

PLANIMETRIA Y TAQUIMETRIA

4.1. Introducción

Planimetría es un capítulo básico de división de estudio de la Topografía como disciplina, en el cual se estudian los métodos de levantamiento de campo donde sólo interesan los aspectos planimétricos, es decir la proyección ortogonal de la superficie terrestre. Una proyección ortogonal es una proyección horizontal donde las direcciones verticales determinadas por la dirección de la gravedad de todos los puntos de interés del terreno son puestos sobre un plano horizontal. Por ejemplo, cuando el interés es determinar áreas productivas de campo, áreas catastrales (tarea de agrimensores), áreas de cultivo aptas, áreas efectivas de chacras con sus desperdicios, interesan las mensuras planimétricas o sea en proyección ortogonal del terreno. Los trabajos planimétricos en el área de la ingeniería agrícola se integran actualmente con el trabajo de manejo de cartas de mensura rural, más la mensura realizada con GPS navegadores o de mayor precisión o incluso de relevamientos topográficos clásicos con teodolito o estación total, de áreas de cárcavas o de esteros.-

Los ángulos horizontales son una parte medular de la Topografía, porque la determinación de los puntos del terreno se realiza a través de coordenadas polares. O sea, que las coordenadas polares requieren de un ángulo y una distancia para ubicar un punto a partir de uno conocido.

Para medir ángulos se utilizan en Topografía grados sexagesimales y grados centesimales, en nuestro país y en Sudamérica predomina el sistema sexagesimal, y durante el curso sino decimos nada en contrario, nos referimos al sistema sexagesimal. El sistema angular basado en el grado centesimal, se lo utiliza en Europa así como es de norma en Geodesia.

El sistema sexagesimal toma como unidad del arco el grado sexagesimal, o sea el círculo se divide en 360 partes y el grado sexagesimal es $1/360$ parte de la circunferencia a la que pertenece el arco que se trate de medir. El grado a su vez, se divide en 60 minutos, los minutos en 60 segundos. Así un ángulo de 54 grados, 34 minutos y 26 segundos, lo escribiremos $54^{\circ}34'26''$. Este sistema se emplea en las aplicaciones prácticas de la Trigonometría y también generalmente en Topografía.

En el sistema centesimal la unidad de medida de arco es el grado centesimal, que es la $1/400$ parte de la circunferencia a que pertenece el arco que se trata de medir. Así un ángulo de 86 grados, 26 minutos y 84 segundos en el sistema centesimal se escribe como $86^g, 2684$. Este sistema angular se utiliza en la Geodesia por su mayor precisión y por ende también se impulsa en la Topografía, sin embargo en el texto seguiremos utilizando la convención sexagesimal como es de amplia mayoría su uso en América del Sur. Además es notoria y ampliamente predominante el sistema sexagesimal en los instrumentos topográficos existentes en el mercado. Los teodolitos digitales primero y después las

Estaciones Totales admiten la posibilidad de seleccionar el sistema de medida angular preferido, como así también el tipo de ángulo en el caso de ángulos verticales.

Los ángulos horizontales se miden en torno a un eje vertical de manera que efectivamente son ángulos contenidos en un plano horizontal. Las direcciones de las líneas en este plano se miden normalmente, en el sentido de las agujas del reloj o sentido horario. Esta es la llamada convención de los topógrafos, se miden los ángulos en sentido diferente del círculo trigonométrico que es antihorario.

La línea de referencia puede ser el Norte verdadero, el Norte magnético o una arbitraria, norte de usuario. Si la línea de referencia la hacemos coincidir con el Norte verdadero nuestra referencia será el Norte verdadero, si en cambio la hacemos coincidir con la dirección del Norte magnético en un determinado momento, nuestra alineación de referencia será el Norte magnético. La dirección del Norte magnético es la determinada por una aguja imantada libremente suspendida. Generalmente la dirección magnética no es paralela a la del Norte verdadero o geográfico, ello porque los polos magnéticos de la Tierra están en continuo cambio. En la práctica topográfica e ingeniería agrícola no se utiliza la orientación al Norte verdadero y tampoco es exigencia del Catastro Nacional. La otra posibilidad es la orientación al Norte de cuadrícula, es decir orientar el cero del círculo del goniómetro coincidiendo con el cero de la cuadrícula por ejemplo de UTM. Para ello, debemos colocar a unos 100 metros como mínimo del punto estación, un jalón o una estaca con idéntico valor de coordenada Este al que marca un GPSnavegador en el punto estación. De esta forma habremos materializado en el terreno o replanteado, una meridiana de la cuadrícula que nos marca la alineación Sur – Norte de la cuadrícula correspondiente.

Veamos dos conceptos fundamentales, que utilizaremos en los levantamientos topográficos y en la navegación, como son el de acimut y rumbo.

El instrumento típico de medida angular con cierta precisión en Topografía es el teodolito, como sustituto instrumental en algunos casos particulares y a falta de aquel instrumento, puede ser el nivel taquímetro (nivel provisto de círculo graduado), pero con lectura directa de 10' y una precisión de lectura de +/- tres minutos.

Como señalamos al inicio, los ángulos horizontales son una parte medular de la Topografía, porque la determinación de los puntos del terreno se realiza a través de **coordenadas polares**. Las coordenadas polares requieren de un ángulo y una distancia para ubicar un punto a partir de uno conocido. Por tanto es fundamental que se tenga claro la relación de errores equivalentes que debe haber entre los valores angulares y los valores en distancia.

Los mejores levantamientos se obtienen cuando existe compatibilidad entre los errores angulares y errores en las distancias. Es decir, debe haber compatibilidad en los errores, o sea si medimos las distancias por estadimetría no tiene sentido leer valores angulares de 10'' o 20'' porque la precisión de la estadimetría es muy baja en comparación con la precisión angular. O sea que es necesario trabajar en forma consistente y así

seleccionar los instrumentos y los procedimientos necesarios para que los errores angulares sean del mismo orden de error de las distancias.

Así veamos unas relaciones de equivalencia entre ángulos y distancias

Precisión de distancia	Error angular
1 / 300	0° 11' 28''
1 / 1000	0° 03' 26''
1 / 2500	0° 01' 23''
1 / 3600	0° 00' 57''
1 / 7100	0° 00' 29''
1 / 10313	0° 00' 20''
1 / 20626	0° 00' 10''

Por ejemplo, los niveles taquímetro comunes tienen la mínima graduación del círculo en 0° 30' por lo cual un operador tiene un error de apreciación del orden de 20 minutos por lo menos y la $\text{tg } 0^{\circ}20' = 0,00582$ o sea una relación de precisión de 1/172.- Por tanto, el realizar taquimetría por estadimetría con un nivel de este tipo, es una metodología de muy baja precisión planimétrica.

Como sabemos, la precisión normal de la estadimetría es de 1/300, de donde $\Rightarrow \text{arctg}(1/300) = 0,19099$, que en términos del sistema sexagesimal es 0° 11' 28'' o sea se corresponde con un error angular de 0° 11' ($\text{arctg}0,00197$); por ello los buenos niveles taquimétricos de ingeniería vienen con lectura directa de ángulos horizontales a 0° 10'.- Estos niveles con círculo graduado de lectura directa de 10 minutos y apreciación a 3 minutos (normalmente se considera que el ojo humano aprecia un 25 a 30% de la mínima división), son los de mayor precio del mercado de instrumentos de nivelación geométrica.-

Otro ejemplo para terminar de comprender este asunto de distancias y ángulos es el siguiente relativo a un replanteo. Un replanteo, es la determinación en el terreno de la obra en ejecución, de puntos de referencia para la correcta ejecución de un proyecto de obra. Supongamos que un técnico posee una estación total de 10 segundos de apreciación, y le exigen que un replanteo de una construcción debe tener un error ≤ 1 cm en la determinación de los puntos. Si las distancias polares de replanteo son en gran medida del orden de los 150 metros, la relación $0,01 \text{ m} / 150 \text{ m} = 0,000067 \text{ m/m} \rightarrow \text{arctg } 0,000067 \rightarrow 0^{\circ} 00' 14''$.- Por lo cual la estación total debe tener una apreciación angular mínima de 14 segundos de lo contrario no realizará un buen trabajo y será rechazado en la obra. En definitiva este asunto es de suma importancia o la base de la cuestión de la precisión en la medida de un levantamiento o en la medida para el replanteo de un punto por coordenadas polares. No obstante hay también errores en el centrado del instrumento sobre un punto

estación, errores en la visualización del punto y en la lectura del círculo que influyen en la precisión final de la operativa.- Por todo ello, se debería seleccionar para este trabajo una estación total de 10'' de apreciación angular como mínimo.-

Esta descripción es un ejemplo de replanteo en la construcción civil, en la cual alcanza la precisión de una estación total de obras, las cuales son las más económicas, con apreciaciones de 10'' a 7'' las más modernas. El ejemplo manejado, se refería a una situación en que el autor tenía que replantear la instalación de unos grandes bulones (> Ø35 mm) que iban a soportar el enganche de una gran estructura de acero para un techado de un galpón de una hectárea de superficie, por lo cual la estación total de 10'' de apreciación está en el límite para poder realizar el trabajo satisfactoriamente, o de lo contrario debería manejarse el replanteo desde distancias menores a 150 metros.-

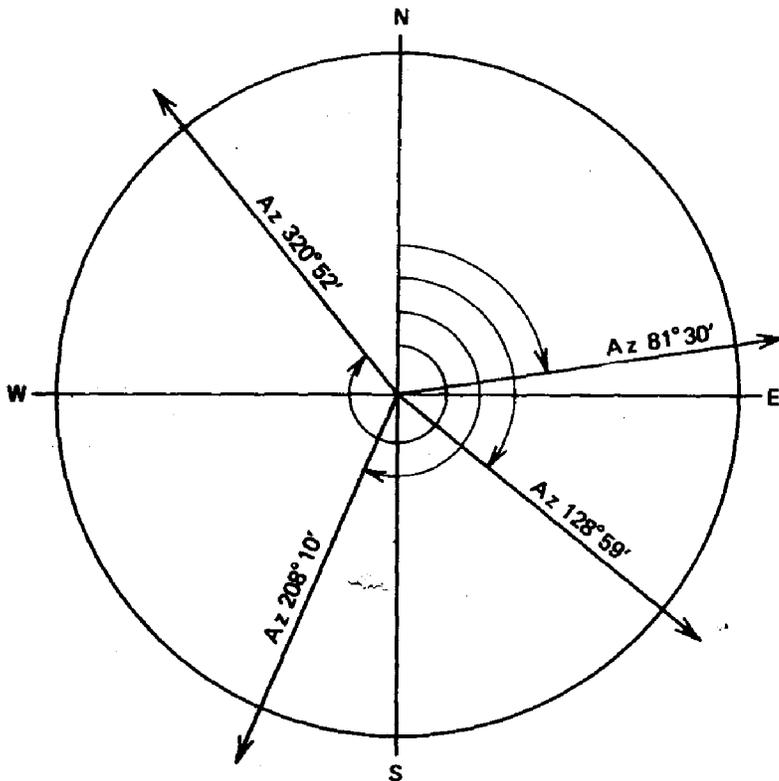
4.2. Azimut y Rumbo.

Este concepto en la práctica de la navegación aérea o marítima a veces se confunde y se toma en forma equivalente, sin embargo en topografía son bien definidos y diferentes.

En efecto, el **azimut** de una alineación es el ángulo horizontal medido a derechas (en el sentido de las agujas del reloj) entre la meridiana de referencia y la alineación. La magnitud de los azimutes (acimutes) puede oscilar entre 0° y 360°. Según sea la meridiana Norte verdadero, magnético, arbitrario, o de cuadrícula existirán azimutes verdaderos, magnéticos, arbitrarios o de cuadrícula.

La figura abajo es bien aclaratoria con respecto de la definición establecida anteriormente. Sin embargo vale la pena una aclaración, en Geodesia y en otros países se habla también de acimutes con respecto al Sur.

En nuestro texto y en esta zona del planeta Tierra, en Topografía, cuando hablamos de azimutes, nos referimos a **ángulos a derechas**, a partir de una **meridiana de referencia** que es el **Norte** verdadero, magnético o arbitrario, cuyo valor en sistema sexagesimal puede oscilar entre **0° y 360°**.-



Direcciones por azimutes en el sistema de grados sexagesimales.

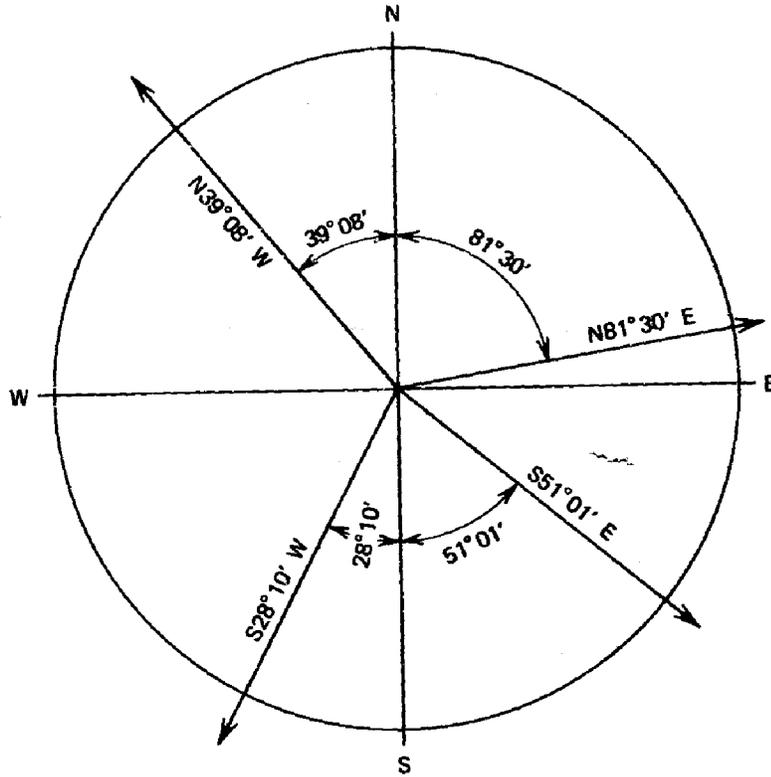
El azimut puede leerse directamente en el círculo horizontal de un teodolito después de haber orientado convenientemente el instrumento. Esto se hace visando a lo largo de una línea de azimut conocido, con dicho valor angular marcado en el círculo, y girando luego hacia la dirección deseada.

Los azimut pueden ser directos o inversos, pero también se utiliza la denominación al frente y atrás (ver 4.4).-

Por otra parte, el **rumbo** de una alineación, también es un ángulo horizontal, que se mide con relación al Norte o al Sur en dirección W o E, cuyo valor oscila entre 0° y 90° .

En la figura abajo, tenemos un ejemplo de las mismas alineaciones anteriores, pero donde se expresan los ángulos por rumbos.

