EJERCICIOS RESUELTOS DE CÁLCULO

Héctor Rojas Luna

OCTUBRE 2015

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

Este trabajo está dirigido, principalmente, a los estudiantes que cursan la asignatura de Cálculo en la Escuela Superior de Cómputo del Instituto Politécnico Nacional (ESCOM-IPN). Aunque también, puede servir como material de apoyo para los profesores de esta escuela que imparten la asignatura. Este compendio de problemas resueltos está desarrollado acorde al programa vigente de Cálculo que se imparte en la ESCOM-IPN. Explícitamente seccionamos el trabajo expuesto de la siguiente manera: en la primera sección presentamos ejercicios de desigualdades, operaciones con funciones y sus propiedades, en la segunda sección, damos un tratamiento intuitivo acerca del límite de una función en un punto y continuidad, así como también, técnicas para determinar límites. Para la tercera sección se trabaja con la definición de la derivada de una función en un punto, su interpretación como pendiente, velocidad y tasa o razón de cambio; junto con las reglas para encontrar derivadas. En la cuarta sección trabajamos con la definición de la integral definida por sumas de Riemann, propiedades y técnicas de integración. Finalmente, para la quinta sección desarrollamos ejercicios de derivación e integración relacionados con las funciones trascendentales: logaritmos, funciones exponenciales, funciones trigonométricas, trigonométricas inversas y funciones hiperbólicas.

Los problemas que se presentan surgen de la bibliografía aprobada y recomendada en el programa oficial vigente y que se cita al final de este trabajo. En todos los problemas se ha procurado mantener la mayor claridad; tanto en los métodos empleados, como en el uso de los conceptos y teoremas para plantear y resolver problemas específicos, todo ello, con el propósito de que el estudiante forje la habilidad de solventar su propia resolución, la cual es una parte de suma importancia en su formación profesional. Finalmente, aprovecho para agradecer a los integrantes de la academia de ciencias básicas de la ESCOM-IPN por todas las aportaciones y observaciones hechas a este trabajo.

Para facilitar un repaso de las propiedades de $\mathbb{R}$ se presenta el siguiente resumen.

Conjuntos

Aunque en general no existe una definición formal para definir lo que es un conjunto, en este trabajo simplemente diremos que se trata de una colección de objetos de cierto tipo que se llaman los elementos del conjunto. Los objetos de un conjunto se denominan elementos o miembros de un conjunto. Generalmente se utilizan letras mayúsculas $A, B, C, \ldots$ para denotar conjuntos y letras minúsculas $a, b, c, \ldots$ para designar a los elementos de un conjunto. De esta manera, el término "conjunto" se considerará sinónimo de "clase", "colección" y "familia", pero estos términos no se definirán así como tampoco se dará una lista de axiomas para la teoría de conjuntos.

Para que una colección S de objetos sea un conjunto, aquella debe estar bien definida. Esto quiere decir que, dado un objeto x cualquiera, debe ser posible determinar si x es o no un elemento de S. Como por ejemplo el conjunto S dado por las soluciones de la ecuación $x^2 = 9$ o la colección de estados de la República Mexicana son ejemplos de conjuntos. Las colecciones basadas en juicios subjetivos como "todos los jugadores de futbol son buenos" o "todos los adultos inteligentes" no son conjuntos.

Notación

Las nociones básicas de la teoría de conjuntos que se emplearan en los ejercicios de este trabajo son las siguientes:

- El elemento x está en el conjunto A: $x \in A$.
- El elemento x no está en el conjunto A: $x \notin A$.
- El conjunto de todos los x que verifican la propiedad P: $\{x: P\}$.
  Por ejemplo, $A = \{x: x\ es\ una\ vocal\} = \{a, e, i, o, u\}$.
- A es un subconjunto de B: (A está incluido en B) $A \subseteq B$.
- A es un subconjunto propio de B: $A \subset B$. (A está incluido en B pero $A \neq B$)
- La unión de A y B: $A \cup B = \{x: x \in A\ o\ x \in B\}$.
- La intersección de A y B: $A \cap B = \{x: x \in A\ y\ x \in B\}$.
- El conjunto vacío: $\emptyset$

Números Reales y Desigualdades

Nuestro estudio del cálculo se basa en el sistema de los números reales. A este conjunto lo denotaremos como $\mathbb{R}$. Este sistema consiste en el conjunto de los números reales junto con las operaciones algebraicas que se basan en las operaciones de adición y multiplicación entre sus elementos. En seguida se introducen las propiedades de orden de $\mathbb{R}$ y se ilustra el uso de estas propiedades.

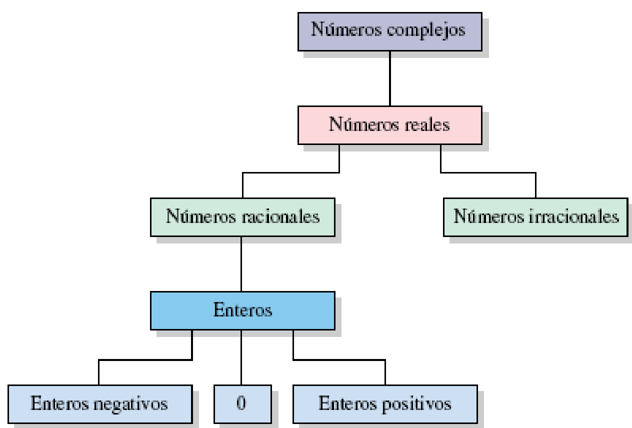
Finalmente la noción de valor absoluto, que se basa en las propiedades de orden será ilustrada con algunos ejemplos.

Clasificación

Es común utilizar varios conjuntos particulares que se denotan por símbolos comunes como se indica a continuación. (El símbolo $:=$ *se emplea para indicar que el símbolo de la izquierda se define por la expresión de la derecha.)*

- *El conjunto de los números naturales* $\mathbb{N} := \{1,2,3, \dots\}$
- *El conjunto de los enteros* $\mathbb{Z} := \{0,1,-1,2,-2,3,-3, \dots\}$
- *El conjunto de los números racionales* $\mathbb{Q} := \left\{\frac{m}{n}, n \in \mathbb{Z}\ y\ n \neq 0\right\}$
  Por ejemplo, $2/5, -19/2, 4/1 = 4$.
- *Los números irracionales. Este conjunto consiste de todos aquellos números reales que no están en* $\mathbb{Q}$*. Es decir, a este tipo de números no se les puede escribir como un cociente de enteros. Por ejemplo,* $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$.

El diagrama de la figura 1 indica las relaciones entre los tipos de números que se emplean en el álgebra. La línea que une dos rectángulos indica que los números citados en el rectángulo superior abarcan los del rectángulo inferior. Los números complejos, contienen a todos los números reales.

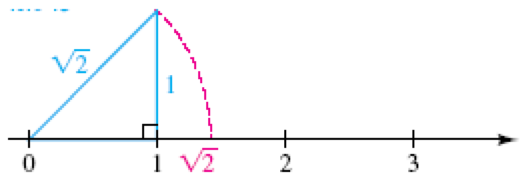


$Figura\ 1$

Representación Geométrica

Los números reales se pueden representar mediante puntos en una recta L*, de modo que a cada número real, a le corresponda exactamente un punto de* L*, y que a cada punto* $\boldsymbol{P}$*, en* L*, le corresponda un número real. A esto se le llama correspondencia biyectiva. Para hacer esto primero se escoge un punto arbitrario,* $\boldsymbol{O}$*, llamado origen, y a él, se le relaciona el número real cero. Los puntos asociados a los enteros se determinan, entonces, trazando segmentos de recta sucesivos de igual longitud a la izquierda y a la derecha de* $\boldsymbol{O}$*, como se ve en la figura 3.*

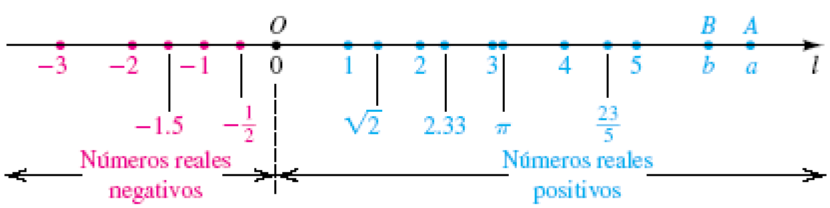
El punto que corresponde a un número racional como $23/5$, *se obtiene al subdividir los segmentos. Los puntos asociados a determinados números irracionales como, por ejemplo* $\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$ *y* $\sqrt{5}$ *se pueden determinar mediante construcción geométrica. (Figura 2)*



