno para o potencial magnético, que pode ser resolvido através de métodos similares aos da eletrostática, dadas as condições de contorno impostas pela geometria do indutor, e os materiais que são utilizados para fabricá-lo.

## 6.3 Referências Deste Capítulo

[6.1] Matthew N.O. Sadiku, *Elementos do Eletromagnetismo* (Ed. Bookman, Porto Alegre, 5a. Ed, 2005).

[6.2] William H. Hayt, *Eletromagnetismo* (LTC, 6a Ed.).

[6.3] John D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (Wiley and Sons, New York, 3rd. Ed., 1998).

## 6.4 Problemas Propostos

- 1) 1.1) O potencial eletrostático  $\phi$  criado por um momento de dipolo elétrico de módulo  $p_e = qd$  e orientado ao longo do eixo  $z$  é dado por:

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta.$$

- Determine o campo eletrostático  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ .
- Encontre a equação das linhas de campo e faça um esboço gráfico.
- Determine  $\nabla \times \mathbf{E}$ .

1.2) O potencial vetor magnético  $\mathbf{A}$  criado por um momento de dipolo magnético de módulo  $m = IA$ , onde  $I$  é a corrente que circula pelo circuito fechado e  $A$  a área encerrada pelo circuito, e orientado ao longo do eixo  $z$ , tal que  $\mathbf{m} = m\hat{\mathbf{a}}_z$ , é dado por:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 \mathbf{m} \times \hat{\mathbf{a}}_r}{4\pi r^2}.$$

- a) Faça o produto vetorial  $\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{a}}_r$  e encontre as componentes de  $\mathbf{A}$  em coordenadas esféricas.  
 b) Determine o campo magnetostático  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ .  
 c) Determine  $\nabla \cdot \mathbf{B}$ .

2) Um disco circular de raio  $a$  está uniformemente carregado com densidade de cargas superficial  $\rho_s$  C/m<sup>2</sup>. Considere o disco colocado no plano  $z = 0$  com vetor superfície orientado ao longo do eixo  $z$ ,

- (a) Demonstre que em um ponto  $(0, 0, h)$  o campo elétrico é dado por

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{h}{(h^2 + a^2)^{1/2}} \right) \hat{\mathbf{a}}_z$$

- (b) A partir do resultado anterior determine o campo  $\mathbf{E}$  para uma lâmina infinita  $a \rightarrow \infty$  de densidade superficial de cargas colocada sobre o plano  $z = 0$ .  
 (c) Se  $a \ll h$  mostre que o campo é similar ao de uma carga puntual.

3) Para uma distribuição esférica de cargas dada por

$$\rho = \begin{cases} \rho_0(a^2 - r^2), & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

- supondo  $\epsilon = \epsilon_0$  em todo o espaço. (a) Determine o campo elétrico  $\mathbf{E}$  e o potencial  $\Phi$  para todo o espaço.  
 (b) Faça o gráfico de  $E_r$  em função de  $r$  e encontre o valor de  $r$  para o qual o campo  $E_r$  é máximo.

4) Determine a velocidade  $v$  e a energia total  $E_{total} = E_{cin} + U$  (em eV) de um elétron no átomo de hidrogênio ( $Z = 1$ ) em movimento circular uniforme com raio  $r_0 = 5.29 \times 10^{-11}$  m, se a força centrípeta é providenciada pelo campo devido ao potencial eletrostático  $\Phi = Ze/(4\pi\epsilon_0 r)$ , como no modelo atômico de Rutherford. A força centrípeta é dada por:

$$F_c = \frac{mv^2}{r}$$

Dados úteis: massa do elétron  $m = 9.11 \times 10^{-31}$  kg, carga  $q = -e = -1.6 \times 10^{-19}$  C,  $1\text{eV} = 1.6 \times 10^{-19}$  joules

5 Para  $\epsilon = \epsilon_0$  e dado o potencial eletrostático abaixo

$$\Phi = \begin{cases} \Phi_0(1 - \rho^2/a^2), & \rho \leq a \\ -B \ln(\rho/a), & \rho > a \end{cases}$$

- (a) Esboce  $\Phi(\rho)$  em função de  $\rho$  e calcule o campo elétrico  $\mathbf{E}$  e a densidade de cargas  $\rho_v$  em todo o espaço  $0 \leq \rho \leq \infty$ . (b) Determine o valor de  $B$  para que não haja descontinuidade no campo elétrico em  $\rho = a$ . Faça o esboço do gráfico de  $\rho_v(\rho)$  e  $E_\rho(\rho)$ .

6 6.1 - Determine o potencial  $\Phi$ , o campo elétrico  $\mathbf{E}$  e a capacitância por unidade de comprimento para uma linha de transmissão consistindo de um de par de condutores de raio  $a$  e distantes  $d$  e também de um guia coaxial cujas superfícies do interno e da malha tem raios  $a$  e  $b > a$ , respectivamente.

6.2 - Determine  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{H}$  e a indutância por unidade de comprimento para as situações da linha de transmissão de par de condutores paralelos do guia coaxial. Para tanto considere que a terminação da linha e do cabo esteja curto circuitada e a corrente que os percorre vale  $I$ .

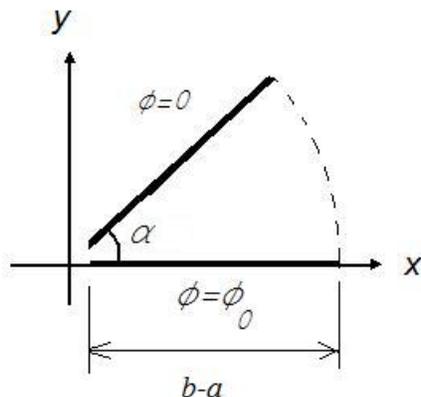


Figure 6.3: Capacitor de placas não-paralelas

- 7) Determine a solução da equação de Laplace para  $\Phi$ , e determine então o campo elétrico e a capacitância da estrutura mostrada na figura abaixo: Assuma que as duas placas se estendam de  $\rho_1 = a$  até  $\rho_2 = b$  com altura  $z = h$ . O ângulo  $\alpha$  é o ângulo formado pelos dois planos mantidos a potenciais  $\Phi(\varphi = 0) = \phi_0$  e  $\Phi(\varphi = \alpha) = 0$ .
- 8) Escreva as equações que governam a magnetostática e justifique o fato de podermos escrever  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ . Da Lei de Ampère na forma diferencial,  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ , obtenha a forma integral, e dê a interpretação física para a forma integral, esquematizando a interpretação através de figuras.
- 9) Uma espira circular de raio  $a$  situada sobre o plano  $z = 0$  e centrada na origem transporta uma corrente  $I$  no sentido anti-horário quando vista de cima (perspectiva de um observador que está em algum lugar tal que  $z > 0$ ).
- a) Determine o campo magnético gerado por esta espira em  $\mathbf{r} = (0, 0, h)$ . Faça uso das simetrias envolvidas!
- b) Determine o torque que o campo da espira produz sobre um dipolo magnético de momento  $\mathbf{m} = m\hat{\mathbf{a}}_x$  e situado em  $\mathbf{r} = (0, 0, h)$ . Considere todo o espaço com permeabilidade  $\mu_0$ . Obs.: Para um dipolo magnético temos:

$$U_m = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$$

$$\vec{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

- 10) Para um condutor infinitamente longo de raio  $a$ , colocado de tal modo que seu eixo coincida com o eixo  $z$  e transportando uma corrente total  $I_0$  o potencial vetor no interior do condutor é dado por:

$$\mathbf{A} = \frac{-I_0\mu_0}{4\pi a^2}(x^2 + y^2)\hat{\mathbf{a}}_z$$

Determine o campo magnético  $\mathbf{H}$  e a densidade de corrente  $\mathbf{J}$  no interior do condutor,  $\rho \leq a$ .

- 11) Encontre a indutância mútua entre uma espira retangular e um fio infinitamente longo transportando corrente  $I$ , conforme a figura abaixo:

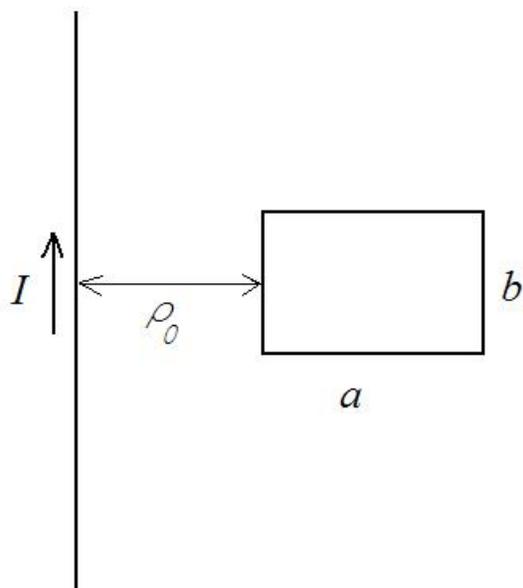


Figure 6.4: Espira retangular sob influência do campo produzido por um fio infinitamente longo

## Chapter 7

# Fundamentos gerais da ondulatória

Campos ondulatórios são essenciais na descrição de uma ampla variedade de fenômenos físicos, como o som, as vibrações mecânicas em cordas e membranas, ondas gravitacionais e no nosso caso de interesse, a propagação do campo eletromagnético. Quando utilizamos logo no início o termo *campo ondulatório* estamos afirmando *a priori* que uma onda é um campo, mas um tipo muito especial de campo, com certas características peculiares que lhe conferem o nome de onda. É importante observar que toda onda é essencialmente um campo, mas nem todo campo tem natureza ondulatória. O objetivo deste Capítulo é apresentar o conceito essencial de campo ondulatório e a partir dele deduzir a equação de ondas, resolvendo-a em coordenadas cartesianas para obter a solução de ondas planas uniformes.

### 7.1 A Equação de Ondas

Antes mesmo de obter a equação diferencial que rege os fenômenos ondulatórios mais simples precisamos responder à questão essencial: O que é uma onda? A experiência cotidiana, como a observação das vibrações em uma corda ou membrana, as ondas que surgem em um lago quando jogamos uma pedra na água, ou quando caem as gotas de chuva, o som e as ondas no mar nos mostram claramente que uma onda é um tipo de campo, ou seja, não é um fenômeno localizado no espaço porque existe em uma região do espaço e por isso deve ser descrita por uma função matemática  $\psi(x, y, z, t)$ , que pode ser um escalar ou um vetor, dependendo da situação, que é parametrizada pelas coordenadas espaço-temporais. A figura 7.1 ilustra duas ondas geradas por fontes pontuais na superfície da água, propagando-se e produzindo interferência ao se encontrarem. Vamos agora inferir a propriedade mais essencial de um campo ondulatório, ainda com base na experiência. Uma onda é um tipo de perturbação no espaço que se propaga, ou seja, se desloca, à medida que o tempo passa, com velocidade constante. Ao propagar-se a onda pode transportar energia, momento linear, momento angular e outras quantidades físicas.

É comum classificar as ondas quanto ao seu caráter e quanto à periodicidade, da seguinte forma:

**A)** Quanto ao caráter:

- *Longitudinais*: são aquelas na qual a perturbação propaga-se na mesma direção em que ocorrem. Por exemplo o som no ar corresponde a uma onda de pressão, que é caracterizado por zonas de compressão e descompressão do ar, cuja direção de propagação é a mesma da perturbação. Além do som em fluidos existem outros tipos de ondas longitudinais, como alguns tipos de ondas mecânicas, por exemplo vibrações longitudinais em uma mola. A figura 7.2 ilustra uma onda longitudinal.
- *Transversais*: são aquelas para as quais a perturbação ocorre em um plano perpendicular à direção de propagação, como é o caso as ondas na superfície da água, vibrações de cordas, ondas eletromagnéticas



Figure 7.1: Duas ondas propagando-se na superfície da água, produzindo interferência no momento em que se encontram.

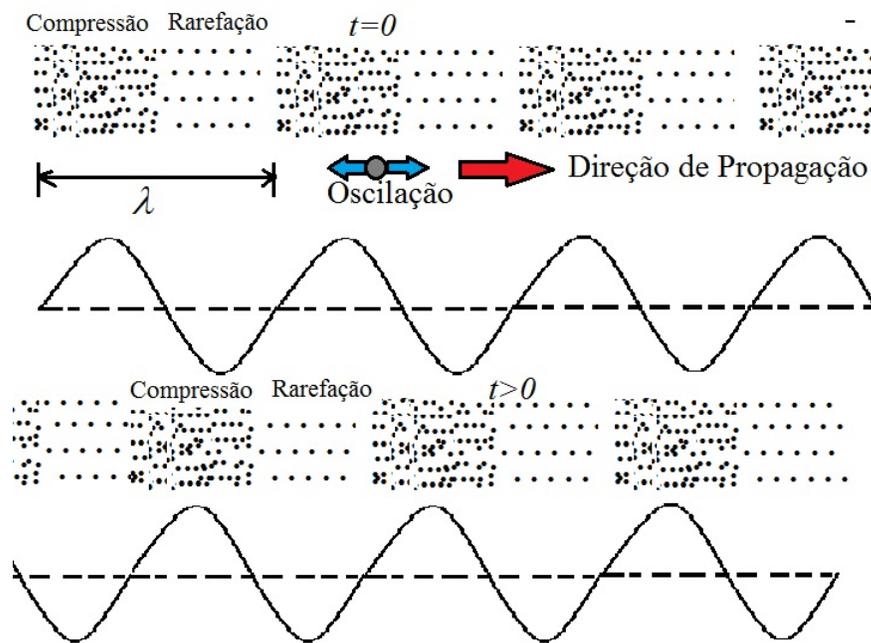


Figure 7.2: Exemplo de **onda longitudinal**: o som é a variação da pressão  $\Delta p(x, t)$  em relação atmosférica  $p_0$ . Moléculas do ar se movem na mesma direção da propagação da onda.

planas uniformes. Estas ondas admitem polarização, já que no plano que contém a perturbação há duas direções linearmente independentes e as oscilações podem ocorrer em uma ou outra dessas direções, ou ainda combinações lineares dessas. A figura 7.3 ilustra ondas transversais nas duas polarizações possíveis em um dado plano transversal à direção de propagação.

- *Transverso-Longitudinais ou Mistas*: são ondas em que as perturbações ocorrem tanto na direção de propagação, ou também chamada direção longitudinal, quanto no plano transversal. Existem soluções das equações de Maxwell com essas características e levam o nome de modos TE, TM ou híbridos, e serão

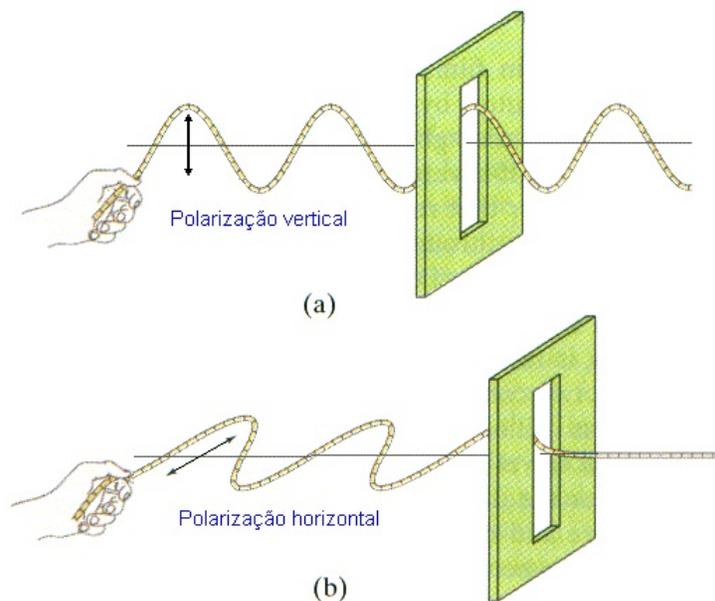


Figure 7.3: Exemplo de **ondas transversais**: vibrações de uma corda esticada, que admitem polarização. A perturbação oscila no plano perpendicular ao eixo de propagação da onda.

discutidos posteriormente.

**B)** Quanto à periodicidade:

- *Periódicas*: são aquelas para as quais o valor de amplitude se repete periodicamente no tempo, dado um ponto no espaço. Podem ser harmônicas puras(ou senoidais) ou ainda ser constituídas de superposições de harmônicas, podendo ser expressas por séries de Fourier. A figura 7.4 ilustra uma onda de natureza senoidal em função de  $x$  e  $t$ .
- *Não-Periódicas ou Pulsos*: são ondas que não apresentam repetição de um padrão e devem ser representados por uma superposição de ondas senoidais com espectro contínuo. A figura 7.5 ilustra um pulso gaussiano em função de  $x$  e  $t$ .

Para deduzir a equação de ondas vamos considerar uma perturbação  $\psi(z, t)$  que se desloca no espaço com velocidade constante  $v$  no sentido positivo do eixo  $z$ , muito similar a um movimento retilíneo uniforme (MRU), conforme ilustrado na figura 7.6 (similar a um MRU). Por uma questão de simplicidade, vamos trabalhar apenas com uma dimensão espacial, que denotaremos  $z$  e o tempo  $t$ . Os resultados serão prontamente generalizados posteriormente.

Considerando a nossa experiência cotidiana, se conhecemos o campo ondulatório para todo o espaço, no caso  $\psi(z, t_0)$  no instante de tempo inicial  $t = t_0$ , sabemos que essa distribuição espacial irá se deslocar com velocidade  $v$  à medida que o tempo passa, ou seja, a função  $\psi(z, t)$  deve se propagar com velocidade  $v$ , fazendo com que um pico localizado na posição  $z_0$  em  $t = t_0$  se desloque para uma posição  $z = z_0 + v\Delta t$  num intervalo de tempo transcorrido  $\Delta t = t - t_0$ . Em outras palavras, um campo ondulatório é aquele que sofre translações de toda a função  $\psi$  à medida que o tempo passa. O montante da translação segue um MRU, com velocidade  $v$ , significando que se um observador quiser acompanhar algum valor específico de amplitude do campo  $\psi(z_0, t_0)$  que se encontrava em  $z_0$  no instante de tempo  $t_0$ , deverá se deslocar seguindo uma equação de movimento do tipo  $z = z_0 + v\Delta t$  à medida que o tempo passa. Podemos arranjar os elementos dessa equação de MRU do

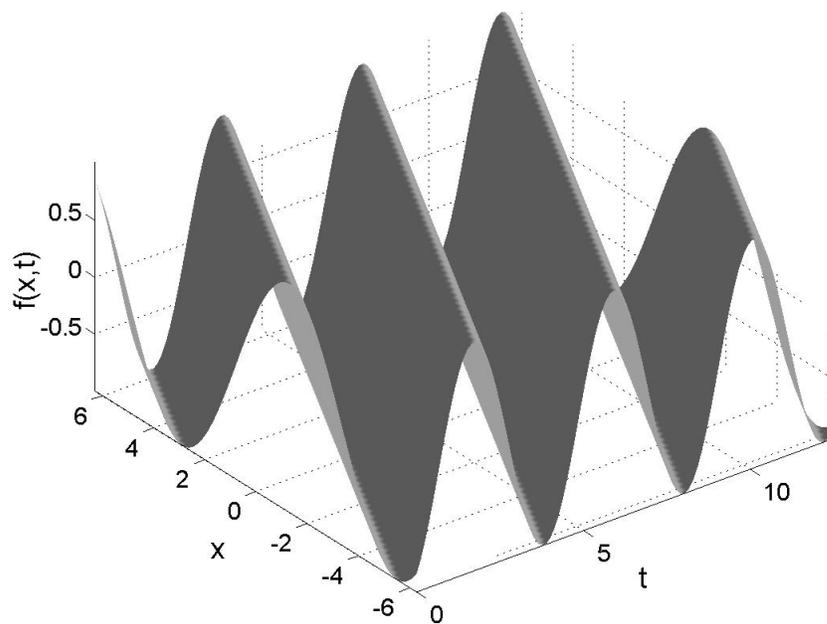


Figure 7.4: Onda periódica harmônica pura  $f(x, t) = \text{sen}(\omega t - kx)$ .

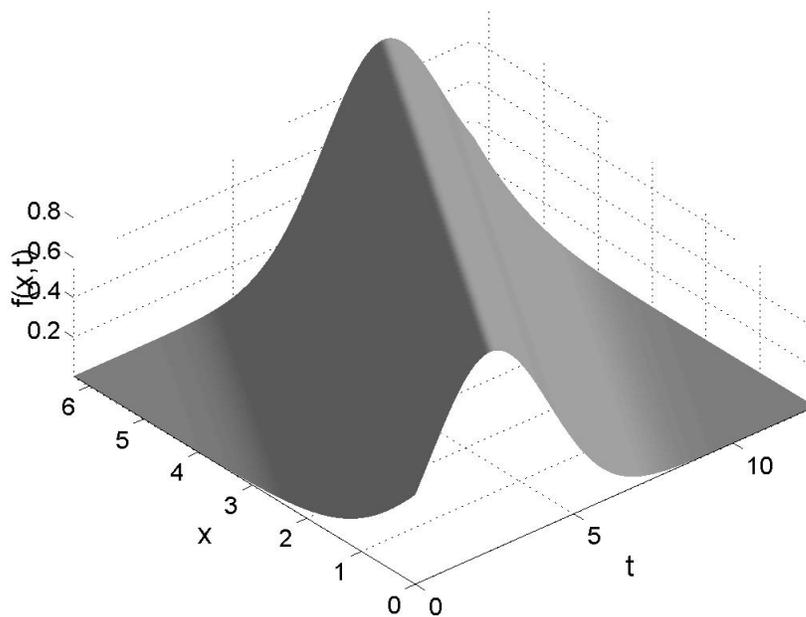


Figure 7.5: O pulso gaussiano  $f(x, t) = Ae^{-(x-vt)^2/\tau^2}$  é um exemplo de onda não periódica.

seguinte modo:

$$z = z_0 + v\Delta t = z_0 + v(t - t_0) \Rightarrow z_0 - vt_0 = z - vt . \quad (7.1)$$

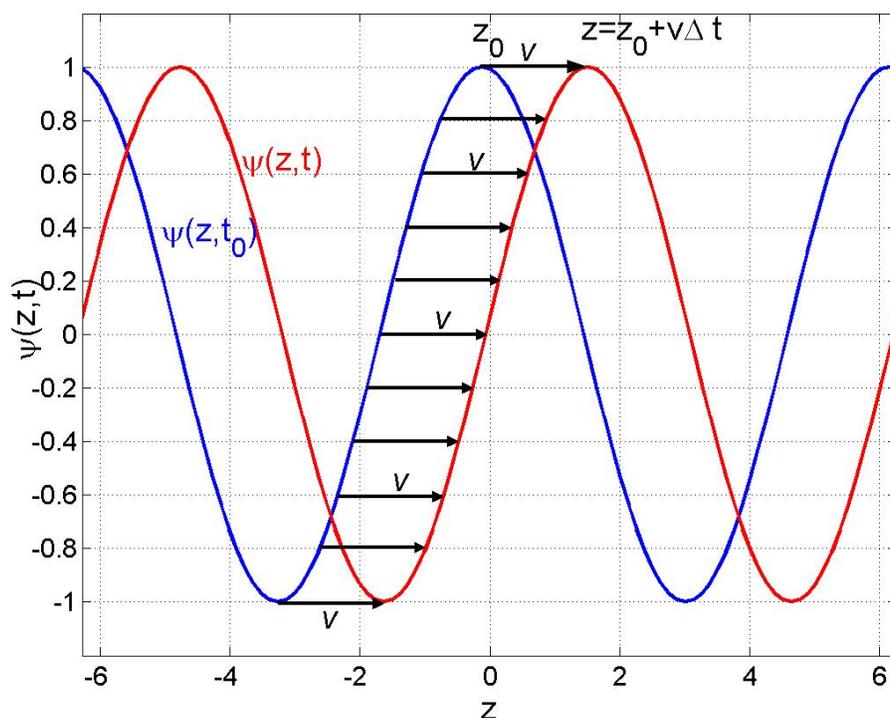


Figure 7.6: Campo Ondulatório  $\psi(z, t)$  em função de  $z$  em dois instantes de tempo distintos,  $t_0$  e  $t$ : conforme a nossa experiência, idealmente uma onda deve se deslocar sem deformação à medida que o tempo passa. A crista da onda que no instante  $t_0$  estava localizada na posição  $z_0$  move-se para a nova posição  $z = z_0 + v\Delta t$  com velocidade  $v$  em um intervalo  $\Delta t = t - t_0$ .

Em meios ditos sem perdas a onda não sofre atenuação e o valor de amplitude  $\psi_p(z_0, t_0)$  (que pode ser uma crista da onda, por exemplo) se desloca satisfazendo a equação:

$$\psi_p(z_0, t_0) = \psi_p(z = z_0 + v\Delta t, t) . \quad (7.2)$$

A condição acima é satisfeita desde que o argumento de  $\psi$  assuma a forma que segue:

$$\psi(z, t) = \psi(z - vt) .$$

Fica fácil verificar que qualquer valor dado  $\psi(z_0, t_0)$  se desloca com velocidade constante no sentido positivo do eixo  $z$ . Até agora somente consideramos uma onda que se desloca no sentido positivo do eixo  $z$ , mas a solução geral pode envolver uma onda que propaga-se no sentido negativo de  $z$ , também com velocidade  $v$  em módulo. Em ampla gama de situações essa onda não pode ser omitida, porque ondas podem encontrar obstáculos gerando componentes de onda refletida. A esta componente que propaga no sentido negativo denominamos onda contra-propagante. Para obter forma da solução dessa componente utilizamos o mesmo raciocínio que nos levou a concluir que uma onda propagante deve depender somente da combinação  $z - vt$ , bastando trocar o sinal para  $z + vt$ , o que corresponderia a inverter o sentido da velocidade. Desse modo a solução geral  $\psi(z, t)$  é dada por:

$$\psi(z, t) = f(z - vt) + g(z + vt) . \quad (7.3)$$

Cabe agora obter a equação diferencial que rege a função  $\psi(z, t)$  no caso geral. Uma vez que  $\psi(z, t)$  é dada por uma superposição de duas componentes, uma propagante e a outra contra-propagante, note que tanto

$f(z - vt)$  quanto  $g(z + vt)$  dependem de  $z$  e  $t$ . É conveniente realizar uma transformação de coordenadas, definindo duas novas variáveis:

$$\eta = z - vt, \quad (7.4)$$

$$\zeta = z + vt, \quad (7.5)$$

de tal forma que nessas coordenadas:

$$\psi(z, t) = \psi(\eta, \zeta) = f(\eta) + g(\zeta). \quad (7.6)$$

Aplicando sucessivamente os operadores  $\partial/\partial\eta$  e  $\partial/\partial\zeta$  obtemos uma equação diferencial parcial para  $\psi$  em termos de  $\eta$  e  $\zeta$ :

$$\frac{\partial}{\partial\zeta} \left( \frac{\partial f}{\partial\eta} \right) = \frac{\partial}{\partial\eta} \left( \frac{\partial f}{\partial\zeta} \right) = 0. \quad (7.7)$$

O objetivo primário de encontrar uma equação de ondas foi alcançado. Todavia, a equação acima está numa forma pouco convencional, por utilizar coordenadas  $\eta$  e  $\zeta$ , que correspondem a distintos observadores que se movem junto com a onda propagante e contra-propagante, respectivamente. De modo a escrever a equação em termos das variáveis originais  $z$  e  $t$ , precisamos expressar  $\partial/\partial\eta$  e  $\partial/\partial\zeta$  em termos de  $\partial/\partial z$  e  $\partial/\partial t$ . É importante lembrar que para um campo as variáveis  $z$  e  $t$  são independentes entre si. Primeiro vamos inverter as transformações de coordenadas (7.4) e (7.5):

$$z = \frac{\eta + \zeta}{2}, \quad (7.8)$$

$$t = \frac{-\eta + \zeta}{2v}, \quad (7.9)$$

para poder utilizar a regra da cadeia, na forma como segue:

$$\frac{\partial}{\partial\eta} = \frac{\partial z}{\partial\eta} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial t}{\partial\eta} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right), \quad (7.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial\zeta} = \frac{\partial z}{\partial\zeta} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial t}{\partial\zeta} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right). \quad (7.11)$$

Utilizando agora as equações (7.10) e (7.11) na equação (7.7) podemos colocar a equação de ondas na sua forma mais conhecida

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (7.12)$$

Esta é conhecida como equação de ondas homogênea em uma dimensão espacial (1D). A generalização para uma função geral  $\psi(x, y, z, t)$  corresponde a trocar o operador  $\partial^2/\partial z^2$  pelo operador laplaciano:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \implies \nabla^2,$$

e incluir um termo de fonte  $s(x, y, z, t)$ , que poderia estar presente. Desse modo obtemos a equação de ondas não-homogênea:

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi(x, y, z, t) = -s(x, y, z, t). \quad (7.13)$$

O operador de ondas muitas vezes é representado pelo símbolo a seguir:

$$\square = \left( \nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right),$$

dito operador de D'Alembert, ou D'Alembertiano, em homenagem a Jean le Rond D'Alembert (1717=1783), matemático francês que estudou equações diferenciais parciais, em especial a equação de ondas, dentre outras contribuições fundamentais à matemática.

A troca do operador  $\partial^2/\partial z^2$  pelo operador  $\nabla^2$  pode não parecer tão óbvia. Todavia se admitimos que a solução  $\psi(z, t)$  é uma solução válida no espaço tridimensional, mas que independe das variáveis  $(x, y)$  podemos realizar uma transformação de coordenadas  $(x, y, z) \rightarrow (x', y', z')$ . A forma mais simples de transformação é uma rotação pura. Nesse caso, é de se esperar que  $\psi(z, t)$  torne-se uma função do tipo  $\psi(x', y', z', t)$  no novo sistema de coordenadas. A derivada parcial  $\partial^2/\partial z^2$  deve ser expressa no novo sistema de coordenadas. Vamos supor por simplicidade a seguinte transformação de rotação:

$$x' = \cos \theta x - \sin \theta z, \quad (7.14)$$

$$y' = y, \quad (7.15)$$

$$z' = \sin \theta x + \cos \theta z. \quad (7.16)$$

Nesse caso podemos calcular as derivadas  $\partial/\partial z$  e  $\partial^2/\partial z^2$  em termos das novas coordenadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial x'}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial z'}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z'}, \\ &= -\sin \theta \frac{\partial}{\partial x'} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial z'}, \end{aligned} \quad (7.17)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \sin^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2}{\partial x' \partial z'}. \quad (7.18)$$

Note que a equação de ondas original, que leva em conta somente  $\partial^2/\partial z^2$  não é invariante de forma ao mudar de referencial:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi(z, t) = 0 \rightarrow \left( \sin^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2}{\partial x' \partial z'} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi(x', y', z', t) = 0.$$

Um dos pilares da física moderna é o conceito de invariância, que significa que as equações que descrevem um determinado fenômeno não devem mudar de forma por uma mudança de referencial. Em outras palavras, a forma das equações que regem o fenômeno físico não devem depender do referencial. Há um problema com a nossa equação de ondas porque ao mudar de referencial ela muda de forma. Para torná-la invariante de forma, considerando-se a validade da equação no espaço tridimensional, sujeito a transformações lineares de coordenadas, devemos necessariamente substituir o operador  $\partial^2/\partial z^2$  pelo operador laplaciano  $\nabla^2$ . No caso da transformação de rotação (7.14)-(7.16) é fácil mostrar que:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial z'^2} + 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2}{\partial x' \partial z'}, \quad (7.19)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y'^2}, \quad (7.20)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \sin^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2}{\partial x' \partial z'}, \quad (7.21)$$

fazendo com que o laplaciano seja invariante de forma:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2}.$$

Portanto a substituição  $\partial^2/\partial z^2 \rightarrow \nabla^2$  é amparada pela necessidade de invariância da equação de ondas por uma transformação de coordenadas, de tal modo que a física não dependa do referencial adotado.

Finalmente, é importante notar que a função  $\psi$  pode representar um campo escalar ou uma componente de um campo vetorial, ou ainda uma componente de um campo tensorial de ordem maior.

## 7.2 Solução da Equação de Ondas Homogênea em Coordenadas Cartesianas

No caso mais geral a equação de ondas possui uma fonte  $s(x, y, z, t)$  que emite a perturbação que se propaga no espaço. No entanto, tipicamente a fonte é limitada a uma certa região finita do espaço, e estamos interessados em analisar as ondas geradas em uma região em que  $s(x, y, z, t) = 0$ . Nessa região a equação a ser resolvida é a equação de ondas homogênea, mostrada abaixo:

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi(x, y, z, t) = 0 . \quad (7.22)$$

Vamos propor uma solução da forma  $\psi(x, y, z, t) = \psi(z, t)$ , fazendo com que as derivadas em relação às variáveis  $x$  e  $y$  sejam nulas, reduzindo à equação de ondas unidimensional (8.203), reproduzida abaixo por conveniência:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 .$$

Utilizando o método da separação de variáveis podemos escrever:

$$\psi(z, t) = F(z) \cdot G(t) . \quad (7.23)$$

Substituindo a expressão acima na equação de ondas nos dá:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{d^2 F}{dz^2} G - \frac{1}{v^2} F \frac{d^2 G}{dt^2} = 0 ,$$

e dividindo toda a equação acima por  $\psi = FG$  fornece o seguinte resultado

$$\frac{v^2}{F} \frac{d^2 F}{dz^2} = \frac{1}{G} \frac{d^2 G}{dt^2} = -\omega^2 ,$$

onde  $\omega^2$  é uma constante. Note que se  $F(z)$  somente depende de  $z$  e  $G(t)$  somente depende de  $t$ , então  $\frac{v^2}{F} \frac{d^2 F}{dz^2}$  somente pode ser função de  $z$  enquanto  $\frac{1}{G} \frac{d^2 G}{dt^2}$  somente pode depender de  $t$ . Uma vez que essas duas quantidades devem ser exatamente iguais, a única forma de uma função genérica de  $z$  ser idêntica a uma função genérica de  $t$  para todo  $(z, t)$  é que estas sejam uma constante, que foi aqui escolhida aqui como  $-\omega^2$ , propositalmente, porque no regime harmônico podemos fazer  $G(t) = G_0 e^{i\omega t}$ , onde  $G_0$  é uma constante qualquer e  $\omega$  é a frequência angular temporal. Rigorosamente falando, a solução  $\psi(z, t)$  pode ser complexa no caso de sistemas lineares, mas fisicamente o que observamos é a parte real da solução complexa obtida. Em regime linear as partes real e imaginária de uma função complexa satisfazem a equação de ondas de modo independente. A solução geral para a função  $F(z)$  é a seguinte:

$$F(z) = A \exp(-ikz) + B \exp(ikz) , \quad (7.24)$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes complexas e uma relação entre  $k$  e  $\omega$ , denominada relação de dispersão, é imposta pela equação de ondas, sendo dada abaixo:

$$v^2 k^2 = \omega^2 . \quad (7.25)$$

Multiplicando  $F(z)$  e  $G(t)$  para obter  $\psi(z, t)$ , chegamos ao resultado desejado:

$$\psi(z, t) = A \exp[i(\omega t - kz)] + B \exp[i(\omega t + kz)] . \quad (7.26)$$

Observe que a solução acima tem a forma da solução requerida pela nossa intuição, ou seja, depende somente das combinações  $z - vt$  e  $z + vt$ . Levando-se em conta que  $vk = \omega$ , tem-se:

$$\psi(z, t) = A \exp[-ik(z - vt)] + B \exp[ik(z + vt)] . \quad (7.27)$$

Por simplicidade vamos fazer  $B = 0$ , tal que  $\psi(z, t)$  seja composta apenas da componente propagante, ou seja, aquela que propaga-se no sentido positivo de  $z$ . Escrevendo a amplitude complexa na forma polar,  $A = |A| \exp(i\phi_0)$  e tomando a parte real da equação (7.26) temos:

$$\psi_R(z, t) = |A| \cos(\omega t - kz + \phi_0) . \quad (7.28)$$

Observe que a solução acima é composta de amplitude  $|A|$  e fase:

$$\phi(z, t) = \omega t - kz + \phi_0 . \quad (7.29)$$

Sem perda de generalidade podemos considerar a fase global  $\phi_0 = 0$ , para obter relações gerais entre frequência temporal e comprimento de onda.

**Def.: Período temporal  $T$  e frequência  $f$**

O período temporal  $T$  é o intervalo de tempo transcorrido entre dois instantes de tempo  $t$  e  $t + T$ , tal que a diferença de fase  $\Delta\phi$  da onda entre esses instantes seja exatamente igual a  $2\pi$ , em módulo, em um dado valor de  $z$ , ou seja:

$$|\Delta\phi| = |\phi(z, t + T) - \phi(z, t)| = 2\pi ,$$

que resulta em:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} . \quad (7.30)$$

Lembrando que a frequência é igual ao inverso do período  $T = 1/f$ , obtemos facilmente a famosa relação entre  $\omega$  e  $f$ :

$$\omega = 2\pi f . \quad (7.31)$$

Graficamente é fácil perceber que o período é o intervalo de tempo transcorrido entre dois máximos, ou dois mínimos, ou dois pontos sucessivos quaisquer da função de onda para os quais o valor da função e sua derivada são idênticos, dado um valor de  $z$ . Consideremos  $z = 0$  e nesse caso:

$$\psi_R(z = 0, t) = |A| \cos(\omega t) \quad (7.32)$$

Esta função é cossenoidal e tem período  $2\pi$  ficando fácil ver que considerando-se o máximo que ocorre em  $\omega t = 0$  o próximo irá se repetir após um período, ou seja,  $\omega T = 2\pi$ , levando a equação previamente deduzida. A figura 7.7 ilustra o período temporal para esse caso.

**Def.: Comprimento de onda  $\lambda$  e frequência espacial  $k$**

O comprimento de onda  $\lambda$  é a distância entre dois planos sucessivos para os quais a diferença de fase da função de onda seja exatamente igual a  $2\pi$  a um dado instante de tempo  $t$ , ou seja,

$$|\Delta\phi| = |\phi(z, t) - \phi(z + \lambda, t)| = 2\pi .$$

É fácil mostrar da definição acima que

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} , \quad (7.33)$$

onde  $k$  é denominado número de onda ou ainda frequência espacial. Para ilustrar o comprimento de onda considere parte real da função  $\psi$  em todo o espaço para  $t = 0$ :

$$\psi_R(z = 0, t) = |A| \cos(kz) . \quad (7.34)$$

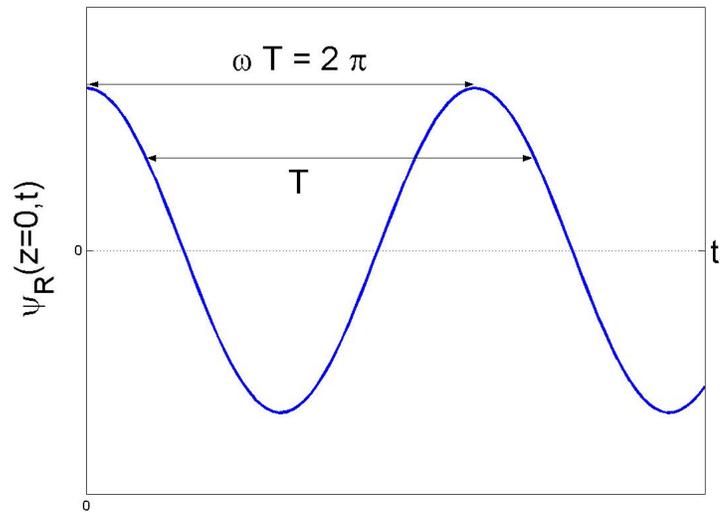


Figure 7.7: O período temporal  $T$  é o intervalo transcorrido para dois pontos cuja fase  $\phi = \omega t - kz$  tenha diferença  $2\pi$  em dado valor de  $z$ .

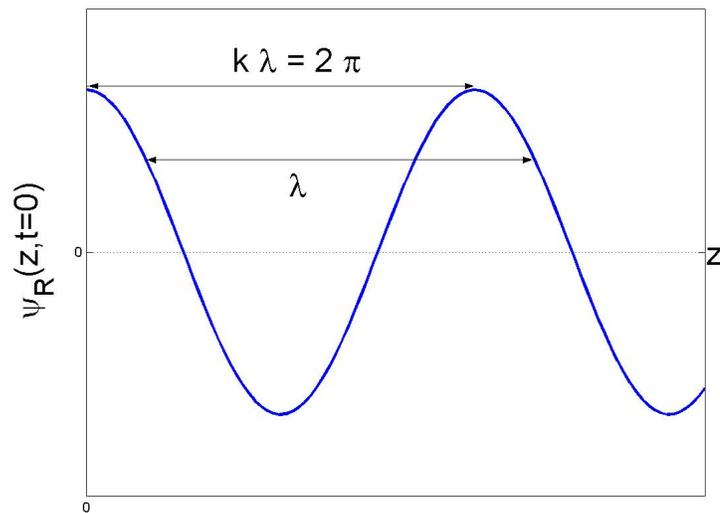


Figure 7.8: O comprimento de onda  $\lambda$  é a menor distância entre dois máximos ou dois pontos equivalentes, onde tanto a função quanto a sua derivada tem mesmo valor, a um dado instante de tempo  $t$ .

Esta função também é cossenoidal cujo período é  $2\pi$ . Considerando-se o máximo em  $kz = 0$  o próximo máximo ocorrerá em  $k\lambda = 2\pi$ , o que leva diretamente à relação (7.33). A figura 7.8 ilustra o comprimento de onda.

Podemos utilizar a **relação de dispersão**, na forma abaixo,

$$vk = \omega , \quad (7.35)$$

e as relações (8.156) e (7.33) para obter a famosa relação da ondulatória:

$$v = \lambda f . \quad (7.36)$$

A figura 7.9 ilustra a parte real da solução de campo ondulatório  $\psi(z, t) = Ae^{i(\omega t - kz)}$  em função de  $z$  e  $t$ . Fica claro que uma crista da onda (um valor pico) move-se uma distância  $\lambda$  em um intervalo de tempo  $T$ , o que novamente nos leva à relação (7.36).

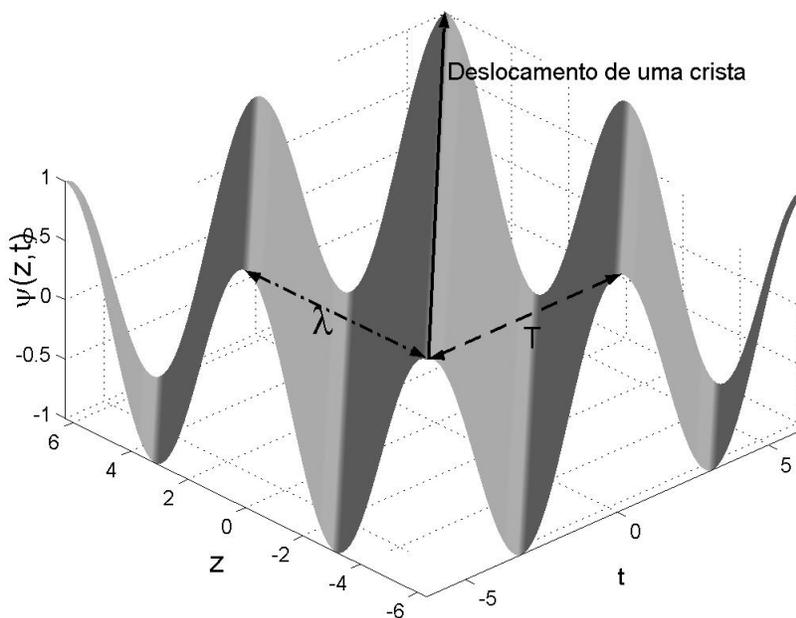


Figure 7.9: Onda harmônica  $\psi(z, t)$  propagando-se com velocidade  $v = \lambda/T$  ao longo do eixo  $z$ .

Ainda para um melhor entendimento do fenômeno ondulatório, considere dois observadores  $A$  e  $B$  em coordenadas distintas, conforme ilustrado na figura 7.10. Em  $t = 0$  a onda tem a forma harmônica senoidal no espaço. Considerando-se que essa onda propaga-se no sentido positivo do eixo  $z$  com velocidade  $v$ , os observadores em  $A$  e  $B$  medem o efeito da onda que passa por eles, podendo desse modo construir um gráfico de amplitudes no tempo. Tipicamente, para uma onda eletromagnética, um sensor de campo elétrico (uma pequena antena, por exemplo), poderia ser acoplada a um osciloscópio e o gráfico do campo em função do tempo seria mostrado na tela do dispositivo. Nesse caso, o ponto 5 mostrado no gráfico é medido em  $t = 0$  pelo observador  $A$  enquanto o ponto 1 da onda é observado por  $B$ . À medida que o tempo passa, os pontos 6, 7, 8, 9... passam sucessivamente por  $A$  enquanto por  $B$  passarão os pontos 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9... Note que o observador  $B$  sempre mede o efeito da onda com certo atraso em relação ao observador  $A$ , porque cada ponto da onda que vem de uma fonte em  $z = -\infty$  passa primeiro por  $A$  e depois por  $B$ . Por esse motivo o ponto 7 mostrado na figura passa por  $A$  antes de passar por  $B$ . Desse modo fica claro que uma onda harmônica é descrita por uma função senoidal no espaço em um dado instante de tempo, mas é vista como uma função senoidal no tempo, por um observador parado em algum ponto do espaço, que mede a amplitude dessa onda à medida que o tempo passa.

Def.: **Velocidade de fase**  $v_p$

A velocidade de fase é a menor velocidade requerida para um observador que queira acompanhar um plano de fase constante. Em outras palavras, mede a velocidade com que um plano de fase constante se desloca à

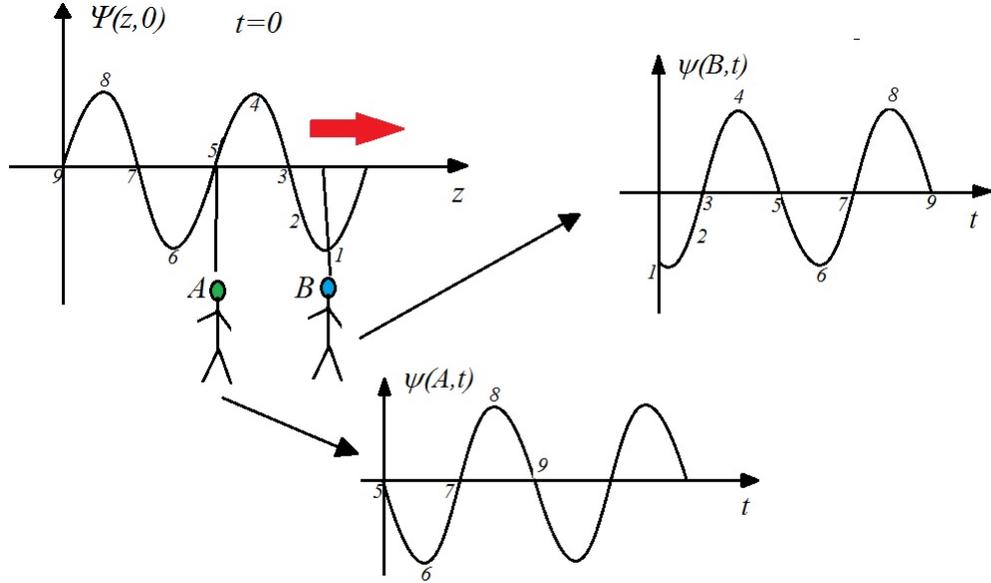


Figure 7.10: Parte real de uma onda harmônica pura  $\psi(z, t) = Ae^{i(\omega t - kz)}$  em função de  $z$  para  $t = 0$  e vista por dois observadores situados em  $A$  e  $B$ , em função do tempo  $t$ . À medida que o tempo transcorre toda a figura mostrada para  $t = 0$  se desloca rigidamente no sentido positivo do eixo  $z$ , fazendo com que os observadores possam medir uma variação senoidal no tempo.

medida que o tempo passa. Uma vez que a fase é dada por (7.29), a variação de fase  $d\phi$  é dada por:

$$d\phi = \omega dt - k dz . \quad (7.37)$$

Uma vez que se requer  $d\phi = 0$  para acompanhar um plano de fase constante, o observador deve se deslocar uma distância  $dz$  no intervalo  $dt$ , tal que a velocidade de fase é dada por

$$v_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = v . \quad (7.38)$$

Nesse caso  $v_p = v$ , ou seja, a velocidade de fase  $v_p$  é idêntica à constante que aparece na equação de ondas,  $v$ . Todavia esse resultado não é geralmente válido, sendo estritamente verdadeiro somente vale para o tipo de solução obtido aqui. Esse tipo de solução chama-se onda plana uniforme, cujo conceito será tratado na sequência. Quanto há superposição de ondas, a velocidade de fase  $v_p$  refere-se à velocidade de fase da frequência central do espectro, também denominada de portadora, enquanto uma outra velocidade denominada velocidade de grupo  $v_g$  refere-se à velocidade média com que o pacote de ondas se desloca. Usualmente, é a velocidade de grupo que efetivamente tem relevância física, havendo alguma relação entre  $v_g$  e  $v_p$  na forma  $v_g v_p = v^2$ .

### 7.3 Conceito: Ondas Planas Uniformes

Embora para encontrar a solução da equação de ondas (7.22) seja possível utilizar o método de separação de variáveis na forma

$$\psi(x, y, z, t) = F(x)G(y)H(z)e^{i\omega t} ,$$

onde já assumimos o regime harmônico pelo fator  $e^{i\omega t}$ , é mais interessante procurar compreender o conceito de onda plana uniforme e generalizar a solução particular  $\psi(z, t)$ . A demonstração da solução pelo método da separação de variáveis é deixada como exercício.

A solução da equação de ondas homogênea para uma função  $\psi(x, y, z, t)$  que somente dependa das variáveis  $z, t$ , sendo constante em relação às variáveis no plano  $(x, y)$  foi conhecida na Seção anterior e está reproduzida abaixo por comodidade:

$$\psi(x, y, z, t) = \psi(z, t) = A \exp[i(\omega t - kz + \phi_0) .]$$

Note que para um dado valor de  $z$  no instante de tempo  $t$  a função  $\psi(z, t)$  independe das variáveis  $(x, y)$ , significando que no plano  $(x, y)$  definido pelo valor de  $z$  considerado no instante  $t$  a função de onda  $\psi(z, t)$  é uniforme em todo o plano. Daí vem o nome desse tipo de solução: **onda plana uniforme**.

A onda plana uniforme é composta de infinitos planos sucessivos, em cada um desses planos a função de ondas tem valor uniforme no plano, a um dado tempo  $t$ . Com o transcorrer do tempo esses planos movem-se rigidamente na direção de propagação, que é perpendicular aos sucessivos planos. No caso específico de  $\psi(z, t)$  temos uma perturbação que se propaga com velocidade  $v$  ao longo de  $z$  à medida que o tempo passa, tendo valor uniforme em um plano  $(x, y)$  que é perpendicular à direção de propagação.

Conhecendo o conceito fundamental da onda plana uniforme, vamos generalizar a solução  $\psi(z, t)$ . A generalização pode ser feita simplesmente fazendo uma transformação de rotação do sistema de coordenadas. Aqui vamos apelar para aspectos mais intuitivos. Veja que a função de fase pode ser escrita como:

$$\phi(z, t) = \omega t - kz + \phi_0 .$$

Se escolhermos um valor da fase  $\phi(z, t)$  no instante de tempo  $t$ , que desejamos acompanhar, podemos escrever a equação para  $z$ . É fácil ver que temos nesse caso a equação do plano  $(x, y)$  para o qual a fase  $\phi$  é constante em todo o plano, definido por:

$$z = \frac{\omega t - \phi + \phi_0}{k} .$$

Observe que à medida que o tempo passa, uma vez escolhido o valor de  $\phi$  que desejamos acompanhar, o plano  $(x, y)$  definido pelo valor de  $z$  inicial correspondente a  $\phi$  irá se deslocar no sentido positivo com velocidade  $\omega/k = v$ .

Lembrando que a equação geral do plano em três dimensões é dada por:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r} = n_x x + n_y y + n_z z = d$$

onde  $\hat{\mathbf{n}} = (n_x, n_y, n_z)$  é um vetor unitário perpendicular ao plano por ele definido, e porer unitário satisfaz a relação  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$ ,  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  é o vetor posição e  $d$  é uma constante real qualquer que mede a menor distância entre a origem e o plano, vamos propor a substituição de  $z$  por  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}$  tal que:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \omega t - k\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r} + \phi_0 , \quad (7.39)$$

fazendo com que a solução geral da equação de ondas (7.22) seja dada por:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(x, y, z, t) = A e^{i(\omega t - k\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r} + \phi_0)} . \quad (7.40)$$

Podemos ainda definir a quantidade conhecida como vetor de onda:

$$\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{n}} , \quad (7.41)$$

deixando a solução geral na forma abaixo:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(x, y, z, t) = A e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi_0)} . \quad (7.42)$$

Note que toda a informação de amplitude (e polarização para ondas de caráter vetorial) está na constante  $A$ , enquanto que a informação da direção de propagação, frequência e comprimento de onda está no termo de fase. Note que definindo  $\mathbf{k} = (0, 0, k)$  recuperamos a solução particular  $\psi(z, t)$  com que trabalhamos até o momento.

A demonstração de que a expressão (7.42) é solução da equação de ondas é deixada como exercício e para tanto o leitor deverá provar que

$$\nabla(\exp[i(\omega t - k\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r} + \phi_0)]) = -ik\hat{\mathbf{n}} \exp[i(\omega t - k\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r} + \phi_0)]$$

$$\nabla^2(\exp[i(\omega t - k\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r} + \phi_0)]) = -k^2 \exp[i(\omega t - k\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r} + \phi_0)]$$

e ainda que para satisfazer a equação de ondas homogênea mostrada abaixo

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi(x, y, z, t) = 0$$

a relação de dispersão toma a forma  $v^2 k^2 = \omega^2$ , como anteriormente.

## 7.4 Referências Deste Capítulo

[7.1] John D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (Wiley and Sons, New York, 3rd. Ed., 1998).

[7.2] Matthew N.O. Sadiku, *Elementos do Eletromagnetismo* (Ed. Bookman, Porto Alegre, 5a. Ed, 2005).

[7.3] John R. Reitz, Frederick J. Milford, Robert W. Christy, *Fundamentos da Teoria Eletromagnética* (Ed. Campus).

[7.4] David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker, *Fundamentos de Física*, Vol 2, 3 e 4, Editora LTC.

[7.5] Paul Tipler, *Física para cientistas e engenheiros*, Editora LTC.

[7.6] F. Sears, M. Zemansky, H.D. Young, *Física* Vol 2, 3, 4, Editora Pearson.

## 7.5 Problemas Propostos

1) Considere que o ar em condições normais de pressão e temperatura satisfaça a lei do gás ideal:

$$p = nk_B T,$$

onde  $p$  é a pressão,  $n$  a densidade volumétrica de partículas do ar,  $k_B$  é a constante de Boltzmann e  $T$  a temperatura absoluta. Despreze os efeitos gravitacionais, e considerando em regime linear, as leis de Newton para um fluido e a equação de continuidade da massa, obtenha a equação de ondas do som no ar, que nada mais são que ondas de pressão.

Obtenha a velocidade de propagação das ondas sonoras no ar em função da densidade do ar à temperatura ambiente. Como a velocidade do som muda com a temperatura, em função desse modelo?

2) Dadas as seguintes funções:

$$\psi_1 = A \exp \left[ -\frac{(x - vt)^2}{2x_0^2} \right]$$

$$\psi_2 = A \exp \left[ -\frac{x^2}{2x_0^2} - \frac{t}{\tau} \right]$$

esboce graficamente  $\psi_1(x, t)$  e  $\psi_2(x, t)$ . As duas funções são ondas? Justifique. Qual delas satisfaz a equação de difusão, mostrada abaixo:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \kappa \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

3) Dada a função abaixo:

$$\psi = 10 \exp \left[ -\frac{(100x - 3000t)^2}{2} \right] ,$$

qual a amplitude e a velocidade de propagação dessa onda? Esboce graficamente esse campo ondulatório para vários instantes, em função de  $x$ , que está medido em metros, e o tempo em segundos. Esse campo é escalar ou vetorial?

4) Dadas as funções de onda abaixo:

$$\psi_1 = A \exp [i(\omega t - kz)] ,$$

$$\psi_2 = B \exp [i(\omega t + kz)] ,$$

Encontre a onda resultante da superposição  $\psi = \psi_1 + \psi_2$ , sabendo-se que  $\psi(0) = \psi(d) = 0$  é uma condição de contorno. Em outras palavras, dadas as condições de contorno, determine a relação entre  $A$  e  $B$  e a condição sobre a constante  $k$ . Interprete fisicamente seus resultados. Onde essa situação poderia ocorrer em situações físicas reais?

5) Existem os fenômenos de reflexão, refração e difração para ondas de som? Qual é o índice de refração da água em relação ao ar, para ondas de som? Uma onda acústica incide do ar para a água a um ângulo de  $30^\circ$  no ar em relação à normal. Qual o ângulo formado entre a normal e a direção de propagação da onda transmitida?

6) Prove que

$$\nabla(\exp[i(\omega t - k\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r} + \phi_0)]) = -ik\hat{\mathbf{n}} \exp[i(\omega t - k\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r} + \phi_0)]$$

$$\nabla^2(\exp[i(\omega t - k\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r} + \phi_0)]) = -k^2 \exp[i(\omega t - k\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r} + \phi_0)]$$

e ainda que para satisfazer a equação de ondas homogênea mostrada abaixo

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi(x, y, z, t) = 0$$

a relação de dispersão toma a forma  $v^2 k^2 = \omega^2$ . O que significa o vetor  $\hat{\mathbf{n}}$ ?



## Chapter 8

# Ondas Planas Uniformes

Agora que já temos familiaridade com as equações de Maxwell na sua forma diferencial, para o regime dependente do tempo, e com os fundamentos gerais da ondulatória, vamos estudar uma das suas previsões mais espetaculares, as ondas eletromagnéticas. O inglês Sir Isaac Newton (1642-1727) é considerado um dos maiores cientistas da história, tendo descoberto independentemente de Leibniz o Cálculo Diferencial, formulou as leis básicas da Mecânica Clássica Não-Relativística e a teoria da gravitação, além de seus estudos grandiosos sobre refração e reflexão em óptica. Todavia, deixou ainda como legado uma teoria corpuscular da luz (não ondulatória, portanto), que se veria mais adiante, estava incorreta. Sua autoridade retardou a aceitação de uma teoria ondulatória para a luz. Foi o holandês Christiaan Huygens (1629-1695) quem propôs com base em observações experimentais dele e de outros que a luz era um fenômeno ondulatório. Conhecido pelo princípio que leva seu nome (o famoso princípio de Huygens), descobriu também a birrefringência. Discordava frontalmente da teoria corpuscular de Newton. Dentre os expoentes da teoria ondulatória da luz, podemos destacar Thomas Young e Augustin Fresnel, com experimentos que evidenciaram de forma inequívoca o caráter ondulatório da luz. Jean Foucault demonstrou que a luz se propagava mais rápido no ar do que na água, o que contrariava a teoria corpuscular de Newton, que previa o oposto. Mas somente com James Clerk Maxwell a teoria ondulatória da luz foi colocada em um sólido arcabouço teórico. Ele provou ser a luz uma onda eletromagnética, encontrou o valor da velocidade  $c$  para o vácuo, com base em cálculos eletromagnéticos e pôde comparar com os valores experimentais conhecidos da época, o que pode ser visto em seu monumental trabalho:

*A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*, J.C. Maxwell, 1864, Philosophical Transactions of the Royal Society of London 155: 459-512.

A confirmação experimental dos resultados de Maxwell só veio em 1888, em experimentos conduzidos por Heinrich Hertz e independentemente por Oliver Lodge. O alemão Hertz foi um dos primeiros a compreender a importância da teoria de Maxwell e desenvolveu experimentos que confirmaram a existência das ondas eletromagnéticas no espectro do RF. Demonstrou a refração, reflexão e difração das ondas EM. Curiosamente descobriu também o aspecto corpuscular da luz: o efeito fotoelétrico, explicado somente em 1905 por A. Einstein.

Uma das soluções mais importantes para as equações de Maxwell são as chamadas ondas planas uniformes, que serão demonstradas e discutidas nesse Capítulo. As equações de Maxwell são um conjunto de 4 equações diferenciais vetoriais que quando expandidas resultam em 8 equações diferenciais, o que é bastante complexo de se resolver. Em meios lineares há apenas 6 variáveis de campo independentes pois das 8 equações de Maxwell, 2 acabam sendo redundantes. Ao invés de atacar as equações de Maxwell na forma como estão, é possível fazer algumas manipulações, levando a uma equação de ondas para o campo elétrico  $\mathbf{E}$ , ou para o campo magnético  $\mathbf{H}$ , também conhecida como equação de Helmholtz no regime harmônico. Essa equação é uma equação diferencial parcial que pode ser mais facilmente resolvida do que as equações de Maxwell na sua forma convencional.

## 8.1 A Equação de Ondas

Utilizemos as equações de Maxwell na forma abaixo supondo meio homogêneo, linear e isotrópico:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}, \quad (8.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (8.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (8.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (8.4)$$

Tomando simultaneamente o rotacional em (8.3) e (8.4) temos:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \nabla \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (8.5)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{J} + \varepsilon \nabla \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (8.6)$$

As derivadas temporais e o rotacional são comutáveis, daí que  $\nabla \times \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times$ , e podemos reescrever as equações acima utilizando ainda a identidade vetorial (34),  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ , para obter as seguintes equações:

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) \quad (8.7)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}) \quad (8.8)$$

Agora podemos fazer uso das equações de Maxwell na forma (4.55)-(4.58), substituindo-as nas equações (8.7) e (8.8):

$$\nabla \left( \frac{\rho}{\varepsilon} \right) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left( \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (8.9)$$

$$-\nabla^2 \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left( -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) \quad (8.10)$$

Rearranjando as equações acima para deixar as fontes  $\rho$  e  $\mathbf{J}$  do lado direito, obtemos:

$$\left( \nabla^2 - \mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = \nabla \left( \frac{\rho}{\varepsilon} \right) + \mu \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}, \quad (8.11)$$

$$\left( \nabla^2 - \mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{H} = -\nabla \times \mathbf{J}. \quad (8.12)$$

Note que nas equações acima está presente o operador de ondas ou D'Alembertiano:

$$\square = \left( \nabla^2 - \mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right).$$

Nas equações (8.11) e (8.12) vemos que o campo elétrico  $\mathbf{E}$  tem sua fonte nas densidades de cargas  $\rho$  e corrente  $\mathbf{J}$ , enquanto o campo magnético  $\mathbf{H}$  apenas na densidade de corrente  $\mathbf{J}$ . As cargas e correntes podem ser intrínsecas ao meio, ou também induzidas pelos campos que incidem no meio. Vamos considerar o caso mais simples, dado pela Lei de Ohm vetorial, na qual o campo elétrico produz uma densidade de correntes na forma:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (8.13)$$

onde  $\sigma$  é a condutividade do material. Consideremos então  $\rho = 0$  e a densidade de correntes dada por (8.13) para obter:

$$\left( \nabla^2 - \mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (8.14)$$

$$\left( \nabla^2 - \mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{H} = \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (8.15)$$

Tais equações representam a propagação de campos eletromagnéticos em meios nos quais a corrente é excitada pelo próprio campo. Neste sentido o termo à direita nas equações representa as perdas da onda para o material. Tais equações representam a propagação de campos eletromagnéticos em meios nos quais  $\mathbf{J}$  deve-se ao próprio campo. Neste sentido o termo à direita nas equações representa as perdas da onda para o material. No vácuo ou meios dielétricos ideais, onde não há perdas, podemos fazer  $\sigma = 0$  e temos como resultado as equações de onda homogêneas ideais:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{E} = 0, \quad (8.16)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{H} = 0, \quad (8.17)$$

$\frac{1}{c^2} = \mu\epsilon$  e  $c$  tem unidades de velocidade, sendo a velocidade de propagação da onda eletromagnética nesse meio material.

Por outro lado, em bons condutores  $\mu\epsilon\partial^2/\partial t^2 \ll \mu\sigma\partial/\partial t$  então:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (8.18)$$

Esta última é a **equação de difusão** e não tem soluções ondulatórias reais!

Todas as equações acima referem-se a campos com variações quaisquer no tempo. Estamos interessados entretanto nas variações harmônicas, ou seja, campos do tipo

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z, \omega) e^{i\omega t}. \quad (8.19)$$

De forma mais rigorosa, podemos definir as transformadas de Fourier para o tempo:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Vamos escrever os campos na seguinte forma:

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(x, y, z, \omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (8.20)$$

$$\mathbf{H}(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(x, y, z, \omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (8.21)$$

O conteúdo espectral de uma onda é dado pelas funções vetoriais  $\mathbf{E}(x, y, z, \omega)$  e  $\mathbf{H}(x, y, z, \omega)$ . Para obter a equação de Helmholtz (equação de ondas no domínio da frequência) podemos utilizar tanto a definição (8.19) nas equações de onda quanto as definições da transformada de Fourier. Um campo geral no domínio do tempo será simplesmente dado pela soma de todas as contribuições de frequência. Para lembrar das propriedades de transformadas de Fourier, temos as simples substituições

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rightarrow -\omega^2,$$

e utilizando as propriedades e substituindo os campos na forma (8.20) e (8.21) em (8.14) e (8.15) temos:

$$(\nabla^2 + \omega^2 \mu\epsilon) \mathbf{E}(x, y, z, \omega) = i\omega \mu\sigma \mathbf{E}(x, y, z, \omega), \quad (8.22)$$

$$(\nabla^2 + \omega^2 \mu \varepsilon) \mathbf{H}(x, y, z, \omega) = i\omega \mu \sigma \mathbf{H}(x, y, z, \omega) . \quad (8.23)$$

É possível escrever ainda em forma mais compacta as equações de Helmholtz, definindo uma permissividade dielétrica complexa, na forma abaixo (conforme já discutido no Capítulo 5, sobre Meios Materiais):

$$\varepsilon_c = \varepsilon \left( 1 - i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right) , \quad (8.24)$$

de tal forma que (8.22) e (8.23) possam ser escritas na forma abaixo:

$$(\nabla^2 + \omega^2 \mu \varepsilon_c) \mathbf{E}(x, y, z, \omega) = 0 , \quad (8.25)$$

$$(\nabla^2 + \omega^2 \mu \varepsilon_c) \mathbf{H}(x, y, z, \omega) = 0 . \quad (8.26)$$

É bom lembrar que, conforme visto anteriormente, quando discutimos as propriedades dos meios materiais, a permeabilidade magnética  $\mu$  e a permissividade dielétrica  $\varepsilon_c$  em geral variam com a frequência.

### 8.1.1 Solução de Ondas Planas Uniformes

Partiremos agora para a determinação de soluções de ondas eletromagnéticas planas, muito úteis na análise de problemas físicos reais, e que embora sejam soluções exatas das equações de Maxwell, são ideais e não possíveis de serem realizadas na prática por terem energia infinita, o que não é fisicamente viável. No entanto, é fácil perceber que ondas planas representam uma excelente aproximação para ondas esféricas que são emitidas por uma fonte puntual, na chamada região de campo distante, onde distância do observador até a fonte emissora é muito grande e o fator de curvatura da superfície esférica torna-se pequeno, podendo ser aproximada localmente por um plano.

Indo adiante, qual é o procedimento para a determinação dos campos? Em primeiro lugar podemos obter um dos campos ( $\mathbf{E}$  ou  $\mathbf{H}$ ) no domínio da frequência resolvendo a equação de Helmholtz. Como os campos não são independentes entre si, uma vez que um deles foi determinado o outro é calculado através de uma das equações de Maxwell primitivas que os acopla. Se a situação é um pouco mais complexa e os campos admitem variações arbitrárias no tempo, como no caso da emissão de pulsos, fazemos a transformação de Fourier dos campos que foram obtidos em regime harmônico, para a obtenção da solução no domínio do tempo. Vamos adotar o cálculo de  $\mathbf{E}$  via equação de Helmholtz e determinar  $\mathbf{H}$  através da seguinte equação de Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} .$$

No domínio da frequência ficamos com:

$$\mathbf{H} = i \frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\omega \mu} , \quad (8.27)$$

sendo  $\mathbf{E}$  determinado através da equação (8.25).

Outra questão importante é a transferência da energia eletromagnética de um ponto a outro através da onda. A densidade de potência eletromagnética transportada pela onda é dada pelo vetor de Poynting, cujo valor médio no regime harmônico é dado através da seguinte expressão:

$$\mathbf{S}_{med} = \frac{1}{2} \text{Re} \{ \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \} . \quad (8.28)$$

Tendo essas equações em mãos, vamos analisar as soluções de ondas planas. A proposta de solução é da forma abaixo:

$$\mathbf{E}(x, y, z, \omega) = \mathbf{E}_0 e^{i\omega t} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (8.29)$$

onde  $\mathbf{E}_0$  é um vetor constante em relação a ao espaço-tempo  $(\mathbf{r}, t)$ , mas poderia ser uma função das variáveis no espaço dito recíproco  $(\omega, \mathbf{k})$ , e

$$\mathbf{k} = \hat{\mathbf{a}}_x k_x + \hat{\mathbf{a}}_y k_y + \hat{\mathbf{a}}_z k_z, \quad (8.30)$$

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{a}}_x + y\hat{\mathbf{a}}_y + z\hat{\mathbf{a}}_z, \quad (8.31)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z. \quad (8.32)$$

O operador laplaciano pode ser representado em coordenadas cartesianas na forma abaixo:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \hat{\mathbf{a}}_x \nabla^2 A_x + \hat{\mathbf{a}}_y \nabla^2 A_y + \hat{\mathbf{a}}_z \nabla^2 A_z,$$

onde a ação sobre um escalar  $\Phi$  qualquer é aquela usual, ou seja,

$$\nabla^2 \Phi = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi,$$

$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{a}}_x A_x + \hat{\mathbf{a}}_y A_y + \hat{\mathbf{a}}_z A_z$  é um vetor expresso em componentes cartesianas. Note que separadamente  $A_x$ ,  $A_y$  e  $A_z$  são escalares.