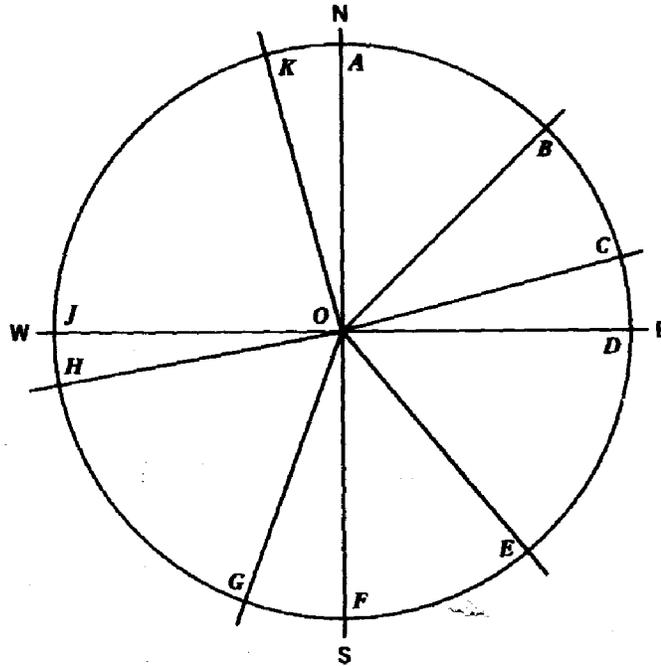
El cuadrante en el que se encuentra se indica comúnmente por medio de la letra N o S precediendo al valor numérico del ángulo, y la letra E o la W, a continuación de dicho valor. A los efectos del **valor** del rumbo, el N y el S tiene valor 0° , en cambio el E y W tienen valor 90° . O sea que los valores de rumbo, *crecen desde los polos hacia el ecuador*. Veamos los ejemplos abajo para terminar de comprender el concepto de rumbo.



Direcciones por rumbos en el sistema de grados sexagesimales.

Es decir, que el rumbo $N39^{\circ}08'W$ resulta de restar $360^{\circ} - 320^{\circ}52'$, así, el rumbo $S28^{\circ}10'W$ resulta de restar $208^{\circ}10' - 180^{\circ}$; así, el rumbo $S51^{\circ}01'E$ resulta de restar $180^{\circ} - 128^{\circ}59'$ y finalmente el rumbo en el primer cuadrante resulta idéntico al azimut $81^{\circ}30'$ en el cuadrante NE.-

Línea	Azimut	Rumbo
OA	0	Norte
OB	45	N 45° E
OC	75	N 75° E
OD	90	Este
OE	140	S 40° E
OF	180	Sur
OG	200	S 20° W
OH	260	S 80° W
OJ	270	Oeste
OK	345	N 15° W
OA	360	Norte



Relaciones entre las direcciones en los sistemas de rumbos y azimutes.

La figura de arriba le ayudará como ejercicio a entender las reglas aplicadas anteriormente y la forma en definitiva de convertir azimutes en rumbos o viceversa.

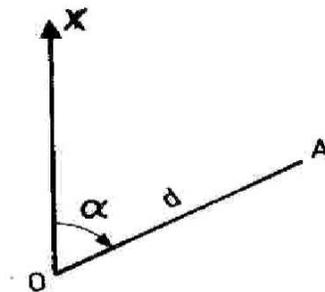
- Reglas .
- Rumbo SE = Azimut
 - Rumbos SE = $180^\circ - \text{Azimut}$
 - Rumbos SW = $\text{Azimut} - 180^\circ$
 - Rumbos NW = $360^\circ - \text{Azimut}$

En ciertos países, los topógrafos tradicionalmente trabajan con rumbos pero es mucho más sencillo trabajar con azimutes. Para el trabajo topográfico nosotros impulsamos la utilización de azimutes, concepto que no necesita reglas y comprenderán que esto es mucho más sencillo a la hora de los cálculos de coordenadas polares a cartesianas, porque los valores trigonométricos azimutales nos proporcionan automáticamente los signos algebraicos y realizaremos sumas algebraicas de números reales.

Analizados estos conceptos, volvamos a la introducción a la Topografía, y recordemos que tradicionalmente (¡ por más de dos milenios ¡) hasta la aparición del GPS¹, la rutina del trabajo de campo topográfico fue el levantamiento de coordenadas polares de los puntos de interés. Vamos a visualizar la conveniencia de operar con azimut como valor angular para ahorrarnos trabajo intelectual de gabinete y tiempo, para obtener coordenadas cartesianas de los puntos de interés.

¹ GPS Sistema de Posicionamiento Global por medio de satélites implementado por el Dpto.de Defensa de EE.UU en la década de los 90.-

Señalábamos que, las **coordenadas polares** de un punto son, el valor angular α y la magnitud d o distancia entre el polo y el punto. O sea α y d constituyen las coordenadas polares del punto A, llamándose polo u origen de las coordenadas el centro O y la dirección de referencia, eje polar. Obsérvese la diferencia entre la definición en Matemáticas² de las polares de un punto y la convención de los topógrafos. En efecto, en Topografía los ángulos se miden a derechas y a partir de la meridiana de referencia, Norte verdadero, magnético, arbitrario o de la cuadrícula. El norte de la cuadrícula es por ejemplo, cuando en el campo determinamos dos puntos, el estación y uno auxiliar a por lo menos 150 metros de la estación mediante un simple GPS en UTM o Gauss. Es decir, determinamos el valor Este de la estación y nos trasladamos en dirección Norte buscando mantener en el GPS la lectura Este de la estación, lo que estamos haciendo es caminar aproximadamente por la misma meridiana en dirección al Norte y cuando estemos a suficiente distancia determinamos exactamente el punto, esta será una orientación al Norte de la cuadrícula correspondiente.- Por tanto, de acuerdo con esto, estos ángulos α se llaman Azimutes, geográfico, magnéticos, arbitrarios o de cuadrícula, según la orientación sea el Norte verdadero, magnético, arbitrario o de la cuadrícula, respectivamente.



Coordenada Polar en convención de Topografía

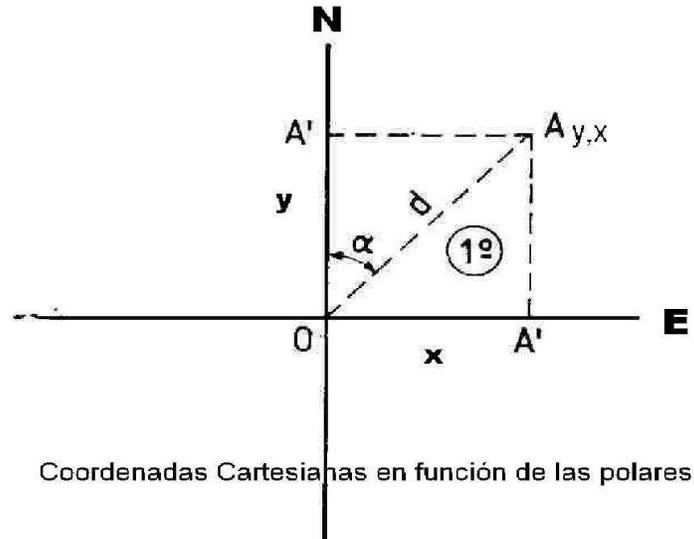
Si tenemos un sistema de dos ejes perpendiculares en un plano, cualquier punto A del mismo queda determinado por sus proyecciones X_A e Y_A sobre los ejes, siendo X_A la abcisa e Y_A la ordenada, siendo estos números reales que resultan de las operaciones

$$X_A = d \times \sin \alpha \quad \Rightarrow \text{(E) } X_A = d \times \sin \text{Az}$$

$$Y_A = d \times \cos \alpha \quad \Rightarrow \text{(N) } Y_A = d \times \cos \text{Az}$$

De acuerdo con la figura que se muestra más abajo

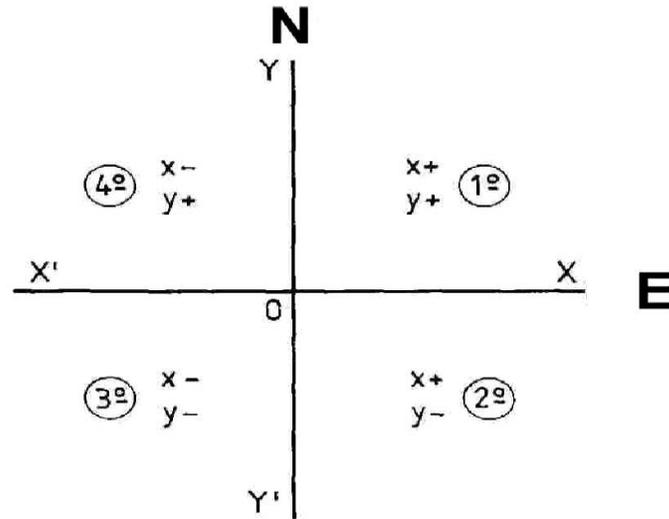
² Ver apuntes de **Elementos de Trigonometría** (www.fagro.edu.uy/suelos/topografia agrícola/)



Debe tener presente, que la distancia d es la distancia reducida o simplemente distancia entre dos puntos, lo cual es equivalente a decir distancia entre puntos proyectados ortogonalmente.

El origen de los ejes O divide ambos ejes en dos segmentos, en el de las X se considera positivo el segmento de la derecha y negativo el de la izquierda. En el de las Y se toma como positivo el de la parte superior y negativo el de la inferior.

Estas fórmulas, deducidas para un punto A situado en el primer cuadrante, son generales, siempre que se cuenten los ángulos a partir del semieje positivo de las X y en el sentido de las agujas del reloj, tal cual definimos Azimutes en nuestro curso. Es decir, adoptamos Azimutes a partir del Norte y a derechas

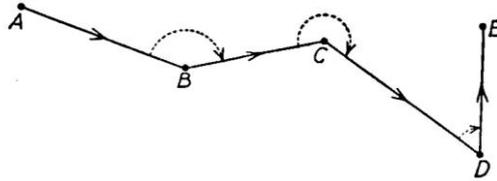


Signo de las Coordenadas Rectangulares en Topografía Agrícola

Por tanto como pueden corroborar los lectores, al tener el ángulo azimutal como valor angular de la polar, de acuerdo con la convención de la topografía, el signo de las coordenadas cartesianas es inmediato y concordante con el signo de las líneas trigonométricas.

4.3. Ángulos a derechas

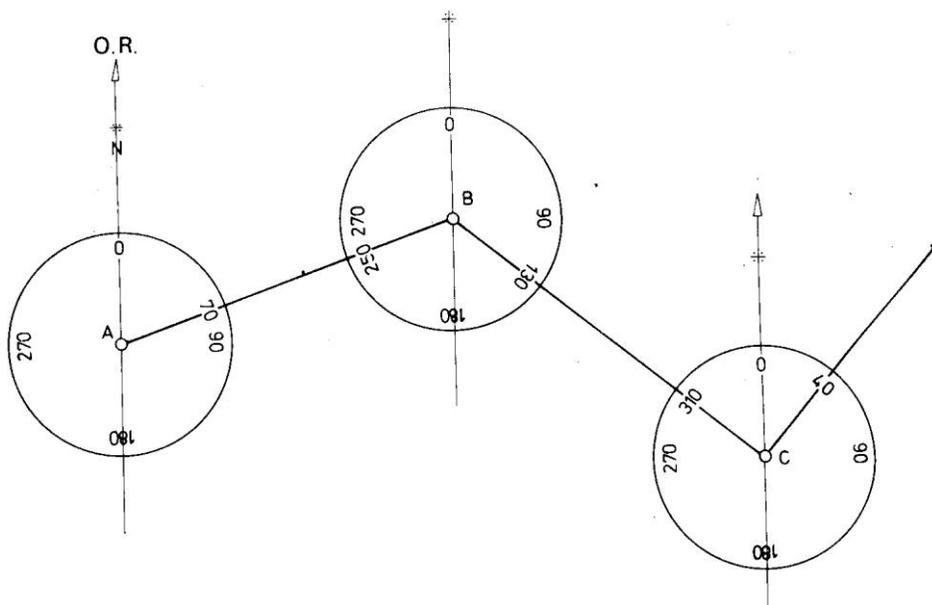
Si los ángulos entre dos alineaciones son determinados por medidas en sentido de las agujas del reloj, desde la alineación precedente a la siguiente, tal como se muestra en la figura abajo, los ángulos se llaman a derechas.



Esta es la forma usual de determinar los ángulos al realizar poligonales de relevamiento, que posteriormente en el gabinete se convierten en azimutes o actualmente con instrumental adecuado, el software lo realiza para el topógrafo en tiempo real en el campo.-

4.4. Azimutes al frente y atrás.

El azimut de la línea AB de acuerdo con la figura es de 70° con relación a una orientación O.R. Ahora obviamente el azimut de la línea BA o sea lo que se llama azimut atrás no es igual, y en este caso el azimut atrás de AB $Az_{BA} = 70^\circ + 180^\circ = 250^\circ$. El azimut AB se llama azimut al frente, porque el operador está recorriendo las estaciones A, B, C en ese sentido, por tanto Az_{AB} y Az_{BC} serán azimut al frente de las alineaciones AB y BC.-



Por lo tanto, se desprende de la figura la siguiente regla:

El azimut atrás de una alineación = azimut al frente de la misma $\pm 180^\circ$ según el azimut al frente haya sido $< 0 >$ a 180° .

O sea $AZ_{BA} = AZ_{AB} + 180^\circ$ si $AZ_{AB} < 180^\circ$

$AZ_{BA} = AZ_{AB} - 180^\circ$ si $AZ_{AB} > 180^\circ$

4.5. Azimut magnético y arbitrario, propagación de meridiana.

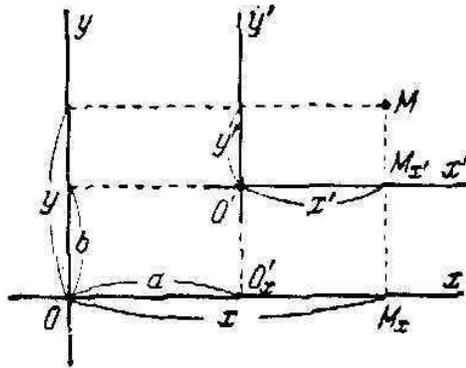
Las brújulas tienen una aguja imantada que al girar libremente sobre un pivote indicará el meridiano magnético, esto es, señalará hacia el norte magnético. El problema es que la meridiana magnética no es fija sino variable. El valor de la meridiana magnética cambia constantemente a través del tiempo para un mismo sitio y también entre dos sitios diferentes en una misma fecha. O sea las variaciones de la declinación son anuales y diarias, esto se debe a que los polos magnéticos de la Tierra están constantemente cambiando de posición en relación con los polos norte y sur verdaderos. La variación anual de la declinación magnética es en media de 11 minutos por año. En resumen, la declinación magnética es la divergencia entre los meridianos magnéticos y verdadero y puede ser al este o al oeste dependiendo de la situación geográfica de cada lugar: anualmente varía en unos 11 minutos y diariamente oscila alrededor de unos 8 minutos. Por supuesto descontamos que un observador no está cerca de líneas de alta tensión por ejemplo, donde existe una gran atracción local que puede alterar significativamente el magnetismo.

Al iniciar un levantamiento topográfico debemos orientar el 0° del instrumento goniómetro (teodolito/Estación Total) a la meridiana magnética o a una meridiana arbitraria. Posteriormente en el gabinete si el operador determinó las coordenadas planas UTM con un GPS, por ejemplo de un par de esquineros, podremos acomodar el relevamiento de orientación arbitraria al Norte de cuadrícula UTM.- En pequeños trabajos o por razones de tiempo, se puede iniciar con referencia a un punto arbitrario. Los puntos de referencia arbitrarios pueden ser torres de iglesia o eléctricas, pararrayos de establecimientos, torres de alta tensión o estacas bien referenciadas clavadas en el terreno. Los azimutes del levantamiento se miden en el sentido de las agujas del reloj, desde la dirección de referencia hasta la de cualquier punto o estación de interés.

Cuando las posibilidades de acción desde una estación de relevamiento se agotan, por razones de obstáculos visuales o distancia, es necesario cambiar de estación el goniómetro, entonces para mantener el sistema de coordenadas debemos ubicar en la siguiente estación del aparato un sistema de referencia exactamente paralelo al inicial o anterior, para ello debemos propagar la meridiana de referencia inicial. Entonces al propagar la meridiana inicial, en la nueva estación seguiremos levantando puntos de interés midiendo azimutes. Esta es la técnica más sencilla para procesar posteriormente las coordenadas polares y transformarlas en coordenadas cartesianas para proceder a "picar" los puntos (introducir las coordenadas en el sistema de representación) en un CAD y tener la representación para visualizar en el monitor o imprimirla en un documento.