$Figura\ 2. Construcción\ geométrica\ de\ \sqrt{2}$

El número $\boldsymbol{a}$ *asociado a un punto* $\boldsymbol{A}$ *en la recta* L, *es la coordenada de* $\boldsymbol{A}$. *Se dice que tales coordenadas constituyen un* ***sistema coordenado****, y que* L *es un* ***eje coordenado*** *o bien una* ***recta numérica real****. Se puede asignar un sentido (o dirección) a* L *expresando que el sentido positivo es hacia la derecha, y el sentido negativo, hacia la izquierda. Se puede indicar el sentido positivo colocando una punta de flecha en*L *como se indica en la figura 3.*

Los números que corresponden a puntos a la derecha de ***O*** *en la figura 2 son los números reales positivos. Los que corresponden a puntos a la izquierda de O son los números reales negativos. El número real cero no es positivo ni negativo. Nótese la diferencia entre un número real negativo y el negativo de un número real. En particular, el negativo de un número real,* a, *puede ser positivo. Por ejemplo, si* a *es negativo, digamos* $a = -3$, *entonces el negativo de a es* $-a = -(-3)$, *que es positivo.*



$Figura\ 3. Recta\ numérica\ real.$

Propiedades algebraicas de $\mathbb{R}$

En el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales hay dos operaciones binarias, denotadas por + y · que se denominan adición (A) y multiplicación (M), respectivamente. Estas operaciones satisfacen las siguientes propiedades:

Suma

$(A_1) a+b=b+a$ para toda a, b en $\mathbb{R}$ (propiedad conmutativa de la adición);

$(A_2)(a+b)+c=a+(b+c)$ para toda a, b, c en $\mathbb{R}$ (propiedad asociativa de la adición);

(A_3)Existe un elemento 0 en $\mathbb{R}$ tal que $0+a=a$ y $a+0=a$ para toda a en $\mathbb{R}$ (existencia del elemento 0);

(A_4)Para cada a en $\mathbb{R}$ existe un elemento $-a$ en $\mathbb{R}$ tal que $a+(-a)=0$ y $(-a)+a=0$ (existencia de elementos negativos).

Multiplicación

$(M_1) a \cdot b=b \cdot a$ para toda a, b en $\mathbb{R}$ (propiedad conmutativa de la multiplicación);

$(M_2)(a \cdot b) \cdot c=a \cdot(b \cdot c)$ para toda a, b, c en $\mathbb{R}$ (propiedad asociativa de la multiplicación);

(M_3)Existe un elemento 1 en $\mathbb{R}$ tal que $1 \cdot a=a$ y $a \cdot 1=a$ para toda a en $\mathbb{R}$ (existencia de un elemento unitario);

(M_4)Para toda $a \neq 0$ en $\mathbb{R}$ existe un elemento $\frac{1}{a}$ en $\mathbb{R}$ tal que $a \cdot\left(\frac{1}{a}\right)=1$ y $\left(\frac{1}{a}\right) \cdot a=1$. En notación también podemos escribir $a^{-1}=\frac{1}{a}$ (existencia de recíprocos);

$(D) a \cdot(b+c)=(a \cdot b)+(a \cdot c)$ y $(b+c) \cdot a=(b \cdot a)+(c \cdot a)$para toda a, b, c en $\mathbb{R}$ (propiedad distributiva de la multiplicación sobre la adición).

Observación. Los números reales son cerrados con respecto a la operación suma (+) y multiplicación(·), es decir, si a y b son dos números reales cualesquiera entonces su suma $a+b$ y su multiplicación $a \cdot b$ también es un número real. El lector debe estar familiarizado con todas estas propiedades. El objeto de esta lista es que todas las técnicas y operaciones comunes del álgebra se pueden deducir de estas nueve propiedades.

Propiedades de la igualdad

Si $a = b$ y c es cualquier número real, entonces

- $a + c = b + c$
- $a \cdot c = b \cdot c$

Multiplicaciones en las que interviene el cero

- $a \cdot 0 = 0$ para todo número real a.
- Si $a \cdot b = 0$ entonces $a = 0$ o bien $b = 0$. Con esto, queremos dar a entender que al menos uno de los dos números a o b es cero.

Propiedades de los números negativos

- $-(-a) = a$.
- $(-a)b = -(ab) = a(-b)$
- $(-a)(-b) = ab$
- $(-1)a = -a$

Propiedades de Orden

Se establecerán ahora algunas de las propiedades básicas de la relación de orden en $\mathbb{R}$. Estas son las conocidas "reglas de desigualdades" que el lector ha usado en cursos de matemáticas anteriores. Se usarán con frecuencia en las secciones posteriores.

Si a y b son números reales, entonces a *es menor que* b *y expresaremos esto como* $a < b$ *si* $b - a$ *es un número positivo.* $(0 < b - a)$. *Esto es equivalente a decir que* b *es mayor que* a*.*

- *Por ejemplo,* $5 < 7$ *ya que* $0 < 7 - 5 = 2$*. (o sea,* $7 - 5 = 2$*es un número positivo)*
- $-7 < -3$*ya que* $0 < -3 - (-7) = 4$*.(o sea,* $-3 - (-7) = 4$ *es un número positivo)*

Desde el punto de vista geométrico, $a < b$ *si el punto* a *esta a la izquierda del punto* b *sobre la recta real. La notación* $a \leq b$ *significa tanto* $a < b$ *como* $a = b$

(equivalentemente $b \geq a$).Si $-a$ es un número positivo, se dice que a es un número real negativo y se escribe $a < 0$. Por ejemplo, $-(-7) = 7$ es un numero positivo, por lo cual se tiene que $-7 < 0$.

Tricotomía

Los números reales están ordenados de manera que si a y b son números reales, entonces se verifica solamente una de las siguientes afirmaciones:

$$a < b, \qquad a = b, \qquad a > b.$$

Los símbolos $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ se llaman desigualdades. Las propiedades siguientes relacionan el orden en $\mathbb{R}$ con la adición y la multiplicación, además proporcionan parte de las herramientas que se emplean para trabajar con desigualdades.

Propiedades de las desigualdades

1. *Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.(propiedad transitiva)*
2. *Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$ para todo número real c.*
3. *Si $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$.*
4. *Si $a < b$ y $0 < c$, entonces $ac < bc$*
5. *Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $bc < ac$*
6. *Si $a \neq 0$, entonces $a^2 > 0$*
7. *Si $ab > 0$, entonces a y b son ambos positivos o ambos negativos.*

Las siguientes propiedades adicionales importantes de las desigualdades nos ayudaran en ciertos casos.

8. *Si $0 < a < b$ entonces $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.*
9. *Si $0 < a < b$ entonces $a^2 < b^2$*
10. *Si $0 < a < b$ entonces $\sqrt{a} < \sqrt{b}$*
11. *Si $0 < a < 1$ entonces $0 < a^2 < a$*

Intervalos

Supongamos que $a < b$*. El intervalo abierto es el conjunto de todos los números comprendidos entre a y b:*

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$$

El intervalo cerrado $[a, b]$ *es el intervalo abierto* (a, b) *junto con los extremos a y b:*

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$$

Existen otros siete tipos de intervalos

$(a,b] = \{x \in \mathbb{R}: a < x \leq b\}$

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\}$

$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}: a < x\}$

$[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x\}$

$(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R}: x \leq b\}$

$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}: x < b\}$

$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

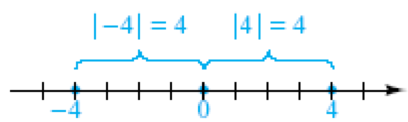
Esta notación para los intervalos es fácil de recordar: utilizamos un corchete para indicar la inclusión o exclusión de un extremo; en caso contrario un paréntesis. Los símbolos $-\infty$ *e* ∞ *no representan números reales, por lo cual no existen los intervalos* $[a, \infty]$ *ni* $[-\infty, b]$ *ni otros de la misma forma.*

Valor absoluto

Dos propiedades importantes de un número real a son su signo y su medida o magnitud. Desde el punto de vista geométrico, el signo de a nos dice si el punto a está a la derecha o a la izquierda de 0 sobre la recta real. La magnitud de a es la distancia entre el punto a y el 0; el número no tiene signo y su magnitud es cero. Habitualmente a la magnitud de a se le llama valor absoluto de a, se representa como $|a|$. El valor absoluto de a se define de la siguiente manera:

$$|a| = \begin{cases} a \; si \; a \geq 0 \\ \\ -a \; si \; a < 0 \end{cases}$$

Otras caracterizaciones son: $|a| = \sqrt{a^2}$; $|a| = \max\{a, -a\}$.