As quantidades que calcularemos agora serão importantes adiante:

$$\begin{aligned} \nabla(e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) &= \left( \hat{\mathbf{a}}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{a}}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{a}}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \\ &= \left( \hat{\mathbf{a}}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{a}}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{a}}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)} = e^{-ik_x x} \\ &\quad e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)} = e^{-ik_x x} e^{-ik_y y} e^{-ik_z z}, \end{aligned}$$

e tem-se então:

$$\begin{aligned} \nabla(e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) &= \left( \hat{\mathbf{a}}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{a}}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{a}}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) e^{-ik_x x} e^{-ik_y y} e^{-ik_z z} = \\ \nabla(e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) &= \hat{\mathbf{a}}_x \frac{\partial(e^{-ik_x x} e^{-ik_y y} e^{-ik_z z})}{\partial x} + \hat{\mathbf{a}}_y \frac{\partial(e^{-ik_x x} e^{-ik_y y} e^{-ik_z z})}{\partial y} + \hat{\mathbf{a}}_z \frac{\partial(e^{-ik_x x} e^{-ik_y y} e^{-ik_z z})}{\partial z} = \\ &= \hat{\mathbf{a}}_x \frac{\partial e^{-ik_x x}}{\partial x} e^{-ik_y y} e^{-ik_z z} + \hat{\mathbf{a}}_y \frac{\partial e^{-ik_y y}}{\partial y} e^{-ik_x x} e^{-ik_z z} + \hat{\mathbf{a}}_z \frac{\partial e^{-ik_z z}}{\partial z} e^{-ik_x x} e^{-ik_y y} = \\ &= -ik_x \hat{\mathbf{a}}_x e^{-ik_x x} e^{-ik_y y} e^{-ik_z z} - ik_y \hat{\mathbf{a}}_y e^{-ik_x x} e^{-ik_y y} e^{-ik_z z} - ik_z \hat{\mathbf{a}}_z e^{-ik_x x} e^{-ik_y y} e^{-ik_z z}. \end{aligned}$$

Colocando em evidência as exponenciais, temos:

$$\nabla(e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) = -i(k_x \hat{\mathbf{a}}_x + k_y \hat{\mathbf{a}}_y + k_z \hat{\mathbf{a}}_z) e^{-ik_x x} e^{-ik_y y} e^{-ik_z z},$$

para finalmente escrever:

$$\nabla(e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) = -i\mathbf{k}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (8.33)$$

Quanto ao laplaciano, tem-se que

$$\nabla^2(e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}.$$

Efetuada a derivada de segunda ordem em relação à variável  $x$ , por exemplo, obtemos:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\partial x} \right) = -k_x^2 e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}},$$

e da mesma forma para  $y$  e  $z$ , de tal forma que:

$$\nabla^2(e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) = -k^2 e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (8.34)$$

onde  $k^2 = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ . No domínio de variáveis complexas é importante ressaltar que  $\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} \neq |\mathbf{k}|^2 = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}^*$ .

Agora vamos analisar a solução proposta (no que segue o fator  $e^{i\omega t}$  será omitido, por conveniência), para ver se esta satisfaz a equação de Helmholtz:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, y, z) &= \mathbf{E}_0 e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ (\nabla^2 + \omega^2 \mu \varepsilon_c) \mathbf{E}(x, y, z) &= 0 = \nabla^2(\mathbf{E}_0 e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) + \omega^2 \mu \varepsilon_c \mathbf{E}_0 e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} . \end{aligned}$$

Uma vez que  $\mathbf{E}_0 = E_{0x}\hat{\mathbf{a}}_x + E_{0y}\hat{\mathbf{a}}_y + E_{0z}\hat{\mathbf{a}}_z$  é um vetor constante em relação a  $(x, y, z)$ , nas quais o laplaciano atua, suas derivadas serão nulas e podemos escrever:

$$(\nabla^2 + \omega^2 \mu \varepsilon_c) \mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}_0 (\nabla^2(e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) + \omega^2 \mu \varepsilon_c e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) .$$

O laplaciano da parte exponencial já está dado pela expressão (8.34). Utilizando aquele resultado, obtemos:

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + \omega^2 \mu \varepsilon_c) \mathbf{E}(x, y, z) &= \mathbf{E}_0 (-k^2 e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \omega^2 \mu \varepsilon_c e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) , \\ &= (-k^2 + \omega^2 \mu \varepsilon_c) \mathbf{E}_0 e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = 0 . \end{aligned}$$

Para que a equação acima seja satisfeita existem duas possibilidades: 1)  $\mathbf{E}_0 = 0$ , mas esta é a solução trivial da equação de Helmholtz, o que não desejamos; 2) a quantidade entre parenteses deve ser nula, ou seja:

$$-k^2 + \omega^2 \mu \varepsilon_c = 0$$

e esta condição deve ser satisfeita para que (8.29) seja solução da equação de Helmholtz. Dada a frequência  $\omega$  a solução de onda deve respeitar a seguinte relação, conhecida como **relação de dispersão**:

$$k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_c \mapsto k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon_c} . \quad (8.35)$$

Mostramos assim que a solução proposta satisfaz a equação de Helmholtz, onde  $\mathbf{k}$  é dito vetor de ondas. e pode ser escrito na forma:

$$\mathbf{k} = k \hat{\mathbf{n}} \quad (8.36)$$

onde  $\hat{\mathbf{n}}$  é um vetor unitário que aponta na direção de  $\mathbf{k}$  e representa a direção de propagação da onda.

Agora que temos o campo elétrico vamos calcular o campo magnético pela equação de Maxwell (8.27):

$$\mathbf{H} = i \frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\omega \mu} = i \frac{\nabla \times (\mathbf{E}_0 e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}})}{\omega \mu} .$$

Novamente,  $\mathbf{E}_0$  é um vetor constante em relação às coordenadas espaciais,  $\mathbf{r}$ , e desse modo as derivadas espaciais presentes no operador rotacional não atuam sobre ele. Podemos utilizar então a seguinte identidade vetorial:

$$\nabla \times (\Phi \mathbf{A}) = \nabla \Phi \times \mathbf{A} + \Phi \nabla \times \mathbf{A} ,$$

onde fazemos  $\Phi = e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ , uma quantidade escalar, e  $\mathbf{A} = \mathbf{E}_0$  um vetor constante, tal que:

$$\nabla \times (\mathbf{E}_0 e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) = \nabla(e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) \times \mathbf{E}_0 + e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \nabla \times \mathbf{E}_0 = \nabla(e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) \times \mathbf{E}_0 ..$$

O gradiente da exponencial já foi calculado anteriormente, sendo dado pela equação (8.33), e obtemos:

$$\nabla \times (\mathbf{E}_0 e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) = -i\mathbf{k} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \times \mathbf{E}_0 = -i\mathbf{k} \times (\mathbf{E}_0 e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) = -i\mathbf{k} \times \mathbf{E} .$$

Fazendo a substituição do resultado acima em (8.27) para calcular o campo magnético, nos fornece:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}}{\omega\mu} . \quad (8.37)$$

O resultado acima pode ser expresso utilizando a definição (8.36), que relaciona  $\mathbf{k}$  e  $\hat{\mathbf{n}}$ :

$$\mathbf{H} = \frac{k}{\omega\mu} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} .$$

Uma vez que  $\mathbf{H}$  é medido em A/m e  $\mathbf{E}$  em V/m no SI, sendo o vetor unitário  $\hat{\mathbf{n}}$  uma quantidade adimensional, a análise dimensional nos leva a concluir que a quantidade  $\frac{k}{\omega\mu} = 1/Z$  deve ser medida em unidades de inverso de impedância, ou seja,  $\Omega^{-1}$ . Substituindo  $k$  por (8.35), permite-nos definir uma quantidade física característica do meio material na frequência  $\omega$ , denominada **impedância característica do meio**:

$$Z = \frac{\omega\mu}{k} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_c}} , \quad (8.38)$$

o que nos leva a escrever a expressão (8.37) na forma abaixo:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{Z} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} . \quad (8.39)$$

Com base nas soluções de  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  podemos calcular o valor médio do vetor de Poynting:

$$\mathbf{S}_{med} = \frac{1}{2} \text{Re} \{ \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \mathbf{E} \times \left( \frac{1}{Z^*} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^* \right) \right\} .$$

Utilizando a identidade do triplo produto vetorial,  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$  temos

$$\mathbf{E} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^*) = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*)\hat{\mathbf{n}} - (\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}})\mathbf{E}^* .$$

É fácil verificar através da equação de Maxwell  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  que  $\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 = \nabla \cdot (\mathbf{E}_0 e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}) = \nabla(e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}) \cdot \mathbf{E}_0 + e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \nabla \cdot \mathbf{E}_0 .$$

Lembrando que  $\mathbf{E}_0$  é constante e portanto a sua divergência é nula, e utilizando o já conhecido resultado do gradiente da exponencial, temos:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 = \nabla(e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}) \cdot \mathbf{E}_0 = -i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = -ik\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E} = 0 ,$$

de onde a única solução possível é:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \mapsto \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E} = 0 . \quad (8.40)$$

Podemos facilmente demonstrar, utilizando a solução para o campo magnético dada na equação (8.37) e a lei de Gauss magnética,  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , que:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0 \mapsto \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H} = 0 . \quad (8.41)$$

Voltando ao cálculo do valor médio do vetor de Poynting, com os resultados obtidos acima, temos:

$$\mathbf{S}_{med} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \frac{1}{Z^*} \right\} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) \hat{\mathbf{n}} . \quad (8.42)$$

Vamos agora sumarizar os resultados e tirar as conclusões pertinentes:

- Dada a equação de Helmholtz para o campo elétrico (assumimos a variação harmônica  $e^{i\omega t}$ ):

$$(\nabla^2 + \omega^2 \mu \epsilon_c) \mathbf{E}(x, y, z) = 0$$

e a equação de Maxwell para determinar o campo magnético:

$$\mathbf{H} = i \frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\omega\mu} ;$$

- Temos por solução:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}_0 e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad \text{e} \quad \mathbf{H} = \frac{1}{Z} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} \quad (8.43)$$

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{k}}{k} ; \quad k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon_c} ; \quad Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}} \quad (8.44)$$

$$\mathbf{S}_{med} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \frac{1}{Z^*} \right\} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) \hat{\mathbf{n}} \quad (8.45)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \text{e} \quad \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (8.46)$$

- De (8.43), como o campo magnético é obtido através de um produto vetorial entre  $\hat{\mathbf{n}}$  e  $\mathbf{E}$ , sabemos que  $\mathbf{H}$  é ortogonal aos outros dois;
- De (8.45) concluímos que a energia eletromagnética se propaga na direção de  $\mathbf{k}$ , haja vista que a direção do Poynting é  $\hat{\mathbf{n}}$ . A intensidade da densidade de potência é proporcional ao módulo do campo ao quadrado.
- De (8.46) concluímos que para uma onda plana a direção de propagação da energia  $\hat{\mathbf{n}}$  é ortogonal tanto a  $\mathbf{E}$  quanto a  $\mathbf{H}$ . Portanto  $\hat{\mathbf{n}}$ ,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  formam uma tríade de vetores ortogonais entre si. Como a perturbação  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  é ortogonal à direção de propagação a onda é dita transversa (característica das ondas planas muito importante).

### 8.1.2 Uma Abordagem Alternativa: A solução da Equação de Ondas no Vácuo

Vamos buscar a solução mais simples possível para o campo eletromagnético no vácuo, onde  $\rho = 0$  e  $\mathbf{J} = 0$ . Sejam as equações de Maxwell no vácuo:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 , \quad (8.47)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 , \quad (8.48)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} , \quad (8.49)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} , \quad (8.50)$$

juntamente com a equação de ondas para o campo elétrico no vácuo:

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = 0 .$$

Observando a lei de Gauss:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 ,$$

vamos assumir uma forma para o campo elétrico que a satisfaça automaticamente:

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = E_x(z, t) \hat{\mathbf{a}}_x , \quad \forall (x, y, z, t) . \quad (8.51)$$

ou seja, o campo elétrico só tem componente na direção  $x$  e esta somente depende de  $(z, t)$ . Nesse caso, a divergência anula-se, como requer a lei de Gauss, e a equação de ondas é dada por:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E_x(z, t) = 0 .$$

Já estudamos essa equação no capítulo de Ondulatória, onde o método de solução usual é a separação de variáveis. Em regime harmônico (variações do tipo  $e^{i\omega t}$ ) a solução geral pode ser escrita como:

$$E_x(z, t) = (A e^{ikz} + B e^{-ikz}) e^{i\omega t} .$$

sendo  $k^2 = \omega^2/c^2$  (relação de dispersão),  $A$  e  $B$  são constantes complexas. O termo  $e^{ikz}$  representa onda contra-propagante e  $e^{-ikz}$  uma onda propagante. Para o que segue assumamos que:

$$A = 0 \text{ e } B = E_0 e^{i\theta_0}, E_0 = E_0^* .$$

Desse modo, na notação vetorial a solução é dada por:

$$\mathbf{E}(z, t) = E_0 \hat{\mathbf{a}}_x \exp[i(\omega t - kz + \theta_0)] . \quad (8.52)$$

Podemos perceber que a onda possui as seguintes características:

- Amplitude, dada por  $E_0$
- Polarização  $\Rightarrow$  demonstra o caráter vetorial, nesse caso,  $\hat{\mathbf{a}}_x$
- Fase  $\phi(z, t) = \omega t - kz + \theta_0$ , que depende de  $(z, t)$ .

Considerando somente a parte real da solução acima temos:

$$\mathbf{E}_R(z, t) = E_0 \hat{\mathbf{a}}_x \cos(\omega t - kz + \theta_0)$$

Lembre ainda que, do termo de fase  $\phi(z, t) = \omega t - kz + \theta_0$ , tiramos as seguintes informações:

$\rightsquigarrow$  Frequência:

$$\omega = 2\pi f$$

$\rightsquigarrow$  Comprimento de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Utilizando a relação de dispersão  $k^2 = \omega^2/c^2$ :

$$ck = \omega ,$$

podemos facilmente mostrar que:

$$c = \lambda f .$$

Sem perda de generalidade vamos assumir  $\theta_0 = 0$ , ou seja,

$$\mathbf{E}_R(z, t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \hat{\mathbf{a}}_x$$

Consideremos agora a função em todo o espaço para  $t = 0$ :

$$E_x(z = 0, t) = E_0 \cos(-kz) = E_0 \cos(kz) . \quad (8.53)$$

Esta função é cossenoidal, e podemos daqui definir o comprimento de ondas  $\lambda$  (ou período espacial):

**Comprimento de Onda**  $\lambda$ : é a menor distância espacial entre duas frentes de onda distintas para os quais a diferença de fase é igual a  $2\pi$  em um dado instante de tempo, i.e.,

$$\phi(z, t) - \phi(z + \lambda, t) = [\omega t - kz + \theta_0] - [\omega t - k(z + \lambda) + \theta_0] = k\lambda = 2\pi$$

de onde vem:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} .$$

Note que o número de onda  $k$  pode ser interpretado como uma frequência espacial.

### Velocidade de Fase

↪ Um observador estático em uma dada posição  $z$  perceberá o campo elétrico (e também magnético da onda) variar senoidalmente, ou seja, naquele ponto há mudança de fase à medida que o tempo passa.

↪ Para que um observador acompanhe um plano de fase constante  $\phi(z, t) = \phi_0 = cte$ , o mesmo tem que se deslocar com velocidade constante, chamada velocidade de fase,  $v_p$ . Sendo  $\phi_0 = cte$ :

$$\phi_0 = \omega t - kz \Rightarrow d\phi_0 = 0 = \omega dt - kdz$$

$$\frac{dz}{dt} = v_p = \frac{\omega}{k} = c$$

↪ Verifica-se daí que a onda se propaga para  $+z$ : à medida que o tempo  $t$  passa, para que a fase medida por um observador seja constante  $\phi_0 = \omega t - kz$  ele deve se deslocar para  $+z$ , de tal modo que a diferença  $\omega t - kz$  se mantenha constante.

↪ Uma onda contra-propagante, que vai para  $-z$  tem fase dada em geral, por  $\phi(z, t) = \omega t + kz + \theta_0$ .  $t \uparrow$  implica  $z \downarrow$  para que um observador acompanhe um plano de fase constante.

Voltando agora para a solução na forma complexa:

$$\mathbf{E}(z, t) = E_0 \hat{\mathbf{a}}_x e^{i(\omega t - kz + \theta_0)},$$

sabemos que a mesma satisfaz a equação de ondas, mas devemos ainda determinar  $\mathbf{H}$  e verificar se a mesma satisfaz todas as equações de Maxwell. Pela lei de Faraday em regime harmônico temos:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu_0 \mathbf{H} \Rightarrow \mathbf{H} = i \frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\omega\mu_0},$$

lembrando que

$$\nabla \times \mathbf{E} = \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{a}}_x + \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{a}}_y + \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{a}}_z. \quad (8.54)$$

Como  $\mathbf{E}$  tem somente componente  $E_x(z, t)$ , resulta que

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial z} \hat{\mathbf{a}}_y = -ikE_0 e^{i(\omega t - kz + \theta_0)} \hat{\mathbf{a}}_y,$$

e temos portanto:

$$\mathbf{H} = \frac{k}{\omega\mu_0} E_0 \hat{\mathbf{a}}_y e^{i(\omega t - kz + \theta_0)}$$

↪ Veja que  $\mathbf{E}$  é medido V/m e  $\mathbf{H}$  em A/m. Definição: Impedância do Espaço Livre  $Z_0$ :

$$\frac{1}{Z_0} = \frac{k}{\omega\mu_0} = \frac{\omega}{\omega c_0 \mu_0} = \frac{1}{c_0 \mu_0}.$$

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 2.9979 \times 10^8 \text{ m/s} \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}.$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \approx 377 \Omega = 120\pi \Omega \quad (8.55)$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z, t) &= E_0 \hat{\mathbf{a}}_x e^{i(\omega t - kz + \theta_0)} \\ \mathbf{H} &= \frac{E_0}{Z_0} \hat{\mathbf{a}}_y e^{i(\omega t - kz + \theta_0)} \end{aligned}$$

Verifique que esta solução satisfaz todas as eqs. de Maxwell no vácuo:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \text{e} \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu_0\mathbf{H} \quad \text{e} \quad \nabla \times \mathbf{H} = i\omega\varepsilon_0\mathbf{E}$$

Algumas conclusões podem ser prontamente inferidas da solução abaixo:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z, t) &= E_0 \hat{\mathbf{a}}_x e^{i(\omega t - kz + \theta_0)} , \\ \mathbf{H}(z, t) &= \frac{E_0}{Z_0} \hat{\mathbf{a}}_y e^{i(\omega t - kz + \theta_0)} . \end{aligned}$$

↪  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  são ortogonais entre si.

↪ Também são ortogonais à direção de propagação  $z \implies$  A onda EM plana uniforme é transversal.

Calculando o valor médio do vetor de Poynting temos:

$$\mathbf{S}_{med} = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \frac{E_0^2}{2Z_0} \hat{\mathbf{a}}_z . \quad (8.56)$$

↪ A energia se propaga na direção  $z$ , através do vetor de Poynting  $\mathbf{S}_{med}$ .

↪ A onda é dita **eletromagnética** pois para haver transporte de energia, através de  $\mathbf{S}$  deve haver tanto  $\mathbf{E}$  e quanto  $\mathbf{H}$ . É transversal pois a perturbação  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  é ortogonal à direção de propagação!

$\implies$  Para uma ONDA PLANA UNIFORME:  $\mathbf{E} \perp \mathbf{H} \perp \mathbf{S}_{med}$ .

A Figura 8.1 ilustra o campo elétrico  $E_x(z, t)$  e o campo magnético  $H_y(z, t)$  para  $t = 0$  em função de  $z$ .

## 8.2 Análise da Propagação de Ondas em Meios Materiais

Sabemos da relação de dispersão,

$$k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon_c} = \beta - i\alpha \quad (8.57)$$

é um número complexo que depende das características do meio, pois ao menos a permissividade dielétrica do meio é tipicamente complexa:

$$\varepsilon_c = \varepsilon \left( 1 - i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right) .$$

Também a impedância do meio,  $Z = \sqrt{\mu/\varepsilon_c}$ , será uma quantidade complexa. A variável complexa  $k$  é dita constante de propagação medida em  $m^{-1}$ ,  $\beta$  é chamada constante de fase [1/m ou rad/m] e  $\alpha$  é dita constante de atenuação [1/m ou np/m]. Para um meio sem perdas  $k = \beta$  e sabemos que  $k = 2\pi/\lambda$ . Desse modo vamos generalizar essa relação para:

$$\beta = \text{Re}(k) = \frac{2\pi}{\lambda} . \quad (8.58)$$

Dessa forma, uma onda plana uniforme propagando-se em uma direção arbitrária  $\hat{\mathbf{n}}$  em um meio material qualquer pode ser expressa na forma abaixo:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\alpha \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}} e^{i(\omega t - \beta \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r})} , \quad (8.59)$$

$$\mathbf{H} = \frac{k}{\omega \mu} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} = \frac{1}{Z} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} . \quad (8.60)$$

Lembrando que as equações  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E} = 0$  e  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H} = 0$  devem ser satisfeitas, vamos assumir  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{a}}_z$ , sem perda de generalidade para a análise que segue, e além disso,  $\mathbf{E}_0 = E_0 \hat{\mathbf{a}}_x$  de forma que:

$$\mathbf{E} = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \hat{\mathbf{a}}_x , \quad (8.61)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{Z} E_0 e^{i(\omega t - kz)} \hat{\mathbf{a}}_y , \quad (8.62)$$

$$\mathbf{S}_{med} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \frac{1}{Z^*} \right\} |\mathbf{E}|^2 \hat{\mathbf{a}}_z . \quad (8.63)$$

Do ponto de vista da propagação de ondas eletromagnéticas O que define se um meio é dielétrico ideal, dielétrico real ou condutor é a relação entre corrente de condução e corrente de deslocamento. Essa relação é

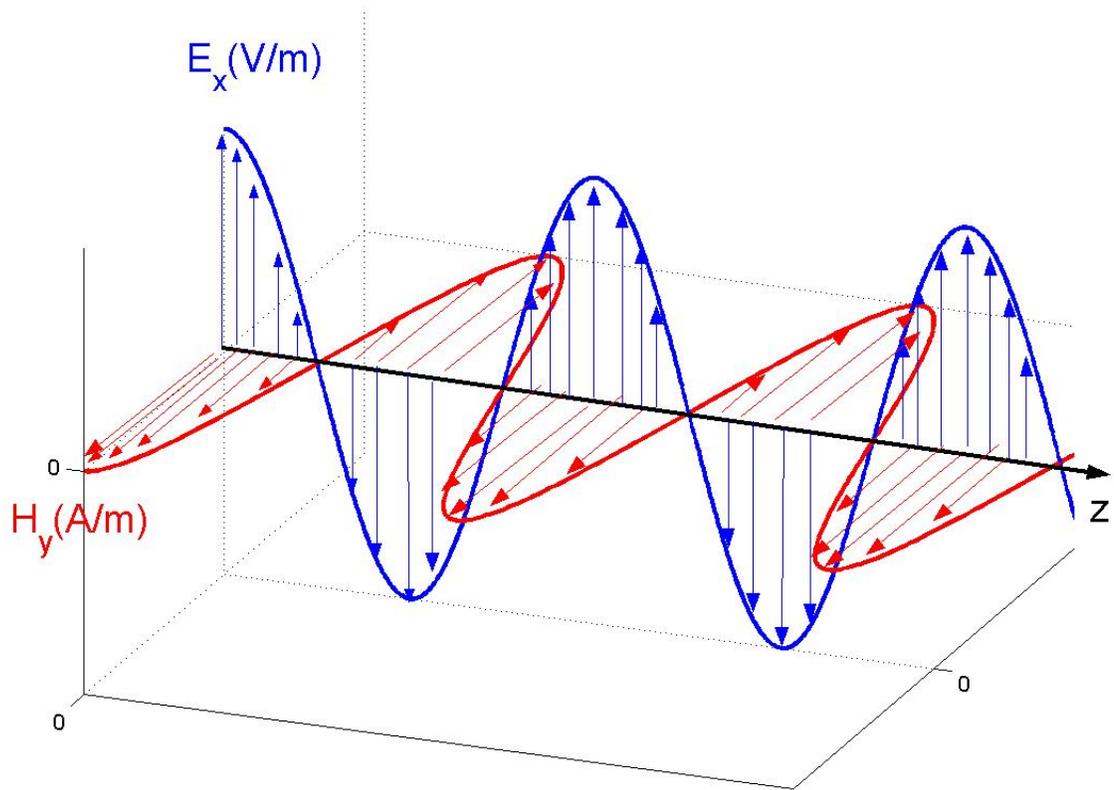


Figure 8.1: Onda Eletromagnética Plana Uniforme. Os gráficos mostram os campos  $E_x(z, t = 0)$  e  $H_y(z, t = 0)$  (em função de  $z$ , para  $t = 0$ ). Observe que à medida que o tempo passa a figura é transladada no sentido positivo do eixo  $z$ .

chamada tangente de perdas do meio. Assumindo meios materiais em que a densidade de corrente de condução  $\mathbf{J}$  obedece a lei de Ohm,  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ , e a densidade de corrente de deslocamento  $\mathbf{J}_D = \partial \mathbf{D} / \partial t$  em regime harmônico é dada por

$$\mathbf{J}_D = i\omega \varepsilon \mathbf{E} ,$$

define-se:

$$\tan \theta_p = \frac{|\mathbf{J}|}{|\partial \mathbf{D} / \partial t|} = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} . \quad (8.64)$$

Essa relação é que define o comportamento do meio. Veja que a tangente de perdas aparece na definição de  $\varepsilon_c$ :

$$\varepsilon_c = \varepsilon \left( 1 - i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)$$

### 8.2.1 Meios Dielétricos Ideais ou Meios Sem Perdas ( $\sigma = 0$ )

No caso de materiais dielétricos e magnéticos sem perdas, ou seja, ideais, temos as seguintes expressões para as constantes de propagação, perdas e impedância:

$$\alpha = 0 ; \quad \beta = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} , \quad (8.65)$$

ou seja,

$$k = \beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} . \quad (8.66)$$

Note que também a impedância característica é um número real puro nesse caso:

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} . \quad (8.67)$$

Omitindo a dependência temporal  $e^{i\omega t}$  temos então, para os campos propagantes na direção  $z$  positiva, as expressões abaixo:

$$\mathbf{E} = E_0 e^{-i\beta z} \hat{\mathbf{a}}_x , \quad (8.68)$$

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0 e^{-i\beta z} \hat{\mathbf{a}}_y , \quad (8.69)$$

$$\mathbf{S}_{med} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2 \hat{\mathbf{a}}_z . \quad (8.70)$$

É bastante útil definir o número de onda  $k_0$  que corresponde à constante de propagação no vácuo:

$$k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = \frac{2\pi}{\lambda_0} , \quad (8.71)$$

onde  $\lambda_0$  é o comprimento de onda no vácuo. Coonsideremos ainda que a velocidade de fase é dada por:

$$c = \frac{\omega}{k} = \lambda f ,$$

e da óptica, o **Índice de Refração**  $n$  é dado por:

$$c = \frac{c_0}{n} \quad \text{ou} \quad n = \frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{\beta}{k_0} . \quad (8.72)$$

Desse modo é possível relacionar as constantes eletromagnéticas do meio, como a permeabilidade magnética e a permissividade dielétrica ao índice de refração do meio. Temos no caso de meios dielétricos ideais a seguinte relação:

$$n = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r} . \quad (8.73)$$

onde  $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$  e  $\mu_r = \mu/\mu_0$  são valores relativos. Em dielétricos ideais e não-magnéticos,  $\mu_r = 1$  ( $\mu = \mu_0$ ) e o índice de refração fica relacionado diretamente à permissividade dielétrica:

$$n = \sqrt{\varepsilon_r} . \quad (8.74)$$

Dessa forma podemos calcular o comprimento de ondas no meio  $\lambda$ , bem como a impedância característica  $Z$ , em termos dos valores do vácuo,  $\lambda_0$  e  $Z_0$ , ou seja:

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} , \quad (8.75)$$

$$Z = \frac{Z_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} , \quad (8.76)$$

sendo o próprio vácuo um caso particular com:  $\varepsilon_r = 1$ . Em muitos casos o ar atmosférico é considerado como sendo aproximadamente o vácuo, como primeira aproximação.

## 8.2.2 Meios Dielétricos Reais ou com Pequenas Perdas ( $\sigma \ll \omega\varepsilon$ )

Em dielétricos reais não magnéticos ( $\mu_r = 1$ ),  $\sigma \neq 0$  embora  $\sigma \ll 1$ . Para um meio comportar-se como dielétrico porém, basta que

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \ll 1,$$

predominando assim a corrente de deslocamento. Nesse caso, utilizando a seguinte aproximação

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2},$$

temos:

$$k = \beta - i\alpha \approx \omega\sqrt{\mu\varepsilon} - i\frac{1}{2}\sigma\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \quad (8.77)$$

de onde, por comparação, podemos inferir que:

$$\alpha = \frac{\sigma Z_0}{2\sqrt{\varepsilon_r}} \quad \text{e} \quad \beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = k_0\sqrt{\varepsilon_r}, \quad (8.78)$$

e além disso:

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left(1 + i\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon}\right) \approx \frac{Z_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} \quad (8.79)$$

A onda propagada nesse meio tem, no sentido positivo de  $z$ , as seguintes expressões:

$$\mathbf{E} = E_0 \exp\left[-\frac{1}{2}\sigma\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}z\right] e^{-i\beta z} \hat{\mathbf{a}}_x = E_0 e^{-\alpha z} e^{-i\beta z} \hat{\mathbf{a}}_x, \quad (8.80)$$

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left(1 - i\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon}\right) E_0 \exp\left[-\frac{1}{2}\sigma\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}z\right] e^{-i\beta z} \hat{\mathbf{a}}_y \approx \frac{E_0}{Z_0} \sqrt{\varepsilon_r} e^{-\alpha z} e^{-i\beta z} \hat{\mathbf{a}}_y, \quad (8.81)$$

$$\mathbf{S}_{med} = \frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{2Z_0} E_0^2 \exp(-2\alpha z) \hat{\mathbf{a}}_z. \quad (8.82)$$

Observando as expressões de campo em um dielétrico real  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  ficam ligeiramente defasados entre si, mas esta pode ser até mesmo negligenciada já que não há uma influência significativa na densidade de potência. As perdas são dependentes de forma linear com a condutividade  $\sigma$  e são levadas em conta na constante de atenuação  $\alpha$ .

Definição: **Comprimento de Penetração  $\delta$ :**

É a distância necessária para a intensidade de campo cair a  $1/e$  ( $\approx 37\%$ ) do valor em  $z = 0$  e é dada por:

$$\delta = \frac{1}{\alpha}. \quad (8.83)$$

Para um dielétrico real, será dada por:

$$\delta = \frac{2\sqrt{\varepsilon_r}}{\sigma Z_0}.$$

Para um material na frequência de  $f = 3 \times 10^9$  Hz ( $\lambda = 10$ cm), com as seguintes características:  $\varepsilon_r = 4$ ,  $\mu_r \approx 1$ ,  $\sigma = 10^{-6} \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$  temos:

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = 1.498 \times 10^{-6} \ll 1$$

de forma que a penetração da onda nesse meio é da ordem de

$$\delta = \frac{2\sqrt{4}}{10^{-6}} \frac{1}{377} \text{ m} = 10.6 \text{ km}$$

ou seja,

$$\delta \gg \lambda,$$

o que significa que a onda se propaga muitos comprimentos de onda em um dielétrico real, e portanto, dielétricos não são bons isolantes para ondas eletromagnéticas.

### 8.2.3 Meio Condutor ( $\sigma \gg \omega\varepsilon$ )

O meio condutor ideal possui condutividade infinita ( $\sigma \rightarrow \infty$ ). Vamos nos concentrar nos casos em que  $\sigma \gg \omega\varepsilon$ , ou seja,

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \gg 1 ,$$

e nesse caso de um bom condutor predomina a corrente de condução. Dessa forma temos:

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} ,$$

e podemos escrever:

$$k = \beta - i\alpha \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}(1 - i) , \quad (8.84)$$

$$Z = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}(1 + i) . \quad (8.85)$$

Aqui o campo magnético fica em defasagem evidente ( $-45^\circ$ ) em relação ao campo elétrico e temos:

$$\mathbf{E} = E_0 \exp\left[-\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}z\right] \exp\left[-i\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}z\right] \hat{\mathbf{a}}_x , \quad (8.86)$$

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\mu}}(1 - i)E_0 \exp\left[-\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}z\right] \exp\left[-i\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}z\right] \hat{\mathbf{a}}_y , \quad (8.87)$$

$$\mathbf{S}_{med} \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\mu}} E_0^2 \exp\left[-2\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}z\right] \hat{\mathbf{a}}_z . \quad (8.88)$$

Observamos que o campo magnético assume valores bastante altos, dado que é multiplicado por  $\sqrt{\sigma}$ , enquanto o comprimento de penetração de campo será dado por:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} ,$$

Esta é distância em um condutor onde o valor do campo cai do valor para um valor de  $\approx 37\%$  do campo inicial. Essa é a essência do **efeito skin ou pelicular** dos condutores: os campos e correntes ficam somente na superfície do condutor a altas frequências, uma vez que  $\delta$  é um valor pequeno comparado ao comprimento de onda. Para exemplificar, vamos supor  $f = 1$  MHz,  $\mu = \mu_0$  e a condutividade do alumínio  $\sigma \approx 3.54 \cdot 10^7 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ :

$$\delta \approx 8.5 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 85 \mu\text{m}$$

ou seja, um campo eletromagnético incidindo numa chapa de alumínio de 1 mm não passaria para o outro lado, o que sugere que os condutores são bons isolantes de ambientes para a influência de ondas eletromagnéticas. Aqui tem-se de forma exata

$$\delta = \frac{\lambda}{2\pi} , \quad (8.89)$$

ou seja,  $\delta < \lambda$ , conforme mencionamos.

### 8.2.4 Meios com Perdas e Condutividade da ordem $\sigma \sim \omega\varepsilon$

Aqui devem resultar expressões gerais para  $\alpha$  e  $\beta$ . Da definição

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon_c} = \beta - i\alpha = \omega\sqrt{\mu\varepsilon\left(1 - i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)} ,$$

e colocando na forma polar a parte complexa, após cálculos um tanto tediosos chegamos a:

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1} \quad (8.90)$$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} + 1} \quad (8.91)$$

Para a impedância do meio temos:

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon(1 - i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon})}} ,$$

e após as manipulações matemáticas, podemos escrever:

$$Z = r + ix , \quad (8.92)$$

sendo

$$r = \sqrt{\frac{\mu}{2\varepsilon(1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2})}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} + 1} , \quad (8.93)$$

$$x = \sqrt{\frac{\mu}{2\varepsilon(1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2})}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1} . \quad (8.94)$$

Os campos propagantes na direção  $z$  positiva são da forma geral:

$$\mathbf{E} = E_0 e^{-\alpha z} e^{-i\beta z} \hat{\mathbf{a}}_x , \quad (8.95)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{Z} E_0 e^{-\alpha z} e^{-i\beta z} \hat{\mathbf{a}}_y , \quad (8.96)$$

$$\mathbf{S}_{med} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \frac{1}{Z^*} \right\} E_0^2 e^{-2\alpha z} \hat{\mathbf{a}}_z . \quad (8.97)$$

### 8.3 Ondas planas no Espaço Recíproco

Aqui temos um capítulo a parte, que pode ser considerado avançado para alguns porque utiliza o conceito de transformada de Fourier generalizada, e é equivalente ao regime harmônico dos campos. Dadas as equações de Maxwell em meio homogêneo, linear e isotrópico:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho/\varepsilon \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (8.98)$$

e as transformadas de Fourier generalizadas:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{k}, \omega) &= \int d^3x \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp[-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \mathbf{A}(\mathbf{k}, \omega) \end{aligned}$$

das propriedades de transformadas sabemos que:

$$F\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) = (i\omega)^n F(\omega)$$

para uma variável  $t$ . Então vamos aplicar a transformada de Fourier às equações de Maxwell:

$$\begin{aligned}
& \int d^3x \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] (\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon) \\
& \int d^3x \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] (\nabla \cdot \mathbf{H} = 0) \\
& \int d^3x \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \left( \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) \\
& \int d^3x \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \left( \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)
\end{aligned} \tag{8.99}$$

de onde tiramos que:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = i\rho(\mathbf{k}, \omega)/\varepsilon \tag{8.100}$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{k}, \omega) = 0 \tag{8.101}$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \omega\mu\mathbf{H}(\mathbf{k}, \omega) \tag{8.102}$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H}(\mathbf{k}, \omega) = i\mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega) - \omega\varepsilon\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) \tag{8.103}$$

ou no vácuo, onde  $\rho$  e  $\mathbf{J}$  são nulos, temos simplesmente:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) &= 0 \\
\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{k}, \omega) &= 0 \\
\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) &= Z_0\mathbf{H}(\mathbf{k}, \omega) \\
\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}(\mathbf{k}, \omega) &= -\frac{1}{Z_0}\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)
\end{aligned} \tag{8.104}$$

sendo  $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$  e  $\mathbf{k}/k = \hat{\mathbf{n}}$ . O espaço recíproco é dito o espaço de  $\mathbf{k}$  e  $\omega$  enquanto o espaço real é o espaço de  $\mathbf{r}$  e  $t$ .

## 8.4 Representação Geral da Polarização de Ondas Eletromagnéticas

Consideremos a solução geral de ondas planas uniformes propagando-se em uma direção arbitrária  $\hat{\mathbf{n}}$ , mostrada abaixo:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\alpha\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}} e^{i(\omega t - \beta\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r})} .$$

**Definição:** Polarização de uma onda eletromagnética indica o caráter vetorial da onda e é sempre obtida a partir da orientação do vetor campo elétrico  $\mathbf{E}$ .

Queremos agora encontrar uma solução geral para o vetor  $\mathbf{E}_0$ , sendo conhecido  $\hat{\mathbf{n}}$ . Da lei de Gauss para ondas planas uniformes:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E} = 0 ,$$

é fácil ver que

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}_0 = 0 .$$

A solução vetorial mais geral para esta equação é a superposição linear de vetores  $\mathbf{E}_0$  contidos no plano normal à  $\hat{\mathbf{n}}$ :

$$\mathbf{E}_0 = E_1\hat{\mathbf{a}}_1 + E_2\hat{\mathbf{a}}_2$$

onde  $\hat{\mathbf{a}}_1$  e  $\hat{\mathbf{a}}_2$  são vetores unitários que formam uma base ortonormalizada no plano perpendicular ao vetor  $\hat{\mathbf{n}}$ , ou seja:

$$\hat{\mathbf{a}}_1 \cdot \hat{\mathbf{a}}_1 = \hat{\mathbf{a}}_2 \cdot \hat{\mathbf{a}}_2 = \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 1 , \quad (8.105)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_1 \cdot \hat{\mathbf{a}}_2 = \hat{\mathbf{a}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{a}}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 , \quad (8.106)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_1 \times \hat{\mathbf{a}}_2 = \hat{\mathbf{n}} , \quad (8.107)$$

Lembrando ainda que

$$|\mathbf{E}_0| = E_0 = \sqrt{|E_1|^2 + |E_2|^2} , \quad (8.108)$$

é possível definir

$$E_1 = E_0 \cos(\varphi) e^{i\theta_1} , \quad (8.109)$$

$$E_2 = E_0 \sin(\varphi) e^{i\theta_2} , \quad (8.110)$$

de tal forma que possamos escrever:

$$\mathbf{E} = E_0 [\cos(\varphi) \hat{\mathbf{a}}_1 + \sin(\varphi) e^{i\gamma} \hat{\mathbf{a}}_2] e^{-\alpha \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}} e^{i(\omega t - \beta \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r} + \theta_1)} , \quad (8.111)$$

onde  $\theta_1$  é denominada fase global e  $\gamma$ , definida abaixo,

$$\gamma = \theta_2 - \theta_1 , \quad (8.112)$$

é a fase relativa entre as componentes nas direções  $\hat{\mathbf{a}}_1$  e  $\hat{\mathbf{a}}_2$ .

Por simplicidade, para a análise que virá na sequência vamos assumir ondas propagantes no sentido positivo do eixo  $z$ , ou seja,  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{a}}_z$ , tal que:

$$\mathbf{E} = E_0 [\cos(\varphi) \hat{\mathbf{a}}_x + \sin(\varphi) e^{i\gamma} \hat{\mathbf{a}}_y] e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z + \theta_1)} , \quad (8.113)$$

$$\mathbf{H} = \frac{E_0}{Z} [-\sin(\varphi) e^{i\gamma} \hat{\mathbf{a}}_x + \cos(\varphi) \hat{\mathbf{a}}_y] e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z + \theta_1)} , \quad (8.114)$$

$$\mathbf{S}_{med} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \frac{1}{Z^*} \right\} |\mathbf{E}|^2 \hat{\mathbf{a}}_z . \quad (8.115)$$

A polarização de uma onda eletromagnética pode ser classificada em linear, circular ou elíptica, esta última o caso geral.

### 8.4.1 Polarização Linear

A polarização linear será obtida quando  $e^{i\gamma} = \pm 1$ , ou seja, quando a fase relativa for dada por

$$\gamma = m\pi , m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

Por simplicidade vamos escolher  $m = 0$  e  $\theta_1 = 0$ , e nesse caso:

$$\mathbf{E} = E_0 [\cos(\varphi) \hat{\mathbf{a}}_x + \sin(\varphi) \hat{\mathbf{a}}_y] e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z)} , \quad (8.116)$$

cujas partes reais valem:

$$\mathbf{E}_R = E_0 [\cos(\varphi) \hat{\mathbf{a}}_x + \sin(\varphi) \hat{\mathbf{a}}_y] e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) , \quad (8.117)$$

Observe que tanto a componente  $E_x$  quanto  $E_y$  estão em mesma fase, e portanto o campo resultante oscila sobre uma linha reta contida no plano  $(x, y)$  formando um ângulo  $\varphi$  com o eixo  $x$  - daí o nome de **Polarização Linear**. Obviamente o campo magnético oscila sobre uma linha perpendicular a esta, ou seja, uma linha que forma um

ângulo  $\varphi$  com o eixo  $y$ . Se definirmos o eixo  $x$  como eixo vertical e o plano  $(y, z)$  como plano horizontal, temos dois casos particulares:

↪ Polarização Vertical:  $\varphi = 0$

$$\mathbf{E}_R = E_0 \hat{\mathbf{a}}_x e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \quad (8.118)$$

↪ Polarização Horizontal:  $\varphi = \pi/2$

$$\mathbf{E}_R = E_0 \hat{\mathbf{a}}_y e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \quad (8.119)$$

A Figura 8.2 mostra o campo elétrico, bem como o campo magnético, de uma onda de polarização linear vertical, em  $t = 0$ , em função da coordenada referente ao eixo de propagação  $z$ .

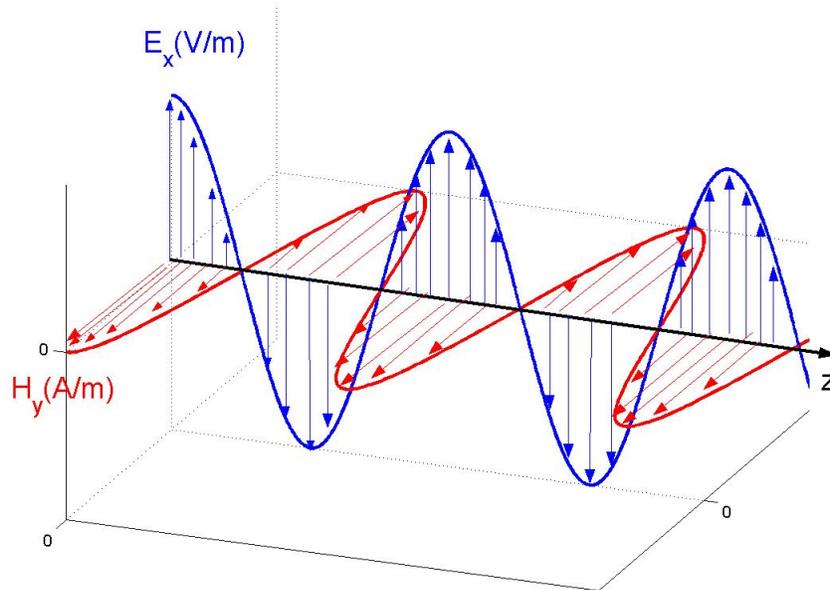


Figure 8.2: Onda de Polarização Linear: para um observador em  $z$  qualquer, a figura move-se para a direita à medida que o tempo passa e o campo  $\mathbf{E}$  oscila sobre uma linha reta.

### 8.4.2 Polarização Circular

A polarização circular será obtida quando  $e^{i\gamma} = \pm i$ , ou seja, a fase relativa entre as componentes  $E_x$  e  $E_y$  será dada por

$$\gamma = \pm \frac{\pi}{2}$$

e quando a amplitude das componentes  $E_x$  e  $E_y$  forem iguais, ou seja,  $\varphi = \pi/4$ . Temos então duas soluções distintas:

$$\mathbf{E}_{\pm} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} [\hat{\mathbf{a}}_x \mp i \hat{\mathbf{a}}_y] e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z)}, \quad (8.120)$$

cuja parte real vale:

$$\mathbf{E}_{\pm}^R = \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{-\alpha z} [\cos(\omega t - \beta z) \hat{\mathbf{a}}_x \pm \sin(\omega t - \beta z) \hat{\mathbf{a}}_y]. \quad (8.121)$$

A primeira delas é denominada **Onda de Polarização Circular Direita ou Anti-Horária**. Considere o plano  $z = 0$  e temos

$$\mathbf{E}_+^R = \frac{E_0}{\sqrt{2}} [\cos(\omega t)\hat{\mathbf{a}}_x + \sin(\omega t)\hat{\mathbf{a}}_y] . \quad (8.122)$$

Observe que as componentes  $E_x$  e  $E_y$  oscilam no tempo em diferença de fase de  $90^\circ$ , com o vetor  $\mathbf{E}$  descrevendo uma circunferência de raio  $E_0/\sqrt{2}$ , no sentido anti-horário para um observador que vê a onda chegando até ele (regra da mão direita). Fazendo  $\alpha = 0$ , por conveniência, em  $t = 0$  tem-se

$$\mathbf{E}_+^R = \frac{E_0}{\sqrt{2}} [\cos(\beta z)\hat{\mathbf{a}}_x - \sin(\beta z)\hat{\mathbf{a}}_y] . \quad (8.123)$$

A Figura 8.3 ilustra o comportamento do vetor campo elétrico à medida que o tempo passa em  $z = 0$ . O vetor descreve uma circunferência cujo sentido de rotação é dado pela regra da mão direita, para um observador que vê a onda chegar. Já a Figura 8.4 ilustra essa mesma onda no espaço, para  $t = 0$ .

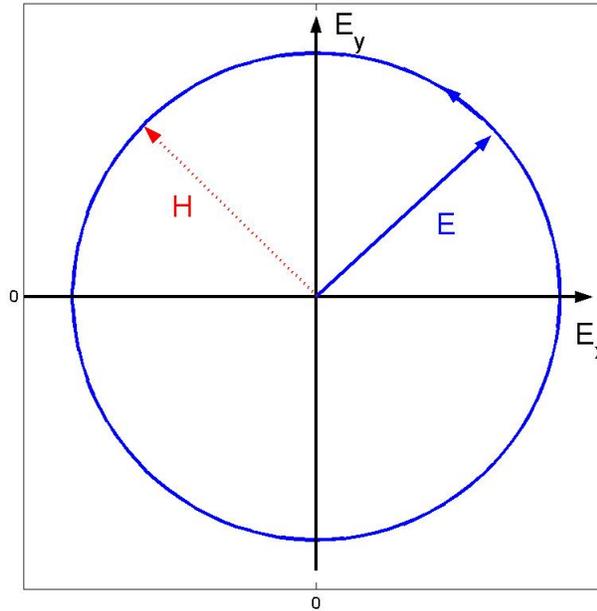


Figure 8.3: Onda de Polarização Circular Direita (RHCP): Um observador em  $z = 0$  vendo a onda chegar percebe um campo  $\mathbf{E}$  que descreve uma circunferência no sentido anti-horário à medida que o tempo passa.

A segunda situação é a de uma **Onda de Polarização Circular Esquerda ou Horária**. No plano  $z = 0$  temos o campo elétrico dado pela expressão abaixo:

$$\mathbf{E}_-^R = \frac{E_0}{\sqrt{2}} [\cos(\omega t)\hat{\mathbf{a}}_x - \sin(\omega t)\hat{\mathbf{a}}_y] . \quad (8.124)$$

Observe que as componentes  $E_x$  e  $E_y$  oscilam no tempo em diferença de fase de  $-90^\circ$ , com o vetor  $\mathbf{E}$  descrevendo uma circunferência de raio  $E_0/\sqrt{2}$ , no sentido horário para um observador que vê a onda chegando até ele (regra da mão esquerda). Fazendo  $\alpha = 0$ , por conveniência, em  $t = 0$  tem-se:

$$\mathbf{E}_-^R = \frac{E_0}{\sqrt{2}} [\cos(\beta z)\hat{\mathbf{a}}_x + \sin(\beta z)\hat{\mathbf{a}}_y] . \quad (8.125)$$

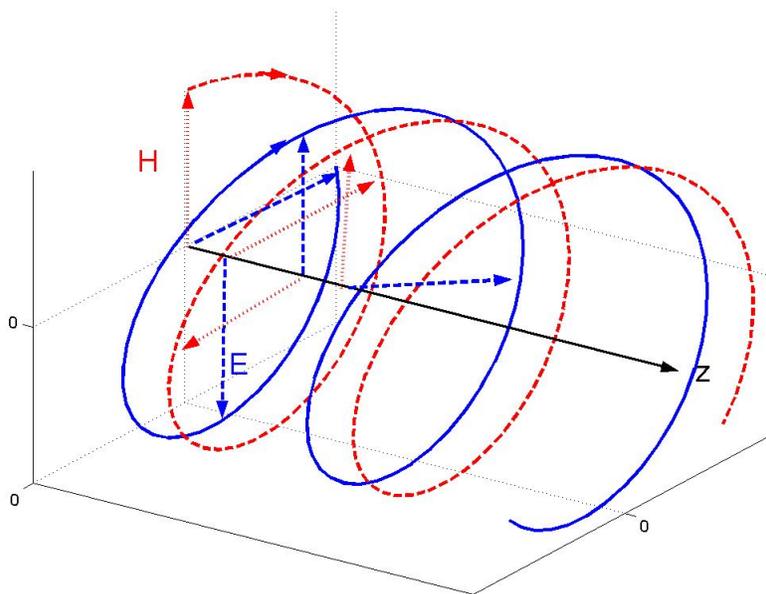


Figure 8.4: Onda de Polarização Circular Direita (RHCP): o campo  $\mathbf{E}$  descreve uma hélice no espaço para um determinado instante  $t$ . À medida que o tempo passa a figura se desloca para a direita, e um observador em um plano  $z$  qualquer vê um campo elétrico que descreve uma circunferência no sentido anti-horário.

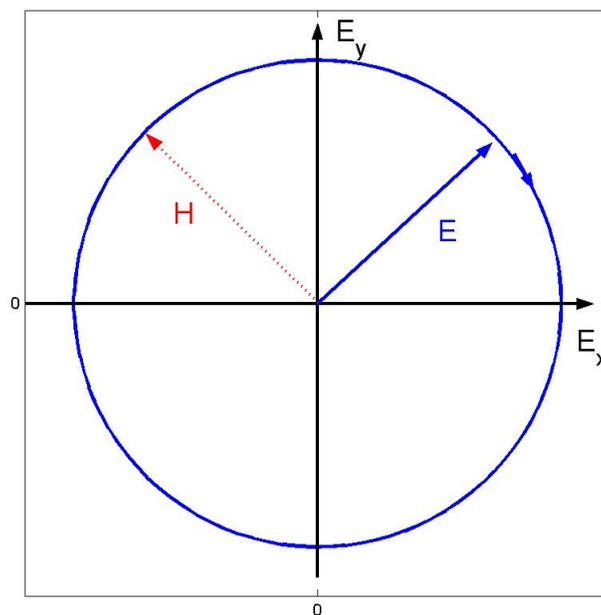


Figure 8.5: Onda de Polarização Circular Esquerda (LHCP): Um observador em  $z = 0$  vendo a onda chegar percebe um campo  $\mathbf{E}$  que descreve uma circunferência no sentido horário à medida que o tempo passa.

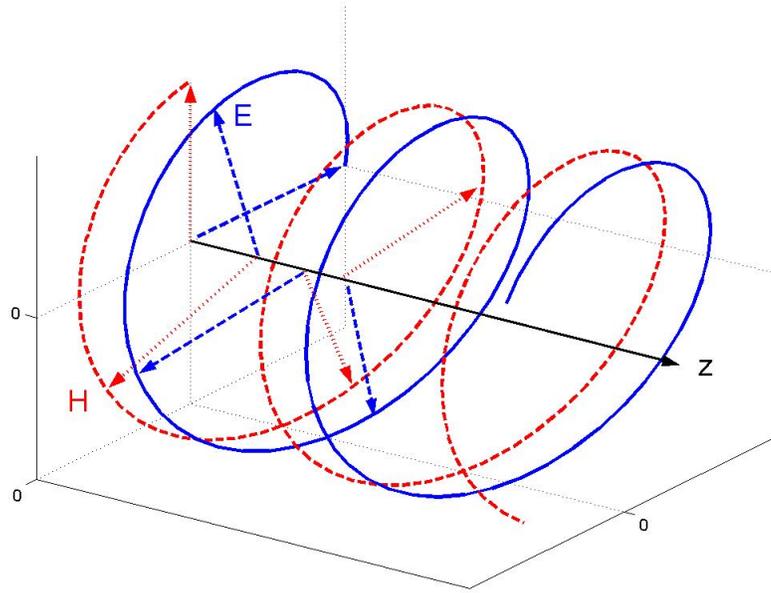


Figure 8.6: Onda de Polarização Circular Esquerda (LHCP): o campo  $\mathbf{E}$  descreve uma hélice no espaço para um determinado instante  $t$ . À medida que o tempo passa a figura se desloca para a direita, e um observador em um plano  $z$  qualquer vê um campo elétrico que descreve uma circunferência no sentido horário.

As Figuras 8.5 e ?? ilustram uma onda de polarização circular esquerda, em  $z = 0$  em função do tempo, e  $t = 0$  em função de  $z$ , respectivamente.

### Álgebra dos vetores unitários de polarização circular

Os vetores unitários utilizados para descrever polarização circular são complexos, na representação complexa do campo eletromagnético, e seguem regras não usuais de produto escalar. São definidos os vetores unitários de polarização circular conforme as expressões abaixo:

$$\hat{\mathbf{a}}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\mathbf{a}}_x \mp i\hat{\mathbf{a}}_y) . \quad (8.126)$$

É fácil ver que

$$\hat{\mathbf{a}}_{\pm}^* = \hat{\mathbf{a}}_{\mp}$$

bem como demonstrar as seguintes relações:

$$\hat{\mathbf{a}}_{\pm} \cdot \hat{\mathbf{a}}_{\pm} = 0 , \quad (8.127)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_{\pm} \cdot \hat{\mathbf{a}}_{\pm}^* = \hat{\mathbf{a}}_{\pm} \cdot \hat{\mathbf{a}}_{\mp} = 1 , \quad (8.128)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_{\pm} \times \hat{\mathbf{a}}_{\mp} = i\hat{\mathbf{a}}_z . \quad (8.129)$$

É possível ainda mostrar que uma onda de polarização linear é uma superposição adequada de ondas de polarização circular:

$$\mathbf{E} = (E_+\hat{\mathbf{a}}_+ + E_-\hat{\mathbf{a}}_-)e^{-\alpha z}e^{i(\omega t - \beta z + \theta_1)} . \quad (8.130)$$

Veja que se  $E_+ = E_- = E_0/\sqrt{2}$  então:

$$\mathbf{E} = E_0\hat{\mathbf{a}}_x e^{-\alpha z}e^{i(\omega t - \beta z + \theta_1)} ,$$

enquanto que se  $E_+ = E_- = iE_0/\sqrt{2}$  obtemos:

$$\mathbf{E} = E_0 \hat{\mathbf{a}}_y e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z + \theta_1)} .$$

A Figura 8.7 mostra a obtenção de um campo de polarização linear como superposição de duas ondas de polarização circular de sentido de rotação opostos.

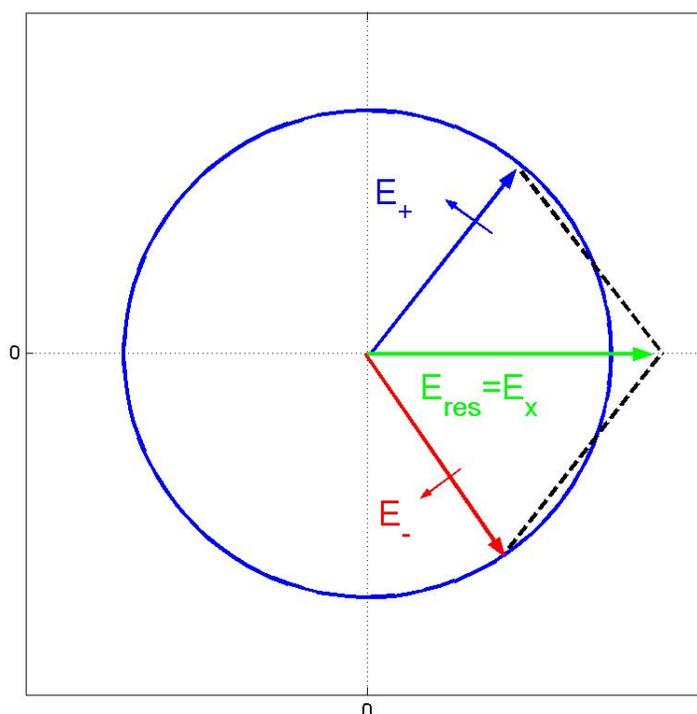


Figure 8.7: Onda de Polarização Linear obtida a partir da soma de duas ondas de polarização circular,  $\mathbf{E}_+$  e  $\mathbf{E}_-$ .

De modo geral a Polarização de uma onda pode ser **Elíptica**,  $\varphi \neq 45^\circ$  e  $\gamma \neq 0$ :

$$\mathbf{E} = E_0 [\cos(\varphi) \hat{\mathbf{a}}_x + \sin(\varphi) e^{i\gamma} \hat{\mathbf{a}}_y] e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z + \theta_1)}$$

sendo as polarizações lineares e circulares casos particulares do caso mais geral. A Figura 8.8 mostra um exemplo de polarização elíptica anti-horária.

## 8.5 Condições de Contorno e Interfaces Planas entre Meios: lei de Snell, refração e reflexão, ângulo de Brewster

A incidência das ondas eletromagnéticas em interfaces entre meios distintos é um problema de suma importância já que a idealização de meios infinitos não se realiza na prática e temos a presença de vários meios, com a onda se propagando de um meio para outro.

O problema da incidência em interfaces nada mais é do que solucionar as equações de Maxwell com condições

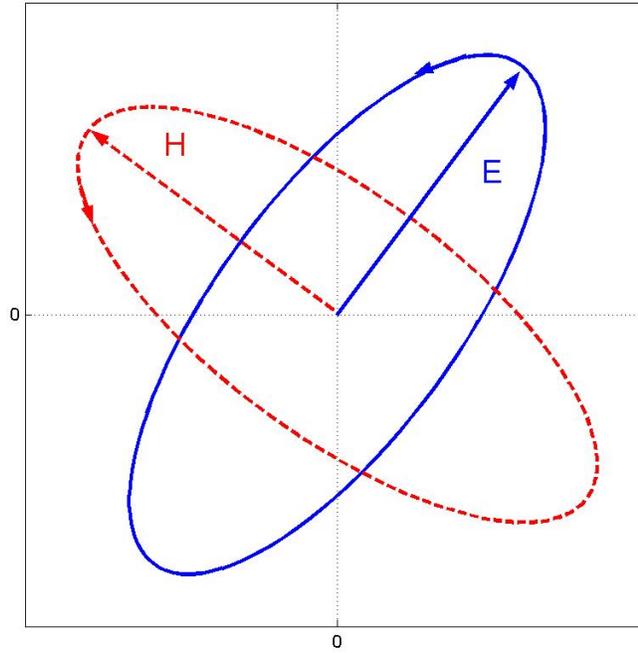


Figure 8.8: Onda de Polarização Elíptica Anti-Horária .

de contorno apropriadas. As condições de contorno gerais em interfaces são as seguintes:

$$\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_S \quad (8.131)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \quad (8.132)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_1 \times \mathbf{E}_1 = \hat{\mathbf{n}}_1 \times \mathbf{E}_2 \quad (8.133)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_1 \times \mathbf{H}_1 - \hat{\mathbf{n}}_1 \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{J}_S \quad (8.134)$$

enquanto para meios sem cargas e correntes superficiais  $\rho_S$  e  $\mathbf{J}_S$  temos:

$$\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \mathbf{D}_1 = \hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \mathbf{D}_2 \quad (8.135)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \quad (8.136)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_1 \times \mathbf{E}_1 = \hat{\mathbf{n}}_1 \times \mathbf{E}_2 \quad (8.137)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_1 \times \mathbf{H}_1 = \hat{\mathbf{n}}_1 \times \mathbf{H}_2 \quad (8.138)$$

o que reflete apenas a continuidade das componentes normais de  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{B}$  e tangenciais de  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  nas interfaces.

De acordo com o tipo de interface entre dois meios materiais, a reflexão pode ser classificada em:

- Especular: quando a interface entre os meios é perfeitamente lisa em relação ao comprimento de ondas  $\lambda$  da onda incidente.

- Difusa: para superfícies rugosas em relação ao comprimento de ondas  $\lambda$ .

O problema mais simples que podemos pensar é uma interface plana ideal conforme mostra a figura 8.10.

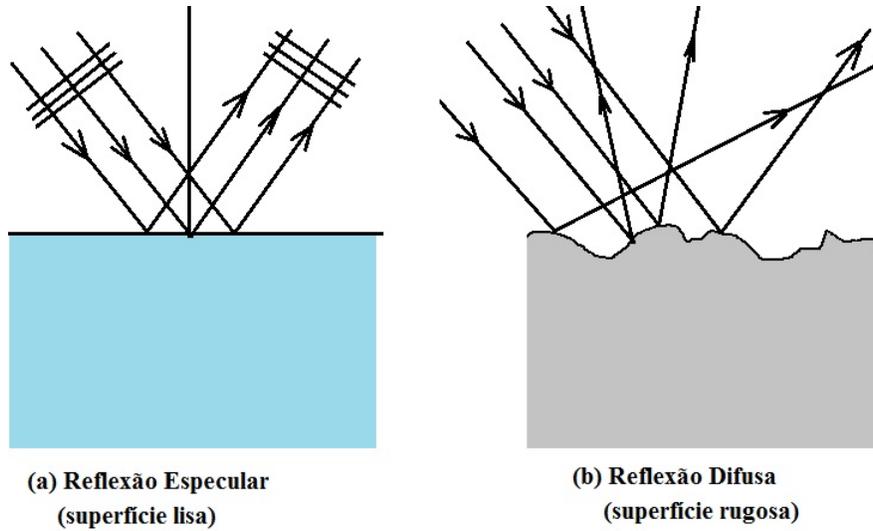


Figure 8.9: Tipos de Reflexão em Interface entre 2 Meios: Especular e Difusa.

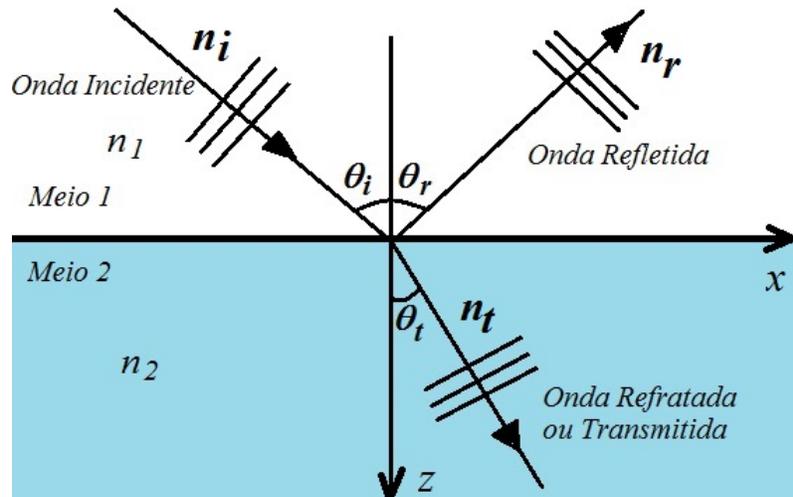
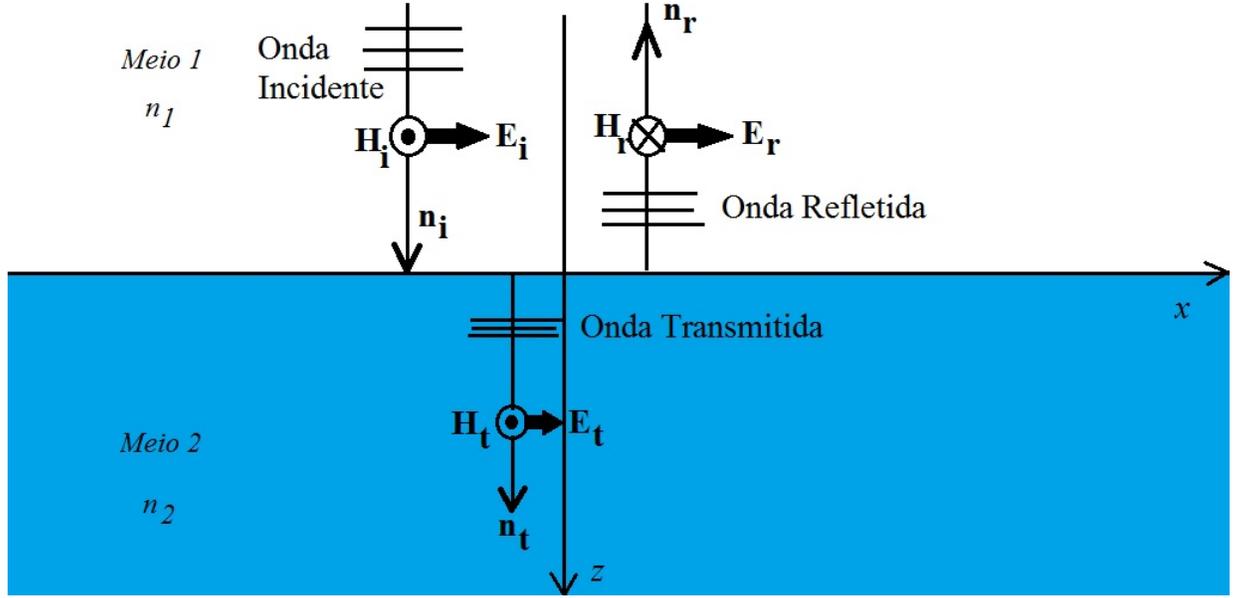


Figure 8.10: Interface perfeitamente plana entre dois meios materiais em  $z = 0$ .

### 8.5.1 A Incidência Normal

No caso em que  $\theta_i = 0$ , de incidência normal, uma onda plana incidente tem ambos os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  totalmente tangenciais à interface e esse caso é o mais simples. Quando tratamos um meio em que a onda incide com um ângulo  $\theta_i \neq 0$  haverá componente de  $\mathbf{E}$  ou de  $\mathbf{H}$  que será perpendicular à interface.

Vamos analisar primeiramente a incidência normal ( $\theta_i = 0$ ), ilustrado na Figura 8.11, e podemos escrever

Figure 8.11: Interface plana em  $z = 0$ . Incidência normal.

os campos na forma abaixo:

$$\mathbf{E}_i = E_0 \exp [i(\omega t - k_1 z)] \hat{\mathbf{a}}_x \quad (8.139)$$

$$\mathbf{H}_i = \frac{E_0}{Z_1} \exp [i(\omega t - k_1 z)] \hat{\mathbf{a}}_y \quad (8.140)$$

$$\mathbf{E}_r = r E_0 \exp [i(\omega t + k_1 z)] \hat{\mathbf{a}}_x \quad (8.141)$$

$$\mathbf{H}_r = -r \frac{E_0}{Z_1} \exp [i(\omega t + k_1 z)] \hat{\mathbf{a}}_y \quad (8.142)$$

$$\mathbf{E}_t = \tau E_0 \exp [i(\omega t - k_2 z)] \hat{\mathbf{a}}_x \quad (8.143)$$

$$\mathbf{H}_t = \tau \frac{E_0}{Z_2} \exp [i(\omega t - k_2 z)] \hat{\mathbf{a}}_y \quad (8.144)$$

Observemos que a frequência  $\omega$  não deve mudar ao passarmos de um lado a outro da interface, e

$$k_1 = \omega \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}, \quad Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \quad (8.145)$$

$$k_2 = \omega \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}, \quad Z_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \quad (8.146)$$

Podemos escrever para o meio 1 e 2 os campos totais:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r = E_0 [e^{-ik_1 z} + r e^{ik_1 z}] e^{i\omega t} \hat{\mathbf{a}}_x \quad (8.147)$$

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_r = E_0 [e^{-ik_1 z} - r e^{ik_1 z}] e^{i\omega t} \hat{\mathbf{a}}_y \quad (8.148)$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_t = \tau E_0 \exp [i(\omega t - k_2 z)] \hat{\mathbf{a}}_x \quad (8.149)$$

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_t = \tau \frac{E_0}{Z_2} \exp [i(\omega t - k_2 z)] \hat{\mathbf{a}}_y \quad (8.150)$$

Para a interface colocada no plano  $z = 0$ , devemos impor a continuidade aos campos, que são puramente tangenciais, então:

$$E_{1x}(z = 0) = E_{2x}(z = 0) ,$$

$$H_{1x}(z = 0) = H_{2x}(z = 0) ,$$

cujo resultado é o sistema de equações abaixo:

$$\begin{aligned} 1 + r &= \tau , \\ \frac{1}{Z_1}(1 - r) &= \frac{1}{Z_2}\tau , \end{aligned}$$

de onde tiramos:

$$r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} , \quad (8.151)$$

$$\tau = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} . \quad (8.152)$$

Em geral, para meios ópticos ou não magnéticos, podemos escrever o índice de refração na forma  $\sqrt{\epsilon_c} = n$  e então é fácil mostrar que;

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} , \quad (8.153)$$

$$\tau = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} . \quad (8.154)$$

Os parâmetros  $r$  e  $\tau$  são as amplitudes de reflexão e transmissão dos campos, no entanto, é conveniente tratar da potência refletida e transmitida. Do vetor de Poynting sabemos que a potência é proporcional ao quadrado dos campos e por isso podemos escrever:

$$R = \frac{|\mathbf{E}_r|^2}{|\mathbf{E}_i|^2} = \left| \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right|^2 = \left| \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right|^2 , \quad (8.155)$$

onde o coeficiente  $R$  é a razão entre a potência refletida e a incidente e é dito refletividade.

A densidade de potência transmitida deve ser escrita na forma:

$$S_t = \frac{1}{Z_2} |\tau|^2 |E_0|^2 ,$$

ao passo que o Poynting incidente é dado por:

$$S_i = \frac{1}{Z_2} |E_0|^2 ,$$

e por isso definimos o coeficiente de transmissividade dado por:

$$T = \frac{S_t}{S_i} = \frac{Z_1}{Z_2} |\tau|^2 , \quad (8.156)$$

e é fácil mostrar que:

$$R + T = 1 , \quad (8.157)$$

o que reflete apenas a conservação da potência na interface.

