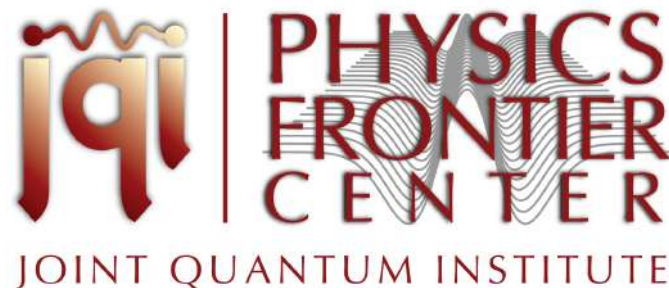


# Funciones de correlación en óptica; ejemplos clásicos y cuánticos 2.

Postgrado, Física, UNAM, México, Marzo 2019

Luis A. Orozco

[www.jqi.umd.edu](http://www.jqi.umd.edu)



El material del curso está disponible en:



<http://www.physics.umd.edu/rgroups/amo/orozco/results/2019/Results19.htm>

# El interferómetro de Michelson

# Interferencia de dos ondas

$$E_1 e^{i\phi_1} + E_2 e^{i\phi_2}$$

$$I = |E_1 e^{i\phi_1} + E_2 e^{i\phi_2}|^2$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\phi_1 - \phi_2)$$

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$$

$$I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$$

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

Si las fases son aleatorias el promedio del coseno es cero.

La visibilidad es cero.

Si tienen una distribución ese promedio estará entre  $\pm 1$  y la visibilidad estará entre 1 y 0

El término de la interferencia (coseno) está relacionado con la coherencia.

$$V = \frac{4\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos(\phi_1 - \phi_2) \rangle}{2(I_1 + I_2)}$$

Para intensidades iguales

$$V = \langle \cos(\phi_1 - \phi_2) \rangle$$

La visibilidad mide la coherencia,  
capacidad de interferir.

¿Qué pasa con la interferencia si una de las amplitudes es muy pequeña?

$$E_1 e^{i\phi_1} + \varepsilon e^{i\phi_2}$$

Asumiendo que las amplitudes son reales

$$I = | E_1 e^{i\phi_1} + \varepsilon e^{i\phi_2} |^2$$

$$I = E_1^2 + 2E_1\varepsilon \cos(\phi_1 - \phi_2) + \varepsilon^2$$

A primer orden en  $\varepsilon$

$$I = I_1 + 2E_1\varepsilon \cos(\phi_1 - \phi_2)$$

Si las fases son iguales: Homodina

Si las fases son diferentes: Heterodina

Se amplifica la señal (asi funcionan los celulares, etc.)

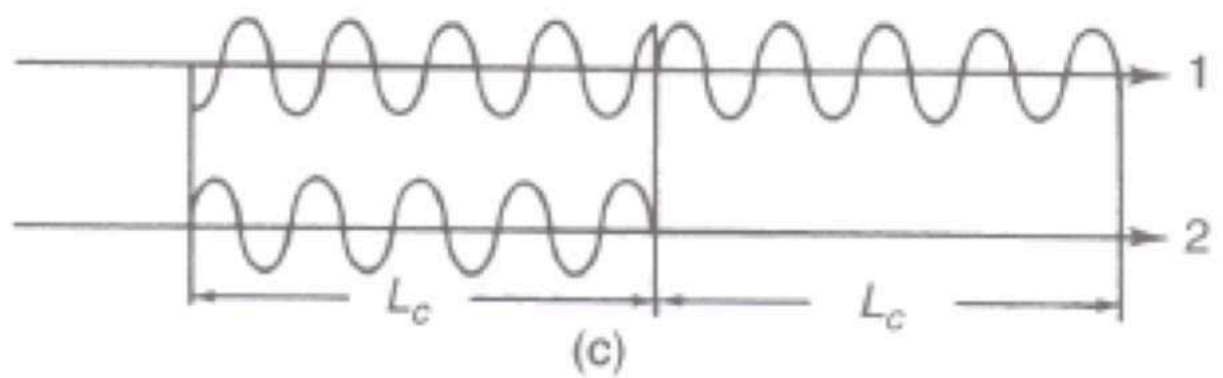
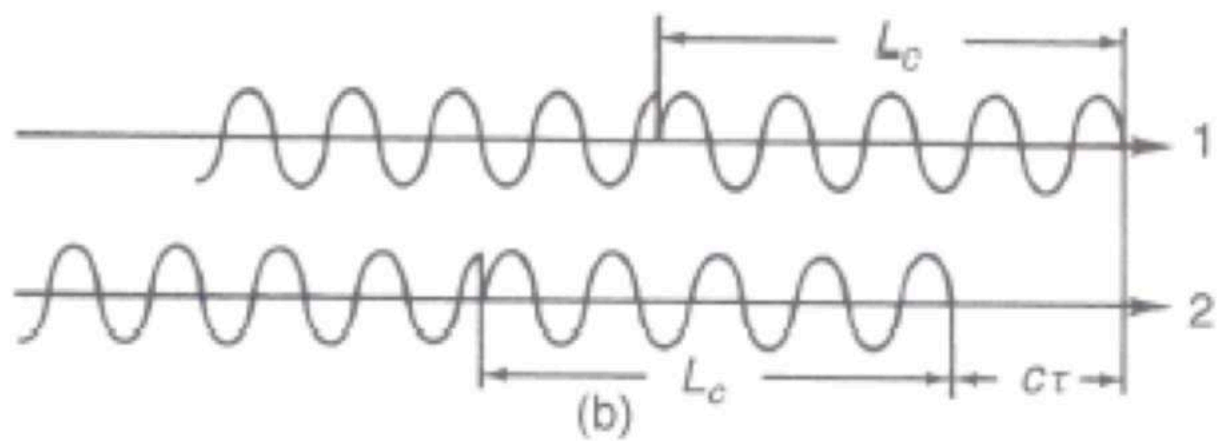
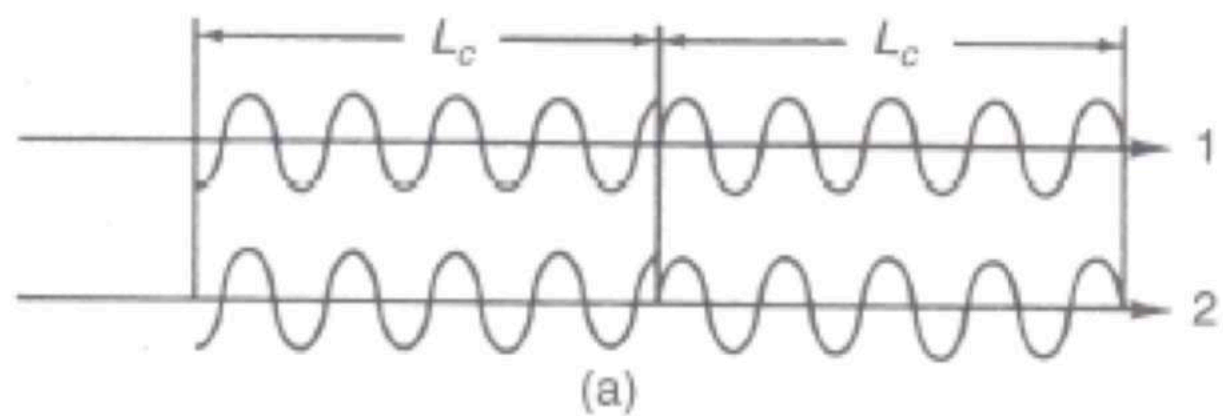
¿Cómo medimos esa capacidad de interferir?

Interferómetro de Michelson, pues podemos variar la diferencia de fase

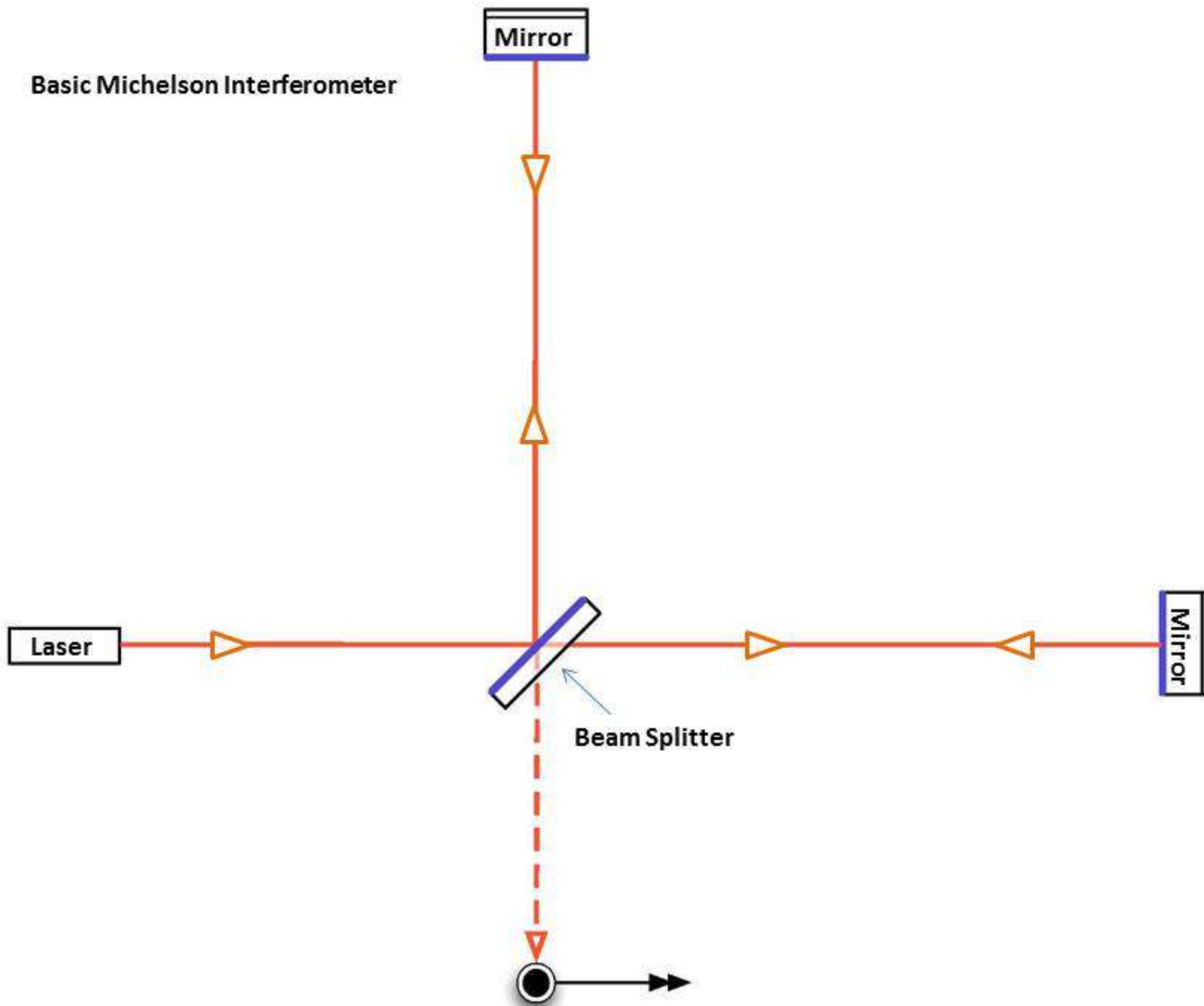
¿Que puede afectar la interferencia?

- La desigualdad de amplitudes
- El frente de onda
- La frecuencia temporal y el número de onda
- La polarización
- Interrupciones en la fase





# Basic Michelson Interferometer



Recuerden que en un espejo semitransparente hay una diferencia en las fases dependiendo si la reflexión es desde un índice de refracción mayor a menor o si es de menor a mayor. Invarianza en T (argumento de Stokes)

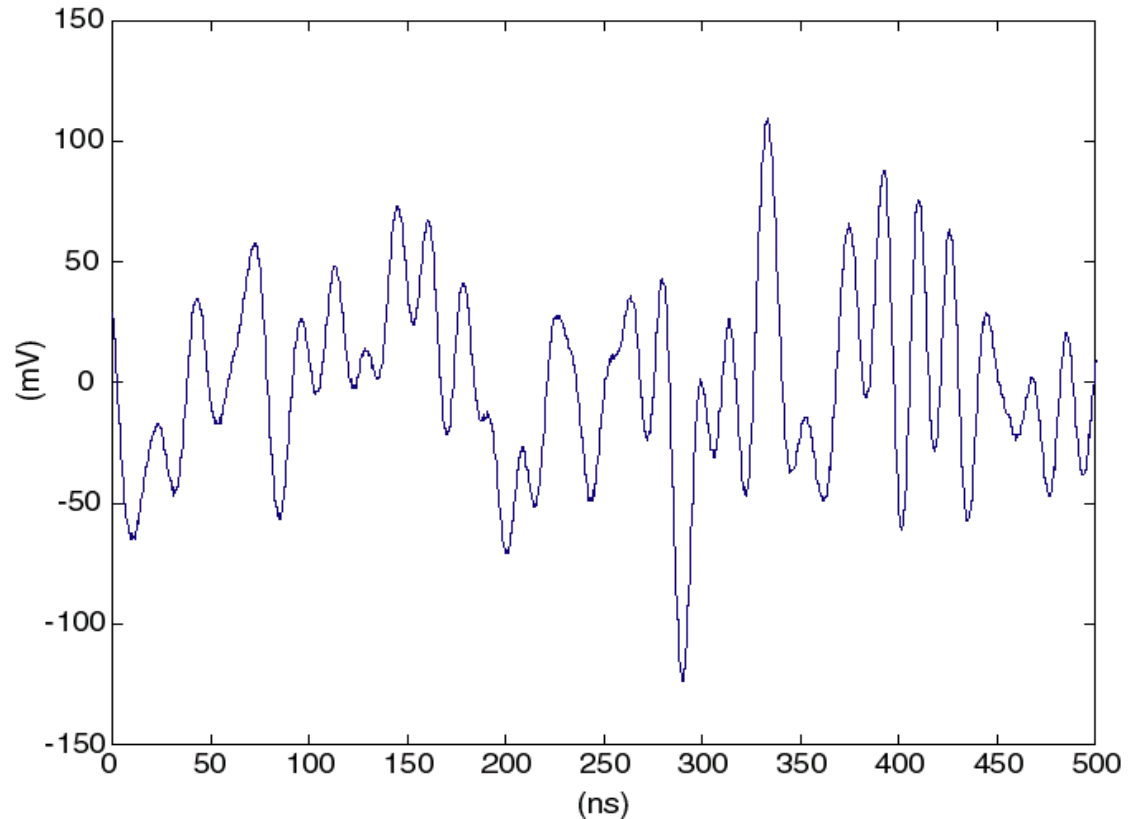
# Correlaciones en óptica

El estudio de las señales ruidosas utiliza funciones de correlación.