Interpretaciones geométricas:

- $|a| = |a - 0|$ *Distancia de* a *al* 0.
- $|c - a|$ *Distancia de* a *a* c.

Propiedades:

1. $|a| = 0$ *si y sólo si* $a = 0$.
2. $|b - a| = |a - b|$.
3. $|ab| = |a||b|$
4. $|a|^2 = |a^2| = a^2$
5. $|a + b| \leq |a| + |b|$*(desigualdad del triángulo)*
6. $\big||a| - |b|\big| \leq |b - a|$

UNIDAD TEMÁTICA I. Funciones algebraicas y sus gráficas.

1.1 Números reales y desigualdades

Resolver una desigualdad en la variable x, consiste en hallar el conjunto de los valores numéricos de x para los cuales la desigualdad se verifica.

La manera de resolver una desigualdad es muy parecida a la que utilizamos para resolver una ecuación algebraica pero existe una diferencia importante. Utilizando las propiedades de desigualdades podemos sumar y restar un numero en ambos miembros de la desigualdad sin alterar la relación de orden existente, incluso podemos multiplicar o dividir por un numero positivo y la desigualdad se conservara; no sucede lo mismo si se multiplica o divide en ambos miembros por un numero negativo, en este caso la desigualdad se invertirá

Al sumar, restar, multiplicar o dividir es posible sustituir una desigualdad determinada por una lista de desigualdades equivalentes, la última desigualdad debe ser de tal forma que sea evidente hallar los valores numéricos que la satisfacen.

1. Resuelve la siguiente desigualdad $-3x+4<11$.

***Solución**. Las siguientes desigualdades son equivalentes.*

$-3x+4<11$	*Desigualdad inicial*
$-3x+4+(-4)<11+(-4)$	*Suma del inverso aditivo de 4*
$-3x<7$	*Desigualdad equivalente*
$\left(\frac{1}{-3}\right)(-3x)>\left(\frac{1}{-3}\right)7$	*Producto por el inverso multiplicativo de -3. La desigualdad se ha invertido*
$x>-\frac{7}{3}$	*Desigualdad equivalente*

En términos de intervalos se concluye que el conjunto solución de la desigualdad dada es el conjunto de todas las x tales que $x \in \left(-\frac{7}{3},\infty\right)$.

2. Resuelve la siguiente desigualdad $4x-3<2x+5$

***Solución**. Las siguientes desigualdades son equivalentes.*

$4x-3<2x+5$	*Desigualdad inicial*
$4x<2x+8$	*Desigualdad equivalente donde se ha sumado 3 en ambos miembros*
$2x<8$	*Desigualdad equivalente donde se ha sumado -2x en ambos miembros*
$\left(\frac{1}{2}\right)2x<\left(\frac{1}{2}\right)8$	*Producto por el inverso multiplicativo de 2 en ambos miembros de la desigualdad equivalente anterior*
$x<4$	*Desigualdad equivalente*

En términos de intervalos se concluye que el conjunto solución de la desigualdad dada es el conjunto de todas las x tales que $x \in (-\infty, 4)$.

3. Resuelve la siguiente desigualdad $-6 < 2x - 4 < 2$

***Solución**. Método 1.*

Un número real x, es una solución de la desigualdad dada si y sólo si es una solución simultanea para las dos desigualdades siguientes

$$-6 < 2x - 4 \text{ y } 2x - 4 < 2$$

La primera desigualdad se resuelve como sigue:

$-6 < 2x - 4$	*Desigualdad inicial izquierda*
$-2 < 2x$	*Desigualdad equivalente donde se ha sumado 4*
$\left(\frac{1}{2}\right)(-2) < \left(\frac{1}{2}\right)2x$	*Producto por el inverso multiplicativo de 2 en ambos miembros de la desigualdad equivalente anterior*
$-1 < x$	*Desigualdad equivalente*

A continuación se resuelve la segunda desigualdad

$2x - 4 < 2$	*Desigualdad inicial derecha*
$2x < 6$	*Desigualdad equivalente donde se ha sumado 4*
$\left(\frac{1}{2}\right)(2x) < \left(\frac{1}{2}\right)6$	*Producto por el inverso multiplicativo de 2 en ambos miembros de la desigualdad equivalente anterior*
$x < 3$	*Desigualdad equivalente*

De esta manera, x es una solución de la desigualdad $-6 < 2x - 4 < 2$ si y sólo si satisface las dos condiciones dadas

$$-1 < x \text{ y } x < 3$$

O sea

$$x \in (-1, +\infty) \ y \ x \in (-\infty, 3)$$

Podemos concluir que el conjunto solución de la desigualdad dada es el conjunto de todas las x tales que

$$x \in A \cap B = (-1, +\infty) \cap (-\infty, 3) = (-1,3)$$

O sea

$$-1 < x < 3.$$

Método 2. Otra estrategia comúnmente empleada consiste en resolver en forma simultánea ambas desigualdades, este método se muestra a continuación:

$-6 < 2x - 4 < 2$	Desigualdad inicial
$-2 < 2x < 6$	Desigualdad equivalente donde se ha sumado 4

$\left(\frac{1}{2}\right)(-2) < \left(\frac{1}{2}\right)2x < \left(\frac{1}{2}\right)6$	Producto por el inverso multiplicativo de 2 en todos los miembros de la desigualdad equivalente anterior
$-1 < x < 3$	Desigualdad equivalente

Para resolver una desigualdad que incluye polinomios de grado mayor que uno, se expresa cada uno de estos polinomios como producto de factores lineales $ax + b$, o como factores cuadráticos irreducibles de la forma $ax^2 + bx + c$, en algunos casos encontraremos ambas formas en la misma desigualdad.

Si alguno de esos factores es distinto de cero en un intervalo dado, entonces es positivo o negativo en el intervalo, es decir, si escogemos cualquier valor de prueba k en el intervalo y resulta que el factor es positivo o negativo cuando $x = k$, entonces diremos que es positivo o negativo ese factor en el intervalo dado.

***Observación**. El procedimiento descrito anteriormente que nos permitirá conocer el signo que tiene un factor lineal o cuadrático en un intervalo dado, está justificado por el siguiente resultado.*

***Teorema**. Si una función f es continua en un intervalo $\boldsymbol{I}$ y $f(x) \neq 0$ para toda x en $\boldsymbol{I}$, entonces $f(x) > 0$ o $f(x) < 0$ para toda x en $\boldsymbol{I}$.*

1. Resuelve la siguiente desigualdad

$$\frac{1}{5}(x^2 - 4x + 3) < 0$$

Solución. Método 1. La desigualdad inicial es equivalente a la desigualdad

$$(x - 1)(x - 3) < 0$$

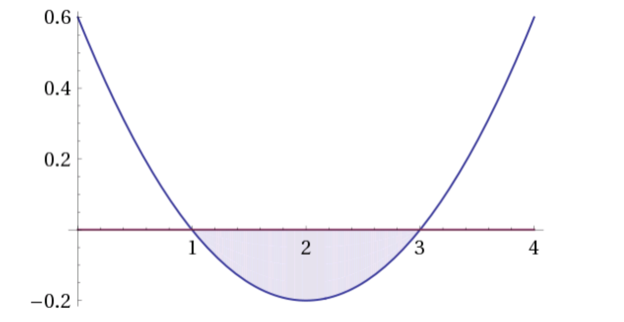
Los factores $x - 1$ y $x - 3$ son cero cuando $x = 1$ y $x = 3$. Al retirar estos puntos del eje real, se determinan los siguientes intervalos que no se traslapan

$$(-\infty, 1), (1,3), (3, \infty)$$

Notemos ahora que la función $f(x) = \frac{1}{5}(x - 1)(x - 3)$ es continua y no se anula dentro de cada uno de estos intervalos, por lo tanto podemos determinar el signo que tienen los factores $x - 1$ y $x - 3$ en cada intervalo con un valor de prueba. Para hacer esto, vamos a utilizar la siguiente tabla de signos

$Intervalo$	$(-\infty, 1)$	$(1,3)$	$(3, \infty)$
$Factor\ de\ prueba\ k$	0	2	4
$Signo\ de\ x - 1$	$-$	$+$	$+$
$Signo\ de\ x - 3$	$-$	$-$	$+$
$Signo\ de\ f(x)$	$+$	$-$	$+$

Las soluciones de la desigualdad $\frac{1}{5}(x-1)(x-3)<0$ *son los valores de* x *para los cuales el signo resultante es estrictamente negativo. Así, la solución de esta desigualdad es sólo el intervalo* $(1,3)$. *Este resultado también puede comprobarse gráficamente. Figura 4.*



$$figura\ 4.\ Grafica\ de\ la\ funcion\ f(x)=\frac{1}{5}(x-1)(x-3)<0\ en\ (1{,}3)$$

Método 2. Por casos.