### 8.5.2 Incidência Oblíqua

É importante definir de forma geral o conceito de Refletividade: é a razão entre a densidade de potência transportada pela onda refletida e a densidade de potência da onda incidente na interface:

$$R = \frac{S_{refl}}{S_{inc}} = \frac{|\mathbf{E}_r|}{|\mathbf{E}_i|} = |r|^2 , \quad (8.158)$$

onde o parâmetro  $r$  é denominado amplitude de reflexão e  $R$  refletividade.

Definição: **Plano de Incidência** é o plano formado pelo vetor unitário normal à interface  $\hat{\mathbf{n}}_1$  e o vetor de onda incidente  $\mathbf{k}_i = k_1 \hat{\mathbf{n}}_i$ . No nosso caso, ilustrado na Figura anterior, é o plano  $(x, z)$ .

Para o caso da incidência oblíqua, se a onda tiver polarização arbitrária podemos decompor em dois estados:

⇒ Campo  $\mathbf{E}$  paralelo ao plano de incidência ( ou  $\mathbf{H}$  perpendicular ao plano de incidência)

⇒ Campo  $\mathbf{E}$  perpendicular ao plano de incidência (ou  $\mathbf{H}$  paralelo ao plano de incidência)

A amplitude de reflexão  $r$  será dependente da polarização, conforme veremos. Para meios comuns  $R \leq 1$  em em interfaces dielétrico/condutor  $R \approx 1$ .

- *Campo  $\mathbf{E}$  paralelo ao plano de incidência*

Para este caso o campo elétrico encontra-se no plano  $(x, z)$ , conforme mostrado na Figura 8.12.

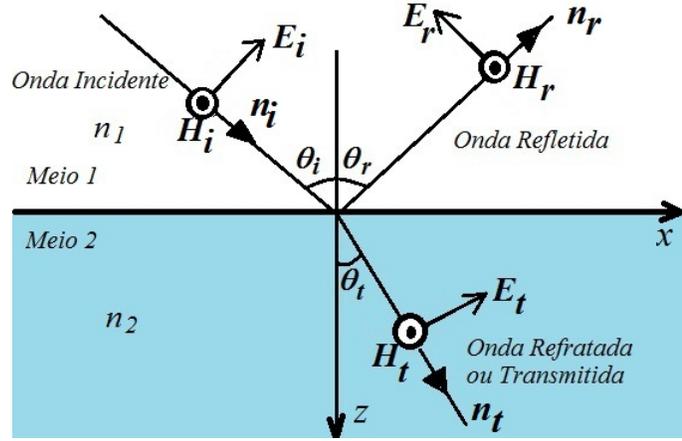


Figure 8.12: Interface plana em  $z = 0$ .  $\mathbf{E}$  paralelo ao plano  $(x, z)$ .

e portanto possui uma componente que é perpendicular à interface. Podemos escrever para os vetores unitários de incidência, reflexão e transmissão, as seguintes expressões:

$$\hat{\mathbf{n}}_i = \sin \theta_i \hat{\mathbf{a}}_x + \cos \theta_i \hat{\mathbf{a}}_z, \quad (8.159)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_r = \sin \theta_r \hat{\mathbf{a}}_x - \cos \theta_r \hat{\mathbf{a}}_z, \quad (8.160)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_t = \sin \theta_t \hat{\mathbf{a}}_x + \cos \theta_t \hat{\mathbf{a}}_z. \quad (8.161)$$

Como os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  são ortogonais a  $\mathbf{n}$  e das equações de Maxwell temos:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E} &= 0, \\ \frac{1}{Z} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} &= \mathbf{H}, \end{aligned}$$

podemos escrever para os campos

$$\mathbf{E}_i = E_0 (\cos \theta_i \hat{\mathbf{a}}_x - \sin \theta_i \hat{\mathbf{a}}_z) e^{-ik_1(\sin \theta_i x + \cos \theta_i z)}, \quad (8.162)$$

$$\mathbf{H}_i = \frac{E_0}{Z_1} \hat{\mathbf{a}}_y e^{-ik_1(\sin \theta_i x + \cos \theta_i z)}, \quad (8.163)$$

$$\mathbf{E}_r = r E_0 (-\cos \theta_r \hat{\mathbf{a}}_x - \sin \theta_r \hat{\mathbf{a}}_z) e^{-ik_1(\sin \theta_r x - \cos \theta_r z)}, \quad (8.164)$$

$$\mathbf{H}_r = r \frac{E_0}{Z_1} \hat{\mathbf{a}}_y e^{-ik_1(\sin \theta_r x - \cos \theta_r z)}, \quad (8.165)$$

$$\mathbf{E}_t = \tau E_0 (\cos \theta_t \hat{\mathbf{a}}_x - \sin \theta_t \hat{\mathbf{a}}_z) e^{-ik_2(\sin \theta_t x + \cos \theta_t z)}, \quad (8.166)$$

$$\mathbf{H}_t = \tau \frac{E_0}{Z_2} \hat{\mathbf{a}}_y e^{-ik_2(\sin \theta_t x + \cos \theta_t z)}. \quad (8.167)$$

Os campos devem ter continuidade na interface, em  $z = 0$  e portanto temos:

$$E_{ix}(z = 0) + E_{rx}(z = 0) = E_{tx}(z = 0) ,$$

$$H_{iy}(z = 0) + H_{ry}(z = 0) = H_{ty}(z = 0) ,$$

o que resulta nas seguintes equações:

$$\begin{aligned} \cos \theta_i e^{-ik_1 \sin \theta_i x} - r e^{-ik_1 \sin \theta_r x} &= \tau \cos \theta_t e^{-ik_2 \sin \theta_t x} , \\ \frac{1}{Z_1} (e^{-ik_1 \sin \theta_i x} + r e^{-ik_1 \sin \theta_r x}) &= \frac{1}{Z_2} \tau e^{-ik_2 \sin \theta_t x} . \end{aligned}$$

Na forma como está, há duas maneiras de solucionar as equações acima. A primeira é manter as exponenciais, e fazer  $r$  e  $t$  dependentes de  $x$ . Esta alternativa é inconcebível fisicamente dado que a interface é homogênea e idêntica em todos os pontos, e dessa maneira não haveria razão para que a amplitude de reflexão e transmissão dependesse de  $x$ , ou seja, estamos dizendo que todos os pontos são equivalentes. De maneira a eliminar a variação em  $x$ , para termos uma solução fisicamente aceitável somente nos resta eliminar as exponenciais, e isso somente pode ser feito se os argumentos de todas elas forem idênticos, ou seja:

$$k_1 \sin \theta_i = k_1 \sin \theta_r = k_2 \sin \theta_t , \quad (8.168)$$

e esta é a forma geral da Lei de Snell, que ainda pode ser escrita como:

$$\sin \theta_i = \sin \theta_r \leftrightarrow \theta_i = \theta_r \quad (8.169)$$

o que significa dizer que o ângulo de reflexão é exatamente igual ao ângulo de incidência, conforme já era sabido da óptica geométrica, empiricamente, e aqui aparece naturalmente como resultado das equações de Maxwell e condições de contorno. Para a relação entre o ângulo de incidência e de transmissão (ou refração), temos:

$$k_1 \sin \theta_i = k_2 \sin \theta_t , \quad (8.170)$$

ou em termos de índices de refração  $n = k/k_0$  onde  $k$  é a constante de propagação em um meio qualquer, dada por

$$k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} ,$$

e  $k_0$  é a constante no vácuo:

$$k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} ,$$

teremos:

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t , \quad (8.171)$$

que é a lei de Snell relacionando o ângulo de refração e de incidência, com os índices de refração dos meios, e que foi deduzida empiricamente. A constante de propagação em um dado meio, pode, portanto ser escrita como:

$$k = k_0 n , \quad (8.172)$$

sendo

$$n = \sqrt{\mu_R \varepsilon_R} , \quad (8.173)$$

e  $\mu_R$  e  $\varepsilon_R$  são a permeabilidade magnética e a permissividade dielétrica relativa do meio em questão. Torna-se claro aqui, que todas as leis da óptica geométrica aparecem naturalmente na teoria de Maxwell, e além disso o índice de refração é totalmente caracterizado conhecendo-se os parâmetros eletromagnéticos do meio.

Para  $r$  e  $t$  o conjunto de equações, utilizando-se a lei de Snell, agora reduz-se a:

$$\begin{aligned}\cos \theta_i(1-r) &= \tau \cos \theta_t, \\ \frac{1}{Z_1}(1+r) &= \frac{1}{Z_2}\tau,\end{aligned}$$

e resolvendo para  $r$  e  $\tau$  temos, no caso de  $\mathbf{E}$  no plano  $(x, z)$ , dito plano de incidência, e somente  $\mathbf{H}$  totalmente tangencial à interface, o seguinte resultado:

$$r = \frac{Z_1 \cos \theta_i - Z_2 \sqrt{1 - \left(\frac{k_1}{k_2} \sin \theta_i\right)^2}}{Z_1 \cos \theta_i + Z_2 \sqrt{1 - \left(\frac{k_1}{k_2} \sin \theta_i\right)^2}}, \quad (8.174)$$

$$\tau = \frac{2Z_2 \cos \theta_i}{Z_1 \cos \theta_i + Z_2 \sqrt{1 - \left(\frac{k_1}{k_2} \sin \theta_i\right)^2}}. \quad (8.175)$$

Estas expressões são válidas para o campo elétrico no plano formado por  $\mathbf{k}_i = k_1 \hat{\mathbf{n}}_i$  e  $\mathbf{k}_t = k_2 \hat{\mathbf{n}}_t$ , que em nossa definição é o plano  $(x, z)$ . Para o caso em que o campo elétrico é totalmente tangencial à interface, ou seja, é perpendicular ao plano  $(x, z)$  a situação se modifica, conforme veremos a seguir.

- *Campo  $\mathbf{H}$  paralelo ao plano de incidência*

Agora é o campo magnético que não é totalmente tangencial à interface, e temos a situação mostrada na Figura 8.13.

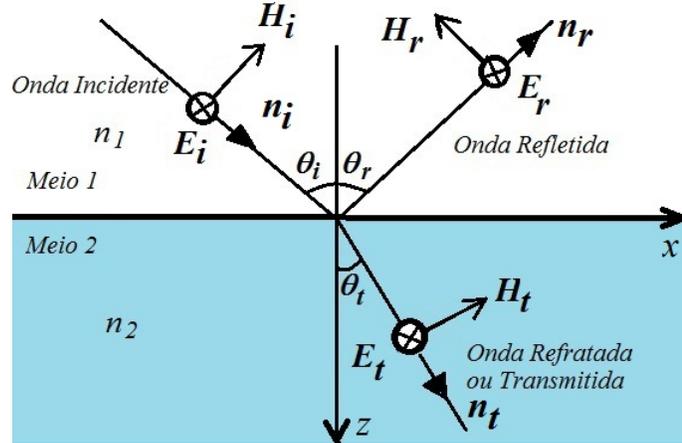


Figure 8.13: Interface plana em  $z = 0$ .  $\mathbf{E}$  perpendicular ao plano  $(x, z)$ .

Podemos escrever para os campos:

$$\mathbf{E}_i = -E_0 \hat{\mathbf{a}}_y e^{-ik_1(\sin \theta_i x + \cos \theta_i z)}, \quad (8.176)$$

$$\mathbf{H}_i = \frac{E_0}{Z_1} (\cos \theta_i \hat{\mathbf{a}}_x - \sin \theta_i \hat{\mathbf{a}}_z) e^{-ik_1(\sin \theta_i x + \cos \theta_i z)}, \quad (8.177)$$

$$\mathbf{E}_r = -r E_0 \hat{\mathbf{a}}_y e^{-ik_1(\sin \theta_r x - \cos \theta_r z)}, \quad (8.178)$$

$$\mathbf{H}_r = r \frac{E_0}{Z_1} (-\cos \theta_r \hat{\mathbf{a}}_x - \sin \theta_r \hat{\mathbf{a}}_z) e^{-ik_1(\sin \theta_r x - \cos \theta_r z)}, \quad (8.179)$$

$$\mathbf{E}_t = -\tau E_0 \hat{\mathbf{a}}_y e^{-ik_2(\sin \theta_t x + \cos \theta_t z)}, \quad (8.180)$$

$$\mathbf{H}_t = \tau \frac{E_0}{Z_2} (\cos \theta_t \hat{\mathbf{a}}_x - \sin \theta_t \hat{\mathbf{a}}_z) e^{-ik_2(\sin \theta_t x + \cos \theta_t z)}. \quad (8.181)$$

Dadas as simetrias entre  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$ , a situação do campo  $\mathbf{H}$  com componente perpendicular à interface corresponde a fazer as modificações:  $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$  e  $\mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{E}$ ,  $\mu \rightarrow \varepsilon$  e  $\varepsilon \rightarrow \mu$ . Fica para o leitor demonstrar que:

$$r = \frac{Z_2 \cos \theta_i - Z_1 \sqrt{1 - \left(\frac{k_1}{k_2} \sin \theta_i\right)^2}}{Z_2 \cos \theta_i + Z_1 \sqrt{1 - \left(\frac{k_1}{k_2} \sin \theta_i\right)^2}}, \quad (8.182)$$

$$\tau = \frac{2Z_2 \cos \theta_i}{Z_2 \cos \theta_i + Z_1 \sqrt{1 - \left(\frac{k_1}{k_2} \sin \theta_i\right)^2}}. \quad (8.183)$$

Para encontrar os resultados acima, novamente é uma condição física que as leis de Snell, (8.168)-(8.171) sejam satisfeitas.

Note que o caráter vetorial das ondas mostra-se claramente aqui, dado que dependendo da orientação vetorial dos campos,  $\mathbf{E}$  com componente perpendicular ou  $\mathbf{H}$  com componente perpendicular à interface, modifica os coeficientes de transmissão e reflexão,  $r$  e  $t$ . Essas características permitem medidas de índice de refração em função da frequência, além disso, dado o caráter vetorial das ondas permite-se através do emprego do fenômeno da reflexão e refração, a polarização de ondas. Para isso vamos definir o ângulo de Brewster.

#### Ângulo de Brewster $\theta_B$

Existe um ângulo de incidência para o qual a onda eletromagnética é totalmente transmitida, ou seja,  $r = 0$ , que é conhecido como ângulo de Brewster, e que só é possível para o caso da polarização paralela. Fazendo  $r = 0$  no caso da polarização paralela obtemos

$$\tan \theta_B = \left(\frac{n_2}{n_1}\right) \quad (8.184)$$

onde  $n_1$  e  $n_2$  são os índices de refração dos meios 1 e 2, respectivamente. Nesse caso ao incidir uma onda com mistura de polarizações, aquela que tiver polarização com campo  $\mathbf{E}$  paralelo ao plano de incidência será totalmente transmitida, restando uma onda refletida totalmente polarizada.

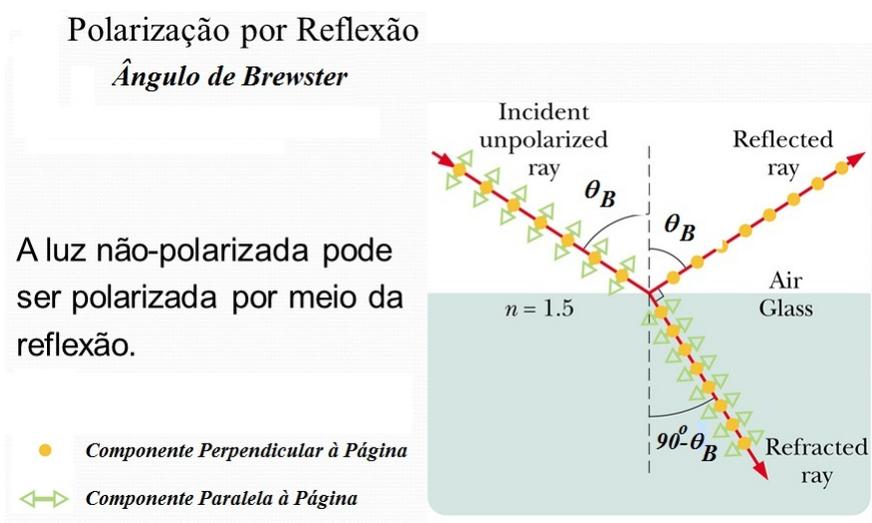


Figure 8.14: Polarização total da onda refletida para o ângulo de Brewster.

Pode-se tentar achar um ângulo de Brewster no caso em que  $\mathbf{H}$  é paralelo ao plano de incidência, mas é fácil mostrar que esse ângulo não existe no caso de interfaces entre dielétricos não-magnéticos. Não existe nenhum

ângulo de incidência para o qual a onda com polarização em que  $\mathbf{E}$  é totalmente tangencial a interface seja totalmente transmitida.

Nas fórmulas obtidas anteriormente podemos colocar tudo em função dos índices de refração  $n_1$  e  $n_2$  dos meios:

$$\begin{aligned} k_1 &= k_0 n_1 & k_2 &= k_0 n_2 , \\ Z_1 &= \frac{Z_0}{n_1} & Z_2 &= \frac{Z_0}{n_2} , \end{aligned}$$

de forma que para o campo Elétrico  $\mathbf{E}$  paralelo ao plano de incidência (também chamada polarização vertical) temos:

$$R_{\parallel} = \left| \frac{n_2 \cos \theta - n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta\right)^2}}{n_2 \cos \theta + n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta\right)^2}} \right|^2 , \quad (8.185)$$

enquanto que se o campo Elétrico  $\mathbf{E}$  é perpendicular ao plano de incidência (também chamada polarização horizontal), temos

$$R_{\perp} = \left| \frac{n_1 \cos \theta - n_2 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta\right)^2}}{n_1 \cos \theta + n_2 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta\right)^2}} \right|^2 . \quad (8.186)$$

**Ângulo Crítico**  $\theta_i = \theta_c$

O ângulo crítico é aquele para o qual ocorre reflexão interna total. e  $R = |r|^2 \rightarrow 1$ . Da lei de Snell:

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t ,$$

o ângulo crítico ocorre quando o ângulo da onda refratada tende para  $90^\circ$ . Nesse caso  $\sin \theta_t = 1$  e tem-se,  $\theta$ :

$$n_1 \sin \theta_c = n_2 \Rightarrow \sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1}$$

Somente ocorre se  $n_2 < n_1$  e nesse caso pode ocorrer o guiamento da luz por reflexão interna total, princípio de funcionamento da fibra óptica, por exemplo.

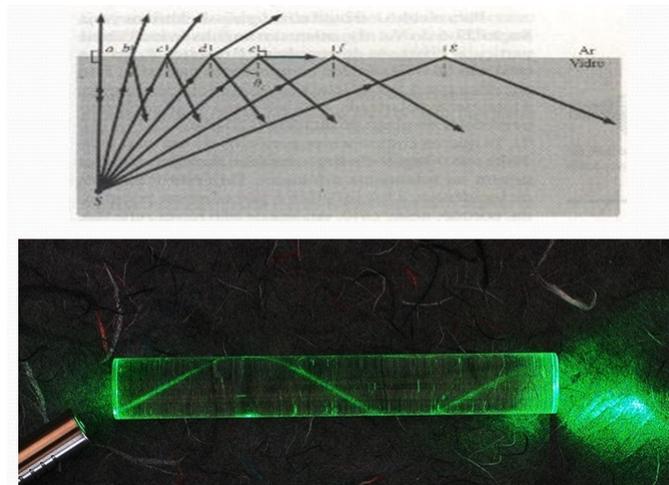


Figure 8.15: Reflexão interna total e a ideia por trás da fibra óptica.

Os gráficos de refletividade em função do ângulo de incidência para duas situações, uma em que não há ângulo crítico ( $n_1 < n_2$ ) e outra em que existe ângulo crítico ( $n_1 > n_2$ ) em interface entre dois meios são ilustrados nas Figuras 8.16 e 8.17, para ambas as polarizações do campo da onda incidente.

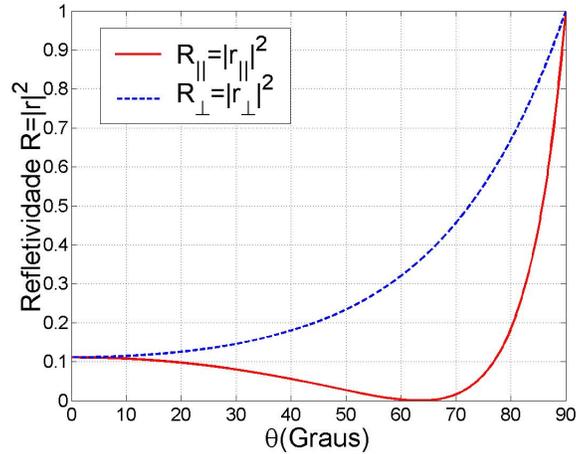


Figure 8.16: Refletividade  $R(\theta) = |r(\theta)|^2$  com  $n_1 = 1$  e  $n_2 = 2$ , para ambas as polarizações vertical e horizontal. Note que para uma das polarizações, no caso a paralela,  $R_{\parallel} = 0$ , no ângulo de Brewster.

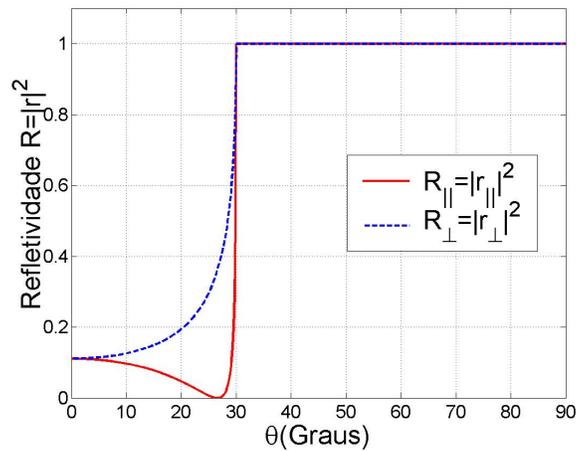


Figure 8.17: Refletividade  $R(\theta) = |r(\theta)|^2$  com  $n_1 = 2$  e  $n_2 = 1$ , para ambas as polarizações. Para a polarização paralela  $R_{\parallel} = 0$ , no ângulo de Brewster. Aqui  $n_1 > n_2$  e ocorre ângulo crítico,  $\theta_c = 30^\circ$ .

## 8.6 Um Exemplo de Propagação em Meios Anisotrópicos

Vamos aqui descrever a propagação de ondas eletromagnéticas em um meio giromagnético de maneira simplificada. Considere as transformadas de Fourier generalizadas:

$$f(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int F(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d^3 \mathbf{k} d\omega, \quad (8.187)$$

$$F(\mathbf{k}, \omega) = \int f(\mathbf{r}, t) e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d^3 \mathbf{r} dt, \quad (8.188)$$

onde  $f(F)$  podem ser escalares, vetores, tensores, etc. Aplicando as propriedades de transformadas

$$\nabla \leftrightarrow -i\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow i\omega$$

nas equações de Maxwell temos:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho &\rightarrow -i\mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = \rho , \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 &\rightarrow -i\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 , \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &\rightarrow -i\mathbf{k} \times \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{B} , \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &\rightarrow -i\mathbf{k} \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + i\omega \mathbf{D} ,\end{aligned}$$

e podemos escrever então:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = i\rho , \quad (8.189)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 , \quad (8.190)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B} , \quad (8.191)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = i\mathbf{J} - \omega \mathbf{D} . \quad (8.192)$$

Assumindo que

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H}$$

$$\rho = 0 \text{ e } \mathbf{J} = 0$$

temos finalmente:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 , \quad (8.193)$$

$$\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H} = 0 , \quad (8.194)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H} , \quad (8.195)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \varepsilon_0 \mathbf{E} . \quad (8.196)$$

Combinando as equações (8.195) e (8.196), multiplicando vetorialmente esta última por  $\mathbf{k}$  nos fornece a seguinte equação:

$$k^2 \mathbf{H} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{H}) \mathbf{k} = \omega^2 \varepsilon_0 \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H} , \quad (8.197)$$

que deve ser resolvida simultaneamente com (8.193)-(8.196), utilizando ainda o resultado (5.97) para o tensor de permeabilidade magnética.

Embora a solução geral seja bastante complexa, podemos obter algumas soluções particulares de modo relativamente simples. Primeiro podemos avaliar o vetor  $\mathbf{B}$ . Note que

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H} = \mu_0 \begin{bmatrix} \mu & -i\eta & 0 \\ i\eta & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix}$$

Note que  $H_x$  e  $H_y$  acabam sendo misturados, enquanto que  $H_z$  não se acopla aos outros dois. Podemos então procurar uma forma diagonal para a equação acima, ou seja, encontrar os auto-vetores e auto-valores da equação para  $\mathbf{B}$ :

$$|\boldsymbol{\mu} - \lambda \mathbf{1}| = 0 , \quad (8.198)$$

$$\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H}_i = \lambda \mathbf{H}_i , \quad (8.199)$$

sendo a solução para  $\lambda$  os autovalores,  $\mathbf{1}$  é a matriz identidade e  $\mathbf{H}_i$  um dos auto-vetores da equação. Há três auto-vetores, pois a matriz  $\boldsymbol{\mu}$  é uma matriz  $3 \times 3$ . Obtém-se facilmente:

$$\lambda_+ = \mu_0(\mu + \eta) \Rightarrow \mathbf{H}_0^+ = H_0(\hat{\mathbf{a}}_x - i\hat{\mathbf{a}}_y), \quad (8.200)$$

$$\lambda_- = \mu_0(\mu - \eta) \Rightarrow \mathbf{H}_0^- = H_0(\hat{\mathbf{a}}_x + i\hat{\mathbf{a}}_y), \quad (8.201)$$

$$\lambda_z = \mu_0 \Rightarrow \mathbf{H}_0^z = H_0\hat{\mathbf{a}}_z, \quad (8.202)$$

sendo a solução para  $\mathbf{H}$  na forma

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}.$$

Pela forma da equação (8.197), podemos escolher ainda, o caso particular mais simples, no qual  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0$ . Nesse caso:

→ se  $B_z = 0$  então no caso mais simples  $\mathbf{H} = (H_x, H_y, 0)$  e podemos fazer  $\mathbf{k}_\perp = (k_x, k_y) = 0$  e  $\mathbf{k} = k_z \hat{\mathbf{a}}_z$ ;

→ se  $\mathbf{B}_\perp = 0$  no caso mais simples  $\mathbf{H} = (0, 0, H_z)$  e podemos fazer  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, 0)$ .

A equação (8.197) torna-se simplesmente:

$$k^2 \mathbf{H}_i = \omega^2 \varepsilon_0 \lambda_i \mathbf{H}_i, \quad (8.203)$$

e temos como solução geral três casos, a seguir:

$$\mathbf{H}_+ = H_0(\hat{\mathbf{a}}_x - i\hat{\mathbf{a}}_y) e^{i(\omega t - \beta_+ z)} \quad \text{onde} \quad \beta_+ = k_0 \sqrt{\mu + \eta}, \quad (8.204)$$

$$\mathbf{H}_- = H_0(\hat{\mathbf{a}}_x + i\hat{\mathbf{a}}_y) e^{i(\omega t - \beta_- z)} \quad \text{onde} \quad \beta_- = k_0 \sqrt{\mu - \eta}, \quad (8.205)$$

$$\mathbf{H}_+ = H_0 \hat{\mathbf{a}}_z e^{i(\omega t - \beta_x x - \beta_y y)} \quad \text{onde} \quad \beta = \sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2} = k_0, \quad (8.206)$$

onde  $\beta_i$  correspondem às soluções da equação (8.203) para o valor de  $k$  e  $k_0 = \omega/c = 2\pi/\lambda_0$ . Observe que as soluções (11.6) e (8.205) correspondem a ondas de polarização circular que se propagam paralelas ao campo magnético dc aplicado, enquanto que (8.206) é uma onda de polarização linear como o campo magnético paralelo ao campo magnético dc aplicado mas propagando-se em uma direção perpendicular à direção do campo magnético dc.

### 8.6.1 Efeito de Rotação de Faraday

Consideremos em  $z = 0$  uma onda polarizada na direção  $x$ . Podemos compor um campo de polarização linear através de uma superposição de ondas de polarização circular, ou seja:

$$\mathbf{H}(z = 0, t) = H_0 e^{i\omega t} \hat{\mathbf{a}}_x = \frac{\mathbf{H}_+(0, t) + \mathbf{H}_-(0, t)}{2}. \quad (8.207)$$

Uma vez que as constantes de propagação das ondas de polarização circular direita e esquerda são diferentes, ou seja,  $\beta_+ \neq \beta_-$ , à medida que a onda se propaga a polarização linear na direção  $x$  não será mantida. Senão vejamos quando a onda se propaga a superposição resultante será:

$$\mathbf{H}(z, t) = \frac{\mathbf{H}_+(z, t) + \mathbf{H}_-(z, t)}{2} = \frac{H_0}{2} (\hat{\mathbf{a}}_x - i\hat{\mathbf{a}}_y) e^{i(\omega t - \beta_+ z)} + \frac{H_0}{2} (\hat{\mathbf{a}}_x + i\hat{\mathbf{a}}_y) e^{i(\omega t - \beta_- z)}. \quad (8.208)$$

Podemos definir a constante de fase média  $\beta$  e a diferença de constante de fase  $\delta\beta$ , na forma:

$$\beta = \frac{\beta_+ + \beta_-}{2}, \quad (8.209)$$

$$\delta\beta = \beta_+ - \beta_-, \quad (8.210)$$

para reescrever a equação (8.208) na forma abaixo:

$$\mathbf{H} = H_0 e^{i(\omega t - \beta z)} \left[ \cos\left(\frac{\delta\beta}{2} z\right) \hat{\mathbf{a}}_x - \sin\left(\frac{\delta\beta}{2} z\right) \hat{\mathbf{a}}_y \right]. \quad (8.211)$$

Observe que:

- Em um meio giromagnético (poderia ser giroelétrico ou girotrópico), as ondas de polarização circular tem constantes de propagação diferentes;
- Uma onda de polarização linear é a superposição de ondas de polarização circular e conforme podemos ver da equação (8.211) a polarização rotaciona por um ângulo  $\Delta\phi$  à medida em que a onda se propaga. Esse efeito é conhecido como Rotação de Faraday, sendo utilizado em muitos dispositivos.

O ângulo de rotação é dado por:

$$\Delta\phi = \frac{\delta\beta}{2} z \quad (8.212)$$

ou, em termos de variação:

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta z} = \frac{\delta\beta}{2} \quad (8.213)$$

Substituindo os valores de  $\delta\beta$  temos:

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta z} = -\frac{k_0}{2} [\sqrt{\mu + \eta} - \sqrt{\mu - \eta}].$$

Para o caso particular em que  $\eta \ll \mu$  é fácil demonstrar que:

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta z} = -\frac{k_0\eta}{2},$$

e se utilizamos a definição de  $\eta$  verificamos que:

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta z} = -\frac{k_0}{2} \frac{\omega\mu_0\gamma M_0}{\omega^2 - \omega_0^2}. \quad (8.214)$$

Lembrando que  $k_0 = \omega/c$  temos:

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta z} = -\frac{\mu_0\gamma M_0}{2c} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}. \quad (8.215)$$

Para frequências muito maiores que  $\omega_0$  o valor de  $\Delta\phi/\Delta z$  torna-se uma constante que depende somente da magnetização:

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta z} = -\frac{\mu_0\gamma M_0}{2c}. \quad (8.216)$$

Obviamente em um meio real há perdas e o fator  $\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}$  deve ser substituído por uma função adequada da frequência.

Medidas de desvio da polarização ou rotação da polarização linear de uma onda que propaga-se em um meio magnetizado permitem uma medida direta da magnetização do meio.

Qualquer meio sujeito à um campo magnético aplicado terá através da condutividade ou analogamente do tensor de permissividade dielétrica uma rotação de Faraday equivalente. É possível mostrar que nesse caso  $\Delta\phi/\Delta z \propto \omega$  e é uma função crescente com a frequência. Portanto em muitos casos a medida de  $M_0$  deve-se ao efeito de Faraday provocado pela permissividade dielétrica e não pelo tensor de permeabilidade. Em altas frequências o meio pode tornar-se giroelétrico, portanto.

De qualquer forma o efeito Faraday no qual a polarização da onda transmitida em um meio magnetizado rotaciona é utilizado na medição de propriedades magnéticas do meio. Além disso é utilizado em muitos dispositivos de microondas não-recíprocos que utilizam ferrites, como circuladores, isoladores, etc.

### 8.6.2 Efeito Kerr magneto-óptico

É o análogo ao efeito de Faraday, porém medindo-se a onda refletida por um meio magnetizado. Se a onda incidente tem polarização linear a onda refletida terá sua polarização rotacionada em relação à onda incidente, cujo valor de magnitude e direção dependerão diretamente da magnetização do meio refletor. O efeito Kerr é bastante utilizado na medida de magnetização superficial dos meios. Em inglês usa-se a sigla MOKE (Magneto-Optic Kerr Effect) para designar medidas do efeito Kerr magneto-óptico, ou ainda SMOKE (Superficial MOKE).

## 8.7 A Equação de Ondas em Meio Dielétrico Isotrópico e Não-Homogêneo

Considerando aqui um meio dielétrico isotrópico e não-magnético que satisfaz, no domínio da frequência, a seguinte relação:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_c(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) , \quad (8.217)$$

podemos expressar as equações de Maxwell na seguinte forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\mathbf{E} \cdot \nabla(\ln \varepsilon_c), \quad (8.218)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 , \quad (8.219)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu_0\mathbf{H} , \quad (8.220)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = i\omega\varepsilon_c\mathbf{E} . \quad (8.221)$$

Após aplicarmos o rotacional à equação (8.220) e fazermos uso da equação (8.221), concomitantemente com a identidade  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$ , onde  $\nabla \cdot \mathbf{E}$  é dado por (8.218), obtemos a equação de ondas de Helmholtz para o campo elétrico, na forma abaixo:

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{E} = -\nabla[\mathbf{E} \cdot \nabla(\ln \varepsilon_c)] , \quad (8.222)$$

onde  $k^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_c$ ,  $k$  é a constante de propagação. Aqui já temos um diferencial em relação à equação de ondas que seria obtida em um meio homogêneo, em que  $\varepsilon_c$  não depende da posição. Para meios não-homogêneos o termo do lado direito produz efeitos não triviais devido ao acoplamento entre as diversas componentes dos campos eletromagnéticos, sobretudo na polarização dos campos. Para compreender melhor o que acontece, consideremos uma situação muito simples, em que a permissividade dielétrica depende somente da coordenada  $z$ , isto é,  $\varepsilon_c = \varepsilon_c(z)$ . Um exemplo concreto dessa situação seria a atmosfera terrestre, onde o eixo  $z$  é o eixo vertical e representa a altitude. A rarefação do ar atmosférico com o aumento da altitude faz com que o índice de refração  $n(z)$  e a permissividade dielétrica  $\varepsilon(z)$  diminuam. Em linguagem de componentes, a equação de ondas (8.222) nesse caso toma a forma que segue:

$$(\nabla^2 + k^2)E_x = -\frac{\partial E_z}{\partial x} \frac{d(\ln \varepsilon_c)}{dz} , \quad (8.223)$$

$$(\nabla^2 + k^2)E_y = -\frac{\partial E_z}{\partial y} \frac{d(\ln \varepsilon_c)}{dz} , \quad (8.224)$$

$$(\nabla^2 + k^2)E_z = -\frac{\partial}{\partial z} \left( E_z \frac{d(\ln \varepsilon_c)}{dz} \right) . \quad (8.225)$$

Pode-se ver facilmente que a componente de campo  $E_z$  acopla-se com as componentes  $E_x$  e  $E_y$  através da derivada da permissividade dielétrica em relação à variável  $z$ . O desacoplamento ocorrerá somente se  $E_z = 0$ , correspondendo a um caso muito particular de solução.

## 8.8 Referências deste Capítulo

- [8.1] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd Edition John Wiley and Sons, 1998.
- [8.2] Paul S. Epstein, “Theory of Wave Propagation in a Gyromagnetic Medium”, *Reviews of Modern Physics* **28**(1956), pp 3-17.
- [8.3] J.C. Maxwell, *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*, 1864, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 155: 459-512.
- [8.4] Matthew N.O. Sadiku, *Elementos do Eletromagnetismo* (Ed. Bookman, Porto Alegre, 5a. Ed, 2005).
- [8.5] John R. Reitz, Frederick J. Milford, Robert W. Christy, *Fundamentos da Teoria Eletromagnética* (Ed. Campus).
- [8.6] William H. Hayt, *Eletromagnetismo* (LTC, 6a Ed.).

## 8.9 Problemas Propostos

- 1) A partir das Equações de Maxwell na forma diferencial, escreva as equações de Maxwell no vácuo e obtenha a equação de ondas no espaço livre(vácuo). A resposta deverá ser:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{E} = 0$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{H} = 0$$

lembrando que  $\mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2$ .

- 2) São dadas as equações de Maxwell macroscópicas abaixo:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

Considerando a solução geral de onda plana uniforme  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$ , onde  $\mathbf{E}_0$  é um vetor complexo constante,  $\omega$  é a frequência angular da onda e  $\mathbf{k}$  é o vetor de onda na direção de propagação da onda:

- a) Demonstre que  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$  satisfaz a equação de ondas homogênea

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{E}(x, y, z, t) = 0$$

desde que  $v^2 k^2 = \omega^2$ ,  $k^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$ .

- b) Demonstre que para as ondas planas uniformes no vácuo as equações de Maxwell reduzem-se a um conjunto algébrico:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad , \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0 \quad , \quad \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mu_0 \mathbf{H} \quad , \quad \mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

- c) Discuta as relações entre  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  para a onda plana uniforme.

Dicas: Os seguintes resultados são úteis:

$$\nabla(e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}) = -i\mathbf{k}e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial t}(e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}) = i\omega e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{a}) = \nabla(f) \cdot \mathbf{a} + f\nabla \cdot \mathbf{a} \quad , \quad \nabla \times (f\mathbf{a}) = \nabla(f) \times \mathbf{a} + f\nabla \times \mathbf{a}$$

onde  $f$  é uma função escalar e  $\mathbf{a}$  uma função vetorial. Além disso, para três vetores quaisquer temos:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

3) Seja uma onda eletromagnética plana e uniforme no vácuo cujo vetor campo elétrico seja dado por:

$$\mathbf{E} = E_0 \left( \sqrt{3}\hat{\mathbf{a}}_x - \hat{\mathbf{a}}_z \right) \exp \left\{ i \left[ \omega t - 6283 \left( \frac{\sqrt{3}}{2}z + \frac{1}{2}x \right) \right] \right\}$$

sendo  $E_0 = 100\text{mV/m}$ ,  $t$  dado em segundos e  $(x, y, z)$  em metros. Determine:

- o comprimento de ondas  $\lambda_0$  e a frequência  $f = \omega/(2\pi)$ .
- a direção de propagação desta onda,  $\hat{\mathbf{n}}$ . Qual o ângulo formado entre vetor unitário  $\hat{\mathbf{n}}$  e o eixo  $z$ ?
- o campo magnético  $\mathbf{H}$  e o seu valor em módulo,  $H_0$ .
- o valor médio do vetor de Poynting dessa onda.

4) Superposição de ondas e Interferência: Duas ondas monocromáticas de frequência  $\omega$  se propagam no vácuo, com campo elétrico  $\mathbf{E}_1$  e  $\mathbf{E}_2$  de mesma amplitude  $E_0$  e polarizados em  $+y$  conforme ilustra a Figura 1. Os vetores de onda  $\mathbf{k}_1$  e  $\mathbf{k}_2$  formam um ângulo  $\theta = 30^\circ$  com o eixo  $z$  e obviamente tem mesmo

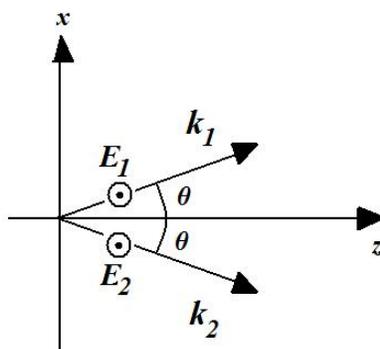


Figure 8.18: Duas ondas planas uniformes de mesma frequência propagando-se no vácuo nas direções de  $\mathbf{k}_1$  e  $\mathbf{k}_2$ .

módulo  $|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2| = k$ . Determine:

- Os vetores unitários  $\hat{\mathbf{n}}_1$  e  $\hat{\mathbf{n}}_2$  que indicam a direção de propagação de cada uma das ondas;
  - O campo elétrico resultante da superposição das duas ondas,  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ .
  - O campo magnético  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$  resultante da superposição.
  - O valor médio do vetor de Poynting.
- 5) Dado o campo magnético no vácuo  $H_x = H_0 \cos(\omega t - kz)$ ,  $H_y = H_0 \sin(\omega t - kz)$ ,  $H_z = 0$ , encontre a partir das equações de Maxwell o campo elétrico  $\mathbf{E}$ , e calcule o fluxo de potência dado por  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ . Encontre a média do vetor de Poynting em um período de oscilação temporal, ou seja:

$$\mathbf{S}_{med} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

onde  $T = 1/f = 2\pi/\omega$ .

- 6) a) Para uma onda eletromagnética no vácuo a velocidade de propagação é  $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ . Dadas as frequências  $f = 60 \text{ Hz}$ ,  $1 \text{ kHz}$ ,  $1 \text{ MHz}$ ,  $1 \text{ GHz}$ ,  $10^{14} \text{ Hz}$  encontre os comprimentos de onda respectivos. Dado  $\lambda = 632 \text{ nm}$  (laser vermelho), encontre o valor de  $k$ ,  $\omega$  e  $f$ .
- b) Sabendo que em óptica define-se índice de refração de um meio como a razão entre a velocidade da luz no vácuo  $c_0$  e a velocidade da luz naquele meio  $c$ , ou seja  $n = c_0/c$ , encontre a velocidade da onda nos meios com índice de refração  $n = 2.2$ ,  $n = 1.5$ ,  $n = 9$ , e sabendo-se que a frequência não deve mudar de um meio para outro, encontre os comprimentos de onda nesses meios, para uma frequência  $f = 10^{11} \text{ Hz}$ . O que acontece com o comprimento de ondas?
- 7) Discuta de forma clara o que é um meio linear, isotrópico e homogêneo, dando exemplos e contra-exemplos em cada caso. Mostre que para um meio macroscopicamente neutro, linear, isotrópico, não-magnético  $\mu = \mu_0$  porém não-homogêneo na permissividade dielétrica temos

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{\varepsilon} \nabla(\varepsilon) \cdot \mathbf{E}$$

Obtenha a equação de ondas para o campo elétrico nesse caso. Cite exemplos práticos para um meio de permissividade dielétrica não-homogênea.

- 8) Obtenha uma onda cujo vetor de Poynting se propaga formando um ângulo de  $30^\circ$  com o eixo  $z$ , sendo contido no plano  $(x, z)$  para todo o espaço, e propaga-se no sentido positivo dos eixos  $x$  e  $z$ . Sabe-se que o campo elétrico tem polarização linear na direção  $\hat{\mathbf{a}}_y$ . A frequência desta onda é de  $10^8 \text{ Hz}$  (faixa de FM), o módulo do campo elétrico vale  $10 \text{ mV/m}$  e o meio em questão é não magnético, ou seja  $\mu_r = 1$ , dielétrico cujas perdas podem ser desprezadas,  $\varepsilon_r = 2.145$  e  $\sigma \approx 0$ . Calcule o comprimento de ondas no meio em questão. Encontre o vetor campo magnético e a intensidade do vetor de Poynting.
- 9) Sejam dados a intensidade e direção do campo elétrico  $\mathbf{E}_0 = (50 \text{ mV/m}) \hat{\mathbf{a}}_x$  em  $z = 0$  e a direção de propagação de uma onda eletromagnética de frequência angular  $\omega = 600 \times 10^6 \text{ rad/s}$ ,  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{a}}_z$ , para um meio material não magnético com condutividade  $\sigma = 10^{-6} \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$  e o índice de refração  $n = \sqrt{\varepsilon_r} = 1.125$  (ar com poluição, humidade por exemplo) encontre a frequência temporal  $f$  da onda, o comprimento de ondas  $\lambda$  (no vácuo e no meio) e a impedância do meio. É aplicável a aproximação de baixas perdas nesse caso. Determine o valor da constante de atenuação. Encontre o valor de intensidade do vetor de Poynting em  $z = 0$  e a uma distância  $z = 10 \text{ km}$ . Agora supondo uma superfície perfeitamente absorvedora e orientada  $\mathbf{A} = (0.25 \text{ m}^2)(\cos(30^\circ)\hat{\mathbf{a}}_x + \sin(30^\circ)\hat{\mathbf{a}}_z)$ , qual é a potência média absorvida por essa superfície em  $z = 10 \text{ km}$ ?
- 10) Encontre a razão entre o módulo da corrente de condução  $\sigma E$  e da corrente de deslocamento  $\omega \varepsilon E$  para as frequências  $60 \text{ Hz}$ ,  $10 \text{ MHz}$ ,  $10 \text{ GHz}$ , para um campo elétrico de intensidade  $E$  nos seguintes meios:
- a) Vidro dielétrico de poucas perdas  $\varepsilon = 4.1\varepsilon_0$  e  $\sigma = 10^{-12} \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ ;
- b) Bom condutor, Cobre  $\varepsilon = \varepsilon_0$  e  $\sigma = 5.80 \times 10^7 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ .
- O que você nota de diferença básica entre condutores e dielétricos?
- 11) Dadas as equações de Maxwell:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

deduza a equação de ondas para o campo elétrico  $\mathbf{E}$  em um meio dielétrico macroscopicamente neutro ( $\rho = 0$ ) e com condutividade nula, ou seja  $\mathbf{J} = 0$ . Assuma que o meio é não-magnético,  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  mas  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ , onde  $\mathbf{P}$  é a polarização dielétrica do meio.

- 12) Uma onda plana em um meio não-magnético sem perdas tem campo elétrico dado por:

$$\mathbf{E} = 77 \cos(10^9 t - 3x + 4z) \hat{\mathbf{a}}_y \text{ mV/m},$$

onde  $t$  é dado em segundos e  $z$  é dado em metros. Encontre:

- a representação complexa de  $\mathbf{E}$ , a polarização e a direção de propagação da onda;
  - a frequência  $f$ , o comprimento de ondas no vácuo ( $\lambda_0$ ) e no meio em questão ( $\lambda$ ), bem como a permissividade dielétrica relativa,  $\epsilon_r$ ;
  - o campo  $\mathbf{H}$ , tanto na forma complexa quanto no domínio temporal.
  - o vetor de Poynting médio,  $\mathbf{S}_{med}$ .
- 13) A realização mais simplista de um guia de ondas consiste de dois planos metálicos paralelos colocados em  $x = 0$  e  $x = a$ . As ondas eletromagnéticas ficam então confinadas na região contida entre esses planos,  $0 \leq x \leq a$ . Uma forma de entender o comportamento do mesmo é supor que a onda resultante é a superposição de duas ondas planas uniformes, na forma abaixo:

$$\mathbf{E}_1 = A e^{i(\omega t - k_x x - k_z z)} \hat{\mathbf{a}}_y$$

$$\mathbf{E}_2 = B e^{i(\omega t + k_x x - k_z z)} \hat{\mathbf{a}}_y$$

Pelas condições de contorno, sabemos que as componentes tangenciais do campo elétrico total  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$  (nesse caso a componente  $E_y$  total) nas superfícies metálicas colocadas em  $x = 0$  e  $x = a$  deve se anular.

- Determine a relação entre as constantes  $A$  e  $B$  para que  $E_y(x = 0) = 0$  em  $\forall(t, z)$ . Escreva o campo elétrico resultante  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$  e diga se esse campo resultante é também uma onda plana uniforme. Justifique.
  - Tendo em mãos o resultado anterior, faça  $E_y(x = a) = 0$  e obtenha os possíveis valores de  $k_x$ . O que se observa para  $k_x$ ?
  - Determine o campo magnético resultante da superposição das ondas,  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$ .
  - Determine a densidade de potência média transportada por essa onda,  $\mathbf{S}_{med}$ .
- 14) Uma onda eletromagnética no espaço livre é descrita pelo campo elétrico na forma abaixo:

$$\mathbf{E} = E_0 \cos(k_x x) \exp[i(\omega t - k_z z)] \hat{\mathbf{a}}_y$$

sendo  $k^2 = k_x^2 + k_z^2$ ,  $E_0$ ,  $k_x$  e  $k_z$  puramente reais.

- Represente essa onda como superposição de duas ondas planas uniformes
  - Encontre a expressão do campo magnético  $\mathbf{H}$  para essa onda
  - Determine o valor médio do vetor de Poynting,  $\mathbf{S}_{med}$ . Qual a direção de propagação do fluxo de potência médio para essa onda?
- 15) Considere a incidência de uma onda eletromagnética plana e uniforme em uma interface entre dois meios dielétricos ideais de índices de refração  $n_1 = 1$  e  $n_2 = 1.5$ , com ângulo de incidência de  $\theta_i = 56,31^\circ$ . Se o plano de incidência é o plano  $(x, z)$  e o campo elétrico da onda incidente é dado por:

$$\mathbf{E}_{inc} = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\cos \theta_i \hat{\mathbf{a}}_x - \sin \theta_i \hat{\mathbf{a}}_z) - \hat{\mathbf{a}}_y] \exp[i(\omega t - kz \cos \theta_i - kx \sin \theta_i)]$$

determine:

- o ângulo de Brewster,  $\theta_B$ .
- a polarização da onda refletida para o ângulo de incidência  $\theta_i = 56,31^\circ$ .

- c) o valor da refletividade  $R = |r|^2$  (veja no formulário) e o valor percentual da densidade de potência refletida relativa à densidade de potência total incidente.
- 16) Demonstre que na situação de reflexão total entre dois meios dielétricos ideais a amplitude de reflexão é dada na forma  $r = e^{i2\phi}$ , onde  $\phi$  é uma fase que depende do ângulo de incidência e da polarização. Determine  $\phi$  para ambas as polarizações.
- 17) Em uma configuração de interfaces de três camadas com índices de refração  $n_1, n_2$  e  $n_3$  tal que:

$$n(z) = \begin{cases} n_1 & z \leq 0 \\ n_2 & 0 \leq z \leq d \\ n_3 & z \geq d \end{cases}$$

encontre a refletividade  $R = |r|^2$ , no caso da incidência normal  $\theta = 0$ , aplicando as condições de fronteira nas interfaces  $z = 0$  e  $z = d$ , uma vez que a onda incidente vem do meio  $n_1$  e será em geral parcialmente transmitida ao meio 3. Considere as seguintes hipóteses:

Ondas Eletromagnéticas propagando-se no meio 1, incidente e refletida:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i &= E_0 e^{i(\omega t - k_0 n_1 z)} \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{H}_i &= \frac{n_1}{Z_0} E_0 e^{i(\omega t - k_0 n_1 z)} \hat{\mathbf{y}} \\ \mathbf{E}_r &= -r E_0 e^{i(\omega t + k_0 n_1 z)} \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{H}_r &= r \frac{n_1}{Z_0} E_0 e^{i(\omega t + k_0 n_1 z)} \hat{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

Ondas Eletromagnéticas propagando-se no meio 2, composição de uma onda propagante e uma contra-propagante:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2 &= E_0 [A e^{i(\omega t - k_0 n_2 z)} - B e^{i(\omega t + k_0 n_2 z)}] \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{H}_2 &= \frac{n_2}{Z_0} E_0 [A e^{i(\omega t - k_0 n_2 z)} + B e^{i(\omega t + k_0 n_2 z)}] \hat{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

Ondas Eletromagnéticas propagando-se no meio 3, apenas a onda transmitida de 1 para 3:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i &= \tau E_0 e^{i(\omega t - k_0 n_3 z)} \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{H}_i &= \tau \frac{n_3}{Z_0} E_0 e^{i(\omega t - k_0 n_3 z)} \hat{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

O problema consiste em encontrar os coeficientes  $r, \tau, A, B$ . Com a expressão obtida para  $r$  faça o gráfico da refletividade  $R = |r|^2$  em função do comprimento de ondas no vácuo  $\lambda = 2\pi/k_0$   $1\mu\text{m} < \lambda < 3\mu\text{m}$  no Matlab, para  $n_1 = 1, n_3 = 1.5, n_2 = \sqrt{n_1 n_3}, d = \lambda_0/(4n_2)$ , comprimento de ondas de projeto  $\lambda_0 = 1.5\mu\text{m}$ . O que você pode concluir?

## Chapter 9

# Potenciais Eletromagnéticos e Antenas

A determinação dos campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  a partir de potenciais aparece pela primeira vez no estudo da eletrostática e da magnetostática, onde os campos são calculados através das relações abaixo:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi ,$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} ,$$

com a solução formal, na forma integral, sendo dada por:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}'|} ,$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int d^3x' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}'|} .$$

Sabemos que em regime estático as quantidades  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  podem ser determinados independentemente. Mostraremos aqui como calcular os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  no regime variante no tempo. Em particular o campo  $\mathbf{E}$  não pode ser mais calculado tão somente através do gradiente de uma função escalar, haja vista a lei de Faraday, que nos diz que a integral de caminho fechado de  $\mathbf{E}$  é igual ao negativo da taxa de variação do fluxo magnético. É uma conhecida identidade matemática que a integral de caminho fechado para um campo vetorial obtido através do gradiente de uma função escalar é nula e por este motivo o campo elétrico gerado a partir da variação do fluxo magnético no tempo não pode ter natureza eletrostática, ou seja, não pode ser calculado simplesmente através do gradiente de uma função escalar.

Existem várias maneiras de introduzir os potenciais  $\phi$  e  $\mathbf{A}$  e aqui mostraremos que estes tratam-se de artifícios matemáticos para calcular os campos. O potencial  $\phi$  somente pode ser associado à uma diferença de energia potencial no caso da eletrostática.

### 9.1 Os potenciais $\phi$ e $\mathbf{A}$ e condições de calibre

Sejam dadas as equações de Maxwell em regime variante no tempo para o vácuo:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} , \tag{9.1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 , \tag{9.2}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} , \tag{9.3}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} , \tag{9.4}$$

onde  $c^2 = 1/(\mu_0\varepsilon_0)$  é a velocidade da luz no vácuo. Nesse caso precisamos trabalhar apenas com os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$ .

Observando a equação (9.2) e tendo em consideração a identidade vetorial abaixo:

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0 ,$$

podemos propor para o campo magnético  $\mathbf{B}$  que seja calculado a partir da relação abaixo:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} ,$$

e dessa forma a lei de Gauss magnética será automaticamente satisfeita.

A outra equação sem fontes é (9.3). Substituindo  $\mathbf{B}$  por  $\nabla \times \mathbf{A}$  temos:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} .$$

Podemos escrever essa equação subtraindo de  $\mathbf{E}$  o termo eletrostático já que  $\nabla \times \mathbf{E}_e = -\nabla \times \nabla\phi = 0$ , conforme já sabemos e por isso:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \nabla\phi - \nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} .$$

Para que a equação acima seja satisfeita requeremos que:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} .$$

Podemos finalmente escrever então os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  em função dos potenciais:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} , \quad (9.5)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} , \quad (9.6)$$

onde  $\phi$  e  $\mathbf{A}$  são ditos potencial escalar elétrico e potencial vetor magnético, e são medidos em [V] e [V.s/m], respectivamente.

Vamos utilizar as equações de Maxwell com fontes agora, para obter as equações de  $\phi$  e  $\mathbf{A}$  em termos de  $\rho$  e  $\mathbf{J}$ : Substituindo (9.5) e (9.6) em (9.1) e (9.4) temos:

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) , \quad (9.7)$$

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} + \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) . \quad (9.8)$$

Note que as equações de onda acima estão acopladas. Vamos mostrar agora que  $\phi$  e  $\mathbf{A}$  são multiplamente definidos, ou, em outras palavras, existem inúmeros potenciais distintos que levam ao mesmo resultado para os campos, que são os entes físicos mensuráveis de fato. Consideremos a definição abaixo

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} ,$$

e façamos agora a seguinte transformação:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda ,$$

onde  $\Lambda$  é uma função escalar bem comportada qualquer, dependente de  $\mathbf{r}$  e  $t$ . Calculando o campo  $\mathbf{B}'$  resultante do novo potencial  $\mathbf{A}'$  temos:

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla\Lambda = \mathbf{B} ,$$

ou seja  $\mathbf{B}' = \mathbf{B}$ , mesmo sendo os potenciais diferentes entre si. Dado que  $\mathbf{B}$  é calculado a partir do rotacional de  $\mathbf{A}$ , o acréscimo do gradiente de qualquer função escalar ao valor original de  $\mathbf{A}$  não altera o resultado do valor de campo. Para que o campo  $\mathbf{E}$  seja o mesmo, já que trata-se da mesma situação física, temos:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A}' - \nabla\Lambda) ,$$

e reagrupando os termos, podemos redefinir o potencial  $\phi$ :

$$\phi' = \phi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t} .$$

Desse modo para dois conjuntos  $(\phi, \mathbf{A})$  e  $(\phi', \mathbf{A}')$  relacionados pela chamada **transformação de calibre**, dada abaixo:

$$\phi' = \phi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t} , \quad (9.9)$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda , \quad (9.10)$$

onde  $\Lambda(\mathbf{r}, t)$  é uma função escalar, os campos calculados  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  resultam os mesmos. Mostramos portanto que existem uma infinidade de potenciais  $\phi, \mathbf{A}$  que levam aos mesmos campos  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ . Uma vez que a situação física não se altera pela transformação de calibre, dizemos que a teoria é invariante de calibre ou possui **simetria de calibre**.

É conveniente então impor uma condição adicional para fixar  $(\phi, \mathbf{A})$ . Essa escolha é chamada de condição de calibre dos potenciais. Existem dois calibres amplamente utilizados. Um deles em que fixamos  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  é conhecido como calibre de Coulomb ou de Radiação. Utilizaremos aqui um outro mais interessante, conhecido como calibre de Lorentz-Lorentz, na qual a condição a ser satisfeita é:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 , \quad (9.11)$$

de modo que os potenciais satisfaçam as equações de ondas com fontes na forma abaixo:

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} , \quad (9.12)$$

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} . \quad (9.13)$$

O calibre de Lorenz-Lorentz tem a característica peculiar de ser invariante da Relatividade Restrita, ou seja, ele é compatível com a relatividade especial, o que significa dizer que se o calibre de Lorentz é satisfeito em um dado sistema de referência inercial, então também será em qualquer outro sistema de referencia inercial. Essa propriedade não ocorre com o calibre de Coulomb.

## 9.2 Solução Formal das Equações de Ondas dos Potenciais

Por analogia com o regime estático, vamos propor que a solução formal para as equações de ondas dos potenciais (9.12) e (9.13) é dada por:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}', t' = t - R/c)}{R} d^3\mathbf{r}' \quad (9.14)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t' = t - R/c)}{R} d^3\mathbf{r}' \quad (9.15)$$

sendo  $d^3\mathbf{r}' = dV'$  o diferencial de volume e a distância entre um ponto de observação  $\mathbf{r}$  e um ponto qualquer na região da fonte  $\mathbf{r}'$  é dada por:

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}.$$

Esta última equação também pode ser escrita na forma

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}, \quad (9.16)$$

o que será útil adiante. Observando a forma das soluções, é importante perceber que aqui há uma sutil diferença para as soluções estáticas, pois introduzimos o tempo  $t'$  da fonte, que conecta-se com o tempo  $t$  em que os campos são de fato observados através de um termo de atraso  $R/c$ , conforme será discutido agora.

### Interpretação Física da Solução Formal Proposta

Para fins de discussão vamos analisar apenas o potencial escalar elétrico  $\phi(\mathbf{r}, t)$ . Considere a Figura 9.1. O

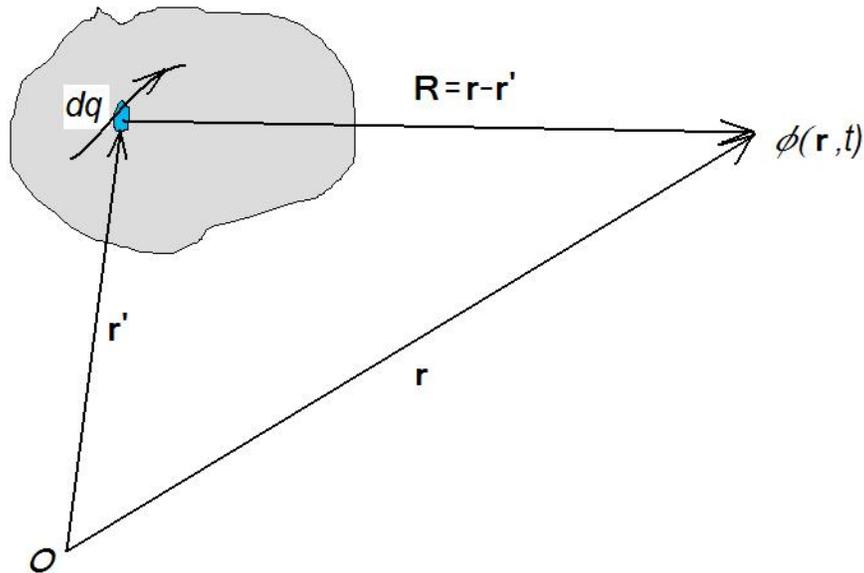


Figure 9.1: A região fonte de volume  $V'$  pode ser dividida em pequenos infinitésimos  $dV'$  contendo uma carga  $dq$  do tipo puntual situada em  $\mathbf{r}'$  no instante  $t'$ , que produz um potencial  $d\phi$  no ponto de observação  $\mathbf{r}$  em um instante  $t$  posterior.

potencial  $\phi(\mathbf{r}, t)$  é gerado por uma distribuição de cargas cuja densidade volumétrica vale  $\rho(\mathbf{r}', t')$ . Uma carga infinitesimal  $dq = \rho(\mathbf{r}', t')dV'$ , contida no interior do volume  $V'$  da fonte está localizada na posição  $\mathbf{r}'$  no instante de tempo local  $t'$ . Um observador na posição  $\mathbf{r}$  irá observar a contribuição infinitesimal de potencial  $d\phi$  gerado por esta carga  $dq$  em um instante de tempo  $t > t'$ . Qualquer alteração na fonte irá aparecer somente depois de um retardo temporal  $\Delta t = t - t'$ . Como já sabemos, a informação eletromagnética se propaga na velocidade  $c$  e a distância entre observador e fonte é  $R$ , de tal forma que:

$$\Delta t = \frac{R}{c},$$

de onde concluímos que:

$$t' = t - \frac{R}{c}, \quad (9.17)$$

ou seja, o infinitésimo de potencial  $d\phi$  gerado na posição  $\mathbf{r}$  no instante de tempo  $t$  é produzido por uma carga  $dq$  na região fonte, que existia na posição  $\mathbf{r}'$  em um tempo anterior  $t' = t - \frac{R}{c}$ . A solução da equação de ondas leva em conta o tempo de retardo da informação poranto. Uma vez que uma carga puntual  $dq$  produz um potencial da forma

$$d\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{dq(\mathbf{r}', t')}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{4\pi\epsilon_0 R} dV' ,$$

pelo princípio de superposição podemos somar todas as contribuições dos infinitésimos de carga  $dq$  que formam a região fonte para obter:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int d\phi(\mathbf{r}, t) = \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{4\pi\epsilon_0 R} dV' ,$$

e utilizando (9.17) obtemos a equação (9.14). *Mutatis mutandis* a mesma argumentação aplica-se para a solução do potencial vetor  $\mathbf{A}$ .

### 9.2.1 Solução de $\phi$ e $\mathbf{A}$ no Calibre de Lorentz pelo Método das Funções de Green

Vamos aqui demonstrar formalmente a solução das equações (??) e (9.13) para os potenciais novamente mostradas abaixo:

$$\begin{aligned} \left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} , \\ \left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} &= -\mu_0 \mathbf{J} . \end{aligned}$$

Como cada componente de  $\mathbf{A}$  e também  $\phi$  obedece a uma equação de ondas escalar vamos escrever uma equação de ondas escalar para uma função  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  com fonte  $f(\mathbf{r}, t)$ , conforme mostrado:

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi(\mathbf{r}, t) = -f(\mathbf{r}, t) .$$

Recordando as propriedades de funções delta de Dirac:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) = f(x_0)$$

e generalizando para as quatro dimensões  $(\mathbf{r}, t)$  podemos escrever:

$$f(\mathbf{r}, t) = \int d^4 r' f(\mathbf{r}', t') \delta^4(x - x') ,$$

onde a notação utilizada é a seguinte:

$$\begin{aligned} \int d^4 x &= \int dx \int dy \int dz \int dt , \\ \delta^4(x - x') &= \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') = \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') \delta(t - t') , \end{aligned}$$

e os limites de integração sempre são  $-\infty$  a  $+\infty$ . Podemos escrever a equação de ondas na forma:

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi(\mathbf{r}, t) = - \int d^4 x' f(\mathbf{r}', t') \delta^4(x - x') ,$$

e nesse caso, a fonte tem coordenadas  $(\mathbf{r}', t')$ , ao passo que a solução deve ser em  $(\mathbf{r}, t)$ . Vamos propor uma solução na forma:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \int d^4 x' f(\mathbf{r}', t') G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') ,$$

e nesse caso, a equação resultante será:

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = -\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') , \quad (9.18)$$

A função  $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$  é chamada função de Green para o problema, e pode ser considerada a resposta do meio material considerado para uma fonte impulsiva no espaço e no tempo. Dessa forma a convolução da função de Green no espaço e no tempo com uma fonte arbitrária qualquer nos dá a solução para a função de ondas  $\Psi$  do problema. Temos agora a tarefa de encontrar essa função de Green  $G$  para o espaço livre, que é o que nos interessa. Tomemos a transformada de Fourier da eq. (9.18), e como resultado temos:

$$\left(\mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) G(\mathbf{k}, \omega) = 1, \quad (9.19)$$

de onde tiramos:

$$G(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{\mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}. \quad (9.20)$$

Agora somente nos resta fazer a transformação de Fourier inversa onde temos:

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp[-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] G(\mathbf{k}, \omega), \quad (9.21)$$

sendo aqui  $\mathbf{r}, t$  entendido como  $\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t'$ . Inserindo a solução encontrada temos:

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{16\pi^4} \int d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp[-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \frac{1}{\mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}, \quad (9.22)$$

ou ainda:

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{16\pi^4} \int d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp[-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \frac{1}{(k - \omega/c)(k + \omega/c)}, \quad (9.23)$$

Devemos inserir um termo infinitesimal  $\zeta$  nos pólos da equação acima de forma a fazer convergir a integral:

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{16\pi^4} \lim_{\zeta \rightarrow 0} \int d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp[-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \frac{1}{(k - \omega/c - i\zeta)(k + \omega/c + i\zeta)}, \quad (9.24)$$

Para a solução convergente propagante no tempo, podemos utilizar o método de Cauchy para integração, que nos mostra que para uma função complexa  $F(Z)$ , a integral em um caminho fechado no sentido anti-horário no plano complexo  $Z$  é dada simplesmente por:

$$\oint F(Z) dZ = 2\pi i \sum_{\text{Res}} F(Z) = 2\pi i \sum_m (Z - Z_m) F(Z) \Big|_{Z=Z_m}$$

onde  $Z_m$  são os pólos de  $F(Z)$  envolvidos pelo caminho de integração. Para o caminho inverso (horário) apenas inverte-se o sinal do resultado. Considerando-se um plano complexo para  $\omega$  na integral (9.24), podemos realizar um caminho fechado que vai de  $-\infty$  a  $+\infty$  no eixo real de  $\omega$  e fechar o caminho pela parte imaginária, enlaçando os pólos:

$$\omega = \pm ck - i\zeta.$$

Reescrevendo (9.24) na forma que segue:

$$G(\mathbf{r}, t) = -\frac{c^2}{16\pi^4} \lim_{\zeta \rightarrow 0} \int d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp[-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \frac{1}{(\omega - ck + i\zeta)(\omega + ck + i\zeta)}, \quad (9.25)$$

temos como resultado a chamada função retardada de Green (onde a causa precede o efeito):

$$G_R(\mathbf{r}, t) = \frac{ic}{16\pi^3} \int d^3k \frac{1}{k} \{ \exp[-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - ckt)] - \exp[-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + ckt)] \}. \quad (9.26)$$

Considerando a integração em  $d^3k$  no sistema esférico, ou seja,

$$d^3k = k^2 \sin \theta dk d\theta d\varphi,$$

e temos:

$$G_R(\mathbf{r}, t) = \frac{ic}{16\pi^3} \int k^2 \sin \theta \, dk \, d\theta \, d\varphi \left\{ \exp[-i(kr \cos \theta - ckt)] - \exp[-i(kr \cos \theta + ckt)] \right\} \frac{1}{k}. \quad (9.27)$$

Integrando inicialmente em  $\varphi$  obtemos:

$$G_R(\mathbf{r}, t) = \frac{ic}{8\pi^2} \int k \sin \theta \, dk \, d\theta \left\{ \exp[-i(kr \cos \theta + ckt)] - \exp[-i(kr \cos \theta - ckt)] \right\}. \quad (9.28)$$

Fazendo a mudança de variáveis  $\cos \theta = u$ ,  $du = -\sin \theta d\theta$  e invertendo os limites de integração temos ainda:

$$G_R(\mathbf{r}, t) = \frac{ic}{8\pi^2} \int k \, dk \int_{-1}^1 du \left\{ \exp[-i(kru + ckt)] - \exp[-i(kru - ckt)] \right\}. \quad (9.29)$$

A integração completa resulta em:

$$G_R(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{x}'|} \delta \left[ t' - \left( t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{x}'|}{c} \right) \right]. \quad (9.30)$$

Como as fontes  $f$  para  $\phi$  e  $\mathbf{A}$  são  $\rho/\varepsilon_0$  e  $\mu_0\mathbf{J}$ , respectivamente, podemos escrever finalmente:

$$\phi = \int d^3x' \int dt' \frac{1}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{x}'|} \delta \left[ t' - \left( t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{x}'|}{c} \right) \right] \rho(\mathbf{x}', t')$$

$$\mathbf{J} = \int d^3x' \int dt' \frac{\mu_0}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{x}'|} \delta \left[ t' - \left( t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{x}'|}{c} \right) \right] \mathbf{J}(\mathbf{x}', t')$$

e integrando em relação a  $t'$  temos

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}', t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{x}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}'|}, \quad (9.31)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{x}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}'|}, \quad (9.32)$$

conforme já sabíamos. Voltando para a notação usual, fazendo  $d^3x' = dV'$  e  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{x}'|$ , e aí ficamos com as expressões já apresentadas anteriormente.