La propagación de la meridiana inicial se logra estacionando en el punto estación siguiente , el azimut atrás bisectando la estación anterior, por lo cual la línea 0° - 180° del goniómetro

en la nueva estación estará paralela a la meridiana inicial o anterior. Lo realizado se esquematiza en la figura siguiente, la meridiana magnética o arbitraria inicial es Oy, luego al propagar la meridiana a la estación O' tendremos una nueva meridiana propagada O'y' mediante el artificio de bisectar a O con el azimut atrás.



Por lo tanto la nueva estación tiene un sistema coordenado paralelo que está desplazado al N y al E, o hacia y o x en las magnitudes b y a respectivamente.

De esta forma si propagamos la meridiana inicial, en la nueva estación estaremos midiendo ángulos horizontales que son azimutes.

*Es decir el **procedimiento de campo** para relevar polares de puntos de interés cuya valor angular sea un **azimut**, es proceder a propagar la meridiana inicial, que es la situación que se observa en la figura que utilizamos para explicar Az al frente y Az atrás.*

El aparato se coloca en A con el círculo a izquierdas y con el círculo horizontal en 0° se observa el objeto de referencia (estaca, jalón, etc). Cuando se suelta el plato superior y se da vista a la estación B, la lectura del círculo horizontal $70^{\circ}00'00''$ será el valor azimutal al frente de la línea AB.-

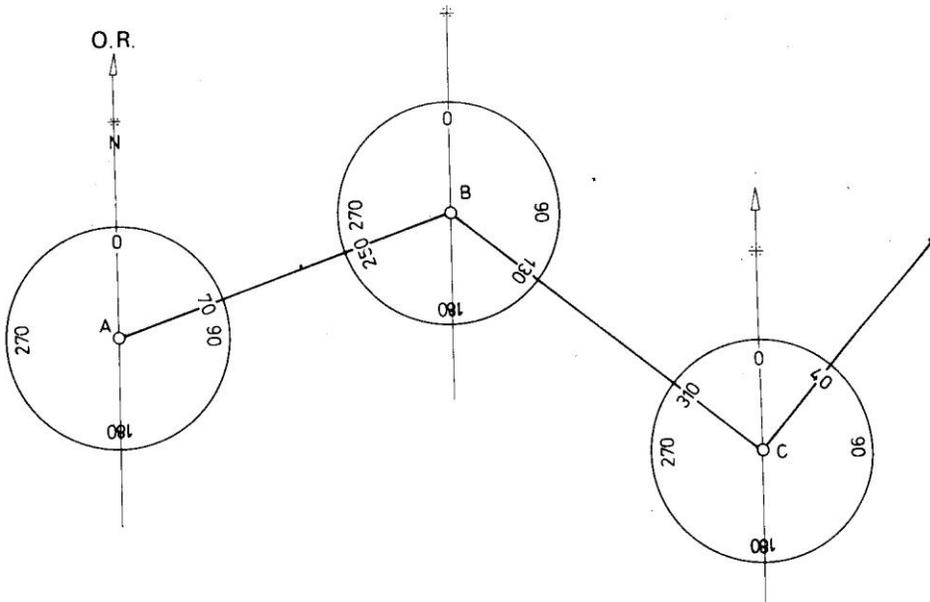
Se traslada el aparato a la estación B y el azimut del lado BC se obtiene propagando la meridiana original o inicial.

Para ello, lo primero es calcular el azimut atrás de la alineación anterior o sea AB,

Azimut atrás de AB $\Rightarrow AZ_{BA} = 70^{\circ} + 180^{\circ} = 250^{\circ}00'00''$

Se debe fijar este valor angular en el círculo horizontal del instrumento y con esa lectura se debe visar la estación A, es decir, la graduación 250° debe quedar señalando la estación A que es el azimut correcto, con el círculo vertical a izquierdas. Por lo tanto en estas condiciones la línea 0° - 180° del círculo horizontal será paralela a la línea del círculo cuando el operador estaba en la estación A y habremos propagado la meridiana inicial, por lo cual

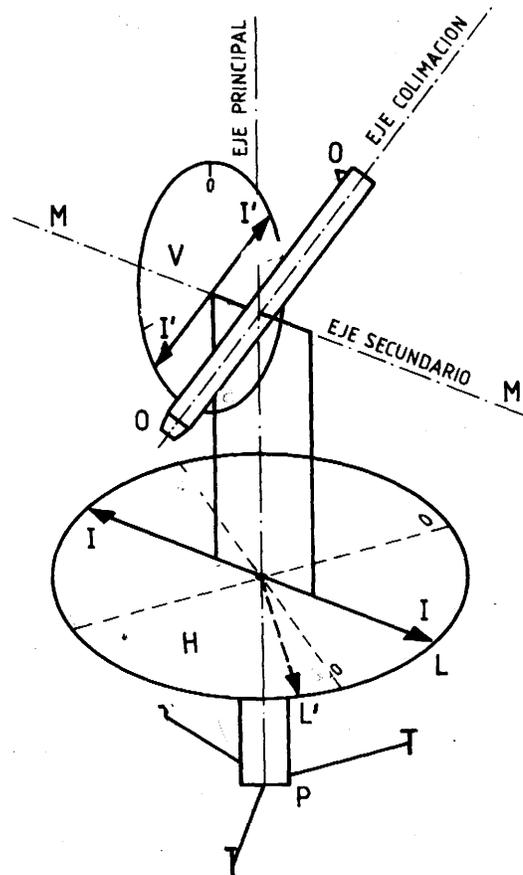
al visar la estación C estaremos visualizando en el círculo horizontal del aparato el valor 130° , que es el Azimut de la línea BC.-



Por tanto, si el topógrafo desea leer en cada una de las estaciones del aparato directamente azimutes de los diferentes puntos, debe necesariamente propagar la meridiana inicial. Esta meridiana inicial puede ser arbitraria, magnética o también la de la cuadrícula UTM.-

4.6. El Teodolito

El teodolito es el instrumento universal de medida en Topografía, es un instrumento para medir ángulos y según el modelo de teodolito se puede leer ángulos de hasta 1 segundo. Con el teodolito se pueden medir o replantear ángulos horizontales, verticales, direcciones, diferencias de nivel, distancias y replantear o realizar prolongaciones de líneas. Es el instrumento que da todas las respuestas a los problemas topográficos que definen los objetivos de la disciplina. Los teodolitos modernos difieren sensiblemente de los antiguos, no sólo porque hoy en día son electrónicos y más sencilla su lectura u obtención de información, pero más allá de las diferencias “estéticas” básicamente el instrumento consiste en un par de círculos, uno horizontal y otro vertical, con la disposición mostrada en la Figura de abajo.



Esquema Básico de un Teodolito

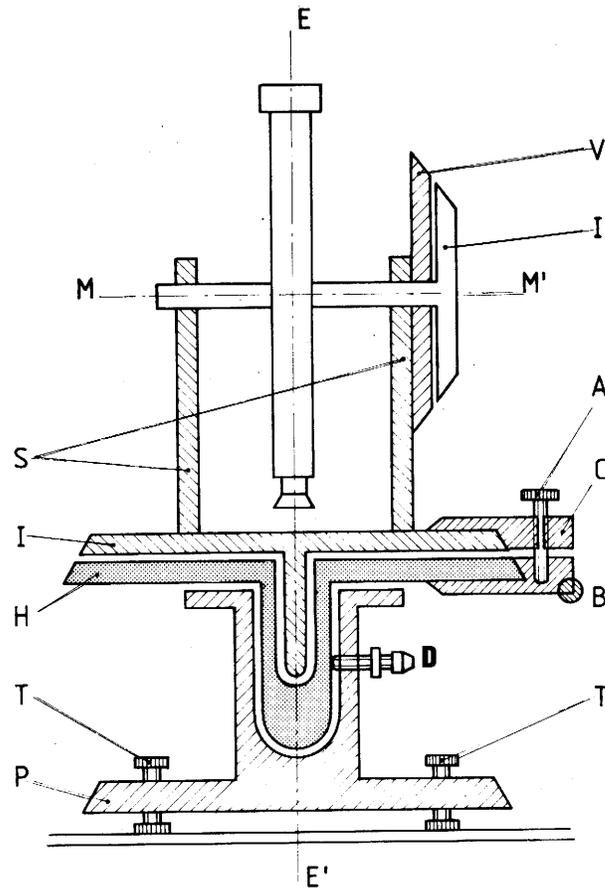
Los dos círculos graduados V y H reciben el nombre de limbos, vertical y horizontal respectivamente. El anteojo que define el eje de colimación, pivota sobre el eje secundario MM' horizontal y que arrastra en su movimiento de basculación al círculo vertical V. En

resumen, un goniómetro completo se reduce esquemáticamente a los tres ejes, principal, secundario y de colimación, que deben formar ángulos rectos entre sí, para que el instrumento proporcione información correcta.

Para poner en estación un teodolito, debemos hacer coincidir su eje principal con la vertical que pasa por el punto estación, o punto donde queremos ubicar el goniómetro para medir ángulos. Dicha verticalización se realiza con una plomada común, con la plomada óptica o con una plomada infrarroja visible, de acuerdo con la tecnología del siglo XXI. En la posición normal o posición I el círculo vertical está a izquierdas del observador. El teodolito o la estación total siempre se posiciona en un punto de interés que generalmente está materializado en el terreno, mediante una estaca de madera o de hierro. En la ingeniería agrícola esta materialización de un punto se define con una estaca de madera, con una sección de unos 5 x 5 centímetros (estaca hecha con un pique de alambrado). En mensuras urbanas y sub-urbanas esta definición debe estar limitada a una sección de \varnothing 12-10 mm como máximo, que por otra parte en caminos de balasto será la forma natural de materialización de puntos de estación del teodolito. La única situación en la cual la posición del goniómetro (teodolito o nivel taquímetro) no queda materializada sea tal vez, en la marcada de tajamares o en otras situaciones que el levantamiento se realiza desde una única estación.

En el esquema detallado del teodolito, abajo, los diversos elementos se agrupan en tres cuerpos, de forma que cada uno de ellos sirve de soporte al siguiente. El inferior es la plataforma P con sus tornillos de nivelación T ; la columna vertical de la plataforma es hueca y en ella se aloja el segundo cuerpo solidario del círculo graduado o limbo **acimutal H** y este cuerpo, a su vez aloja al eje de la **alidada** solidario del plato de índice I sobre el que se levantan los soportes SS en los que se apoya el eje MM'. En uno de los extremos de este eje MM' y solidario del mismo va la placa de índice I' correspondiente al limbo vertical V .- La placa I y el limbo H pueden hacerse solidarios mediante la mordaza C que lleva un tornillo de presión A ; el tornillo de coincidencia B permite un movimiento relativo, lento y limitado de la placa I respecto del limbo, llamado movimiento fino de la alidada.

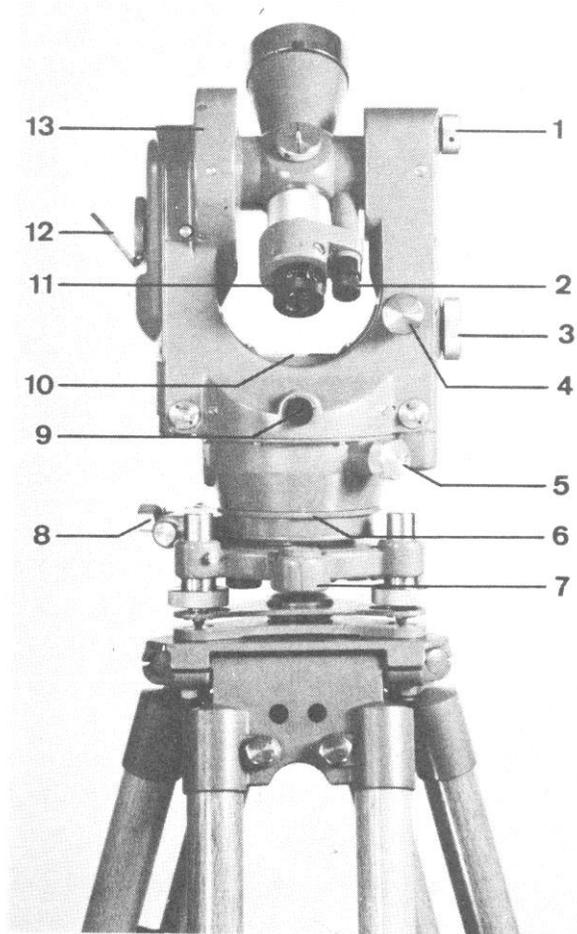
Esquema Detallado del Teodolito



Esquema de un teodolito repetidor.

Cuando el tornillo de presión **A** está apretado y ambas placas son solidarias, todo el aparato puede girar sin que los índices se desplacen respecto al limbo, a este giro se le llama movimiento general del aparato. Ahora bien existe un tornillo de presión **D** que cuando se fija el movimiento con este tornillo, y se suelta la mordaza **C**, el limbo **H** permanece fijo y la alidada puede girar para determinar el valor angular de una dirección. Este esquema corresponde exactamente a lo que se llama un teodolito repetidor. En un teodolito repetidor, es posible arrastrar un determinado valor angular hacia cualquier punto fijado en el terreno desplazando la alidada.

1. Tornillo de sujeción vertical
2. Ocular del microscopio de lecturas
3. Botón del micrómetro óptico
4. Tornillo de coincidencia vertical (tornillo tangencial)
5. Tornillo de sujeción horizontal
6. Anillo moleteado para cambiar la lectura del círculo horizontal
7. Nivel esférico
8. Tornillo de sujeción horizontal
9. Ocular de la plomada óptica
10. Nivel de burbuja horizontal
11. Ocular del telescopio
12. Espejo de iluminación de los círculos
13. Botón para regular la iluminación de la retícula

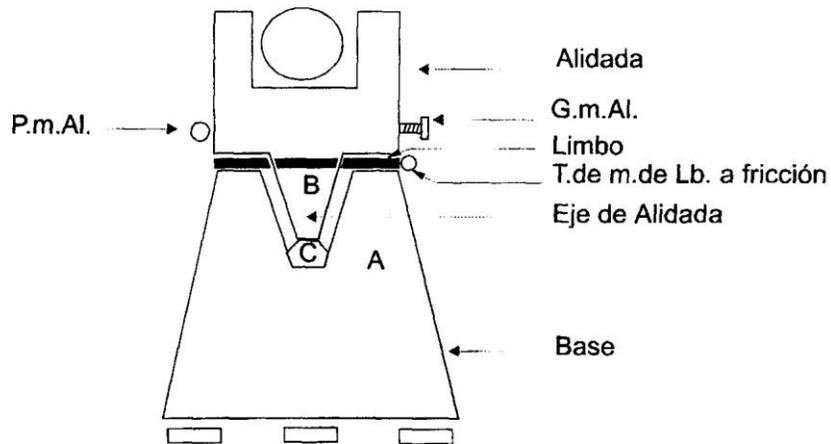


Descripción de un teodolito repetidor clásico WILD T1

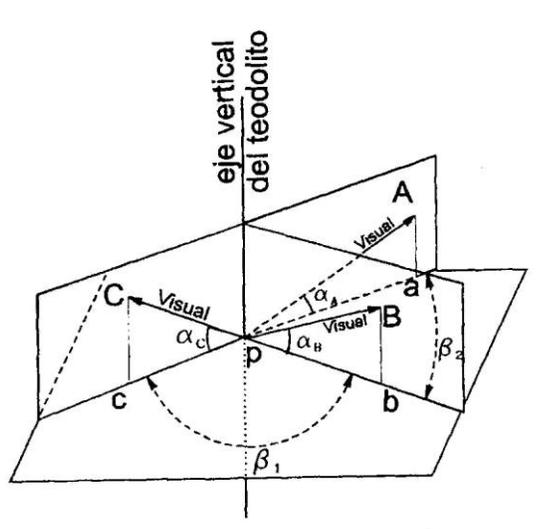
En contraposición, están los teodolitos reiteradores o direccionales, estos se caracterizan porque no es posible en estos hacer solidarios los platos H e I, y moverlos conjuntamente a la dirección deseada. O sea no es posible colocar un valor angular, azimutal determinado y colocarlo en la dirección deseada. Es decir, el teodolito direccional moviliza el círculo H en forma independiente mediante una rueda tapada con una caperuza o algún mecanismo similar (ver Kern DKM1).