La desigualdad inicial dada en el ejemplo anterior es equivalente a la desigualdad

$$(x-1)(x-3)<0$$

Esta última desigualdad se resolverá si conocemos los valores de x *para los cuales el producto de los factores* $x-1$ *y* $x-3$ *en* $\mathbb{R}$ *es un número negativo. Para hallar los valores de* x *vamos a utilizar la siguiente propiedad:* Si $ab<0$, entonces a y b tienen signos opuestos. De lo anterior podemos considerar dos casos:

$$x-1<0\ \&\ x-3>0 \quad \textit{o bien} \quad x-1>0\ \&\ x-3<0.$$

Caso 1. $x-1<0$ *y* $x-3>0$.

Las desigualdades anteriores son equivalentes a las desigualdades $x<1$ *&* $x>3$ *por lo tanto, se deben encontrar todos los valores de* x *en* $\mathbb{R}$ *tales que* $x\in(-\infty,1)$ *&* $x\in(3,\infty)$, *estas condiciones nos sugieren que* x *pertenece al conjunto*

$$(-\infty,1)\cap(3,\infty)=\emptyset$$

Por lo tanto, este conjunto no es solución de la desigualdad.

Caso 2. $x-1>0$ y $x-3<0$.

Las desigualdades anteriores son equivalentes a las desigualdades $x>1$ *&* $x<3$, *por lo tanto, se deben encontrar todos los valores de* x *en* $\mathbb{R}$ *tales que* $x\in(1,\infty)$ *&* $x\in(-\infty,3)$, *estas condiciones nos sugieren que* x *pertenece al conjunto*

$$(-\infty,3)\cap(1,\infty)=(1{,}3)$$

Del análisis de los casos anteriores se concluye que el conjunto solución para la desigualdad $\frac{1}{5}(x-1)(x-3)<0$, *está dado por*

$$x \in \emptyset \cup (1,3) = (1,3).$$

2. Resuelve la siguiente desigualdad

$$\frac{(x+2)(3-x)}{(x+1)(x^2+1)} \leq 0$$

***Solución**. Método 1.*

Los factores $x+2$ *y* $3-x$ *son cero cuando* $x=-2$ *y* $x=3$ *respectivamente. El denominador del cociente se anula cuando* $x=-1$. *Al retirar estos puntos del eje real se obtienen los siguientes intervalos que no se traslapan:*

$$(-\infty,-2);\ (-2,-1);\ (-1,3);\ (3,\infty)$$

Notemos ahora que la función

$$f(x) = \frac{(x+2)(3-x)}{(x+1)(x^2+1)}.$$

Es continua y no se anula dentro de cada uno de estos intervalos y por lo tanto podemos determinar el signo que tienen los factores $x+2$ *y* $3-x$ *y* $x+1$ *en cada intervalo con un valor de prueba. Utilizando el hecho de que el factor* x^2+1 *siempre es positivo, obtenemos la siguiente tabla de signos*

$Intervalo$	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,3)$	$(3,\infty)$
$Factor\ de\ prueba\ k$	-3	$-3/2$	0	4
$Signo\ de\ x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$Signo\ de\ 3-x$	$+$	$+$	$+$	$-$
$Signo\ de\ x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$signo\ de\ x^2+1$	$+$	$+$	$+$	$+$
$Signo\ de\ f(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$

Las soluciones para la desigualdad

$$\frac{(x+2)(3-x)}{(x+1)(x^2+1)} \leq 0$$

Son los valores de x *para los cuales el signo resultante es menor o igual a cero. Así, la solución de esta desigualdad son todas las* x *tales que*

$$x \in [-2,-1) \cup [3,\infty)$$

Método 2. Por casos.

El resultado anterior se puede verificar si hacemos un análisis de los casos en que la variable x produce en la expresión algebraica $\frac{(x+2)(3-x)}{(x+1)(x^2+1)}$ valores menores o iguales a cero, para lograrlo vamos a considerar tres casos:

***Caso 1**. Buscamos a todos los valores de x para los cuales se cumple lo siguiente*

$$x+2>0;\ \ 3-x>0;\ \ x+1<0$$

$$\text{O sea}\quad x>-2;\ \ x<3;\ \ x<-1$$

En términos de intervalos, se concluye que

$$x\in(-2,\infty)\cap(-\infty,3)\cap(-\infty,-1)=(-2,-1)$$

***Caso 2**. Buscamos a todos los valores de x para los cuales se cumple*

$$x+2>0;\ \ 3-x<0;\ \ x+1>0$$

$$\text{O sea}\quad x>-2;\ \ 3<x;\ \ x>-1$$

En términos de intervalos, se concluye que

$$x\in(-2,\infty)\cap(3,\infty)\cap(-1,\infty)=(3,\infty)$$

***Caso 3**. Buscamos a todos los valores de x para los cuales se cumple*

$$x+2<0;\ \ 3-x>0;\ \ x+1>0$$

$$\text{O sea}\quad x<-2;\ \ x<3;\ \ x>-1$$

En términos de intervalos, se concluye que

$$x\in(-\infty,-2)\cap(-\infty,3)\cap(-1,\infty)=\emptyset$$

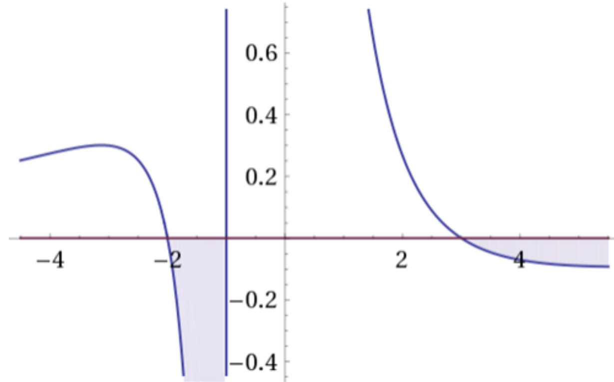
De los resultados obtenidos en los casos 1, 2 ,3 y utilizando el hecho de que la desigualdad no es estricta y admite el valor de cero, se concluye que la solución de la desigualdad

$$\frac{(x+2)(3-x)}{(x+1)(x^2+1)}\leq 0.$$

Está dada por todos los valores de x tales que

$$x\in[-2,-1)\cup[3,\infty)\cup\emptyset=[-2,-1)\cup[3,\infty).$$

Finalmente, notemos que este resultado también puede comprobarse gráficamente. Figura 5.



$figura\ 5.\ \ f(x) = \dfrac{(x+2)(3-x)}{(x+1)(x^2+1)} \leq 0\ en\ [-2,-1) \cup [3,\infty)$

Desigualdades y valor absoluto

En esta sección revisaremos algunas de las técnicas que se utilizan para resolver algunas desigualdades que contienen valores absolutos. En las siguientes expresiones, vamos a emplear las letras griegas épsilon(ε) *y delta*(δ) *para denotar distancias.*

$\boldsymbol{I}$ *La desigualdad* $|x-c|<\delta$ *donde* $\delta>0$ *y* $c\in\mathbb{R}$ *es equivalente a la desigualdad*

$$-\delta<x-c<\delta.$$

Lo cual ocurre si y sólo si

$$c-\delta<x<c+\delta \Leftrightarrow x\in(c-\delta,c+\delta)\ldots(1).$$

En el caso en el cual $c=0$*, se tiene la desigualdad* $|x|<\delta$*. La cual es equivalente a la desigualdad*

$$-\delta<x<\delta\ldots(2).$$

Lo cual ocurre si y sólo si $x\in(-\delta,\delta)$.