Fotocorriente con ruido:

$$\langle F(t) F(t+\tau) \rangle$$
$$\langle F(t) G(t+\tau) \rangle$$

Para señales ópticas las variables a correlacionar son:  
Campo e  
Intensidad.



¿Cómo medir estas funciones?

$G^{(1)}(\tau) = \langle E(t) E^*(t+\tau) \rangle$  campo-campo

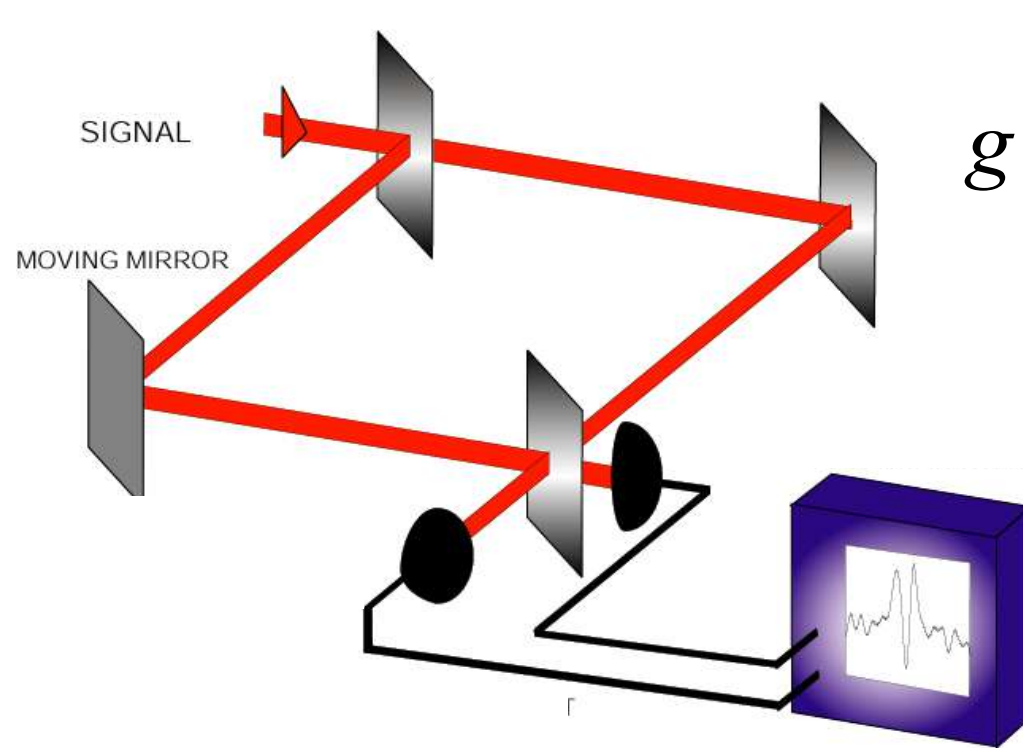
$G^{(2)}(\tau) = \langle I(t) I(t+\tau) \rangle$  intensidad-intensidad

$H(\tau) = \langle I(t) E(t+\tau) \rangle$  intensidad-campo

- Las funciones de correlación nos dicen algo sobre las fluctuaciones.
- Las funciones de correlación tienen límites clásicos.
- Pueden estar relacionadas a mediciones condicionales.

# Interferómetro de Mach Zehnder o de Michelson

## Correlación Campo-Campo



$$g^{(1)}(\tau) = \frac{\langle E^*(t)E(t+\tau) \rangle}{\langle I(t) \rangle}$$

Espectro de la señal :

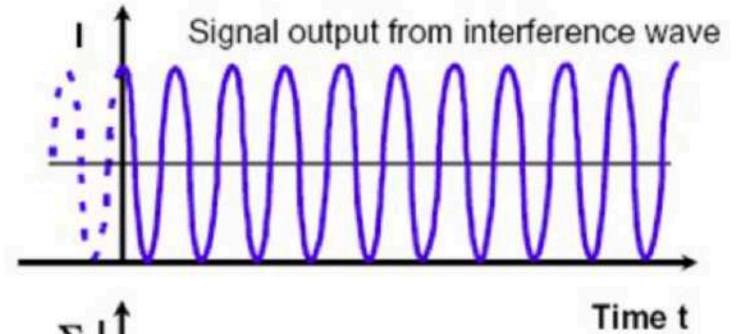
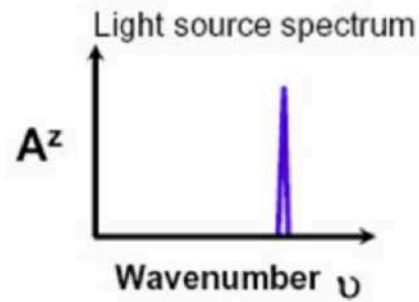
$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int \exp(i\omega\tau) g^{(1)}(\tau) d\tau$$

Base de la espectroscopía de Fourier

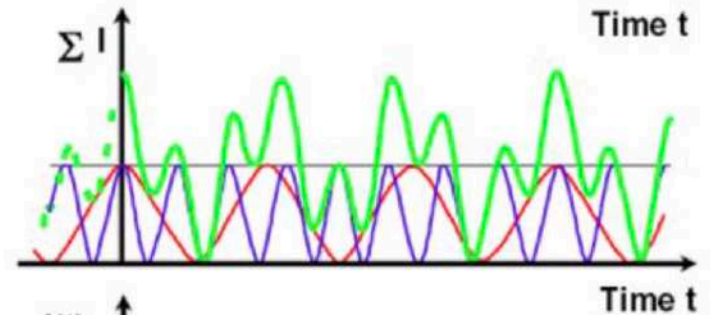
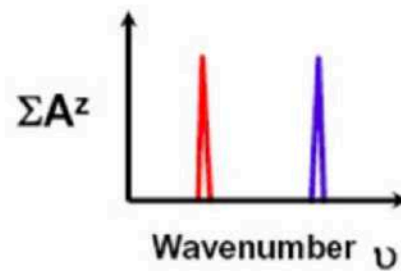


## Relationship between light source spectrum and the signal output from interferometer

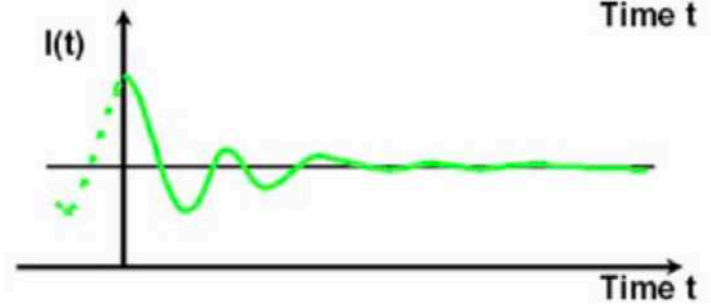
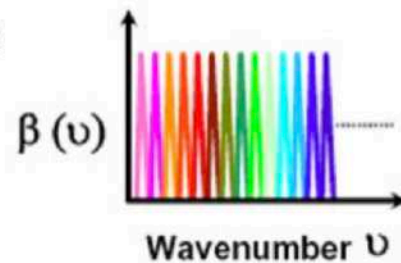
(a) Monochromatic light



(b) Dichroic light



(c) Continuous spectrum light



• All intensities are standardized.

# Coherencia de primer orden

$$g^{(1)}(\tau) = \frac{\langle E^*(t)E(t+\tau) \rangle}{\langle I(t) \rangle}$$

La habilidad de poder interferir

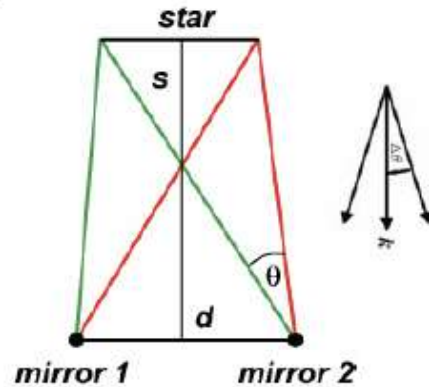
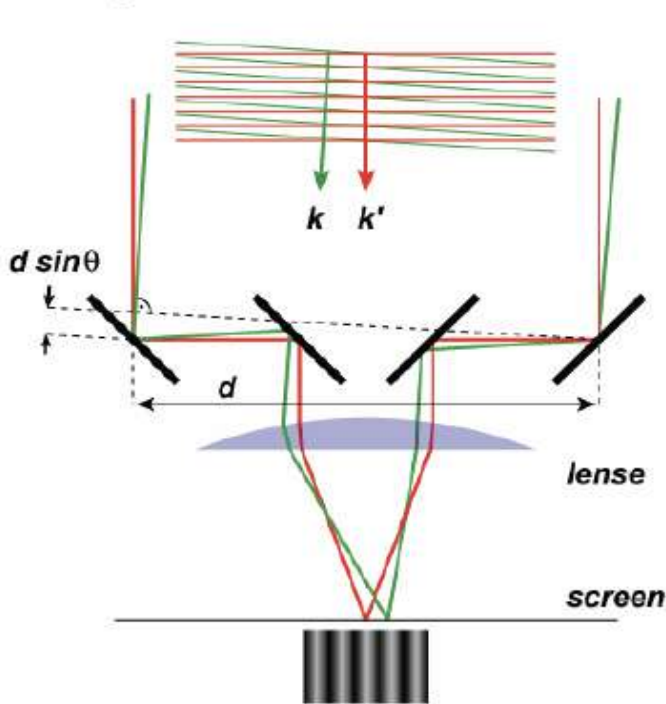
Puede ser también espacial

Piensen en un pulso separado a la entrada, si un brazo es muy largo, no hay interferencia.

# Michelson – Stellar Interferometer (1920)

measuring transverse spatial coherence  
(1st-order correlation function):

$$g^{(1)}(r_1, r_2) = \frac{\langle E(r_1)^* E(r_2) \rangle}{(\langle E(r_1) \rangle^2 \langle E(r_2) \rangle^2)^{1/2}}$$



interference pattern  
disappears for

$$d \theta_0 \simeq \lambda$$

extremely sensitive to

- variations of atmospheric refraction index
- instabilities of the interferometer

↓ „problem“

$$I \sim \langle |E(0) + E(d)|^2 \rangle$$

$$\sim 1 + \text{Re} \left( g^{(1)}(0, d) \right) \sim 1 + \cos((\mathbf{k} + \mathbf{k}') \mathbf{d}/2) \cos(kd\theta/2)$$

# Una nota sobre polarización

# Si hay gradientes muy grandes en

- Div  $E=0$  implica componentes longitudinales grandes.

$$\frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

- En un foco muy concentrado el campo tiene polarización longitudinal
- En un campo evanescente también

# Polarization en una nanofibra

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

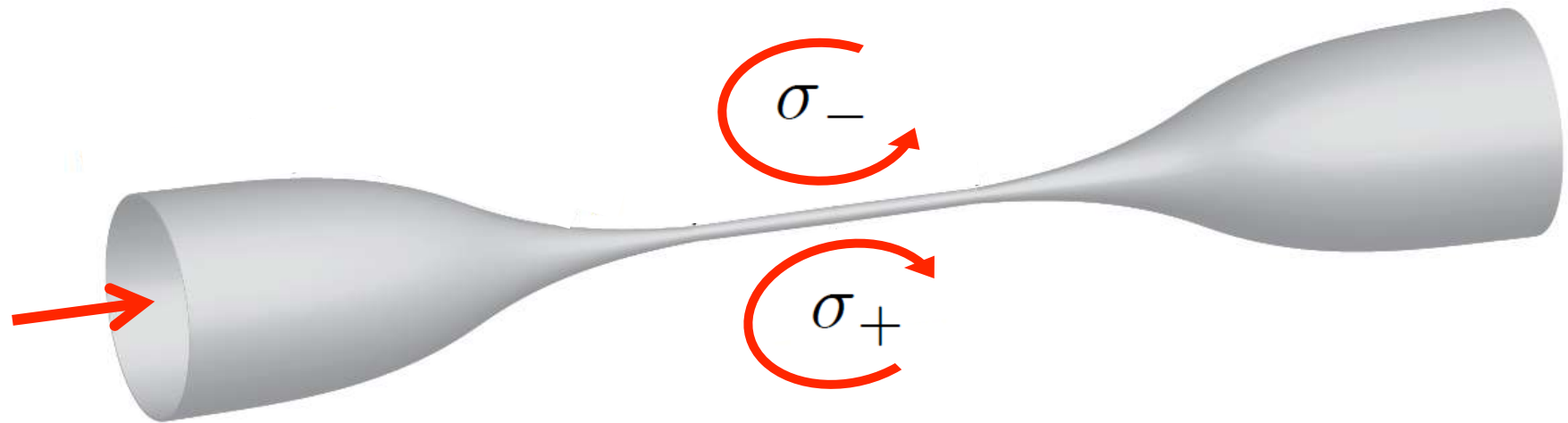
$$\nabla_T \cdot \vec{E} + \frac{2\pi}{\lambda} i E_Z = 0$$