### 9.3 Potenciais Eletromagnéticos no Regime Harmônico

Em regime harmônico consideramos variações do tipo  $e^{i\omega t}$ , e nesse caso os campos são dados por:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - i\omega\mathbf{A}, \quad (9.33)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (9.34)$$

As equações de ondas tomam a forma da equação de Helmholtz, ou seja:

$$(\nabla^2 + k^2)\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (9.35)$$

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{J}, \quad (9.36)$$

onde

$$k = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Representando as fontes  $\rho$  e  $\mathbf{J}$  na forma harmônica complexa:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r})e^{i\omega t}, \quad (9.37)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r})e^{i\omega t}, \quad (9.38)$$

e substituindo-as nas equações (9.14) e (9.15) obtemos:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{e^{i\omega t}}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho(\mathbf{x}') \frac{e^{-ikR}}{R} dV' , \quad (9.39)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 e^{i\omega t}}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{x}') \frac{e^{-ikR}}{R} dV' . \quad (9.40)$$

Embora possa não parecer, a simplicidade do resultado acima é enganosa e sem nenhum tipo de aproximação fica muito complicado obter a integração das equações para os potenciais. Vamos considerar então as situações nas quais a região fonte (tipicamente uma antena) esteja centrada na origem do sistema de coordenadas, e a observação será realizada a distâncias grandes em relação à dimensão máxima da fonte  $d$ , ou seja:

$$d = \max(|\mathbf{r}'|) \ll r ,$$

tal que:

$$R = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'} = r \sqrt{1 + \frac{r'^2}{r^2} - 2\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{r}'} .$$

Até aqui o resultado é exato, mas note que se  $r' \ll r$  então

$$\frac{r'}{r} \gg \frac{r'^2}{r^2} .$$

Observando que  $\frac{\mathbf{r}}{r} = \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{n}}$  podemos escrever

$$2\frac{\mathbf{r}}{r^2} \cdot \mathbf{r}' = 2\hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{\mathbf{r}'}{r} \propto \frac{r'}{r} ,$$

desprezar o termo quadrático  $\frac{r'^2}{r^2}$  em  $R$  e utilizar a seguinte aproximação:

$$\sqrt{1+a} \approx 1 + \frac{a}{2} , \quad \text{se } a \ll 1 ,$$

para obter o resultado desejado para  $R$ :

$$R = r - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}' , \quad (9.41)$$

Nas equações de  $\mathbf{A}$  e  $\phi$  aparecem os seguintes termos:

$$e^{-ikR} \approx e^{-ikr} e^{ik\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}'},$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}'} \approx \left( \frac{1}{r} + \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right) \approx \frac{1}{r} .$$

Justifica-se a eliminação de  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}'$  em  $1/R$  mas não em  $e^{-ikR}$  pois a exponencial, além de ser oscilatória, contém o fator multiplicativo  $k$ . Mesmo  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}'$  sendo pequeno, o produto com  $k$  pode resultar um número não negligenciável. Tem-se então:

$$\frac{e^{-ikR}}{R} \approx \frac{e^{-ikr}}{r} e^{ik\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}'} . \quad (9.42)$$

Nesta aproximação, o cálculo dos potenciais resume-se às seguintes integrais:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} \int_{V'} \rho(\mathbf{r}') e^{ik\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}'} dV' , \quad (9.43)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{ik\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}'} dV' . \quad (9.44)$$

Observe que o seguinte termo:

$$\frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r}$$

corresponde à uma onda esférica que se propaga na direção  $\mathbf{n} = \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{r}}$  com velocidade  $c = \omega/k$ . O fator  $1/r$ , como veremos adiante significa que a densidade de potência decai na forma  $1/r^2$ , conservando a potência total emitida pela fonte.

Os termos de integral:

$$\int_{V'} f(\mathbf{r}') e^{ik\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}'} dV' = \int_{V'} f(\mathbf{r}') e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} dV' = F(\mathbf{k}) = F(k\hat{\mathbf{n}}),$$

onde  $f \Rightarrow \rho$  ou  $f \Rightarrow \mathbf{J}$  correspondem à transformada de Fourier generalizada dos termos  $\rho$  e  $\mathbf{J}$ , passando do domínio  $\mathbf{r}'$  para o domínio  $\mathbf{k}$ . Lembrando que  $\phi$  e  $\mathbf{A}$  estão conectados pelo calibre de Lorenz-Lorentz, que em regime harmônico pode ser escrito como:

$$\phi = \frac{ic^2}{\omega} \nabla \cdot \mathbf{A}$$

no caso de análise de antenas, basta conhecer o potencial  $\mathbf{A}$  para determinar os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ .

Uma vez que  $\mathbf{A}$  somente é função da densidade de correntes  $\mathbf{J}$  na fonte, não é necessário conhecer a distribuição de cargas  $\rho$ . Devemos lembrar ainda que tipicamente a fonte está confinada a uma região pequena do espaço, e estamos observando os campos muito longe da fonte, e portanto a densidade de corrente no ponto de observação é nula, embora o potencial  $\mathbf{A}$  gerado naquele ponto dependa de  $\mathbf{J}$  em  $\mathbf{r}'$ . Na região longe da fonte,  $\mathbf{J} = 0$  e podemos adotar o seguinte procedimento de cálculo:

↪ Calcularemos o potencial vetor  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{ik\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}'} dV'$$

↪ Determinaremos  $\mathbf{H}$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A},$$

↪ Determinaremos  $\mathbf{E}$  da lei de Ampère-Maxwell:

$$\mathbf{E} = \frac{c^2}{i\omega} \nabla \times \mathbf{B} = -i \frac{Z_0}{k} \nabla \times \mathbf{H},$$

## 9.4 Teoria da Radiação e considerações sobre o vetor de Poynting

A origem das OEM está na oscilação da carga elétrica:

- em antenas → ondas de rádio no espectro RF, microondas;
- nos átomos e moléculas: microondas, luz visível, ultravioleta;
- colisão de partículas carregadas em alta velocidade, efeitos do núcleo do átomo: raios X, raios Gama.

É importante diferenciar os termos radiar e irradiar, que são comumente empregados quando mencionamos radiação:

- **Radiar:** emitir radiação. Diz-se que o objeto radia quando está emitindo radiação.
- **Irradiar:** submeter algo ao efeito da radiação. A superfície da Terra é irradiada pelo Sol.

A condição *sine qua non* para que haja radiação é que a carga elétrica esteja acelerada. MRU produz campos de natureza coulombiana, ou seja apenas com dependência ( $\propto 1/r^2$ ) ou com decaimentos ainda mais rápidos. A aceleração é capaz de produzir a componente de campo  $\mathbf{E}_t \propto 1/r$ !

Antenas são constituídas de condutores onde elétrons são submetidos a uma força:

$$F_z = F_0 \text{sen}(\omega t).$$

Como há aceleração por efeito da força há emissão de radiação eletromagnética,

$$a(t) = \frac{F_z}{m} = a_0 \text{sen}(\omega t),$$

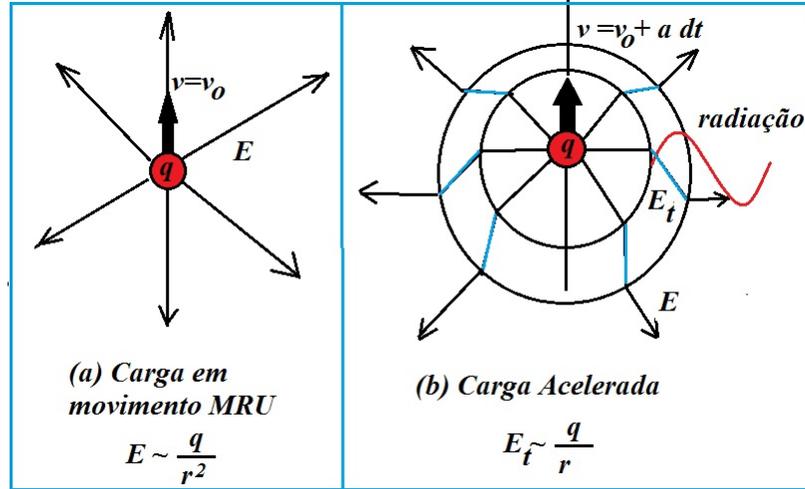


Figure 9.2: O modelo de Thomson da radiação: as linhas ficam distorcidas na região distante.

a ação dessa aceleração sobre os elétrons produz uma corrente oscilante da forma:

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t) .$$

Uma vez que tenhamos calculado os campos, sabemos que a densidade de potência emitida pela fonte é medida através do vetor de Poynting:

$$\mathbf{S}_{med} = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) , \quad (9.45)$$

enquanto que pelo teorema de Poynting, a potência total que flui através de certo volume  $V$  através das suas fronteiras, i.e., através da superfície  $a(V)$  que delimita o volume é dada por:

$$P_a = \oint_{a(V)} \mathbf{S}_{med} \cdot d\mathbf{a} . \quad (9.46)$$

Definição: A **Radiação Eletromagnética** é a densidade de potência que flui radialmente para fora da região de fonte e que se propaga para o infinito, constituindo uma potência que é perdida pela fonte para o campo eletromagnético.

↪ O campo radiado pela fonte torna-se independente da mesma, podendo à medida que se propaga ao infinito ser absorvido, refletido, refratado, etc.

↪ Para um observador distante, fazendo medidas em um volume pequeno,  $V_{obs} \ll r^3$ , comparado ao volume da esfera de raio  $r$  centrada na fonte, o campo eletromagnético radiado terá todas as características das ondas planas uniformes.

↪ Portanto, para saber quanta potência se transferiu da fonte para o infinito, podemos considerar os limites de um volume infinitamente grande, cuja fronteira  $a(V)$  é uma superfície esférica de raio  $r \rightarrow \infty$ . Nesse caso

$$d\mathbf{a} = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \hat{\mathbf{a}}_r ,$$

de tal forma que:

$$P_{rad} = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (\mathbf{S}_{med} \cdot \hat{\mathbf{a}}_r) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi . \quad (9.47)$$

Definindo a densidade de potencia de radiação,  $S_{rad}$ , conforme abaixo:

$$S_{rad} = \mathbf{S}_{med} \cdot \hat{\mathbf{a}}_r , \quad (9.48)$$

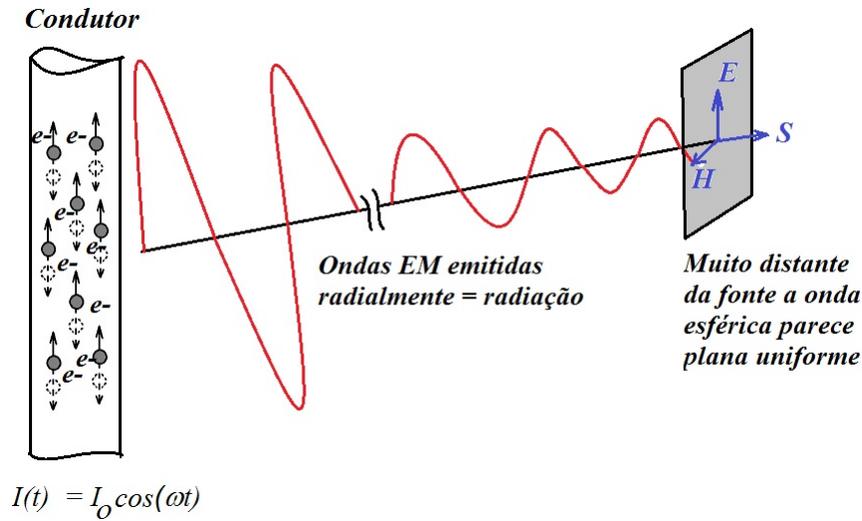


Figure 9.3: Elétron em movimento acelerado no interior de um condutor perdem energia para o campo de radiação que se propaga ao infinito, sendo bem aproximadas por ondas planas uniformes, na região do campo distante.

podemos em coordenadas esféricas separar as variáveis, na forma abaixo:

$$S_{rad}(r, \theta, \varphi) = R(r)f(\theta, \varphi)$$

para obter

$$P_{rad} = \lim_{r \rightarrow \infty} [r^2 R(r)] \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} f(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (9.49)$$

onde devemos ter:

$$0 < \left( \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} f(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi \right) < \infty.$$

Portanto, uma vez que a integral de  $f(\theta, \varphi)$  é limitada, na expressão de  $P_{rad}$  acima temos várias hipóteses para  $R(r)$ :

↪ Sendo

$$R(r) = S_0 r^n, \quad n > -2,$$

temos

$$P_{rad} \rightarrow \infty,$$

o que é impossível fisicamente, porque não há fonte com disponibilidade de energia infinita.

↪ Sendo

$$R(r) = S_0 \frac{1}{r^n}, \quad n > 2,$$

temos

$$P_{rad} \rightarrow 0,$$

possível fisicamente, mas não correspondendo à radiação.

↪ Finalmente, sendo

$$R(r) = S_0 \frac{1}{r^2},$$

temos

$$P_{rad} \propto \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \frac{S_0}{r^2} \rightarrow cte.$$

Essa é a única possibilidade que corresponde à radiação eletromagnética. Podemos dizer que a lei do inverso do quadrado da distância para a densidade de potência radiada é uma consequência de conservação de energia, pois no espaço livre  $P_{rad}$  deve ser uma constante não nula e não divergente, e também do fato de que o universo em que vivemos tem 3 dimensões espaciais, que faz com que a superfície de fronteira do volume esférico tenha dependência com  $r^2$ . Desse modo a densidade de potência radiada deverá obedecer a seguinte lei:

$$S_{rad} = \frac{S_0}{r^2} f(\theta, \varphi) .$$

↪ A potência radiada se conserva pois à medida que a onda radiada se propaga a densidade de potência cai com  $1/r^2$  mas a área varrida pela frente de onda aumenta com  $r^2$ , de forma que há compensação no produto entre a área e a densidade de potência emitida. Uma vez que

$$S_{rad} = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \hat{\mathbf{a}}_r ,$$

devemos concluir que para satisfazer a condição da densidade de potência decaindo na lei do inverso do quadrado da distância, e simultaneamente as equações de Maxwell, os campos de radiação obedecem a uma lei do inverso da distância, ou seja:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{rad} &\propto \frac{1}{r} , \\ \mathbf{H}_{rad} &\propto \frac{1}{r} . \end{aligned}$$

## 9.5 Potenciais de Liénard-Wiechert e Radiação de Cargas Aceleradas

Uma solução importante para os potenciais  $\phi$  e  $\mathbf{A}$  é considerar cargas pontuais em movimento, já que qualquer campo eletromagnético pode ser considerado como a composição de muitas cargas pontuais que somam seus efeitos. Para uma carga puntual cuja posição seja  $\mathbf{r}_0(t)$  e velocidade  $\mathbf{v}(t)$  a densidade de carga e corrente deve ser escrita na forma:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = q \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)) \quad (9.50)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = q \mathbf{v}(t) \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)) \quad (9.51)$$

e então os potenciais serão dados por:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0(t - R/c))}{R} dV' \quad (9.52)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \int \frac{\mathbf{v}(t - R/c) \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0(t - R/c))}{R} dV' \quad (9.53)$$

Aparentemente é fácil a integração das funções delta de Dirac, entretanto o argumento  $\mathbf{x}'$  encontra-se dentro de  $R$  também. É necessário portanto fazer uma modificação de variáveis, tal que a delta possa ser integrada facilmente. Nesse processo a Jacobiana da transformação deve ser incluída na integral. Fazendo então:

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t - R/c)$$

tem-se para a Matriz Jacobiana

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x'} & \frac{\partial u_1}{\partial y'} & \frac{\partial u_1}{\partial z'} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x'} & \frac{\partial u_2}{\partial y'} & \frac{\partial u_2}{\partial z'} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x'} & \frac{\partial u_3}{\partial y'} & \frac{\partial u_3}{\partial z'} \end{bmatrix}$$

e tem-se então

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{x}_0(t - R/c)|} \int \frac{\delta^3(\mathbf{u})}{|J|} dV' \quad (9.54)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 q \mathbf{v}(t - R/c)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{x}_0(t - R/c)|} \int \frac{\delta^3(\mathbf{u})}{|J|} dV' \quad (9.55)$$

com  $|J|$  o determinante da matriz jacobiana. Temos como resultado final para estas integrais, o que é chamado de Potenciais de Liènard-Wiechert:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\kappa|\mathbf{r} - \mathbf{x}_0(t - R/c)|} \quad (9.56)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 q \mathbf{v}(t - R/c)}{4\pi\kappa|\mathbf{r} - \mathbf{x}_0(t - R/c)|} \quad (9.57)$$

sendo

$$\kappa = 1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c}$$

Vamos analisar o caso mais simples, em que a velocidade da partícula é em geral muito menor do que  $c$ . Isto é válido para grande parte dos sistemas radiantes de interesse. Nesse caso podemos fazer os potenciais similares aos do caso quase estático onde  $\kappa \rightarrow 1$ , e temos:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{x}_0(t - R/c)|} \quad (9.58)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 q \mathbf{v}(t - R/c)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{x}_0(t - R/c)|} \quad (9.59)$$

Para calcular os campos temos:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Mas estamos interessados no campo radiado, ou seja, aquele cuja energia é perdida pela partícula. Nesse caso o vetor de Poynting deve ter dependência  $1/r^2$ , caso contrário não há energia irradiada:

$$P = \oint \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{a} = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{a}}_r \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

O termo do gradiente do potencial escalar somente gera termos em  $1/r^2$  ou superior, nesse caso não contribui para a radiação de energia. Temos as seguintes relações para os campos irradiados:

$$\mathbf{E}_{rad} = -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\mathbf{H}_{rad} = \frac{1}{c\mu_0} \hat{\mathbf{a}}_r \times \mathbf{E}_{rad}$$

Considerando-se a solução para o potencial  $\mathbf{A}$  em regime não relativístico, ou seja, de baixas velocidades, temos para os campos:

$$\mathbf{E} = -\frac{\mu_0 q \dot{\mathbf{v}}}{4\pi R} = -\frac{q \dot{\mathbf{v}}}{4\pi c^2 \epsilon_0 R} \quad (9.60)$$

$$\mathbf{H} = -\frac{q \hat{\mathbf{a}}_r \times \dot{\mathbf{v}}}{4\pi c R} \quad (9.61)$$

e para a potência irradiada por unidade de ângulo sólido temos:

$$\frac{dP}{d\Omega} = r^2 \hat{\mathbf{a}}_r \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{q^2 \dot{\mathbf{v}}^2}{(4\pi)^2 c^3 \epsilon_0} \sin^2 \theta$$

onde  $\theta$  é o ângulo formado entre a aceleração da partícula  $\dot{\mathbf{v}}$  e a distância entre ela e o ponto de observação  $\mathbf{R}$ . Para a potência total irradiada temos:

$$P = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3c} \left( \frac{\dot{\mathbf{v}}}{c} \right)^2 \quad (9.62)$$

Podemos perceber daqui, que somente cargas aceleradas, ou seja, tendo  $\dot{\mathbf{v}} \neq 0$ , é que irradiam ondas eletromagnéticas.

Agora vamos analisar o caso geral, considerando-se os potenciais  $\phi$  e  $\mathbf{A}$  de Liénard-Wiechert. Para tanto vamos definir as seguintes quantidades:

$$\vec{\beta} = \frac{\mathbf{v}}{c} \quad (9.63)$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \beta^2} \quad (9.64)$$

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{R}}{R} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t - R/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t - R/c)|} \quad (9.65)$$

$$\kappa = 1 - \vec{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (9.66)$$

Os potenciais de Liénard-Wiechert são reescritos abaixo:

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\kappa R} \right]_{\text{ret}} \quad (9.67)$$

$$\mathbf{A} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \left[ \frac{\mathbf{v}}{\kappa R} \right]_{\text{ret}} \quad (9.68)$$

onde o sub-índice ret denota que as quantidades entre colchetes devem ser calculadas no tempo retardado, ou seja, no tempo  $t' = t - R/c$  da partícula. A tarefa de encontrar os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  é aparentemente muito simples, mas não é. De fato os argumentos da velocidade e posição da partícula contém  $t$  e  $R$ , dado que  $t' = t - R/c$ . Vejamos então:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{c} [\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}]_{\text{ret}}$$

Precisamos calcular apenas o campo elétrico  $\mathbf{E}$  e temos então:

$$\mathbf{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \nabla \left[ \frac{1}{\kappa R} \right]_{\text{ret}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\mathbf{v}}{\kappa R} \right]_{\text{ret}} \right)$$

Temos que avaliar corretamente o gradiente e a derivada temporal da expressão acima:

$$\nabla \left[ \frac{1}{\kappa R} \right]_{\text{ret}} = \frac{\partial}{\partial \kappa R} \left( \frac{1}{\kappa R} \right) \nabla [\kappa R]_{\text{ret}} = -\frac{1}{\kappa^2 R^2} \nabla [\kappa R]_{\text{ret}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\mathbf{v}}{\kappa R} \right]_{\text{ret}} = \frac{\partial}{\partial t'} \left[ \frac{\mathbf{v}}{\kappa R} \right]_{\text{ret}} \frac{\partial t'}{\partial t} = \left[ \frac{\dot{\mathbf{v}}}{\kappa R} \right]_{\text{ret}} \frac{\partial t'}{\partial t} - \frac{\mathbf{v}}{\kappa^2 R^2} \frac{\partial(\kappa R)}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t}$$

Observando as expressões acima, devemos determinar  $\nabla(\kappa R)$ ,  $\partial(\kappa R)/\partial t'$ ,  $\partial t'/\partial t$ , etc. É o que iremos fazer agora.

$$\nabla(\kappa R) = \nabla(R - \vec{\beta} \cdot \mathbf{R}) = \nabla(R) - \nabla(\vec{\beta} \cdot \mathbf{R}) = \nabla R - \vec{\beta} - \frac{\partial(\vec{\beta} \cdot \mathbf{R})}{\partial t'} \nabla(t')$$

e lembrando que  $t' = t - R/c$ ,  $\nabla t' = -\nabla R/c$ , temos:

$$\nabla(\kappa R) = \nabla R - \vec{\beta} + \frac{1}{c} \frac{\partial(\vec{\beta} \cdot \mathbf{R})}{\partial t'} \nabla R$$

$$\nabla(\kappa R) = \left( 1 + \frac{1}{c} \frac{\partial(\vec{\beta} \cdot \mathbf{R})}{\partial t'} \right) \nabla R - \vec{\beta}$$

$$\frac{\partial(\vec{\beta} \cdot \mathbf{R})}{\partial t'} = \frac{\dot{\mathbf{v}}}{c} \cdot \mathbf{R} - c\beta^2$$

pois  $\partial \mathbf{R} / \partial t' = -\mathbf{v}$ . Outro resultado importante é mostrado abaixo:

$$\frac{\partial R}{\partial t'} = -\vec{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

Vamos agora avaliar  $\nabla R$  e  $\partial t' / \partial t$ :

$$\nabla R = \nabla |\mathbf{r} - \mathbf{x}_0(t')| = \frac{\partial R}{\partial x} \hat{\mathbf{a}}_x + \frac{\partial R}{\partial y} \hat{\mathbf{a}}_y + \frac{\partial R}{\partial z} \hat{\mathbf{a}}_z$$

$$\nabla R = \nabla_{\mathbf{r}} R + \frac{\partial R}{\partial t'} \nabla t'$$

$$\nabla R = \frac{\mathbf{R}}{R} + \vec{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}} \nabla R$$

de onde tiramos:

$$\nabla R = \frac{\mathbf{R}}{\kappa R}$$

e

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c} \frac{\partial R}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c} \frac{\partial R}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t}$$

de onde é fácil mostrar que:

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{\kappa}$$

Substituindo estes resultados nas expressões anteriores temos:

$$\nabla(\kappa R) = \left[ \left( 1 - \beta^2 + \frac{\dot{\mathbf{v}}}{c^2} \cdot \mathbf{R} \right) \frac{\mathbf{R}}{\kappa R} - \vec{\beta} \right]_{\text{ret}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\mathbf{v}}{\kappa R} \right]_{\text{ret}} = \left[ \frac{\dot{\mathbf{v}}}{\kappa^2 R} - \frac{\mathbf{v}}{\kappa^3 R^2} \left( c\beta^2 - c\vec{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \frac{\dot{\mathbf{v}}}{c} \cdot \mathbf{R} \right) \right]_{\text{ret}}$$

Utilizando ainda  $\kappa - 1 = -\vec{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}}$  e  $1 - \beta^2 = 1/\gamma^2$  temos:

$$\nabla(\kappa R) = \left[ \left( \frac{1}{\gamma^2} + \frac{\dot{\mathbf{v}}}{c^2} \cdot \mathbf{R} \right) \frac{\mathbf{R}}{\kappa R} - \vec{\beta} \right]_{\text{ret}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\mathbf{v}}{\kappa R} \right]_{\text{ret}} = \left[ \frac{\dot{\mathbf{v}}}{\kappa^2 R} - \frac{\mathbf{v}}{\kappa^3 R^2} \left( c\beta^2 + c(\kappa - 1) - \frac{\dot{\mathbf{v}}}{c} \cdot \mathbf{R} \right) \right]_{\text{ret}}$$

Substituindo estas duas últimas na expressão para os campos, e fazendo alguns arranjos, temos como resultado final:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\hat{\mathbf{n}} - \vec{\beta}}{\gamma^2(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}})^3 R^2} + \frac{1}{c(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}})^3 R} \hat{\mathbf{n}} \times \left[ (\hat{\mathbf{n}} - \vec{\beta}) \times \frac{\dot{\mathbf{v}}}{c} \right] \right\}_{\text{ret}} \quad (9.69)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} [\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}]_{\text{ret}} \quad (9.70)$$

A demonstração fica como exercício. É fácil ver que há um termo que depende somente de velocidade e o outro depende linearmente da aceleração. O termo dependente apenas em velocidade tem dependência com  $1/R^2$  e dá a interação coulombiana, e por este motivo não contribui para o campo irradiado, como pode ser visto da análise do vetor de Poynting. Já o termo em aceleração tem dependência  $1/R$ , contribuindo para a radiação.

Para baixas velocidades, podemos fazer  $\hat{\mathbf{n}} - \vec{\beta} \approx \hat{\mathbf{n}}$  e  $\kappa = (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \approx 1$  e para o campo de aceleração (ou radiação) temos:

$$\mathbf{E}_{\text{rad}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2 R} \hat{\mathbf{n}} \times [\hat{\mathbf{n}} \times \dot{\mathbf{v}}] \quad (9.71)$$

ou ainda expandindo o produto vetorial, temos:

$$\mathbf{E}_{\text{rad}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2 R} [(\hat{\mathbf{n}} \cdot \dot{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{n}} - \dot{\mathbf{v}}] \quad (9.72)$$

$$\mathbf{B}_{\text{rad}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^3 R} \dot{\mathbf{v}} \times \hat{\mathbf{n}} \quad (9.73)$$

e para a potência, obtemos o resultado anterior, senão vejamos:

$$\frac{dP}{d\Omega} = R^2 S_R = R^2 \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

Assumindo desde já que  $\mathbf{E}$  é ortogonal à direção  $\hat{\mathbf{n}}$  temos:

$$\frac{dP}{d\Omega} = R^2 S_R = R^2 \frac{1}{\mu_0 c} (\mathbf{E} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E})) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{R^2 |\mathbf{E}|^2}{c\mu_0}$$

e dessa forma é fácil mostrar que obtém-se a expressão (9.62), quando a fórmula acima é integrada em todo o ângulo sólido. Além do que, da expressão

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2 \dot{\mathbf{v}}^2}{(4\pi)^2 c^3 \epsilon_0} \sin^2 \theta \quad (9.74)$$

vemos que a potência irradiada é máxima na direção ortogonal à direção de aceleração.

## 9.6 O Dipolo Elétrico

Queremos analisar como é o campo produzido por uma antena conhecida como antena dipolo curto. Esta antena é muito empregada principalmente em sistemas de recepção. Embora a transmissão utilize dipolos maiores ou arranjos de antenas, algumas conclusões são ainda válidas. Um dipolo curto é ilustrado na figura (9.4). Como

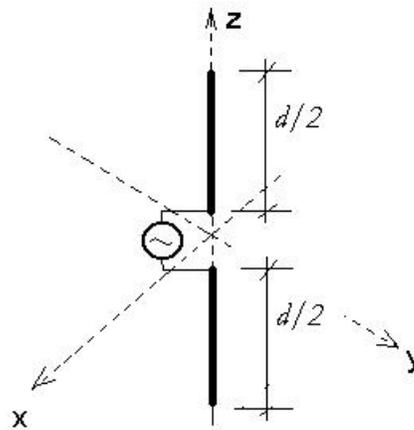


Figure 9.4: Dipolo Curto de comprimento total  $d$ .

os extremos são abertos, a corrente elétrica neles deve ser nula de tal modo que a distribuição de corrente no dipolo é aproximadamente:

$$I(z') = \begin{cases} I_0 (1 - 2z'/d) & \text{para } z > 0 \\ I_0 (1 + 2z'/d) & \text{para } z < 0 \end{cases} \quad (9.75)$$

sendo o vetor densidade de corrente da forma:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}') = I(z')\delta(x')\delta(y')\hat{\mathbf{a}}_z$$

onde  $\delta(\cdot)$  são as funções delta de Dirac.

O potencial vetor  $\mathbf{A}$  é dado simplesmente por:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 e^{i\omega t}}{4\pi} \int_{-d/2}^{d/2} I(z') \frac{e^{-ikR}}{R} dz' \hat{\mathbf{a}}_z \quad (9.76)$$

onde  $R = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}$ . Se estamos interessados em regiões onde podemos assumir que  $R = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , isto é, que na região onde estamos olhando o campo produzido pela fonte, a fonte é vista como uma fonte muito pequena, quase puntual, podemos simplificar o problema da integração. A solução obtida é válida para regiões  $r \gg d$ , onde  $d$  é a dimensão da fonte de corrente, no nosso caso, o dipolo curto. É importante notar que esta aproximação é muito boa, principalmente a médias e longas distâncias da fonte. Temos:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 e^{i(\omega t - kr)}}{4\pi r} \int_{-d/2}^{d/2} I(z') dz' \hat{\mathbf{a}}_z \quad (9.77)$$

Resolvendo a integral, que agora é muito simples

$$\int_{-d/2}^{d/2} I(z') dz' = \frac{I_0 d}{2},$$

ficamos com:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I_0 d}{8\pi r} e^{i(\omega t - kr)} \hat{\mathbf{a}}_z \quad (9.78)$$

Vamos passar o potencial vetor para coordenadas esféricas, de modo que:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I_0 d}{8\pi r} e^{i(\omega t - kr)} [(\hat{\mathbf{a}}_z \cdot \hat{\mathbf{a}}_r)\hat{\mathbf{a}}_r + (\hat{\mathbf{a}}_z \cdot \hat{\mathbf{a}}_\theta)\hat{\mathbf{a}}_\theta + (\hat{\mathbf{a}}_z \cdot \hat{\mathbf{a}}_\varphi)\hat{\mathbf{a}}_\varphi] \quad (9.79)$$

Do cálculo vetorial:

$$\hat{\mathbf{a}}_z \cdot \hat{\mathbf{a}}_r = \cos \theta$$

$$\hat{\mathbf{a}}_z \cdot \hat{\mathbf{a}}_\theta = -\sin \theta$$

$$\hat{\mathbf{a}}_z \cdot \hat{\mathbf{a}}_\varphi = 0$$

e temos o potencial em coordenadas esféricas (mais conveniente para tratar a radiação de uma antena):

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I_0 d}{8\pi r} e^{i(\omega t - kr)} [\cos \theta \hat{\mathbf{a}}_r - \sin \theta \hat{\mathbf{a}}_\theta] \quad (9.80)$$

Calculando o campo magnético:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \hat{\mathbf{a}}_r + \\ &+ \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right) \hat{\mathbf{a}}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \hat{\mathbf{a}}_\varphi \end{aligned}$$

Temos:

$$A_r = \frac{\mu_0 I_0 d}{8\pi r} e^{i(\omega t - kr)} \cos \theta$$

$$A_\theta = -\frac{\mu_0 I_0 d}{8\pi r} e^{i(\omega t - kr)} \sin \theta$$

$$A_\varphi = 0$$

portanto  $A_\varphi = 0$  e todas as derivadas em relação a  $\varphi$  também são nulas (observe que nesse caso  $\mathbf{A}$  não varia com  $\varphi$ ). Observando isso e levando em conta no rotacional, ficamos com um campo magnético na direção  $\varphi$  dado por:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \hat{\mathbf{a}}_\varphi \quad (9.81)$$

Agora calculando as derivadas:

$$\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) = \frac{ik\mu_0 I_0 d}{8\pi} e^{i(\omega t - kr)} \sin \theta$$

$$\frac{\partial A_r}{\partial \theta} = -\frac{\mu_0 I_0 d}{8\pi r} e^{i(\omega t - kr)} \sin \theta$$

e substituindo em (9.81) nos dá:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I_0 d}{8\pi r} \left( ik + \frac{1}{r} \right) e^{i(\omega t - kr)} \sin \theta \hat{\mathbf{a}}_\varphi \quad (9.82)$$

Calculando o campo elétrico, também devemos avaliar um rotacional, de modo que

$$\mathbf{E} = -i \frac{\nabla \times \mathbf{B}}{\omega \mu_0 \varepsilon}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (B_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial B_\theta}{\partial \varphi} \right) \hat{\mathbf{a}}_r +$$

$$+ \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi) \right) \hat{\mathbf{a}}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r B_\theta) - \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right) \hat{\mathbf{a}}_\varphi$$

Nesse caso só temos componente do campo  $\mathbf{B}$  na direção  $\varphi$  simplificando o rotacional para:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (B_\varphi \sin \theta) \hat{\mathbf{a}}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi) \hat{\mathbf{a}}_\theta$$

Temos então:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{i\omega\mu_0\varepsilon} \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (B_\varphi \sin \theta) \hat{\mathbf{a}}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi) \hat{\mathbf{a}}_\theta \right)$$

Calculando as derivadas:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (B_\varphi \sin \theta) = \frac{\mu_0 I_0 d}{8\pi r} \left( ik + \frac{1}{r} \right) (2 \cos \theta \sin \theta) e^{i(\omega t - kr)}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi) = \frac{\mu_0 I_0 d}{8\pi r} \left[ -ik \left( ik + \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r^2} \right] \sin \theta e^{i(\omega t - kr)}$$

substituindo o resultado acima, e fazendo uso das relações entre  $k$ ,  $\eta$ ,  $\mu$ ,  $\varepsilon$ , chegamos ao campo:

$$\mathbf{E} = \frac{I_0 d}{8\pi} e^{i(\omega t - kr)} \left[ \cos \theta \left( \frac{2}{r^2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} + \frac{2}{i\omega\varepsilon r^3} \right) \hat{\mathbf{a}}_r + \right. \quad (9.83)$$

$$\left. + \sin \theta \left( \frac{i\omega\mu_0}{r} + \frac{1}{r^2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} + \frac{1}{i\omega\varepsilon r^3} \right) \hat{\mathbf{a}}_\theta \right]$$

Vemos que o campo elétrico possui componentes  $E_r$  e  $E_\theta$ , mas somente  $E_\theta$  possui dependência do tipo  $1/r$ , e este será o que irá contribuir para o campo distante, conforme veremos adiante.

Para sumarizar, vamos reescrever o campo eletromagnético calculado abaixo:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I_0 d}{8\pi r} \left( ik + \frac{1}{r} \right) e^{i(\omega t - kr)} \sin \theta \hat{\mathbf{a}}_\varphi$$

$$\mathbf{E} = \frac{I_0 d}{8\pi} e^{i(\omega t - kr)} \left[ \cos \theta \left( \frac{2}{r^2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} + \frac{2}{i\omega \varepsilon r^3} \right) \hat{\mathbf{a}}_r + \sin \theta \left( \frac{i\omega \mu_0}{r} + \frac{1}{r^2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} + \frac{1}{i\omega \varepsilon r^3} \right) \hat{\mathbf{a}}_\theta \right]$$

Observando para as soluções acima, vemos que há termos variando com  $1/r$ ,  $1/r^2$  e  $1/r^3$ . Cada uma dessas componentes tem um predomínio em uma região do espaço de forma que podemos separar a solução em regiões de campo, cada qual dominada por um dos termos acima mencionados. A primeira observação a ser feita é que nossa solução é válida para  $r > d$ , onde  $d$  é a dimensão da fonte. Dito isto vamos analisar o campo elétrico  $E_\theta$ , que possui as três dependências:

$$\begin{aligned} E_\theta(1/r) &= \frac{I_0 d}{8\pi} \frac{\omega \mu_0}{r} \sin \theta \\ E_\theta(1/r^2) &= \frac{I_0 d}{8\pi} \frac{1}{r^2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} \sin \theta \\ E_\theta(1/r^3) &= \frac{I_0 d}{8\pi} \frac{1}{\omega \varepsilon r^3} \sin \theta \end{aligned}$$

e o termo de fase  $e^{i(\omega t - kr)}$  foi omitido. Temos as seguintes relações entre as componentes:

$$\frac{E_\theta(1/r^2)}{E_\theta(1/r)} = \frac{1}{kr} \quad (9.84)$$

$$\frac{E_\theta(1/r^3)}{E_\theta(1/r)} = \frac{1}{(kr)^2} \quad (9.85)$$

$$\frac{E_\theta(1/r^2)}{E_\theta(1/r^3)} = \frac{1}{kr} \quad (9.86)$$

Das relações acima podemos definir três regiões:

**Região 1 Campo Próximo** - A região mais próxima da fonte. É dita região de campo próximo. Para este caso, o termo  $1/r^3$  é dominante. Para que isso aconteça devemos ter  $1/(kr) \gg 1$  de tal forma que a condição obtida, fazendo uso de  $k = 2\pi/\lambda$ , onde  $\lambda$  é o comprimento de onda, é:

$$r \ll \frac{\lambda}{2\pi}$$

ou seja, a região de campo próximo é aquela em que o ponto de observação está a uma distância da fonte que é muito menor que o comprimento de onda. Neste caso a solução dos campos é aquela obtida através da eletrostática e magnetostática. No nosso caso, os campos são aqueles gerados por um dipolo elétrico (ver livro do eletromagnetismo, que o campo estático de um dipolo elétrico varia com  $1/r^3$ ). Os termos em  $1/r^2$  são menores também do que os termos em  $1/r^3$ . O campo magnético nessa região tem um efeito muito menor. Podemos dizer que a contribuição fundamental é dos campos elétricos com dependência em  $1/r^3$ . Outro ponto importante é que não há uma relação fixa entre campo elétrico e magnético nessa região.

**Região 2 Zona Intermediária** - É uma região intermediária de distâncias, também dita zona de indução. Vale a relação  $1/(kr) \approx 1$ , ou seja as distâncias são da ordem do comprimento de onda  $\lambda$ .

$$r \sim \frac{\lambda}{2\pi}$$

Nessa região todas as componentes de campo tem uma contribuição não negligível para o campo total.

**Região 3 Campo Distante** - A situação se inverte em relação ao campo próximo. Como veremos aqui sim há uma relação constante entre o campo elétrico e o campo magnético. É a região dominada pelos campos de radiação, conforme veremos. As distâncias são maiores que o comprimento de onda, e o termo de campos dominante é aquele que varia com  $1/r$ . Temos:

$$r \gg \frac{\lambda}{2\pi}$$

Seguiremos a análise para as duas regiões de maior interesse: o campo próximo e o campo distante. Na região intermediária, conforme dito, todas as componentes de campo devem ser levadas em conta, em pé de igualdade.

### Região de Campo Próximo

Conforme havíamos falado, o termo dominante é aquele que envolve a dependência  $1/r^3$ . Na verdade o campo gerado na região próxima é predominantemente elétrico, sendo aquele gerado por um dipolo elétrico:

$$\mathbf{E} \approx \frac{I_0 d}{8\pi(i\omega\epsilon)r^3} e^{i(\omega t - kr)} [2 \cos \theta \hat{\mathbf{a}}_r + \sin \theta \hat{\mathbf{a}}_\theta]$$

$$\mathbf{B} \approx \frac{\mu_0 I_0 d}{8\pi r^2} e^{i(\omega t - kr)} \sin \theta \hat{\mathbf{a}}_\varphi$$

sendo o campo magnético menor em importância do que o campo elétrico, e pode ser tranquilamente negligenciado. Verifique em livros de Teoria Eletromagnética, que definindo o momento de dipolo elétrico na forma

$$p = \frac{I_0 d}{2i\omega}$$

Por este motivo esta antena é dita de dipolo. Como ela tem extremos em aberto, as cargas oscilam entre os dois extremos, formando um dipolo variante no tempo. O momento do dipolo formado é o que foi escrito acima.

Calculando o Vetor de Poynting para os Campos Próximos, temos:

$$\mathbf{S}_{rms} = \frac{1}{2} \Re \{ \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \}$$

E após a substituição dos campos, vemos que não há parte real, somente reativa, por isso os termos de campo próximo dão contribuição nula para a irradiação de energia eletromagnética. Alguém poderia pensar em tomar o termo em  $1/r^2$  do campo elétrico, aí resultando um vetor de Poynting não nulo. Mas o fato é que o fluxo de divergência do Poynting é nulo para termos que tem dependência em  $r$  na forma  $1/r^n$  e  $n > 2$ . No caso dos campos próximos sem levar em conta termos de  $1/r^2$  no campo elétrico a dependência em  $r$  é  $1/r^5$  (levando  $1/r^2$  dá dependência  $1/r^4$ ). Quando fazemos a integral do fluxo temos a potência irradiada:

$$P = \oint_S \mathbf{S}_{rms} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

Não confundir  $dS$  que é superfície com  $\mathbf{S}_{rms}$ , que é o vetor de Poynting. O vetor  $\hat{\mathbf{n}}$  aponta na direção da superfície. Se quisermos integrar em uma esfera de raio arbitrário, para ver qual o fluxo está saindo desta esfera, temos:

$$P = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \mathbf{S}_{rms} \cdot \hat{\mathbf{a}}_r r^2 \sin \theta$$

e para o termo em  $1/r^5$  tem-se:

$$P \propto 2\pi \frac{1}{r^3}$$

Fazendo  $r \rightarrow \infty$ , ou seja, a superfície é fechada, arbitrária, mas de raio infinito, temos o valor nulo para a potência. A potência irradiada é aquela que vai para infinito, e nesse caso, a potência que vai para infinito é zero, portanto, os campos próximos, como dito anteriormente não contribuem para a energia irradiada.

### Campo Distante

Aqui iremos mostrar que os campos ditos campos na região distante são os que contribuem para a energia irradiada. Levando em conta nos campos somente os termos em  $1/r$  temos:

$$\mathbf{E} = \frac{I_0 d}{8\pi} \left( \frac{i\omega\mu_0}{r} \right) e^{i(\omega t - kr)} \sin \theta \hat{\mathbf{a}}_\theta \quad (9.87)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I_0 d}{8\pi} \left( \frac{ik}{r} \right) e^{i(\omega t - kr)} \sin \theta \hat{\mathbf{a}}_\varphi \quad (9.88)$$

Somente observando os campos dados por (9.103) e (9.88) podemos concluir de antemão que são ortogonais entre si e apresentam uma relação de proporção constante, sendo o campo elétrico na direção  $\theta$  e o campo magnético na direção  $\varphi$ . Podemos observar que a relação entre as amplitudes de ambos é:

$$\begin{aligned} \frac{E_\theta}{B_\varphi} &= \frac{\frac{I_0 d}{8\pi} \left( \frac{i\omega\mu_0}{r} \right) \sin \theta}{\frac{\mu_0 I_0 d}{8\pi} \left( \frac{ik}{r} \right) \sin \theta} = \frac{\omega}{k} \\ \frac{E_\theta}{B_\varphi} &= \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon}} = c \end{aligned} \quad (9.89)$$

onde  $c$  é a velocidade da luz no meio com permissividade  $\varepsilon$ . Estamos tratando meios não magnéticos, mas para que sejam, somente substituímos  $\mu_0$  por  $\mu$ . A relação entre  $E_\theta$  e  $H_\varphi$  é a impedância do meio, e podemos concluir da própria relação (9.89):

$$\frac{E_\theta}{H_\varphi} = \mu_0 \frac{E_\theta}{B_\varphi} = \frac{\mu_0}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon}} = \mu_0 c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} = \eta \quad (9.90)$$

Sabemos então que  $E_\theta$  e  $B_\varphi$  mantém uma relação constante na região de campo distante. Vamos mostrar agora, que esses campos são irradiados. Calculemos primeiramente o vetor de Poynting:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{rms} &= \frac{1}{2} \Re \{ \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \} = \frac{1}{2\mu_0} \Re \{ \mathbf{E} \times \mathbf{B}^* \} \\ \mathbf{S}_{rms} &= \frac{1}{2\mu_0} \Re \left\{ \frac{I_0 d}{8\pi} \left( \frac{i\omega\mu_0}{r} \right) e^{i(\omega t - kr)} \sin \theta \hat{\mathbf{a}}_\theta \times \left( \frac{\mu_0 I_0 d}{8\pi} \left( \frac{-ik}{r} \right) e^{-i(\omega t - kr)} \sin \theta \hat{\mathbf{a}}_\varphi \right) \right\} \\ \mathbf{S}_{rms} &= \frac{1}{2\mu_0} \Re \left\{ \frac{I_0 d}{8\pi} \left( \frac{\omega\mu_0}{r} \right) \sin \theta \left( \frac{\mu_0 I_0 d}{8\pi} \left( \frac{k}{r} \right) \sin \theta \right) \right\} \hat{\mathbf{a}}_\theta \times \hat{\mathbf{a}}_\varphi \\ \mathbf{S}_{rms} &= \frac{1}{2} \frac{I_0^2 d^2}{(8\pi)^2} \left( \frac{k\omega\mu_0}{r^2} \right) \sin^2 \theta \hat{\mathbf{a}}_r \end{aligned}$$

Agora fazemos uso de  $k = 2\pi/\lambda$  e  $\omega = ck = 2\pi c/\lambda$  então temos  $k\omega\mu_0 = (2\pi)^2 c\mu_0/\lambda^2$ , e ainda  $\mu_0 c = \eta$ , desse modo

$$k\omega\mu_0 = \frac{(2\pi)^2}{\lambda^2} \eta$$

e o resultado final para o Vetor de Poynting, que representa a densidade de potência que atravessa uma superfície:

$$\mathbf{S}_{rms} = \frac{\eta I_0^2}{32} \left( \frac{d}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta \hat{\mathbf{a}}_r \quad (9.91)$$

Queremos saber agora qual a potência irradiada, para isso temos que integrar o vetor de Poynting:

$$\begin{aligned} P &= \oint_S \mathbf{S}_{rms} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \\ P &= \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\eta I_0^2}{32} \left( \frac{d}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta \hat{\mathbf{a}}_r \cdot \hat{\mathbf{a}}_r r^2 \sin \theta \\ P &= \frac{2\pi \eta I_0^2}{32} \left( \frac{d}{\lambda} \right)^2 \int_0^\pi d\theta \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta r^2 \sin \theta = \\ P &= \frac{2\pi \eta I_0^2}{32} \left( \frac{d}{\lambda} \right)^2 \int_0^\pi d\theta \sin^3 \theta = \end{aligned}$$

Agora temos, de tabela de Integrais:

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}$$

e obtemos o resultado final:

$$P = \frac{\pi\eta I_0^2}{12} \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 \quad (9.92)$$

Vemos que mesmo fazendo  $r \rightarrow \infty$ , a potência não é anulada, ou seja, esta potência deixou a fonte emissora, foi irradiada. Uma vez tendo sido irradiada, essa energia é perdida pela fonte, e convertida em ondas eletromagnéticas que se propagam ao infinito, a menos que seja absorvida por outras cargas, meios materiais, etc. Uma vez irradiada tem independência da fonte. Se a fonte for desligada os campos próximos deixam de existir, mas a energia que foi irradiada pela fonte antes do desligamento segue viajando, já que a integral do fluxo do vetor de Poynting não se anula. Os campos irradiados influenciam a grandes distâncias. São estes os desejados em sistemas de comunicações, mas são campos desse tipo que geram interferências a longas distâncias.

Podemos definir ainda uma resistência de irradiação, já que a fonte perde energia na forma de ondas que se desprendem da fonte, e vão ao infinito na forma:

$$P = \frac{1}{2} R I_0^2$$

ou

$$R = \frac{2P}{I_0^2}$$

e daqui tiramos, no caso do dipolo curto:

$$R = \frac{\pi\eta}{6} \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 \quad (9.93)$$

Se usarmos  $\eta = 120\pi \Omega$  temos:

$$R = 20\pi^2 \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 \Omega \quad (9.94)$$

Lembrando ainda que  $d$  é o tamanho total do dipolo. Se o dipolo tem tamanho igual a décima parte do comprimento de ondas, obtemos:

$$R = \frac{\pi^2}{5} \Omega$$

o que significa dizer que a resistência de perdas por irradiação é de aproximadamente  $2\Omega$ . Em geral essas perdas podem ser desprezadas em circuitos elétricos onde o tamanho do circuito é muito pequeno comparado ao comprimento de onda do sinal eletromagnético que percorre o circuito. Mas existem antenas com grandes resistências de radiação. O dipolo de meia onda chega a mais de  $50\Omega$ . (Vale lembrar que existe ainda uma parte reativa e diz-se então impedância da antena, mas tal discussão foge ao escopo da disciplina).

Uma vez que o campo é irradiado, este se propaga pelo espaço até ser recebido por antenas receptoras para ser processado. Entretanto, em alguns casos é indesejável que a resistência de irradiação chegue a um circuito. De forma bastante simplista, podemos pensar que a tensão induzida em um circuito cuja parte atingida pela onda tenha comprimento  $l$  devido à onda será da forma:

$$V = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

## 9.7 O Regime Quase-Estático

Em regime quase estático, temos o que chamamos anteriormente de campo próximo. A energia eletromagnética não é radiada, ou seja, cessada a fonte, cessa o efeito. Normalmente temos equipamentos que funcionam a uma frequência muito baixa (60 Hz) e nesse caso o comprimento de ondas é muito grande (5000 km no caso de 60 Hz). Desse modo, é pertinente desprezar alguns efeitos. Em outras palavras, no cálculo do potencial escalar e

vetor a exponencial  $e^{-ikr}$  pode ser feita igual à unidade já que se trabalhamos na região de campo próximo  $r$  é pequeno e  $k = 2\pi/\lambda$  também é pequeno, pois  $\lambda$  é um valor muito grande em baixas frequências. desse modo  $kr \approx 0$  e  $\exp(-ikr) \approx 1$ . Levamos em conta então a variação temporal  $e^{i\omega t}$ , entretanto, na região de campo próximo (muitas vezes dita região de Fresnel, em óptica) as variações espaciais devido ao caráter ondulatorio são omitidas. É como se as variações temporais na fonte fossem transmitidas instantaneamente ao ponto de medida. Vejamos então: os campos se propagam a uma velocidade  $c$  no vácuo. Para baixas frequências, o período da onda é muito grande, e temos  $f = 1/T$ . Quando analisamos um circuito, ou vários, em que a frequência é dita baixa, o comprimento do circuito ou do sistema em análise é pequeno em comparação ao comprimento de ondas. Para o caso de 60Hz, queremos analisar a tensão em todos os pontos em uma cidade de raio 50km. A onda leva um tempo  $t = 50km/c = 166 \mu s$  enquanto o período da onda é de  $1/60s$ , ou seja,  $16,6 ms$ . A relação entre o tempo necessário para uma frente de onda de fase constante percorrer todo o circuito e para a fase da onda mudar de  $2\pi$  em um ponto do circuito é

$$\frac{166\mu s}{16,6ms} = 0.01$$

ou seja, a onda leva 100 vezes mais tempo para mudar totalmente a fase em um ponto, do que uma fase percorrer o raio de 50 km. Nesse caso podemos desprezar a mudança de fase espacial e é como, se todos os pontos do circuito tivesse experimentando o mesmo valor de fase do campo ondulatorio no dado instante de tempo. É portanto uma aproximação muito boa e que leva ao uso da teoria circuital. Voltando ao caso dos potenciais, para exemplificar  $k = 2\pi/5000(km)^{-1}$  e num raio de  $50km$  temos  $kr = 2\pi/100$ . Dessa forma  $e^{i2\pi/100} = 0.998 + i0.0627 \approx 1$ . Vamos então considerar a aproximação de campos próximos, para frequências baixas, ou em outras palavras,  $kr \approx 0$ , que significa que a informação se propaga de forma instantânea:

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{e^{i\omega t}}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho(\mathbf{x}') \frac{1}{R} dV' , \quad (9.95)$$

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = \frac{\mu_0 e^{i\omega t}}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{x}') \frac{1}{R} dV' . \quad (9.96)$$

Os campos obtidos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  são dados pelas equações mostradas anteriormente, e temos:

$$\mathbf{E} = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{x}')}{R^2} dV' \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{R}} - i\omega \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{R} dV' \right) e^{i\omega t} , \quad (9.97)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{R}}}{R^2} dV' e^{i\omega t} . \quad (9.98)$$

Em regime harmônico precisamos apenas conhecer a corrente pois sabemos que a densidade de cargas  $\rho$  e a densidade de correntes  $\mathbf{J}$  se relacionam pela equação da continuidade, escrita abaixo na forma do regime harmônico:

$$\rho(\mathbf{x}') = \frac{i\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}')}{\omega} .$$

Da aproximação acima, ou utilizando as equações de Maxwell na forma integral, em situações de simetria favorável, podemos obter os campos em diversas situações. Uma situação importante é um fio longo carregando uma corrente que varia no tempo de forma harmônica. Este caso retrata uma linha de transmissão de energia que é capaz de produzir campos intensos. Considerando-se que estamos na região de campo próximo, o campo magnético gerado por uma linha de transmissão é:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} e^{i\omega t} \hat{\mathbf{a}}_{\varphi} , \quad (9.99)$$

onde  $r$  é a distância em coordenadas cilíndricas agora. O efeito do plano de terra não está sendo considerado aqui. Podemos colocar a corrente em função da potência transmitida pela linha e da tensão da linha, ou seja, a corrente de pico é  $2P/V$  onde  $P$  é o valor médio da potência, e  $V$  é a tensão de pico, e temos:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi r} \frac{2P}{V} e^{i\omega t} \hat{\mathbf{a}}_\varphi . \quad (9.100)$$

Convém observar que entre duas ou mais linhas de transmissão podemos definir indutância mútua, capacitância efetiva entre linhas, de tal modo que uma linha de transmissão interfere na outra. Desse modo devemos ter em mente que uma linha de transmissão deve manter uma certa distância da outra, bem como de outros equipamentos, para minimizar efeitos de interferência. Existem critérios para que tal seja concretizado, e esses critérios formam as normas que os Engenheiros devem seguir para projetar linhas. Mesmo em instalações residenciais deve-se ter o cuidado de projetar adequadamente o cabeamento telefônico, de dados e elétrico, para minimizar as interferências.

## 9.8 Características Básicas de Antenas

Uma **antena** é o elemento ou região do espaço capaz de radiar potência eletromagnética para o espaço externo de modo eficiente quando atua como transmissora, ou por outro lado, é capaz de capturar de modo eficiente a energia proveniente de espaço livre e que adentra sua região de abrangência, quando atua como receptora.

↪ Para Antenas que respeitam a Reciprocidade (em geral é o caso) basta estudar o comportamento da radiação produzida (irradiação) para inferir o comportamento da antena sendo irradiada (gerando radiação).

Os conceitos básicos relacionados com Antenas que serão abordados aqui são os campos eletromagnéticos e potência emitida ou radiada, o diagrama de radiação, diretividade, eficiência e ganho, impedância de antena.

### 9.8.1 Principais Tipos de Antenas

⇒ Filamentares - são aquelas fabricadas a partir de fios condutores. Os exemplos principais são os Dipolos Elétricos e Antenas Loop, ilustradas na Figura 9.5



Figure 9.5: Antenas filamentosas típicas, como o Dipolo Elétrico e o Loop.

⇒ Antenas de Microfita ou Patch são aquelas concebidas sobre substratos dielétricos, sendo a sua principal vantagem a integrabilidade a sistemas produzidos com tecnologias de circuitos impressos. São várias as configurações e geometrias admissíveis, e algumas estão ilustradas na Figura 9.6.

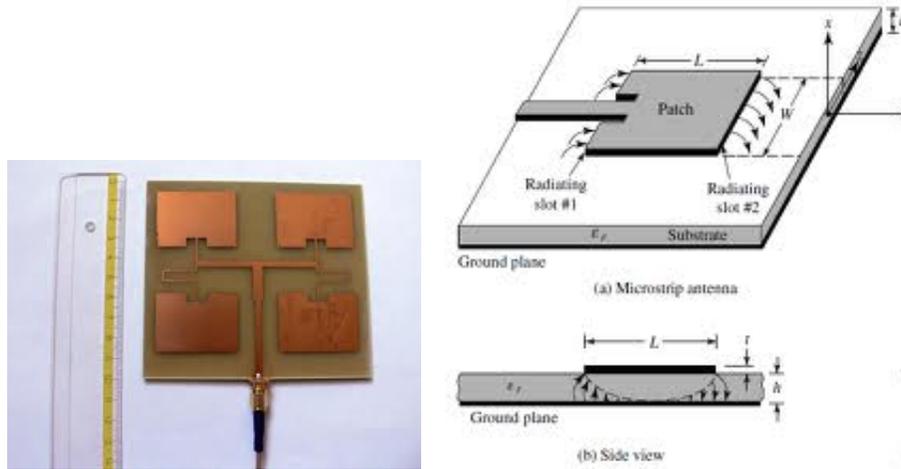


Figure 9.6: Exemplos de antenas construídas em microfita.

⇒ Antenas de Abertura: são mais conhecidas as parabólicas e cornetas, muito empregadas no espectro de microondas ou quando se requer alto ganho e desempenho. São inviáveis em baixas frequências devido a forte relação entre o tamanho físico e o comprimento de onda empregado no sistema. Alguns exemplos são ilustrados na Figura 9.7.

⇒ Arranjos e Antenas Yagi-Uda: são arranjos de antenas filamentosares, tipicamente ressonantes, para permitir alto desempenho e ganho de valores médios a elevados. São ilustradas na Figura 9.8

⇒ Antenas Fractais são antenas tipicamente construídas em microfita, que possuem um padrão geométrico que se repete em escala, conferindo às mesmas propriedades da geometria fractal, como dimensionalidade fracionária, o que permite produzir antenas fisicamente pequenas e com grande largura de banda, necessárias em sistemas de comunicação que requerem utilização de amplo espectro. São empregadas atualmente em telefonia celular, por exemplo. Algumas dessas geometrias são ilustradas na Figura 9.8.1.

### 9.8.2 Regiões de Campo e Campos de Radiação

Conforme já foi visto, considerado o regime harmônico os campos são dados pelas expressões abaixo

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - i\omega\mathbf{A} ,$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} ,$$

sendo que na condição  $r' \ll r$  os potenciais são dados por:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} \int_{V'} \rho(\mathbf{r}') e^{ik\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}'} dV' ,$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{ik\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}'} dV' . \quad (9.101)$$

Após o cálculo dos campos, é possível perceber termos de contribuições distintas para os campos em função da distância. Isso leva a definir as Regiões de Campo.

- Região do Campo Próximo ou Zona de Fresnel

↪ Nessa região os termos de campo predominante estão associados à energia armazenada e representam uma parcela reativa da impedância da antena.

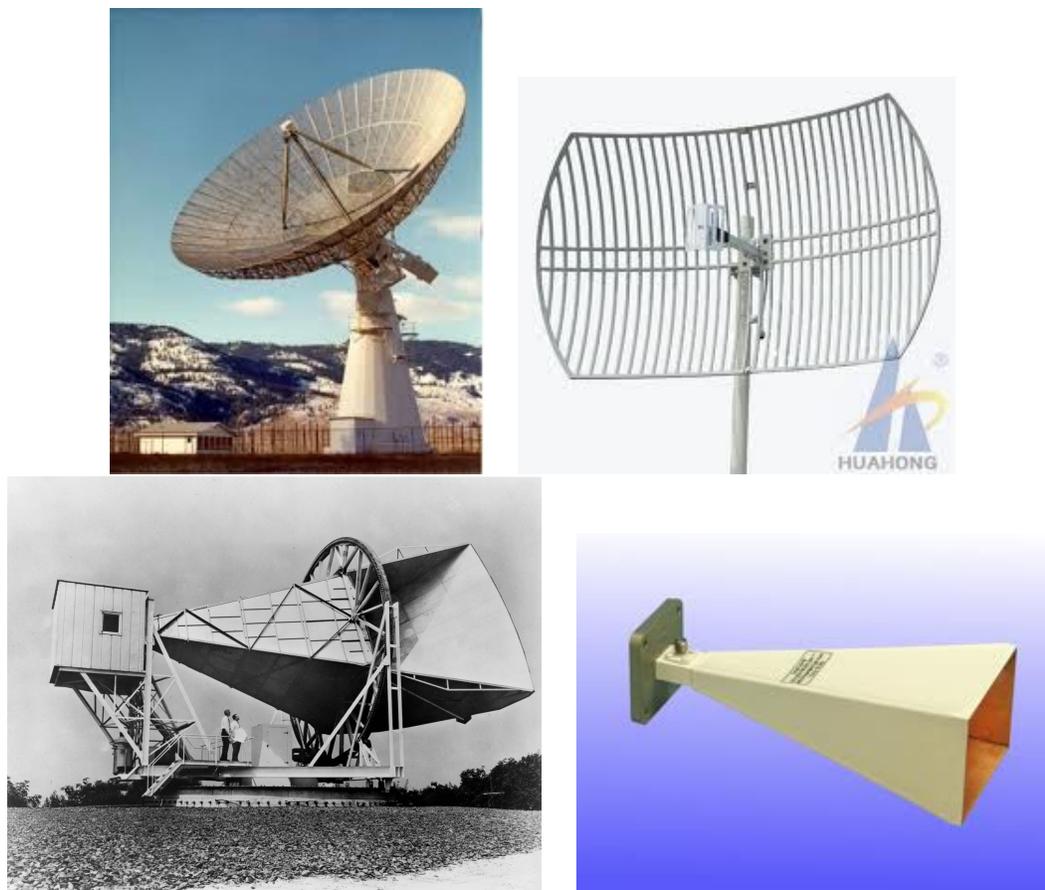


Figure 9.7: Antenas de Abertura Típicas, como as refletoras parabólicas, amplamente utilizadas em sistemas de comunicação em microondas.

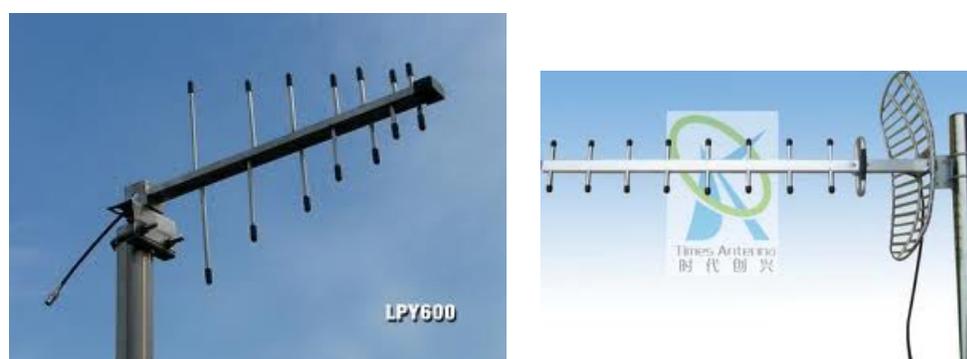
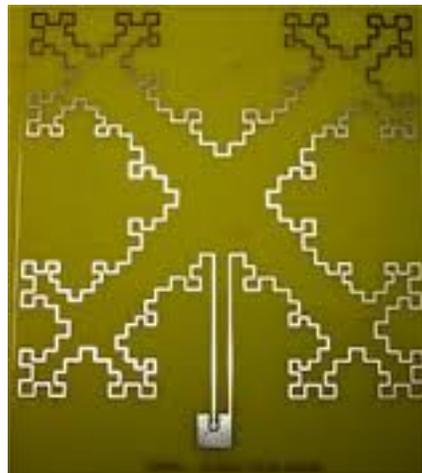


Figure 9.8: Exemplos de antenas do tipo Yagi.

↪ As componentes de campo predominante variam na forma  $1/r^2$ ,  $1/r^3$ , etc, e portanto o vetor de Poynting tem dependência na forma  $1/r^4$ ,  $1/r^5$ ... não representando energia radiada, ou seja, uma vez que a fonte cessa, cessam os campos.

↪ A condição para a região próxima é:

$$r \ll \lambda \Leftrightarrow kr \ll 1 .$$



●Região Intermediária

↪ Nessa região todos os termos dos campos tem igual peso. Não há um fator predominante.

↪ O Campo Próximo e o Campo de Radiação coexistem, produzindo uma região de alta interferência.

↪ A condição para definir esta região próxima é:

$$r \sim \lambda \Leftrightarrow kr \sim 1 .$$

●Campo Distante ou Zona de Fraunhofer: Campos de Radiação

↪ Nessa região os campos de radiação, que representam potência radiada pela fonte, convertida pela fonte em ondas eletromagnéticas, são predominantes.

↪ Uma das condições possíveis para definir esta região é a seguinte:

$$r \gg \lambda \Leftrightarrow kr \gg 1$$

Em alguns casos, sendo  $d$  a dimensão da fonte, a condição é definida como:

$$r \gg \frac{2d^2}{\lambda}$$

↪ São características dessa região:

- os campos dependem da distância na forma  $1/r$ ;
- cessada a causa, ou seja, se cessa a fonte, esse campo não desaparece, pois é energia radiada para o infinito (energia perdida pela fonte);
- para um observador distante a onda radiada terá todas as características de uma onda plana, localmente;
- portanto os campos de radiação estão sujeitos à reflexão, refração, difração e todos os fenômenos inerentemente ondulatórios.

### Cálculo dos campos de radiação

↪ Na análise de radiação de uma antena o campo de radiação é o mais relevante e pode ser determinado diretamente das componentes transversas do potencial vetor  $\mathbf{A}$ .

Definição: O **Potencial Transversal**  $\mathbf{A}_\perp$  é dado pela expressão abaixo:

$$\mathbf{A}_\perp = \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_r) \mathbf{a}_r = \mathbf{A} - A_r \mathbf{a}_r , \quad (9.102)$$

permitindo determinar diretamente os campos de radiação, que satisfazem as seguintes relações:

$$\mathbf{E}_{rad} = -i\omega \mathbf{A}_\perp = -ick \mathbf{A}_\perp , \quad (9.103)$$

$$\mathbf{H}_{rad} = \frac{1}{Z} \hat{\mathbf{a}}_r \times \mathbf{E}_{rad} , \quad (9.104)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_r \cdot \mathbf{E}_{rad} = 0 \quad , \quad \hat{\mathbf{a}}_r \cdot \mathbf{H}_{rad} = 0 , \quad (9.105)$$

$$\mathbf{S}_{rad} = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E}_{rad} \times \mathbf{H}_{rad}^*) = \frac{1}{2Z} |\mathbf{E}_{rad}|^2 \hat{\mathbf{a}}_r . \quad (9.106)$$

↪ Um observador distante da antena pode definir um sistema de coordenadas local  $(x_1, y_1, z_1)$ . A direção radial  $\hat{\mathbf{a}}_r$  corresponde, no sistema de coordenadas local, a uma direção tal que  $\hat{\mathbf{a}}_r = \mathbf{n}$  e nesse caso:

$$\mathbf{H}_{rad} = \frac{1}{Z} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_{rad} , \quad (9.107)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}_{rad} = 0 , \quad (9.108)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}_{rad} = 0 . \quad (9.109)$$

Estas relações são as relações de ondas planas. Portanto localmente para um observador distante, a onda radiada parece-se a uma onda plana uniforme. O vetor de Poynting de radiação representa a densidade de potência radiada pela fonte, e pode ser escrito diretamente em função do potencial transversal, na forma

$$\mathbf{S}_{rad} = S_{rad} \hat{\mathbf{a}}_r = \frac{\omega^2}{2Z} |\mathbf{A}_\perp|^2 \hat{\mathbf{a}}_r , \quad (9.110)$$

ou seja:

$$S_{rad} = \frac{\omega^2}{2Z} |\mathbf{A}_\perp|^2 . \quad (9.111)$$

↪ Observe que se a frequência angular  $\omega$  é nula não ocorre radiação! A radiação é tanto mais eficiente quanto maior a frequência. A densidade de potência depende explicitamente de  $\omega^2$ , mas o potencial transversal é também uma função de  $\omega$ .

### 9.8.3 Elemento Diferencial de Ângulo Sólido $d\Omega$

Antes de prosseguirmos na teoria de antenas é conveniente definir uma grandeza chamada ângulo sólido. Para compreender o que é ângulo sólido vamos fazer uma analogia com um ângulo linear  $\theta$ . Primeiramente, sabemos que o comprimento total de circunferência vale:

$$C = 2\pi r .$$

Observe a Figura 9.9. É sabido que se o ângulo total de uma circunferência, em unidades de radianos vale  $2\pi$  e a razão entre o comprimento de circunferência e o raio que lhe deu origem é igual a esta constante, então, para arcos de comprimentos  $dl_1$  e  $dl_2$  gerados a partir dos raios de circunferência  $r_1$  e  $r_2$ , respectivamente, mas com a mesma abertura angular, deve valer a relação:

$$\frac{dl_1}{r_1} = \frac{dl_2}{r_2} = \frac{dl}{r} = d\theta ,$$

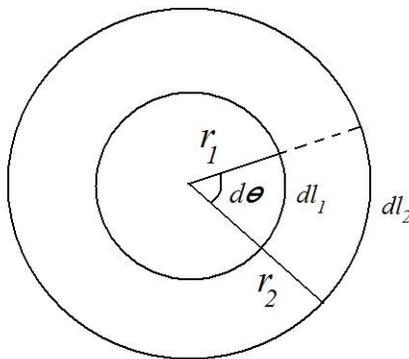


Figure 9.9: Representação de um segmento de arco para fins de definição do diferencial de ângulo linear.

onde  $d\theta$  é denominado elemento infinitesimal de ângulo linear, cuja integral sobre uma volta completa de circunferência deve valer

$$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi = \frac{C}{r} .$$

↪ Podemos fazer o mesmo agora com a superfície de uma esfera. Note que a área da esfera é dada por:

$$A_{esf} = 4\pi r^2 .$$

Dessa forma a razão entre a área da esfera e o raio que deu origem a essa esfera,  $r$  vale:

$$\Omega_{esf} = \frac{A_{esf}}{r^2} = 4\pi ,$$

que é uma quantidade adimensional, denominado ângulo sólido total de uma superfície esférica (unidade steradiano, str).

Uma vez que a relação vale para toda a superfície da esfera, deve valer para elementos infinitesimais:

$$\frac{da_1}{r_1^2} = \frac{da_2}{r_2^2} = \frac{da}{r^2} = d\Omega .$$

↪  $d\Omega$  é conhecido como elemento infinitesimal de ângulo sólido, e é a razão entre uma casca de superfície esférica infinitesimal e o quadrado do seu raio,  $r^2$ .