1. Resuelve la siguiente desigualdad $|x-5|<1.(c=5,\delta=1)$

***Solución**. La desigualdad* $|x-5|<1$ *ocurre si y sólo si*

$$-1<x-5<1 \Leftrightarrow 4<x<5 \Leftrightarrow x\in(4,6)$$

2. Resuelve la siguiente desigualdad $|x+2|<3.(c=-2,\delta=3)$

***Solución**. La desigualdad* $|x+2|<3$ *ocurre si y sólo si*

$$-3<x+2<3 \Leftrightarrow -5<x<1 \Leftrightarrow x\in(-5,1)$$

$\boldsymbol{II}$ *La desigualdad* $0<|x-c|<\delta$ *donde* $\delta>0$ *y* $c\in\mathbb{R}$ *es equivalente a la desigualdad*

$$-\delta<x-c<\delta.$$

Junto con la condición de que $x-c\neq 0$*. Esto se cumplirá si* $x\neq c$.

Por lo tanto, la desigualdad $0<|x-c|<\delta$ *ocurre si y sólo si*

$$x-c<0\ldots(i)$$

$$x-c>0\ldots(ii)$$

De la definición de valor absoluto y de las condiciones anteriores se deduce

$$\boxed{0 < |x - c| < \delta \Leftrightarrow x \in (c - \delta, c) \cup (c, c + \delta) \ldots\ (3)}$$

1. Resuelve la siguiente desigualdad

$$0 < |x - 5| < 1;\ c = 5\ y\ \delta = 1$$

***Solución**. Para que* $0 < |x - 5|$ *se deben considerar dos casos:*

$$x - 5 < 0 \ldots\ (1)$$

$$x - 5 > 0 \ldots\ (2)$$

Si $x - 5 < 0$ *entonces por la definición de valor absoluto, la desigualdad*

$$0 < |x - 5| < 1.$$

Es equivalente a

$$0 < -(x - 5) < 1$$

O sea,

$$0 < 5 - x < 1 \Leftrightarrow -5 < -x < -4 \Leftrightarrow 4 < x < 5$$

Por lo tanto,

$$x \in (4, 5) \ldots\ (i)$$

Por otra parte, si $x - 5 > 0$ *entonces por la definición de valor absoluto, la desigualdad* $0 < |x - 5| < 1$ *es equivalente a*

$$0 < x - 5 < 1$$

Es decir

$$0 < x - 5 < 1 \Leftrightarrow 5 < x < 6$$

Por lo tanto,

$$x \in (5, 6) \ldots\ (ii)$$

Finalmente, de las expresiones (i) *y* (ii) *se concluye que:*

$$0 < |x - 5| < 1 \Leftrightarrow x \in (4, 5) \cup (5, 6)$$

Tal y como se indica en la expresión (3). Nuevamente, podemos verificar este resultado de manera gráfica.

***Observación**. Siempre es mejor hacer el análisis por separado de cada uno de los casos que se presentan en este tipo de desigualdades en vez de sólo sustituir los valores de c y de δ en la expresión (3).*

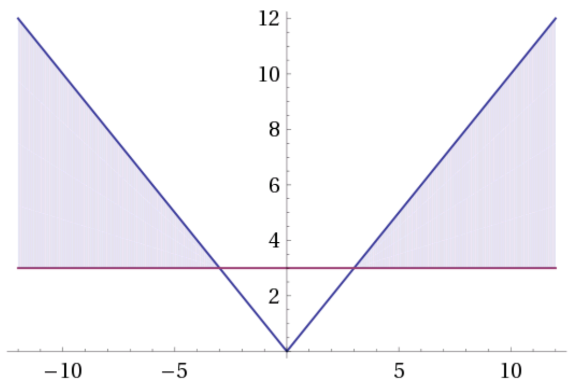
$\boldsymbol{III}$ *Veamos ahora el siguiente caso. Sea $\varepsilon > 0$. Si pensamos en $|x|$ como la distancia entre el valor de x y cero, entonces*

$$|x| > \varepsilon \Leftrightarrow x > \varepsilon \ \ o \ \ x < -\varepsilon$$

Por ejemplo,

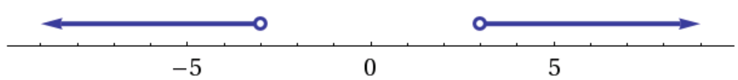
$$|x| > 3 \ \Leftrightarrow x > 3 \ \ o \ \ x < -3$$

Esto se puede ver en la grafica 6



$Figura\ 6. Gráfica\ de\ f(x) = |x| > 3$

La representación de los intervalos en la recta real se observa en la figura 7



$Figura\ 7.\ Representación\ de\ (-\infty, -3]\ y\ [3, \infty)\ \ en\ el\ eje\ real$

1. Resuelve la siguiente desigualdad

$$|2x + 3| > 5$$

***Solución**. Método 1. De acuerdo con la descripción anterior tenemos lo siguiente:*

$$|2x + 3| \geq 5 \Leftrightarrow 2x + 3 \geq 5 \ \ o \ \ 2x + 3 \leq -5$$

Resolviendo la desigualdad $2x + 3 \geq 5$:

$$2x + 3 \geq 5 \ \Leftrightarrow 2x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 1$$

Por lo tanto, la solución de la desigualdad $2x + 3 \geq 5$ son todos aquellos valores de x tales que $x \in [1, \infty)$.

Ahora resolvemos la desigualdad $2x+3 \leq -5$*:*

$$2x+3 \leq -5 \iff 2x \leq -8 \iff x \leq -4$$

Por lo tanto, la solución de la desigualdad $2x+3 \leq -5$ *son todos aquellos valores de* x *tales que* $x \in (-\infty, -4]$.

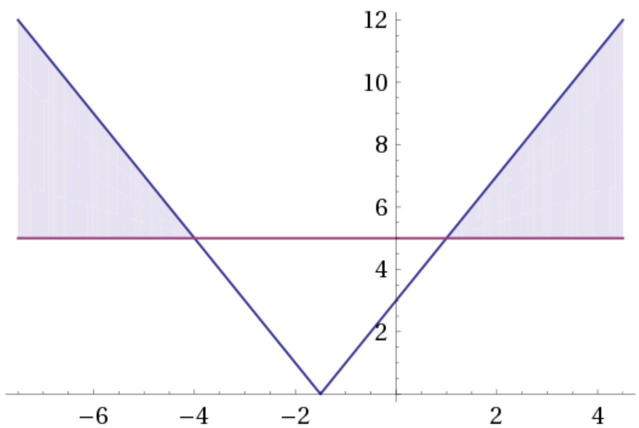
Finalmente, concluimos lo siguiente:

$$|2x+3| \geq 5$$

$$\iff 2x+3 \geq 5 \ \ o \ \ 2x+3 \leq -5$$

$$\iff x \in (-\infty, -4] \cup [1, \infty).$$

El conjunto solución de la desigualdad se observa en la figura 8.



$Figura\ 8.\ Gráfica\ de\ f(x) = |2x+3|$

Método 2. Un procedimiento alternativo es con el uso de las siguientes propiedades

$$Si\ 0 < a < b\ entonces\ a^2 < b^2\ \ y\ |a| = \sqrt{a^2}$$

Puesto que

$$|2x+3| \geq 5 > 0$$

Entonces al elevar al cuadrado a ambos lados de la desigualdad, nos queda

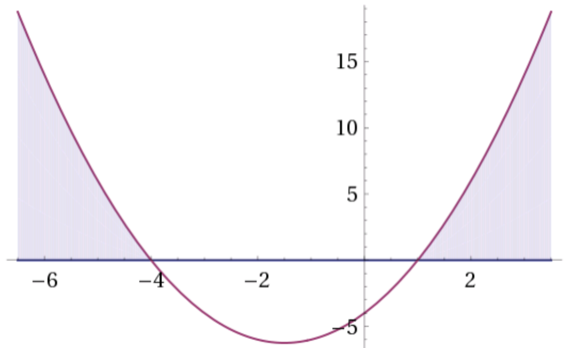
$$5^2 \leq |2x+3|^2$$

$$\iff 25 \leq (2x+3)^2$$

$$\iff 0 \leq x^2+3x-4$$

$$\iff 0 \leq (x+4)(x-1)$$

La desigualdad equivalente anterior se puede resolver utilizando una tabla de signos o analizando los posibles casos, el resultado será el mismo como se observa en la figura 9.



$$Figura\ 9.\ Gráfica\ de\ f(x) = (x+4)(x-1)$$

Otros tipos de desigualdades con valor absoluto que también pueden resolverse utilizando todas las propiedades enunciadas anteriormente se expresan en los siguientes ejercicios.