# Polarization en una nanofibra

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla_T \cdot \vec{E} + \frac{2\pi}{\lambda} i E_Z = 0$$

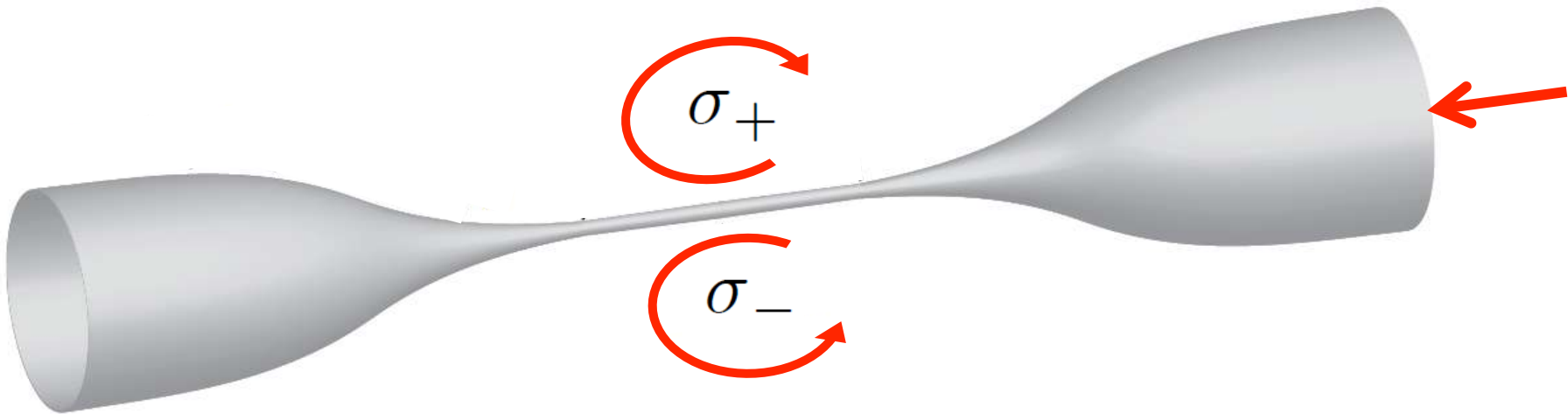


Rotata como una rueda de bicicleta

# Polarization en una nanofibra

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla_T \cdot \vec{E} + \frac{2\pi}{\lambda} i E_Z = 0$$



La rotación depende de la dirección de  $k$



Más propiedades de las funciones de correlación en óptica (Wolf 1954)

- M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics* Cambridge University Press, Cambridge, 1999, 7th expanded.
- L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics* Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- E. Wolf, *Introduction to the Theory of Coherence and Polarization of Light* Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

Ecuación de onda de un campo escalar  $V(\mathbf{r}, t)$

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) V(\mathbf{r}, t) = 0,$$

$$U(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} V(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t} dt,$$

$$(\nabla^2 + k^2) U(\mathbf{r}, \omega) = 0,$$

Función de coherencia mutua normalizada:

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) = \langle V^*(\mathbf{r}_1, t) V(\mathbf{r}_2, t + \tau) \rangle. \quad \gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) = \frac{\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau)}{\sqrt{I(\mathbf{r}_1) I(\mathbf{r}_2)}},$$

La intensidad es la coherencia mutua a  $t$  y  $\mathbf{r}$  iguales

$$I(\mathbf{r}) = \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}; 0) = \langle V^*(\mathbf{r}, t) V(\mathbf{r}, t) \rangle$$

La densidad espectral cruzada es la transformada de Fourier de la correlación (normalizada como el grado espectral de coherencia).

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) e^{i\omega\tau} d\tau.$$

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega) = \langle U^*(\mathbf{r}_1, \omega) U(\mathbf{r}_2, \omega) \rangle,$$

Grado espectral de coherencia y sus cotas:

$$\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega) = \frac{W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega)}{\sqrt{S(\mathbf{r}_1, \omega) S(\mathbf{r}_2, \omega)}} \quad 0 \leq |\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega)| \leq 1$$

Densidad espectral (intensidad a la frecuencia  $\omega$ )

$$S(\mathbf{r}, \omega) = W(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \omega)$$

La teoría moderna de la coherencia comenzó en 1954 cuando Wolf encontró que la función de coherencia mutua en espacio libre satisface las ecuaciones de onda:

$$\left( \nabla_1^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \underline{t}) = 0,$$

$$\left( \nabla_2^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \underline{t}) = 0,$$

La densidad espectral cruzada (Transformada de Fourier de la correlación) también satisface la ecuación de Helmholtz:

$$(\nabla_1^2 + k^2)W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega) = 0,$$

$$(\nabla_2^2 + k^2)W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega) = 0,$$

Con sus integrales de difracción asociadas.

Conocer la densidad espectral cruzada  $W(0)$  en el plano del objeto permite en principio el cálculo de la densidad espectral cruzada en cualquier lugar de  $z > 0$ .

Para haces vectoriales la *matriz de la densidad espectral cruzada eléctrica*, la cual puede ser utilizada para caracterizar el estado de coherencia y el estado de polarización en el plano de la fuente  $z=0$  es ( $\rho_i$  es un punto en el plano de la fuente):

$$\mathbf{W}^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2; \omega) = \begin{pmatrix} W_{xx}^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2; \omega) & W_{xy}^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2; \omega) \\ W_{yx}^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2; \omega) & W_{yy}^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2; \omega) \end{pmatrix},$$

$$W_{ij}^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2; \omega) = \langle E_i^*(\boldsymbol{\rho}_1, \omega) E_j(\boldsymbol{\rho}_2, \omega) \rangle, \quad (i, j = x, y).$$

Entonces en el punto de observación para dos puntos  $\mathbf{r}_i$   $E$  está vinculada a la fuente mediante una función de Green o una integral de difracción:

$$W_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega) = \langle E_i^*(\mathbf{r}_1, \omega) E_j(\mathbf{r}_2, \omega) \rangle, \quad (i, j = x, y).$$

Como en realidad estamos hablando de campos vectoriales, el grado *espectral de polarización* del campo en cualquier punto está definido como la razón de la intensidad de la parte polarizada del has a la intensidad total:

$$\mathcal{P}(\mathbf{r}, \omega) = \sqrt{1 - \frac{4 \det \mathbf{W}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \omega)}{[\text{Tr} \mathbf{W}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \omega)]^2}},$$

Con la densidad espectral del campo (con un prefactor) :

$$S(\mathbf{r}, \omega) = \text{Tr} \mathbf{W}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \omega).$$

El grado de polarización está acotado de no polarizada (0) a completamente polarizada (1):

$$0 \leq \mathcal{P}(\mathbf{r}, \omega) \leq 1$$



Los parámetros espectrales de Stokes son combinaciones de los elementos de la matriz de la densidad espectral cruzada eléctrica:

$$s_0(\mathbf{r}, \omega) = W_{xx}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \omega) + W_{yy}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \omega),$$

$$s_1(\mathbf{r}, \omega) = W_{xx}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \omega) - W_{yy}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \omega),$$

$$s_2(\mathbf{r}, \omega) = W_{xy}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \omega) + W_{yx}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \omega),$$

$$s_3(\mathbf{r}, \omega) = i[W_{yx}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \omega) - W_{xy}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \omega)].$$

El grado de polarización está relacionado a la función de correlación y esta cambia en función de la posición conforme la onda se propaga.

Al hablar de funciones de correlación la notación de Wolf y la de Glauber son diferentes.

Wolf utiliza letras griegas ( $\gamma^{(4)}$ ) con el índice asociado con el número de campos.

Glauber utiliza letras latinas ( $g^{(2)}$ ) con el índice asociado con el número de intensidades.

Mínusculas son funciones normalizadas, las mayúsculas no están normalizadas.

El teorema de la coherencia de la polarización, un colorario reciente:

$$P^2 = V^2 + D^2, \text{ y } V^2 + D^2 \leq 1$$

El grado de la polarización al cuadrado  $P$  es la suma de los cuadrados de la visibilidad  $V$  y la distinguibilidad  $D$ ; todos asociados a los elementos de la *matriz de la densidad espectral cruzada eléctrica*.

J. H. Eberly, X.-F. Qian, and A. N. Vamivakas, “Polarization coherence theorem,” *Optica* **4**, 1113 (2017).

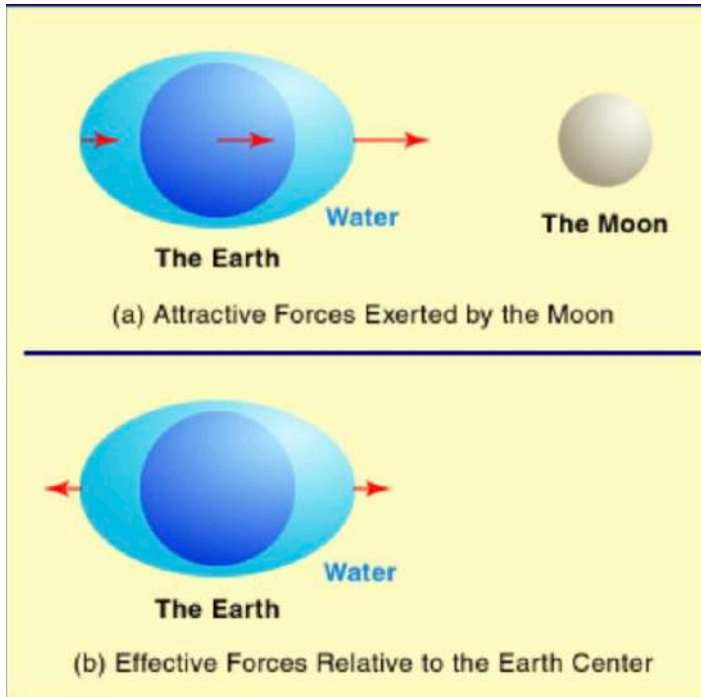
A. F. Abouraddy, “What is the maximum attainable visibility by a partially coherent electromagnetic field in Young’s double-slit interference?” *Opt. Express* **15**, 18320 (2017).

¿Cómo funcionan LIGO y VIRGO?

Las ondas gravitacionales se generan cuando cambia el campo gravitacional.

La Relatividad Especial nos enseña que tiene que tardar en llegar la información y se propaga a la velocidad de la luz o a una velocidad menor.

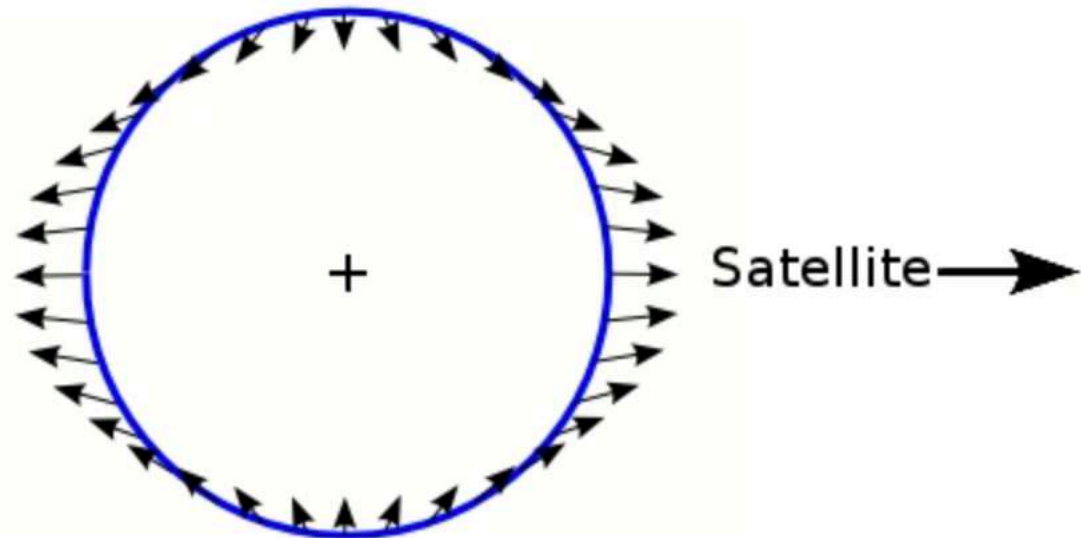
La Relatividad General permite calcular y predecir las características dependiendo de las fuentes.