Observe agora a Figura 9.10. Podemos ver então que:

$$da = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi ,$$

e portanto o elemento diferencial de ângulo sólido  $d\Omega = da/r^2$  é dado pelo produto de dois ângulos lineares  $d\theta$  e  $d\varphi$ , mas tem um fator de peso,  $\sin\theta$ , em coordenadas esféricas:

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi . \quad (9.112)$$

Pode-se demonstrar facilmente que:

$$\Omega = \int d\Omega = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin\theta d\theta d\varphi = 4\pi . \quad (9.113)$$

↪ Utilizaremos, por comodidade para a integral de uma função qualquer  $f(\theta, \varphi)$  a seguinte notação:

$$\int_{\Omega} f(\theta, \varphi) d\Omega$$

tomando o cuidado de lembrar que a integral em  $\Omega$  é dupla, nas variáveis  $\theta$  e  $\varphi$ !!!

$$\int_{\Omega} F(\theta, \varphi) d\Omega = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} f(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi .$$

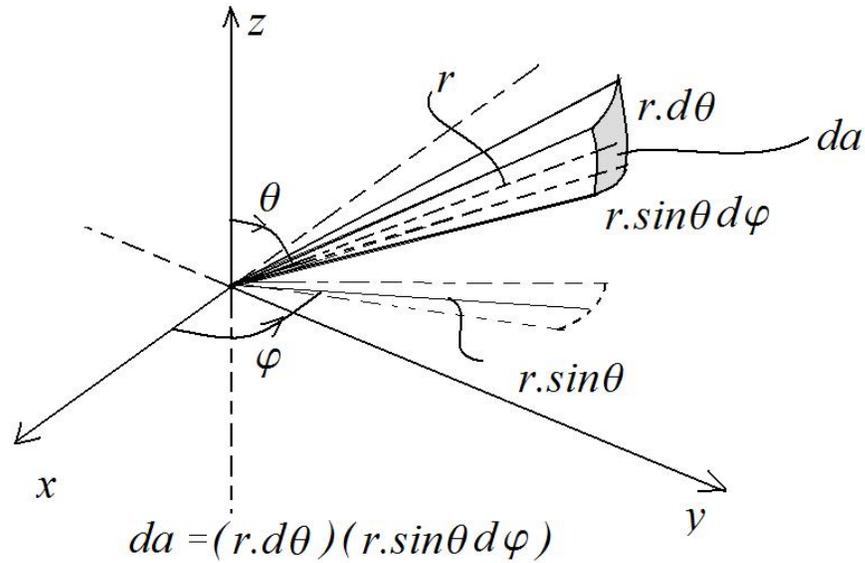


Figure 9.10: Definição do ângulo sólido.

### 9.8.4 Potência Total Radiada

Consideremos agora uma antena na origem, conforme a Figura 9.11. potência total radiada é dada por

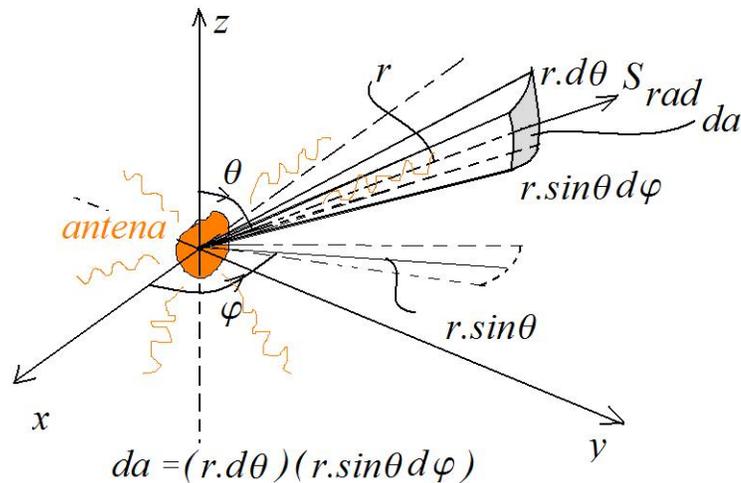


Figure 9.11: Região de antena situada na origem de um sistema de coordenadas.

$$P_{rad} = \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \int_{\Omega} S_{rad}(r, \theta, \varphi) d\Omega ,$$

porém na prática é impossível medir essa potência simultaneamente. Utiliza-se um sensor de potência radiada (antena de teste) para medir a potência radiada em um ponto  $(r, \theta, \varphi)$ ,  $r \rightarrow \infty$ .

↪ O sensor deve ter uma área infinitesimal  $da = r^2 d\Omega$ , e o vetor superfície deve apontar na direção radial, de tal forma que o vetor de Poynting de radiação e o vetor área do sensor sejam perfeitamente paralelos, resultando na máxima potência medida pelo sensor. Vale lembrar que o vetor de Poynting da radiação representa

a densidade de potência radiada em  $W/m^2$ . A potência coletada pelo sensor será então:

$$dP = S_{rad} da = S_{rad} r^2 d\Omega .$$

Integrando sobre o ângulo sólido total de uma esfera obtemos:

$$P_{rad} = \int_{\Omega} \int_{\Omega} r^2 S_{rad}(r, \theta, \varphi) d\Omega . \quad (9.114)$$

### 9.8.5 O Radiador Isotrópico Ideal

Define-se Radiador Isotrópico Ideal ou Antena Isotrópica Ideal como o elemento capaz de radiar igualmente em todas as direções do espaço com eficiência máxima, ou seja, sua densidade de potência não deve depender das variáveis  $(\theta, \varphi)$ .

Se entregamos uma potência  $P_0$  à uma antena isotrópica, ela irá radiar  $P_0$  distribuindo essa potência igualmente sobre uma superfície esférica, ou seja:

$$S_{rad}^i = \frac{P_0}{4\pi r^2} . \quad (9.115)$$

### 9.8.6 Função Diretividade Angular e Diagramas de Radiação

Embora  $S_{rad}(r, \theta, \varphi)$  já nos forneça a informação necessária de como a antena radia no espaço é conveniente adotar um procedimento de normalização, para eliminar a dependência com a distância e também com a potência de alimentação.

Define-se então a partir da antena isotrópica a diretividade de uma antena qualquer, como a razão entre a densidade de potência  $S_{rad}(r, \theta, \varphi)$  gerada pela antena teste no ponto  $\mathbf{r} = (r, \theta, \varphi)$  e a densidade de potência que seria gerada por uma antena isotrópica nesse mesmo ponto, dado que ambas tem a mesma potência total radiada, ou seja:

$$D(\theta, \varphi) = \frac{S_{rad}(r, \theta, \varphi)}{P_0 / (4\pi r^2) |_{P_0 = P_{rad}}}$$

Uma vez que fornecemos para o radiador isotrópico uma potência  $P_0$  igual à potência radiada pela antena em estudo:

$$P_0 = P_{rad} = \int_{\Omega} r^2 S_{rad}(r, \theta, \varphi) d\Omega ,$$

obtemos finalmente:

$$D(\theta, \varphi) = \frac{4\pi r^2 S_{rad}(r, \theta, \varphi)}{\int_{\Omega} r^2 S_{rad}(r, \theta, \varphi) d\Omega} \quad (9.116)$$

⇒ A função  $D(\theta, \varphi)$  é conhecida como função **diretividade angular** da antena. O gráfico da função  $D(\theta, \varphi)$  é um gráfico 3D em coordenadas polares. Obtém-se uma superfície onde cada ponto nesta é a distância de valor  $D(\theta, \varphi)$  a partir da origem para cada posição  $(\theta, \varphi)$ .

⇒ É convencional também fazer cortes do gráfico 3D resultante por planos especiais, que dependem de cada situação. Tais gráficos são conhecidos como **diagramas de radiação**.

↪ Pode-se demonstrar ainda que  $\int_{\Omega} D(\theta, \varphi) d\Omega = 4\pi$ , ou seja, a superfície representada por  $D(\theta, \varphi)$  tem a mesma "área", independente da antena, embora a forma seja dependente da antena.

↪ Para a antena isotrópica temos:

$$D(\theta, \varphi) = 1 . \quad (9.117)$$

O gráfico dessa função é uma esfera de raio unitário. Qualquer corte por um plano que passe pela origem gera um diagrama de radiação que é uma circunferência de raio unitário, conforme ilustrado na Figura 9.12.

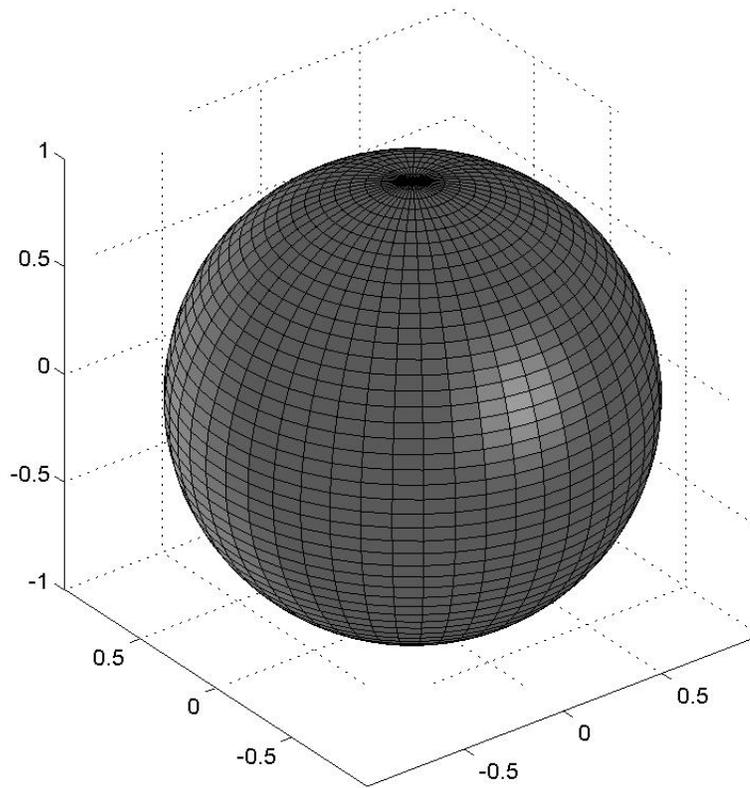


Figure 9.12: Diagrama de radiação para o padrão isotrópico  $D(\theta, \varphi) = 1$ .

Fica como exercício demonstrar que para o dipolo elétrico curto temos:

$$S_{rad} = \frac{ZI_0^2}{32} \frac{d^2}{\lambda^2} \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta ,$$

e ainda que:

$$\int_{\Omega} \sin^2 \theta d\Omega = \frac{8\pi}{3} ,$$

o que resulta na seguinte função de diretividade angular

$$D(\theta, \varphi) = \frac{3}{2} \sin^2 \theta . \quad (9.118)$$

O gráfico dessa função é conhecido como donut (a rosquinha americana), ilustrado na Figura 9.13.

O diagrama de radiação de uma antena qualquer é ilustrado na Figura 9.14.

### 9.8.7 Eficiência de Radiação e Ganho de Antena

A eficiência de uma antena é a razão entre a potência que lhe é entregue e a que é convertida em radiação, ou seja:

$$\eta = \frac{P_{rad}}{P_{in}} . \quad (9.119)$$

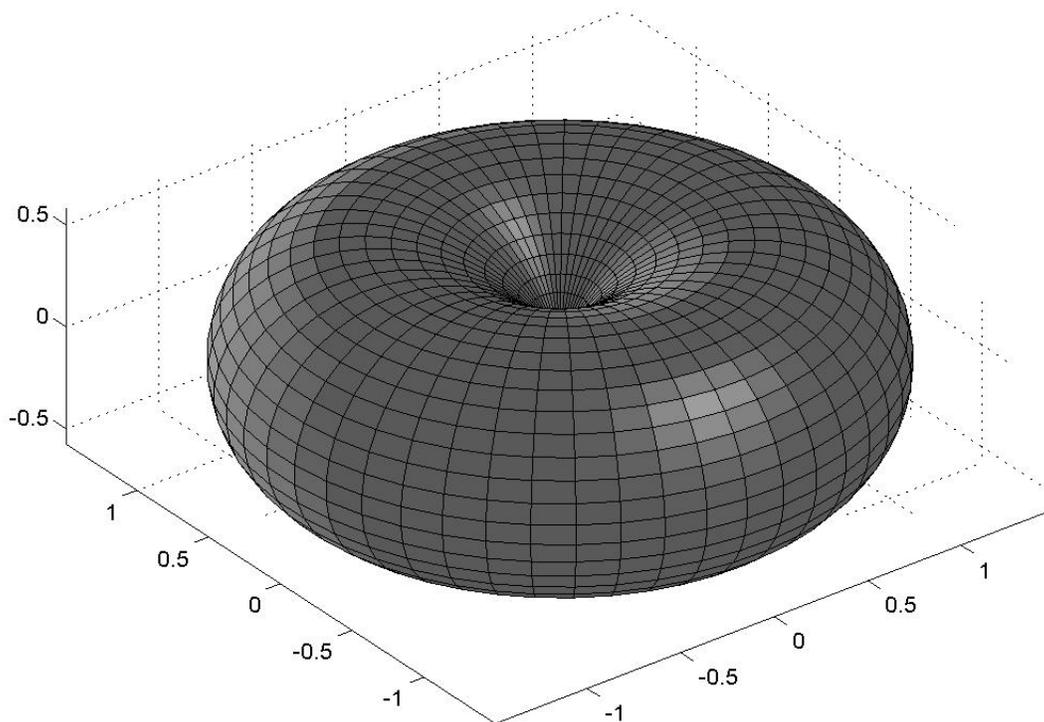


Figure 9.13: Padrão do Dipolo Elétrico - Donut:  $D(\theta, \varphi) = \frac{3}{2} \sin^2 \theta$ .

Desse modo defini-se o **Ganho** de Antena como a razão entre a densidade de potência gerada por uma antena qualquer quando lhe foi entregue uma potência  $P_{in}$  e a densidade de potência que seria gerada por uma antena isotrópica ideal no mesmo ponto  $(r, \theta, \varphi)$ , ou seja,

$$G(\theta, \varphi) = \frac{S_{rad}(r, \theta, \varphi)}{P_{in}/(4\pi r^2)} .$$

**Ganho de antena refere-se ao ganho de densidade de potência que uma antena dá em uma determinada direção relativa a uma antena isotrópica ideal com a mesma potência de alimentação.**

Fazendo uso das definições anteriores para diretividade angular e eficiência de antena temos:

$$G(\theta, \varphi) = \frac{4\pi r^2 \eta S_{rad}(r, \theta, \varphi)}{\int_{\Omega} r^2 S_{rad}(r, \theta, \varphi) d\Omega} = \eta D(\theta, \varphi) . \quad (9.120)$$

É comum se referir ao valor máximo da função acima para mencionar o ganho de uma antena e dessa forma

$$G_0 = \eta D_0 , \quad (9.121)$$

onde  $G_0 = \max[G(\theta, \varphi)]$  e  $D_0 = \max[D(\theta, \varphi)]$ .

↪ Ganho de Antena é um ganho relativo a uma antena de referência e mede o ganho em densidade de potência em uma certa direção. Importante notar que a antena não amplifica potência! Todavia pode "amplificar" a

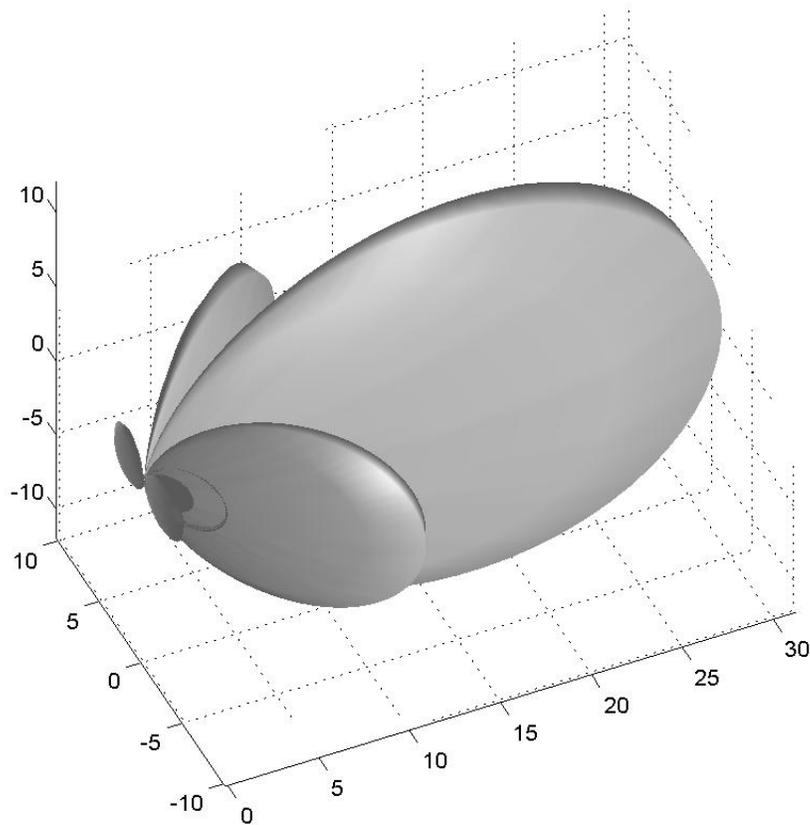


Figure 9.14: Padrão de uma Antena Qualquer: Lóbulo Principal e Lóbulos Laterais.

densidade de potência em uma certa direção. Uma antena qualquer que seja diretiva é capaz de gerar densidade de potência maior do que a antena isotrópica em uma dada direção, se ambas tiverem a mesma potência de entrada.

### 9.8.8 Potência Efetiva Radiada Isotropicamente - EIRP

É a potência total que deveria ser entregue a uma antena isotrópica para poder gerar a mesma densidade de potência máxima de uma antena qualquer, ou seja:

$$P_{EIRP} = GP_{in} . \quad (9.122)$$

↪ Em teoria de Antenas é comum utilizar unidades de dB. O dBi é o ganho em dB relativo a uma antena isotrópica enquanto dBd é o ganho em dB relativo a um dipolo de meia onda. Podemos converter os valores entre dBi e dBd através da seguinte expressão:

$$G(dBi) = G(dBd) + 2.15 .$$

Além disso, definindo a potência em dBm como aquela medida em relação a uma referência de 1mW, em escala logarítmica,

$$P(dBm) = 10 \log_{10} \left( \frac{P(mW)}{1mW} \right) ,$$

podemos escrever

$$P_{EIRP}(dBm) = G(dBi) + P_{in}(dBm) .$$

Essas unidades de medidas são frequentemente empregadas por engenheiros de telecomunicações.

### 9.8.9 Largura de Feixe (Beamwidth)

Considere a Figura 9.15.  $\rightsquigarrow$  Define-se ângulo sólido de um feixe na forma:

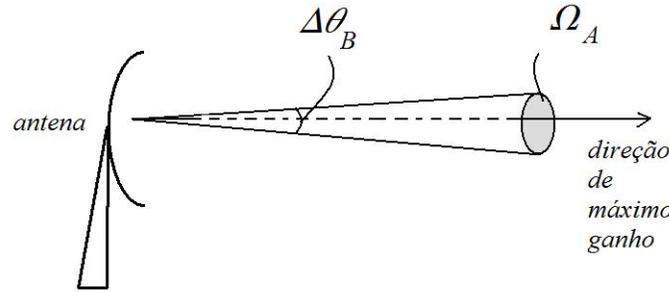


Figure 9.15: Definição da largura de feixe radiado.

$$\Omega_A = \frac{4\pi}{D} . \quad (9.123)$$

$\Delta\theta_B$  é também chamado largura de feixe ou ângulo de abertura do feixe.  $\Omega_A$  é o produto de dois ângulos lineares internos.

### 9.8.10 Área de Abertura Efetiva $A_{ef}$

$\rightsquigarrow$  Quando a antena atua como Receptora, irá capturar uma parcela da radiação proveniente do espaço externo. Mesmo que a antena não tenha uma área física, caso das antenas filamentosares, é possível definir uma área efetiva na forma:

$$A_{ef} = \frac{P_R}{S_{inc}} ,$$

onde:

$\rightsquigarrow P_R$  é a potência recebida pela antena

$\rightsquigarrow S_{inc}$  a densidade de potência incidente na antena (ou em outras palavras irradiada sobre a antena).

É possível mostrar ainda que existem uma relação direta entre o ganho de antena e a área efetiva, na forma abaixo:

$$G = \frac{4\pi A_{ef}}{\lambda^2} . \quad (9.124)$$

Da expressão acima pode-se definir dois tipos principais de antenas:

$\rightsquigarrow$  Antenas com ganho fixo e  $A_{ef}$  dependente de  $\lambda$ ,  $A_{ef} \propto \lambda^2$ . Um exemplo aqui é o dipolo elétrico, onde temos  $\Omega_A = 8\pi/3$  e  $A_{ef} = \eta\lambda^2/\Omega_A$ .

$\rightsquigarrow$  Antenas com área efetiva fixa e ganho variável na forma  $G \propto 1/\lambda^2$ . Exemplo: refletoras parabólicas. Nesse caso a área efetiva é proporcional à área física da antena.

Na prática, tanto  $G$  quanto  $A_{ef}$  dependem de  $\lambda$  em uma forma não trivial.

**Fórmulas úteis para antenas de abertura** (parabólicas e cornetas):

↪ Consideremos uma antena de abertura cuja abertura seja um disco circular de diâmetro  $d$ , então considerando-se que tenha uma eficiência de abertura  $\eta_a$ :

$$\eta_a = \frac{A_{ef}}{A_{phys}} \quad \text{onde} \quad A_{phys} = \frac{\pi d^2}{4}$$

obtém-se:

$$G = \eta_a \left( \frac{\pi d}{\lambda} \right)^2$$

↪ Pode-se usar  $0.6 \leq \eta \leq 0.8$  usualmente. Em função da largura de feixe, para  $\eta_a = 0.6$ :

$$G = \frac{30000}{\Delta\theta_B^2} \quad \text{onde} \quad \Delta\theta_B = 70^\circ \frac{\lambda}{d}$$

### 9.8.11 Polarização de Antena

A polarização de uma antena é a orientação do campo elétrico radiado,  $\mathbf{E}_{rad}$  em relação a algum sistema de coordenadas, conforme já discutido anteriormente. Dependendo da construção, antenas capazes de transmitir ou receber ondas eletromagnéticas em polarização linear, circular, ou elíptica. Há antenas que operam com a possibilidade de selecionar a polarização desejada.

### 9.8.12 A Fórmula de Friis

↪ Considere a Figura 9.16. A fórmula de Friis relaciona a potência transmitida em um ponto e a potência

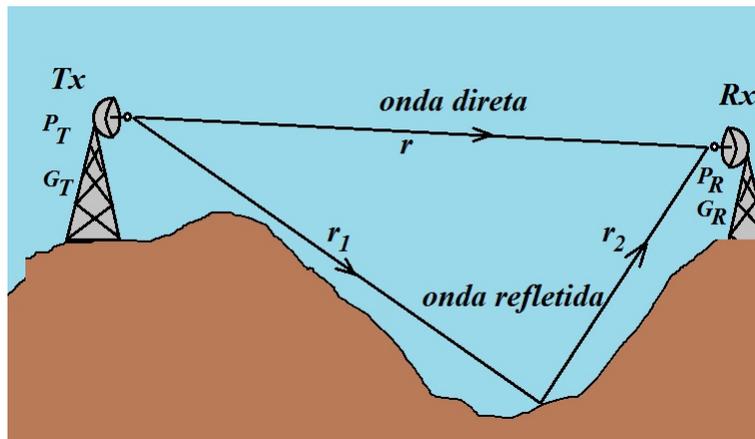


Figure 9.16: Um link de comunicações típico, onde as antenas transmissora e receptora estão a uma distância  $r$  entre si.

recebida em outro, em um link de comunicação, em função dos parâmetros do sistema.

Observe que se os lóbulos principais das antenas estão devidamente alinhados a densidade de potência na antena de recepção será dada por:

$$S_{rad} = \frac{P_{EIRP}}{4\pi r^2} = \frac{G_T P_T}{4\pi r^2},$$

sendo  $r$  a distância entre as antenas,  $G_T$  o ganho máximo da antena transmissora e  $P_T$  a potência total transmitida.

↪ Se a antena de recepção tem uma área efetiva, que relaciona-se com o seu ganho, na forma:

$$A_{ef}^R = \frac{G_R \lambda^2}{4\pi},$$

então a potência recebida será dada por:

$$P_R = S_{rad} A_{ef}^R = P_T \frac{G_T G_R \lambda^2}{(4\pi r)^2} .$$

↪ A fórmula acima é a fórmula de Friis. Na expressão  $P_R = P_T G_T G_R \frac{\lambda^2}{(4\pi r)^2}$  o termo

$$\frac{\lambda^2}{(4\pi r)^2}$$

é chamado ganho do espaço livre e seu inverso, perda ou atenuação do espaço livre. Representa uma perda de densidade de potência, devido ao decaimento na forma  $1/r^2$ .

↪ Na prática há outras perdas, como absorção, desalinhamento das antenas, descasamento de polarização, etc, que podemos incluir na forma de um fator de transmissão do sistema,  $T$ :

$$T = \eta_{abs} \eta_{pol} \eta_g \eta_{refl}$$

para obter uma expressão mais completa:

$$P_R = P_T G_T G_R \frac{\lambda^2}{(4\pi r)^2} T , \quad (9.125)$$

onde  $\eta_{abs}$  representa as perdas por absorção no meio de propagação:

$$\eta_{abs} \approx e^{-\alpha r} ,$$

$\alpha$  é a constante de perdas do meio. Em geral a propagação se dá no ar, e as perdas podem ser desprezadas, mas já nas microondas  $\alpha$  é bastante dependente da umidade do ar e outros fatores. O fator  $\eta_{pol}$  está associado ao descasamento das polarizações:

$$\eta_{pol} = |\hat{\epsilon}_{\mathbf{T}} \cdot \hat{\epsilon}_{\mathbf{R}}^*|^2 .$$

Já a quantidade  $\eta_g$  corresponde ao desalinhamento dos lóbulos principais, sendo dado por

$$\eta_g = \frac{G_T(\theta, \varphi)}{G_T} \frac{G_R(\theta, \varphi)}{G_R} = g_T(\theta, \varphi) g_R(\theta, \varphi) .$$

Finalmente,  $\eta_{refl}$  corresponde ao efeito das ondas refletidas:

$$\eta_{refl} = |1 + \sqrt{g_r(\theta, \varphi) g_t(\theta, \varphi)} \Gamma| e^{i\theta_r} e^{ik\Delta r}|^2$$

onde  $\Gamma$  é o coeficiente de reflexão no ponto de reflexão especular e  $\Delta r$  é a diferença de caminho entre a onda direta e a onda refletida.

### A fórmula de Friis em dB

Podemos passar a expressão (9.125) para escala em dB:

$$10 \log_{10} \left[ \frac{P_R}{P_T} \right] = 10 \log_{10} \left( G_T G_R \frac{\lambda^2}{(4\pi r)^2} T \right) ,$$

Utilizando as propriedades de logaritmos temos:

$$G_S = P_R(\text{dBm}) - P_T(\text{dBm}) = G_T(\text{dBi}) + G_R(\text{dBi}) + G_{FS}(\text{dB}) + T(\text{dB}) ,$$

sendo:

$$G_T(\text{dBi}) = 10 \log_{10}[G_T] \quad \text{e} \quad G_R(\text{dBi}) = 10 \log_{10}[G_R] ,$$

$$T(dB) = 10 \log_{10}[T] ,$$

$$G_{FS}(dB) = 10 \log_{10} \left( \frac{\lambda^2}{(4\pi r)^2} \right) = -A_{FS}(dB) .$$

Vamos trabalhar a expressão para atenuação do espaço livre (FS=free space):

$$A_{FS}(dB) = -10 \log_{10} \left( \frac{\lambda^2}{(4\pi r)^2} \right) = 10 \log_{10} \left( \frac{(4\pi r)^2}{\lambda^2} \right) ,$$

Lembrando que:

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

temos:

$$A_{FS}(dB) = 20 \log_{10} \left( \frac{(4\pi r f)^2}{c^2} \right) = 20 \log_{10}(4\pi) + 20 \log_{10} \left( \frac{r f}{c} \right) .$$

Podemos utilizar agora:

$$r(m) = 10^3 r(km) , \quad f(Hz) = 10^6 f(MHz) \quad \text{e} \quad c = 3 \times 10^8 \text{m/s} ,$$

para obter

$$A_{FS}(dB) = 32.44 + 20 \log_{10}[r(km)] + 20 \log_{10}[f(MHz)] . \quad (9.126)$$

Se a frequência é expressa em GHz tem-se

$$A_{FS}(dB) = 92.44 + 20 \log_{10}[r(km)] + 20 \log_{10}[f(GHz)] . \quad (9.127)$$

A fórmula de Friis em escala decibel pode ser finalmente escrita como:

$$P_R(dBm) = P_T(dBm) + G_T(dBi) + G_R(dBi) + T(dB) - A_{FS}(dB) \quad (9.128)$$

onde

$$A_{FS}(dB) = 32.44 + 20 \log_{10}[r(km)] + 20 \log_{10}[f(MHz)]$$

ou

$$A_{FS}(dB) = 92.44 + 20 \log_{10}[r(km)] + 20 \log_{10}[f(GHz)]$$

Lembrando que o fator de transmissão  $T$  é geralmente negativo, ou seja, representa uma atenuação causada por diversos fatores, que foram citados anteriormente.

### 9.8.13 Cálculo da Amplitude de Pico do Campo Elétrico

Muitas vezes é relevante determinar a amplitude máxima do campo elétrico de um sistema radiante. Da definição de ganho, podemos escrever a densidade de potência radiada como a forma:

$$S_{rad}(r, \theta, \varphi) = \frac{G_T(\theta, \varphi) P_T}{4\pi r^2} .$$

Para um observador medindo o campo distante, ou de radiação essa onda deve se parecer a uma onda plana, temos:

$$S_{rad}(r, \theta, \varphi) = \frac{E_0^2}{2Z} ,$$

onde  $E_0(r, \theta, \varphi)$  é a amplitude de pico do campo em módulo, na posição  $(r, \theta, \varphi)$ .  $Z$  é a impedância característica do meio. Juntando as equações e utilizando para o ar o valor  $Z \approx 377\Omega = 120\pi\Omega$ , temos:

$$E_0(r, \theta, \varphi) = \frac{\sqrt{60G_T(\theta, \varphi)P_T}}{r}. \quad (9.129)$$

O máximo valor de  $E_0$  a uma dada distância  $r$  ocorre para os valores  $(\theta, \varphi)$  no qual  $G_T(\theta, \varphi)$  é máximo. É importante notar que o valor RMS é dado por  $E_0/\sqrt{2}$ .

Em um sistema típico de telefonia celular  $P_T = 10\text{mW}$ ,  $G_T = 10$  e  $r = 1000\text{m}$ , de onde tiramos:

$$E_0 = 2.4[\text{mV/m}]$$

É claro que a 100m da antena transmissora esse valor é 10 vezes maior.

### 9.8.14 A equação do radar

Um radar é um sistema de detecção e localização de alvos à distância, utilizando para tanto o espalhamento da radiação eletromagnética incidente em um alvo. Existem várias aplicações para radares, desde militares até meteorológicas. Consideremos um radar conforme a Figura 9.17.

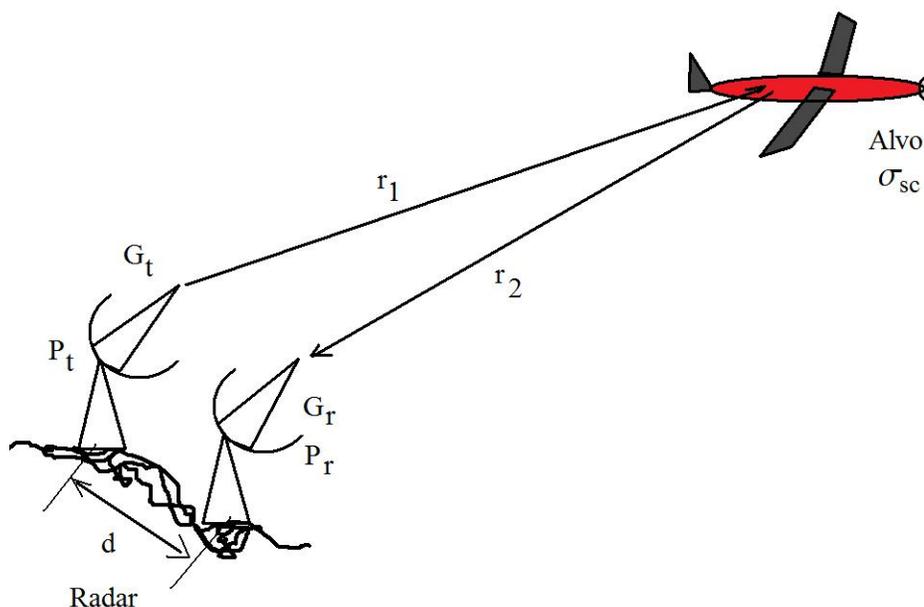


Figure 9.17: Um sistema de radar típico.

↪ Se  $d \ll r_1, r_2$  então  $r_1 \approx r_2 = r$ .

↪ A antena transmissora do radar cria uma densidade de potência no alvo dada por:

$$S_{rad} = \frac{G_T P_T}{4\pi r^2}$$

↪ O alvo é caracterizado por sua seção de choque ou seção de espalhamento (scattering cross section), em  $\text{m}^2$ ,  $\sigma_{sc}$ . Na prática  $\sigma_{sc}$  é função da direção, mas vamos assumir o valor médio. O alvo então coleta uma certa quantidade de potência. Se não houverem perdas essa potência será espalhada pelo alvo. Aqui vamos assumir que seja de forma isotrópica tal que:

$$P_{sc} = S_{rad}\sigma_{sc}$$

gerando assim uma densidade de potência espalhada na região da antena receptora, dada por:

$$S_{sc} = \frac{S_{rad}\sigma_{sc}}{4\pi r^2} = \frac{G_T P_T \sigma_{sc}}{(4\pi)^2 r^4}$$

A antena receptora tem uma certa área efetiva  $A_{ef} = G_R \lambda^2 / (4\pi)$ , de tal forma que:

$$P_R = \frac{P_T G_T G_R \sigma_{sc} \lambda^2}{(4\pi)^3 r^4} . \quad (9.130)$$

Em geral os radares operam com uma única antena para transmitir e receber de tal forma que  $G_T = G_R = G$ . Nesse caso podemos estimar o alcance do radar:

$$r_{\max} = \left( \frac{P_T G^2 \lambda^2 \sigma_{sc}}{P_R (4\pi)^3} \right)^{1/4} \quad (9.131)$$

onde  $P_R$  é a mínima potência que deve ser recebida pelo sistema receptor, conhecida como sensibilidade do receptor.

Um radar pode detectar tanto posição quanto velocidade do alvo. A distância do alvo é simplesmente dada por:

$$r = \frac{c\Delta t}{2} ,$$

onde  $\Delta t$  é o tempo transcorrido entre a emissão de um pulso de radar e o sinal recebido. Já a velocidade é obtida por efeito Doppler:

$$\Delta f = \pm 2 \frac{v}{c} f_0 ,$$

onde  $\Delta f$  é um desvio de frequência em relação a uma portadora  $f_0$ , positivo se o alvo se aproxima e negativo se o alvo se afasta. A expressão acima é válida quando  $v \ll c$ .

## 9.9 Impedância de Antena

A impedância de uma antena caracteriza-a como elemento de circuito e é dada por:

$$Z_A = R_{rad} + R_{ohm} + iX_A , \quad (9.132)$$

sendo

↪  $R_{rad}$  a resistência de radiação.

↪  $R_{ohm}$  a resistência de perdas por efeito Joule, etc.

↪  $X_A$  é a reatância da antena, que está associada ao campo eletromagnético armazenado, ou seja, o campo próximo.

Lembrando que:

$$P_A = \frac{1}{2} Z_A |I_0|^2 ,$$

onde  $I_0$  é a corrente de pico aplicada à antena no ponto de alimentação, temos:

$$P_{rad} = \frac{1}{2} R_{rad} |I_0|^2$$

Invertendo a relação acima, podemos escrever:

$$R_{rad} = \frac{2P_{rad}}{|I_0|^2} = \frac{2}{|I_0|^2} \int_{\Omega} r^2 S_{rad}(r, \theta, \varphi) d\Omega \quad (9.133)$$

A resistência de perdas é dada por:

$$R_{ohm} = \frac{1}{|I_0|^2} \int_{V'} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}^* dV' = \frac{1}{\sigma |I_0|^2} \int_{V'} \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^* dV' \quad (9.134)$$

onde  $V'$  é o volume da antena.

A reatância de uma antena representa a energia armazenada pela mesma, e no regime harmônico é dada por:

$$X_A = \frac{4\omega}{|I_0|^2} \int_{V'} (w_m - w_e) dV' , \quad (9.135)$$

sendo:

$$w_m = \frac{1}{4} \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* , \quad (9.136)$$

$$w_e = \frac{1}{4} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* . \quad (9.137)$$

$\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  representam o campo próximo nas equações (9.136) e (9.137).

Uma expressão para o dipolo elétrico curto é dada por:

$$X_A = -\frac{120}{\pi(d/\lambda)} \left[ \ln \left( \frac{d}{2a} - 1 \right) \right] \text{ Ohms} .$$

Uma vez que a parcela reativa pode ser compensada, em princípio a eficiência de uma antena está relacionada à parte resistiva da sua impedância. Vejamos:

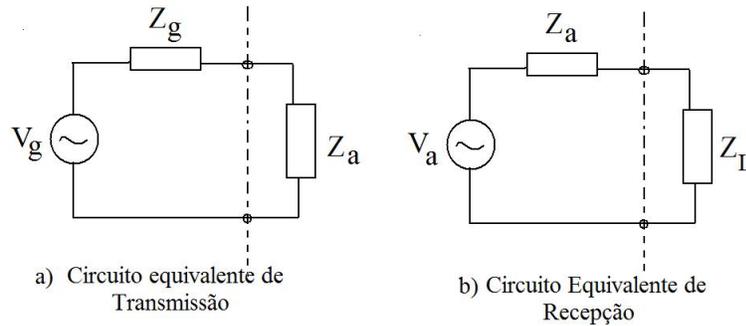
$$\eta = \frac{P_{rad}}{P_{in}} = \frac{P_{rad}}{P_{rad} + P_{ohm}} ,$$

de onde resulta:

$$\eta = \frac{R_{rad}}{R_{rad} + R_{ohm}} .$$

Para o dipolo elétrico  $R_{rad} \propto \omega^2$  e  $R_{ohm} \propto \sqrt{\omega}$  e portanto para frequências mais altas predomina a resistência de radiação, fazendo com que  $\eta \rightarrow 1$ .

### Circuitos Equivalentes e Casamento de Impedância



Lembrando que:

↪ O teorema da máxima transferência de potência exige que para a antena transmissora:

$$Z_A = Z_G^*$$

enquanto que para a recepção:

$$Z_A = Z_L^*$$

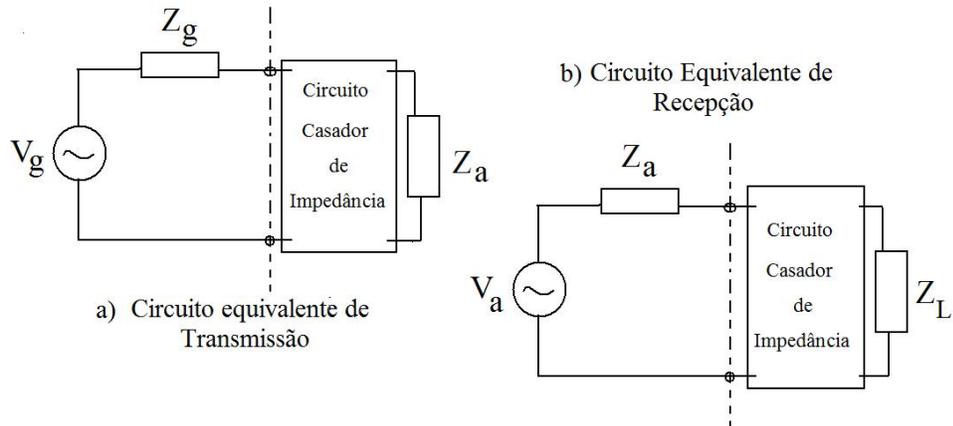
↪ Para antenas filamentosas, como o dipolo, atuando como receptoras, a tensão induzida na antena é dada por:

$$V_A = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

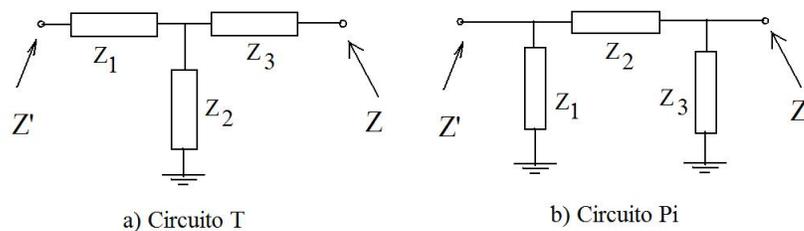
enquanto em antenas magnéticas pode-se obter a tensão induzida na antena pela lei de Faraday:

$$V_A = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

↪ Em geral é necessário algum circuito de casamento para cumprir o teorema de máxima transf. de potência



Os circuitos de casamento de impedância usuais podem se utilizar de transformadores, bem como das configurações abaixo:



### 9.9.1 Considerações sobre Ruído em Antenas

↪ Qualquer sistema físico real apresenta um nível de ruído que se superpõem ao sinal desejado, produzindo um prejuízo à performance do sistema. Uma antena em um sistema de comunicação ou radar, captura, além dos sinais desejados, outros sinais que estão presentes no espaço, e que muitas vezes situam-se na mesma faixa espectral de atuação da antena.

↪ Dentre as fontes de ruído para uma antena podemos citar como principais o céu (o sol é fonte de ruído branco), o solo, fontes construídas pelo homem, e o próprio ruído térmico interno da antena.

É usual definir a potência de ruído a partir de uma temperatura efetiva de ruído. Para o caso da antena tem-se:

$$P_N = k_B \cdot T_A \cdot \Delta f ,$$

onde:

↪  $P_N$  é a potência de ruído (noise);

↪  $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{J/K}$  é a constante de Boltzmann,

$\rightsquigarrow \Delta f$  é a largura espectral do sistema .

Para os sinais externos, podemos definir a temperatura efetiva da antena na forma:

$$T_A = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} T(\theta, \varphi) G(\theta, \varphi) d\Omega , \quad (9.138)$$

ou , através de uma simplificação:

$$T_A = \eta_{ceu} T_{ceu} + \eta_{solo} T_{solo}$$

sendo  $\eta_{ceu}$  e  $\eta_{solo}$  valores relativos entre 0 e 1. Usualmente:

$$T_{ceu} = 3 - 10K$$

$$T_{solo} = 290K$$

Levando-se em conta todo o ruído do sistema podemos definir:

$$T_N = T_A + T_{sys}$$

e então

$$P_N = k_B \cdot T_N \cdot \Delta f . \quad (9.139)$$

Para avaliar o desempenho de um sistema é usual utilizar a relação sinal ruído:

$$SNR = \frac{P_R}{P_N} ,$$

onde  $P_R$  é a potência recebida pela antena.

$$P_R = P_T \frac{G_T G_R \lambda^2}{(4\pi r)^2} ,$$

de forma que:

$$SNR = \frac{P_T G_T G_R}{k_B T_N (\Delta f)} \frac{\lambda^2}{(4\pi r)^2} . \quad (9.140)$$

Utilizando o Teorema de Shannon, obtém-se um valor limite para a taxa de transmissão:

$$C = \Delta f \log_2(1 + SNR) \text{ bits/sec} , \quad (9.141)$$

se a taxa de repetição  $R$  cumpre com  $R < C$  então haverá algum código de transmissão que permite ao sistema operar corretamente. O valor máximo é dado por:

$$R = \frac{1}{(E_b/E_N)} \frac{P_T G_T G_R}{k_B T_N} \frac{\lambda^2}{(4\pi r)^2} . \quad (9.142)$$

onde  $E_b$  é a energia disponível por bit e  $E_N = k_B T_N$ .

## 9.10 Emissão e Absorção de Radiação no Espectro Óptico e Acima

A radiação de ondas eletromagnéticas em frequências ópticas e/ou acima é produzida no domínio dos átomos e moléculas. Na escala atômica de dimensões não é mais possível tratar os fenômenos eletromagnéticos apenas pelo seu caráter ondulatório. É necessário apelar para a dualidade onda-partícula e o conceito quântico de **fóton**, que é o menor pacote de energia de uma onda de frequência  $f$  e carrega uma energia:

$$E_f = hf , \quad (9.143)$$

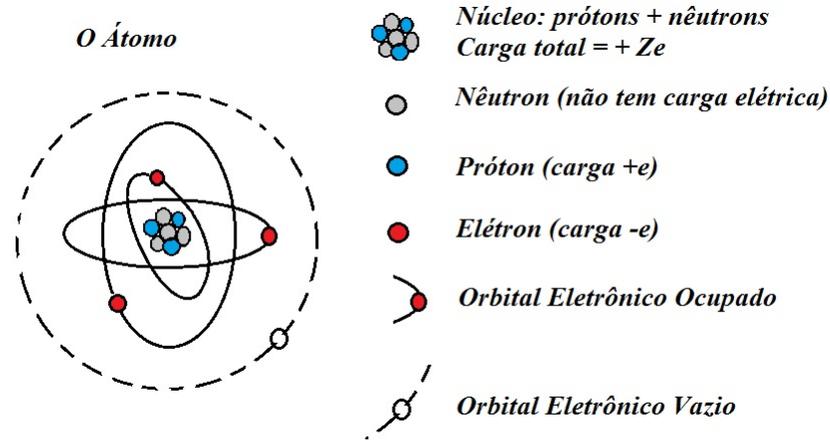


Figure 9.18: Representação esquemática simplificada de um átomo.

onde  $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{J}\cdot\text{s}$  é a constante de Planck. Um átomo no estado fundamental é capaz de absorver radiação eletromagnética, se a diferença de energia entre seu estado inicial  $E_0$  e final  $E_1$  for igual ao quantum da radiação, ou seja

$$E_1 - E_0 = hf,$$

Se um átomo está em um estado de mais alta energia  $E_1$ , poderá emitir radiação, indo para um estado  $E_0$ , com frequência da radiação determinada pela conservação de energia

$$f = \frac{E_1 - E_0}{h}.$$

A Figura 9.19 ilustra essas situações.

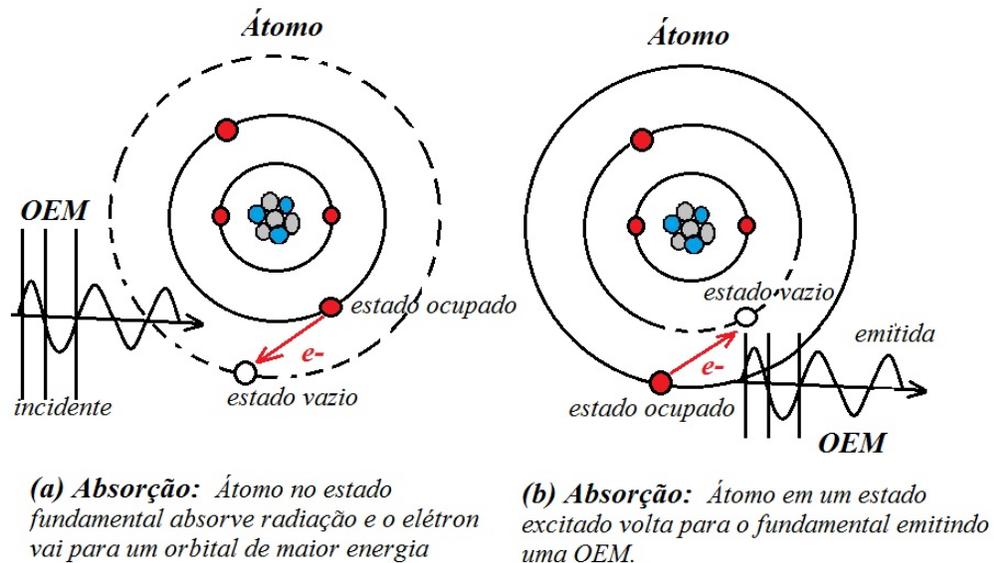


Figure 9.19: Emissão e Absorção de Fótons na presença da radiação eletromagnética.

### A Radiação Eletromagnética Ionizante

⇒ Considera-se radiação ionizante aquela para qual o fóton associado tem energia maior do que 10eV. (1eV =  $1.6 \times 10^{-19}$  joules)

⇒ Raios Ultravioleta (alguns eV até 100 eV)

⇒ Raios X (100eV até 100keV)

⇒ Raios  $\gamma$  (acima de 100keV)

• Os fótons muito energéticos dessas radiações são capazes de arrancar elétrons do átomo ao serem absorvidos. O elétron fica livre e deixa um íon de carga  $+e$ . Esse tipo de radiação afeta a estrutura das moléculas como o DNA, e são altamente penetrantes e nocivas à saúde.

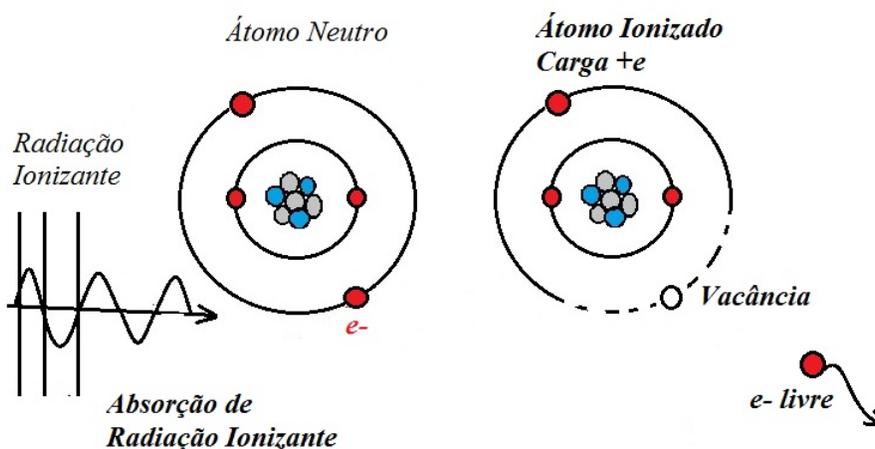


Figure 9.20: Ação da radiação ionizante: após absorver um fóton da radiação o elétron é ejetado do átomo ou molécula produzindo ionização.

• Microondas não são ionizantes, mas excitam vibrações moleculares e por isso são utilizadas em aplicações como o forno de microondas. Ondas de frequência 2,4GHz são confinadas em uma cavidade metálica. Ao serem absorvidas fazem as moléculas de água do alimento vibrar. Essas transferem parte da vibração para os outros átomos do alimento, difundindo o calor gerado por todo o alimento.

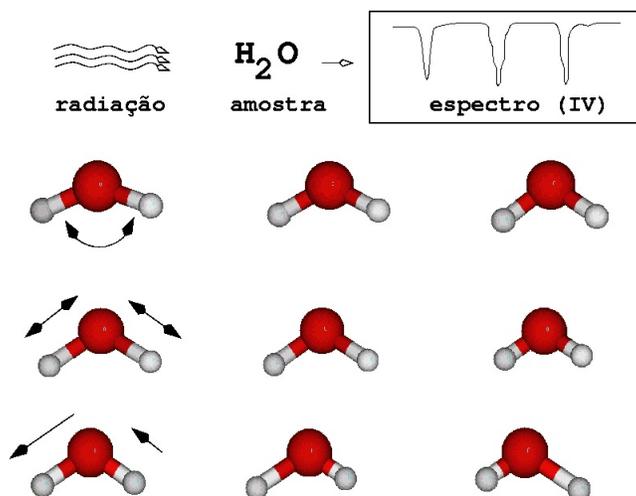


Figure 9.21: Vibrações da molécula de água na presença de radiação no espectro de microondas.

A Anatel regulamenta a exposição dos seres humanos à radiação eletromagnética através da Resolução 303 de 2 de julho de 2002: "Aprova o Regulamento sobre Limitação da Exposição a Campos Elétricos, Magnéticos

e Eletromagnéticos na Faixa de Radiofrequências entre 9 kHz e 300 GHz.” Estabelece-se conforme normas internacionais que o máximo admissível de radiação é 2W/kg. Como referência, para a potência de 1W a uma distância de 5cm da antena temos:

$$S_{med} = \frac{1}{4\pi(0,05)^2} = 31,83\text{W/m}^2 .$$

São potências típicas em aplicações de RF:

- Forno de Microondas: 700 – 1400W no interior da cavidade. Vazamento de radiação deve ser menor do que 1W, por norma.
- Estação de Rádio FM (alcance de 50km): 100kW.
- Telefone Celular: 2W de pico, depois reduz entre 10 e 100 vezes indo para menos de 500mW. ERB Celular: 50-100W típico.
- Sistema de Wifi: em torno de 100mW.

## 9.11 Referências deste Capítulo

[9.1] John D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (Wiley and Sons, New York, 3rd. Ed., 1998).

[9.2] Matthew N.O. Sadiku, *Elementos do Eletromagnetismo* (Ed. Bookman, Porto Alegre, 5a. Ed, 2005).

[9.3] John R. Reitz, Frederick J. Milford, Robert W. Christy, *Fundamentos da Teoria Eletromagnética* (Ed. Campus).

[9.4] Sophocles Orfanidis, *Electromagnetic Waves and Antenna Theory*, disponível livremente em [www.ece.rutgers.edu/orfanidi/ewa](http://www.ece.rutgers.edu/orfanidi/ewa).

[9.5] W.L. Stutzman, G.A. Thiele, *Antenna Theory and Design*, John Wiley, 2a Edição.

[9.6] Carl H. Durney and C.C. Johnson, *Introduction to Modern Electromagnetics*, McGraw-Hill.

## 9.12 Problemas Propostos

- 1) Mostre que os campos definidos em termos dos potenciais escalar e vetor,  $\phi$  e  $\mathbf{A}$ , na forma abaixo:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t},$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$

satisfazem automaticamente as duas equações de Maxwell sem fontes  $\rho$  e  $\mathbf{J}$ . Encontre as equações de ondas para os potenciais no calibre de Lorenz,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0,$$

a partir das equações de Maxwell com fontes.

- 2) Dada a densidade de corrente abaixo, para antena conhecida como dipolo elétrico ideal:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}') = I_0\delta(x')\delta(y')\hat{\mathbf{a}}_z \quad , \quad -\frac{d}{2} \leq z \leq \frac{d}{2}$$

sendo  $\delta(x')$  e  $\delta(y')$  as funções impulso ou delta de Dirac determine  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ . Analise as componentes de campo e extraia os campos de radiação (considerar somente as componentes de campo que variam com  $1/r$ ), a densidade de potência radiada e a potência radiada.

- 3) Descreva as principais características do campo próximo e do campo distante gerado por uma antena. Em que escala de distâncias o campo próximo é dominante e em que escala estaremos na região de campo distante. Qual o significado físico do campo distante? Discuta o vetor de Poynting de radiação para propagação não guiada, ou em outras palavras, por qual motivo  $S_{rad} \propto 1/r^2$ . Como seria a densidade de potência em um mundo bidimensional?
- 4) É sabido que o campo distante (ou de radiação) de uma antena depende essencialmente do potencial vetor transverso:

$$\mathbf{A}_{\perp} = \mathbf{A} - A_r \hat{\mathbf{a}}_r = (0, A_{\theta}, A_{\varphi}) , \quad (9.144)$$

onde  $A_r$  é a componente radial do potencial vetor  $\mathbf{A}$ , calculado através da expressão:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 e^{i(\omega t - kr)}}{4\pi r} \vec{\mathcal{I}}(k, \theta, \varphi) , \quad (9.145)$$

sendo  $k$  o número de onda e  $\mathcal{I}(k, \theta, \varphi)$  a transformada de Fourier da distribuição de densidade corrente na região fonte, que leva do espaço  $\mathbf{r}' = (x', y', z')$  (coordenadas na região fonte) para o espaço recíproco de vetor de onda  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z) = k(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ , ou seja:

$$\vec{\mathcal{I}}(k, \theta, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{J}(x', y', z') e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} dx' dy' dz' . \quad (9.146)$$

Para uma antena filamental orientada ao longo do eixo  $z$  temos:

$$\mathbf{J}(x, y, z) = I(z) \delta(x) \delta(y) \hat{\mathbf{a}}_z . \quad (9.147)$$

Pede-se:

- (a) Demonstre, utilizando a distribuição (9.147), que para uma antena filamental a equação (9.146) reduz-se a :

$$\vec{\mathcal{I}}(k \cos \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} I(z') e^{i(k \cos \theta) z'} dz' \hat{\mathbf{a}}_z = \mathcal{F}(k \cos \theta) \hat{\mathbf{a}}_z . \quad (9.148)$$

- (b) Suponha uma distribuição de corrente uniforme ao longo de um fio que se estende sobre o eixo  $z$  desde  $-d/2$  até  $d/2$ , ou seja,  $I(z) = I_0$  para  $|z| \leq d/2$  e  $I(z) = 0$  se  $|z| > d/2$ . Encontre a transformada de Fourier  $\mathcal{F}(k \cos \theta)$  dessa distribuição de corrente .

- (c) Converta então  $\hat{\mathbf{a}}_z$  para coordenadas esféricas conforme realizado em aula e determine o campo elétrico e magnético de radiação:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{rad} &= -i\omega[\mathbf{A} - A_r \hat{\mathbf{a}}_r] \\ \mathbf{H}_{rad} &= \frac{1}{Z} \hat{\mathbf{a}}_r \times \mathbf{E}_{rad} \end{aligned}$$

- (d) Encontre a densidade de potência radiada por essa antena e esboce o diagrama de radiação (ou o ganho) em função de  $\theta$  para  $d = 2\lambda$ . Quantos lóbulos se podem perceber no plano  $(x, z)$ ?

- 5) Demonstre que para o dipolo elétrico curto temos:

$$S_{rad} = \frac{ZI_0^2}{32} \frac{d^2}{\lambda^2} \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta$$

Demonstre que:

$$\int_{\Omega} \sin^2 \theta d\Omega = \frac{8\pi}{3}$$

e ainda que a diretividade angular de um dipolos é dada por:

$$D(\theta, \varphi) = \frac{3}{2} \sin^2 \theta \quad (9.149)$$

- 6) Consideremos uma antena do tipo dipolo magnético constituído de uma espira circular de raio  $a \ll \lambda$  e módulo do momento magnético dado por  $m = \pi a^2 I_0$ , onde  $I_0$  é a amplitude da corrente que circula pela espira. Essa espira produz um potencial vetor magnético  $\mathbf{A}$ , na condição  $r \gg a$  e  $a \ll \lambda$  mostrado abaixo:

$$\mathbf{A} = \frac{ik\mu_0 m e^{i(\omega t - kr)}}{4\pi r} \sin \theta \hat{\mathbf{a}}_{\varphi}.$$

- a) Demonstre que o potencial do dipolo é dado pela expressão acima, a partir da distribuição de corrente em uma espira circular.  
 b) Encontre os campos de radiação  $\mathbf{E}_{rad}$  e  $\mathbf{H}_{rad}$ , a partir do potencial vetor  $\mathbf{A}$  dado. Se o plano de terra é o plano  $(x, y)$  essa antena tem polarização vertical ou horizontal?  
 c) Mostre que o vetor de Poynting de radiação dessa antena é dado por

$$S_{rad} = \frac{\pi^4 Z_0 I_0^2}{2r^2} \left( \frac{a^2}{\lambda^2} \right)^2 \sin^2 \theta.$$

Determine então a potência total radiada  $P_{rad} = \int_{\Omega} r^2 S_{rad} d\Omega$ .

- d) Determine a diretividade do dipolo magnético. Aponte as dualidades/simetrias em relação ao dipolo elétrico.  
 7) Descreva o significado físico do ganho de uma antena. Em outras palavras, o que é ganho de antena?

- 8) Deduza a fórmula de Friis,

$$P_r = P_t \frac{G_t G_r \lambda^2}{(4\pi r)^2},$$

para um link de comunicação em visada direta.

- 9) Demonstre que o valor de pico do campo elétrico radiado por uma antena na direção de máximo ganho da antena é dado por

$$E_0 = \frac{\sqrt{60 G_t P_{rad}}}{r} \quad [\text{V/m}],$$

onde  $G_t$  é o ganho da antena transmissora e  $P_{rad}$  a potência radiada por essa antena.

- 10) Qual a potência total radiada por um dipolo curto de comprimento 30 cm, carregando uma corrente de 500 mA, na frequência de 1MHz?  
 11) A fórmula de Friis relaciona potência transmitida e recebida na forma abaixo:

$$P_r = P_t \frac{G_t G_r \lambda^2}{(4\pi r)^2}$$

sendo  $G_t$  e  $G_r$  o ganho das antenas de transmissão e recepção, no seu valor máximo,  $\lambda$  o comprimento de onda e  $r$  a distância entre transmissor e receptor. É claro que a potência recebida depende da orientação relativa das antenas. Considere a fórmula de Friis para um link de comunicação sendo que as duas antenas são iguais e tem ganho  $G$ . A frequência utilizada no link é de  $f = 3$  GHz. Se o receptor tem sensibilidade para receber até  $-100\text{dBW}$  (converta para Watts), e estando localizado a 50km de distância do transmissor cuja potência transmitida é de 30 Watts:

- a) calcule o ganho das antenas  $G$ , em um dia normal, onde a fórmula de Friis acima é aplicável;
- b) calcule o coeficiente de atenuação  $\alpha$  e o coeficiente de fase  $\beta$  em um dia de chuva, onde os parâmetros do meio mudam. Num dia seco estamos considerando  $\alpha = 0$ , mas com a umidade crescente considere a aproximação para meios dielétricos com poucas perdas e considere a condutividade do ar nesse caso como sendo  $\sigma = 5 \times 10^{-8} \Omega^{-1} m^{-1}$ . A permissividade dielétrica relativa é  $\epsilon_r \approx 1$ ;
- c) A fórmula de Friis modifica-se por efeito da atenuação, considere simplesmente:

$$P_r = P_t \frac{G^2 \lambda^2}{(4\pi r)^2} T$$

onde  $T$  é o coeficiente de transmissão do meio:

$$T = \exp(-2\alpha r).$$

Devido à atenuação (interferência das condições do meio na propagação) haverá problemas na recepção do sinal? Se sim, aponte uma solução.

- 12)** Um sistema de broadcasting de TV via satélite opera a uma frequência de 12 GHz. A potência transmitida pelo satélite é 120W enquanto que o receptor é capaz de detectar sinais de  $2 \times 10^{-12}$  W (veja que a potência recebida é da ordem de pico-Watts!!!). Se a distância entre o satélite e o receptor é  $r = 36.000$ km e se a antena transmissora é igual à antena receptora, calcule o ganho  $G$  (em dB) de modo a que o sistema funcione adequadamente.
- 13)** Consideremos a fórmula de Friis aplicada a um sistema de comunicação móvel (telefonia celular por exemplo):

$$P_r = P_t \frac{G_t G_r \lambda^2}{(4\pi r)^2}$$

consistindo de uma antena na estação rádio-base (ERB) de ganho  $G = 13$ dB*i* e um telefone móvel utilizando um dipolo curto. Vamos desprezar os efeitos de atenuação no meio de propagação. A frequência utilizada no link é  $f = 1.85$  GHz.

- a) Qual é o raio de alcance da ERB para qua a comunicação não seja perdida em meio ao ruído se o aparelho móvel pode transmitir uma potência máxima de 3dB*m* e o receptor da ERB tem sensibilidade mínima de  $-93$ dB*m*? (converta as potências para mW!!)

A Anatel regulamenta os limites para exposição da população em geral a Campos Eletromagnéticos de RF através da Res. 303/2002, na faixa de radiofrequências entre 9 kHz e 300 GHz. Para a faixa de 400MHz até 2000MHz, a exposição máxima em termos do valor de pico do campo elétrico é dada pela fórmula

$$E_0(max) = 1.9445\sqrt{f} [V/m],$$

enquanto que em termos de densidade de potência vale a relação:

$$S_{rad}(max) = \frac{f}{200} [W/m^2],$$

onde  $f$  deve ser dada em MHz. Lembre ainda que, da teoria de antenas e da propagação de ondas temos  $S_{rad} = E_0^2/(2Z_0)$  onde  $E_0$  é o módulo do pico do campo elétrico e além disso  $S_{rad} = G_t P_t / (4\pi r^2)$  na direção do máximo ganho da antena.

- b) Determine a densidade de potência de radiação gerada pelo aparelho móvel a uma distância de 1cm da cabeça do usuário do aparelho. A partir desse valor, diga se é seguro utilizar um aparelho celular, de

acordo com a norma da Anatel.

c) Se a ERB transmite uma potência de total de 100W na faixa de 1.85GHz, qual é a distância mínima da antena que pode ser considerada segura para a população em geral?

- 14) A densidade de potência máxima gerada por uma antena de ganho 20 operando na frequência  $f = 2.4\text{GHz}$  a uma distância de 100m da mesma é de  $400\text{nW/m}^2$ . Determine:
- A potência de entrada nessa antena transmissora.
  - A densidade de potência e a intensidade do campo elétrico a 200m da antena.
  - A potência recebida por um aparelho receptor localizado a 100m da antena transmissora e utilizando uma antena de ganho  $G = 2$ .
- 15) O regime transiente de carga de um capacitor de placas paralelas pode ser descrito através dos potenciais eletromagnéticos  $\phi$  e  $\mathbf{A}$  na região  $0 \leq z \leq d$  entre as placas, dados aproximadamente pelas expressões abaixo, em coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned}\phi(\rho, \varphi, z, t) &= \phi_0 - E_0(1 - e^{-t/\tau})z \\ \mathbf{A}(\rho, \varphi, z, t) &= -\frac{E_0\rho^2}{4c^2\tau}e^{-t/\tau}\hat{\mathbf{a}}_z\end{aligned}$$

onde  $\phi_0$  é uma constante,  $E_0$  é o valor de pico do campo elétrico,  $c$  é a velocidade da luz no dielétrico entre as placas,  $\tau$  é a constante de tempo de carregamento,  $t$  é o tempo medido em segundos e  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  é a distância em relação ao eixo  $z$  em coordenadas cilíndricas.

Determine os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  entre as placas.

- 16) Pesquise e apresente dados de fabricantes para antenas reais, com seus diagramas de radiação. Procure dados de antenas de refletor parabólico, hélice quadrifilar, etc.
- 17) Descreva os sistemas de radar, encontrando uma "fórmula de Friis" equivalente para o radar monoestático (usa a mesma antena para transmitir e receber). Defina expressões que permitam determinar a distância e velocidade de um alvo. O que é o efeito Doppler e para que serve em radares? Cite aplicações de sistemas de radar.
- 18) Pesquisar e Explicar: Modelo de Thomson da Radiação. Potenciais de Liénard-Wiechert e A Carga Acelerada. Fórmula de Larmor. O problema da radiação de uma carga acelerada no modelo atômico de Rutherford e o modelo atômico quântico de Bohr.

# Chapter 10

## Ondas guiadas

Ondas eletromagnéticas na presença de contornos metálicos formam um aspecto prático de muita importância para a transmissão da energia eletromagnética, através de estruturas que denominamos guias de onda. Estruturas dielétricas com índice de refração que varia no espaço, como é o caso das fibras ópticas também são capazes de produzir guiamento e tem importância fundamental para os atuais sistemas de comunicações.

Podemos definir uma onda guiada da seguinte maneira:

- A onda eletromagnética possui uma direção preferencial de propagação a qual denominamos  $z$ . Para a análise matemática é conveniente, portanto utilizar um sistema cilíndrico, para citar exemplos, o cartesiano, o circular, o elíptico-cilíndrico, etc. No sistema cartesiano temos cilindros cuja seção transversal é um retângulo ao passo que no sistema circular o corte transversal produz círculos;
- O guiamento da onda é feito por uma estrutura, seja um cilindro metálico oco, ou uma fibra óptica, capaz de confinar a energia da onda a uma certa região do espaço, utilizando-se das propriedades de interface e condições de contorno entre meios distintos;
- Uma onda guiada pode ter suas componentes de campo decompostas em componentes transversais e longitudinais à direção  $z$ ;
- Ondas no espaço livre são do tipo Transversal Eletromagnética (TEM), e tanto o campo elétrico quanto o magnético são ortogonais à direção de propagação. No caso das ondas guiadas, podemos classificá-las em Ondas Transversais Elétricas (TE), onde somente o campo elétrico é transversal à direção  $z$ , ou Ondas Transversais Magnéticas (TM), onde somente o campo magnético é transversal à direção  $z$ . Guias ocos não são capazes de propagar ondas TEM. Apenas os guias coaxiais e as linhas de transmissão propagam modos TEM;
- São características de guias de onda o surgimento de modos de propagação (que nada mais são do que as formas de distribuição transversal do campo no interior do guia, cada modo propagando-se com uma velocidade específica) e o aparecimento de frequências de corte para cada modo, abaixo da qual a onda é apenas evanescente no interior do guia. Guias coaxiais não apresentam frequência de corte devido aos modos TEM.

Nos deparamos então com o seguinte problema: resolver as equações de Maxwell na presença de condições de contorno, que podem ser de Dirichlet ou Neumann, ou ainda outras mais complicadas.

## 10.1 Principais Tipos de Guias de Onda

Podemos classificar os guias de ondas em três grandes grupos principais, a saber: i) linhas de transmissão (LT), ii) guias de onda metálicos e iii) guias de onda dielétricos. Vamos discutir um pouco mais detalhadamente esses tipos.