1. Resuelve la siguiente desigualdad

$$|3x - 9| < |4 - 8x|$$

***Solución**. Método 1.*

Podemos utilizar las propiedades siguientes:

$$Si\ 0 < a < b\ entonces\ a^2 < b^2\ \ y\ \ |a| = \sqrt{a^2}$$

Puesto que

$$0 < |3x - 9| < |4 - 8x|$$

Entonces al elevar al cuadrado en ambos lados de la desigualdad, se tiene

$$|3x - 9|^2 < |4 - 8x|^2$$

$$\Leftrightarrow (3x - 9)^2 < (4 - 8x)^2$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 - 54x + 81 < 16 - 64x + 64x^2$$

$$\Leftrightarrow 65 < 55x^2 - 10x$$

$$\Leftrightarrow 0 < 55x^2 - 10x - 65$$

$$\Leftrightarrow 0 < \left(x - \frac{13}{11}\right)(x + 1).$$

La solución de la desigualdad anterior está dada si conocemos los valores de x para los que el producto de los factores $\left(x-\frac{13}{11}\right)$ y $(x+1)$ en $\mathbb{R}$, nos da como resultado un número positivo. Para hallar estos valores vamos a utilizar la siguiente propiedad: Si $ab>0$, entonces a y b tienen el mismo signo. Por lo tanto, se tienen dos casos en la desigualdad:

$$x-\frac{13}{11}>0 \ \&\ x+1>0 \quad \textit{o bien}\ x-\frac{13}{11}<0\ y\ \ x+1<0.$$

Caso 1. $x-\frac{13}{11}>0$ y $x+1>0$

De las desigualdades anteriores se tiene: $x>\frac{13}{11}$ *y* $x>-1$*. Por lo tanto se deben encontrar todas las* x *en* $\mathbb{R}$ *tales que*

$$x\in\left(\frac{13}{11},\infty\right)\ y\ \ x\in(-1,\infty)$$

Por lo tanto, para este caso en particular los valores de x se deben tomar de tal forma que

$$x\in\left(\frac{13}{11},\infty\right)\cap(-1,\infty)=\left(\frac{13}{11},\infty\right).$$

Caso 2. $x-\frac{13}{11}<0$ *y* $x+1<0$.

De las desigualdades anteriores se tiene: $x<\frac{13}{11}$ *y* $x<-1$*. Por lo tanto, se deben encontrar todas las* x *en* $\mathbb{R}$ *tales que*

$$x\in\left(-\infty,\frac{13}{11}\right)\ y\ \ x\in(-\infty,-1)$$

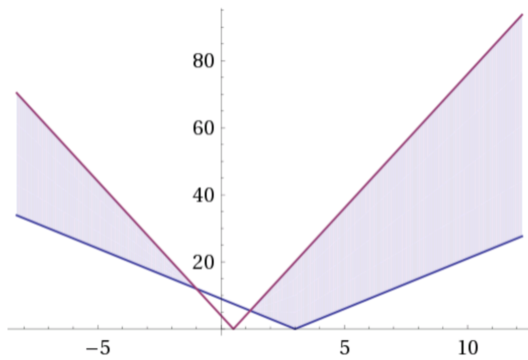
Por lo tanto, para este caso en particular los valores de x se deben tomar de tal forma que

$$x\in(-\infty,-1)\cap\left(-\infty,\frac{13}{11}\right)=(-\infty,-1)$$

De los resultados obtenidos en los casos 1 y 2, se concluye que el conjunto solución para la desigualdad $|3x-9|<|4-8x|$ *está dado por*

$$x\in(-\infty,-1)\cup\left(\frac{13}{11},\infty\right).$$

Estos conjuntos están representados en la figura 10.



$Figura\ 10. Gráficas\ de\ y = |4 - 8x|\ \&\ y = |3x - 9|$

Método 2. Ahora, ya podemos utilizar el hecho de que

$$|3x - 9| < |4 - 8x| \Leftrightarrow 0 < \left(x - \frac{13}{11}\right)(x + 1).$$

Y observamos que los factores $\left(x - \frac{13}{11}\right)$ *y* $(x + 1)$ *son cero cuando* $x = \frac{13}{11}$ *y* $x = -1$. *Al retirar estos puntos del eje real, se forman los siguientes intervalos que no se traslapan*

$$(-\infty, -1), \left(-1, \frac{13}{11}\right), \left(\frac{13}{11}, \infty\right)$$

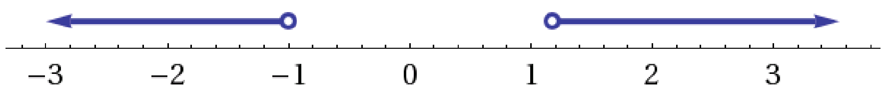
Notemos ahora que la función $f(x) = \left(x - \frac{13}{11}\right)(x + 1)$ *es continua y no se anula dentro de cada uno de estos intervalos; podemos determinar el signo que tienen los factores* $x - \frac{13}{11}$ *y* $x + 1$ *en cada intervalo con un valor de prueba, para hacer esto utilizaremos la siguiente tabla de signos*

$Intervalo$	$(-\infty, -1)$	$\left(-1, \frac{13}{11}\right)$	$\left(\frac{13}{11}, \infty\right)$
$Factor\ de\ prueba\ k$	-2	0	2
$Signo\ de\ x - \frac{13}{11}$	$-$	$-$	$+$
$Signo\ de\ x + 1$	$-$	$+$	$+$
$Signo\ de\ f(x)$	$+$	$-$	$+$

Las soluciones de la desigualdad $0 < \left(x - \frac{13}{11}\right)(x + 1)$ *son los valores de* x *para los cuales el signo resultante es estrictamente negativo. Así, la solución de esta desigualdad está dado por todas las* x *tales que*

$$x \in (-\infty, -1) \ \cup \left(\frac{13}{11}, \infty\right).$$

La representación de estos conjuntos en la recta real se observa en la figura 11



$$Figura\ 11.\ Representación\ de\ x \in (-\infty, -1)\ y\ \left(\frac{13}{11}, \infty\right) en\ el\ eje\ real.$$

Método 3. Como $|3x - 9| < |4 - 8x|$, *entonces para* $4 - 8x \neq 0$ *o sea,* $x \neq \frac{1}{2}$ *podemos reescribir a esta desigualdad como*

$$\frac{|3x - 9|}{|4 - 8x|} < 1; \ \ x \neq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{3x - 9}{4 - 8x}\right| < 1$$

$$\Leftrightarrow -1 < \frac{3x - 9}{4 - 8x} < 1.$$

De esta manera, x *es una solución de la desigualdad* $-1 < \frac{3x-9}{4-8x} < 1;\ x \neq \frac{1}{2}$ *si, y sólo si se satisfacen las dos desigualdades*

$$-1 < \frac{3x - 9}{4 - 8x} \quad y \quad \frac{3x - 9}{4 - 8x} < 1; \ \ x \neq \frac{1}{2}$$

Las desigualdades anteriores son equivalentes a las expresiones

$$\frac{5x \mp 5}{4 - 8x} < 0 \ \ y \ \ \frac{11x - 13}{4 - 8x} < 0; \ \ \ x \neq \frac{1}{2}$$

Utilizando una tabla de signos es posible analizar cada una de las desigualdades y comprobar que el resultado es el mismo.

1.2 Funciones

Representación de las funciones

Se tienen cuatro maneras posibles de representar una función.

- ***Verbalmente****: mediante una descripción en palabras.*
- ***Numéricamente****: con una tabla de valores.*
- ***Visualmente****: mediante una gráfica.*
- ***Algebraicamente****: por medio de una fórmula explícita.*

Si una sola función se puede representar de las cuatro maneras, con frecuencia resulta útil pasar de una representación a otra, para adquirir conocimiento adicional de esa función. Pero ciertas funciones se describen de manera más natural con un método más que con otro.

1. Sea $g(x) = \frac{\sqrt{4+x}}{1-x}$.

(a) Determina el dominio de g.