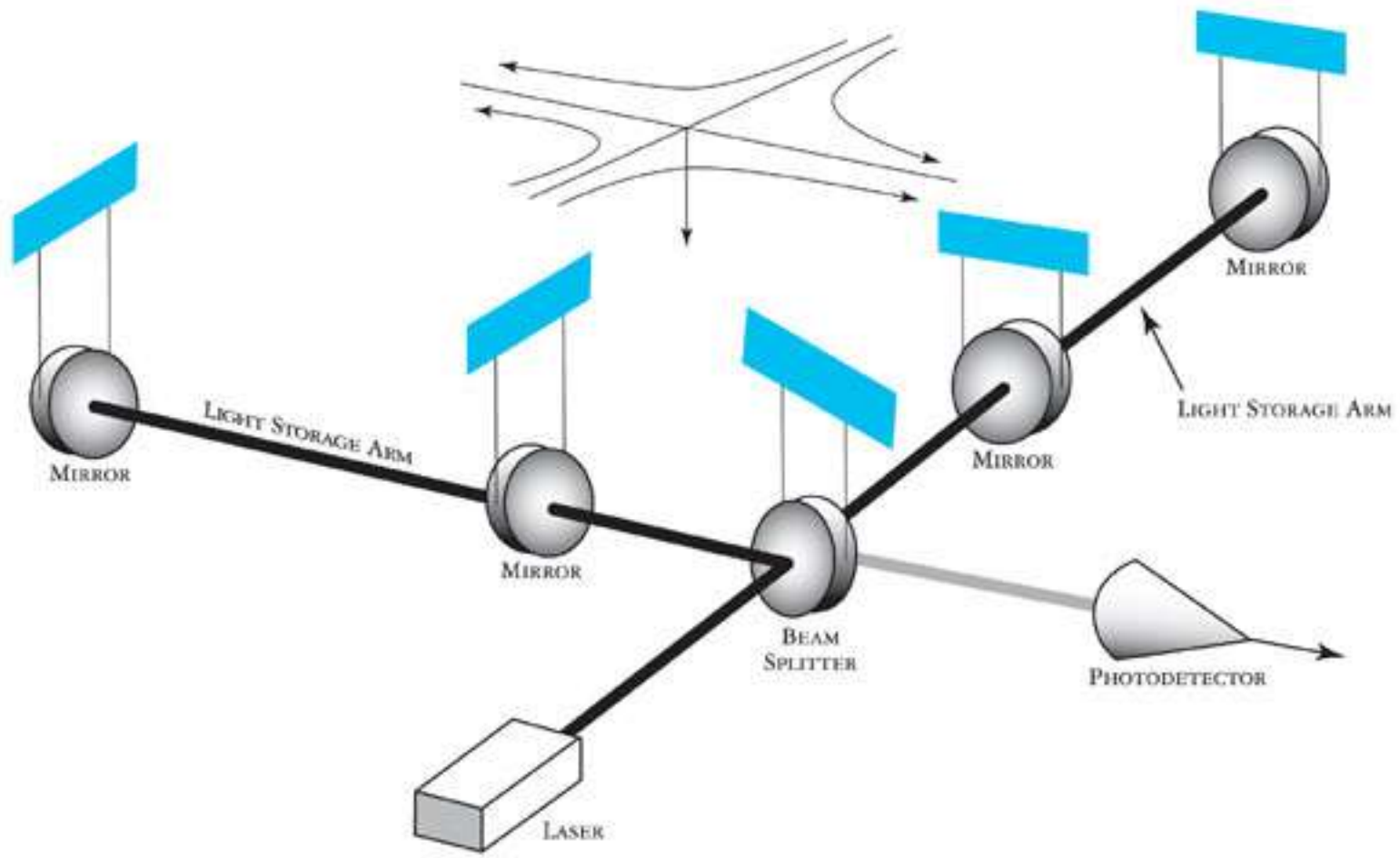


Las ondas son cuadrupolares.

Parecen las fuerzas de mareas.

Tienen dos polarizaciones

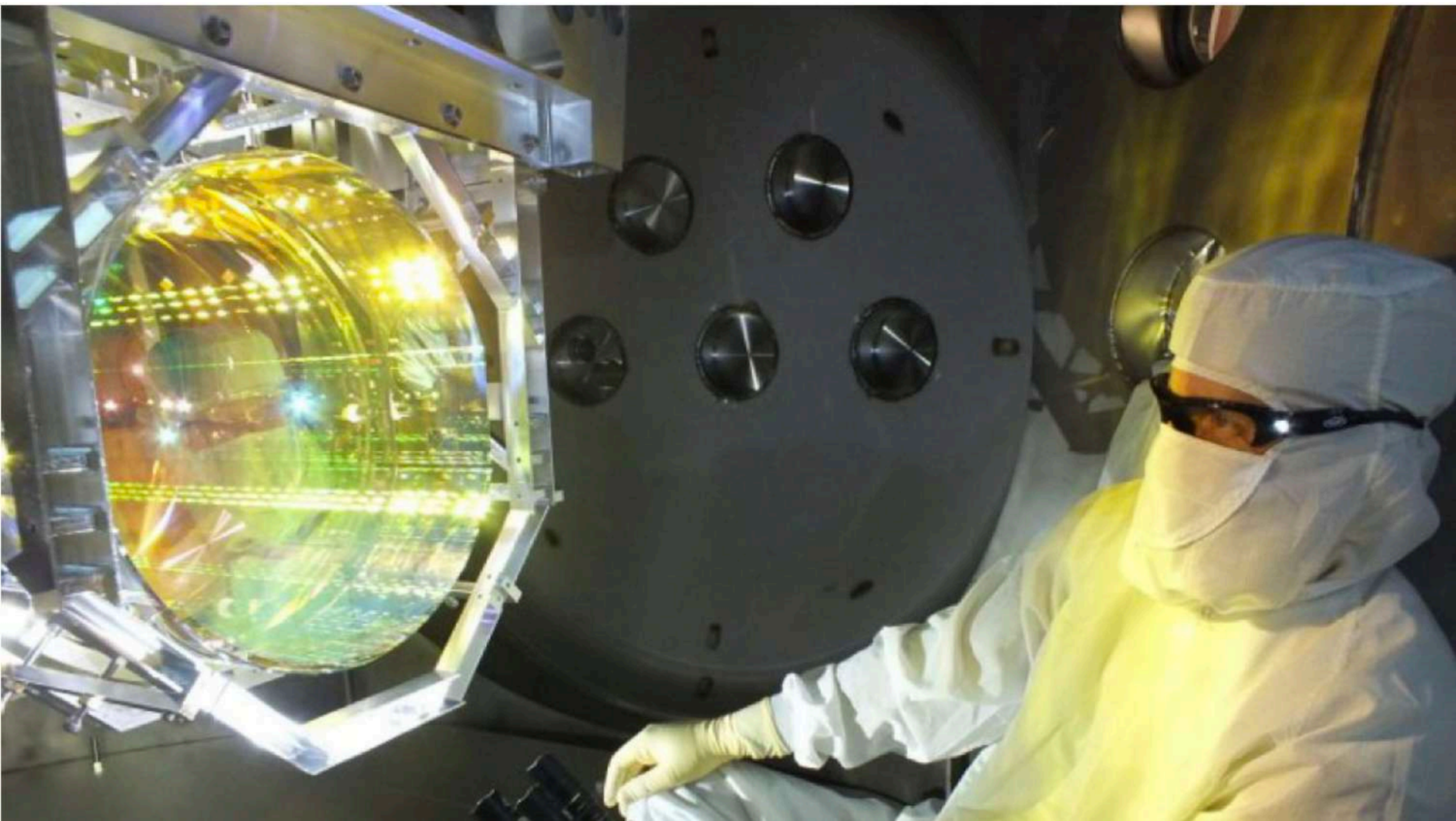






LIGO





VIRGO



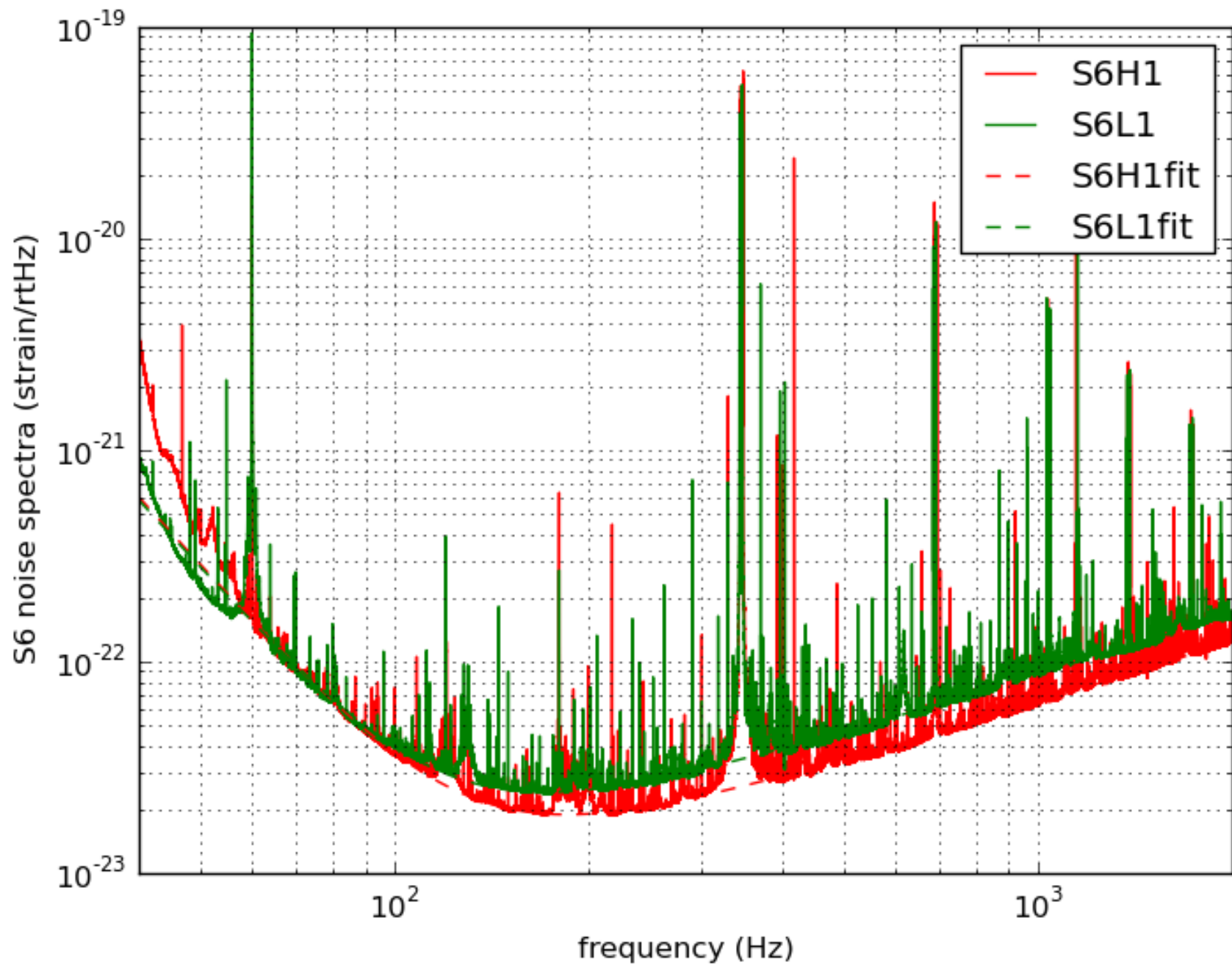
VIRGO

La señal de LIGO y VIRGO es un pequeño cambio  $\Delta d$  en la separación entre el semitransparente y el reflejante separados por  $d$  que se refleja en un cambio en la fase  $\delta \pm \epsilon$  que cambia conforme pasa la onda

Miden  $h = \Delta d/d$

La señal es la diferencia  $S = I(\delta + \epsilon) - I(\delta - \epsilon)$

¿Cuál es su límite de ruido actual?