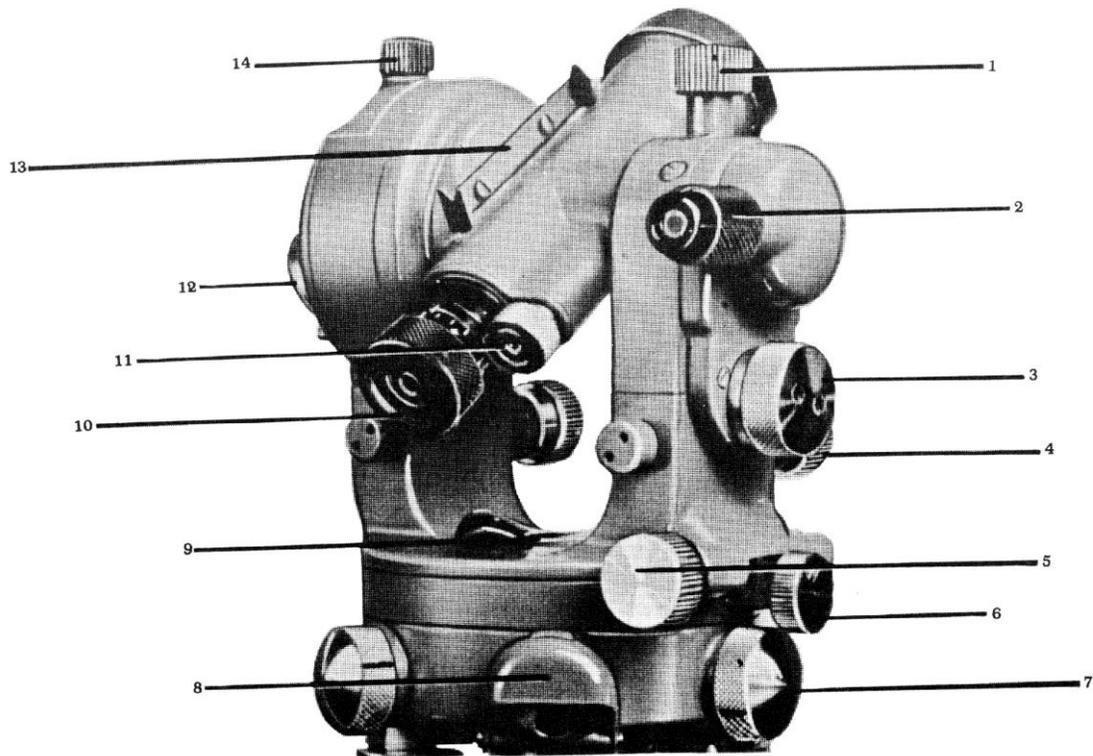
Teodolitos Reiteradores

(Representación esquemática)



En realidad el teodolito *reiterador* es más sencillo de comprender su funcionamiento para el recién iniciado en la topografía. Por otra parte los instrumentos de más alta precisión son en general del tipo reiteradores, que también son llamados *direccionales*.





1. Tornillo de sujeción vertical
2. Ocular del microscopio de lecturas
3. Botón del micrómetro óptico
4. Tornillo de coincidencia vertical (tornillo tangencial)
5. Tornillo de coincidencia horizontal (tornillo tangencial)
6. Tornillo de sujeción horizontal
7. Tornillo nivelante

8. Dispositivo para poner en origen el círculo horizontal, con cubierta protectora
9. Nivel de burbuja horizontal
10. Ocular del telescopio
11. Anillo de ajuste del enfoque
12. Espejo y conexión eléctrica para iluminación
13. Mira
14. Prisma para observar el nivel del círculo vertical

Teodolito Kern DKM1

Descripción de un teodolito direccional clásico (compacto), la caperuza 8 protege el tornillo que hace mover el círculo horizontal

Tornillos de presión y coincidencia.

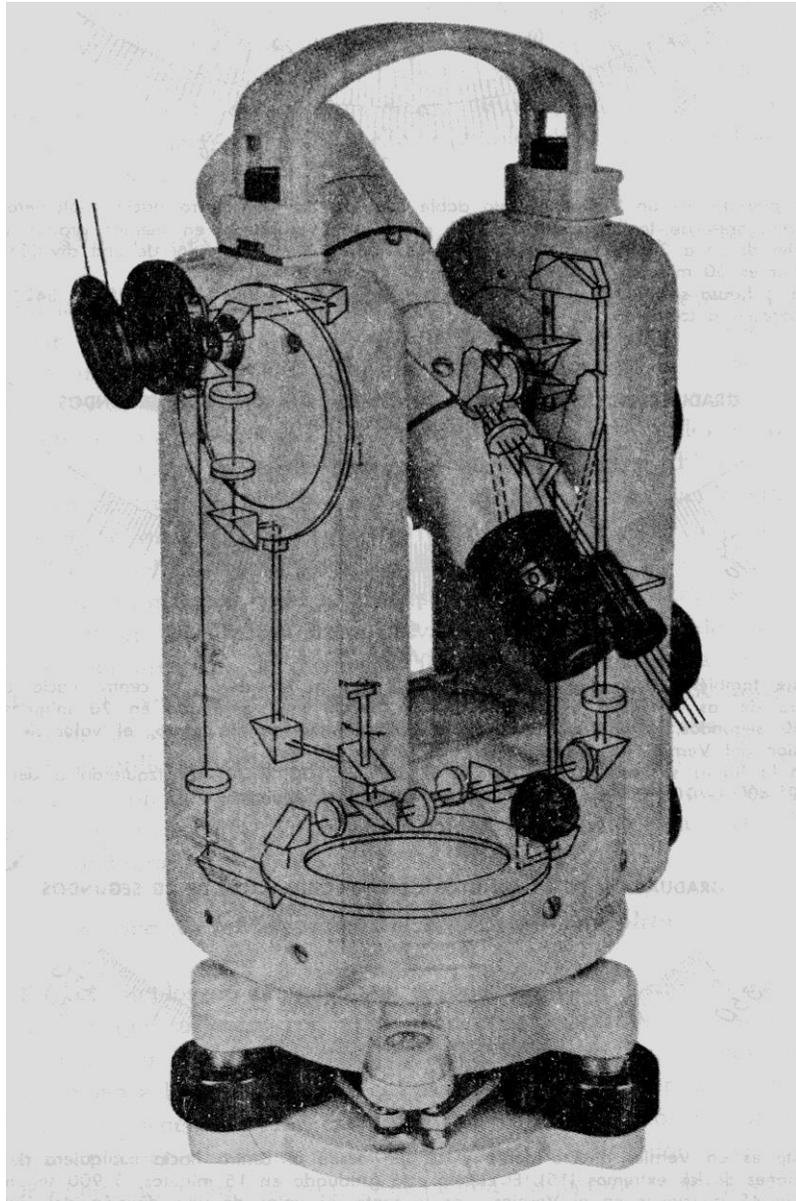
Los teodolitos constan de elementos móviles, giratorios alrededor de ejes y otros elementos fijos. Los tornillos de presión o de grandes movimientos tienen por objeto inmovilizar los primeros con respecto a los segundos. Si suelto el tornillo de presión, el elemento móvil puede girar libremente y una vez apretado, si aún es preciso imprimirle movimientos suaves y lentos hasta hacerle ocupar una posición deseada se conseguirá con los tornillos de coincidencia. Estos tornillos se llaman también de movimiento fino o lento. En los teodolitos unos y otros pueden ocupar diversas posiciones según los fabricantes, pero en general: los tornillos de presión se encuentran en sentido perpendicular al eje del elemento móvil, y los tornillos de coincidencia se encuentran en forma tangencial al elemento móvil. -

Ing:Agr. (M.Sc.) Michel Koolhaas
Ex-Prof.Adj. de Topografía/ Prof. Libre

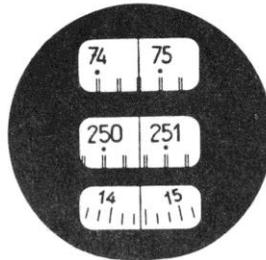
Fundamentalmente se tienen tres tornillos de presión y sus respectivos de coincidencia: para la alidada, para el limbo (en caso de teodolitos repetidores, en el caso de los reiteradores el limbo se desplaza suavemente por un tornillo de fricción de movimiento lento), y para el anteojo.-

Se dice que el anteojo está en **posición I**, cuando las lecturas cenitales del círculo vertical V decrecen con el ángulo cenital y el limbo vertical está a la **izquierda**. Por el contrario el anteojo está en **posición II** cuando el círculo está a la derecha, y en ese caso los ángulos cenitales crecen con el valor angular cenital.

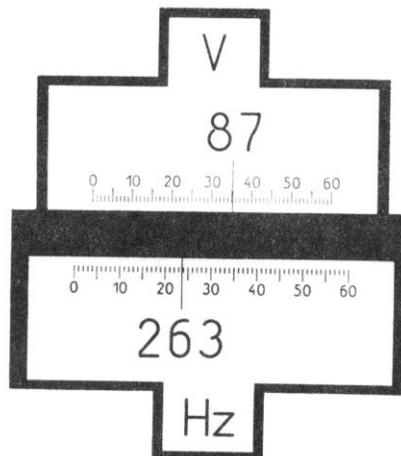
En la figura abajo se muestra un teodolito óptico moderno con la disposición de lentes y recorrido de las visuales a los distintos círculos y el mecanismo óptico para la iluminación interna del mismo.



Corte de un teodolito óptico moderno.



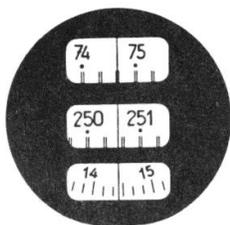
Ejemplo de lectura en el teodolito Kern
DKM1. Círculo vertical: $74^{\circ}54'25''$



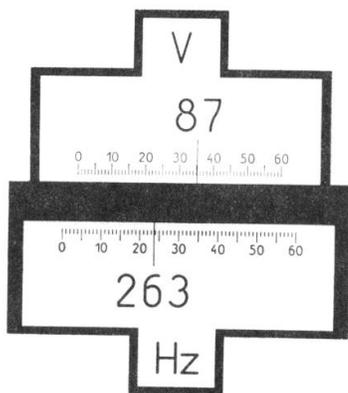
Ejemplo de lectura en el Zeiss Th4. Es-
cala vertical: $87^{\circ}35.1'$. Escala horizontal: $263^{\circ}23.7'$

Sistemas de lecturas por escalas y micrómetro óptico, teodolitos ópticos de diferentes modelos.

Los sistemas ópticos de lectura de los círculos eliminan los errores de excentricidad de los círculos, a diferencia de los antiguos tránsitos y teodolitos, en los que se debía realizar lectura a ambos lados del círculo.

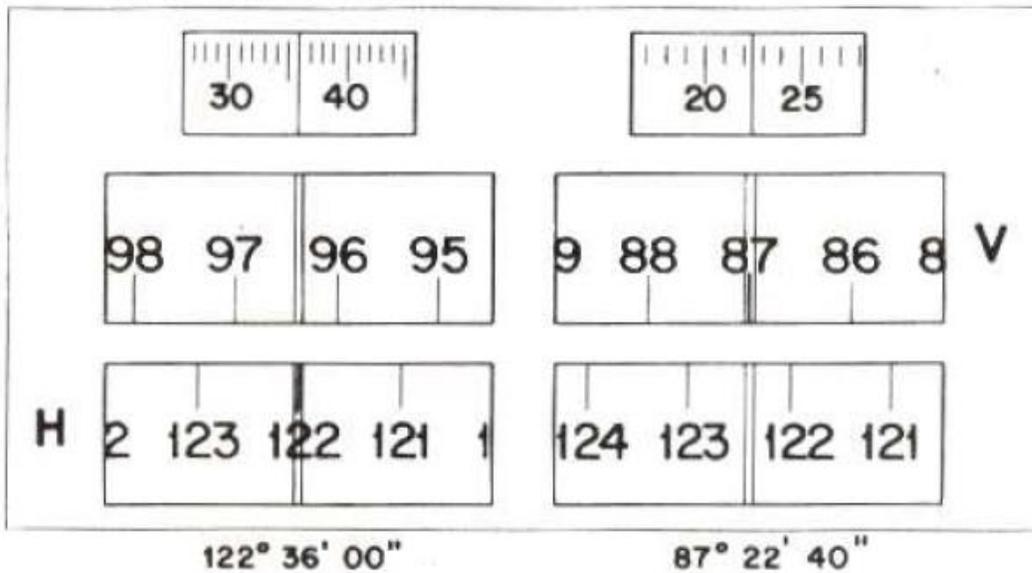


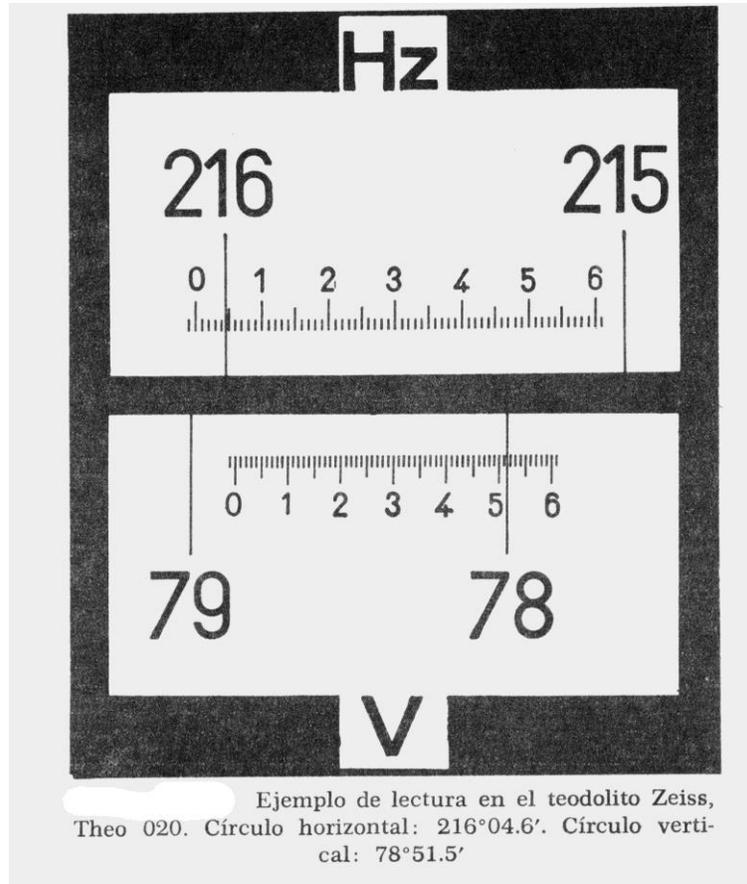
Ejemplo de lectura en el teodolito Kern DKM1. Círculo vertical: 74°54'25"



Ejemplo de lectura en el Zeiss Th4. Es-
 cala vertical: 87°35.1'. Escala horizontal: 263°23.7'