(b) Calcular $g(5), g(-2)$ y $g(-a)$

Solución *(a) La expresión* $\frac{\sqrt{4+x}}{1-x}$ *es un número real si y sólo si el radicando* $4+x$ *es no negativo, y el denominador* $1-x$ *no es igual a cero. Así,* $g(x)$ *existe si y sólo si*

$$4 + x \geq 0 \quad y \quad 1 - x \neq 0$$

Es decir,

$$x \geq -4 \quad y \quad x \neq 1$$

Podemos expresar el dominio en términos de intervalos como

$$D(f) = [-4,1) \cup (1, \infty).$$

(b) Para calcular los valores de g *se sustituye el valor de* x *en la expresion algebraica*

$$g(5) = \frac{\sqrt{4+5}}{1-5} = \frac{\sqrt{9}}{-4} = -\frac{3}{4}$$

$$g(-2) = \frac{\sqrt{4+(-2)}}{1-(-2)} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$g(-a) = \frac{\sqrt{4+(-a)}}{1-(-a)} = \frac{\sqrt{4-a}}{1+a}$$

2. Determina el dominio y el rango de $f(x) = 4 + \sqrt{x-3}$.

***Solución**. Para que $\sqrt{x-3}$ sea un número mayor o igual a cero, se debe tener que $x-3 \geq 0$, o sea que se debe tener que $x \geq 3$ con lo cual se garantiza que*

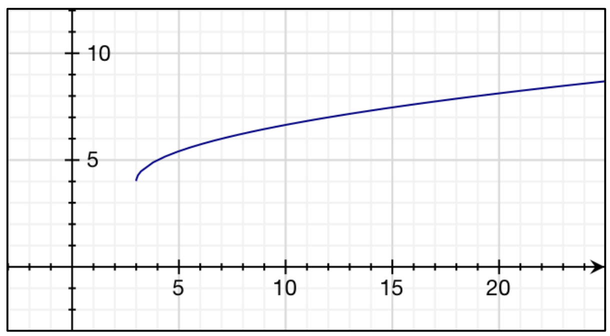
$$\sqrt{x-3} \geq 0$$

Y en consecuencia

$$4+\sqrt{x-3} \geq 4.$$

El menor valor de $f(x)$ ocurre en $x=3$ y es $f(3)=4+\sqrt{0}=4$. Además, debido a que $\sqrt{x-3}$ aumenta cuando el valor de x aumenta, se concluye que $f(x) \geq 4$. Por consiguiente se concluye que el rango de f es $R(f)=[4,\infty)$ y que el dominio de f es como $D(f)=[3,\infty)$.

x	$f(x)$
3	4
5	5.41
10	6.64
15	7.46
20	8.12
25	8.69
30	9.19



$$Figura\ 14.\ Gráfica\ de\ y=4+\sqrt{x-3}$$

Funciones polinomiales

Una función $f(x)$ se llama función polinomial o polinomio si f es de la forma

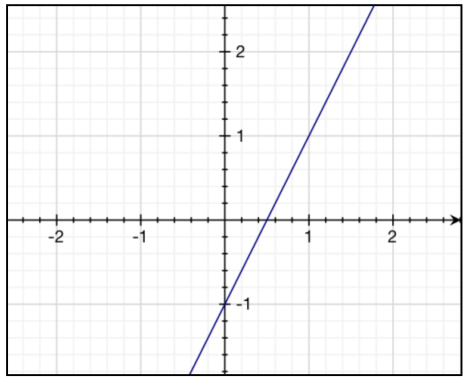
$$f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0.$$

En donde n es un entero no negativo y los números $a_n,\ a_{n-1},\dots,a_2,\ a_1,a_0$ son constantes llamadas coeficientes del polinomio. El dominio de todo polinomio es el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. Si el coeficiente $a_n \neq 0$, entonces el grado del polinomio es n; por ejemplo, la siguiente función es un polinomio de grado 4.

$$f(x)=x^4-16x^2+\sqrt{2}.$$

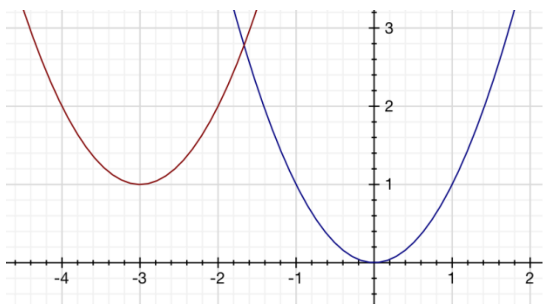
Una función polinomial de grado 1 tiene la forma $f(x)=ax+b$; y se denomina función lineal porque su gráfica es la recta $y=ax+b$, cuya pendiente es a y su ordenada al origen es b. Por ejemplo, la función $f(x)=2x-1$ es una línea recta con pendiente 2 y ordenada al origen $y=-1$. (Figura 15)

x	$f(x)$
–3	–7
–2	–5
–1	–3
0	–1
1	1
2	3
3	5



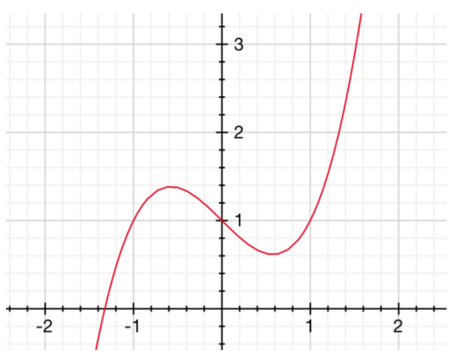
$Figura\ 15.\ \ y = 2x - 1$

Una función polinomial de grado 2 posee la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$; y se llama función cuadrática. La gráfica de una función cuadrática es siempre una parábola que se obtiene mediante una transformación de la parábola $y = ax^2$. Por ejemplo, $y = x^2$ y la función $y = x^2 + 6x + 10$. (Figura 16)



$Figura\ 16.\ \ Gráficas\ de\ \ y = x^2\ \ \ y\ \ y = x^2 + 6x + 10$

Una función polinomial de grado 3 es de la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Y se conoce como función cúbica. La figura 17 muestra la gráfica de una función cúbica.



$Figura\ 17$

Funciones Racionales

Una función racional f es un cociente entre dos polinomios:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Donde P y Q son funciones polinomiales. El dominio consiste en todos los valores de x tales que $Q(x) \neq 0$; por ejemplo la función

$$f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$$

Es una función racional con dominio $D(f) = \{x: x \neq \pm 2\}$.

Su gráfica se indica en la figura 18.

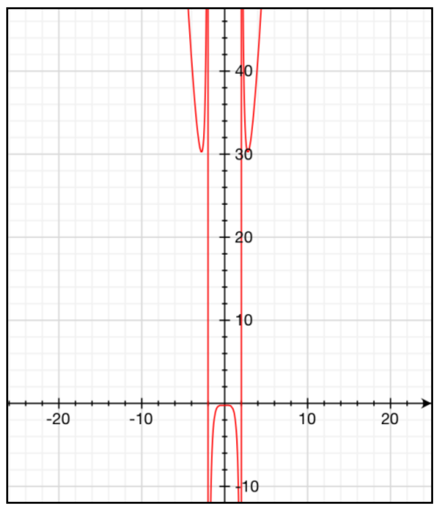


Figura 18. Grafica de la función f(x)

Las funciones racionales son más difíciles de analizar y de representar gráficamente que las polinómicas. Por ejemplo, es importante analizar el comportamiento de una función racional $f = P/Q$ en las proximidades de un cero de Q, también lo es para valores grandes de x, tanto positivos como negativos. Si P y Q no tienen factores comunes, entonces los ceros de Q corresponden a asíntotas verticales de la gráfica de f; la existencia de asíntotas horizontales depende del comportamiento de f para valores grandes de x (esto es, cuando $x \to \pm\infty$). En la unidad temática 2 se definen y estudian en detalle ejercicios de asíntotas verticales y horizontales.

En la figura 19 se muestra la gráfica de

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 4} = \frac{1}{(x-2)^2}$$

Hay que observar que $x = 2$ es una asíntota vertical y el eje x $(y = 0)$ es asíntota horizontal.