LIGO tiene 4 km en cada brazo y VIRGO 3 Km

$$h = 2 \times 10^{-23} = \Delta d/d$$

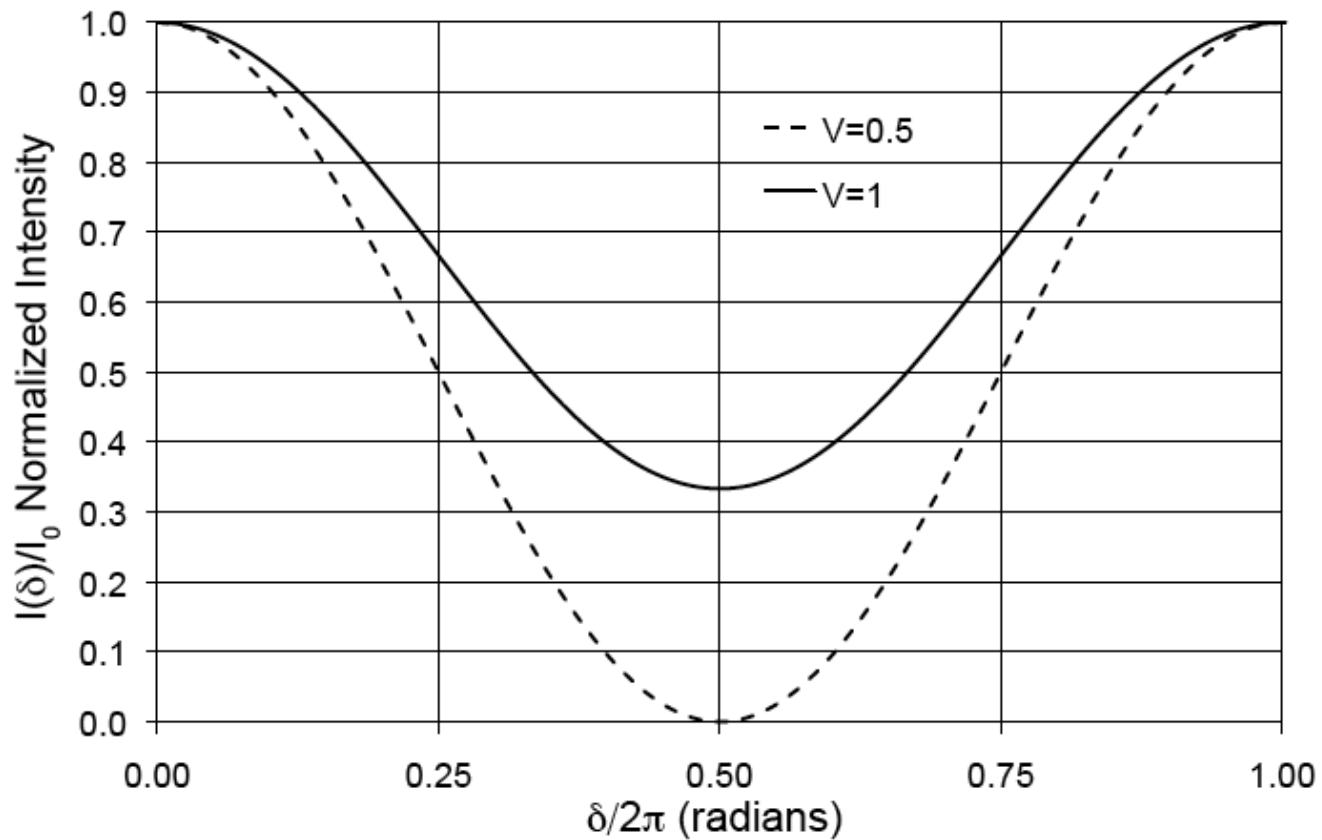
$$\Delta d = 2 \times 10^{-23} \times 4 \times 10^3$$

$$\Delta d = 8 \times 10^{-20} \text{ m}$$

El radio de un protón es  $1 \times 10^{-15} \text{ m}$

Si  $d$  es la distancia entre la tierra y el sol  
La sensibilidad  $\Delta d$  es un décimo del radio de Bohr.

¿Donde operar el interferómetro de LIGO y VIRGO, en la parte lineal o en los extremos?



La señal el es la diferencia debida al desplazamiento

$$I_{out} = I_0 \left( A + B \cos^2 \frac{\delta}{2} \right)$$

$$S = I_0 \left( \cos^2 \frac{\delta - \epsilon}{2} - \cos^2 \frac{\delta + \epsilon}{2} \right)$$

$$S = I_0 \left( \left( \cos^2 \frac{\delta}{2} + \epsilon \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2} \right) - \left( \cos^2 \frac{\delta}{2} - \epsilon \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2} \right) \right)$$

$$S = 2I_0 \epsilon \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2}$$

El máximo de la señal esta en la parte lineal en la fase

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial \delta} &= I_0 \epsilon (\cos^2 \delta/2 - \sin^2 \delta/2) \\ \frac{\partial S}{\partial \delta} &= 0 \\ \delta/2 &= \pi/4\end{aligned}$$



Pero lo importante no es la maxima señal sino la máxima señal en la razón señal a ruido:

$$\frac{S}{N} = \frac{I_0 \cos^2 \frac{\delta+\epsilon}{2} - I_0 \cos^2 \frac{\delta+\epsilon}{2}}{\sqrt{I_0 \cos^2 \frac{\delta+\epsilon}{2} + I_0 \cos^2 \frac{\delta+\epsilon}{2}}}$$

$$N \approx \sqrt{2I_0 \cos^2 \frac{\delta}{2}} = \sqrt{2I_0} \cos \frac{\delta}{2}$$

$$\begin{aligned}\frac{S}{N} &= \frac{2I_0\epsilon \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2}}{\sqrt{2I_0} \cos \frac{\delta}{2}} \\ &= \sqrt{2I_0}\epsilon \sin \frac{\delta}{2}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \delta} \left( \frac{S}{N} \right) = \frac{\sqrt{2I_0}}{2} \epsilon \cos \frac{\delta}{2}$$

En la parte mínima es un máximo, la S/N es lineal en  $\epsilon$

Si están a oscuras es más fácil identificar un incremento en la intensidad.

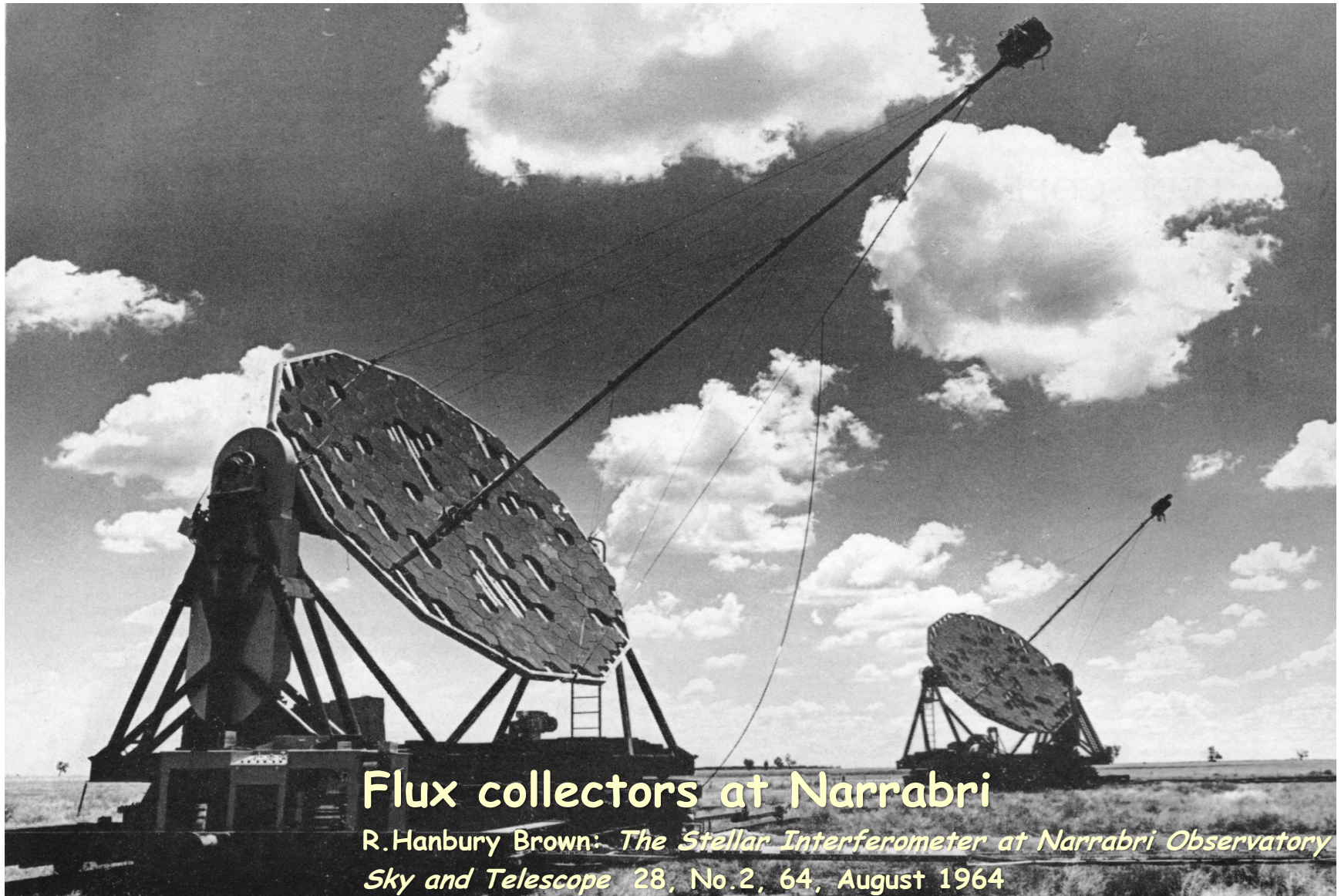
En la parte lineal, hay ya mucha luz, ruido de disparo, (shot noise).

En realidad LIGO y VIRGO operan cerca de ese punto pero ellos toman en cuenta otros ruidos en su medición.

Handbury Brown and Twiss

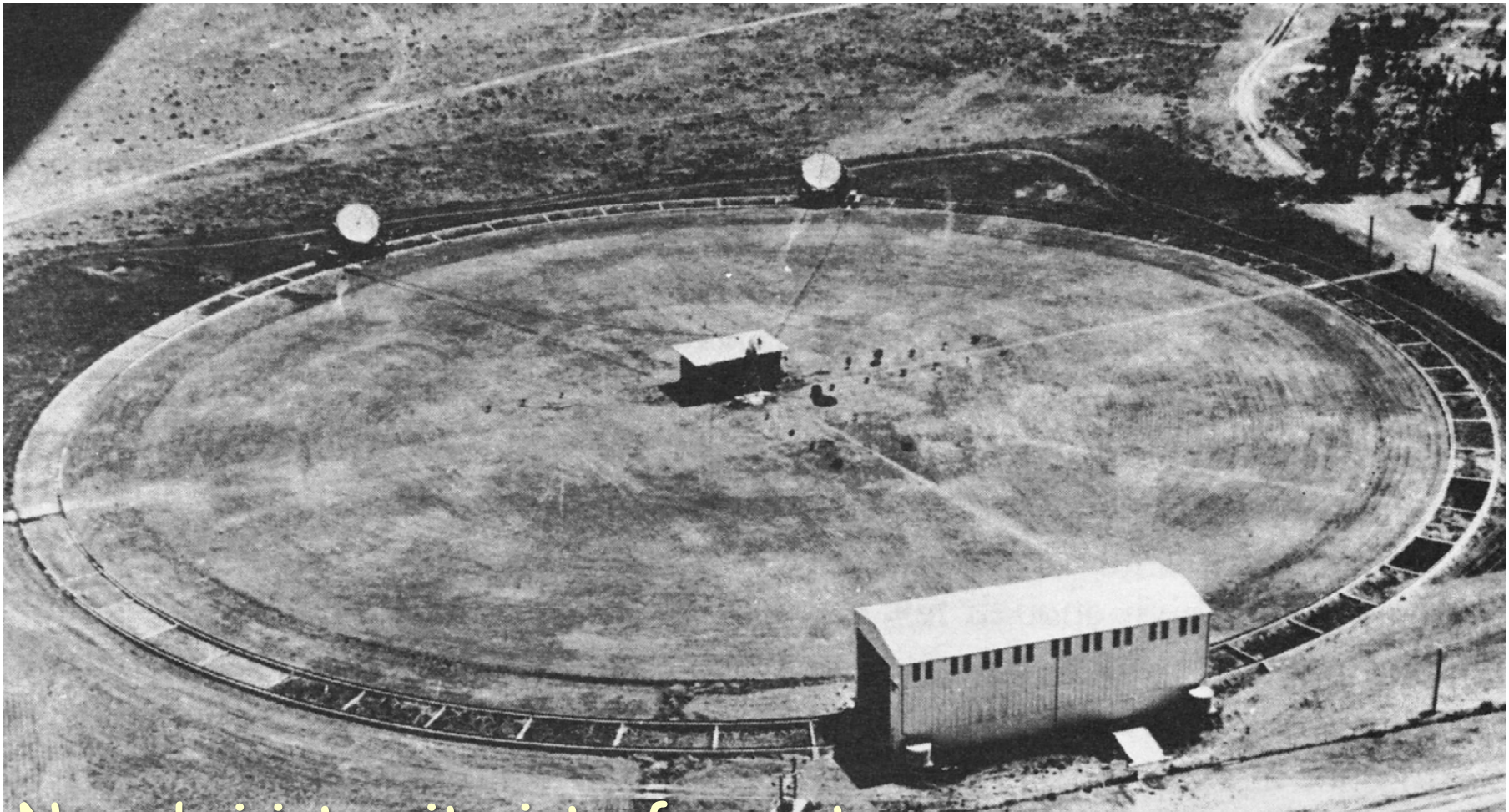
¿Podemos utilizar fluctuaciones en la intensidad, ruido, para medir el tamaño de una estrella? Si. Ellos eran radio-astrónomos y lo hicieron en 1952,

R. Hanbury Brown and R.Q. Twiss, “A New Type of Interferometer for Use in Radio Astronomy,” *Phil. Mag.* **46**, 663 (1954).