**Linhas de Transmissão:** Muitos autores consideram as estruturas de LT como guias de ondas e outros preferem tratá-las em separado. A Linha de Transmissão deve ser constituída de pelo menos duas superfícies condutoras mantidas a uma diferença de potencial. Esse é um requisito para a admissão de soluções do tipo TEM, o que a diferencia dos demais tipos de guias. Os modos TEM não apresentam frequência de corte. Idealmente as LTs poderiam operar deste o regime DC até frequência  $f \rightarrow \infty$ , mas na prática as perdas em altas frequências limitam seu uso até o espectro de microondas. São exemplos típicos de LT, ilustrados na Figura 10.1, as seguintes estruturas: i) par de condutores, ii) guia coaxial, iii) microstrip lines. As linhas de

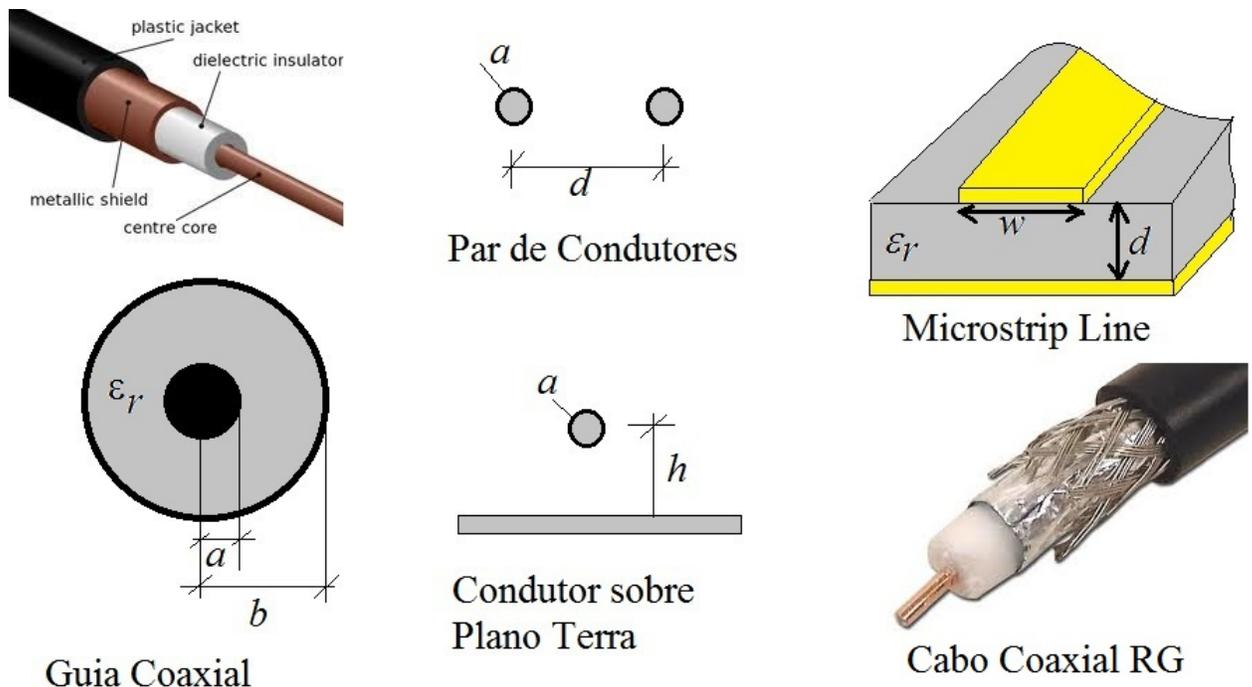


Figure 10.1: Linhas de Transmissão Típicas.

campo em LTs são ilustradas na Figura 10.2 .

Os **Guias de Ondas Metálicos**, por sua vez, são muito utilizados na faixa das micro-ondas, pois as dimensões em frequências menores os tornam inviáveis. Não admitem a existência de modos TEM e apresentam frequência de corte  $f_c$ , abaixo da qual não operam. Essa frequência de corte depende essencialmente da geometria e das dimensões do guia, bem como do material dielétrico no interior do guia. As geometrias mais utilizadas são a retangular e a circular e em geral são preenchidos de ar (ou vácuo, como primeira aproximação). A Figura ?? ilustra essas estruturas.

Já os **Guias de Ondas Dielétricos e a Fibra Óptica** são estruturas capazes de confinar e guiar ondas eletromagnéticas através das condições de contorno impostas entre meios de natureza dielétrica. A fibra óptica é um caso particular de guia de ondas dielétricos, utilizando geometria circular na sua seção transversal. A Figura 10.4 ilustra geometrias típicas.

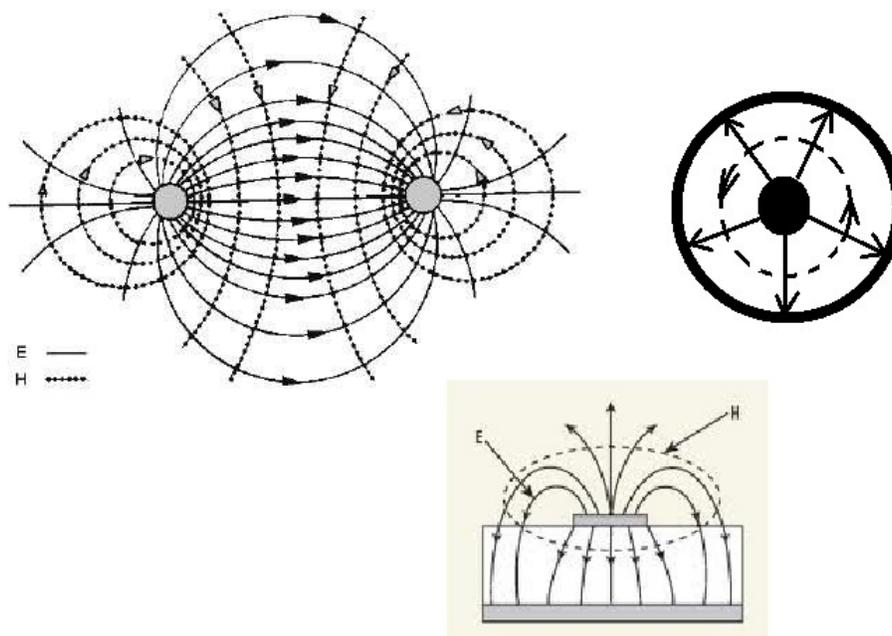


Figure 10.2: Formas do Campo nas Linhas de Transmissão Típicas.

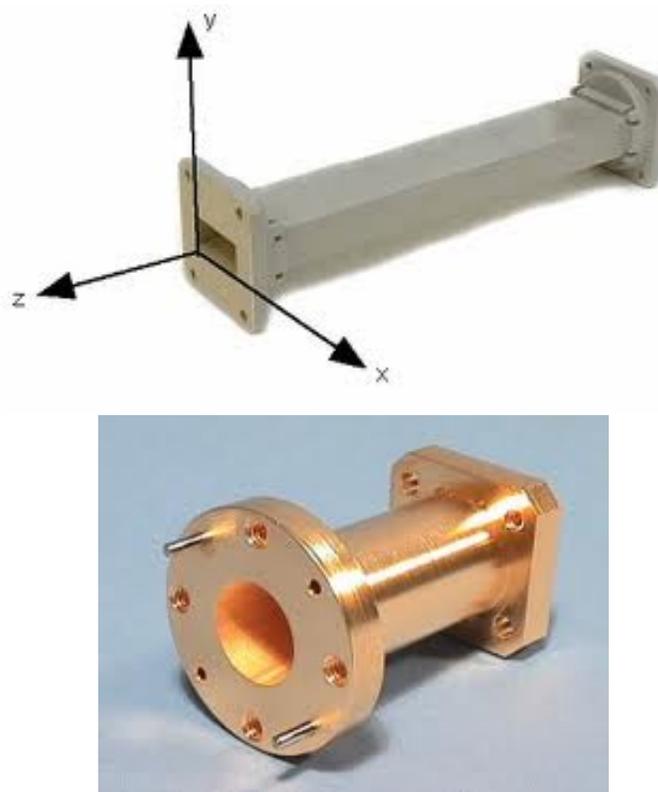


Figure 10.3: Guias de Onda Metálicos típicos utilizados no espectro de micro-ondas.

### 10.1.1 Formas de Abordagem para o estudo de Propagação de Ondas

No estudo de ondas eletromagnéticas são várias as possibilidades de abordagem:

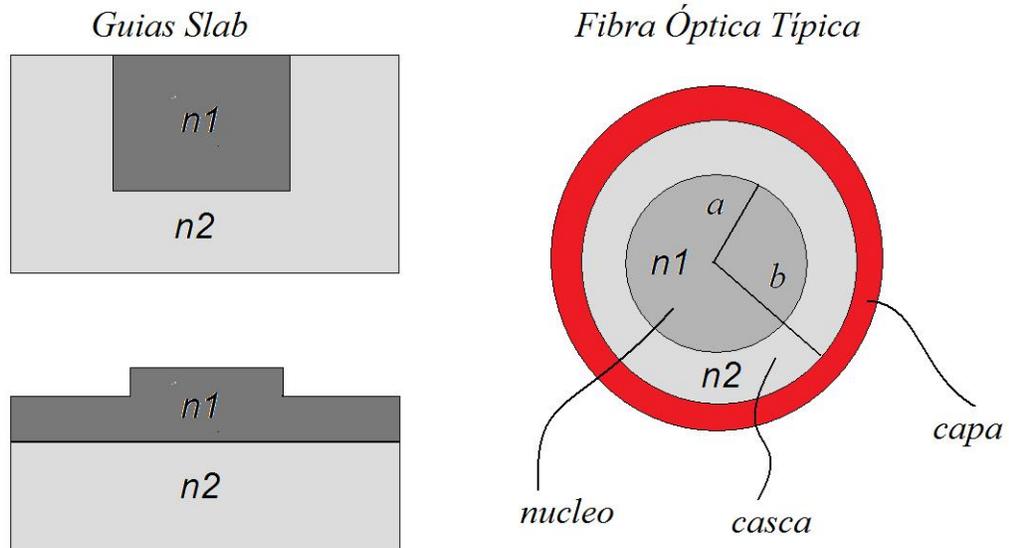


Figure 10.4: Guias Dielétricos Típicos:  $n_1$  e  $n_2$  são valores distintos de índice de refração dos dielétricos.

↪ Óptica Geométrica: negligencia os efeitos difrativos e as ondas são representadas por raios. Aplica-se bem em algumas situações em que  $d \gg \lambda$  e distâncias propagadas relativamente pequenas.

↪ Óptica Física/Teoria da Difração Escalar: onde negligencia-se o caráter vetorial das ondas eletromagnéticas. Muito útil no domínio óptico.

↪ Equações de Maxwell: leva em conta tanto o aspecto ondulatório quanto o caráter vetorial das ondas eletromagnéticas.

↪ No estudo de Ondas Guiadas podemos separar a análise em dois aspectos:

1) **Análise Modal:** preocupa-se apenas com a forma de distribuição e polarização dos campos, aplicação das condições de contorno impostas pelo guia de ondas, no domínio da frequência.

2) **Análise de Dispersão/Atenuação na Propagação de Sinais:** geralmente assume-se que o modo é conhecido, a preocupação é com aspectos dispersivos de sinais compostos por muitas frequências.

Para a realização de tais análises é útil uma abordagem matemática conhecida como decomposição transversal-longitudinal das equações de Maxwell.

## 10.2 A Decomposição Transversal-Longitudinal

Todo o guia de ondas produz o confinamento da densidade de potência da onda eletromagnética a uma certa região do espaço, dando um caminho (eixo) preferencial para a propagação da mesma. Vamos denotar este eixo por  $z$ , (longitudinal). São propriedades essenciais dos guias de onda recíprocos (nos quais a onda propagante e contra-propagante tem as mesmas características):

- Simetria de inversão espacial: as propriedades físicas não se alteram se fizermos a transformação de inversão  $z \rightarrow -z$ , apenas a onda propagante torna-se contra-propagante e vice-versa, com as mesmas características de propagação e distribuição de campos.

- Simetria de inversão temporal: as propriedades físicas não se alteram se fizermos a transformação de inversão  $t \rightarrow -t$ .

- Simetria de translação longitudinal: fazendo uma translação  $z' = z + z_0$  onde  $z_0$  é uma constante qualquer

a seção transversal do guia e portanto suas propriedades devem permanecer inalteradas  $\rightarrow$  invariância da seção transversal do guia em relação a  $z$ .

As simetrias do guia de onda sugerem fazer uma separação das variáveis e dos vetores em componentes longitudinais (ao longo de  $z$ ) e transversais (perpendiculares ao eixo  $z$ ). Denotaremos as coordenadas transversais por  $\mathbf{x}_\perp = (x_1, x_2)$ . Existem muitos sistemas ditos cilíndricos, sendo os mais conhecidos o retangular  $\mathbf{x}_\perp = (x, y)$  e o circular  $\mathbf{x}_\perp = (\rho, \varphi)$ . Fazendo uso da simetria, qualquer vetor e também o operador  $\nabla$  podem ser decompostos na forma

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_\perp + A_z \hat{\mathbf{a}}_z , \quad (10.1)$$

$$\nabla = \nabla_\perp + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{a}}_z . \quad (10.2)$$

Agora vamos aplicar essa decomposição às equações de Maxwell, consideradas em meios dielétricos não-magnéticos, na forma abaixo:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 , \quad (10.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 , \quad (10.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} , \quad (10.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} , \quad (10.6)$$

onde  $\mathbf{E}$  é o vetor campo elétrico em [V/m] e  $\mathbf{H}$  é o vetor campo magnético em [A/m]. Veja que estamos fazendo  $\mathbf{J} = 0$ , ou então incluindo os efeitos da lei de Ohm vetorial em  $\varepsilon$ , considerando a permissividade complexa nesse caso. Pela decomposição transversal-longitudinal devemos fazer:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_\perp + E_z \hat{\mathbf{a}}_z , \quad (10.7)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_\perp + H_z \hat{\mathbf{a}}_z . \quad (10.8)$$

São propriedades dos produtos transverso-longitudinais:

- Para o produto escalar:

$$\mathbf{A}_\perp \cdot B_z \hat{\mathbf{a}}_z = 0 , \quad (10.9)$$

$$\mathbf{A}_\perp \cdot \mathbf{B}_\perp = A_x B_x + A_y B_y , \quad (10.10)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_z \cdot \hat{\mathbf{a}}_z = 1 , \quad (10.11)$$

- Para o produto vetorial:

$$\mathbf{A}_\perp \times B_z \hat{\mathbf{a}}_z = \mathbf{C}_\perp , \quad (10.12)$$

$$\mathbf{A}_\perp \times \mathbf{B}_\perp = C_z \hat{\mathbf{a}}_z , \quad (10.13)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_z \times \hat{\mathbf{a}}_z = 0 , \quad (10.14)$$

Como exemplo vamos fazer a decomposição transverso-longitudinal da Lei de Faraday,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} ,$$

realizando a seguinte substituição:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_\perp + E_z \hat{\mathbf{a}}_z ,$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_\perp + H_z \hat{\mathbf{a}}_z ,$$

$$\nabla = \nabla_\perp + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{a}}_z .$$

Nesse caso temos:

$$\left( \nabla_{\perp} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{a}}_z \right) \times (\mathbf{E}_{\perp} + E_z \hat{\mathbf{a}}_z) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{H}_{\perp} + H_z \hat{\mathbf{a}}_z).$$

Coletando os termos longitudinais e transversais, obtemos:

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp} \times \mathbf{E}_{\perp} &= -\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} \hat{\mathbf{a}}_z, \\ \hat{\mathbf{a}}_z \times \left( \frac{\partial \mathbf{E}_{\perp}}{\partial z} - \nabla_{\perp} E_z \right) &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}_{\perp}}{\partial t}, \end{aligned}$$

Através do mesmo procedimento aplicado às demais equações de Maxwell, encontramos equações na forma transversal-longitudinal:

$$\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{E}_{\perp} = -\frac{\partial E_z}{\partial z}, \quad (10.15)$$

$$\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{H}_{\perp} = -\frac{\partial H_z}{\partial z}, \quad (10.16)$$

$$\nabla_{\perp} \times \mathbf{E}_{\perp} = -\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} \hat{\mathbf{a}}_z, \quad (10.17)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_z \times \left( \frac{\partial \mathbf{E}_{\perp}}{\partial z} - \nabla_{\perp} E_z \right) = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}_{\perp}}{\partial t}, \quad (10.18)$$

$$\nabla_{\perp} \times \mathbf{H}_{\perp} = \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \hat{\mathbf{a}}_z, \quad (10.19)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_z \times \left( \frac{\partial \mathbf{H}_{\perp}}{\partial z} - \nabla_{\perp} H_z \right) = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}_{\perp}}{\partial t}. \quad (10.20)$$

Observe que agora temos 6 equações, pois as duas equações em divergência são escalares mas as duas equações de Maxwell em rotacional se descobram nas suas componentes transversais e longitudinais. Os campos transversos  $\mathbf{E}_{\perp}$  e  $\mathbf{H}_{\perp}$  são responsáveis pelo transporte da energia ao longo do eixo  $z$  uma vez que a componente  $z$  do vetor de Poynting é dada por:

$$S_z = \mathbf{S}_{med} \cdot \hat{\mathbf{a}}_z = \frac{1}{2} \text{Re} (\mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{H}_{\perp}^*) \cdot \hat{\mathbf{a}}_z. \quad (10.21)$$

É interessante expressar os operadores transversos nos dois principais sistemas de coordenadas cilíndricas, o cartesiano e o cilíndrico circular.

**Coordenadas cartesianas:**

$$\nabla_{\perp} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{a}}_x + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{a}}_y.$$

$$\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

**Coordenadas cilíndricas circulares:**

$$\nabla_{\perp} = \hat{\mathbf{a}}_{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\mathbf{a}}_{\varphi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

$$\nabla_{\perp}^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

### 10.3 Conceitos Fundamentais sobre Análise Modal

Antes de prosseguirmos com as demonstrações matemáticas, é importante definir alguns conceitos fundamentais:

**Modos:** os modos são todas as possíveis soluções das equações de Maxwell sujeitas às condições de contorno impostas pelo guia de ondas. Do ponto de vista físico, correspondem às possíveis distribuições do campo eletromagnético e respectiva polarização no interior do guia. Em geral, existem modos contínuos e modos discretos, correspondendo às possíveis soluções.

↪ Qualquer campo eletromagnético no interior de um guia de ondas pode ser expresso como superposição de modos, assim como qualquer sinal periódico pode ser escrito na forma de uma série de Fourier. Nesse sentido os modos eletromagnéticos de um guia de ondas são as funções de base num espaço vetorial abstrato, permitindo expandir qualquer função nessa base de funções:

$$\mathbf{E} = \sum_m A_m \vec{E}_m(\mathbf{x}_\perp) e^{i(\omega t - \beta_m z)}$$

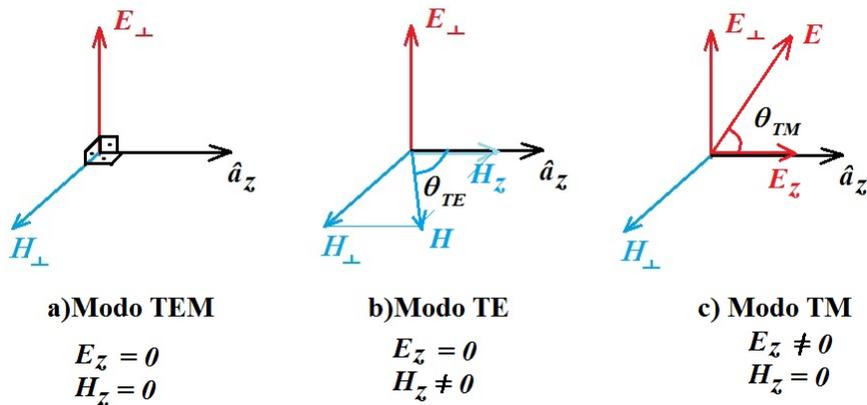
### 10.3.1 Tipos de Modos

Os modos podem ser classificados de acordo com as componentes de campo que possuem e também quanto à constante de propagação longitudinal  $k_z$ . Temos

A) Quanto ao caráter vetorial:

- Modos TEM (Transversal EletroMagnético)
- Modos TE (Transversal Elétrico)
- Modos TM (Transversal Magnético)
- Modos EH e HE ou Híbridos
- Modos LP (Linearmente Polarizados)

Os principais modos, **TEM**, **TE** e **TM**, são representados na Figura 10.3.1.



B) Quanto à constante  $\beta$ : (considerando-se meios sem perdas!!)

↪ Considerando apenas as soluções de onda propagantes em guias ideais sem perdas (dielétricos de condutividade nula e condutores ideais  $\sigma \rightarrow \infty$ ):

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_\perp + E_z \hat{\mathbf{a}}_z = \mathbf{E}_0(\mathbf{x}_\perp) e^{i(\omega t - \beta z)}, \quad (10.22)$$

sendo  $\beta$  uma função de  $\omega$  em geral e a mesma forma para  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_\perp + H_z \hat{\mathbf{a}}_z$ , temos:

$$\frac{\partial}{\partial z} \rightarrow -i\beta, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega.$$

Observe que:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\perp &= \mathbf{E}_{\perp 0}(\mathbf{x}_\perp) e^{i(\omega t - \beta z)}, \\ E_z &= E_{0z}(\mathbf{x}_\perp) e^{i(\omega t - \beta z)}. \end{aligned}$$

- **Modo Propagante:**  $\beta = \beta^*$ , ou seja,  $\beta$  é real, com soluções discretas.

- **Modo Evanescente:**  $\beta = -\beta^*$ , ou seja,  $\beta$  é imaginário puro e o campo no interior do guia terá decaimento exponencial  $e^{-|\beta|z}$ .

- **Modos de Radiação:** Para  $\beta = \beta^*$  existe ainda um contínuum de soluções que não são guiadas, mas propagam-se para fora do guia.

Para  $\beta$  complexo existem ainda soluções denominadas **Modos de Vazamento** (LEAKY MODES). Em uma fibra óptica os MODOS PROPAGANTES são ainda separados em MODOS DO NÚCLEO e MODOS DE CASCA.

- Guias metálicos ideais admitem apenas modos propagantes e evanescentes.

Podemos fazer para os modos com  $\beta$  real em guias dielétricos um diagrama, como o ilustrado na Figura 10.5.

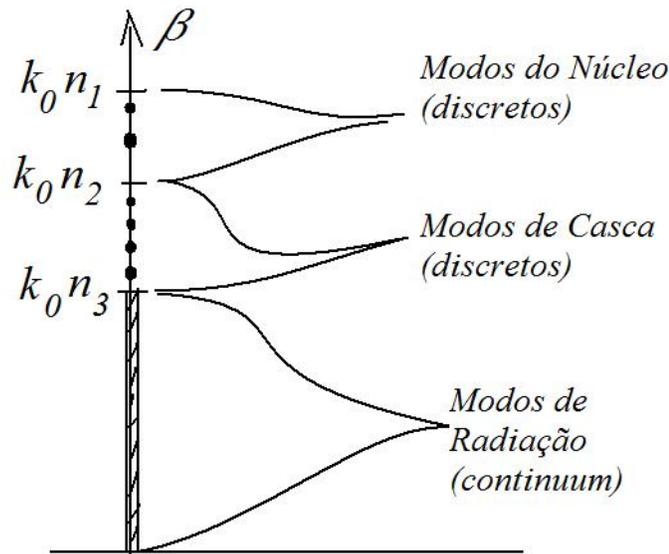


Figure 10.5: Diagrama de Modos Propagantes: Constante  $\beta$  real.

**Frequência de Corte**  $\omega_c = 2\pi f_c$ : é a frequência mínima para a qual um modo passa a ser propagante, ou é aquela na qual  $\beta = 0$  e acima da qual ocorre propagação.

⇒ É convencional agrupar as frequências de corte para os modos ditos propagantes em uma sequência crescente:

$$f_0 < f_1 < f_2 < f_3 < \dots$$

↪ **Modo Fundamental ou Modo Dominante** é aquele que possui a **menor frequência de corte dentre todos**. Nesse caso  $f_0$ .

↪ Modos Superiores são os outros modos capazes de se propagar.

- **Propagação Monomodal:** somente o modo fundamental se propaga na frequência de operação  $f$ , ou seja, ocorre na condição

$$f_0 < f < f_1 .$$

- **Propagação Multimodal:** além do modo fundamental pelo menos mais um modo é capaz de propagar-se na frequência de operação  $f$ , ou seja,

$$f > f_1 .$$

Um diagrama modal típico, onde faz-se o gráfico da velocidade de grupo normalizada  $v_p/c$  versus frequência angular  $\omega$  é apresentado na Figura 10.6.

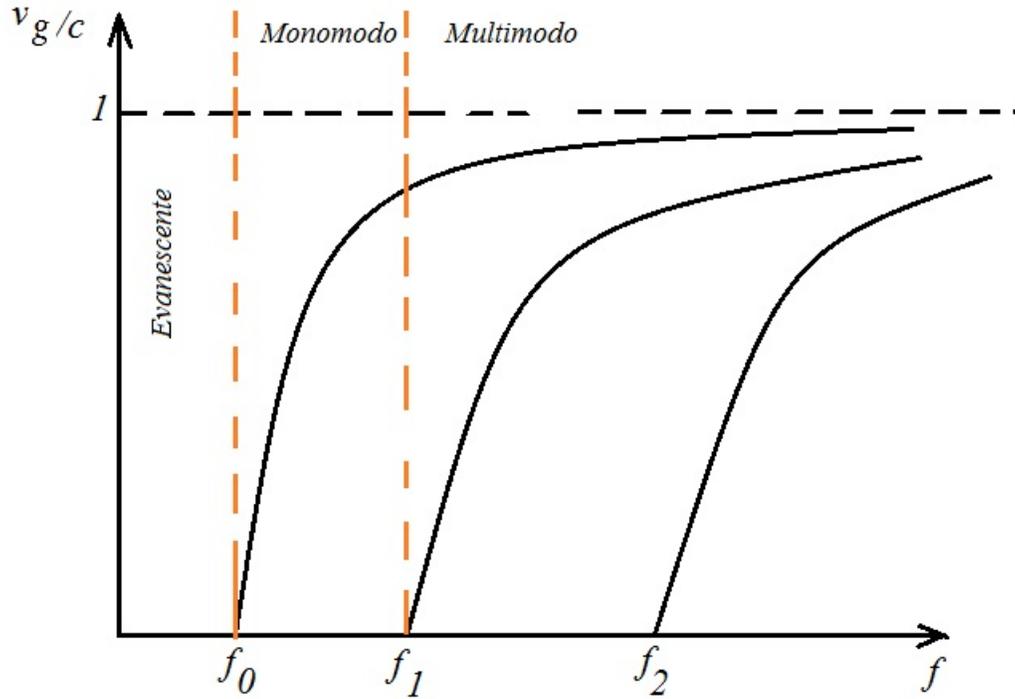


Figure 10.6: Velocidade de grupo  $v_g = c\beta/\omega = \beta/k$ .

### 10.3.2 Equações para modos TE ou TM no regime harmônico

No caso em que  $E_z \neq 0$  e/ou  $H_z \neq 0$ , correspondendo aos modos TE, TM ou híbridos, as equações de Maxwell transverso-longitudinais podem ser resolvidas para o regime harmônico, com soluções dependentes na forma  $e^{i(\omega t - k_z z)}$ , substituindo as derivadas  $\partial/\partial t \rightarrow i\omega$  e  $\partial/\partial z \rightarrow -ik_z$ , determinando-se os campos transversos  $\mathbf{E}_\perp$  e  $\mathbf{H}_\perp$  diretamente a partir das componentes longitudinais, conforme as equações abaixo:

$$\mathbf{E}_\perp = \frac{-ik_z}{k^2 - k_z^2} \left( \frac{\omega\mu}{k_z} \nabla_\perp H_z \times \hat{\mathbf{a}}_z + \nabla_\perp E_z \right), \quad (10.23)$$

$$\mathbf{H}_\perp = \frac{-ik_z}{k^2 - k_z^2} \left( \nabla_\perp H_z - \frac{\omega\varepsilon}{k_z} \nabla_\perp E_z \times \hat{\mathbf{a}}_z \right). \quad (10.24)$$

As expressões acima não são mais válidas para os modos TEM, quando  $E_z = 0$  e  $H_z = 0$  simultaneamente, já que temos os campos transversais ficam indeterminados pelo fato de que quando  $k = k_z$  nesse caso. Os campos longitudinais obviamente satisfazem a equação de ondas, e dadas as condições de contorno providenciadas pelo guia de ondas, podem ser prontamente resolvidos, através das equações

$$(\nabla_\perp^2 + k_\perp^2) E_z = 0, \quad (10.25)$$

$$(\nabla_\perp^2 + k_\perp^2) H_z = 0, \quad (10.26)$$

sendo  $k_\perp^2 = k^2 - k_z^2$ . O nosso problema então é resolver uma equação de Helmholtz bidimensional para  $E_z$  ou  $H_z$ . Vamos reescrever a expressão acima na forma abaixo:

$$(\nabla_\perp^2 + k_\perp^2) \Psi = 0 \quad (10.27)$$

sendo que  $\Psi$  será o campo  $E_z$  para ondas TM e será o campo  $H_z$  para ondas TE, sujeitas às condições de contorno apropriadas.

## 10.4 Análise dos Modos TEM na Linha de Transmissão

Para modos TEM não pode haver componentes longitudinais, e portanto:

$$E_z = 0 \quad , \quad H_z = 0 \quad . \quad (10.28)$$

Nesse caso o conjunto das equações de Maxwell reduz-se ao seguinte:

$$\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{E}_{\perp} = 0 \quad , \quad (10.29)$$

$$\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{H}_{\perp} = 0 \quad , \quad (10.30)$$

$$\nabla_{\perp} \times \mathbf{E}_{\perp} = 0 \quad , \quad (10.31)$$

$$\nabla_{\perp} \times \mathbf{H}_{\perp} = 0 \quad , \quad (10.32)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_z \times \frac{\partial \mathbf{E}_{\perp}}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}_{\perp}}{\partial t} \quad , \quad (10.33)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_z \times \frac{\partial \mathbf{H}_{\perp}}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}_{\perp}}{\partial t} \quad . \quad (10.34)$$

Multiplicando a equação (10.33) vetorialmente na forma:

$$\hat{\mathbf{a}}_z \frac{\partial}{\partial z} \times \left( \hat{\mathbf{a}}_z \times \frac{\partial \mathbf{E}_{\perp}}{\partial z} \right) = \hat{\mathbf{a}}_z \frac{\partial}{\partial z} \times \left( -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}_{\perp}}{\partial t} \right) \quad ,$$

utilizando (10.34) e fazendo algumas manipulações algébricas temos a equação de ondas:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E}_{\perp} = 0 \quad . \quad (10.35)$$

A solução dessa equação prova que as ondas de modos TEM propagam-se com velocidade  $v$  dada por

$$\mu_0 \varepsilon = \frac{1}{v^2} \quad . \quad (10.36)$$

Para um modo TEM de linha de transmissão o campo propaga-se na direção  $z$ , mas pode depender das variáveis  $(x, y)$ , desde que satisfaça as demais equações de Maxwell. Vamos utilizar um método de separação de variáveis para resolver esse sistema:

$$\mathbf{E}_{\perp}(x, y, z, t) = \vec{\mathcal{E}}(x, y)V(z, t) \quad , \quad (10.37)$$

$$\mathbf{H}_{\perp}(x, y, z, t) = \vec{\mathcal{H}}(x, y)I(z, t) \quad , \quad (10.38)$$

e queremos associar  $V(z, t)$  e  $I(z, t)$  a ondas de tensão e corrente na linha, conforme veremos. Substituindo (10.37) e (10.38) em (10.31) e (10.32) obtemos:

$$\nabla_{\perp} \times \mathbf{E}_{\perp} = 0 \Rightarrow \nabla_{\perp} \times \vec{\mathcal{E}}(x, y) = 0 \quad ,$$

$$\nabla_{\perp} \times \mathbf{H}_{\perp} = 0 \Rightarrow \nabla_{\perp} \times \vec{\mathcal{H}}(x, y) = 0 \quad ,$$

uma vez que  $V(z, t) \neq 0$  e  $I(z, t) \neq 0$  e o operador  $\nabla_{\perp}$  somente atua nas coordenadas transversais, e não em  $(z, t)$ .

- Agora podemos utilizar uma versão bidimensional da propriedade  $\nabla \times \nabla \phi$ , na forma:

$$\nabla_{\perp} \times \nabla_{\perp} \phi(x, y) = 0 \quad ,$$

para escrever as seguintes relações:

$$\vec{\mathcal{E}}(x, y) = -\nabla_{\perp}\phi_e(x, y), \quad (10.39)$$

$$\vec{\mathcal{H}}(x, y) = -\nabla_{\perp}\phi_m(x, y), \quad (10.40)$$

onde  $\phi_e(x, y)$  e  $\phi_m(x, y)$  são os potenciais escalares elétrico e magnético, respectivamente. Só dependem das variáveis transversas e dizem como os campos se distribuem no plano transversal. Utilizando as definições acima e substituindo nas equações em divergência, obtém-se:

$$\nabla_{\perp}^2\phi_e = 0, \quad (10.41)$$

$$\nabla_{\perp}^2\phi_m = 0. \quad (10.42)$$

A solução da dependência transversa dos **modos TEM de uma linha de transmissão equivale a resolver a equação de Laplace em duas dimensões**, com condições de contorno impostas pelos condutores!!

↪ Agora lembremos do vetor de Poynting (estamos aqui considerando o valor instantâneo e não o valor médio):

$$S_z = \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{a}}_z = (\mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{H}_{\perp}) \cdot \hat{\mathbf{a}}_z = (\vec{\mathcal{E}}_{\perp} \times \vec{\mathcal{H}}_{\perp}) \cdot \hat{\mathbf{a}}_z [V(z, t)I(z, t)].$$

A potência total transportada  $P_z$  pelo guia pode ser obtida integrando-se  $S_z$  sobre a superfície transversa, cujo diferencial vale  $da = dx dy$ :

$$P_z = \int_a S_z da = [V(z, t)I(z, t)] \int_a (\vec{\mathcal{E}}_{\perp} \times \vec{\mathcal{H}}_{\perp}) \cdot \hat{\mathbf{a}}_z da.$$

Note que o produto  $VI$  pode ser sacado para fora do símbolo de integração uma vez que só dependem de  $(z, t)$  e a integral é sobre as outras duas dimensões. Se queremos interpretar  $V$  e  $I$  como tensão e corrente, respectivamente, tal que  $P_z = VI$ , conforme a teoria de circuitos elétricos, surge uma **condição de normalização**:

$$P_z(z, t) = V(z, t)I(z, t) \quad , \quad \int_a (\vec{\mathcal{E}}_{\perp} \times \vec{\mathcal{H}}_{\perp}) \cdot \hat{\mathbf{a}}_z da = 1. \quad (10.43)$$

### 10.4.1 Equações do Telegrafista ou de Linhas de Transmissão

São as equações de ondas para linhas de transmissão conhecidas como equações do telegrafista pois os fenômenos ondulatórios em transmissões de telégrafo já eram conhecidas mesmo antes da teoria eletromagnética de Maxwell. São equações diferenciais parciais que relacionam as ondas  $V$  e  $I$ , ao invés de trabalhar diretamente com os campos. Vamos aqui obtê-las a partir das equações de Maxwell. Considere as equações de Maxwell, para modos TEM, dadas a seguir:

$$\hat{\mathbf{a}}_z \times \frac{\partial \mathbf{E}_{\perp}}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}_{\perp}}{\partial t}, \quad (10.33)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_z \times \frac{\partial \mathbf{H}_{\perp}}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}_{\perp}}{\partial t}, \quad (10.34)$$

$$\mathbf{E}_{\perp}(x, y, z, t) = \vec{\mathcal{E}}(x, y)V(z, t), \quad (10.37)$$

$$\mathbf{H}_{\perp}(x, y, z, t) = \vec{\mathcal{H}}(x, y)I(z, t). \quad (10.38)$$

Substituindo as equações (10.37) e (10.38) em (10.33) e ((10.33)) obtemos:

$$\hat{\mathbf{a}}_z \times \vec{\mathcal{E}}(x, y) \frac{\partial V(z, t)}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial I(z, t)}{\partial t} \vec{\mathcal{H}}(x, y), \quad (10.44)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_z \times \vec{\mathcal{H}}(x, y) \frac{\partial I(z, t)}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial V(z, t)}{\partial t} \vec{\mathcal{E}}(x, y), \quad (10.45)$$

Com a finalidade de eliminar o caráter vetorial dessas duas equações, vamos fazer o produto escalar da primeira das equações acima com  $\vec{\mathcal{H}}(x, y)$  e da segunda com  $\vec{\mathcal{E}}(x, y)$ , e depois integrar sobre a superfície transversal  $a$  do guia:

$$\begin{aligned} \int_a (\hat{\mathbf{a}}_z \times \vec{\mathcal{E}}(x, y)) \cdot \vec{\mathcal{H}}(x, y) da \frac{\partial V(z, t)}{\partial z} &= -\mu_0 \frac{\partial I(z, t)}{\partial t} \int_a \vec{\mathcal{H}}(x, y) \cdot \vec{\mathcal{H}}(x, y) da , \\ \int_a (\hat{\mathbf{a}}_z \times \vec{\mathcal{H}}(x, y)) \cdot \vec{\mathcal{E}}(x, y) da \frac{\partial I(z, t)}{\partial z} &= \varepsilon \frac{\partial V(z, t)}{\partial t} \int_a \vec{\mathcal{E}}(x, y) \cdot \vec{\mathcal{E}}(x, y) da . \end{aligned}$$

Observe que naturalmente aparece a condição de normalização dos campos (10.43). Vamos fazer algumas definições adicionais de alguns parâmetros característicos de uma LT.

- **Capacitância por unidade de comprimento**  $C$  (medida em F/m):

$$C = \varepsilon \frac{\int_a \vec{\mathcal{E}}(x, y) \cdot \vec{\mathcal{E}}(x, y) da}{\int_a (\vec{\mathcal{E}}_{\perp} \times \vec{\mathcal{H}}_{\perp}) \cdot \hat{\mathbf{a}}_z da} = \varepsilon \int_a \vec{\mathcal{E}}(x, y) \cdot \vec{\mathcal{E}}(x, y) da . \quad (10.46)$$

- **Indutância por unidade de comprimento**  $L$  (medida em H/m):

$$L = \mu_0 \frac{\int_a \vec{\mathcal{H}}(x, y) \cdot \vec{\mathcal{H}}(x, y) da}{\int_a (\vec{\mathcal{E}}_{\perp} \times \vec{\mathcal{H}}_{\perp}) \cdot \hat{\mathbf{a}}_z da} = \mu_0 \int_a \vec{\mathcal{H}}(x, y) \cdot \vec{\mathcal{H}}(x, y) da . \quad (10.47)$$

As quantidades  $L$  e  $C$  somente dependem do comportamento dos campos em relação às variáveis transversais e portanto da geometria da LT. Tendo essas definições em consideração, podemos escrever as equações de linhas de transmissão sem perdas na forma usual:

$$\frac{\partial V(z, t)}{\partial z} = -L \frac{\partial I(z, t)}{\partial t} , \quad (10.48)$$

$$\frac{\partial I(z, t)}{\partial z} = -C \frac{\partial V(z, t)}{\partial t} , \quad (10.49)$$

que podem ser prontamente resolvidas.

Muitos livros-texto obtêm as equações acima (já incluindo perdas) através de um modelo da linha de transmissão que é denominada **modelo de parâmetros distribuídos** onde requer-se o conhecimento apenas de Circuitos Elétricos. Todavia, é gratificante notar que as equações de Maxwell reproduzem todos esses resultados conhecidos empiricamente.

## 10.4.2 Uma Dedução Alternativa das Equações do Telegrafista: O Modelo de Parâmetros Distribuídos

Para modelar a linha de transmissão considera-se um trecho de linha  $\Delta z \ll \lambda$  no qual as leis de circuitos são válidas ainda, mostrado na Figura 10.7. Para adicionar complexidade a essa demonstração, vamos considerar linhas com perdas. Sejam conhecidos *a priori* os parâmetros da LT definidos abaixo:

- $R$  - resistência série por unidade de comprimento [ohms/m] - representa perdas nos condutores ( $\sigma < \infty$ ).
- $G$  - condutância paralela por unidade de comprimento [siemens/m] - representa perdas no dielétrico ( $\sigma > 0$ ).
- $L$  - indutância por unidade de comprimento [H/m].
- $C$  - capacitância por unidade de comprimento [F/m].

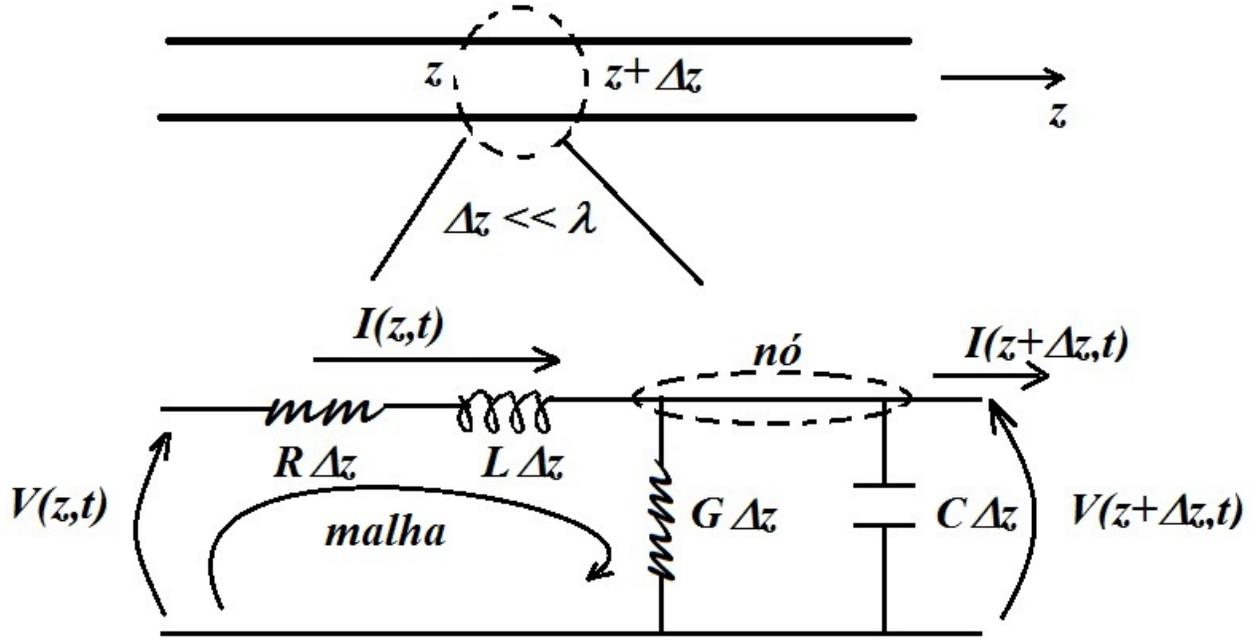


Figure 10.7: Modelo de Parâmetros Distribuídos da Linha de Transmissão.

Podemos aplicar a lei das malhas e nós no circuito mostrado na 10.7, para obter:

$$V(z, t) - R\Delta z I(z, t) - L\Delta z \frac{\partial I(z, t)}{\partial t} - V(z + \Delta z, t) = 0, \quad (10.50)$$

$$I(z, t) - G\Delta z V(z + \Delta z, t) - C\Delta z \frac{\partial V(z + \Delta z, t)}{\partial t} - I(z + \Delta z, t) = 0, \quad (10.51)$$

Reagrupando os fatores, dividindo tudo pelo comprimento  $\Delta z \ll \lambda$  e tomando o limite  $\Delta z \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{V(z + \Delta z, t) - V(z, t)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[ -RI(z, t) - L \frac{\partial I(z, t)}{\partial t} \right],$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{I(z + \Delta z, t) - I(z, t)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[ -GV(z + \Delta z, t) - C \frac{\partial V(z + \Delta z, t)}{\partial t} \right].$$

Uma vez que do lado esquerdo temos a própria definição de derivada, temos com resultado final:

$$\frac{\partial V(z, t)}{\partial z} = -RI(z, t) - L \frac{\partial I(z, t)}{\partial t}, \quad (10.52)$$

$$\frac{\partial I(z, t)}{\partial z} = -GV(z, t) - C \frac{\partial V(z, t)}{\partial t}. \quad (10.53)$$

Podemos calcular  $L$  e  $C$  para os vários tipos de linhas de transmissão facilmente, através das expressões já definidas anteriormente, para  $L$  e  $C$ . Os parâmetros distribuídos  $R, G, L, C$  determinam o comportamento da propagação de ondas em uma linha de transmissão, que nada mais é do que uma guia de ondas onde  $V$  representa o campo elétrico e  $I$  o campo magnético, sob o ponto de vista da teoria de circuitos. A análise da configuração transversal dos campos aparece no cálculo de  $R, G, L, C$  mas muitas vezes torna-se mais fácil a determinação experimental desses parâmetro em nível DC, uma vez que em muitas situações não há variações drásticas dos parâmetros com a frequência. Para linhas de transmissão sem perdas  $R = 0$  e  $G = 0$  e o sistema acima reduz-se ao que encontramos anteriormente.

### 10.4.3 Solução das Equações do Telegrafista

Considere uma LT sem perdas, onde  $R = 0$  e  $G = 0$  e as equações tomam a forma a seguir:

$$\frac{\partial V(z, t)}{\partial z} = -L \frac{\partial I(z, t)}{\partial t}, \quad (10.54)$$

$$\frac{\partial I(z, t)}{\partial z} = -C \frac{\partial V(z, t)}{\partial t}. \quad (10.55)$$

Pode-se demonstrar facilmente a equação de ondas para  $V(z, t)$  (basta tomar a derivada  $\partial/\partial z$  na primeira equação e utilizar a segunda):

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) V(z, t) = 0. \quad (10.56)$$

Por questão de consistência com a equação (10.35) temos a relação:

$$\mu_0 \varepsilon = LC = \frac{1}{v^2}. \quad (10.57)$$

A solução das equações em regime harmônico, para uma linha de transmissão conectando uma carga  $Z_L$  a um

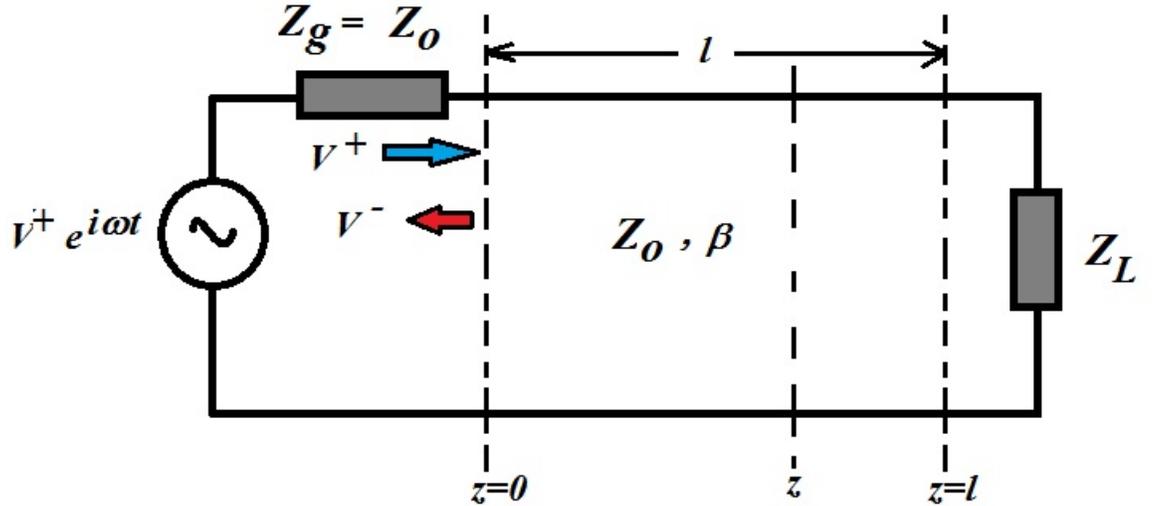


Figure 10.8: Linha de Transmissão Carregada com Carga  $Z_L$ . São parâmetros da linha o comprimento  $l$ , a impedância característica  $Z_0$  e o valor de  $\beta$  na frequência de operação.

gerador de sinais, conforme ilustrado na Figura 10.8 toma a forma a seguir:

$$V(z, t) = [V_0^+ e^{-i\beta z} + V_0^- e^{i\beta z}] e^{i\omega t} \quad (10.58)$$

$$I(z, t) = \frac{1}{Z_0} [V_0^+ e^{-i\beta z} - V_0^- e^{i\beta z}] e^{i\omega t} \quad (10.59)$$

onde  $V_0^+$  é a amplitude da onda propagante (do gerador para a carga) na linha e  $V_0^-$  a amplitude da onda refletida pela carga (propaga-se de volta ao gerador). Para linhas sem perdas temos:

$$\beta = \omega \sqrt{LC} = \frac{\omega}{v} \quad \text{e} \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (10.60)$$

onde  $\beta$  [rad/m] é a constante de propagação na linha e  $Z_0$  a impedância característica da linha (não confundir com impedância do vácuo). A constante  $\beta$  se relaciona ao comprimento de ondas  $\lambda$  por:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (10.61)$$

Agora vamos definir algumas quantidades mensuráveis muito importantes.

### Coefficiente de Reflexão $\Gamma$

Em espectro de microondas é a medida mais usual, correspondendo à razão entre a amplitude da onda refletida e da onda incidente em um ponto da linha, definida como:

$$\Gamma(z) = \frac{V_0^- e^{i\beta z}}{V_0^+ e^{-i\beta z}} = \Gamma_0 e^{2i\beta z}, \quad (10.62)$$

onde

$$\Gamma_0 = \Gamma(z=0) = \frac{V_0^-}{V_0^+}$$

. Para linhas sem perdas o módulo do coeficiente de reflexão permanece constante ao longo da linha ao passo que a sua fase varia. Podemos escrever  $V$  e  $I$  em termos de  $\Gamma$ , conforme segue:

$$V(z) = V_0^+ e^{i(\omega t - \beta z)} [1 + \Gamma(z)], \quad \text{label } V \text{ gama} \quad (10.63)$$

$$I(z) = \frac{1}{Z_0} V_0^+ e^{i(\omega t - \beta z)} [1 - \Gamma(z)]. \quad (10.64)$$

Utilizando as duas últimas equações podemos calcular a **Impedância de Entrada**  $Z_{in}$ , que corresponde à impedância que seria impedância medida em algum ponto da linha. Utilizando as equações (??) e (10.64) obtemos facilmente:

$$Z_{in}(z) = \frac{V(z, t)}{I(z, t)} = Z_0 \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)}, \quad (10.65)$$

ou na forma inversa temos:

$$\Gamma(z) = \frac{Z_{in}(z) - Z_0}{Z_{in}(z) + Z_0}. \quad (10.66)$$

O valor de  $\Gamma_0$  é dependente do valor de carga  $Z_L$  conectada em  $z = l$ :

$$\Gamma(l) = \Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}, \quad (10.67)$$

onde  $Z_0$  é a impedância característica da linha. Agora temos  $\Gamma_L = \Gamma_0 e^{2i\beta l} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$  de onde tiramos:

$$\Gamma_0 = \Gamma_L e^{-2i\beta l} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} e^{-2i\beta l}, \quad (10.68)$$

onde  $l$  é o comprimento da linha.

Podemos expressar  $Z_{in}$  em termos de  $Z_L$ ,  $Z_0$  e do comprimento da linha, utilizando as equações anteriores. O resultado desejado é o seguinte:

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + iZ_0 \tan[\beta(l-z)]}{Z_0 + iZ_L \tan[\beta(l-z)]}. \quad (10.69)$$

Para  $z = 0$  temos a impedância vista pelo gerador:

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + iZ_0 \tan[\beta l]}{Z_0 + iZ_L \tan[\beta l]}. \quad (10.70)$$

Um parâmetro útil para saber se há onda refletida em uma linha de transmissão é a chamada **Relação de Onda Estacionária (ROE)**, do inglês SWR - Standing Wave Ratio, que corresponde a uma medida de refletividade em um ponto da linha na forma:

$$\text{SWR} = \frac{|V_{max}|}{|V_{min}|} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}. \quad (10.71)$$

Este parâmetro é facilmente mensurável por sondagem ao longo da linha, determinando o máximo e o mínimo valor do pico de tensão  $V(z, t)$ , em módulo.

Alguns casos especiais em linhas de transmissão, considerando a impedância de carga e o comprimento da linha serão considerados a seguir. Um caso muito importante é o **Repetidor de Impedâncias**, que corresponde a linhas de transmissão de comprimento  $l = m\lambda/2$ , com  $m = 1, 2, 3, \dots$ . Note que para esse caso  $\tan(\beta l) = 0$  e portanto  $Z_{in} = Z_L$ , ou seja, a impedância vista pelo gerador em  $z = 0$  tem o mesmo valor que a impedância da carga.

Outro caso relevante é o **Transformador de Impedâncias**, em que a linha tem comprimento  $l = m\lambda/4$  com  $m = 1, 3, 5, \dots$ . Nessa situação temos  $\tan(\beta l) = \tan(\pi/2) = \infty$  e por isso:

$$Z_{in} = \frac{Z_0^2}{Z_L}. \quad (10.72)$$

O transformador de impedância é muito utilizado em casamento de impedâncias, e pode converter reatância capacitiva em indutiva e vice-versa, ou curto circuito em circuito aberto e vice-versa.

As **Linhas Curto Circuito**,  $Z_L = 0$ , produzem uma impedância de entrada na forma:

$$Z_{in} = iZ_0 \tan(\beta l), \quad (10.73)$$

enquanto **Linhas Abertas**  $Z_L = \infty$  produzem a seguinte impedância:

$$Z_{in} = -iZ_0 \cot(\beta l). \quad (10.74)$$

Com linhas em curto ou aberto, variando  $l$  podemos obter qualquer reatância ou susceptância que desejarmos. Note ainda que o comportamento da impedância de entrada é periódico com a frequência, dada a presença de funções trigonométricas em sua definição.

#### 10.4.4 A Carta de Smith

Esta é uma ferramenta de cálculos gráfica bastante prática para uso em microondas inventada pelo Engenheiro Phillip H. Smith (1905-1987). Primeiramente normalizamos a impedância medida em um ponto  $Z$  pela impedância característica da linha  $Z_0$ :

$$\ddagger = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma}. \quad (10.75)$$

Agora expressando os números complexos na forma cartesiana  $\frac{Z}{Z_0} = r + ix$  e  $\Gamma = u + iv$  temos

$$r + ix = \frac{1 + u + iv}{1 - u - iv}$$

Igualando as partes real e imaginária temos:

$$r = \frac{1 - u^2 - v^2}{1 - u^2 + v^2} \quad (10.76)$$

$$x = \frac{2v}{1 - u^2 + v^2} \quad (10.77)$$

Resolve-se esta equação no plano  $u - v$ , dados os valores de  $r$  e  $x$ , temos:

⇒ Circunferências de resistência  $r$  constante:

$$\left(u - \frac{r}{1+r}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{1+r}\right)^2. \quad (10.78)$$

Dado o valor de  $r$  as circunferências de resistência constante tem centro em

$$(u_0, v_0) = \left(\frac{r}{1+r}, 0\right)$$

e raio  $1/(1+r)$ .

⇒ Circunferências de reatância  $x$  constante:

$$(u-1)^2 + \left(v - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}. \quad (10.79)$$

Dado  $x$  as circunferências de reatância constante tem centro em

$$(u_0, v_0) = \left(1, \frac{1}{x}\right)$$

e raio  $1/|x|$ .

A Figura 10.9 ilustra o procedimento de construção da carta de Smith no plano complexo.

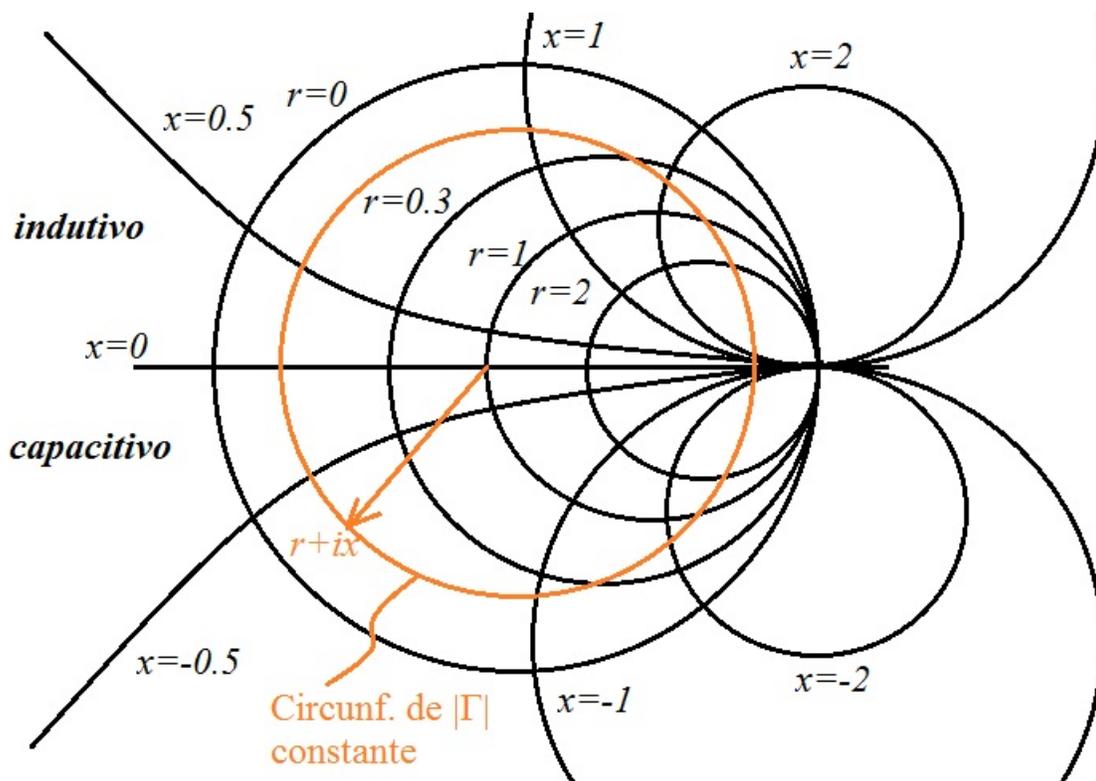


Figure 10.9: A Carta de Smith.

## 10.5 Modo TEM em um guia coaxial

Os guias coaxiais, assim como qualquer LT constituída por dois condutores são capazes de suportar modos TEM. Uma característica fundamental que difere os modos TEM dos modos TE e TM é que um modo TEM não possui frequência de corte. Um guia coaxial é mostrado na Figura 10.10.

O condutor interno tem raio  $a$  enquanto que o externo tem raio  $b$ , tendo condutividade  $\sigma$  e profundidade de penetração  $\delta$ . O dielétrico entre os dois condutores é assumido como sendo sem perdas com constantes  $\mu$  e  $\epsilon$ . Queremos apenas o modo TEM, mas o guia suporta modos TE e TM. Das equações de Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = i\omega\epsilon\mathbf{E}$$

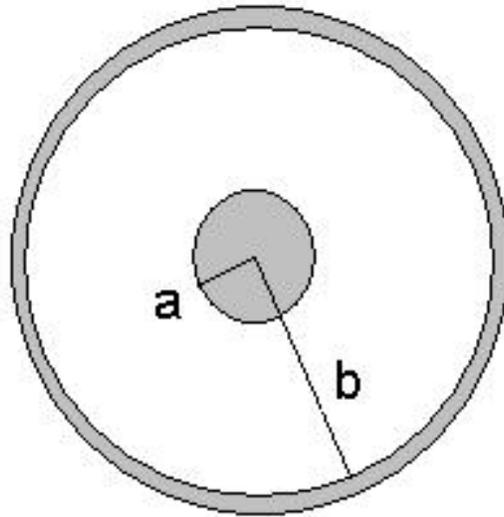


Figure 10.10: Guia Coaxial Metálico de raio do condutor interno  $a$  e externo  $b$

e pela simetria do problema, sabemos que o campo elétrico é radial e o campo magnético deve ser azimutal. Queremos  $E_z = 0$  e  $H_z = 0$ . Observando a equação para o rotacional em coordenadas cilíndricas temos:

$$\frac{\partial E_\rho}{\partial z} = -i\omega\mu H_\varphi$$

$$\frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = i\omega\varepsilon E_\rho$$

e ainda as equações adicionais,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_\varphi) = 0$$

pois não queremos campo elétrico e magnético na direção de propagação. Desta última sabemos que  $H_\varphi \propto 1/\rho$ , para que a componente  $z$  do campo Elétrico seja nula. Da mesma forma  $E_\rho \propto 1/\rho$ . Das equações

$$\frac{\partial E_\rho}{\partial z} = -i\omega\mu H_\varphi$$

$$\frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = i\omega\varepsilon E_\rho$$

podemos obter as equações do movimento harmônico:

$$\frac{\partial^2 E_\rho}{\partial z^2} = -\omega^2 \mu \varepsilon E_\rho$$

$$\frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial z^2} = -\omega^2 \mu \varepsilon H_\varphi$$

e combinando as soluções, e conhecendo o campo magnético em  $\rho = a$ , que seja a amplitude máxima  $H_\varphi(\rho = a) = H_0$  temos:

$$E_\rho = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{H_0 a}{\rho} e^{i(\omega t - k_z z)} \quad (10.80)$$

$$H_\varphi = \frac{H_0 a}{\rho} e^{i(\omega t - k_z z)} \quad (10.81)$$

sendo  $k_z = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ . A energia é transportada na direção  $z$  de onde tiramos a densidade de potência (Poynting):

$$S_z = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H_0^2 \frac{a^2}{\rho^2} \quad (10.82)$$

A potência transportada é a integral da densidade em relação à seção transversal ou seja:

$$P = \int S_z \rho d\rho d\varphi$$

e resolvendo vem:

$$P = \pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H_0^2 a^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (10.83)$$

As perdas são dadas por:

$$P = P_0 e^{-2\alpha z}$$

como anteriormente. Calculando  $\alpha$  temos:

$$\alpha = -\frac{1}{2P} \frac{dP}{dz}$$

e ainda calculando as perdas, devemos levar em conta as duas superfícies condutoras, ou seja:

$$\begin{aligned} -\frac{dP}{dz} &= \frac{1}{2\sigma\delta} \left( \oint |H_\varphi|^2 \rho d\varphi \Big|_{\rho=a} + \oint |H_\varphi|^2 \rho d\varphi \Big|_{\rho=b} \right) \\ -\frac{dP}{dz} &= \frac{1}{2\sigma\delta} 2\pi a^2 H_0^2 \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \end{aligned}$$

Substituindo este resultado na expressão para alpha, temos:

$$\alpha = \frac{-dP/dz}{2P} = \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{2\sigma\delta} 2\pi a^2 H_0^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}{\pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H_0^2 a^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

e simplificando vem:

$$\alpha = \frac{1}{2\sigma\delta} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{1}{\ln(b/a)} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \quad (10.84)$$

Quando trabalhamos com parâmetros de linhas de transmissão, precisamos da impedância característica da linha, que pode ser calculada na forma:

$$Z_0 = \frac{V}{I} = \frac{\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}}$$

Nesse caso:

$$\begin{aligned} Z_0 &= \frac{V}{I} = \frac{\int_a^b E_\rho d\rho}{\int H_\varphi \rho d\varphi} \Big|_{\rho=a} \\ Z_0 &= \frac{V}{I} = \frac{\int_a^b \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{H_0 a}{\rho} e^{i(\omega t - k_z z)} d\rho}{\int \frac{H_0 a}{\rho} e^{i(\omega t - k_z z)} \rho d\varphi} \Big|_{\rho=a} \end{aligned}$$

A corrente será útil para o cálculo de resistência e portanto:

$$I = \int \frac{H_0 a}{\rho} e^{i(\omega t - k_z z)} \rho d\varphi \Big|_{\rho=a} = 2\pi H_0 a e^{i(\omega t - k_z z)}$$

Resolvendo as integrais acima, os termos de fase se cancelam e temos:

$$Z_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \ln \left( \frac{b}{a} \right) \quad (10.85)$$

Já a resistência série por unidade de comprimento é simplesmente definida como:

$$\frac{dP}{dz} = \frac{1}{2} R I^2$$

$$R = \frac{2dP/dz}{I^2} = 2 \frac{\frac{1}{2\sigma\delta} 2\pi a^2 H_0^2 \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)}{(2\pi H_0 a)^2}$$

de onde tiramos:

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma\delta} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \quad (10.86)$$

Pode-se demonstrar também que a indutância por unidade de comprimento, considerando-se a indutância interna do condutor vale:

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \left( \frac{b}{a} \right) + \frac{\mu_c \delta}{4\pi} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \quad (10.87)$$

onde  $\mu_c$  é a permeabilidade do condutor. O resultado é obtido da relação:

$$L = \frac{d\phi_m/dz}{I}$$

onde  $\phi_m$  é o fluxo magnético.

## 10.6 Guias de Ondas Metálicos: propagação de energia e atenuação

### 10.6.1 Modos TE em Guia Metálico

Em um guia metálico, os modos TE caracterizam-se pelo fato de o campo elétrico ser perpendicular à direção de propagação ao passo que o campo magnético possui componente longitudinal. Podemos escrever então:

$$(\nabla_{\perp}^2 + k_{\perp}^2) \Psi = 0 \quad (10.88)$$

$$\mathbf{E}_{\perp} = \frac{-i\omega\mu}{k^2 - k_z^2} \nabla_{\perp} \Psi \times \hat{\mathbf{a}}_z \quad (10.89)$$

$$\mathbf{H}_{\perp} = \frac{-ik_z}{k^2 - k_z^2} \nabla_{\perp} \Psi \quad (10.90)$$

O campo elétrico é nesse caso sempre perpendicular às superfícies condutoras que delimitam a guia de onda, entretanto, para cumprir com as condições de contorno, o campo magnético perpendicular a um condutor perfeito deve ser nulo na superfície condutora e por isso, o problema é sujeito às condições de contorno de Neumann, ou seja:

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right|_S = 0 \quad (10.91)$$

significando que a derivada de  $\Psi$  em relação à normal na superfície condutora deve ser nula, e assim o campo magnético perpendicular se anula nas interfaces. Outra definição importante é impedância da onda. O leitor pode facilmente verificar que  $\eta = E_{\perp}/H_{\perp}$ :

$$\eta = \frac{k}{k_z} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (10.92)$$

### 10.6.2 Modos TM em Guia Metálico

Este caso pode ser obtido por considerações de simetria das equações de Maxwell. A onda TM tem campo magnético perpendicular à  $z$ , entretanto uma componente de campo elétrico longitudinal deve existir para dar suporte à onda. Nesse caso:

$$(\nabla_{\perp}^2 + k_{\perp}^2) \Psi = 0 \quad (10.93)$$

$$\mathbf{E}_{\perp} = \frac{-ik_z}{k^2 - k_z^2} \nabla_{\perp} \Psi \quad (10.94)$$

$$\mathbf{H}_{\perp} = \frac{i\omega\varepsilon}{k^2 - k_z^2} \nabla_{\perp} \Psi \times \hat{\mathbf{a}}_z \quad (10.95)$$

E como  $\Psi = E_z$  e nos contornos metálicos o campo elétrico tangencial deve se anular, então, a condição de Dirichlet garante o cumprimento das condições de contorno, ou seja:

$$\Psi \Big|_S = 0 \quad (10.96)$$

e a impedância da onda é, para o caso TM:

$$\eta = \frac{k_z}{k} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (10.97)$$

Note que a impedância dos modos TE e TM são diferentes.

### 10.6.3 Propagação da Energia e Perdas

Vamos mostrar agora que há um vetor de Poynting não nulo na direção  $z$ . Utilizando a definição convencional de vetor de Poynting, temos:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \Re \{ \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \} \quad (10.98)$$

mas queremos a componente de densidade de potência que se propaga ao longo de  $z$ , e portanto vamos fazer:

$$S_z = \hat{\mathbf{a}}_z \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{2} \Re \{ \mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{H}_{\perp}^* \} \quad (10.99)$$

Obviamente há componente de Poynting na direção transversal, mas esta é uma energia reativa, que fica armazenada na seção transversal do guia, e não nos interessa.

Calculando a densidade de potência que se propaga ao longo de  $z$  para os modos, temos como resultado:

**Modos TE**

$$S_z = \frac{1}{2} \frac{\omega\mu k_z}{(k^2 - k_z^2)^2} |\nabla_{\perp} \Psi|^2 \quad (10.100)$$

**Modos TM**

$$S_z = \frac{1}{2} \frac{\omega\varepsilon k_z}{(k^2 - k_z^2)^2} |\nabla_{\perp} \Psi|^2 \quad (10.101)$$

Note que o que muda de um para o outro é a substituição de  $\mu$  por  $\varepsilon$ , sem esquecer é claro que as funções  $\Psi$  são diferentes nos dois casos.

Calculemos agora a potência transmitida:

$$P = \int S_z da$$

$$P = \frac{1}{2} \frac{\omega\Gamma k_z}{(k^2 - k_z^2)^2} \int |\nabla_{\perp} \Psi|^2 da$$

onde a integral é realizada sobre a superfície transversal do guia e  $\Gamma$  vale  $\mu(\varepsilon)$  para o modo TE(TM). Aplicando o teorema de Green para o caso bidimensional podemos escrever:

$$\int |\nabla_{\perp} \Psi|^2 da = \int \nabla_{\perp} \Psi^* \cdot \nabla_{\perp} \Psi da = \oint_C \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial n} dl - \int \Psi^* \nabla_{\perp}^2 \Psi da$$

lembramos agora que a integral no contorno  $c$  é sempre zero devido ao fato de que  $\Psi = 0$  ou  $\partial \Psi / \partial n = 0$  na superfície condutora, e temos ainda:

$$\nabla_{\perp}^2 \Psi = -k_{\perp}^2 \Psi = -(k^2 - k_z^2) \Psi$$

de forma que temos:

$$P_{(TE)} = \frac{1}{2} \frac{\omega \mu k_z}{(k^2 - k_z^2)} \int |\Psi|^2 da \quad (10.102)$$

$$P_{(TM)} = \frac{1}{2} \frac{\omega \varepsilon k_z}{(k^2 - k_z^2)} \int |\Psi|^2 da \quad (10.103)$$

Considerando-se o guia um condutor perfeito, a onda não penetra no metal e a absorção é nula, portanto, não há perdas. Entretanto na prática a superfície condutora não é perfeita, tem condutividade finita e a onda penetra parcialmente produzindo perdas por efeito Joule. Podemos estimar as perdas da seguinte maneira:

$$P = P_0 e^{-2\alpha z} \quad (10.104)$$

onde  $\alpha$  é a constante de perdas, e deve ser função da condutividade do material. Temos, diferenciando a expressão acima em relação a  $z$ , a seguinte expressão para  $\alpha$ :

$$\alpha = -\frac{1}{2P} \frac{dP}{dz} \quad (10.105)$$

Mas a perda de potência é devida ao efeito dos campos penetrando o condutor. É possível mostrar que:

$$-\frac{dP}{dz} = \frac{1}{2\sigma\delta} \oint |\mathbf{n} \times \mathbf{H}|^2 dl$$

onde  $\delta$  é a profundidade de penetração da onda:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\omega\sigma}}$$

Observamos que as perdas dependem do modo de propagação e do material do qual é feito o guia.