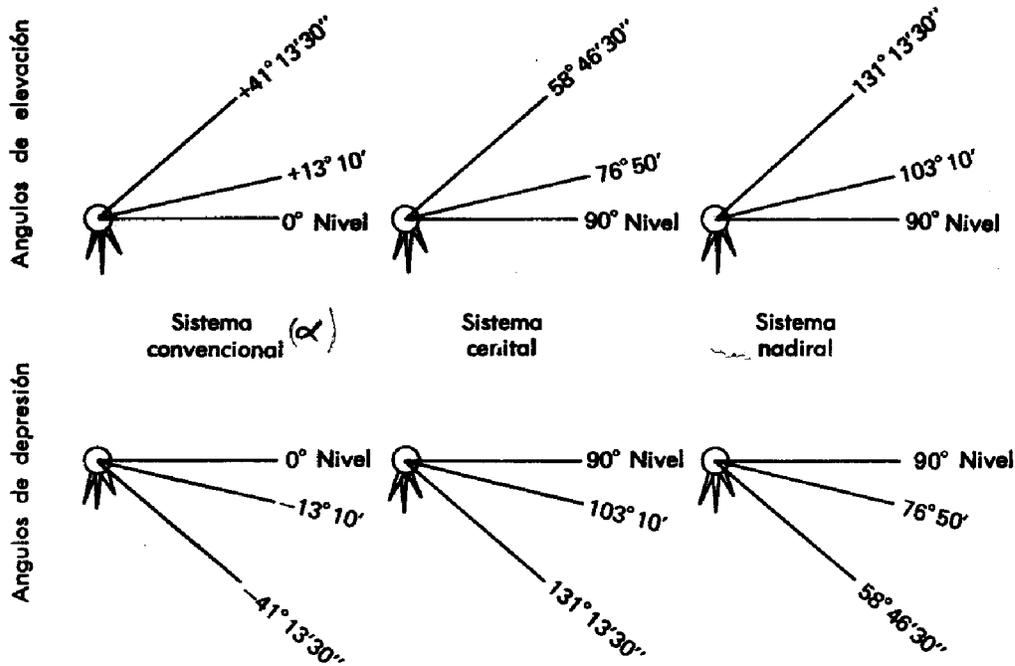
Teodolito : Wild T-1





Sistema de lectura de escalas, típico de los teodolitos para ingeniería

Con la aparición de los teodolitos digitales, el “misterio” del funcionamiento del instrumento se desmistificó completamente a mi real saber y entender. Antes cada uno de los fabricantes tenía sus sistemas de lectura y ponerse a entender cada uno de los aparatos implicaba unas horas de adaptación, aspecto que al novato y aprendiz de Topografía le significaba un arduo trabajo.



Comparación de los sistemas de medida de ángulos verticales.

Los Teodolitos electrónicos digitales pueden leer y registrar automáticamente ángulos horizontales y verticales. De esta manera, la lectura manual de las escalas en círculos graduados empleando microscopios ha sido eliminada. Además al realizarse la lectura electrónicamente el operador no comete errores y se terminan los aprendizajes sobre cada una de las diferentes marcas de teodolitos con sus diferentes sistemas. El diseño y apariencia es básicamente similar a los teodolitos ópticos, la diferencia fundamental es la manera como resuelven y exhiben externamente, en forma digital, los valores de los ángulos. Esto ha cambiado notablemente la comprensión del instrumento que se ha vuelto más amigable para el neófito y nuevo en la disciplina, por lo cual el trabajo anotando los valores en libreta se facilita en gran forma. Pero también, los valores se pueden registrar y almacenar en forma electrónica, evitando la toma de datos errónea y aumentando en gran forma la productividad de un levantamiento y del posterior procesamiento de gabinete, también simplificado.

Condiciones que debe reunir un goniómetro.

Las condiciones de construcción de un teodolito, que debe garantizar el constructor del mismo, y cuyo incumplimiento da lugar a errores instrumentales, no obstante hay pequeños ajustes que se deben corroborar y permiten su ajuste. Si el aparato está perfectamente corregido la relación entre sus diferentes ejes deberá ser la que se ve en la Fig.5

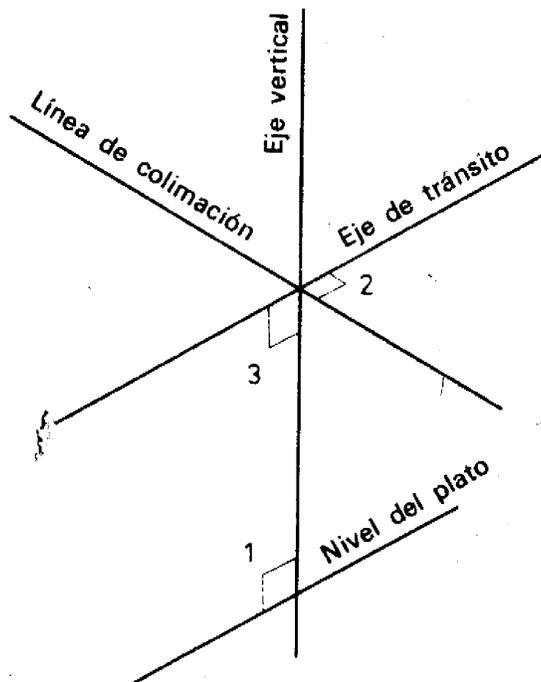


Fig 5. Condición de ajuste de un teodolito

Esto es

- 1) el eje vertical deberá estar verdaderamente vertical y perpendicular al del nivel del plato
- 2) el eje de colimación deberá ser perpendicular al eje del teodolito o eje secundario
- 3) el eje secundario deberá ser perpendicular al eje vertical del teodolito.

Estas relaciones se alteran con el uso y abuso del aparato y deberán comprobarse antes de iniciar cualquier trabajo importante y luego a intervalos frecuentes para asegurarse del correcto ajuste del aparato.

Estos ajustes se aprenden en la práctica con un instrumento por lo cual no abundaremos en detalles teóricos aquí.-

4.7. Poligonales.

Cuando el técnico topógrafo debe realizar un levantamiento planimétrico el procederá realizando un levantamiento de polares a diferentes puntos de interés, hasta el momento que el punto estación del teodolito o la estación total no le rinda más utilidad y deba trasladar el instrumento hacia otra estación. Por lo cual todo levantamiento mas o menos complejo en extensión u obstáculos diversos (edificios,montes,arroyos) exigirán realizar más o menos estaciones de relevamiento, desde donde tomar las polares de los diferentes puntos. Asi es, que se formaran poligonales del levantamiento, es decir, el conjunto de estaciones conectadas entre sí forman las llamadas poligonales, que pueden ser abiertas o cerradas. Es decir, que las diferentes estaciones de un levantamiento no pueden ser independientes, hay un enlace entre cada una de ellas, para lograr un conjunto de puntos relevados que estarán todos referidos al mismo sistema de referencia original, por lo cual el trabajo tendrá una unidad.

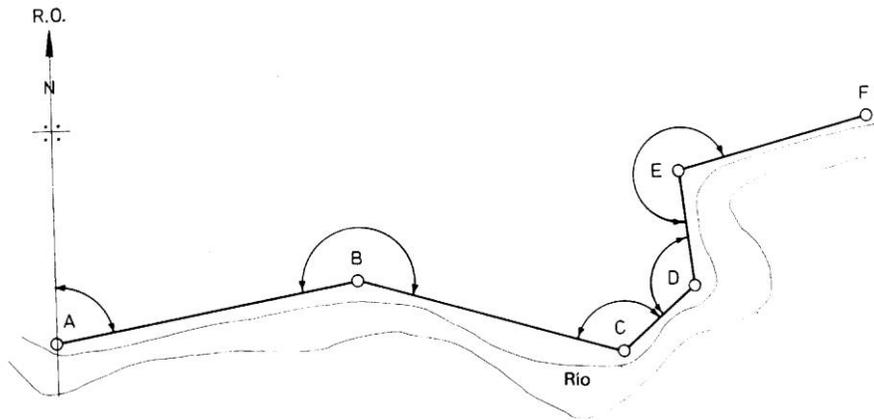
El propósito de las poligonales es determinar las direcciones y distancias de una sucesión de rectas adyacentes que en su conjunto forman el esqueleto del levantamiento de un área determinada. Antiguamente(siglo XX) y muchos años antes, estas rectas se dibujaban con un transportador de ángulos y escalímetro, o mediante el dibujo en papel de una cuadrícula por las coordenadas de sus extremos. En la actualidad el dibujo se realiza en el computador mediante un CAD³ por lo cual es evidente que el conjunto de coordenadas cartesianas de cada uno de los puntos relevados debe estar referido a un idéntico sistema en cada trabajo.

4.7.1 Poligonal Abierta y cerrada, levantamiento por ángulos a derechas, y por Acimut

Poligonal abierta

En la figura de abajo se da un ejemplo de una poligonal abierta: las longitudes de todos sus lados y los ángulos positivos o ángulos a derechas(en el sentido de las agujas del reloj) deben medirse. Este tipo de poligonal no es autocontrolado y pueden producirse errores lineales o angulares que no sean detectados. La única comprobación posible sería repetir toda la poligonal o volverla a levantar en sentido contrario, de F hacia A.

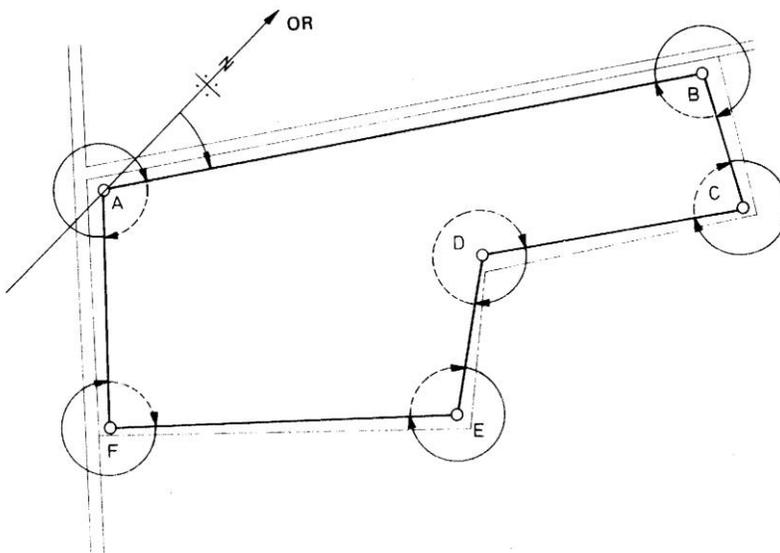
³ AutoCAD,IntelliCAD,BricsCAD,etc, hay diferentes opciones de software en el mercado.



Poligonal cerrada

En este tipo de poligonal los lados se cierran para formar un polígono como el mostrado abajo. Se miden los ángulos a derechas exteriores que son los marcados con arcos continuos y los que se miden cuando el levantamiento se hace en sentido positivo, esto es que el goniómetro se lleva de A a B a C, etc.

La poligonal se autocomprueba hasta cierto punto ya que la suma de los ángulos exteriores de un polígono debe ser $(n + 2) 180^\circ$, donde n es el número de vértices o estaciones del aparato. En el caso de la figura, la suma de los ángulos deberá ser $(6 + 2) 180^\circ = 1.440^\circ$



Es muy poco probable que la suma de los ángulos medidos dé este valor, debido a los pequeños errores inherentes a la medida. Sin embargo la suma deberá estar muy próxima a esta cantidad y la diferencia deberá estar acotada o dentro de un valor tolerable.

El valor tolerable debería ser del orden de

+/- $30 \sqrt{n}$ segundos para un teodolito o estación total de 10 segundos

y **+/- \sqrt{n} minutos** para un teodolito de 20 segundos.

En cada caso **n** es el número de estaciones del instrumento.

Si al realizar las comprobaciones se encuentra un error que no es tolerable es que han ocurrido equivocaciones que determinan que el trabajo debe repetirse. Si el error es tolerable, se ajustará el valor de los ángulos observados para que la suma de los mismos sea la correcta, repartiendo el error en cada una de las observaciones por igual.

Los ángulos interiores del polígono están señalados con arcos punteados en la figura y son los que se miden cuando el levantamiento se hace en sentido negativo(contrario a las agujas del reloj). *Nosotros recomendamos trabajar siempre en sentido positivo midiendo ángulos exteriores de una poligonal.*

Deben tener en cuenta que los ángulos se corrigen siempre y cuando los valores de la correspondiente sumatoria de valores tolerables, por lo cual el operador cometió errores aleatorios. Las equivocaciones y los errores de lectura, anotación o recolección, sólo se corrigen realizando nuevamente el trabajo de mensura.

Hasta aquí hemos descrito la operación de levantamiento de una poligonal midiendo ángulos a derechas desde la estación atrás. Es decir al trasladarse el operador del instrumento hacia una nueva estación, coloca el 0° de su instrumento hacia el punto atrás y luego bisecta el nuevo punto estación adelante, leerá y anotará o capturará el valor, según utilice el antiguo sistema de libreta manual o el moderno sistema electrónico.

Este sistema requiere de él operador o técnico topógrafo, herramientas informáticas o de cálculo electrónico que le faciliten la tarea de cálculo posterior de gabinete. Por ello, cuando las herramientas de cálculo están limitadas, el autor sugiere realizar los levantamientos planimétricos por Azimutes directamente, es decir levantando en el campo directamente valores angulares acimutales. Para ello, cada vez que el técnico se traslada a una nueva estación debe propagar la meridiana de referencia inicial, entonces en cada nueva estación levantará directamente valores angulares que son acimutes.-

En el caso de haber levantado una poligonal por ángulos a derechas, antes de calcular los azimutes de los lados de una poligonal, se deben controlar los ángulos observados. Es decir, deben corregirse los valores angulares observados de tal forma que su suma se igual a:

$(n + 2) 180^\circ$ si los ángulos son exteriores

$(n - 2) 180^\circ$ si los ángulos son interiores.