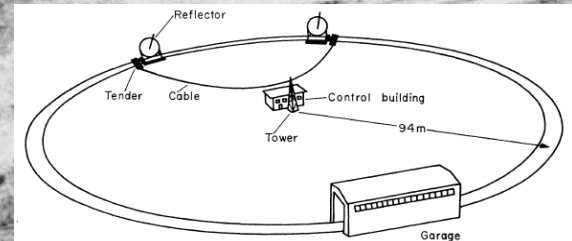
## Flux collectors at Narrabri

R. Hanbury Brown: *The Stellar Interferometer at Narrabri Observatory*  
*Sky and Telescope* 28, No. 2, 64, August 1964

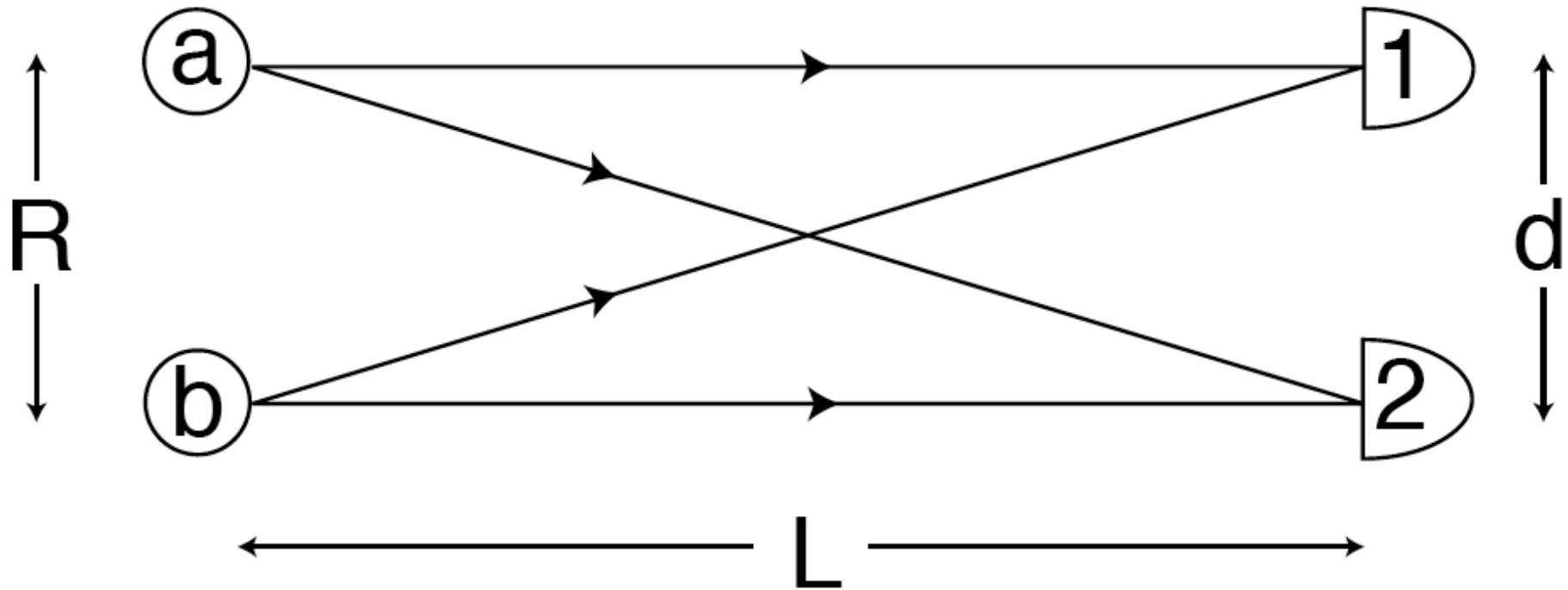


## Narrabri intensity interferometer with its circular railway track

R. Hanbury Brown: *BOFFIN. A Personal Story of the Early Days of Radar, Radio Astronomy and Quantum Optics* (1991)



# La controversia de HBT



The physics of Hanbury Brown–Twiss intensity interferometry:  
from stars to nuclear collisions.\*

GORDON BAYM

Presented at the XXXVII Cracow School of Theoretical Physics, Zakopane, Poland.  
May 30 - June 10, 1997.



Fuente a y b están dentro del diámetro de la estrella. ¿Podemos medir la distancia angular  $R/L \sim \theta$  para conocer el diámetro?

Fuente a:

$$\alpha e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_a|+i\phi_a} / |\vec{r}-\vec{r}_a|$$

Fuente b:

$$\beta e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_b|+i\phi_b} / |\vec{r}-\vec{r}_b|$$

Amplitud en el detector 1 de las fuentes a y b:

$$A_1 = \frac{1}{L} \left( \alpha e^{ikr_{1a} + i\phi_a} + \beta e^{ikr_{1b} + i\phi_b} \right)$$

La intensidad es  $I_1$

$$= \frac{1}{L^2} \left( |\alpha|^2 + |\beta|^2 + \alpha^* \beta e^{i(k(r_{1b} - r_{1a}) + \phi_b - \phi_a)} + \alpha \beta^* e^{-i(k(r_{1b} - r_{1a}) + \phi_b - \phi_a)} \right)$$

El promedio sobre las fases aleatorias  $\phi_a$  y  $\phi_b$  da cero

$$\langle I_1 \rangle = \langle I_2 \rangle = \frac{1}{L^2} \left( \langle |\alpha|^2 \rangle + \langle |\beta|^2 \rangle \right)$$

Y el producto de la intensidad de cada detector  $\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle$  es independiente de la separación de los detectores.

Multipliquemos las dos intensidades y luego promediamos.

$$\begin{aligned}\langle I_1 I_2 \rangle &= \langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle + \frac{2}{L^4} |\alpha|^2 |\beta|^2 \cos(k(r_{1a} - r_{2a} - r_{1b} + r_{2b})) \\ &= \frac{1}{L^4} \left[ (|\alpha|^4 + |\beta|^4) + 2|\alpha|^2 |\beta|^2 (1 + \cos(k(r_{1a} - r_{2a} - r_{1b} + r_{2b}))) \right].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g^{(2)} &= \frac{\langle I_1 I_2 \rangle}{\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle} \\ &= 1 + 2 \frac{\langle |\alpha|^2 \rangle \langle |\beta|^2 \rangle}{(\langle |\alpha|^2 \rangle + \langle |\beta|^2 \rangle)^2} \cos(k(r_{1a} - r_{2a} - r_{1b} + r_{2b})).\end{aligned}$$

$$(L \gg R), k(r_{1a} - r_{2a} - r_{1b} + r_{2b}) \rightarrow k(\vec{r}_a - \vec{r}_b) \cdot (\hat{r}_2 - \hat{r}_1) = \vec{R} \cdot (\vec{k}_2 - \vec{k}_1)$$

Esta función depende de la separación entre los detectores.

$$d = \lambda/\theta, \quad \text{con} \quad \theta = R/L$$

## Relación con el interferómetro de Michelson

$$|A_1 + A_2|^2 = |A_1|^2 + |A_2|^2 + (A_1^* A_2 + A_1 A_2^*)$$

El término en paréntesis está asociado con la Visibilidad (coherencia de primer orden) Si tomamos el cuadrado de la Visibilidad y luego promediamos:

$$\langle V^2 \rangle = 2\langle |A_1|^2 |A_2|^2 \rangle + \langle A_1^{*2} A_2^2 \rangle + \langle A_1^2 A_2^{*2} \rangle$$

$$\langle V^2 \rangle \rightarrow 2\langle I_1 I_2 \rangle$$

Can we use intensity fluctuations, noise, to measure the size of a source in the visible?

R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss did it with an isotopically enriched source of Hg showing that it is possible.

R. Hanbury Brown and R.Q. Twiss, Correlation between Photons in Two Coherent Beams of Light, Nature 177, 27 (1956).

**Interferometry of the Intensity Fluctuations in Light II. An Experimental Test of the Theory for Partially Coherent Light**



R. Hanbury Brown; R. Q. Twiss

*Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, Vol. 243, No. 1234 (Jan. 14, 1958), 291-319.

Stable URL:

<http://links.jstor.org/sici?sici=0080-4630%2819580114%29243%3A1234%3C291%3A%3E2.0.CO%3B2-H>

*Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* is currently published by The Royal Society.

light from source

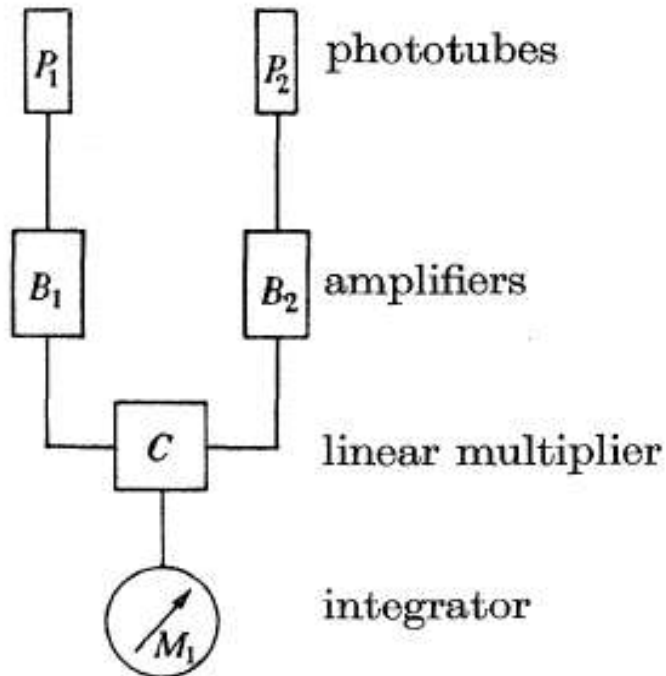
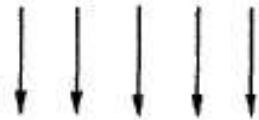


FIGURE 1. A simplified outline of an intensity interferometer.

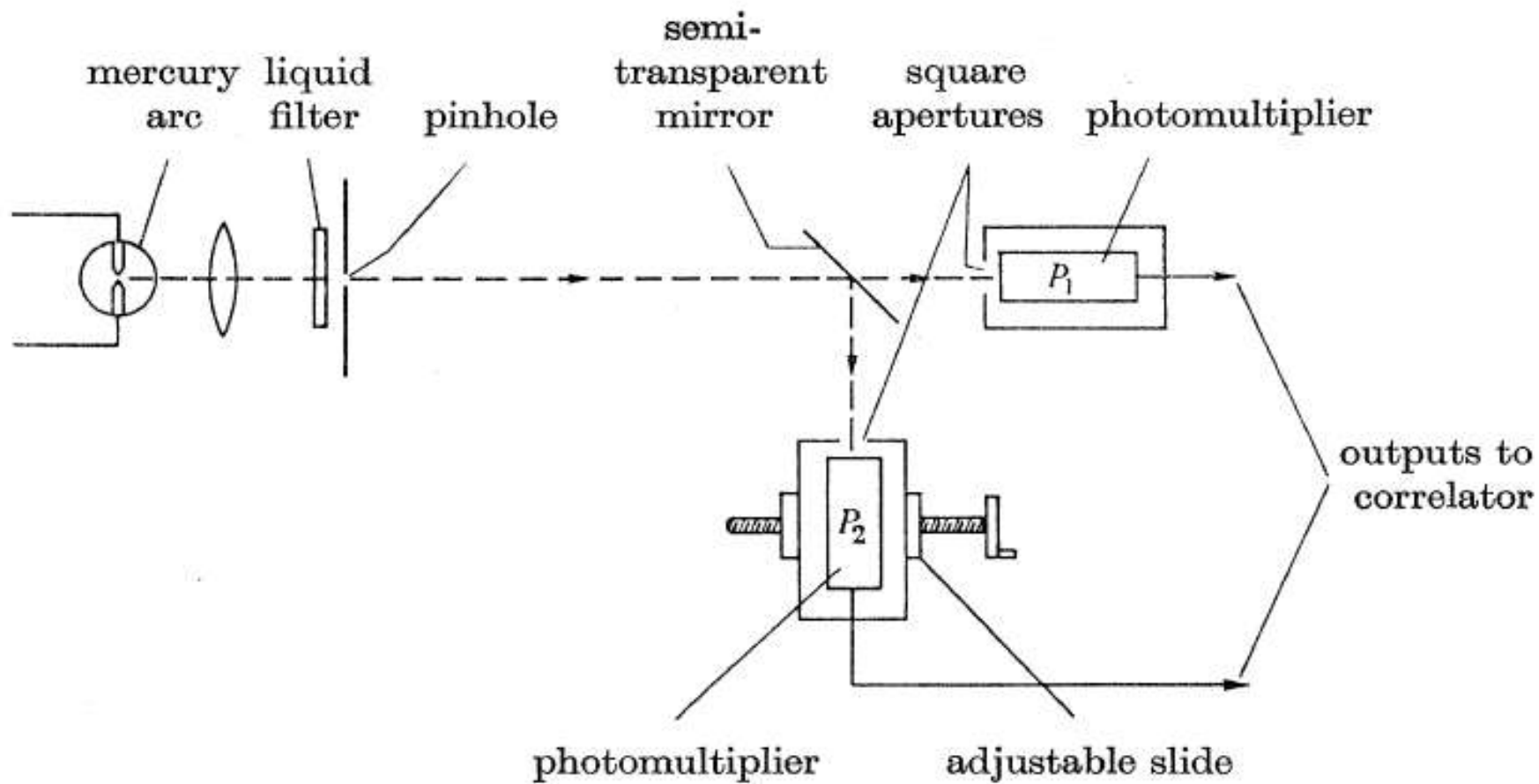
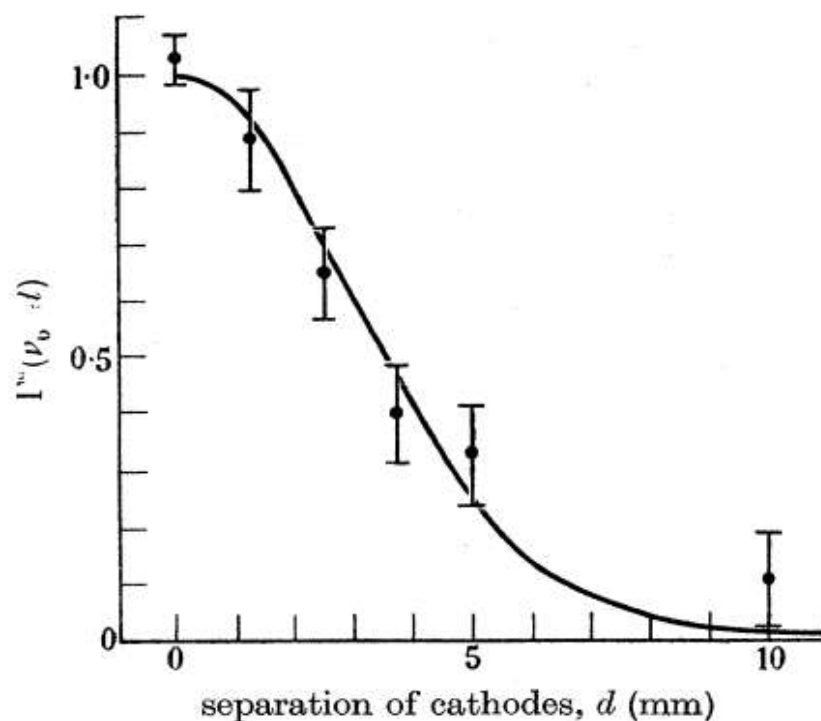


FIGURE 4. A simplified outline of the optical system.