Dedução das taxa de perdas:

A densidade de corrente nas paredes condutoras é dada pela lei de Ohm vetorial

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

e as perdas são por unidade de área, considerando-se que a corrente penetre uma dimensão  $\delta$  no condutor, são:

$$\frac{dP_{perdas}}{da} = -\frac{\delta}{2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}^* = -\frac{\sigma}{2} |\mathbf{E}|^2$$

A superfície envolvida é  $da = dl dz$  então, em relação a  $z$  temos que integrar em relação a  $dl$ , ou seja:

$$\frac{dP_{perdas}}{dz} = \int \frac{dP_{perdas}}{da} dl$$

$$-\frac{dP_{perdas}}{dz} = \frac{\sigma\delta}{2} \int |\mathbf{E}|^2 dl$$

Colocando em termos da corrente superficial temos:

$$-\frac{dP_{perdas}}{dz} = \frac{\delta}{2\sigma} \int |\mathbf{J}|^2 dl$$

Por considerações de contorno a densidade de corrente elétrica no interior de um condutor vale:

$$\mathbf{J}_{sup} \approx \frac{1}{\delta} \mathbf{n} \times \mathbf{H}$$

e pode-se escrever então:

$$-\frac{dP}{dz} = \frac{1}{2\sigma\delta} \oint |\mathbf{n} \times \mathbf{H}|^2 dl$$

#### 10.6.4 Guia Metálico Retangular

Um guia metálico retangular é mostrado na Figura 10.11. As paredes do guia são condutores perfeitos ( $\sigma \rightarrow \infty$ )

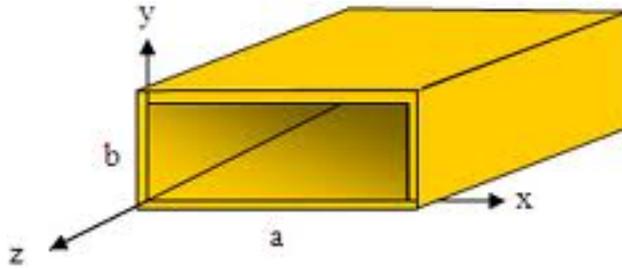


Figure 10.11: Guia Retangular Metálico de dimensões  $a$  e  $b$ .

e estão definidas por:

$$y = 0 \quad 0 \leq x \leq a$$

$$y = b \quad 0 \leq x \leq a$$

$$x = 0 \quad 0 \leq y \leq b$$

$$x = a \quad 0 \leq y \leq b$$

A solução dos modos TE (TM) passa pela equação diferencial de  $\Psi$  com condições de contorno de Neumann(Dirichlet). Vamos solucionar de forma geral a equação transversal para  $\Psi$  em coordenadas retangulares:

$$(\nabla_{\perp}^2 + k_{\perp}^2) \Psi = 0$$

ou ainda:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_{\perp}^2 \right) \Psi = 0$$

A solução geral para  $\Psi$  é da forma:

$$\Psi = f(x)g(y)e^{i(\omega t - k_z z)}$$

Aplicando essa solução temos:

$$k_{\perp}^2 = k^2 - k_z^2 = k_x^2 + k_y^2$$

sendo que temos duas equações diferenciais independentes para  $f$  e  $g$ , na forma abaixo:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = -k_x^2 f(x)$$

$$\frac{d^2 f(y)}{dy^2} = -k_y^2 g(y)$$

Estas duas equações diferenciais tem soluções bem conhecidas, sendo a combinação linear de funções trigonométricas, de modo que uma solução geral é escrita na forma abaixo:

$$\Psi = f(x)g(y)e^{i(\omega t - k_z z)} \quad (10.106)$$

sendo

$$f(x) = A \cos(k_x x) + B \sin(k_x x) \quad (10.107)$$

$$g(y) = A \cos(k_y y) + B \sin(k_y y) \quad (10.108)$$

Agora vamos determinar os coeficientes transversais  $k_x$  e  $k_y$  para os modos TE e TM.

### Modos TE

Nesse caso, são requeridas condições de contorno de Neumann, pois  $\Psi = H_z$  e o campo magnético perpendicular ao condutor deve se anular. Portanto  $(\partial\Psi/\partial n)|_S = 0$ , ou seja, a derivada normal se anula nas paredes do condutor:

$$\left. \frac{\partial\Psi}{\partial y} \right|_{y=0} = 0$$

$$\left. \frac{\partial\Psi}{\partial y} \right|_{y=b} = 0$$

$$\left. \frac{\partial\Psi}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$$

$$\left. \frac{\partial\Psi}{\partial x} \right|_{x=a} = 0$$

daqui tiramos:

$$B = 0$$

$$D = 0$$

$$k_x = \frac{m\pi}{a} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$k_y = \frac{n\pi}{a} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

lembrando que se  $m = n = 0$  a solução é trivial, e portanto apenas um dos dois pode ser zero, o outro sendo diferente de zero. A solução nesse caso é:

$$\Psi_{TE} = H_z = H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad (10.109)$$

A relação de dispersão nesse caso vale:

$$k_z^2 = k^2 - k_{\perp}^2 = k^2 - k_x^2 - k_y^2 = \omega^2 \mu \varepsilon - \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} - \frac{n^2}{b^2} \right)$$

$$k_z^{mn} = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} - \frac{n^2}{b^2} \right)} \quad (10.110)$$

Observando a expressão para  $k_z$  vemos que existe uma frequência mínima, abaixo da qual a onda é evanescente pois  $k_z$  torna-se imaginário e a propagação tem a característica  $e^{-|k_z|z}$ . Por isso o ponto crítico é  $k_z = 0$  e nesse ponto temos a frequência de corte do modo  $TE_{m,n}$ :

$$\omega_{mn}^c = \frac{\pi}{\sqrt{\mu \varepsilon}} \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \quad (10.111)$$

Se consideramos  $a > b$  a menor frequência de corte será com  $m = 1$  e  $n = 0$ , e é a menor frequência possível mesmo considerando os modos TM, como veremos:

$$\omega_{10}^c = \frac{\pi}{a\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad (10.112)$$

Para  $a = 0.05$  m, a frequência de corte é  $f = 3$  GHz.

### Modos TM

Nesse caso  $\Psi = E_z$ , e  $H_z = 0$ . Temos as condições de contorno de Dirichlet, o que implica em  $\Psi|_S = 0$ , ou seja:

$$\begin{aligned} \Psi|_{y=0} &= 0 \\ \Psi|_{x=0} &= 0 \\ \Psi|_{y=b} &= 0 \\ \Psi|_{x=a} &= 0 \end{aligned}$$

e a solução final é:

$$\Psi_{TM} = E_z = E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad (10.113)$$

sendo  $m = 1, 2, 3, \dots$  e  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Notemos que nem  $m$ , nem  $n$  podem ser nulos, senão temos a solução trivial. Portanto o modo TM de ordem mais baixa é com  $m = 1$  e  $n = 1$ . A relação de dispersão é a mesma dos modos TE, ou seja:

$$k_z^{mn} = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)}, \quad (10.114)$$

$$\omega_{mn}^c = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}, \quad (10.115)$$

entretanto, a frequência mais baixa permitida no modo TM é:

$$\omega_{10}^c = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}, \quad (10.116)$$

e este valor é certamente maior do que a primeira frequência de corte dos modos TE. Para  $a = b = 0.05$ m temos  $f = 4.23$  GHz no modo  $TM_{11}$ .

A Figura 10.12 mostra as curvas modais para um guia retangular de dimensões  $a = 5$  cm,  $b = 2.5$  cm. O plot é feito normalizado, ou seja,  $\omega$  versus  $ck_z/\omega$ .

### 10.6.5 Demonstração: Ausência de Modos TEM em um guia oco

Dissemos inicialmente que para suportar um modo TEM um guia deve ser composto por no mínimo dois condutores. Vamos demonstrar aqui essa impossibilidade para os guias ocos, ou seja que são compostos apenas por um contorno metálico. Para o modo TEM os campos longitudinais devem ser nulos, ou seja,  $E_z = 0$  e  $H_z = 0$ . Nesse caso os campos devem ser totalmente transversais à direção  $z$ . Vamos supor agora o mesmo guia retangular da seção anterior, e que tenhamos o campo elétrico na direção  $x$ ,  $E_x$ . Esse campo elétrico é tangencial às paredes  $y = 0$  e  $y = b$  e por isso deve se anular nessas paredes, ou seja:

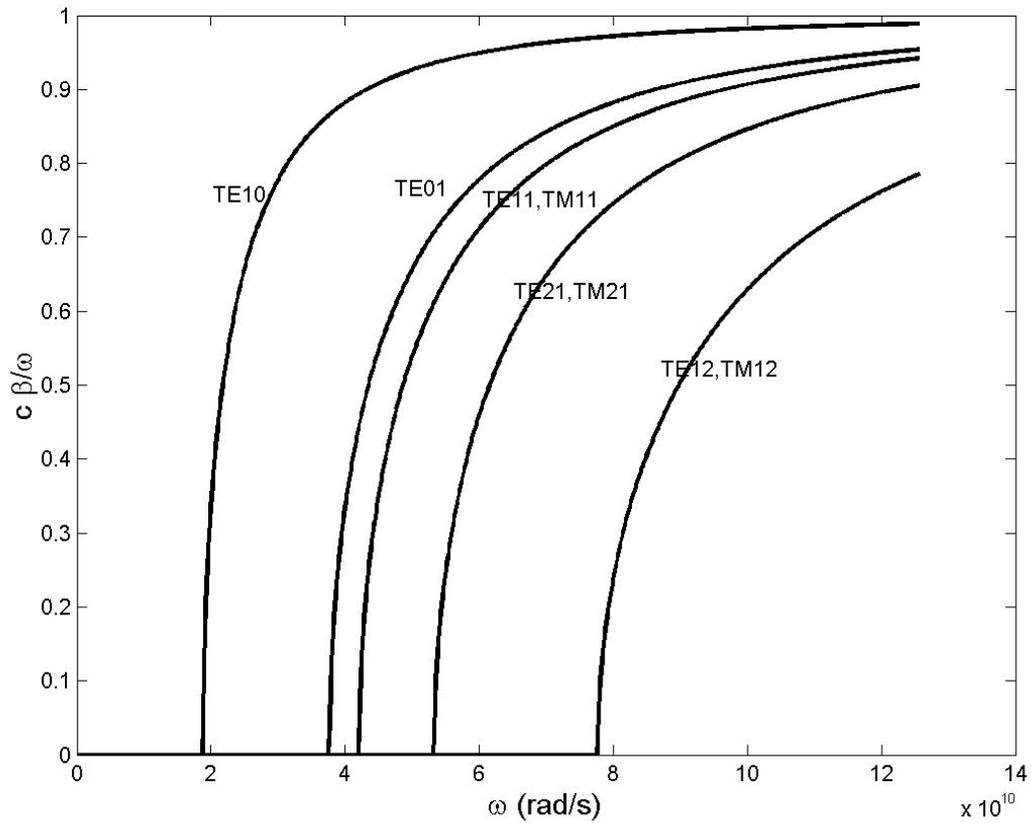


Figure 10.12: Modos para o Guia Retangular Metálico de dimensões  $a$  e  $b$ .

$$E_x \Big|_{y=0} = 0$$

$$E_x \Big|_{y=b} = 0$$

Para que essa solução seja possível, o campo elétrico deve ser uma função de  $y$  pelo menos. Observando a equação de Maxwell  $\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H}$ , temos, em coordenadas cartesianas:

$$H_z = \frac{i}{\omega\mu} \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)$$

mas como  $E_x$  é função de  $y$ , vemos a impossibilidade da onda ser TEM e cumprir com as condições de contorno impostas pelas equações de Maxwell.

O mesmo vale se tivéssemos escolhido  $H_x$ , pois aí é o campo magnético perpendicular às superfícies metálicas que deve se anular nas superfícies, e aí o campo deve ser uma função de  $x$ . Pelas equações de Maxwell demonstra-se novamente que é necessário a existência de um campo  $E_z$  para cumprir com as condições de contorno. Portanto não são possíveis modos TEM em um guia metálico oco, constituído apenas de paredes condutoras.

### O modo fundamental do guia retangular

Conforme vimos, o modo fundamental do guia retangular com  $a > b$  é o  $TE_{10}$  ou seja,  $m = 1$  e  $n = 0$ . O campo longitudinal é dado por:

$$H_z = H_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{i(\omega t - \beta_{10}z)} . \quad (10.117)$$

onde

$$\beta_{10} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_{10}^2}{\omega^2}} .$$

Calculando os campos transversais pelas fórmulas (??) e (10.119)

$$\mathbf{E}_\perp = \frac{-i\omega\mu_0}{\pi/a} H_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{i(\omega t - \beta_{10}z)} \hat{\mathbf{a}}_y , \quad (10.118)$$

$$\mathbf{H}_\perp = \frac{i\beta_{10}}{\pi/a} H_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{i(\omega t - \beta_{10}z)} \hat{\mathbf{a}}_x . \quad (10.119)$$

O perfil do campo elétrico  $E_y(x)$  do modo  $TE_{10}$  para o Guia Retangular Metálico de dimensões  $a$  e  $b$  é ilustrado na Figura 10.13. O campo magnético transversal será ortogonal a  $E_y$  e tem a mesma dependência em relação a  $x$ :

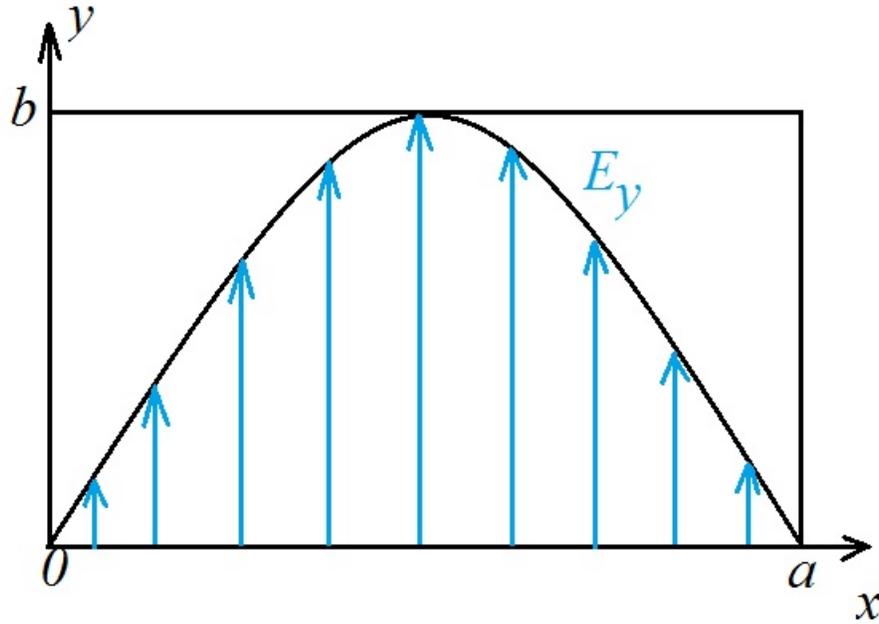


Figure 10.13: Observe que o campo elétrico(transversal) para o modo  $TE_{10}$  se anula nas paredes  $x = 0$  e  $x = a$ .

### 10.6.6 Guia Metálico de Seção Circular

Considere agora um guia metálico de seção reta circular, sendo um tubo metálico oco de raio  $a$ . Os mesmos procedimentos utilizados para resolver o problema do guia retangular aplicam-se aqui. Temos apenas uma pequena diferença, que é a modificação do laplaciano transversal para as coordenadas cilíndricas circulares, devido à simetria circular do problema, ou seja, a equação

$$(\nabla_\perp^2 + k_\perp^2) \Psi = 0$$

deve ser escrita na forma:

$$\left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + k_\perp^2 \right] \Psi(\rho, \varphi, z, t) = 0 \quad (10.120)$$

sendo, pelo método da separação de variáveis:

$$\Psi(\rho, \varphi, z, t) = f(\rho)g(\varphi)e^{i(\omega t - k_z z)}$$

Se supormos  $g(\varphi) = e^{im\varphi}$ , com  $m$  um número real e inteiro, temos uma equação para  $f(\rho)$  que é a seguinte:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{df(\rho)}{d\rho} \right) + \left( k_{\perp}^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) f(\rho) = 0 \quad (10.121)$$

e a equação acima é a conhecida equação diferencial de Bessel, cuja solução são as funções de Bessel, na forma:

$$f(\rho) = AJ_m(k_{\perp}\rho) + BK_m(k_{\perp}\rho)$$

onde  $J_m$  é a função de primeira classe e  $K_m$  é a função modificada de primeira classe de Bessel. Na verdade há um conjunto de soluções que satisfazem a equação de Bessel, sendo elas as funções de Hankel, Bessel, Neumann e existem relações matemáticas relacionando umas às outras.

Como queremos solucionar o guia metálico de seção circular oco, a função deve ser bem comportada para  $\rho = 0$  e a função de Bessel que cumpre tal requisito é a função de primeira classe, então a solução para o guia oco deverá ser:

$$\Psi = AJ_m(k_{\perp}\rho)e^{im\varphi}e^{i(\omega t - k_z z)} \quad (10.122)$$

### Modos TE

Nesse caso  $\Psi = H_z$  e devemos cumprir as condições de contorno de Neumann, ou seja,

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right|_S = 0$$

o que significa fazer em  $\rho = a$ , superfície condutora, a derivada da função Bessel de ordem  $m$  nula:

$$\left. \frac{dJ_m(k_{\perp}\rho)}{d\rho} \right|_{\rho=a} = 0$$

ou de forma simplificada a condição é:

$$J'_m(k_{\perp}a) = 0$$

Seja a variável  $x = k_{\perp}a$  então

$$J'_m(x) = 0$$

tem  $n$  soluções. As raízes da equação acima são  $x'_{mn}$ , ou seja,  $x'_{mn}$  é a  $n$ -ésima raiz da equação  $J'_m(x) = 0$ . Dessa forma:

$$k_{\perp} = \frac{x'_{mn}}{a}$$

A relação entre  $k_z$  e  $\omega$  nesse caso é:

$$k_z^{mn} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left( \frac{x'_{mn}}{a} \right)^2} \quad (10.123)$$

Tabelas de valores para  $x'_{mn}$  são disponíveis em livros de fórmulas e funções matemáticas especiais. Abaixo alguns valores para raízes de  $J'_m(x) = 0$ :

$$m = 0 : \quad x'_{0n} = 3.832, 7.016, 10.173\dots$$

$$m = 1 : \quad x'_{1n} = 1.841, 5.331, 8.536\dots$$

$$m = 2 : \quad x'_{2n} = 3.054, 6.706, 9.970\dots$$

$$m = 3 : \quad x'_{3n} = 4.201 , 8.015 , 11.336\dots$$

### Modos TM

Nesse caso  $\Psi = E_z$  e devemos cumprir as condições de contorno de Dirichlet, ou seja,

$$\Psi \Big|_S = 0$$

o que significa fazer em  $\rho = a$ , superfície condutora, a função Bessel de ordem  $m$  nula:

$$J_m(k_\perp \rho) \Big|_{\rho=a} = 0$$

ou de forma simplificada a condição é:

$$J_m(k_\perp a) = 0$$

Seja a variável  $x = k_\perp a$  então

$$J_m(x) = 0$$

tem  $n$  soluções. As raízes da equação acima são  $x_{mn}$ , ou seja,  $x_{mn}$  é a  $n$ -ésima raiz da equação  $J_m(x) = 0$ . Dessa forma:

$$k_\perp = \frac{x_{mn}}{a}$$

A relação entre  $k_z$  e  $\omega$  nesse caso é:

$$k_z^{mn} = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - \left(\frac{x_{mn}}{a}\right)^2} \quad (10.124)$$

Abaixo alguns valores para raízes de  $J_m(x) = 0$

$$m = 0 : \quad x_{0n} = 2.405 , 5.520 , 8.654\dots$$

$$m = 1 : \quad x_{1n} = 3.832 , 7.016 , 10.173\dots$$

$$m = 2 : \quad x_{2n} = 5.136 , 8.417 , 11.620\dots$$

Note que os modos  $TE_{0n}$  e  $TM_{1n}$  tem os mesmos valores para a constante de propagação  $k_z$ . Já o modo fundamental, que é o primeiro modo de propagação é o modo  $TE_{11}$  e o segundo modo é o  $TM_{01}$ . Para esses dois modos temos:

$$k_z^{TE,11} = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - \left(\frac{1.841}{a}\right)^2}$$

$$k_z^{TM,01} = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - \left(\frac{2.405}{a}\right)^2}$$

## 10.7 Cavidade Ressonante

Vamos considerar agora uma cavidade ressonante circular. Uma cavidade é uma guia de onda com as extremidades fechadas por condutores, ou seja, se no guia de onda não há condições de contorno na direção de propagação  $z$ , agora na cavidade estamos impondo condições de contorno em  $z$ . Consideremos uma cavidade de raio  $a$  e comprimento  $L$ . A solução da equação de ondas agora requer ondas refletidas, ou seja, como o guia é circular, temos:

$$\Psi = J_m(k_\perp \rho) (A' e^{ik_z z} + B' e^{-ik_z z}) e^{i(\omega t)}$$

e nesse guia teremos os modos TE e TM da mesma maneira. Vamos analisar:

**Modos TE**

Nesse caso  $\Psi = H_z$  e  $d\Psi/dn = 0$  nas interfaces, ou seja, além da condição:

$$\left. \frac{dJ_m(k_\perp \rho)}{d\rho} \right|_{\rho=a} = 0$$

temos agora  $\mathbf{E}_\perp = 0$  nas interfaces  $z = 0$  e  $z = d$  ou  $H_z = 0$  nesses pontos:

$$\Psi \Big|_{z=0} = 0$$

$$\Psi \Big|_{z=L} = 0$$

Podemos escrever a solução na forma:

$$\Psi = J_m(x'_{mn}\rho/a)[A \cos(k_z z) + B \sin(k_z z)]e^{i(\omega t)}$$

e a derivada em relação a  $z$  impõe:

$$A = 0$$

$$k_z L = p\pi \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

Portanto a solução final é:

$$\Psi = AJ_m(x'_{mn}\rho/a) \sin\left(\frac{p\pi}{L}z\right) e^{i(\omega t)} \quad (10.125)$$

com  $m = 0, 1, 2, \dots$ ,  $n = 1, 2, \dots$  e  $p = 1, 2, \dots$ . Agora, o conjunto de frequências possíveis na cavidade é discreto, pois há condições de contorno em todas as direções, ou seja:

$$\omega_{m,n,p}^{TE} = \frac{x'_{mn}}{a\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{x'_{mn}}\right)^2 \left(\frac{a}{L}\right)^2 p^2} \quad (10.126)$$

**Modos TM**

Nesse caso  $\Psi = E_z$  e  $\Psi = 0$  nas interfaces, ou seja, além da condição:

$$J_m(k_\perp \rho) \Big|_{\rho=a} = 0$$

temos agora  $\mathbf{E}_\perp = 0$  em  $z = 0$  e  $z = L$ , ou seja:

$$\left. \frac{d\Psi}{dz} \right|_{z=0} = 0$$

$$\left. \frac{d\Psi}{dz} \right|_{z=L} = 0$$

Podemos escrever a solução na forma:

$$\Psi = J_m(x_{mn}\rho/a)[A \cos(k_z z) + B \sin(k_z z)]e^{i(\omega t)}$$

e a derivada em relação a  $z$  impõe:

$$B = 0$$

$$k_z L = p\pi \quad p = 1, 2, \dots$$

Portanto a solução final é:

$$\Psi = AJ_m(x_{mn}\rho/a) \cos\left(\frac{p\pi}{L}z\right) e^{i(\omega t)} \quad (10.127)$$

com  $m = 0, 1, 2, \dots$ ,  $n = 1, 2, \dots$  e  $p = 0, 1, 2, \dots$ . Agora, o conjunto de frequências possíveis na cavidade é discreto, pois há condições de contorno em todas as direções, ou seja:

$$\omega_{m,n,p}^{TM} = \frac{x_{mn}}{a\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{x_{mn}}\right)^2 \left(\frac{a}{L}\right)^2 p^2} \quad (10.128)$$

Agora temos podemos determinar o modo fundamental.

Para o modo  $TE_{1,1,1}$  temos:

$$\omega_{1,1,1}^{TE} = \frac{1.841}{a\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{1 + 2.912 \left(\frac{a}{L}\right)^2} \quad (10.129)$$

enquanto para o modo  $TM_{0,1,0}$  temos

$$\omega_{0,1,0}^{TM} = \frac{2.405}{a\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad (10.130)$$

Observe acima, que o modo fundamental e também a frequência pode ser sintonizada através da relação  $a/L$ , o que faz das cavidades um importante dispositivo de altas frequências. Os dois modos,  $TE_{1,1,1}$  e  $TM_{0,1,0}$  tem a mesma frequência se a equação abaixo é cumprida:

$$\frac{1.841_{mn}}{a\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{1 + 2.912 \left(\frac{a}{L}\right)^2} = \frac{2.405}{a\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

ou seja:

$$\frac{a}{L} \approx \frac{1}{2}$$

Nesse caso se  $L > 2a$ , o modo TE é o fundamental e se  $L < 2a$  o modo TM é o fundamental. O modo TE tem boa aplicação pois podemos sintonizar a frequência fundamental modificando a relação  $a/L$ , isto é fácil de fazer movimentando uma das faces do cilindro.

Uma cavidade ressonante apresenta também perdas devido à condutividade finita das paredes metálicas. Desse modo a frequência de ressonância deve ser entendida como uma frequência central e uma banda de frequências próximas à ressonância calculada no caso sem perdas.

## 10.8 Guias Dielétricos: a Fibra Óptica

Atualmente boa parte dos sistemas de comunicação utilizam a transmissão da informação em frequências ópticas. Um dos sistemas de comunicação mais primitivos é aquele utilizando a propagação da luz: faróis para navegação, semáforos, etc. Entretanto a propagação no ar não é eficiente porque a atmosfera produz atenuação por absorção e os efeitos de difração são muito pronunciados. Se a distância entre transmissor e receptor for muito grande, torna-se inviável a propagação de ondas em frequências ópticas por meio livre. Por isso, com o avanço tecnológico criaram-se as guias de ondas no espectro óptico, que são as chamadas fibras ópticas, que além de permitir altas taxas de transmissão de dados, são praticamente imunes a ruídos e tem baixas perdas quando comparadas a guias de ondas metálicos.

Muito embora a análise é semelhante ao caso dos guias metálicos, a complexidade das soluções aumenta muito, mas as conclusões gerais, a respeito de existência de modos continuam válidas. Um modo de entender as fibras é utilizando a óptica geométrica, o que facilita bastante, e nesse caso a propagação pode ser entendida como a reflexão na interface entre dois meios distintos, produzindo o efeito de reflexão total, quando o ângulo de incidência for maior do que o ângulo crítico, conforme veremos.

### 10.8.1 Estudo da Propagação através da Óptica Geométrica

A óptica geométrica baseia-se nas leis de Snell para reflexão e refração, representando as ondas por raios, que indicam a direção de propagação. Conforme já vimos anteriormente sabemos, as leis de Snell devem ser satisfeitas na interface entre os dois meios, ou seja:

$$\theta_i = \theta_r, \quad (10.131)$$

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t, \quad (10.132)$$

onde  $n_1 = \sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_0}$  e  $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_0}$  são os índices de refração dos meios 1 e 2, respectivamente. O chamado **ângulo crítico**  $\theta_c$ , dado por:

$$\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1}, \quad (10.133)$$

é o ângulo para o qual existe, do ponto de vista geométrico, reflexão total da onda incidente. Uma vez que  $\sin \theta_t \leq 1$ , quando a igualdade é atingida,  $\theta_t = 90^\circ$ , significa que a onda não mais penetra o meio 2. Veja que somente existe tal ângulo para o caso em que  $n_1 > n_2$ . Para haver confinamento de ondas, ou guiamento, requer-se então um meio de índice  $n_1$  envolvido por outro meio de índice  $n_2 < n_1$ .

A propagação de ondas em um guia de ondas dielétrico, como é o caso da fibra óptica, sob o ponto de vista da óptica geométrica, se dá por múltiplas reflexões internas totais, conforme ilustrado na Figura 10.14. Observe-se que a curvatura da fibra deve ser limitada de tal forma que a onda guiada não vaze do núcleo para

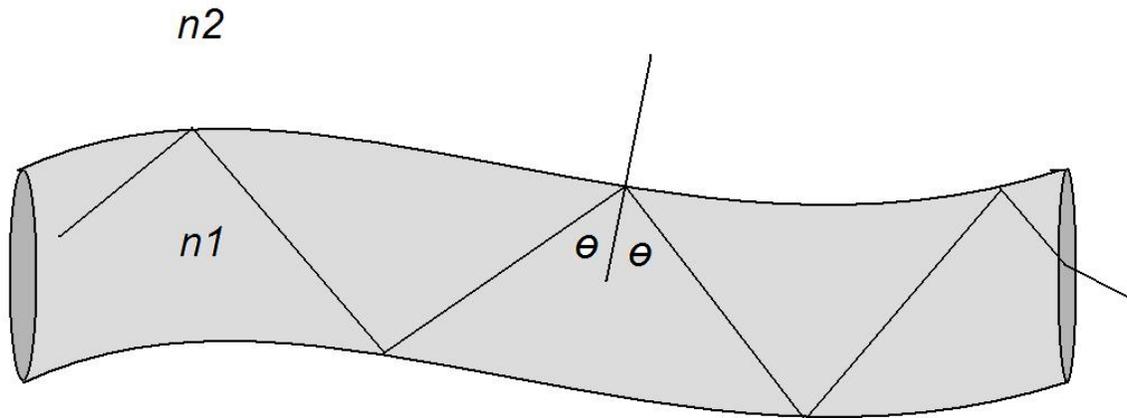


Figure 10.14: Propagação na Fibra Óptica sob a perspectiva da óptica geométrica

o meio exterior.

As comunicações ópticas são realizadas tipicamente em torno dos comprimentos de onda  $\lambda_0 = 900\text{nm}$ ,  $\lambda_0 = 1300\text{nm}$  e  $\lambda_0 = 1500\text{nm}$ , conhecidas como primeira, segunda e terceira janelas ópticas, respectivamente. As perdas são tipicamente menores que  $0,2\text{dB/km}$  nas fibras de sílica.

Elas podem ser classificadas quanto ao seu perfil de índice de refração, da seguinte forma:

1) Fibra de Índice Degrau: para  $n_1 > n_2$

$$n(\rho) = \begin{cases} n_1 & 0 \leq \rho \leq a \\ n_2 & a < \rho \leq b \end{cases}. \quad (10.134)$$

2) Fibra de Índice Gradual: o índice varia gradualmente de  $n_1$  caindo para o valor  $n_2$ , no intuito de equalizar os tempos de propagação dos diversos modos presentes na propagação multimodal. O perfil mais típico é o

parabólico:

$$n(\rho) = \begin{cases} n_1 \left(1 - \Delta \cdot \frac{\rho^2}{a^2}\right) & 0 \leq \rho \leq a \\ n_2 & a < \rho \leq b \end{cases} . \quad (10.135)$$

onde o parâmetro  $\Delta$  é dado por:

$$\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1} . \quad (10.136)$$

Tipicamente  $\Delta \ll 1$ , correspondendo ao que se chama de condição de guiamento fraco.

Quanto à forma de operação, temos:

1) Operação Multimodo: quando vários modos de propagação se propagam na frequência de operação desejada.

2) Operação Monomodo: quando apenas o modo fundamental é propagado na frequência de operação desejada.

É importante destacar que uma fibra não é multimodo ou monomodo sempre. Isso dependerá da frequência de operação. Por exemplo, uma fibra que opera monomodo em  $\lambda = 1.55\mu\text{m}$  (infravermelho) não estará operando na condição monomodal para frequências na faixa do espectro visível ou no ultravioleta.

### 10.8.2 Estudo da dispersão em fibras multimodo através óptica geométrica

A dispersão é um efeito temporal geralmente indesejável. Na fibra multimodo a principal contribuição para a dispersão é proveniente das diferentes velocidades de propagação dos diversos modos presentes.

↪ Denomina-se esta de DISPERSÃO INTERMODAL. Obviamente não ocorre na fibra de operação monomodo. A dispersão provoca efeitos como a ISI (Interferência Inter-Simbólica) em sistemas digitais. No caso da dispersão intermodal, a mesma informação se propaga através de modos distintos, chegando a tempos distintos no destino final.

↪ Se o tempo de atraso entre a chegada do modo mais rápido e a do modo mais lento é considerável a superposição/batimento dos sinais que trazem a mesma informação irá degradar o sinal de tal forma que se torna impossível reconhecer a informação. A dispersão limita portanto a distância máxima possível, sem que haja sistema de regeneração do sinal. A Figura ?? ilustra a dispersão intermodal para uma fibra de índice degrau.

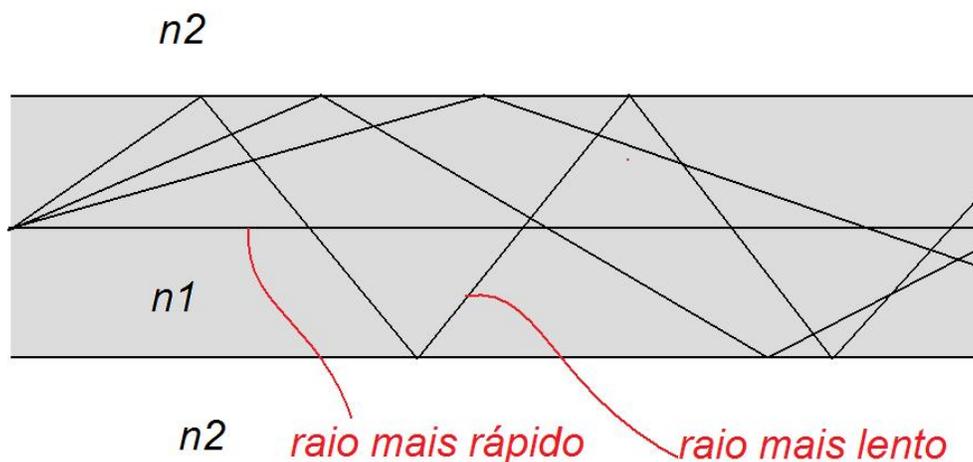


Figure 10.15: Propagação Multimodo.

O modo mais rápido propaga-se paralelo ao eixo da fibra num meio de índice de refração  $n_1$ , portanto a sua velocidade é dada simplesmente por

$$v_f = \frac{c}{n_1}.$$

Já o modo mais lento incide na interface  $n_1/n_2$  com o ângulo crítico pelo menos, pois para ângulos menores que  $\theta_c$  deixa de ocorrer guiamento e a onda vaza para o meio  $n_2$ . A componente da velocidade de propagação paralela ao eixo da fibra é dada então por:

$$v_l = \frac{c}{n_1} \sin \theta_c = \frac{cn_2}{n_1^2}.$$

Para uma fibra de comprimento  $L$  podemos calcular os tempos de propagação e o atraso temporal do raio mais lento em relação ao mais rápido:

$$\begin{aligned} t_f &= \frac{L}{v_f} = \frac{Ln_1}{c}, \\ t_l &= \frac{L}{v_l} = \frac{Ln_1^2}{cn_2}, \\ \tau &= t_l - t_f = \frac{Ln_1}{c} \left( \frac{n_1}{n_2} - 1 \right). \end{aligned}$$

Fazendo uso da definição de  $\Delta$  tem-se

$$\tau = \frac{L\Delta n_1^2}{cn_2}. \quad (10.137)$$

↪ Dada a janela de tempo ocupada por um único bit  $T$  para um sistema de comunicação, a taxa de transmissão  $B$  será dada por  $B = 1/T$ . Como o tempo de atraso  $\tau$  deve ser menor do que  $T$ , ou seja,  $T > \tau$ , temos facilmente o produto  $BL$ :

$$BL < \frac{cn_2}{n_1^2 \Delta}. \quad (10.138)$$

Veja que esta última fórmula implica que o produto  $BL$  é inversamente proporcional a  $\Delta = (n_1 - n_2)/n_1$ . Nesse caso a diferença de índice de refração entre os dois meios deve ser pequena, daí ser desejável a condição de guiamento fraco. Vejamos alguns exemplos:

↪ Fibra sem casca: para este caso  $n_1 = 1.5$  e  $n_2 = 1$ , resultando então

$$BL < 0.4 \text{ Mb/s} \cdot \text{km}.$$

↪ Fibra com casca:  $n_1 = 1.5$  e  $\Delta = 2 \times 10^{-3}$  resulta em

$$BL < 100 \text{ Mb/s} \cdot \text{km}.$$

↪ A tecnologia que permitiu o desenvolvimento e fabricação de fibras na condição de guiamento fraco levou a um aumento exponencial na capacidade de transmissão das mesmas, tornando-as comercialmente viáveis.

### **Aprimoramento: A Fibra Multimodo de Índice Gradual**

↪ A idéia básica da fibra de índice gradual é fazer a equalização dos tempos de propagação dos diversos modos propagantes. Foi um passo seguinte no aumento da capacidade dos sistemas ópticos anterior ao surgimento das fibras monomodais.

↪ O raio que caminha paralelo ao eixo se propaga em um índice de refração  $n_1$ . A idéia é fazer com que os raios que se propagam certo ângulo em relação ao eixo, tenham velocidades de propagação maiores do que a velocidade do raio paralelo, de tal forma a compensar a maior distância percorrida. Isso somente é possível se esses raios (modos) não paralelos se propaguem em meios de índice de refração menor que  $n_1$ .

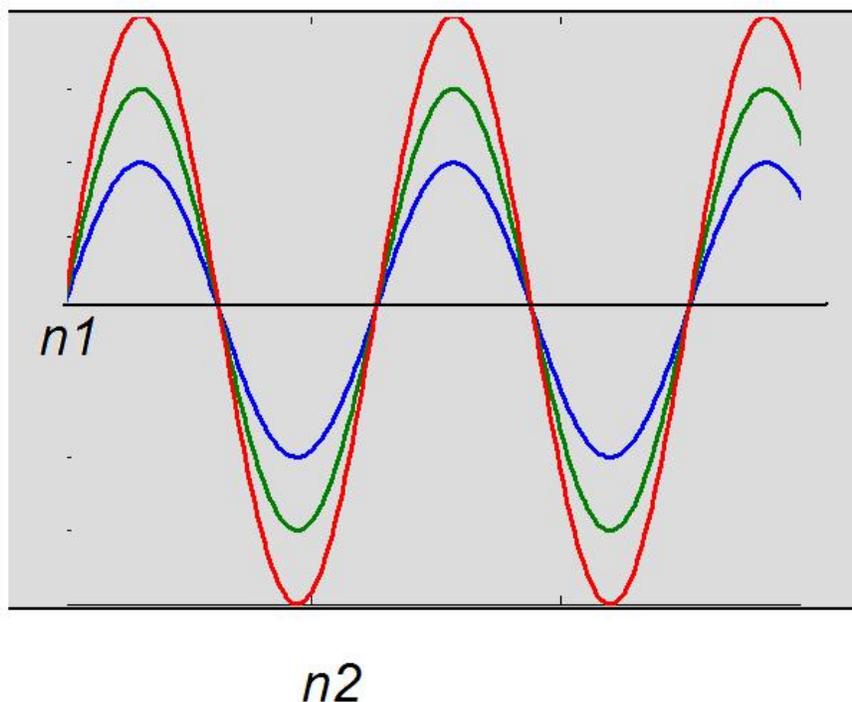


Figure 10.16: Propagação Multimodo em uma Fibra de Índice Gradual: Equalização dos tempos.

Para tanto um perfil muito utilizado é o parabólico:

$$n(\rho) = \begin{cases} n_1 \left(1 - \Delta \cdot \frac{\rho^2}{a^2}\right) & 0 \leq \rho \leq a \\ n_2 & a < \rho \leq b \end{cases} \quad (10.139)$$

A propagação na fibra de índice gradual é ilustrada na Figura 10.16. É possível mostrar que o limite agora fica da seguinte forma:

$$BL < \frac{8c}{n_1 \Delta^2}$$

↪ Aumenta ainda mais a capacidade de transmissão, uma vez que depende de  $1/\Delta^2$ !!

### 10.8.3 Uma equação de trajetória para a Óptica Geométrica

Quando o índice de refração não varia muito numa distância equivalente a um comprimento de ondas, é possível fazer algumas aproximações que recaem na chamada Óptica Geométrica. Primeiramente vamos fazer algumas analogias, lembrando a forma do campo elétrico de uma onda plana uniforme:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (10.140)$$

onde  $\mathbf{E}_0$  é um vetor complexo e constante e  $\mathbf{k}/k$  indica a direção de propagação da onda. Escrevendo  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i[\omega t - S(\mathbf{r})]}$ , onde  $S(\mathbf{x}) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$  é fácil mostrar que:

$$\mathbf{k} = \nabla S. \quad (10.141)$$

A função  $S$  indica superfícies de fase constante de uma onda, e o gradiente desta função mostra para onde ocorre a máxima variação, ou seja, para onde a onda se desloca. Podemos generalizar, para qualquer onda

eletromagnética:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(\mathbf{r})e^{i[\omega t - S(\mathbf{r})]} \quad (10.142)$$

onde agora  $\mathbf{E}_0$  não é mais constante. Entretanto para pequenas variações do índice de refração é possível assumir um regime de adiabaticidade negligenciando variações de amplitude, e a trajetória de raios será perfeitamente descrita pela equação (10.141):

$$\mathbf{k} = \nabla S$$

É importante lembrar que localmente:

$$\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{n}} = k_0 n \hat{\mathbf{n}}$$

sendo  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ ,  $\lambda_0$  é o comprimento de ondas no vácuo,  $n$  é o índice de refração e  $\hat{\mathbf{n}}$  é um vetor unitário na direção de propagação da onda. Uma vez que o interesse se dá nas ondas guiadas que se propagam quase paralelas ao eixo  $z$ , podemos assumir que

$$k_z \approx k_0 n .$$

Esta denomina-se APROXIMAÇÃO PARAXIAL - onda se propagando paralela ao eixo. Observe a Figura 10.17. Em coordenadas cilíndricas temos a relação óbvia:

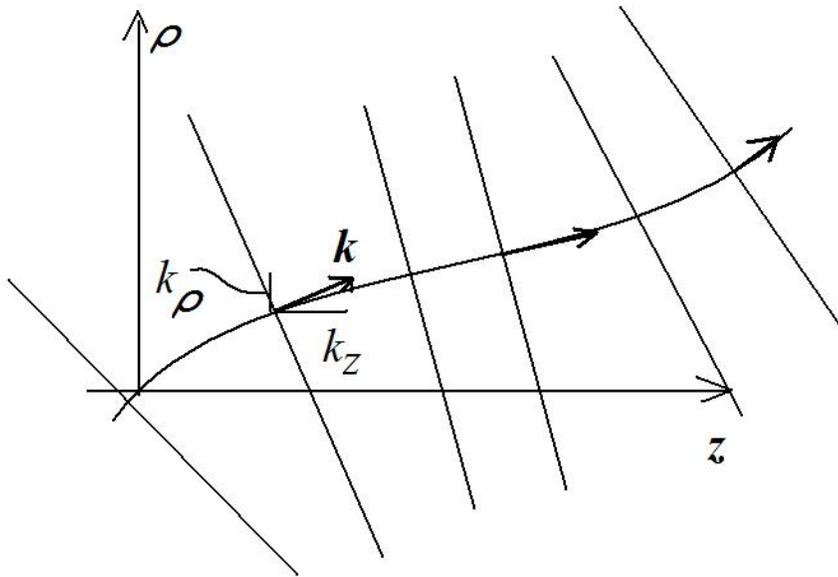


Figure 10.17: Frentes de Onda em uma Trajetória Não-Retilínea.

$$k_\rho \rightarrow d\rho \text{ e } k_z \rightarrow dz$$

de onde vem:

$$\frac{d\rho}{dz} = \frac{k_\rho}{k_z} . \quad (10.143)$$

Observemos que:

$$k_\rho = \frac{\partial S}{\partial \rho}$$

$$k_z = \frac{\partial S}{\partial z}$$

mas na aproximação paraxial podemos fazer:

$$k_\rho = \frac{\partial S}{\partial \rho}$$

$$k_z = \frac{\partial S}{\partial z} \approx k_0 n(\rho)$$

para calcular a segunda derivada da equação (5.80):

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{k_\rho}{k_z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{k_0 n} \frac{\partial S}{\partial \rho} \right). \quad (10.144)$$

Comutando as derivadas em  $\rho$  e  $z$  no caso em que  $n$  não é função da variável  $z$  temos:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} = \frac{1}{k_0 n} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\partial S}{\partial z} \right). \quad (10.145)$$

Uma vez que  $\partial S / \partial z = k_0 n$  e temos:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial \rho}. \quad (10.146)$$

Esta é a equação de trajetória de um raio na aproximação paraxial.

### Tempos de propagação de sinal

Lembrando que localmente temos:

$$\frac{dl}{dt} = \frac{c}{n}$$

podemos reescrever esta equação na forma:

$$dt = \frac{n}{c} dl.$$

Uma vez que a onda se propaga com deslocamentos em  $\rho$  e  $z$ , mas a trajetória é uma função  $(z, \rho(z))$  de acordo com a equação(10.146) podemos escrever:

$$dl^2 = d\rho^2 + dz^2$$

ou ainda

$$dl = \sqrt{1 + \left( \frac{d\rho}{dz} \right)^2} dz,$$

de onde finalmente tiramos o resultado desejado

$$T = \int_0^T dt = \int_0^L \frac{n}{c} \sqrt{1 + \left( \frac{d\rho}{dz} \right)^2} dz. \quad (10.147)$$

É necessário resolver a equação de trajetória de raios para determinar o tempo necessário para uma onda propagar uma distância  $L$  em uma fibra óptica. Pede-se nos exercícios para determinar a solução desse problema no caso da fibra óptica com perfil parabólico.

Finalmente, o **Ângulo de Aceitação e a Abertura Numérica** são medidas da facilidade de acoplamento da luz à fibra óptica, proveniente de um outro meio de índice  $n_0$ . Pode-se demonstrar que na condição de guiamento fraco:

$$NA = n_0 \sin \alpha_i = n_1 \sqrt{2\Delta},$$

sendo  $\alpha_i$  o ângulo de aceitação e  $NA$  a abertura numérica da fibra.

## 10.9 Referências deste Capítulo

- [10.1] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd Edition John Wiley and Sons, 1998.
- [10.2] Matthew N.O. Sadiku, *Elementos do Eletromagnetismo* (Ed. Bookman, Porto Alegre, 5a. Ed, 2005).
- [10.3] Carl H. Durney and C.C. Johnson, *Introduction to Modern Electromagnetics*, McGraw-Hill.
- [10.4] G.P. Agrawal, *Fiber-optic communications systems*, 2nd. Edition, Ed. John Wiley, 1997.
- [10.5] Donald L. Lee, *Electromagnetic Principles of Integrated Optics*, John Wiley, 1986.

## 10.10 Problemas Propostos

- 1) Explique de maneira simples (diga quais estão associados à característica espacial da onda e quais à característica temporal), com as observações que achar pertinentes os seguintes fenômenos que ocorrem com uma onda eletromagnética:
  - a) Difração;
  - b) Dispersão;
  - c) Atenuação e absorção.
- 2) Em um guia de onda, o que representa um modo de propagação? Por que surgem modos distintos de propagação?
- 3) Em um sistema de microondas operando a 900MHz, a onda de tensão que se propaga em um cabo coaxial de impedância característica  $Z_0 = 50$  ohms e dielétrico de permissividade relativa  $\epsilon_r = 2.25$  é dada por:

$$V(z, t) = 25e^{i(\omega t - \beta z)} + 10e^{i(\omega t + \beta z)} \quad \text{volts .}$$

Por simplicidade vamos desprezar atenuação no cabo. A onda refletida pela carga  $Z_L$  conectada ao final do cabo é desviada do gerador através de um circulador, para uma carga muda de valor 50ohms. Determine:

- a) A onda de corrente  $I(z, t)$  no guia.
  - b) O coeficiente de reflexão  $\Gamma_0$  em  $z = 0$ .
  - c) A impedância de carga  $Z_L$ , se o cabo coaxial tem um comprimento  $l = 1$ m. na frequência de operação.
  - d) A potência dissipada na carga  $Z_L$ .
- 4) Considere uma antena monopolo de meia onda cuja impedância vale aproximadamente  $Z_A = 36 + i21 \Omega$  operando em  $f = 100$ MHz, determine:
    - a) o coeficiente de reflexão quando a mesma é conectada a uma linha de impedância característica  $Z_0 = 75 \Omega$ .
    - b) a impedância vista pelo gerador se a antena é conectada através de um cabo coaxial  $Z_0 = 75 \Omega$ ,  $\epsilon_r = 2.25$  e comprimento do cabo  $l = 10$ m.
  - 5) Calcule a mínima frequência de corte para um guia retangular com dimensões  $a = 3$  cm e  $b = 1.5$  cm. Faça o mesmo para um guia metálico circular de raio  $a = 1$  cm. Para o modo fundamental do guia retangular ( $TE_{10}$ ) calcule o coeficiente de atenuação,  $\alpha$ :

$$\alpha = -\frac{1}{2P} \frac{dP}{dz} \quad (10.148)$$

$$P_{(TE)} = \frac{1}{2} \frac{\omega \mu \beta}{(k^2 - \beta^2)} \int |\Psi|^2 dx dy \quad (10.149)$$

$$-\frac{dP}{dz} = \frac{1}{2\sigma\delta} \oint |\mathbf{n} \times \mathbf{H}|^2 dl$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\omega\sigma}}$$

A função do modo fundamental TE é dada por:

$$\Psi_{TE_{10}} = H_z = H_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \quad (10.150)$$

e

$$\mathbf{H}_\perp = \frac{-i\beta}{k^2 - \beta^2} \nabla_\perp \Psi \quad (10.151)$$

Se  $\sigma = 5.7 \times 10^7 \Omega^{-1} m^{-1}$ , e  $\mu_r = 1$ ,  $\varepsilon_r = 1$ , calcule as perdas para uma frequência  $\omega$  exatamente no ponto médio entre a frequência de corte fundamental e a frequência de corte do segundo modo. Qual o espaçamento entre os regeneradores de sinal?

- 6) Para um guia retangular com dimensões  $a = 3$  cm e  $b = 1$  cm, sendo  $a$  a dimensão em relação ao eixo  $x$  e  $b$  em relação ao eixo  $y$  determine
- a frequência de corte, ou  $f_c = \omega_c/(2\pi)$  do modo fundamental e as frequências de corte para os modos superiores.
  - Para o modo fundamental do guia retangular ( $TE_{10}$ ) calcule os campos transversais uma vez que a função do modo fundamental TE é dada por:

$$\Psi_{10}^{TE} = H_z = H_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i(\omega t - k_z z)} \quad (10.152)$$

e para obter os campos transversais TE consulte o formulário.

- Determine o segundo modo e sua a frequência de corte, bem como as expressões para os campos do segundo modo do guia. O segundo modo é um modo TE ou TM?
- Calcule o valor do coeficiente de atenuação,  $\alpha$ , para o modo fundamental. O coeficiente de perdas para o modo  $TE_{10}$  é dado pela expressão mostrada abaixo:

$$\alpha = \frac{R_S}{bZ\sqrt{1 - \omega_c^2/\omega^2}} \left(1 + \frac{2b\omega_c^2}{a\omega^2}\right)$$

onde  $Z$  é a impedância do meio que preenche o guia,

$$R_S = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$$

e  $\omega_c$  é a frequência de corte do modo fundamental. Faça  $\sigma = 5 \times 10^7 \Omega^{-1} m^{-1}$ , e  $\mu_r = 1$ ,  $\varepsilon_r = 1$ , e calcule as perdas para uma frequência  $\omega$  exatamente no ponto médio entre a frequência de corte fundamental e a frequência de corte do segundo modo. Qual deve ser o espaçamento entre os regeneradores de sinal?

- Qual é a velocidade de grupo para a propagação na frequência utilizada no item anterior?
  - O que são modos de propagação evanescentes? E os modos propagantes o que significam? O que é propagação monomodo, multimodo e dispersão modal?
- 7) Calcule o coeficiente de perdas de um cabo coaxial de raio interno  $a$  e externo  $b$ . Para  $a = 0.406$  mm e  $b = 1.548$  mm, sendo  $\sigma = 5 \times 10^7 \Omega^{-1} m^{-1}$ ,  $\mu_r = 1$ , e preenchido de polietileno cuja permissividade relativa é  $\varepsilon_r = 2.25$ . Determine então o espaçamento necessário entre os regeneradores de sinal. Determine também o fator de velocidade  $c/c_0$ , a impedância característica, a indutância e a capacitância por unidade de comprimento para este guia, que é na verdade uma linha de transmissão pois comporta os modos TEM. Veja os Exemplos 9.4.1 até 9.4.3 do capítulo 9 do livro de Orfanidis. (Fórmula de perdas em um cabo coaxial é dada na apostila.)

- 8) Calcule as frequências de ressonância para um cavidade ressonante circular de dimensões raio  $R = 3\text{ cm}$  e comprimento  $d = 5\text{ cm}$ . Qual é o modo fundamental? Discuta o efeito das perdas, devido ao fato de que o condutor não é perfeito nas paredes, para a frequência de ressonância. Calcule a largura de linha na frequência fundamental  $\omega_0$ , já que o fator de mérito  $\omega_0/\Delta\omega = Q = 20$  para a cavidade.
- 9) A cavidade conhecida como ressoador de Fabri-Perot e constituída de dois espelhos paralelos tem importantes aplicações em óptica, na obtenção do efeito laser. Para haver *lasing* (poder gerar um feixe de luz intenso e coerente) um dos requisitos é que o meio material entre os espelhos apresente ganho suficiente para compensar as perdas no comprimento de ondas de interesse e esse meio é dito ativo. Consideremos que o meio entre dois espelhos satisfaça esse primeiro requisito, ou seja, apresente ganho numa faixa de comprimentos de onda de interesse. Dessa forma a seleção da frequência (ou comprimento de onda) correta de laser deverá ser feita através do ajuste da distância  $d$  entre os espelhos. Entre os espelhos haverá a propagação de ondas eletromagnéticas em ambos os sentidos (onda propagante e onda refletida). Um dos espelhos é sempre um refletor perfeito  $R \approx 1$  enquanto o outro tem uma refletividade menor, cerca de  $R = 0.7$ , para deixar uma parte da energia contida na cavidade passar para fora, constituindo o feixe de laser desejado. Para fins de análise, consideremos que o ganho do meio ativo compense exatamente as perdas condutivas no material e as perdas nos espelhos, de forma que possamos tratar ambos os espelhos como condutores perfeitos  $\sigma \rightarrow \infty$ ,  $R = 1$ . Adota-se um sistema de coordenadas em que o eixo  $z$  é o eixo de propagação das ondas entre os dois espelhos perfeitamente paralelos entre si. O primeiro espelho é o plano  $z = 0$  e o segundo espelho é o plano  $z = d$  e podemos representar o campo elétrico entre os espelhos na forma

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r = (E_i e^{i(\omega t - kz)} + E_r e^{i(\omega t + kz)}) \hat{\mathbf{a}}_x$$

onde  $E_i$  é a amplitude do campo propagante no sentido positivo do eixo  $z$  e  $E_r$  do campo propagante no sentido oposto.

a) Lembrando que o campo elétrico tangencial à uma superfície condutora perfeita deve se anular sobre a superfície, encontre as relações entre  $E_i$  e  $E_r$  e as condições sobre o número de onda  $k = 2\pi/\lambda$  para satisfazer às condições de contorno impostas. Uma vez encontrada a forma do campo elétrico, determine o campo magnético na cavidade.

b) Para um material com índice de refração  $n = \sqrt{\epsilon_r} \approx 1$  e ativo na faixa de  $692.00\text{ nm} < \lambda < 692.20\text{ nm}$  colocado entre os dois espelhos com distância de separação  $d = 1\text{ cm}$ , determine quantos e quais são os comprimentos de onda excitados na cavidade assumindo que todos os comprimentos de onda possíveis entre o mínimo e o máximo da faixa ativa sejam excitados.

Obs.:  $1\text{ nm} = 10^{-9}\text{ m}$

- 10) Para um guia retangular com dimensões  $a = 2.3\text{ cm}$  e  $b = 1.15\text{ cm}$ , sendo  $a$  a dimensão em relação ao eixo  $x$  e  $b$  em relação ao eixo  $y$  determine
- a) as frequências de corte, ou  $f_c = \omega_c/(2\pi)$  do modo fundamental  $\text{TE}_{10}$  e do modo seguinte  $\text{TE}_{01}$ .
- b) Para o modo fundamental do guia retangular ( $\text{TE}_{10}$ ) determine os campos transversais uma vez que a função do modo fundamental TE é dada por:

$$\Psi_{10}^{TE} = H_z = H_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i(\omega t - k_z z)} \quad (10.153)$$

e esboce o gráfico do campo elétrico  $E_y$  (para obter os campos transversais TE consulte o formulário).

c) Qual é impedância do guia e a velocidade de grupo para a propagação na frequência do ponto médio entre a frequência de corte do modo fundamental e a do modo seguinte?

d) Em poucas palavras: O que são modos de propagação evanescentes? E os modos propagantes o que significam? O que é propagação monomodo, multimodo e dispersão intermodal?

11) Deduza as equações de linhas de transmissão. Discuta as semelhanças e diferenças das linhas de transmissão com relação aos guias metálicos ocios.

12) O que são fibras ópticas? Discuta os fundamentos físicos e aplicações das mesmas. Para a fibra óptica de índice gradual de perfil parabólico, mostre que a) Guardando somente termos lineares em  $\rho$  temos:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} = -\frac{2\Delta}{a^2} \rho . \quad (10.154)$$

b) A solução geral de trajetória é dada por:

$$\rho(z) = A \cos(pz) + B \sin(pz) ,$$

onde  $p = \sqrt{2\Delta}a$

c) Assumindo  $B = 0$  e  $A = a$  determine através da equação (10.147) o limite para produto  $BL$ .

13) Determine o raio de curvatura máximo que uma fibra óptica admite, em função de  $\Delta$ ,  $n_1$  e  $n_2$  para que não haja perda de vazamento pelas leis da óptica geométrica.



## Chapter 11

# Teoria de Difração na Aproximação Paraxial

Os desvios da propagação da luz em relação à óptica geométrica de raios responsável por encurvamento, alargamento espacial e interferência de ondas que podem ser ondas mecânicas (som, ondas de água), eletromagnéticas ou ondas de matéria no caso da mecânica quântica ganharam o nome de Difração, um fenômeno intrinsecamente ondulatório. Provavelmente o mais conhecido fenômeno associado à difração corresponde ao surgimento de franjas de interferência após uma onda passar por uma fenda simples, conforme ilustrado na Figura 11.1 ou ainda uma composição de fendas. Do latim, o termo *diffractus* significa particionar ou quebrar. **Difração**, em

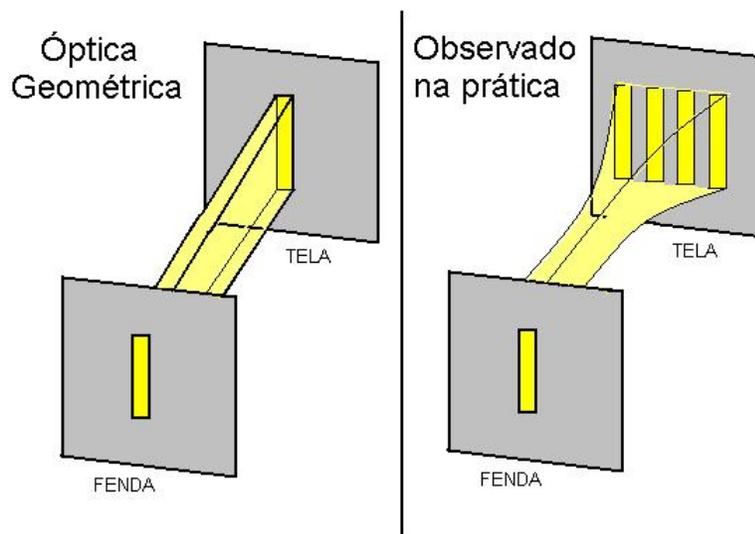


Figure 11.1: Fenômenos de difração observado em uma fenda simples iluminada por uma onda monocromática produzida por uma fonte de luz coerente, como um laser.

um senso bastante geral é todo e qualquer desvio e encurvamento da propagação de uma onda em relação às previsões da Óptica Geométrica.

Alguns pontos importantes cabem menção prévia:

- Sempre ocorre em sistemas não-guiados, onde a densidade de potência decai na forma  $1/r^2$  pelo menos se o espaço considerado é tridimensional, para a região de campo distante (zona de Fraunhofer), conforme discutido anteriormente. De fato a difração leva a uma lei da forma  $1/r^{D-1}$  para o comportamento da densidade de potência na região de campo distante.

- É um fenômeno espacial, ocorre uma onda de frequência única, ou monocromática.

Existem dois tipos de difração denominados de Fresnel e de Fraunhofer, que ocorrem na região de campo próximo e distante, respectivamente. Define-se um parâmetro chamado Número de Fresnel  $F$ :

$$F = \frac{d^2}{\lambda r},$$

onde  $d$  é a dimensão da abertura do padrão transversal de campo inicial,  $r$  a distância do ponto de observação em relação a um ponto no plano inicial e  $\lambda$  o comprimento de onda. A Zona de Fresnel corresponde a  $F \geq 1$  e a Zona de Fraunhofer, quando  $F < 1$  é a região de campo distante ou campos de radiação cuja densidade de potência decai na forma  $1/r^2$  para o espaço tridimensional, conforme mencionamos.

Da equação de Helmholtz e dos Teoremas de Green chega-se a uma teoria de difração de forma rigorosa, levando ao Princípio de Huygens, que considera que cada ponto de uma abertura ou frente de ondas age como fonte puntual de ondas esféricas secundárias, permitindo explicar, por exemplo, o experimento de dupla fenda de Young, onde uma onda plana monocromática incide sobre um plano contendo duas aberturas ou fendas e produz uma figura de interferência sobre um anteparo colocado a uma certa distância da fenda. Em 1818, Augustin Fresnel combinou as idéias intuitivas de Christian Huygens para a teoria ondulatória da luz de 1678 com o princípio de interferência de Young para produzir uma teoria ondulatória da óptica quantitativamente razoável. Uma vez que a teoria de Huygens e Fresnel é anterior ao desenvolvimento das equações de Maxwell muitas considerações arbitrárias tiveram que ser feitas, de modo a conciliar a teoria escalar com os fenômenos observados experimentalmente. Nos estudos da propagação de ondas através das equações de Maxwell raramente uma solução analítica exata é conhecida, fazendo necessária uma simplificação do problema físico torne a análise possível. Entre 1880 e 1900, Kirchhoff, Rayleigh e Sommerfeld desenvolveram uma teoria da difração no domínio óptico bastante simplificada, onde o caráter vetorial da onda pode ser desprezado em primeira aproximação e um campo escalar  $\Psi$  pode representar então a componente  $E_y$  do campo elétrico, por exemplo. Essa teoria aplica-se também a outros tipos de ondas como o som. Para uma abertura qualquer, de superfície  $S'$ , iluminada por uma onda incidente  $\Psi(S')$ , a onda difratada será dada pela integral de Kirchhoff-Fresnel, que nada mais é do que a expressão matemática do princípio de Huygens:

$$\Psi_{dif}(x, y, z) = \frac{k}{2\pi i} \int_{S'} \Psi(S') \frac{e^{-ikR}}{R} dS' \quad (11.1)$$

onde  $\Psi(S') = \Psi(x', y', z' = 0)$  é a onda incidente na abertura colocada no plano  $z' = 0$ ,  $\exp(-ikR)/R$  é a expressão matemática para representar uma onda esférica e  $dS'$  indica um elemento diferencial de superfície na abertura. A abertura é justamente a parte do plano  $z' = 0$  que permite a transmissão de uma parte da onda incidente, e  $\Psi_{dif}(x, y, z)$  é a onda difratada, ou seja, a onda que se propaga para além da abertura. Os resultados dessa teoria são bastante satisfatórios e concordam bem com os experimentos.

Todavia, a aproximação mais útil para a solução da equação de ondas, sobretudo no estudo da propagação de feixes ópticos, também denominada óptica de Fourier, faz uso da chamada aproximação paraxial. A equação paraxial escalar negligencia aspectos vetoriais do campo eletromagnético, mas apresenta excelentes resultados no domínio óptico, podendo ser empregada também no estudo de micro-ondas com bons resultados. A grande sacada dessa aproximação é que a equação de ondas de Helmholtz apresenta derivadas de segunda ordem em todas as coordenadas espaciais enquanto que a aproximação paraxial retém somente a derivada de primeira ordem em relação a alguma dessas variáveis, tornando possível quando buscamos soluções que se propagam, a implementação numérica de métodos de Runge-Kutta, que são relativamente simples e robustos quanto à sua estabilidade.

Cabe destacar ainda que soluções da equação de Helmholtz que não sofrem difração existem e são denominadas de ondas não-difrativas. Essas não são realizáveis de forma exata no mundo real porque requerem energia

infinita. Por exemplo, uma onda plana monocromática é solução natural da equação de Helmholtz em coordenadas cartesianas e não sofre difração, mas uma vez que a densidade de potência deve ser constante em um plano de área infinita, sua potência total deve ser constante e infinita, o que é fisicamente inconcebível. As ondas não-difrativas não são quadraticamente integráveis em relação às coordenadas da seção transversal à direção de propagação e isso significa que uma quantidade infinita de energia é necessária para construí-las. Entretanto, elas são úteis porque formam em um dado sistema de coordenadas uma base completa e ortogonal de funções, tornando possível representar qualquer solução como superposição adequada de tais ondas não-difrativas. Soluções de ondas não-difrativas são obtidas em sistemas cilíndricos do tipo  $(x_1, x_2, z)$ , sendo  $z$  o eixo longitudinal e  $(x_1, x_2)$  um par de coordenadas transversais. Dentre os mais conhecidos, além do próprio sistema retangular temos o sistema o cilíndrico circular  $(\rho, \varphi, z)$  onde surgem os feixes de Bessel, e o elíptico-cilíndrico  $(u, v, z)$  onde surgem os feixes de Mathieu.

## 11.1 A aproximação paraxial da equação de ondas

Antes de prosseguir vamos tentar responder à seguinte questão: O que é **paraxialidade**?

De forma simples, termo *paraxial* que tem origem no grego, significa em nosso contexto a propagação de uma superposição de ondas, todas elas com vetor de direção de propagação formando um ângulo muito pequeno com o eixo de propagação (axis) tomado como referência, sendo portanto quase paralelas a esse eixo. Esse eixo é denominado longitudinal e adota-se convencionalmente a coordenada  $z$  de um sistema cilíndrico para representá-lo.

### Transversalidade e Paraxialidade

Um **erro** comum em livros-texto de Física básica muito empregados nos cursos de graduação em Física e Engenharia é a afirmação de que *as ondas eletromagnéticas são transversais, ou seja, os campos oscilam sempre em um plano perpendicular à direção de propagação*. Essa sentença não é verdadeira de forma geral, uma vez que a condição de transversalidade é satisfeita somente pelas as ondas planas uniformes. As superposições arbitrárias de ondas planas uniformes produzem campos resultantes que satisfazem a transversalidade. Para iluminar essa discussão vamos considerar e demonstrar que nem todas as ondas eletromagnéticas são transversais consideremos o problema da superposição de duas ondas planas uniformes. A situação considerada é ilustrada na Figura 11.2. Por simplicidade, duas ondas planas uniformes de mesma amplitude propagando-se no vácuo formam ângulo  $\theta$  com o eixo  $z$  e tem polarização tal que o campo elétrico de cada uma delas é dado abaixo:

$$\mathbf{E}_1 = E_0(\cos \theta \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}} - \sin \theta \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{z}})e^{i(\omega t - k_0 x \sin \theta - k_0 z \cos \theta)}, \quad (11.2)$$

$$\mathbf{E}_2 = E_0(\cos \theta \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}} + \sin \theta \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{z}})e^{i(\omega t + k_0 x \sin \theta - k_0 z \cos \theta)}, \quad (11.3)$$

onde  $E_0$  é uma constante real que denota a amplitude,  $k_0 = 2\pi/\lambda_0 = \omega/c_0$  é o número de onda no vácuo e  $c_0 \approx 3 \times 10^8 \text{m/s}$  é a velocidade da luz no vácuo. Pelo princípio de superposição, o campo elétrico  $\mathbf{E}$  da onda resultante é dado simplesmente pela soma vetorial dos campos individuais:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = 2E_0e^{i(\omega t - k_0 z \cos \theta)}[\cos \theta \cos(k_0 x \sin \theta)\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}} + i \sin \theta \sin(k_0 x \sin \theta)\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{z}}]. \quad (11.4)$$

Observando a expressão acima, podemos ver que a velocidade de fase, dada por  $v_p = \omega/(k_0 \cos \theta)$ , aponta na direção  $\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{z}}$  e o próprio campo elétrico resultante  $\mathbf{E}$  apresenta uma componente não nula nessa direção. Todavia, a direção de propagação da energia média transportada pela onda resultante é a que deve ser tomada como direção de propagação da onda. Para tanto precisamos determinar o vetor de Poynting médio, dado de forma geral para ondas monocromáticas (que tenham apenas uma componente de frequência  $\omega$ ) pela expressão abaixo:

$$\mathbf{S}_{\text{med}} = \frac{1}{2}\text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \frac{2k_0|E_0|^2}{\omega\mu_0} \cos \theta \cos^2(k_0 x \sin \theta)\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{z}}, \quad (11.5)$$

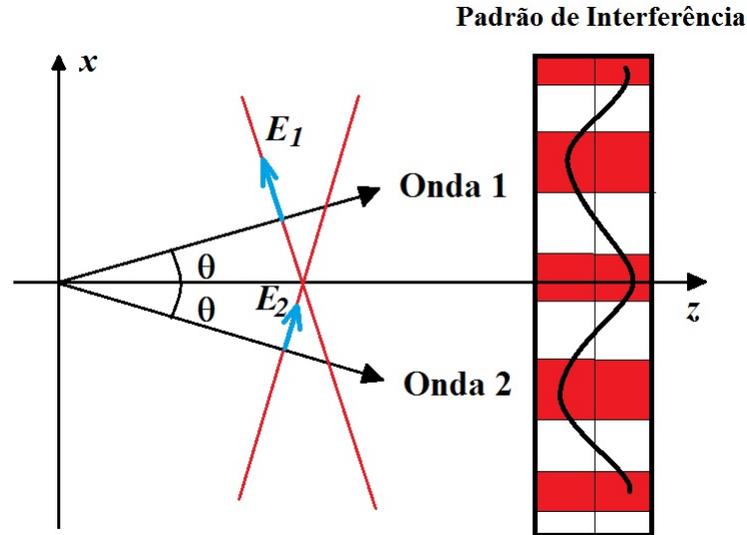


Figure 11.2: Duas ondas planas uniformes propagando-se em direções distintas mas ambas formando um ângulo  $\theta$  com o eixo  $z$ . É fácil mostrar que o padrão de interferência resultante para a densidade de potência tem a forma  $\cos^2(k_0 x \sin \theta)$ , produzindo regiões de máximos e outras escuras.

o que significa que a onda transporta energia na direção  $z$ , e nesse caso o campo elétrico tem uma componente nessa mesma direção, significando que o campo  $\mathbf{E}$  não é totalmente transversal à direção de propagação da onda resultante. Fica como exercício encontrar os campos magnéticos  $\mathbf{H}_1$ ,  $\mathbf{H}_2$  de cada onda plana separadamente e depois o campo  $\mathbf{H}$  resultante da superposição. O campo magnético resultante é totalmente transversal, como deve ter sido demonstrado pelo leitor, e por isso esse tipo de solução é denominada onda TM (transversal magnética).