Por ejemplo, en la figura mostrada los valores **angulares exteriores** fueron :

Angulo	Valor medido
ABC	272°03' 10''
BCD	272°05' 51''
CDF	104°50' 31''
DEF	261°11' 06''
EFA	266°10' 15''
FAB	263°38' 25''

En este caso la suma de los ángulos exteriores del polígono de 6 vértices, debería ascender a $8 \cdot 180^\circ = 1.440^\circ$

Sin embargo, la suma alcanza a $1.439^\circ 59' 18''$ por lo cual el error angular es de 42 segundos, siendo perfectamente tolerable. Los valores angulares ajustados se calculan adicionando a cada uno de los observados la cifra $42'' / 6$ o sea 7 segundos por vértice

4.7.2. Cálculos de coordenadas parciales y totales, error de cierre.

Veamos un ejemplo de cálculo de coordenadas de un relevamiento planimétrico realizado por rodeo con **ángulos a derechas**. Sea la poligonal A, B, C, D, E, F con las coordenadas de A (7898,93 / 4297,57)

con los siguientes valores azimutales, de ángulos a derechas y de distancias entre estaciones

$Az_{AB} = 41^\circ 20' 52''$ y distancia $AB = 877,54$ m

Ang. B = $232^\circ 35' 51''$ y distancia $BC = 1149,00$ m

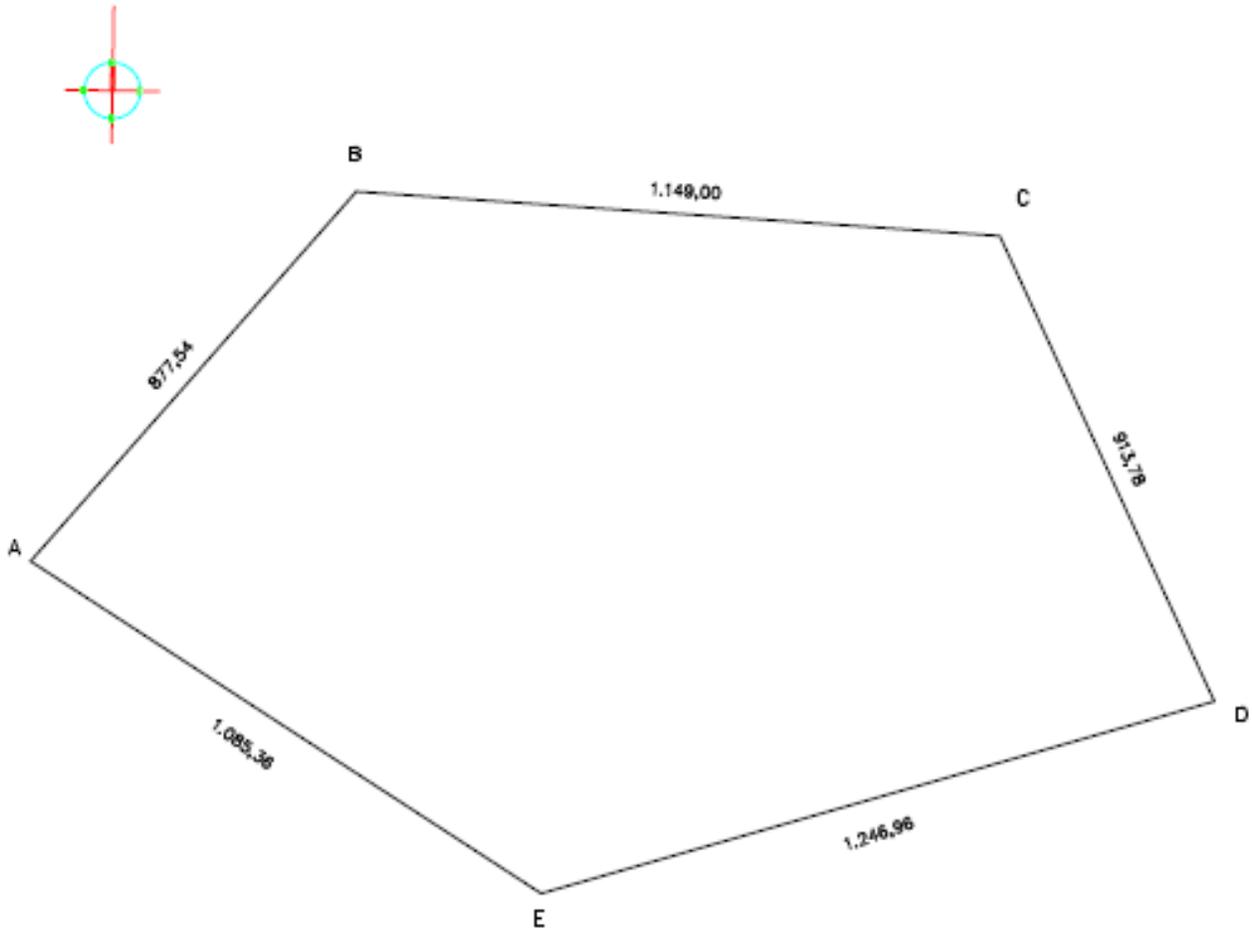
Ang. C = $241^\circ 20' 15''$ y distancia $CD = 913,78$ m

Ang. D = $278^\circ 46' 19''$ y distancia $DE = 1.246,96$ m

Ang. E = $229^\circ 01' 54''$ y distancia $EA = 1.085,36$ m

Y al cerrar el polígono

Ang.A = 278°15'42''



El procedimiento más intuitivo a mi entender, es resolver el azimut adelante de una línea como , el azimut atrás de la línea anterior + el ángulo a derechas en el punto – 360° en caso de que la suma haya superado dicho valor.

El $Az_{AB} = 41^{\circ}20'52''$ como es menor que 180° debemos adicionar esta cantidad para obtener el $Az_{BA} = 41^{\circ}20'52'' + 180^{\circ} = 221^{\circ} 20' 52''$

En efecto, el $Az_{BC} = 41^{\circ}20' 52'' + 180^{\circ} + 232^{\circ}35'51'' - 360^{\circ} \Rightarrow \mathbf{93^{\circ} 56' 43''}$

$Az_{CD} = 93^{\circ}56'43'' + 180^{\circ} + 241^{\circ}20' 15'' - 360^{\circ} \Rightarrow 155^{\circ} 16' 58''$

$Az_{DE} = 155^{\circ}16'58'' + 180^{\circ} + 278^{\circ}46'19'' - 360 \Rightarrow 254^{\circ} 03' 17''$

$Az_{EA} = 254^{\circ}03' 17'' - 180^{\circ} + 229^{\circ}01'54'' \Rightarrow 303^{\circ} 05' 11''$

$$AZ_{AB} 303^{\circ}05'11'' - 180^{\circ} + 278^{\circ}15'42'' - 360^{\circ} = 41^{\circ} 20' 53''$$

Por lo tanto el error azimutal es de sólo $0^{\circ}0' 1''$ y está dando la pauta de un muy buen trabajo de campo donde no se están cometiendo errores en el levantamiento de ángulos a derechas. En efecto, recordar que el error tolerable para el azimut sería de hasta $30'' \times \sqrt{5}$ o sea hasta $0^{\circ}01'07''$.-

Para calcular las coordenadas totales del punto B deberemos calcular las parciales hacia B y luego adicionar las coordenadas totales del punto A desde donde iniciamos la medida de las polares del punto B. O sea las coordenadas parciales de B son:

$$\sin 41^{\circ}20' 52'' \times 877,54 = 0,6606 \times 877,54 = 579,727 \text{ m}$$

$$\cos 41^{\circ}20' 52'' \times 877,54 = 0,7507 \times 877,54 = 658,781 \text{ m}$$

y por tanto las totales

$$7898,93 + \sin 41^{\circ}20' 52'' \times 877,54 = 8.478,657 \text{ m}$$

$$4297,57 + \cos 41^{\circ}20' 52'' \times 877,54 = 4.956,339 \text{ m}$$

dando estos productos los valores de coordenadas totales de la estación B.

Realizando estos cálculos para cada una de las siguientes estaciones del teodolito, obtendremos las siguientes coordenadas totales

C (9624,934/ 4.877,296)

D (10.007,022/ 4.047,234)

E (8.808,040/ 3.704,670)

Y al cerrar A' (7.898,673/ 4.297,17)

De donde el error lineal absoluto asciende a 0,475 m. y como el perímetro de la poligonal de relevamiento es 5.272,64 metros, el error relativo es de $0,475 / 5.272,64 = 9,0 \cdot 10^{-5}$ o sea una relación de precisión de 1 / 11.100, que es excelente.

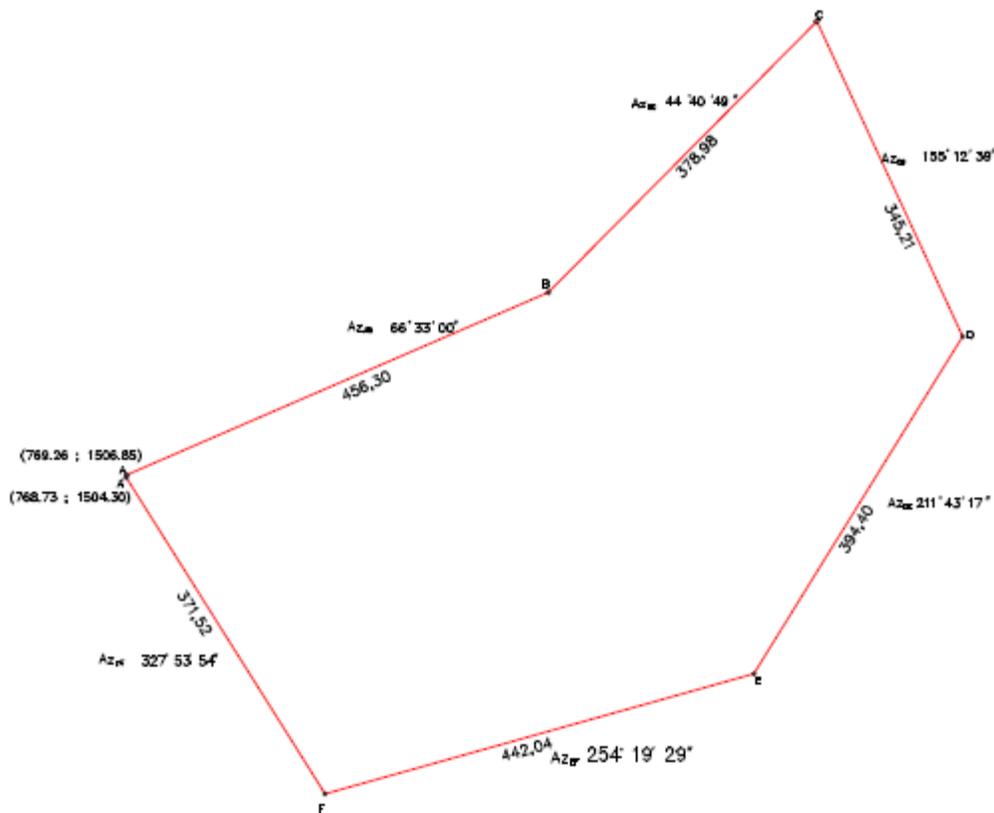
4.7.3. Levantamiento de las polares de los puntos de detalle.

También es posible y en forma más rápida realizar un levantamiento planimétrico por polares hacia determinados vértices, y una vez agotadas las posibilidades desde una estación, nos trasladamos a una nueva y de allí continuamos con los vértices o esquineros faltantes. En definitiva estaremos realizando una poligonal de estaciones de relevamiento y cada una de ellas tendrá una serie de puntos levantados por las polares.

4.7.4 Ajuste de las poligonales por la regla de la brújula.

Supongamos que tenemos los datos de la poligonal mostrada abajo, partiendo del punto estación A de coordenadas E/N (769,26 / 1506,85), sabiendo que el $Az_{AB} = 66^{\circ} 33'$. Por tanto, aplicando las reglas enunciadas previamente tendremos los siguientes valores de coordenadas totales:

$$N_B = 1506,85 + \cos 66^{\circ} 33' \times 456,30 = 1.688,434$$
$$E_B = 769,26 + \sin 66^{\circ} 33' \times 456,30 = 1.187,87$$



$$N_C = 1688,434 + \text{cn } 44^{\circ} 40' 49'' \times 378,98 = 1.957,900$$

$$E_C = 1.187,87 + \text{sin } 44^{\circ} 40' 49'' \times 378,98 = 1.454,35$$

$$N_D = 1957,90 + \text{cn } 155^{\circ} 12' 39'' \times 345,21 = 1.644,500$$

$$E_D = 1.454,35 + \text{sin } 155^{\circ} 12' 39'' \times 345,21 = 1.599,090$$

$$N_E = 1.644,50 + \text{cn } 211^{\circ} 43' 17'' \times 394,40 = 1.309,020$$

$$E_E = 1.599,09 + \text{sin } 211^{\circ} 43' 17'' \times 394,40 = 1.391,720$$

$$N_F = 1.309,02 + \text{cn } 254^{\circ} 19' 29'' \times 442,04 = 1.189,59$$

$$E_F = 1.391,720 + \text{sin } 254^{\circ} 19' 29'' \times 442,04 = 966,16$$

Al cerrar la poligonal visando el punto estación de partida A, en base al $Az_{FA'} = 327^{\circ} 53' 34''$ se obtienen las coordenadas de cierre

$$N_{A'} = 1.189,59 + \text{cn } 327^{\circ} 53' 34'' \times 371,52 = 1.504,30$$

$$E_{A'} = 966,16 + \text{sin } 327^{\circ} 53' 34'' \times 371,52 = 768,73$$

El error de cierre absoluto es la distancia o vector $AA' = (\Delta N^2 + \Delta E^2)^{\frac{1}{2}}$

$$AA' = [(1.506,85 - 1.504,30)^2 + (769,26 - 768,73)^2]^{1/2} = 2,604 \text{ m}$$

Este valor de error de cierre es alto, bajo, regular? El valor absoluto debe compararse con el recorrido total de la poligonal, y de allí tendremos un valor de precisión de nuestro trabajo para sacar conclusiones.

Así por ejemplo, en este caso la longitud de la poligonal asciende a 2.388,45 m. entonces la precisión relativa es de $2,6 / 2.388,45 = 1 / 917$

Las clases de precisión podrían clasificarse en tres grupos, la Clase I aceptable para relevamientos por estadimetría y teodolito de $20''$, donde la precisión relativa es $1/500$ a $1/2000$.

La Clase II es la categoría para relevamientos de ingeniería agrícola donde la mensura de distancias se realiza con distanciómetro y teodolito de $10''$, donde la precisión relativa es de $1/2000$ a $1/5000$.

La Clase III es la categoría para relevamientos donde la mensura de distancias se realiza con distanciómetro y teodolito de $5''$, donde la precisión relativa es superior a $1/5000$.

El ajuste de cualquier poligonal debería realizarse siempre que tengamos una precisión razonable de acuerdo con el equipamiento y procedimientos realizados, donde serán válidos los principios asumidos por la regla de Bowditch o regla de la brújula, que es el procedimiento más sencillo aplicable en este ámbito de la Ingeniería Agrícola.

Por lo tanto, de acuerdo con las clases de precisión establecidas, asumimos por razones didácticas que el trabajo cae dentro de las tolerancias aceptables.

En el caso de una poligonal cerrada el error lineal de cierre debe distribuirse entre todo el polígono para cerrar la figura, aún cuando al trazar la poligonal a la escala del plano el error de cierre sea insignificante. Existen varios métodos de ajuste, pero el más comúnmente utilizado es la regla de la brújula. El vector de cierre si no es nulo, es el error de cierre, que comparado con la longitud total de la distancia poligonal nos da la precisión del trabajo topográfico de mensura. Entonces de lo que se trata es de prorratear esta magnitud de cierre por todos los vértices donde se estacionó el goniómetro en función de una relación matemática.

Para proceder al ajuste de la poligonal debemos corregir en primer lugar las **coordenadas parciales**. La regla de la brújula ajusta las proyecciones ortogonales de las líneas de poligonales en proporción a sus longitudes. Aunque no es tan rigurosa como el método de los mínimos cuadrados, conduce a resultados lógicos en la distribución de los errores de cierre.