TABLE 2. THE EXPERIMENTAL AND THEORETICAL VALUES FOR THE NORMALIZED CORRELATION FACTOR FOR DIFFERENT CATHODE SPACINGS

run no.	cathode separation (mm) $d$	observed correlation (r.m.s. signal to noise ratio) ( $S/N$ )	theoretical correlation assuming cathodes superimposed (r.m.s. signal to noise ratio) ( $S/N$ )'	experimental value of normalized correlation factor $\Gamma^2(\nu_0, d) = \frac{(S/N)}{(S/N)'}$	theoretical value of the normalized correlation factor $\Gamma^2(\nu_0, d)$
1	0	+ 17.55	+ 17.10	$1.03 \pm 0.04$ (p.e.)	1.00
2	1.25	+ 8.25	+ 9.27	$0.89 \pm 0.07$	0.928
3	2.50	+ 5.75	+ 8.85	$0.65 \pm 0.08$	0.713
4	3.75	+ 3.59	+ 8.99	$0.40 \pm 0.07$	0.461
5	5.00	+ 2.97	+ 9.00	$0.33 \pm 0.07$	0.244
6	10.00	+ 0.90	+ 8.17	$0.11 \pm 0.08$	0.015



The solution to the discussion by E. M. Purcell, *Nature* **178**, 1449 (1956).

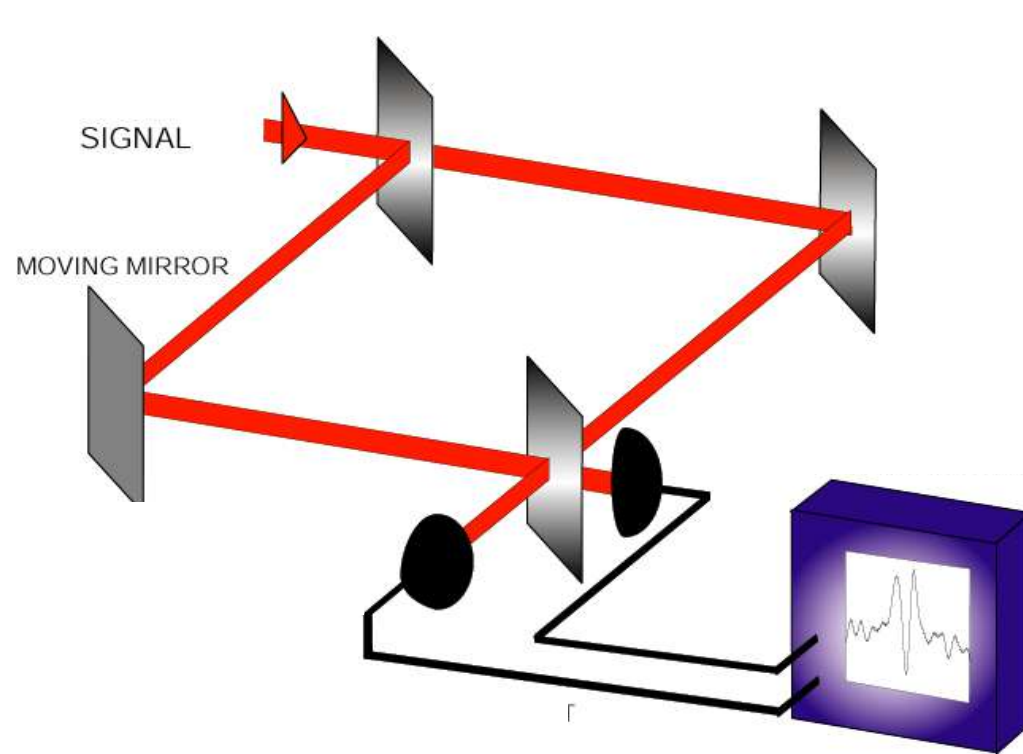
Mentions the work of Forrester as the first real optical intensity correlation. A. T. Forrester, R. A. Gudmundsen and P. O. Johnson, “*Photoelectric Mixing of Incoherent Light*,” *Phys. Rev.* **99**, 1691 (1955).

Mentions that bosons tend to appear together

Does the calculation and relates it to the first order coherence, the result of a Michelson Interferometer, the Visibility.

# Interferómetro de Mach Zehnder o de Michelson

## Correlación Campo-Campo



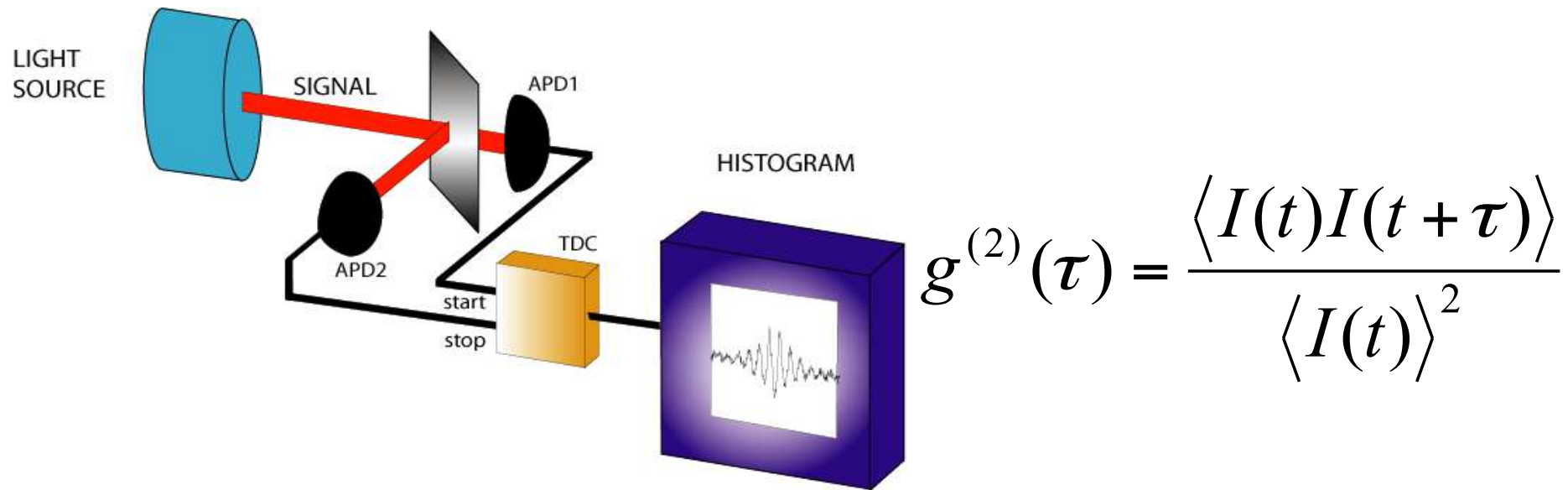
$$g^{(1)}(\tau) = \frac{\langle E^*(t)E(t+\tau) \rangle}{\langle I(t) \rangle}$$

Espectro de la señal :

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int \exp(i\omega\tau) g^{(1)}(\tau) d\tau$$

Base de la espectroscopía de Fourier

# Hanbury-Brown and Twiss **Intensidad-Intensidad**



HBT: ¿Podemos utilizar las fluctuaciones en la intensidad para medir el tamaño de una estrella? Eran radio astrónomos.

# Correlaciones de la intensidad $\tau=0$

$$\begin{aligned} g^{(2)}(0) &= \frac{\langle I(t)^2 \rangle}{\langle I(t) \rangle^2} \\ &= \frac{\langle (I_0 + \delta(t))^2 \rangle}{\langle I_0 + \delta(t) \rangle^2} \\ &= 1 + \frac{\langle \delta(t)^2 \rangle}{I_0^2} \end{aligned}$$

Claramente ven la varianza

# Correlaciones de la intensidad (cotas)

$$g^{(2)}(0) = 1 + \frac{\langle \delta(t)^2 \rangle}{I_0^2}$$

$$g^{(2)}(0) - 1 \geq 0$$

Cauchy-Schwarz

$$2I(t)I(t + \tau) \leq I^2(t) + I^2(t + \tau)$$

$$|g^{(2)}(\tau) - 1| \leq |g^{(2)}(0) - 1|$$

La correlación es la máxima a tiempos iguales ( $\tau=0$ ), no puede incrementarse.

# Optica cuántica

- El fotón es la mas pequeña fluctuación de la intensidad del campo electromagnético, de su varianza.
- El fotón es el cuanto de enegía del campo electromagnético. Con un campo de frecuencia  $\omega$  la energía  $\hbar\omega$ .

# Correlaciones de fotones (Glauber):

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle : \hat{I}(t) \hat{I}(t + \tau) : \rangle}{\langle \hat{I}(t) \rangle^2} \quad g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle : \hat{I}(\tau) : \rangle_c}{\langle : \hat{I} : \rangle}$$

Si detectamos un fotón al tiempo  $t$  la  $g^{(2)}(\tau)$  da la probabilidad de que detecten un segundo fotón después de un tiempo  $\tau$ .

Mide las fluctuaciones, la varianza, la incertidumbre. Ordenamiento normal y temporal.

$g^{(2)}(0) = 1$  Poissonian

$g^{(2)}(0) > 1$  Bunched

$g^{(2)}(0) < 1$  Antibunched



# ¿Cómo se miden?

Construyendo un “Periodograma”. La fotocorriente es proporcional a la intensidad  $I(t)$

$$I(t) \rightarrow I_i$$

$$I(t + \tau) \rightarrow I_j$$

$$\langle I(t)I(t + \tau) \rangle \rightarrow \sum_{i=0}^M \sum_{n=0}^N I_i I_{i+n}$$

- Discretizar la serie de tiempo.
- Aplicar el algoritmo moviendo un vector sobre si mismo.
- Cuidado con la normalización pues la longitud es finita.

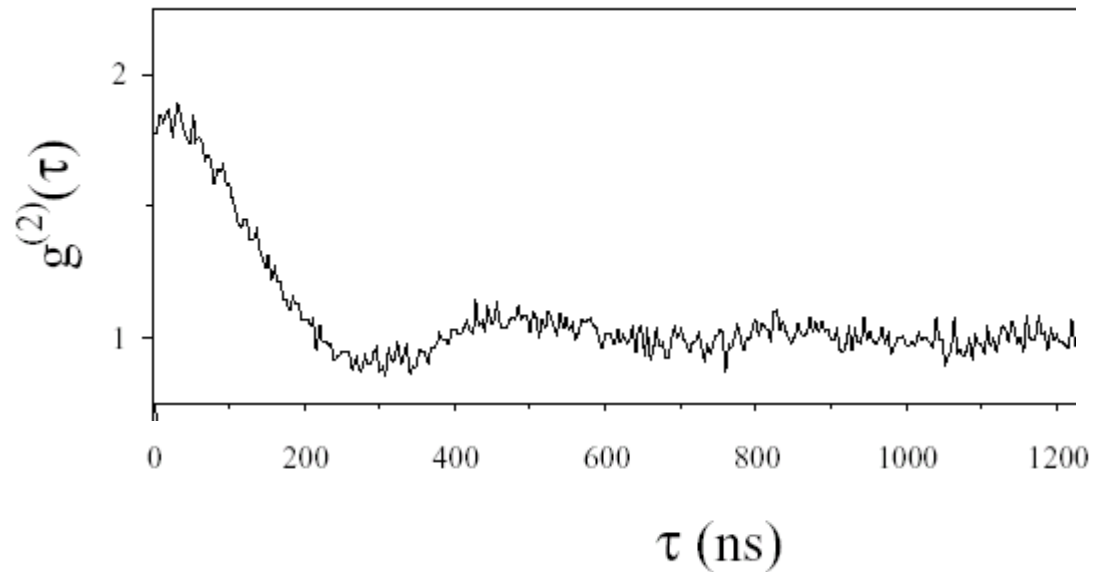
Discretizar:



Multiplicar por sí misma con desplazamiento:



Sumar y promediar:



Otra forma de medir la correlación es con la distribución de tiempos de espera de los fotones.