Agora vamos tentar responder em linhas gerais à seguinte questão: Qual é a relação entre a transversalidade e a paraxialidade? A resposta está na restrição que se devemos fazer ao ângulo  $\theta$  para satisfazer a condição de paraxialidade. Considerando que  $\theta \ll 1$ , sabemos que  $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$  e  $\sin \theta \approx \theta$ . Quanto menor o valor do ângulo  $\theta$  máximo de um conjunto de ondas consideradas na superposição, menor será a importância das componentes longitudinais dos campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  resultantes da superposição, e a condição de transversalidade é aproximadamente satisfeita, dando origem a modos denominados *quasi-TEM* (TEM significando Transversal EletroMagnética). Veja que  $E_z \rightarrow 0$  se  $\theta \rightarrow 0$  e o mesmo ocorreria caso houvesse componente  $H_z$  na solução. Isso pode ser demonstrado mesmo no caso em que o meio seja fracamente não-homogêneo. Portanto **as ondas paraxiais são aproximadamente transversais**. O erro da aproximação paraxial dependerá invariavelmente do que é considerado um ângulo muito pequeno e ficará na ordem de  $\theta^2/2 \times 100\%$ . Para  $\theta < 10^\circ$  o erro é menor do que 1%.

Sabemos agora que uma onda resultante de natureza paraxial corresponde a uma superposição de ondas com vetores de onda na forma  $\mathbf{k}_m = \beta \hat{\mathbf{a}}_z + \delta \mathbf{k}_{\perp m}$ , onde  $|\delta \mathbf{k}_{\perp m}| \ll \beta$  é um pequeno desvio transversal do vetor de onda da  $m$ -ésima onda plana uniforme que compõe a onda resultante. Nessa condição, a onda propagante tem um termo de fase predominante na forma  $e^{-i\beta z}$ , permitindo escrever a solução de (8.222) na forma que segue:

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{A}(x, y, z) e^{i(\omega t - \beta z)}, \quad (11.6)$$

onde  $\mathbf{A}(x, y, z)$  é uma função vetorial que leva em conta as variações lentas do vetor campo elétrico, comparativamente a  $e^{-i\beta z}$  e contém, adicionalmente, toda a dependência nas variáveis transversais  $(x, y)$ . Na prática

esse método remove as variações rápidas em relação o eixo  $z$  do problema a ser resolvido, restando apenas a análise das variações lentas, ou da envoltória  $\mathbf{A}(x, y, z)$ . Decompomos convenientemente o operador diferencial  $\nabla$  e também o laplaciano em componentes transversais e longitudinais, como anteriormente:

$$\nabla = \hat{\mathbf{a}}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{a}}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{a}}_z \frac{\partial}{\partial z} = \nabla_{\perp} + \hat{\mathbf{a}}_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad (11.7)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla_{\perp}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (11.8)$$

e desse modo podemos calcular diretamente a derivada de segunda ordem do campo  $\mathbf{E}$  em relação a  $z$ , tendo como resultado:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} [\mathbf{A}(x, y, z) e^{i(\omega t \mp \beta z)}] = \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbf{A}(x, y, z) - 2i\beta \frac{\partial \mathbf{A}(x, y, z)}{\partial z} - \beta^2 \mathbf{A}(x, y, z) \right] e^{i(\omega t - \beta z)} \quad (11.9)$$

Lembrando que a função vetorial  $\mathbf{A}(x, y, z)$  deve variar lentamente em relação a  $z$ , suas derivadas devem ser ainda mais lentas. Uma vez que a derivada de primeira ordem está multiplicada por uma frequência espacial  $\beta$  elevada, esta não pode ser desprezada, enquanto que a derivada de segunda ordem é desprezível quando comparada ao termo de primeira ordem e ao termo multiplicado por  $\beta^2$ . A aproximação paraxial de primeira ordem corresponde simplesmente à desprezar o termo  $\partial^2 \mathbf{A}(x, y, z) / \partial z^2$ , e podemos converter a equação de Helmholtz em um meio homogêneo (ou com fraca não-homogeneidade), para o campo elétrico:

$$(\nabla^2 + k^2) \mathbf{E} = 0,$$

na seguinte equação vetorial:

$$i \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{A} = \frac{1}{2\beta} \nabla_{\perp}^2 \mathbf{A} - \frac{(k^2 - \beta^2)}{2\beta} \mathbf{A}. \quad (11.10)$$

Para meios homogêneos a permissividade  $\varepsilon_c$  e conseqüentemente  $k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_c$  não dependem da posição permitindo escolher  $\beta = k$ . Para meios isotrópicos e uma vez eliminada a componente de campo longitudinal  $A_z$  (válido na aproximação paraxial) não haverá acoplamento entre as componentes  $A_x$  e  $A_y$  e podemos escrever  $\mathbf{A}(x, y, z) = \psi(x, y, z) \hat{\mathbf{e}}$ , onde  $\hat{\mathbf{e}}$  é um vetor de polarização que permanecerá invariante ao longo de toda a propagação e  $\psi$  é uma função complexa que descreve a dinâmica da amplitude e da fase do campo eletromagnético em função da distância propagada  $z$  e das coordenadas transversais  $(x, y)$ . A equação resultante, mostrada a seguir e muito útil no domínio óptico e em micro-ondas, é denominada equação paraxial escalar:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{1}{2\beta} \nabla_{\perp}^2 \psi + \frac{(k^2 - \beta^2)}{2\beta} \psi. \quad (11.11)$$

Cabe ressaltar aqui que o termo  $\frac{1}{2\beta} \nabla_{\perp}^2$  descreve inteiramente os efeitos de difração de um feixe de ondas, enquanto que o termo  $\frac{(k^2 - \beta^2)}{2\beta}$  descreve espalhamento e refração. A aproximação na forma acima somente é válida quando este último termo não é capaz de produzir efeitos de reflexão da onda tal que surja uma componente contra-propagante muito intensa.

### 11.1.1 Analogias com a Equação de Schrödinger Não-Relativística da Mecânica Quântica

A óptica e a mecânica quântica apresentam analogias bem conhecidas. Historicamente a inspiração de Erwin Schrödinger para formular a versão ondulatória da mecânica quântica tem origem numa formulação da óptica devida a Hamilton e Jacobi, que tentavam identificar a trajetória de uma partícula com o gradiente das superfícies de fase constante  $S(x, t)$  de uma função de onda na forma  $\psi(x, t) = \phi(x) e^{-i[\omega t - S(x, t)]}$ . Note que à diferença de nossa convenção para o regime harmônico  $e^{i\omega t}$ , utilizou-se no caso da mecânica quântica  $e^{-i\omega t}$ .

Uma vez que a parte real ou o módulo são as únicas grandezas relevantes em nosso caso, isso não faz nenhuma diferença, a não ser trocar  $i$  por  $-i$  nas equações. Se tivéssemos adotado a convenção  $e^{-i\omega t}$  a equação paraxial teria a forma

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{1}{2\beta} \nabla_{\perp}^2 \psi - \frac{(k^2 - \beta^2)}{2\beta} \psi .$$

A equação de Schrödinger não-relativística para a função de ondas  $\psi$  da mecânica quântica é mostrada abaixo

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + U\psi , \quad (11.12)$$

$\hbar = h/(2\pi)$  é a constante de Planck,  $m$  é a massa da partícula e  $U$  o termo de energia potencial, que em geral depende da posição e/ou do tempo. Observe que  $\nabla^2$  aparecendo na equação acima é o laplaciano completo. Todavia muitos sistemas quânticos de interesse atual são bidimensionais e poderiam ser "simulados" experimentalmente através de analogias ópticas. Note que a equação (11.11) que descreve a propagação de ondas eletromagnéticas no regime paraxial é simplesmente a equação Schrödinger não-relativística, desde que façamos a troca  $i \rightarrow -i$  e o tempo  $t$  da mecânica quântica seja substituído pela coordenada longitudinal  $z$ , que corresponde ao eixo longitudinal. Uma vez que na equação paraxial aparece apenas o operador laplaciano transversal  $\nabla_{\perp}^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$  e não o laplaciano completo  $\nabla^2$  da equação de Schrödinger, a analogia só é perfeita para os problemas da mecânica quântica em (1+2)-D, ou seja, em uma dimensão temporal e duas espaciais.

Já energia potencial  $U(x, y, z, t)$  da Mecânica Quântica é representado pelo fator  $[k^2(x, y, z) - \beta^2]/(2\beta)$  na equação paraxial.

### 11.1.2 Formulação Lagrangiana da Óptica no Regime Paraxial

Adotando a convenção  $e^{-i\omega t}$  para o regime harmônico, podemos demonstrar que o campo óptico  $\psi(x, y, z)$  é descrito pela função de densidade lagrangiana na forma abaixo:

$$\mathcal{L} = i\psi^{\dagger} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{1}{2\beta} \nabla_{\perp} \psi^{\dagger} \cdot \nabla_{\perp} \psi + \frac{1}{2\beta} (k^2 - \beta^2) \psi^{\dagger} \psi . \quad (11.13)$$

Uma vez que o regime paraxial em meios sem perdas é análogo à mecânica quântica não-relativística, a propagação de ondas pode ser descrita por um conjunto de funções de base em um espaço de Hilbert. A densidade hamiltoniana pode ser prontamente encontrada por transformações de Legendre, desde que o campo  $\psi$  tenha um momento canonicamente conjugado  $\pi = \partial \mathcal{L} / \partial (\partial \psi / \partial z) = i\psi^{\dagger}$ . O resultado da densidade hamiltoniana  $\mathcal{H} = \pi \dot{\psi} - \mathcal{L}$  é:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\beta} \nabla_{\perp} \psi^{\dagger} \cdot \nabla_{\perp} \psi - \frac{1}{2\beta} (k^2 - \beta^2) \psi^{\dagger} \psi , \quad (11.14)$$

sendo aqui  $\dot{\psi} = \partial \psi / \partial z$  no contexto do regime paraxial. De forma análoga ao operador momentum da mecânica quântica, aqui temos  $\mathbf{p}_{\perp} = -i\nabla_{\perp}$ .

A dualidade onda-partícula na mecânica quântica é correspondente à dualidade entre propagação de ondas - óptica geométrica. Em outras palavras, podemos obter uma equação de trajetória de raios simplesmente observando que (11.14) pode ser obtida de uma expressão na forma  $\mathcal{H} = \psi^{\dagger} H \psi$ , onde a hamiltoniana de uma partícula  $H$  é dada por:

$$H = \frac{1}{2\beta} \mathbf{p}_{\perp}^2 + U(x, y, z) , \quad (11.15)$$

sendo  $\mathbf{p} = (p_x, p_y) = \beta(\partial x / \partial z, \partial y / \partial z)$  e  $U(x, y, z) = -\frac{1}{2\beta} (k^2 - \beta^2)$ . Fazendo  $k(x, y, z) = k_0 n(x, y, z)$ ,  $n(x, y, z) = n_0 + \delta n(x, y, z)$  é o índice de refração do meio, onde  $n_0$  é uma constante e  $\delta n(x, y, z)$  uma pequena perturbação

ao índice de refração e escolhendo  $\beta = k_0 n_0$  podemos utilizar as equações de Hamilton abaixo:

$$\frac{\partial x_i}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (11.16)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial z} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad (11.17)$$

onde  $i = 1, 2$  e  $\mathbf{x}_\perp = (x_1, x_2) = (x, y)$ , para obter a trajetória de raios:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x}, \quad (11.18)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial y}, \quad (11.19)$$

que nos lembram a segunda lei de Newton. É possível, utilizando a Hamiltoniana (11.15), que descreve essencialmente a óptica geométrica, escrever uma integral de Feynman, somando sobre todas as trajetórias de raios possíveis entre dois pontos quaisquer, o que leva a determinar o propagador da equação paraxial. Nesse sentido, a “quantização” da óptica geométrica leva à óptica física descrita pela equação paraxial. Essa demonstração está muito além do nosso escopo.

## 11.2 A equação paraxial em (1+1)-D e exemplos relevantes em óptica

Por simplicidade vamos considerar a equação paraxial para (1+1) dimensões, ou seja, ondas propagando-se em  $z$  (ou o tempo  $t$ ) com padrão de intensidade transversal dependente somente da coordenada  $x$ . No caso da equação paraxial (11.11) podemos substituir  $\nabla_\perp^2 \rightarrow \partial^2/\partial x^2$ , com o resultado a seguir:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{1}{2\beta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{(k^2 - \beta^2)}{2\beta} \psi. \quad (11.20)$$

No caso geral em que a permissividade dielétrica depende de modo muito complicado de  $x$  e  $z$ , o sistema acima não tem soluções analíticas exatas e deve ser integrado numericamente. A solução numérica mais simples consiste em discretizar as coordenadas  $x$  e  $z$ , bem como as derivadas, na forma:

$$\left. \frac{\partial \psi(x, z)}{\partial z} \right|_{x_i, z_j} \approx \frac{\psi(x_i, z_j) - \psi(x_i, z_{j-1})}{\Delta z}, \quad (11.21)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \psi(x, z)}{\partial x^2} \right|_{x_i, z_j} \approx \frac{\psi(x_{i+1}, z_j) + \psi(x_{i-1}, z_j) - 2\psi(x_i, z_j)}{\Delta x}, \quad (11.22)$$

onde  $\Delta x = x_i - x_{i-1}$  e  $\Delta z = z_j - z_{j-1}$ ,  $i$  e  $j$  são números inteiros associados à discretização do espaço  $(x, z)$  contínuo. É importante observar que há uma relação entre  $\Delta_z$  e  $\Delta_x$ , que deve ser ajustada na prática para garantir convergência. Métodos como o Runge-Kutta de ordem maior são capazes de aproximar melhor as derivadas, produzindo maior convergência do que o método simplista exposto acima. A descrição de tais métodos pode ser encontrada em literatura especializada em cálculo numérico.

Para fins de validação do método numérico vamos considerar a propagação do feixe gaussiano em meios homogêneos, de modo que possamos fazer  $\beta = k$  conforme mencionada anteriormente, reduzindo o problema à seguinte equação diferencial:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{1}{2\beta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \quad (11.23)$$

Aplicando a transformada de Fourier, definida como segue:

$$\psi(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}(k_x, z) e^{-ik_x x} dk_x, \quad (11.24)$$

$$\tilde{\psi}(k_x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}(k_x, z) e^{ik_x x} dx, \quad (11.25)$$

à equação (11.23), obtemos de forma muito simples a solução geral, na forma abaixo [6]:

$$\psi(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}(k_x, 0) e^{ik_x^2 z / (2k)} e^{-ik_x x} dk_x, \quad (11.26)$$

$$\tilde{\psi}(k_x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}(k_x, 0) e^{ik_x x} dx, \quad (11.27)$$

onde  $\psi(x, 0)$  é o padrão transversal do campo em  $z = 0$ , tomado como campo inicial, e  $\tilde{\psi}(k_x, 0)$  é a sua transformada de Fourier. O padrão de intensidade transversal inicial para um feixe gaussiano tem a seguinte forma:

$$\psi(x, 0) = \psi_0 e^{-x^2 / (2x_0^2)}. \quad (11.28)$$

Fica como exercício resolver o sistema de equações (11.26) e (11.27) para a condição inicial acima e demonstrar que:

$$\psi(x, z) = \frac{\psi_0}{\sqrt{1 - i \frac{z}{kx_0^2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2 \left(1 - i \frac{z}{kx_0^2}\right)}\right). \quad (11.29)$$

Na Figura 11.3 ilustramos a propagação numérica do feixe gaussiano e a comparação entre o resultado numérico e o analítico exato, utilizando o comprimento de onda  $\lambda = 632.8\text{nm}$  (corresponde ao valor típico de um apontador laser, disponível facilmente no comércio), com  $x_0 = 10\mu\text{m}$  e amplitude de pico  $\psi_0 = 1$  u.a. (unidades arbitrárias). Para aqueles pesquisadores interessados em implementar soluções numéricas, é sempre importante ter em mãos uma solução analítica conhecida do problema a ser resolvido para fins de validação do método. É possível observar no presente exemplo a excelente concordância entre a expressão analítica e o resultado numérico, na Figura 11.3, para a distância final  $z = 3kx_0^2$ , sabendo que quanto maior a distância propagada pelo algoritmo numérico maior é o erro acumulado.

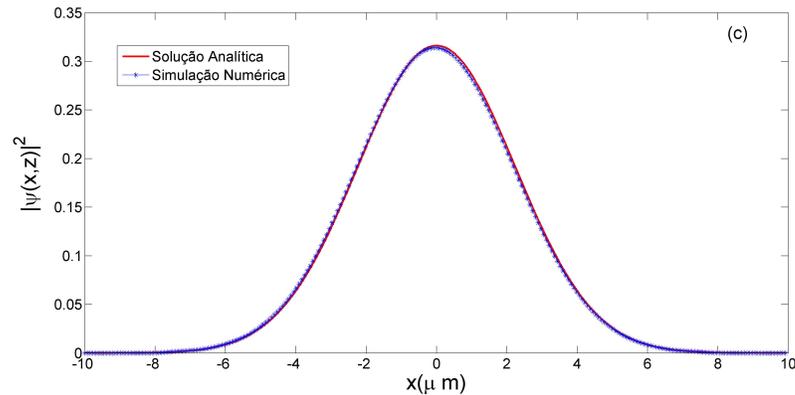


Figure 11.3: Propagação de uma onda gaussiana através da aproximação paraxial: comparação entre a intensidade  $|\psi(x, z)|^2$  a expressão analítica (11.29) e uma solução numérica obtida para a distância  $z = 10kx_0^2/\lambda$ .

### 11.2.1 Difração por fenda simples

Esse problema certamente é um dos mais conhecidos no estudo da difração. Uma fenda simples é iluminada por uma onda plana uniforme, de tal forma que a condição inicial seja  $\psi(x, 0) = \psi_0$  para  $|x| \leq d/2$  e  $\psi(x, 0) = 0$  para  $|x| > d/2$ . Este exemplo já foi discutido em algumas das Referências apresentadas ao final do Capítulo, utilizando em menor ou menor detalhe. Fica como exercício, utilizando o método de fase estacionária para

resolver o sistema de equações dado por (11.26) e (11.27), demonstrar que a solução analítica para grandes distâncias é dada por:

$$\psi(x, z) = \psi_0 \sqrt{\frac{kd^2}{i2\pi z}} \frac{\sin\left(\frac{kdx}{2z}\right)}{\left(\frac{kdx}{2z}\right)} e^{ikx^2/(2z)}. \quad (11.30)$$

Considerando  $\psi_0 = 1$  e comprimento de onda  $\lambda = 632.8$  nm (corresponde ao valor típico de um apontador laser, disponível facilmente no comércio), com extensão da fenda  $d = 10\mu\text{m}$ , podemos simular numericamente a equação paraxial e comparar o resultado numérico com a expressão (11.30). Os gráficos gerados através do método numérico são mostrados nas Figuras 11.4.(a) a 11.4.(c), para uma distância máxima propagada  $z_f = 0.2kd^2$ . A janela computacional para o eixo transversal  $x$  foi de  $-5d$  a  $5d$  e um termo dissipativo na forma  $-\alpha(x)\psi$  foi acrescentado na equação para absorver as ondas que chegam aos limites da janela computacional. O ajuste de  $\alpha(x)$  tem que ser feito na prática. Nota-se a boa concordância entre o resultado gerado numericamente e a previsão teórica dada pela equação (11.30), como se observa na Figura 11.4.(c) para a distância final. Observando a Figura 3.(b) que mostra  $|\psi(0, z)|$  pode-se ver a partir de  $80\mu\text{m}$  um pequeno ruído numérico que deve-se à não absorção total das ondas que chegam às fronteiras da janela computacional. Na mesma Figura 11.4.(b), observa-se a oscilação da intensidade da onda propagada em função de  $z$  em torno do valor inicial  $\psi_0^2 = 1$ , o que não ocorre na propagação da onda gaussiana do exemplo anterior, mostrada na Figura 11.3.(b) correspondente. Isso se deve ao fenômeno denominado de difração de gume de faca, que acontece devido às variações muito abruptas na intensidade do campo inicial, nesse caso provocadas pela fenda.

## 11.2.2 Difração em Coordenadas Cilíndricas

Em muitas outras situações, por questão de simetria do problema é interessante expressar as equações (??) e (??) em outros sistemas de coordenadas. Um exemplo típico ocorre quando  $\Phi(x, y, 0)$  tem simetria cilíndrica circular, caso de uma onda plana incidente sobre uma abertura circular. Reescrevendo as variáveis de integração em coordenadas cilíndricas, temos:

$$\Phi(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{k_\rho=0}^{\infty} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \tilde{\Phi}(k_\rho, \alpha, 0) \exp\left[\frac{ik_\rho^2 z}{2k}\right] e^{-ik_\rho \rho \cos(\varphi-\alpha)} k_\rho dk_\rho d\alpha, \quad (11.31)$$

$$\tilde{\Phi}(k_\rho, \alpha, 0) = \int_{\rho=0}^{\infty} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \Phi(\rho, \varphi, 0) e^{ik_\rho \rho \cos(\varphi-\alpha)} \rho d\rho d\varphi. \quad (11.32)$$

Um laser comum pode ser tratado de forma aproximada por uma distribuição da densidade de potência gaussiana com relação à variável transversal  $\rho$ , denominado feixe gaussiano, correspondente à uma distribuição inicial na forma  $\Phi(\rho, \varphi, 0) = \Phi_0 \exp\left[-\frac{\rho^2}{2a^2}\right]$ . Podemos então resolver o problema utilizando as equações (11.31) e (11.32), para obter:

$$\Phi(\rho, \varphi, z) = \frac{\Phi_0}{1 - i\frac{z}{a^2 k}} \exp\left[-\frac{\rho^2}{2a^2 \left(1 - i\frac{z}{a^2 k}\right)}\right], \quad (11.33)$$

com uma densidade de potência na forma:

$$\mathbf{S}_{\text{med}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{|\Phi_0|^2}{\left(1 + \frac{z^2}{a^4 k^2}\right)} \exp\left[-\frac{\rho^2}{a^2 \left(1 + \frac{z^2}{a^4 k^2}\right)}\right] \hat{\mathbf{a}}_z, \quad (11.34)$$

que fornece uma definição para a largura de feixe dependente da posição, pois podemos colocar a função gaussiana na expressão acima em uma forma compacta:

$$\exp\left[-\frac{\rho^2}{a^2 \left(1 + \frac{z^2}{a^4 k^2}\right)}\right] = \exp\left[-\frac{\rho^2}{b(z)^2}\right],$$

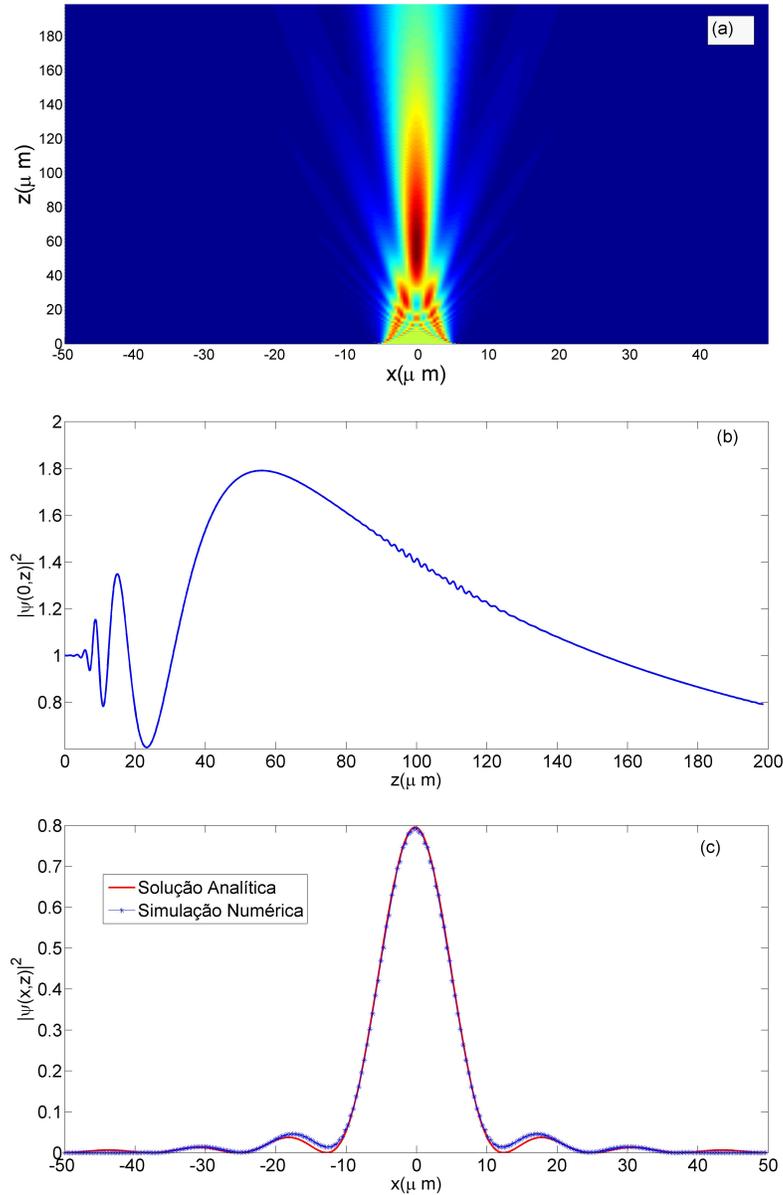


Figure 11.4: Difração da onda plana pela fenda simples na aproximação paraxial: (a) perfil de intensidade transversal  $|\psi(x, z)|^2$ , (b) intensidade  $|\psi(0, z)|^2$  no eixo longitudinal em função da distância propagada  $z$  e (c) comparação entre a expressão analítica (11.30) e a solução numérica obtida para a distância  $z = 0.2kd^2$ .

sendo a largura do feixe dada por:

$$b(z) = a\sqrt{1 + \frac{z^2}{a^4k^2}}.$$

Define-se ainda o comprimento de difração  $L_{dif}$  como a distância percorrida pela onda ao longo do eixo  $z$  para a qual a largura transversal ao longo de  $x$  dobra, ou seja,  $b(z = L_{dif}) = 2a$ , resultando para o caso da gaussiana no valor abaixo:

$$L_{dif} = 2\pi\sqrt{3}\frac{a^2}{\lambda}. \quad (11.35)$$

O feixe gaussiano, ilustrado na Figura 6, apresenta a particularidade de manter a forma à medida em que propaga e a difração se manifesta através do alargamento do feixe gaussiano mas não no aparecimento de termos de

interferência e máximos e mínimos de densidade de potência à medida em que a onda se propaga, enquanto outras distribuições iniciais são transformadas à medida em que propagam, produzindo além de alargamento, também o fenômeno de interferência bem nítido, com o aparecimento de máximos e mínimos como é o caso do exemplo anterior.

### 11.3 Referências deste Capítulo

- [12.1] M. Born e E. Wolf, Principles of Optics (Pergamon Press, New York, 1980), 6th. Ed.
- [12.2] J.W. Goodman, Introduction to Fourier Optics (McGraw-Hill, New York, 1996), 2nd. Ed.
- [12.3] J.D. Jackson, Classical Electrodynamics (John Wiley & Sons, New York, 1998), 3rd Ed.
- [12.4] O.S. Heavens, R.W. Ditchburn, Insight into Optics (John Wiley, Chichester-UK, 1991).
- [12.5] J.M. Stone, Radiation and Optics (McGraw-Hill, New York, 1963).
- [12.6] J. Durnin, J. J. Miceli Jr. and J. H. Eberly, Phys. Rev. Lett. **58**, 1499-1501 (1987); J. Durnin, J. Opt. Soc. Am. A **4**, 651-654 (1987).
- [12.7] C. A. Dartora, M. Zamboni-Rached, K. Z. Nobrega, E. Recami and H. E. Hernández-Figueroa, Opt. Comm. **222**, 75-80 (2003).
- [12.8] Pamela L. Greene and Dennis G. Hall, J. Opt. Soc. Am. A **15**, 3020 (1998); P. L. Overleft and C. S. Kenney, J. Opt. Soc. Am. A **8**, 732 (1991).
- [12.9] M. Zamboni-Rached, Optics Express **12**, 4001-4006 (2004).
- [12.10] C.A. Dartora, K.Z. Nobrega, V.F. Montagner, Armando Heilmann e Horacio Tertuliano S. Filho, “Aspectos gerais da teoria da difração sob o ponto de vista de um princípio de incerteza”, Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 31, n. 2, 2303 (2009).
- [12.11] C.A. Dartora, K.Z. Nobrega, Marina H. Krisam Matielli, Fillipi Klos Rodrigues de Campos e H. Tertuliano dos Santos Filho, “Conceitos básicos sobre a difração e a dispersão de ondas eletromagnéticas”, Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 33, n. 1, 1307 (2011).
- [12.12] Moises Fernandes de Souza, Reinaldo Silveira, K.Z. Nobrega, C.A. Dartora, “Um breve tratado sobre a aproximação paraxial”, Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 36, n. 3, 3308 (2014).

### 11.4 Problemas Propostos

- 1) Os mecanismos essenciais da difração estão contidos na equação de Helmholtz

$$(\nabla^2 + k^2)\Psi = 0, \quad (11.36)$$

onde  $\nabla^2$  é o operador laplaciano,  $k = n\omega/c$  é o número de onda no meio,  $\omega$  é a frequência temporal,  $n$  é o índice de refração do meio e  $\Psi$  é um escalar que representa uma componente de campo elétrico ou magnético. Observa-se ainda que  $k$  relaciona-se ao comprimento de onda  $\lambda$  no meio através da relação  $k = 2\pi/\lambda$ . Uma equação similar à (11.36) aplica-se também para ondas mecânicas, como o som, por exemplo, caracterizando a universalidade do fenômeno. Ao contrário da dispersão, que ocorre em meios cujas características dependam da frequência,  $n(\omega)$ , a difração deve ocorrer mesmo para vácuo.

Assumindo a propagação paraxial, propomos uma solução da forma abaixo:

$$\Psi(x, y, z) = \Phi(x, y, z)e^{-ikz} , \quad (11.37)$$

que permite remover a variação rápida na direção  $z$ , se cada onda plana uniforme que compõe a função  $\Psi$  tiver vetor de onda  $\mathbf{k}$  com a componente  $k_z \approx k \gg (k_x, k_y)$  e nesse a direção preferencial de propagação está no eixo  $z$ . É fácil demonstrar que:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial \Phi}{\partial z} - k^2 \Phi \right] e^{-ikz} ,$$

e uma vez que a variação rápida esteja contida no termo  $e^{-ikz}$  temos:

$$\left| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right| \ll 2k \left| \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right| ,$$

permitindo negligenciar a derivada de segunda ordem de  $\Phi$  em relação à variável  $z$ . Desse modo (11.36) toma a forma conhecida como **equação de propagação paraxial**:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{i}{2k} \nabla_{\perp}^2 \Phi , \quad (11.38)$$

onde  $\nabla_{\perp}^2 = \partial_{xx} + \partial_{yy}$  corresponde à parte transversal do operador laplaciano, dependendo somente das segundas derivadas em relação às variáveis  $(x, y)$ . Definindo as transf. de Fourier conforme segue:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(k_x, k_y, z) e^{-ik_x x} e^{-ik_y y} dk_x dk_y , \quad (11.39)$$

$$\tilde{\Phi}(k_x, k_y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, y, z) e^{ik_x x} e^{ik_y y} dx dy , \quad (11.40)$$

e aplicar essas relações à equação (11.38). Observando as propriedades matemáticas das transformadas, é fácil ver que a seguinte substituição é possível:

$$\nabla_{\perp}^2 \rightarrow -(k_x^2 + k_y^2)$$

permitindo obter a equação abaixo:

$$\frac{d}{dz} \tilde{\Phi}(k_x, k_y, z) = \frac{i}{2k} (k_x^2 + k_y^2) \tilde{\Phi}(k_x, k_y, z) . \quad (11.41)$$

Dada a condição inicial  $\tilde{\Phi}(k_x, k_y, 0)$  encontrada a partir da distribuição espacial  $\Phi(x, y, 0)$  no plano  $z = 0$  podemos escrever a solução da equação acima:

$$\tilde{\Phi}(k_x, k_y, z) = \tilde{\Phi}(k_x, k_y, 0) \exp \left[ \frac{i}{2k} (k_x^2 + k_y^2) z \right] ,$$

e finalmente obtém-se o conjunto de equações que descreve a teoria conhecida com óptica de Fourier [2]:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(k_x, k_y, 0) \exp \left[ \frac{iz}{2k} (k_x^2 + k_y^2) \right] e^{-ik_x x} e^{-ik_y y} dk_x dk_y , \quad (11.42)$$

$$\tilde{\Phi}(k_x, k_y, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, y, 0) e^{ik_x x} e^{ik_y y} dx dy . \quad (11.43)$$

A solução  $\Psi(x, y, z) = \Phi(x, y, z)e^{-ikz}$  é uma superposição adequada de ondas planas uniformes,  $e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)}$  contendo diferentes vetores de onda  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$  de mesma frequência  $\omega$  e mesmo valor para o produto  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_c$  mas  $k_z \approx k \gg k_x, k_y$  na aproximação paraxial. Uma vez que  $\Psi$  representa uma das componentes do campo elétrico:

$$\mathbf{E} = \Phi(x, y, z) e^{i(\omega t - kz)} \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}} , \quad (11.44)$$

podemos determinar a densidade de potência dada pelo vetor de Poynting:

$$\mathbf{S}_{\text{med}} \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} |\mathbf{E}|^2 \hat{\mathbf{a}}_z = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} |\Phi(x, y, z)|^2 \hat{\mathbf{a}}_z . \quad (11.45)$$

Pede-se então:

a) Substituindo (11.43) em (11.42) demonstre que:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{ik}{2\pi z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x', y', 0) \exp \left[ \frac{ik}{2z} [(x-x')^2 + (y-y')^2] \right] dx' dy' \quad (11.46)$$

Tome o cuidado de escrever (11.43) trocando a variável  $x$  por  $x'$  e  $y$  por  $y'$ , ou seja:

$$\tilde{\Phi}(k_x, k_y, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x', y', 0) e^{ik_x x'} e^{ik_y y'} dx' dy'$$

\*\*Integral gaussiana, útil no cálculo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx+c} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-b^2/(4a)+c}$$

b) É possível em problemas de simetria cilíndrica circular, transformar as variáveis  $x, y, x', y'$  em (11.46), de tal forma que  $x = \rho \cos \varphi$  e  $y = \rho \sin \varphi$ ... O resultado final é:

$$\Phi(\rho, \varphi, z) = \frac{ik}{2\pi z} \int_{\rho'=0}^{\infty} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \Phi(\rho', \alpha, 0) \exp \left[ \frac{ik\rho\rho' \cos(\varphi - \alpha)}{z} \right] \rho' d\rho' d\alpha . \quad (11.47)$$

Para uma abertura circular de raio  $a$  colocada em  $z = 0$  e iluminada por um feixe laser de comprimento de onda  $\lambda$ , com onda incidente podendo ser considerada plana uniforme na abertura, ou seja,

$$\begin{aligned} \Phi(\rho', \alpha, 0) &= E_0 & \rho' &\leq a \\ \Phi(\rho', \alpha, 0) &= 0 & \rho' &> a \end{aligned}$$

(11.48)

determine, utilizando (11.47), a expressão para  $\Phi(\rho, \varphi, z)$  em qualquer  $z \gg \lambda$ .

Integrais úteis:

$$\int_0^{2\pi} e^{\pm ix \cos y} dy = 2\pi J_0(x)$$

onde  $J_0$  é a função de Bessel de primeiro tipo de ordem 0.

$$\int x J_0(bx) dx = \frac{x J_1(bx)}{b}$$

- c) Determine, para uma distância da abertura  $z = L \gg \lambda$ , tal que  $\tan \theta = \rho/z \approx \sin \theta$ , o valor de  $\sin \theta$  e portanto a relação  $\rho/z$  para o qual ocorre o primeiro mínimo da função  $\Phi(\rho, \varphi, z)$  obtida.
- d) Construa uma abertura circular (fenda circular) experimentalmente e faça a medida das distâncias  $\rho$  do primeiro mínimo (região escura) e dos próximos. O padrão resultante é conhecido como padrão de Airy, ou ainda discos de Airy (Airy pattern). Use fendas de dimensões da ordem de  $100\mu\text{m}$  e distâncias para as quais podem ser observados os efeitos difrativos serão da ordem de metros, a depender da dimensão da fenda. Use um laser vermelho, cujo comprimento de onda típico fica em torno de  $\lambda = 632\text{nm}$ .

- 2) **O Método da Fase Estacionária e a Fenda Simples:** A realização de integrais definidas de limites  $\pm\infty$  com integrandos oscilatórios são muitas vezes complicadas de resolver mesmo numericamente. No entanto, uma vez que as regiões de oscilações muito rápidas do integrando pouco contribuem para o resultado da integral, pode-se aproximar o integrando na região (ou regiões) em que a fase varia pouco. Denomina-se método da fase estacionária. Considere a seguinte integral:

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iS(x)} dx , \quad (11.49)$$

onde  $f(x)$  é uma função bem comportada que varia lentamente com  $x$  na maior parte das regiões, relativamente à  $S(x)$ . As regiões em que  $S(x)$  varia muito rapidamente pouco contribuem à integral, pois para cada "área" positiva sob a curva  $f(x)e^{iS(x)}$  haverá uma correspondente contribuição negativa. Portanto, vamos expandir  $S(x)$  em séries de Taylor em torno de um ponto estacionário, ou seja,  $dS/dx|_{x=x_0} = 0$  tal que:

$$S(x) = S_0 + \frac{1}{2}S''(x - x_0)^2 , \quad (11.50)$$

sendo  $S_0 = S(x_0)$  e  $S'' = d^2S/dx^2|_{(x=x_0)}$ .

Pede-se para demonstrar que o resultado da integral será aproximadamente o seguinte:

$$F = f(x_0)e^{iS_0} \sqrt{\frac{2\pi i}{S''}} . \quad (11.51)$$

Este é o valor da integral no método da fase estacionária.

Agora utilize esse método para resolver o problema da difração por uma fenda simples em 1 + 1D, onde o campo inicial, em  $z = 0$  é dado por

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, 0) &= Phi_0 \quad , \quad -a \leq x \leq a , \\ \Phi(x, y, 0) &= 0 \quad , \quad |x| > a . \end{aligned} \quad (11.52)$$

Veja que não depende de  $y$ . Nos cálculos você perceberá que para grandes valores de  $z$  oscilações rápidas ocorrem devido ao termo de fase  $\exp\left[\frac{ik_x^2 z}{2k} - ik_x x\right]$  na integral de difração. Utilizando o método de fase estacionária, ou seja, na condição em que:

$$\frac{d}{dk_x} \left[ \frac{k_x^2 z}{2k} - k_x x \right] = 0 ,$$

mostre a uma solução aproximada do campo distante é dada na forma abaixo:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{\Phi_0 d}{2\pi\sqrt{z}} \frac{\sin\left[\frac{kdx}{2z}\right]}{\frac{kdx}{2z}} . \quad (11.53)$$

O fator de decaimento do campo com  $\sqrt{z}$  decorre do fato de a situação ser considerada bidimensional ( $x, z$ ), ou invariante em  $y$ , garantindo assim a conservação da potência total da onda. Em 3-DIM o fator correto seria de  $z$  e não de  $\sqrt{z}$ . Fazendo uso das definições  $k = 2\pi/\lambda$  e  $x/z = \tan\theta$  e ainda aproximando  $\tan\theta \approx \sin\theta$ , quando  $x \ll z$ , podemos reescrever esta última expressão na forma abaixo:

$$\Phi(z, \theta) = \frac{\Phi_0 d}{2\pi\sqrt{z}} \frac{\sin[\pi d \sin\theta/\lambda]}{\pi d \sin\theta/\lambda} . \quad (11.54)$$

O resultado acima é bem conhecido da teoria da difração: padrão de interferências característico do experimento da fenda simples. Faça o gráfico de intensidade  $|\Phi|^2$  do campo em função de  $\pi d \sin\theta/\lambda$  e encontre os valores de  $\theta$  onde ocorrem os máximos dessa função.

Proponha aplicações desse tipo de experimento. O que é o princípio de Babinet?

- 3) Obtenha a equação de propagação paraxial e a partir da óptica de Fourier determine o comprimento de difração e a solução para todo  $z$  para uma onda monocromática de frequência  $\omega$  cujo perfil em  $z = 0$  é gaussiano na forma

$$\Phi(x, y, 0) = A \exp\left(\frac{-x^2}{2a^2}\right) .$$

Determine a solução para todo  $z$  se agora a onda tem padrão inicial na forma gaussiana em coordenadas cilíndricas

$$\Phi(\rho, \varphi, 0) = A \exp\left(\frac{-\rho^2}{2a^2}\right) ,$$

onde  $\rho^2 = x^2 + y^2$ .



## Chapter 12

# Dispersão Temporal

A dispersão da luz é um fenômeno ondulatório associado à superposição de ondas com diferentes frequências, já discutido na Ref.[6], e produz deformação temporal de pulsos propagantes em sistemas de comunicação óptica e a decomposição da luz branca por um prisma, para citar as consequências físicas mais conhecidas. Podemos estudar a dispersão de ondas em sistemas guiados por uma equação paraxial. Partindo da equação de ondas no domínio da frequência mostrada na equação (8.222), desprezando o lado direito na chamada condição de guiamento fraco, muito usual em fibras ópticas, porque o índice de refração do núcleo é muito parecido com o da casca. Podemos escrever a solução para um pulso do campo elétrico na forma que segue:

$$\mathbf{E} = \mathbf{A}(x, y, z, \omega)e^{i(\beta_0 z)} , \quad (12.1)$$

onde o vetor  $\mathbf{A}$  descreve a envoltória do sinal,  $\omega$  é a frequência portadora do sinal e  $\beta_0$  uma constante de propagação longitudinal ao longo de  $z$  na frequência central  $\omega_0$  do espectro de um pulso. Uma vez que o perfil transversal é definido por condições de contorno impostas pelo guia de onda, podemos supor uma solução para a envoltória na forma  $\mathbf{A}(x, y, z, \omega) = F(x, y)\tilde{\psi}(z, \omega)\hat{\mathbf{e}}$ , sendo  $\hat{\mathbf{e}}$  um vetor unitário de polarização, cuja variação é desprezível em meios isotrópicos e aproximadamente homogêneos. A função  $F(x, y)$  descreve o perfil transversal do modo, que também não varia ao longo da propagação e satisfaz uma equação de ondas bidimensional, na forma:

$$(\nabla_{\perp}^2 + k_{\perp}^2)F(x, y) = 0 , \quad (12.2)$$

onde  $k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2 = k^2 - \beta^2$  é o número de ondas transversal e  $\beta(\omega)$  é a constante de propagação na frequência  $\omega$ , não necessariamente na frequência central  $\omega_0$  do espectro do pulso considerado. A solução dos valores de  $k_{\perp}^2$  e  $F(x, y)$  que satisfazem as condições de contorno impostas pelo guia é obtida através da chamada análise modal. Substituindo a solução proposta acima na equação (8.222) nos fornece o resultado abaixo:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial z^2} + 2i\beta_0 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial z} + (k^2 - \beta_0^2 - k_{\perp}^2)\tilde{\psi} = 0 . \quad (12.3)$$

Lembrando que  $k^2 - k_{\perp}^2 = \beta^2$ , podemos expandir a função  $\beta$  em séries de Taylor em torno da frequência de portadora do pulso,  $\omega_0$ :

$$\beta(\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left( \frac{d^m}{d\omega^m} \beta(\omega) \right) \Big|_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^m = \beta_0 + \beta_1(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\beta_2(\omega - \omega_0)^2 + \dots \quad (12.4)$$

onde são definidas as seguintes quantidades:

$$\beta_0 = \beta(\omega_0) , \quad (12.5)$$

$$\beta_1 = \left. \frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} , \quad (12.6)$$

$$\beta_2 = \left. \frac{\partial^2 \beta}{\partial \omega^2} \right|_{\omega_0} . \quad (12.7)$$

Desse modo, pode-se mostrar facilmente que:

$$(k^2 - \beta_0^2 - k_\perp^2) = \beta^2 - \beta_0^2 = 2\beta_0\beta_1(\omega - \omega_0) + [\beta_1^2 + \beta_0\beta_2](\omega - \omega_0)^2 + \mathcal{O}[(\omega - \omega_0)^3]. \quad (12.8)$$

Negligenciando termos que dependam da  $(\omega - \omega_0)^n$ , com  $n \geq 3$ , o que é geralmente possível caso  $\beta_2 \neq 0$ , a equação (12.3) toma a forma abaixo:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial z^2} + 2i\beta_0 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial z} + [2\beta_0\beta_1(\omega - \omega_0) + (\beta_1^2 + \beta_0\beta_2)(\omega - \omega_0)^2] \tilde{\psi} = 0. \quad (12.9)$$

Uma vez que  $\tilde{\psi}(z, \omega)$  é uma função no domínio  $\omega$  podemos aplicar a transformação de Fourier (2.127) à equação acima, para obter:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \Psi(z, t)}{\partial z^2} + 2i\beta_0 \frac{\partial \Psi(z, t)}{\partial z} + 2\beta_0\beta_1 \left( i \frac{\partial \Psi(z, t)}{\partial t} - \omega_0 \Psi(z, t) \right) \\ & + (\beta_1^2 + \beta_0\beta_2) \left( -\frac{\partial^2 \Psi(z, t)}{\partial t^2} - 2i\omega_0 \frac{\partial \Psi(z, t)}{\partial t} + \omega_0^2 \Psi(z, t) \right) = 0. \end{aligned} \quad (12.10)$$

Podemos identificar os termos  $\omega_0/\beta_0 = v_p$  e  $\beta_1 = 1/v_g$  com a velocidade de fase da portadora e a velocidade de grupo de um pacote de ondas, respectivamente. Para remover a componente de variação rápida no tempo definimos  $\Psi(z, t) = \psi(z, t)e^{-i\omega_0 t}$  para obter a versão simplificada da equação acima:

$$\frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2} + 2i\beta_0 \frac{\partial \psi(z, t)}{\partial z} + i2\beta_0\beta_1 \frac{\partial \psi(z, t)}{\partial t} - (\beta_1^2 + \beta_0\beta_2) \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (12.11)$$

Convencionalmente faz-se uma transformação galileana de coordenadas, na forma  $T = t - \beta_1 z$  e  $Z = z$ . É deixado como exercício mostrar que para soluções dependentes de  $z$  e  $T$  a equação toma a forma a seguir:

$$i \frac{\partial \psi(z, T)}{\partial z} = \frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 \psi(z, T)}{\partial T^2}. \quad (12.12)$$

É interessante notar que a equação acima tem a mesma forma da equação de Schrödinger da mecânica quântica, porém com os papéis do tempo e do espaço trocados. Quando os termos em  $\beta_n$ , com  $n \geq 3$ , começam a se tornar importantes aparecem na equação as derivadas de ordem mais alta no tempo, e a analogia com a equação de Schrödinger não-relativística não é tão boa. É possível ainda levar em conta efeitos difrativos inserindo um termo contendo  $\nabla_\perp^2$ , o que define um operador análogo ao laplaciano, com três coordenadas  $x, y, T$ .

A solução da equação (12.12), *mutatis mutandis*, segue a mesma metodologia empregada no estudo da difração na aproximação paraxial. Aplicando a transformada de Fourier, obtemos de forma muito simples a solução geral, na forma abaixo [6]:

$$\psi(z, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}(0, \omega) e^{i\beta_2 \omega^2 / 2} e^{i\omega T} d\omega, \quad (12.13)$$

$$\tilde{\psi}(0, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}(0, \omega) e^{-i\omega T} dT, \quad (12.14)$$

onde  $\psi(0, T)$  é o padrão temporal do campo em  $z = 0$ , tomado como campo inicial, e  $\tilde{\psi}(0, \omega)$  é a sua transformada de Fourier.

## 12.1 Efeitos de degradação de sinais na fibra óptica

A utilização de guias de ondas evita o principal efeito da propagação não guiada: a difração. Na propagação guiada a onda propagante se propaga através de um ou mais modos possíveis dentro do guia. Assumindo-se que este seja conhecido, deseja-se determinar quais efeitos ocorrem com um sinal à medida em que se propaga ao longo da fibra.

↪ São estes efeitos principais:

- Dispersão;
- Atenuação;
- Não-linearidades;

Temos então para a DISPERSÃO:

- 1) Dispersão Intermodal - ocorre na propagação Multimodo;
- 2) Dispersão Intramodal - tanto monomodo quanto multimodo, mas é mais relevante no caso monomodo, pois a dispersão intermodal usualmente domina no caso multimodal. Podemos separar em:

2.1) GVD - Group Velocity Dispersion - ocorre devido à geometria do guia de ondas, bem como devido ao material.

2.2) PMD - Polarization Mode Dispersion - devido à defeitos, birrefringência e anisotropia.

↪ Vamos reescrever a equação paraxial, acrescentando novamente o termo que foi negligenciado anteriormente, ou seja, a derivada segunda de  $\Phi$  em relação à variável  $z$ :

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{1}{2\beta_0}[\nabla_{\perp}^2\Phi + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} + (k^2 - \beta_0^2)\Phi],$$

↪ Nesse sentido, até aqui não há aproximação alguma sendo feita!! Trocamos  $\beta$  por  $\beta_0$ , por motivos que seguirão.

↪ Cabe lembrar que a constante  $k(\omega) = k_0n(\omega)$  é uma função da frequência, definido em outros termos como  $k^2(\omega) = \omega^2\mu_0\varepsilon_c(\omega)$ .

↪ Um sinal eletromagnético usualmente tem largura de banda  $\Delta\omega$  e é montado sobre uma onda portadora de frequência  $\omega_0$ . Geralmente, e especialmente no domínio óptico tem-se a condição  $\Delta\omega \ll \omega_0$ .

Lembrando que no modelo de Lorentz:

$$\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} = \varepsilon_r - i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\omega\nu}, \quad (12.15)$$

sendo  $\varepsilon_r$  a parcela real da constante dielétrica relativa,  $\sigma$  a condutividade do material,  $\omega$  a frequência de operação,  $\omega_p^2 = N_qq^2/(m\varepsilon_0)$  a frequência de plasma do material,  $\omega_r$  uma frequência característica de ressonância do material e  $\nu$  a frequência de colisões,  $N_q$  é a densidade de cargas  $q$  no material e  $m$  a massa das mesmas.

$$n(\omega) = \sqrt{\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0}} \quad (12.16)$$

↪ A parte imaginária está associada à absorção, enquanto a parte real corresponde à características de fase/dispersão na propagação.

↪ Meios condutores - elétrons quase livres, o que corresponde a  $\omega_r \rightarrow 0$  e geralmente satisfazem a condição  $\nu \gg \omega$  para frequências abaixo do ultra-violeta, o que nos dá:

$$\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} = \varepsilon_r - i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} \approx 1 - i\frac{\omega_p^2}{\omega\nu}, \quad (12.17)$$

↪ Materiais dielétricos de poucas perdas, categoria na qual podemos enquadrar as fibras ópticas - linha de ressonância estreita. O caso extremo desse tipo de material corresponde a levar a expressão (12.15) ao limite  $\nu \rightarrow 0$  e nesse caso obtém-se:

$$\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} = \varepsilon_r - i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} \approx 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_r^2 - \omega^2} - i\pi\frac{\omega_p^2}{2\omega}[\delta(\omega - \omega_r) + \delta(\omega + \omega_r)]. \quad (12.18)$$

↪ Em  $\omega = \omega_r$ , um meio dielétrico de poucas perdas tem comportamento de um condutor, com alta condutividade efetiva.

↪ O limite para longe da ressonância nos dá a chamada equação de Sellmeier.

$$n^2(\omega) = 1 + \sum_r \frac{\omega_p^2}{\omega_r^2 - \omega^2}$$

↪ Dado que a comunicação óptica geralmente satisfaz a condição  $\omega_0 \gg \Delta\omega$  ( $\omega_0 \sim 10^{15}$  rad/s,  $\Delta\omega \sim 10^{13}$  rad/s para comunicações em Tb/s), podemos expandir  $k$  em séries de Taylor em torno de  $\omega_0$ :

$$k(\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left. \frac{d^m k(\omega)}{d\omega^m} \right|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0)^m. \quad (12.19)$$

Definindo os coeficientes a seguir:

$$\Gamma_m = \left. \frac{d^m k(\omega)}{d\omega^m} \right|_{\omega=\omega_0}, \quad (12.20)$$

com  $\Gamma_0 = k_0 n(\omega_0)$ , podemos expressar  $k^2(\omega)$  na forma:

$$k^2(\omega) = \sum_r \sum_s \frac{1}{r!s!} \Gamma_r \Gamma_s (\omega - \omega_0)^{r+s},$$

Inserindo a expansão na equação paraxial, obtemos:

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{1}{2\beta_0} \left[ \nabla_{\perp}^2 \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \left( \sum_r \sum_s \frac{1}{r!s!} \Gamma_r \Gamma_s (\omega - \omega_0)^{r+s} - \beta_0^2 \right) \Phi \right],$$

↪ Expandir  $k(\omega)$  em torno de  $\omega_0$  corresponde à eliminação da variação temporal rápida na forma  $e^{i\omega_0 t}$ , assim como removemos a variação rápida em relação à  $z$  com o termo  $e^{-i\beta_0 z}$ .

↪ A prova desse argumento se dá passando do domínio  $\omega - \omega_0$  para o domínio  $t$ , fazendo uso das propriedades das transformadas de Fourier:  $(i)^n (\omega - \omega_0)^n \leftrightarrow e^{i\omega_0 t} \partial^n / \partial t^n$

Obtemos então a equação de propagação paraxial no domínio do tempo:

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{1}{2\beta_0} \left[ \nabla_{\perp}^2 \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \left( \sum_r \sum_s \frac{1}{r!s!} i^{r+s} \Gamma_r \Gamma_s \frac{\partial^{r+s}}{\partial t^{r+s}} \Phi - \beta_0^2 \Phi \right) \right], \quad (12.21)$$

onde  $\Psi(x, y, z, t)$  é dado por

$$\Psi(x, y, z, t) = \Phi(x, y, z, t) e^{i(\omega_0 t - \beta_0 z)}. \quad (12.22)$$

↪ Variações rápidas estão em  $e^{-i(\omega_0 t - \beta_0 z)}$  e o comportamento de envoltória é descrito por  $\Phi(x, y, z, t)$ .

Restringindo atenção às ondas guiadas propagantes: um modo deve satisfazer uma equação da forma  $\nabla_{\perp}^2 \Phi = -k_{\perp 0}^2 \Phi$  então podemos substituir este resultado na equação anterior, para obter

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{1}{2\beta_0} \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \left( \sum_r \sum_s \frac{1}{r!s!} (-i)^{r+s} \Gamma_r \Gamma_s \frac{\partial^{r+s}}{\partial t^{r+s}} \Phi - (\beta_0^2 + k_{\perp 0}^2) \Phi \right) \right]. \quad (12.23)$$

Negligenciando derivadas temporais de ordem maior do que  $\partial^2 / \partial t^2$  pode-se reescrever a equação acima:

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{1}{2\beta_0} \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \Gamma_0^2 \Phi - 2i\Gamma_0 \Gamma_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t} - (\Gamma_0 \Gamma_2 + \Gamma_1^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - (\beta_0^2 + k_{\perp}^2) \Phi \right]. \quad (12.24)$$

Fazendo  $\Gamma_0^2 = \beta_0^2 + k_{\perp}^2$  e utilizando a regra da cadeia de derivadas podemos mostrar que:

$$\Gamma_1(\omega_0) = \frac{dk}{d\omega}(\omega_0) = \frac{dk}{d\beta} \frac{d\beta}{d\omega} = \frac{\beta_0 \beta_1}{\Gamma_0},$$

onde os parâmetros  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são definidos na forma

$$\beta_0 = \beta(\omega_0) , \quad (12.25)$$

$$\beta_1 = \left. \frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} , \quad (12.26)$$

$$\beta_2 = \left. \frac{\partial^2 \beta}{\partial \omega^2} \right|_{\omega_0} , \quad (12.27)$$

permitindo escrever a constante  $\beta(\omega)$  em séries de Taylor:

$$\beta(\omega) = \beta(\omega_0) + \left. \frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \beta}{\partial \omega^2} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 + \dots , \quad (12.28)$$

Reescrevemos a equação na forma:

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{1}{2\beta_0} \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - 2i\beta_0\beta_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t} - (\beta_0\beta_2 + \beta_1^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right] . \quad (12.29)$$

Utilizando a relação:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \beta_1^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$$

e fazendo uma transformação galileana de coordenadas:

$$\begin{aligned} z' &= z , \\ T &= t - \beta_1 z . \end{aligned}$$

podemos reescrever (12.29) nas coordenadas  $(z, T)$ , na forma abaixo:

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial T^2} . \quad (12.30)$$

↪ Novamente, tem a forma de uma equação de Schroedinger.

Por analogia com a Mecânica Quântica de uma partícula livre tem-se

$$\Delta k_z = \frac{\beta_2}{2} \Delta \omega^2$$

A transformada de Fourier demanda que um pulso de duração  $\tau$  satisfaz uma relação de incerteza na forma

$$\tau \geq 1/(2\Delta\omega)$$

assim como

$$L_{\text{disp}} = \Delta z \geq 1/(2\Delta k_z)$$

É fácil mostrar dessas relações, portanto que

$$L_{\text{disp}} \approx 4\tau^2/\beta_2$$

o que está de acordo como resultados bem conhecidos obtidos de forma exata.

Solução Exata: sendo conhecido o formato do sinal em  $z = 0$  podemos obter facilmente

$$\Phi(x, y, z, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(x, y, z = 0, \omega) \exp \left[ i \frac{\beta_2 z \omega^2}{2} \right] e^{i\omega T} d\omega \quad (12.31)$$

$$\tilde{\Phi}(x, y, z = 0, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, y, z = 0, T = t) e^{-i\omega T} dT. \quad (12.32)$$

$\rightsquigarrow \Phi(x, y, z, T)$  é o envelope da função  $\Psi(x, y, z, t) = \Phi(x, y, z, t) e^{-i(\omega_0 t - \beta_0 z)}$ , que contém um termo de oscilação rápida  $e^{-i(\omega_0 t - \beta_0 z)}$ .

Para um espectro gaussiano na forma

$$\tilde{\Phi}(x, y, z = 0, \omega) = \Phi_{\perp}(x, y) \exp \left( -\frac{\omega^2 \tau_0^2}{2} \right).$$

pode-se obter de maneira relativamente fácil, nas coordenadas  $(z, t)$  a seguinte solução:

$$\Psi(x, y, z, t) = \Phi_{\perp}(x, y) \sqrt{\frac{2\pi}{\tau_0^2 + i\beta_2 z}} \exp \left[ -\frac{(t - \beta_1 z)^2 (1 - i\beta_2 z / \tau_0^2)}{2(\tau_0^2 + \beta_2^2 z^2 / \tau_0^2)} \right] e^{i(\omega_0 t - \beta_0 z)}. \quad (12.33)$$

$\rightsquigarrow$  A frequência  $\omega_0$  é denominada frequência portadora e o termo exponencial é o termo de fase relacionado a esta frequência,  $e^{i(\omega_0 t - \beta_0 z)}$ , que podemos escrever na forma  $e^{-i\beta_0(z - v_p t)}$ .

Dessa forma definimos a chamada velocidade de fase

$$v_p = \omega_0 / \beta_0$$

que é a velocidade com que a fase da onda portadora se propaga.

$\rightsquigarrow$  Já a velocidade

$$v_g = 1 / \beta_1$$

é aquela com a qual o envelope se propaga ao longo de  $z$ .

Existe uma relação formal que diz que

$$v_g \cdot v_p = c^2.$$

$\rightsquigarrow$  Finalmente, o termo  $\beta_2$  é responsável pela dispersão, ou seja, pelo alargamento temporal do pulso à medida em que propaga ao longo de  $z$ . Definindo uma largura temporal  $\tau(z)$  na forma

$$\tau(z) = \sqrt{\tau_0^2 + \frac{\beta_2^2 z^2}{\tau_0^2}}, \quad (12.34)$$

e calculando a densidade de potência transportada pela onda

$$\mathbf{S}_{\text{med}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} |\phi_{\perp}(x, y)|^2 \frac{2\pi}{\sqrt{\tau_0^2 \tau^2(z)}} \exp \left[ -\frac{(t - \beta_1 z)^2}{\tau^2(z)} \right], \quad (12.35)$$

podemos obter o comprimento de dispersão  $L_{\text{disp}}$ ,

$$L_{\text{disp}} = \sqrt{3} \frac{\tau^2}{\beta_2}, \quad (12.36)$$

como a distância para a qual o pulso gaussiano dobra sua largura temporal. Se  $\beta_2 = 0$  não há dispersão, pois  $L_{\text{disp}} \rightarrow \infty$ .

$\rightsquigarrow$  O parâmetro  $\beta_2$  produz alargamento do pulso gaussiano mas não muda sua forma - ele continua gaussiano.

↪ Podemos levar em conta mais termos na expansão em séries de Taylor para  $\beta(\omega)$ , mas nesse caso à medida que propaga até mesmo o pulso gaussiano muda sua forma.

↪ Incluindo  $\beta_3$  é a aproximação seguinte:

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial T^2} + i \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial T^3} . \quad (12.37)$$

↪ Existe uma região de operação da fibra para a qual  $\beta_2 = 0$ , denominada de região de dispersão zero. Nesse caso, para obter os efeitos dispersivos se faz absolutamente necessário levar em conta o efeito de  $\beta_3$  e termos de ordem maior.

↪ É também possível combinar os efeitos de  $\beta_2$  e  $\beta_3$  para obter, após uma certa distância propagada, dispersão nula, ou quase, se os efeitos combinados se cancelam.

### Análise quantitativa da dispersão

↪ Observe que em uma fibra de comprimento  $L$ , o tempo  $T$  necessário para um grupo de ondas percorrer essa distância é dado simplesmente por:

$$T = \frac{L}{v_g} = L\beta_1 .$$

↪ Para calcular as diferenças de tempo entre as componentes de frequência dentro desse pacote de ondas, podemos simplesmente derivar a expressão acima em relação a  $\omega$ :

$$\Delta T = L \frac{\partial \beta_1}{\partial \omega} d\omega = L\beta_2 d\omega . \quad (12.38)$$

Para que um sinal possa ser recuperado, a largura de bit  $\tau$  deve satisfazer a condição:

$$\tau > \Delta T ,$$

Assumindo a largura de banda na forma  $B = 1/\tau$ , obtemos:

$$BL < \frac{1}{\beta_2 \Delta \omega} .$$

Lembrando que:

$$c = \lambda f$$

e  $\omega = 2\pi f$  temos

$$d\omega = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} d\lambda ,$$

e portanto:

$$BL < \frac{1}{D\Delta\lambda} ,$$

sendo definido o parâmetro de dispersão:

$$D = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \beta_2 \quad (12.39)$$

↪ A largura  $\Delta\lambda$  não está associada a banda da informação e sim deve-se geralmente à largura de banda do laser. Tipicamente lasers semicondutores multimodo tem  $\Delta\lambda = 2\text{nm}$ .

↪ Em fibras de sílica padrão o valor do parâmetro de dispersão gira em torno de  $D = 1\text{ps}/(\text{km} \cdot \text{nm})$  em  $\lambda = 1.3\mu\text{m}$ . Isto nos dá  $BL \sim 1(\text{Tb/s})\cdot\text{km}$ .

É interessante notar algumas relações que seguem de definições anteriores:

$$n_{eff} = \frac{\beta}{k_0} = c \frac{\beta}{\omega},$$

dessa forma

$$\beta_1 = \frac{1}{c} \left[ n_{eff} + \omega \frac{\partial n_{eff}}{\partial \omega} \right],$$

mas uma vez que  $v_g = 1/\beta_1$ , podemos definir o índice de refração do grupo,  $n_g$ , na forma

$$n_g = \frac{c}{v_g} = c\beta_1 = n_{eff} + \omega \frac{\partial n_{eff}}{\partial \omega}, \quad (12.40)$$

↪ Lembrando que  $D = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \beta_2$  e  $\beta_2 = \partial\beta_1/\partial\omega$ , temos finalmente:

$$D = -\frac{2\pi}{\lambda^2} \left[ 2 \frac{\partial n_{eff}}{\partial \omega} + \omega \frac{\partial^2 n_{eff}}{\partial \omega^2} \right] \quad (12.41)$$

↪ Na verdade  $D = D_M + D_W$  onde  $D_M$  é uma parcela que só depende do material, enquanto que  $D_W$  é a variação do índice efetivo do guia com a frequência.

↪ Tipos de Fibra Quanto à dispersão:

A) Fibras de Silica Padrão: em geral a dispersão depende de  $\beta_2$ , exceto no ponto de dispersão nulo, onde  $\beta_2 = 0$  e tem-se que levar em conta o efeito de  $\beta_3$ . O parâmetro  $D$  geralmente é baixo próximo de  $\lambda = 1.3\mu\text{m}$ .

B) Fibras de Dispersão Deslocada: É construída de tal forma que  $\beta_2 = 0$  na frequência de operação desejada, usualmente através do material e geometria do guia de ondas. Os parâmetros que podem ser modificados são  $a$ ,  $n_1$  e  $\Delta$ . Essas modificações fazem um valor muito pequeno em  $D = 1.55\mu\text{m}$

C) Fibras com Perfil de Dispersão Plana: Para operar em um amplo espectro  $1.3\mu\text{m} \leq \lambda \leq 1.6\mu\text{m}$ , a fibra é construída de tal forma a tornar a dispersão plana nessa região de interesse, com o mais baixo valor de  $D$  possível.

## 12.2 Atenuação: Perdas na Fibra

↪ A atenuação em uma fibra óptica pode ser separada em vários termos específicos:

1) Absorção/Atenuação:

- Intrínseca: deve-se às características do próprio material com o qual a fibra óptica é construída, no caso a sílica. Do ponto de vista físico corresponde a uma contribuição imaginária do material para a constante dielétrica  $\epsilon_c$ . Longe das ressonâncias esse termo é usualmente menosprezado.
- Extrínseca: deve-se a ressonâncias e outros efeitos produzidos por impurezas na fibra. Um exemplo típico de impureza extrínseca na fibra é a água e moléculas  $OH$ , devido à umidade, que são capazes de produzir alta atenuação. Na verdade a melhoria da propagação nas fibras ópticas passou pela técnica de eliminação de impurezas, sobretudo a umidade.

2) Perdas por espalhamento:

A onda propagante encontra centros de impureza, nos quais ela é espalhada. Um exemplo de fenômeno de espalhamento bem conhecido é o espalhamento sofrido pela radiação solar, dando a tonalidade azulada à atmosfera.

Existem três tipos principais de espalhamento:

- Espalhamento Rayleigh: este fenômeno ocorre devido a pequenas inhomogeneidades no índice de refração da fibra, devido a flutuações da densidade da mesma. Ocorre até mesmo devido a efeitos de temperatura. A perda por espalhamento Rayleigh tem uma lei da forma:

$$\alpha_R = \frac{C}{\lambda^4} . \quad (12.42)$$

A frequência da onda espalhada é a mesma da onda incidente, nesse caso.

- Espalhamento Brillouin: espalhamento de ondas eletromagn. com o auxílio de ondas de som no material - interação fônon-fóton na fibra. Pode haver absorção ou emissão de fônons, a onda resultante tem frequência ligeiramente diferente da onda incidente.
- Espalhamento Raman: transições atômicas no material. A onda incidente e a onda espalhada tem frequências diferentes.

↪ Os fenômenos de Brillouin e Raman só podem ser compreendidos inteiramente através da Mecânica Quântica.

↪ Ambos geralmente são não-lineares.

↪ O efeito Raman pode ser utilizado em amplificadores ópticos.

↪ Não linearidades importantes são:

1) Three and Four-Wave Mixing: ocorre geralmente em sistemas WDM, onde duas ou mais ondas se combinam de forma não linear, para gerar uma terceira. Exemplo:

$$\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 = \omega_4 .$$

2) Propagação Solitônica: corresponde à propagação de pulsos ópticos que não se dispersam e nem difratam, na presença de meios não-lineares. Proposta de propagação a longas distâncias.

## 12.3 Referências deste Capítulo

- [13.1] M. Born e E. Wolf, Principles of Optics (Pergamon Press, New York, 1980), 6th. Ed.
- [13.2] J.W. Goodman, Introduction to Fourier Optics (McGraw-Hill, New York, 1996), 2nd. Ed.
- [13.3] C.A. Dartora, K.Z. Nobrega, Marina H. Krisam Matielli, Fillipi Klos Rodrigues de Campos e H. Tertuliano dos Santos Filho, “Conceitos básicos sobre a difração e a dispersão de ondas eletromagnéticas”, Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 33, n. 1, 1307 (2011).
- [13.4] Moises Fernandes de Souza, Reinaldo Silveira, K.Z. Nobrega, C.A. Dartora, “Um breve tratado sobre a aproximação paraxial”, Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 36, n. 3, 3308 (2014).
- [13.5] G.P. Agrawal, Fiber-optic communications systems, 2nd. Edition, Ed. John Wiley, 1997.
- [13.6] Donald L. Lee, Electromagnetic Principles of Integrated Optics, John Wiley, 1986.

## 12.4 Problemas Propostos

1) Considere a solução da equação de dispersão dada abaixo:

$$i \frac{\partial \psi(z, T)}{\partial z} = \frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 \psi(z, T)}{\partial T^2} , \quad (12.43)$$

utilizando transformadas de Fourier:

$$\psi(z, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}(0, \omega) e^{i\beta_2 \omega^2 / 2} e^{i\omega T} d\omega, \quad (12.44)$$

$$\tilde{\psi}(0, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}(0, \omega) e^{-i\omega T} dT, \quad (12.45)$$

onde  $\psi(0, T)$  é o campo em  $z = 0$ . Obtenha a solução geral e o comprimento típico de dispersão para o pulso gaussiano:

$$\psi(0, T) = A e^{-T^2 / (2\tau_0^2)}, \quad (12.46)$$

onde  $\tau$  é uma constante de tempo associada à largura do pulso.

O que muda na equação de dispersão e na forma da solução ao considerarmos um termo adicional devido ao  $\beta_3$ ? Proponha a nova equação e sua solução. Que novos efeitos podem ocorrer?