Las correcciones con este método se hacen de acuerdo con las siguientes reglas :

Correc. en la proy. **E** de AB =

$-(\text{error de cierre total en E}) \times [\text{long. de AB} / (\text{perímetro de la poligonal})]$

Correc. en la proy. **N** de AB =

-(error de cierre total en N) x [long. de AB / (perímetro de la poligonal)]

Debe observarse que los **signos algebraicos de las correcciones son opuestos a los del error de cierre respectivo.-**

Como ejemplo, veremos el ajuste de las parciales de la alineación AB

Correc. en la proy. **N** de AB = - (-2,654) x 456,30 / 2388,45 = + 0,507

Correc. en la proy. **E** de AB = -(-0,749) x 456,30 / 2388,45 = + 0,143

En el cuadro abajo mostrado se ejemplifica el cálculo de la poligonal ajustada.

línea	A z	Dist	Latitud	Long.	Corr.	Corr.	ST	ΔN_{aj}	ΔE_{aj}	N	E
			Δy	Δx	Lat	Long.					
							A			1506,85	769,26
AB	66°33	456,30	181,584	418,61	+0,507	+0,143		182,091	418,753		
							B			1688,94	1188,01
BC	44°40'49"	378,98	269,471	266,48	+0,421	+0,119		269,892	266,599		
							C			1958,833	1454,612
CD	155°12'39"	345,21	-313,40	144,74	+0,384	+0,108		-313,017	144,84		
							D			1645,816	1599,460
DE	211°43'17"	394,40	-335,48	-207,37	+0,438	+0,124		-335,045	-207,247		
							E			1310,771	1392,213
EF	254°19'29"	442,04	-119,433	-425,60	+0,491	+0,139		-118,942	-425,461		
							F			1191,829	966,752
FA'	327°53'54"	371,52	314,608	-197,608	+0,413	+0,117		315,021	-197,491		
	Σ	2388,45	-2,654	-0,749			A'	0	0,001	1506,85	769,261

Correc. en la proy. **N** de BC = - (-2,654) x 378,98 / 2388,45 = + 0,421

Correc. en la proy. **E** de BC = -(-0,749) x 378,98 / 2388,45 = + 0,119

Correc. en la proy. **N** de CD = - (-2,654) x 345,21 / 2388,45 = + 0,384

Correc. en la proy. **E** de CD = -(-0,749) x 345,21 / 2388,45 = + 0,108

Correc. en la proy. **N** de DE = - (-2,654) x 394,40 / 2388,45 = + 0,438

Correc. en la proy. **E** de DE = -(-0,749) x 394,40 / 2388,45 = + 0,124

Correc. en la proy. **N** de EF = - (-2,654) x 442,04 / 2388,45 = + 0,491

Correc. en la proy. **E** de EF = -(-0,749) x 442,04 / 2388,45 = + 0,139

3. TAQUIMETRIA

3.1 Introducción.

La taquimetría es un procedimiento rápido y eficiente para medir distancias y diferencias de elevación indirectamente. Es la técnica topográfica preferida desde hace muchísimos años para la confección de planos o cartas planialtimétricos. Se denominan planos altimétricos aquellas cartas que representan el relieve topográfico de una superficie limitada de la Tierra, es decir, el relieve es la morfología del terreno y su configuración. Hay diferentes formas de representar la morfología del relieve terrestre, sin embargo, el método más simple de mayor exactitud y más corriente incluso en el siglo XXI lo constituye el de las curvas de nivel, que muestran las tres dimensiones del relieve en un dibujo bidimensional. El método taquimétrico se ha utilizado desde hace varios cientos de años para la elaboración de cartas planialtimétricas o de curvas de nivel.

Es decir, que la taquimetría es la técnica topográfica que resuelve simultáneamente la planimetría y la altimetría de una parte de la superficie terrestre, mediante el levantamiento de puntos del terreno por coordenadas polares, de esta forma podemos obtener las coordenadas cartesianas x,y,z de esos mismos puntos.

El paso previo a la confección del plano de curvas de nivel, es la obtención de un plano de puntos del terreno acotados, es decir, puntos del terreno con sus coordenadas cartesianas x,y más la coordenada de elevación z y eventualmente la descripción del mismo. Es decir, la descripción establece que representa dicho punto acotado, por ejemplo si es terreno, zanja, alambrado, esquinero, camino, borde de zanja,etc.-

realizar mensuras de ángulos horizontales y verticales (cenitales o nadirales) , y con el estadal (mira) levantamos distancias inclinadas hacia cada uno de los puntos de interés que definen el relieve.

En la actualidad y desde la aparición del distanciómetro electrónico (EDM) con la medición electrónica de distancias, la precisión de la taquimetría cambió notablemente y potenció aún más la técnica de levantamiento palnialtimétrico por taquimetría. Obviamente el instrumento EDM se miniaturizó incorporándose en un anteojo, y el teodolito digital incorporando esta tecnología más la computación evolucionó a la Estación Total.

El método de la taquimetría, es un procedimiento rápido y eficaz para medir distancias y diferencias de elevación entre los diferentes puntos de interés del terreno. Es un procedimiento que integra dos capítulos básicos de la Topografía, la planimetría y la altimetría. Tradicionalmente, con la taquimetría por estadimetría, es decir, midiendo distancias por el principio de la estadia, y ángulos horizontales y verticales, se resuelven las coordenadas x,y, z o N,E,z de los diferentes puntos del terreno visados desde una estación taquimétrica. La estación taquimétrica por excelencia es el teodolito, también a veces pero con posibilidades muy por debajo del teodolito, se puede utilizar un nivel de anteojo con círculo graduado y lectura angular de por lo menos 10 minutos.

3.2 Taquimetría convencional.

Como ya sabemos, que la retícula del teodolito óptico y el digital, para la medición con estadia tiene otros dos hilos horizontales equidistantes del hilo central , en forma idéntica a un nivel de anteojo. La separación de los hilos de estadia en la mayoría de los instrumentos, sino en todos en la actualidad, da una distancia de 1 metro sobre un estadal o mira que se sostiene perpendicularmente a la visual a una distancia de 100 metros.

Como vimos en el capítulo de medición de distancias, en estadimetría, si la visual es horizontal, la diferencia de lecturas en la mira , $(I_{superior} - I_{inferior}) \times 100 =$ distancia en metros. O sea, la llamada constante diastimométrica $k = 100$, por tanto en conclusión,

$$D \text{ metros} = (I_{superior} - I_{inferior}) \times 100$$

Desde hace muchísimos años la constante C externa es cero además los anteojos modernos (de la década del 50) tienen distancia focal interna o sea el foco del anteojo es interno. Por tanto en la imagen de la fig.1 tener en cuenta entonces que $C = 0$.-

Como por construcción, hay una equidistancia entre las lecturas y el centro de la cruz filar, o sea la llamada lectura media I_m , entonces a veces en la práctica debido a obstáculos el operador visualiza únicamente por ejemplo, la lectura superior y la lectura media, en dicho caso

$$D \text{ metros} = (I_{superior} - I_{media}) \times 2 \times 100$$

La mayoría de las visuales por estadia para obtener las distancias a los respectivos puntos son inclinadas, debido a la configuración variable del terreno, pero la longitud interceptada en la mira se debe leer sobre una mira o estadal puesto o sostenido a plomo sobre el punto que se quiere relevar. Entonces la distancia inclinada S , es "reducida" a distancias horizontal y vertical

En la Fig.1. se ve un teodolito centrado sobre un punto M y una mira o estadal sostenido en el punto O . Con el hilo central del retículo sobre el punto D , de manera que la distancia DO sea igual a la altura del instrumento EM , α es entonces el ángulo vertical o ángulo de inclinación .-

Si S representa la distancia inclinada ED ; H la distancia horizontal $EG = MN$ y V es la distancia vertical $DG = ON$, entonces se cumple

$$H = S \operatorname{cn} \alpha$$

$$V = S \sin \alpha$$

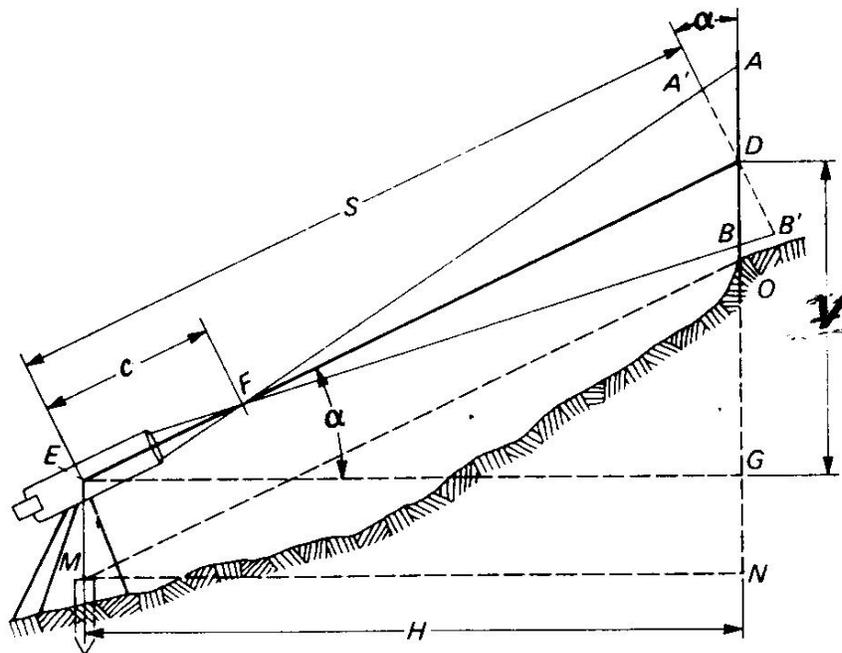


Fig.1. Esquema de la taquimetría convencional, o sea taquimetría con distancias por estadimetría.-

Si la mira se sostuviese sobre el punto O en posición perpendicular a la visual desde el teodolito, se obtendría una lectura $A'B'$, o sea L' ; por lo que

$$S = 100 \times L'$$

Como no es práctico sostener la mira o estadal con un ángulo de inclinación α , la mira se coloca aplomada verticalmente sobre el punto a relevar O , y se toma la lectura AB , o sea L . Por tanto,

$$L' = L \operatorname{cn} \alpha$$

$$S = 100 \times L \times \text{cn } \alpha$$

$$H = 100 \times L \times \text{cn } \alpha \times \text{cn } \alpha$$

$$H = 100 \times L \times \text{cn}^2 \alpha$$

Por otro lado, la distancia vertical V se encuentra con la fórmula

$V = S \text{ sen } \alpha$, pero sustituyendo por el valor de S , resulta

$$V = 100 \times L \text{ cn } \alpha \text{ sen } \alpha$$

Pero sustituyendo $\text{cn } \alpha \text{ sen } \alpha$ por $\frac{1}{2} \text{ sen } 2\alpha$

$$V = 100 \times L \times (\frac{1}{2} \text{ sen } 2\alpha)$$

La fórmula que permite obtener la coordenada Z o elevación del punto relevado es la que resulta de sustituir las variable abajo por los números reales correspondientes

Teniendo en cuenta que OD es la lectura en la mira correspondiente a la cruz filar del anteojo y se llama lectura media l_m

$$C_o = C_M + h_M + V - l_m$$

Por lo tanto la fórmula genérica es

$$C_i = C_{\text{Estación}} + h_{\text{estación}} + V - l_m$$

Ahora vamos a ver una simplificación importante en las condiciones de trabajo en áreas relativamente planas como las del Uruguay, haciendo un relevamiento planialtimétrico por taquimetría convencional, es decir, midiendo distancias por el viejo método de estadimetría.

La fórmula $\text{cn } ^\circ\text{Cen}$ es prácticamente igual a $\frac{1}{2} \text{ sin } 2\alpha$ para ángulos de elevación $\alpha \leq 4^\circ$

Entonces se puede hacer $V = 100 \times L \times (\frac{1}{2} \text{ sen } 2\alpha) \approx 100 \times L \times \text{cn } ^\circ\text{Cen}$

En efecto, sea por ejemplo el valor $\alpha = 4^\circ$ o sea $^\circ\text{Cen} = 86^\circ$

El valor $\frac{1}{2} \text{ sin } 2\alpha = 0.06959$ y $\text{cn } 86^\circ = 0.06976$ o sea con tres cifras significativas,
 $\frac{1}{2} \text{ sin } 2\alpha \approx \text{cn } 86^\circ = 0.070$.-

Como los teodolitos en general y hoy en día las Estaciones Totales tienen los círculos verticales graduados de 0° a 360° o de 0-400 según sean sexagesimales o centesimales respectivamente, en el caso de operar levantando la información de campo en libretas

manuscritas, el trabajo de gabinete se ve simplificado al utilizar dicha simplificación, obviándose el cálculo de los ángulos de elevación.

La precisión de las poligonales taquimétricas realizadas por taquimetría convencional son de baja precisión planialtimétrica. En planimetría la precisión oscila en el orden de 1/300 a 1/1000, debido fundamentalmente a los errores en la medición de la distancia. En la parte altimétrica, la nivelación trigonométrica sufre de errores en la distancia, lo que arroja errores altimétricos del orden de 0,10 m en visuales de 300 a 400 m de longitud. En conclusión, los errores que se tienen en estadimetría son resultado de lecturas en la mira deficiente más que en ángulos incorrectos, por ello los errores básicamente son debido a errores de distancias.

3.3 Taquimetría con Estación Total.

La estación total es un instrumento resultado de la evolución del distanciómetro electrónico y del teodolito digital, junto con la revolución tecnológica de la electrónica en general, donde un teodolito digital, incluye en su anteojo un distanciómetro (EDM) y en su base un computador . El instrumento en definitiva realiza las mismas operaciones taquimétricas clásicas, levanta coordenadas polares de los diferentes puntos visados por el operador topógrafo, el instrumento las almacena en archivos de "datos crudos" y a su vez en archivos de datos de coordenadas cartesianas procesadas, de manera de visualizarlas inmediatamente de calculadas y bajarlas inmediatamente a la PC y procesarlas en un software asociado a un CAD. De tal manera que la taquimetría por estación total cambia totalmente la precisión de la taquimetría clásica, porque los errores de la nivelación trigonométrica quedan restringidos únicamente a los errores angulares, siendo la precisión de las distancias muy alta.

La precisión de las poligonales taquimétricas realizadas con estación total pasan a ser del orden de 1/2500 a 1/10000, en la práctica profesional de ingeniería agrícola corriente, porque los errores en distancias son muy pequeños. La precisión en altimetría depende de la fórmula de cálculo, ya que se debe incluir el error por la curvatura terrestre para maximizar la precisión altimétrica y en la práctica el error se mantiene por debajo de los 0,05 m con visuales siempre por debajo de los 1000 a 1300 metros.

En efecto, el lector debe recordar el efecto de curvatura terrestre en la nivelación, y el efecto, es de que el error en la nivelación es proporcional a la distancia en que se encuentra el mirero o el prisma en el caso de la estación total. Los puntos del terreno relevados desde una estación tienden a aparecer más bajos de lo que realmente son cuanto más alejados están la estación del punto donde está colocado el prisma reflector con el ayudante.

Por lo tanto la fórmula genérica con la Estación Total de las elevaciones de los puntos relevados es

$$C_i = C_{\text{Estación}} + h_{\text{estación}} + V - h_{\text{prisma}}$$

De acuerdo con el concepto señalado anteriormente de la posibilidad de tomar puntos a gran distancia, surge un error altimétrico que se magnifica con la distancia y debe ser tomado en consideración.

3.4 Taquimetría con el Nivel Taquímetro.

La taquimetría con nivel taquímetro es una taquimetría muy limitada a un área alrededor del instrumento, que si el mismo tiene un buen aumento (por lo menos x 28) y el círculo graduado permite apreciaciones de 3 minutos ,podemos con un sistema de este tipo proceder a realizar replanteos planialtimétricos de tajamares de aguadas con gran eficiencia. Nos estamos refiriendo a instrumentos con una lectura angular directa a 10 minutos, y el sistema de nonio nos permite apreciar hasta 3 minutos, en dicho caso aplicamos las siguiente fórmulas desde la posición del intrumento. La limitación que establecemos para realizar taquimetría con el nivel, es de una visual máxima de 400 metros y con la limitación de que no será posible los cambios de estación entre puntos de estación, por lo errores en los cuales se incurrirían, al ser la visual del nivel siempre horizontal y la baja precisión angular del instrumento.

Si tenemos un sistema de dos ejes perpendiculares en un plano, cualquier punto A del mismo queda determinado por sus proyecciones X_A e Y_A sobre los ejes, siendo X_A la abcisa e Y_A la ordenada, siendo estos números reales que resultan de las operaciones

$$X_A = d \times \sin \alpha \quad \Rightarrow \text{(E) } X_A = d \times \sin Az$$

$$Y_A = d \times \cos \alpha \quad \Rightarrow \text{(N) } Y_A = d \times \cos Az$$

Si al punto estación donde colocamos el nivel taquímetro, le adjudicamos coordenadas arbitrarias 0 / 0 , las coordenadas de los puntos que componen el eje del tajamar que estamos replanteando o marcando son coordenadas totales. Por lo tanto con esos puntos cuyas coordenadas tenemos, podemos sin realizar ninguna otra medida adicional, saber las distancias que existen entre las diferentes secciones del terraplén y podremos calcular el volumen de tierra del mismo.