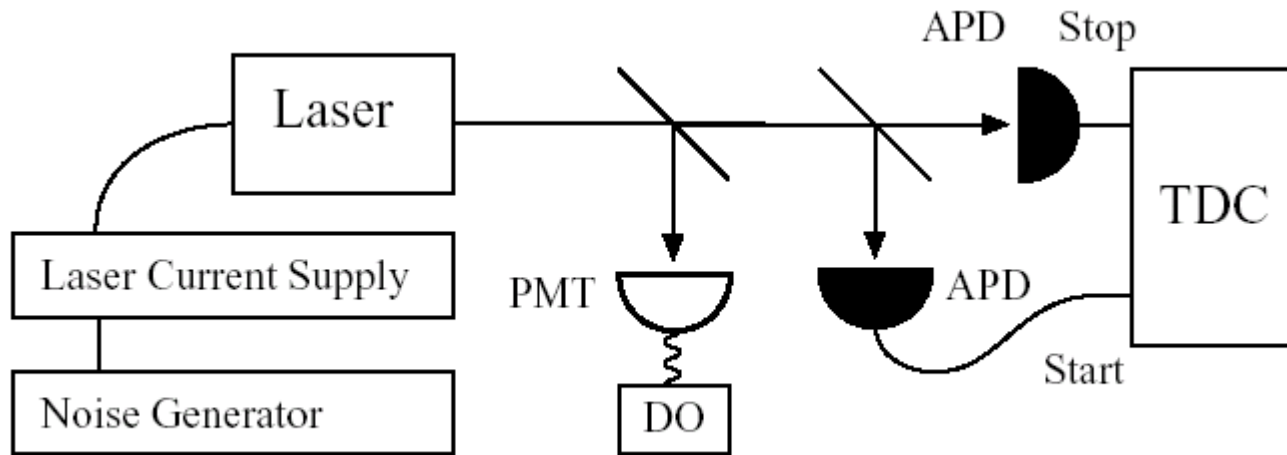
- Medir la separación entre dos pulsos consecutivos (start and stop)
- Histogramar las separaciones
- El resultado es  $g^{(2)}(\tau)$  si las fluctuaciones son escasas.
- Trabajar a intensidades bajas.

Intensidad (fotones)



tiempo

# Ejemplo de cómo medir $g^{(2)}(\tau)$ con la serie de tiempo y la distribución de tiempos de espera.



El osciloscopio digital (**DO**) captura la fotocorriente del tubo fotomultiplicador (**PMT**) y la almacena para después procesar la serie de tiempo.

Correlacionador de fotones con fotodiodos de avalancha (**APD**), para medir la distribución del tiempo de espera. El **TDC** guarda los intervalos para luego hacer el histograma.

Correlaciones en la intensidad de un laser de diodo con una fuente de corriente ruidosa.

$$I(t) = \alpha i(t) \qquad i(t) = i_0 + i_{noise}(t)$$

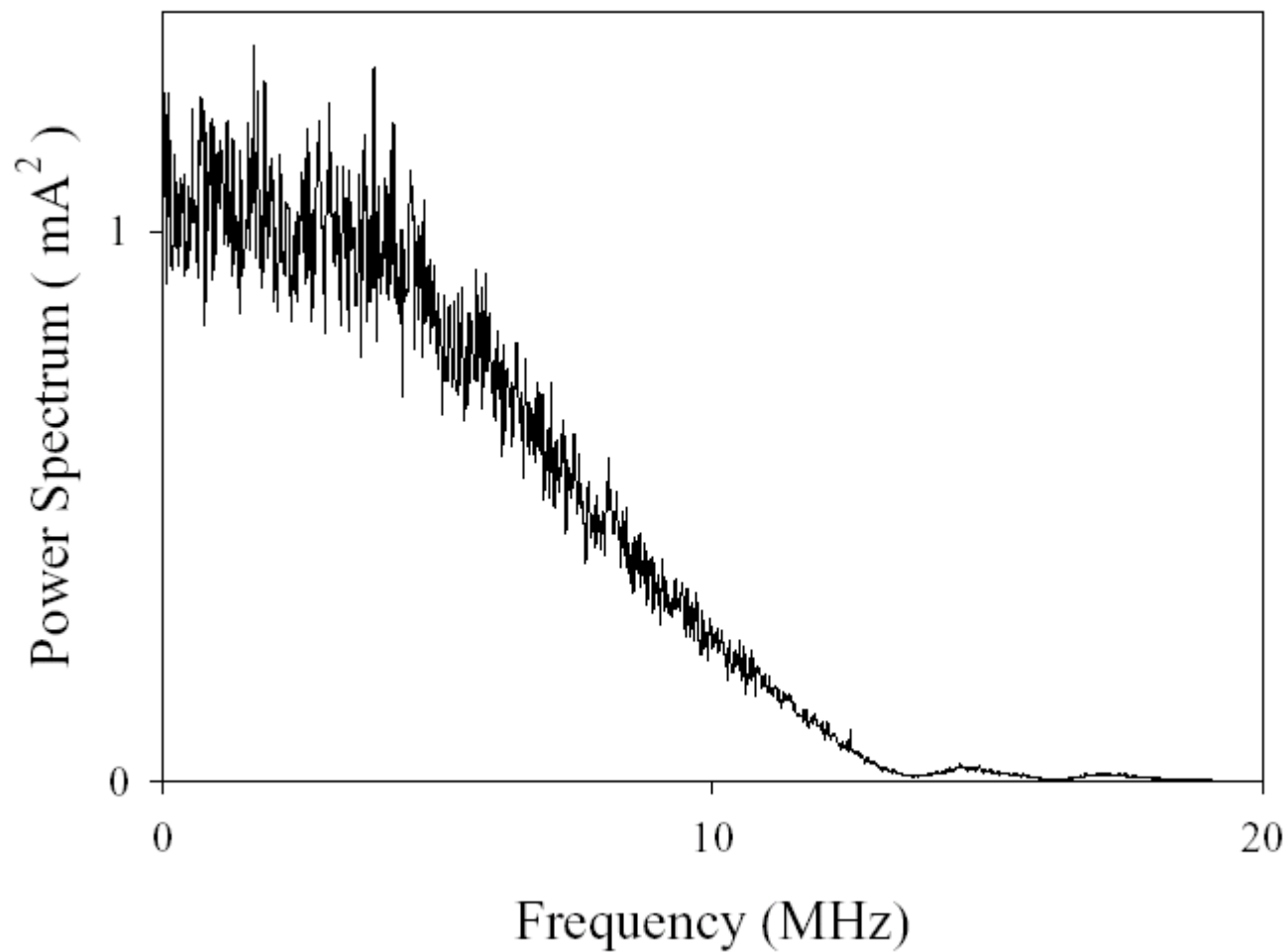
The noise term averages to zero.

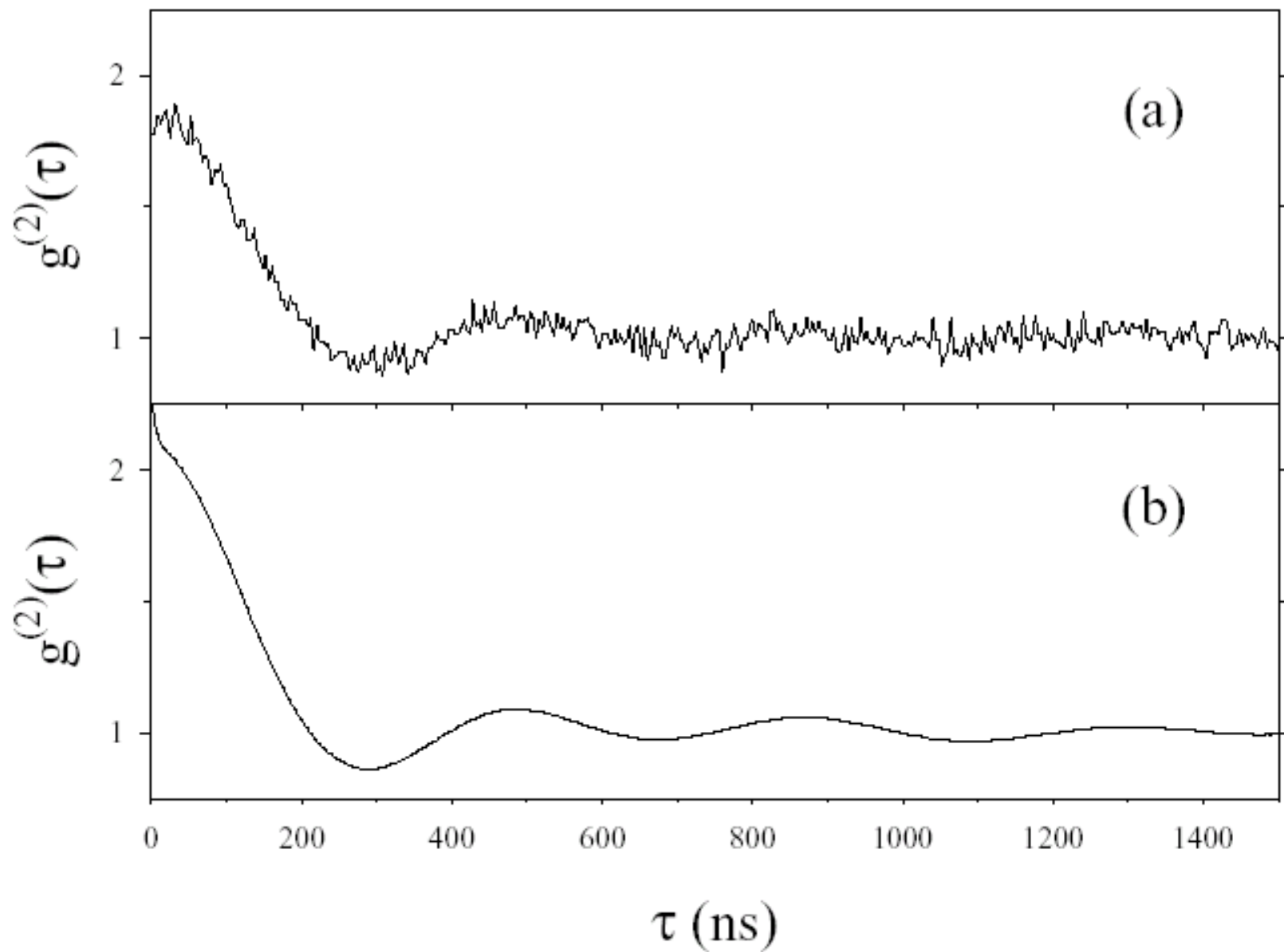
$$g^{(2)}(\tau) = 1 + \frac{\langle i_{noise}(t) i_{noise}(t + \tau) \rangle}{i_0^2}$$

Usamos el teorema Wiener-Khintchine-Kolmogorov para obtener  $G^{(2)}(t)$  de la densidad de potencia espectral del ruido.

$$G(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty F(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega = \langle i_{noise}(t) i_{noise}(t + \tau) \rangle$$

# Espectro de potencia de la fuente de corriente ruidosa.





Compación de  $g^{(2)}(\tau)$  conteo de fotones (a), y serie de tiempo(b).

Las funciones de correlación en óptica cuántica son mediciones condicionales.

- La detección del primer fotón nos da la condición inicial del estado que va a evolucionar en el tiempo.
- Piensen en terminos de probabilidades de Bayes.
- $g^{(1)}(t)$  Interferogramas.
- $g^{(2)}(t)$  Hanbury-Brown and Twiss.
- Puede utilizarse en un proceso de retroalimentación cuántica.



Cálculo con Mecánica Cuántica (time and normal order):

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle T : \hat{I}(t)\hat{I}(t + \tau) : \rangle}{\langle \hat{I}(t) \rangle^2}$$

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \rangle}{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle^2}. \quad \hat{a}^\dagger \hat{a} = \hat{a} \hat{a}^\dagger - 1 \quad \hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$$

$$\sigma^2 = \langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2 \quad g^{(2)}(0) = 1 + \frac{\sigma^2 - \langle \hat{n} \rangle}{\langle \hat{n} \rangle^2}.$$

La varianza  $\sigma^2$  del número de fotones ahora aparece además con la media  $\langle n \rangle$  del número de fotones en  $g^{(2)}(0)$ . Clásicamente no aparecía la media.

El valor de la función de correlación cuántica si puede ser cero, pues la detección cambia el número de fotones en el campo (conmutador)

$$g^{(2)}(0) = 1 + \frac{\sigma^2 - \langle \hat{n} \rangle}{\langle \hat{n} \rangle^2}$$

# Teorema de regresión cuántica

- Las funciones de correlación pueden calcularse usando la ecuación maestra con las condiciones iniciales y de frontera apropiadas (Lax 1968).
- Esto recuerda la propagación de la correlaciones ó is reminiscent of the propagation of the correlations using the wave equation for the electromagnetic (Wolf 1954, 1955)

Gracias