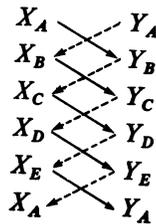
Debemos recordar la fórmula básica de la distancia entre dos puntos conociendo sus coordenadas cartesianas, **distancia AB = SQR($X_A - X_B$)² + ($Y_A - Y_B$)²** donde SQR = raíz cuadrada.

5.0. AREAS

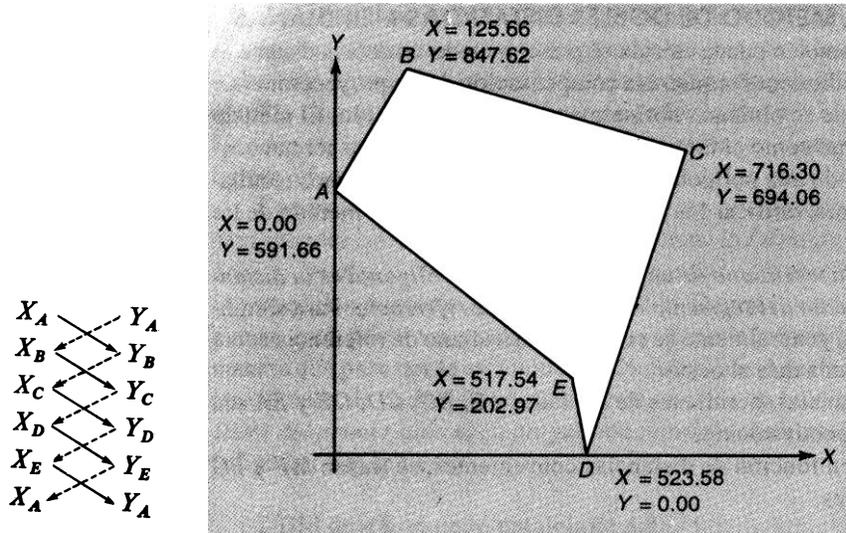
Para la determinación de áreas se realizan operaciones de campo como de gabinete. Los métodos de campo consisten generalmente en levantar polares de los vértices límites de la poligonal que define la propiedad, para aplicar el método de las coordenadas cartesianas. En otras palabras debemos trabajar con un taquímetro, donde actualmente se trabaja con taquímetros digitales equipados con EDM y miniaturizados en lo que se llama estación total. De lo contrario debemos trabajar con un GPS centimétrico o milimétrico para procesar a posteriori o en tiempo real con una estación emisora del mensaje de corrección en un radio máximo de 20 a 25 km, obteniendo las coordenadas corregidas en tiempo real. A partir de allí realizaremos los cálculos de áreas por coordenadas cartesianas.

Areas por coordenadas cartesianas.-

El cálculo por coordenadas cartesianas se realiza fácilmente, ordenando la serie de vértices de la poligonal que determina el área problema y volviendo a repetir el vértice inicial,



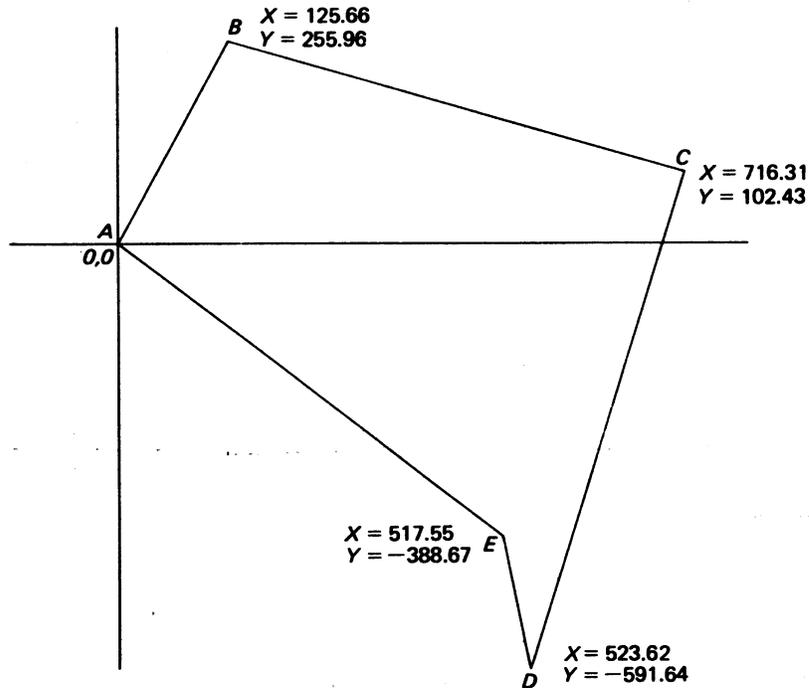
Elija por ejemplo, llamar a los productos de línea entera productos negativos y a los de línea punteada productos positivos, entonces la \sum de productos (+) - \sum de productos (-) = 2 Area, de donde es fácil deducir el valor del Area, dividiendo por dos el resultado de la operación algebraica indicada.-



Cálculo del área de un polígono mediante coordenadas

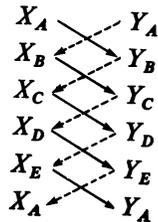
Vértice	X	Y	Area doble	
			Positivo	Negativo
A	0.00	591.66		
B	125.66	847.62	74 348	0
C	716.30	694.06	607 150	87 216
D	523.58	0.00	363 396	0
E	517.54	202.97	0	106 271
A	0.00	591.66	0	306 208
			1 044 894	- 499 695
			- 499 695	
			2) 545 199	
			272 600	

Para que pueda comprobar su comprensión y habilidad en cálculos algebraicos con números negativos verificar que el área de la figura de abajo, es de 27 Há 2610 m² y el perímetro 2180,90 metros. Observe que se trata de la misma figura anterior, pero que se trasladó, por lo cual cambiaron las coordenadas cartesianas de los vértices..-



Determinación del área por coordenadas.

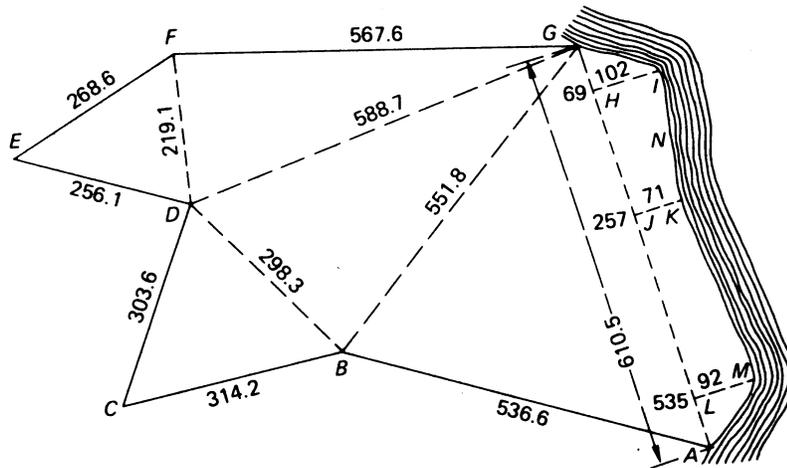
Utilizando el esquema del ordenamiento en una matriz de 2 x n filas igual a los vértices del polígulo cuya área se quiere determinar.



Actualmente, cualquier CAD (sistema de dibujo en PC) realiza el cálculo del área mediante este algoritmo, por lo cual el lector si tiene a mano una versión CAD no debe realizar el cálculo descrito anteriormente. Simplemente introducirá ordenadamente la serie de vértices del polígulo mediante el comando polilíneas (PL) y al finalizar los vértices oprimirá el comando Area y luego entidad, obteniendo área y perímetro de la figura simultáneamente. También podrá realizar el cálculo mediante la introducción por el comando líneas(L), pero difiere la forma del cálculo de área que deberá ser tomando los extremos de cada una de las líneas y al final sólo obtendrá la cifra de área sin el perímetro. En definitiva, el cálculo por líneas es más engorroso y no permite conocer de primera mano el perímetro.

Areas por división en triángulos.-

Los métodos de gabinete para medición sobre un plano podríamos dividirlos en tres categorías : 1) por división en triángulos 2) utilizando el planímetro, o actualmente también mediante el escaner incorporando la imagen a un dibujo en un programa CAD y 3) obviamente si usted domina el CAD introducirá los vértices del polígono de lados a través de sus correspondientes valores reales x, e y, con el comando polilínea, incluso ajustando una polilínea a un borde de arroyo y realizará el cálculo con el software.-.



Determinación de un área por división en triángulos.

Veamos un ejemplo por división de la figura en triángulos. Determinar el área de la figura de arriba por descomposición de la misma en triángulos y aplicando luego la fórmula de Herón, y para completar el cálculo con la fórmula trapezoidal de áreas aplicada sobre el área bordeando el arroyo.

El área de un triángulo en función de los lados se calcula por la fórmula de Herón

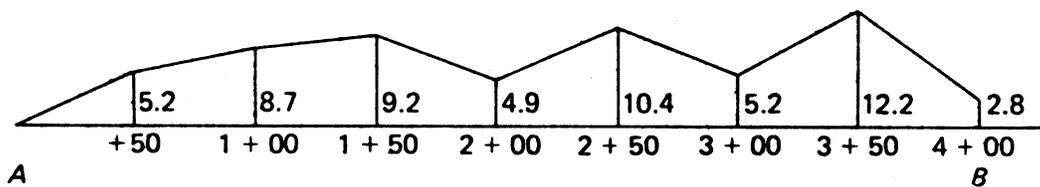
$$\text{AREA} = \text{SQR} (p (p-a) (p-b) (p-c))$$

Donde $p = \frac{1}{2} (a + b + c)$

La suma de los cinco triángulos no da las siguientes áreas

Otro método de campo que se debe utilizar en áreas irregulares, realizando lo que se llama medición de áreas extrapoligonales, es el levantamiento de ordenadas desde una línea recta. También es un método de gabinete como vimos en el ejemplo anterior, que se puede resolver por más de una fórmula, pero en ingeniería agrícola lo más práctico es la fórmula trapezoidal.

Cuando se realiza medición de áreas extrapoligonales, lo que se hace es levantar ordenadas desde una alineación recta.



Determinación de un área por división con normales.

En efecto, se levantan normales trazadas a un contorno irregular desde una línea de referencia A B como se muestra en la figura arriba. Entonces el área limitada por la línea AB y el contorno irregular es aplicando la regla de los trapecios

$$50 (0+5.2 + 8.7+9.2 + 4.9 + 10.4 + 5.2 + 12.2 + 2.8/2) = 2860$$

En conclusión lo que estamos aplicando aquí es la conocida fórmula trapezoidal para cálculo de áreas.

La fórmula **trapezoidal**

$$\text{Area} = d \times [(h_1+h_n)/2 + h_2 + h_3 + h_4.....h_{n-1}]$$

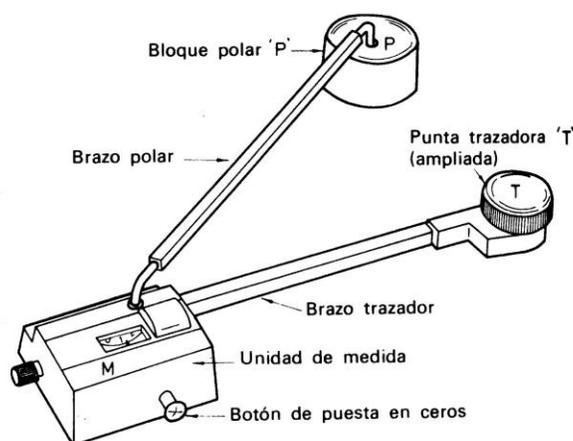
Donde d es la distancia fija a la cual se levantan ordenadas hi,

Esta fórmula trapezoidal es también la que utilizamos para calcular volúmenes de agua, donde en ese caso d = distancia o intervalo vertical entre curvas de nivel , y Ai(m²)son las áreas encerradas por las diferentes curvas de nivel y el eje del terraplén bajo análisis.

$$V(m^3) = l \cdot V. \times [(A_1+A_n)/2 + A_2 + A_3 + A_4.....A_{n-1}]$$

Areas por el Planímetro Polar.-

El planímetro polar de Amsler es un instrumento muy ingenioso, pero actualmente en desuso, que permite hallar el área de cualquier figura irregular dibujada en un plano. En la actualidad con el uso del scanner incorporando imágenes raster en el CAD, archivó para siempre este instrumento que pasó a ser un instrumento de museo. Sin embargo, vale la pena conocer el fundamento básico del instrumento, para que en caso de falta de la última tecnología y teniendo a disposición un planímetro, podamos resolver áreas irregulares y regulares.

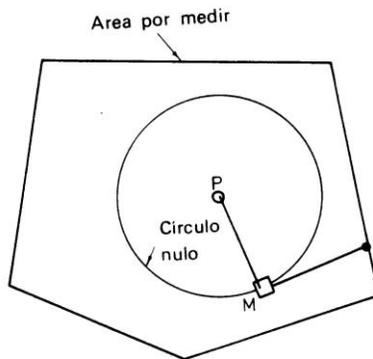


Un ejemplo de un planímetro polar de la década de los 90.

Un brazo de longitud fija, el brazo polar A descansa sobre el bloque polar o polo P. A su vez a la hora de medir, éste polo descansa sobre el plano en una posición estacionaria. Un brazo trazador, lleva una punta trazadora que puede moverse en cualquier dirección sobre el plano.

Unida a ambos brazos se halla la unidad de medida que es una pequeña rueda o tambor M., en conexión con un nonio o vernier G, o mas actualizado un sistema de lectura digital. Conviene hacer una aclaración práctica según el real saber y entender de quien escribe, conviene colocar siempre el planímetro con el polo B fuera de la figura cuya área se quiere evaluar.

Porqué esta recomendación? El tema es que todo planímetro tiene un "círculo nulo" o círculo fundamental: cuando los brazos polar y trazador forman un ángulo recto y este ángulo se conserva al trazar una circunferencia, el tambor F no girará ("patina") y el área del círculo barrido en el plano por el brazo polar, se leerá como nula.



El fabricante suministra el área del círculo fundamental de cada instrumento en forma de una constante que debe agregarse al número de revoluciones registradas por el tambor. Como ese dato en estos instrumentos ya antiguos se ha perdido, es más fácil y recomendable sacar el polo afuera de la figura. En el caso de figuras muy grandes, en lugar de trabajar con el polo adentro, divido la figura en partes, y coloco el polo fuera y sumo las áreas en que se ha dividido la figura mayor.

El área de una figura es directamente proporcional al número de revoluciones del tambor, o sea $A = C n$. Normalmente, el brazo trazador o delineante del instrumento se ajusta para que 1,000 vuelta sea igual a 100 cm^2 , es decir $C = 100$ y $n = 1,000$. Supongamos que al medir un área, la diferencia entre lectura final menos lectura inicial del tambor, nos arroja el valor 3,250 revoluciones. Por lo tanto, quiere decir, que el área de la figura resulta en $3,250 \times 100 \text{ cm}^2 = 325,0 \text{ cm}^2$

Si el plano está a escala 1: 500, el área real se obtiene así

$325 \text{ cm}^2 \times E^2 / 1.10^4 = 325 \times 25 = 8.125 \text{ m}^2$ donde E es el denominador de la escala. Por lo tanto, tendremos la siguiente regla:

$$\text{cm}^2 \times E^2 / 1.10^4 = \text{m}^2$$

$$\text{cm}^2 \times E^2 / 1.10^8 = \text{há}$$

$$\text{cm}^2 \times E^2 / 1.10^{10} = \text{km}^2$$

Es decir el factor C para multiplicar por el $n \Rightarrow$ número de vueltas, resulta de multiplicar 100 en este caso por cada uno de los factores arriba indicados.