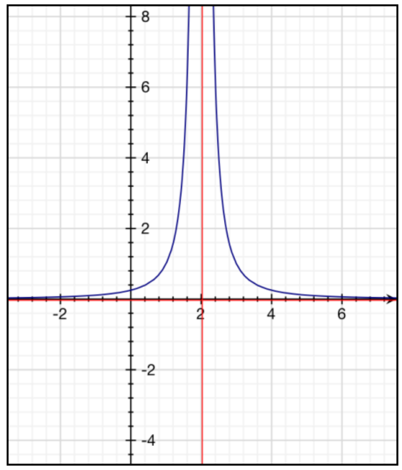


Figura 19. Grafica de la función f(x)

En la figura 20 se muestra la gráfica de

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{x^2}{(x - 1)(x + 1)}$$

En este caso, las rectas $x = 1$ y $x = -1$ son asíntotas verticales y la recta $y = 1$ es asíntota horizontal. A partir de esta información, el dominio de la función f es el conjunto $D(f) = \{x: x \neq \pm 1\}$ y que el rango de f es el conjunto $R(f) = (-\infty, 0] \cup (1, \infty)$.

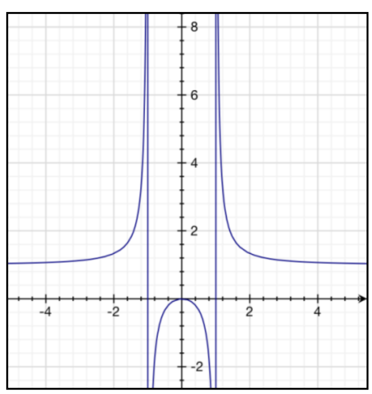


Figura 20. Grafica de la función f(x)

Funciones definidas por partes

Una función f puede implicar dos o más expresiones o fórmulas, cada una definida en subconjuntos distintos del dominio de f. Una función definida de esta manera se denomina función definida por partes.

1.- Traza la gráfica de f y con ayuda de esta determina el dominio y el rango de la función.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 1 \\ x-1 & si \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & si \quad 2 \leq x \leq 3 \\ 4-x & si \quad 3 \leq x \leq 4 \\ 0 & si \quad x \geq 4 \end{cases}$$

***Solución**. La gráfica correspondiente de f es la que se indica a continuación.*

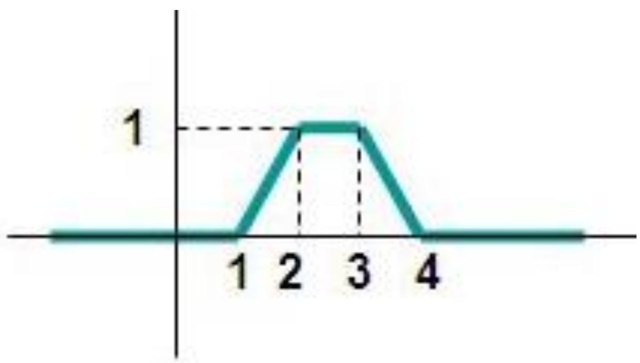


Figura 22. Grafica de la función f(x).

Como podemos observar, el dominio de f es el conjunto de todos los números reales, mientras que el rango de f es el conjunto dado por $R(f) = [0,1]$.

2.-Sea

$$c(w) = \begin{cases} 0.4 & si \quad 0 < w \leq 1 \\ 0.6 & si \quad 1 < w \leq 2 \\ 0.8 & si \quad 2 < w \leq 3 \\ 1.2 & si \quad 3 < w \leq 4 \\ 1.4 & si \quad 4 < w \leq 5 \end{cases}$$

La grafica de la función f se muestra en la figura 23

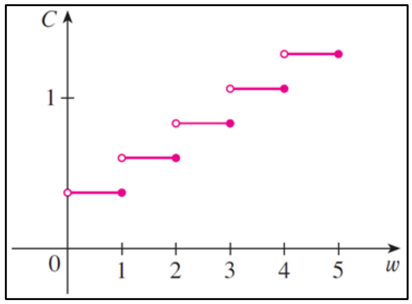
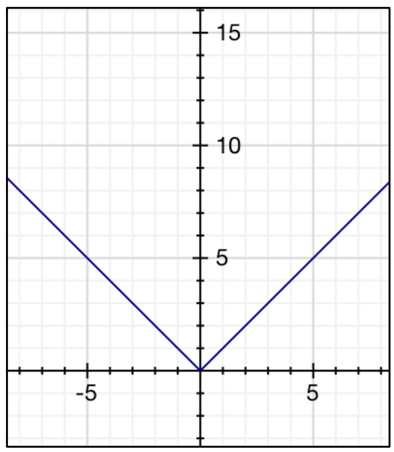


Figura 23. Grafica de la función f(x)

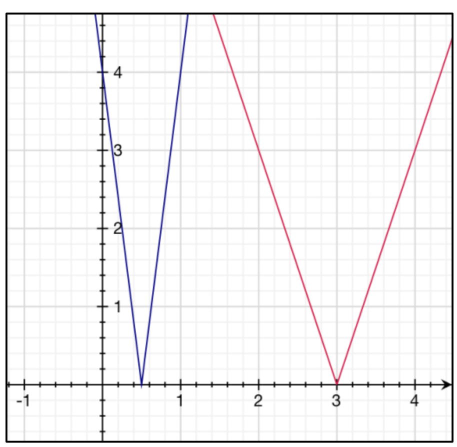
En este caso, el dominio de f es el intervalo, $(0{,}5]$ mientras que el rango de f es el conjunto dado por $R(f) = \{0.4, 0.6, 0.8, 1.2, 1.4\}$.

3.- La función de valor absoluto definida como $y = |x|$ es un ejemplo de una función definida por partes, con dominio $D(f) = \mathbb{R}$ y rango $R(f) = [0, \infty)$.



$Figura\ 24. Gráfica\ de\ y = |x|$

4.- Otras funciones de valor absoluto son las funciones de $y = |3x - 9|$ y la de $y = |4 - 8x|$.



$Figura\ 25.\ Gráficas\ de\ y = |4 - 8x| \&\ y = |3x - 9|$

5.- Sea $f(x)$ la función determinada por la ecuación:

$$fx) = |x+2| + |x-3|$$

Traza la gráfica de $f(x)$ y luego determina su dominio y su rango.

Solución. De la definición de valor absoluto se tiene lo siguiente

$$|x+2| = \begin{cases} x+2 & si \quad x+2 \geq 0 \\ -x-2 & si \quad x+2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+2 & si \quad x \geq -2 \\ -x-2 & si \quad x < -2 \end{cases}$$

Análogamente

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & si \quad x-3 \geq 0 \\ 3-x & si \quad x-3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+2 & si \quad x \geq 3 \\ -x-2 & si \quad x < 3 \end{cases}$$

Se sabe que el dominio de la función de la suma de funciones dada por la expresión

$$y = |x+2| + |x-3|$$

Es la intersección de los dominios de la función $y_1 = |x+2|$ y la función $y_2 = |x-3|$. Como el dominio de cada una de estas funciones es el conjunto $\mathbb{R}$ entonces se concluye que el dominio de la función dada por y también es el conjunto $\mathbb{R}$. Además, podemos observar que existen tres casos que deben ser considerados para analizar el comportamiento que tiene la gráfica de esta función:

$$x < 2; \ \ -2 \leq x < 3; \ \ x \geq 3$$

***Caso 1**. $x < -2$.*

- *Si $x < -2$ entonces $x+2 < 0$.*
- *Por otra parte, al ser $x < -2$ entonces $x-3 < -5$ y como $-5 < 0$, por transitividad se concluye que $x-3 < 0$.*

En conclusión, se tiene lo siguiente:

- *Si $x < 2$ entonces $x+2 < 0$ y $x-3 < 0$.*

Y por la definición de valor absoluto nos queda:

$y = |x+2| + |x-3|$

$y \ = (-x-2) + (-x+3)$

$y = -2x + 1$

***Caso 2**. $-2 \leq x < 3$.*

- *Si $-2 \leq x < 3$ entonces$0 \leq x+2 < 5$, y por lo tanto $x+2 > 0$.*
- *Por otra parte, si $-2 \leq x < 3$ entonces $-5 \leq x-3 < 0$, y por lo tanto $x-3 < 0$.*

En conclusión, se tiene lo siguiente:

- *Si* $-2 \leq x < 3$ *entonces* $x + 2 > 0$ *y* $x - 3 < 0$.

Y por la definición de valor absoluto nos queda:

$y = |x + 2| + |x - 3|$

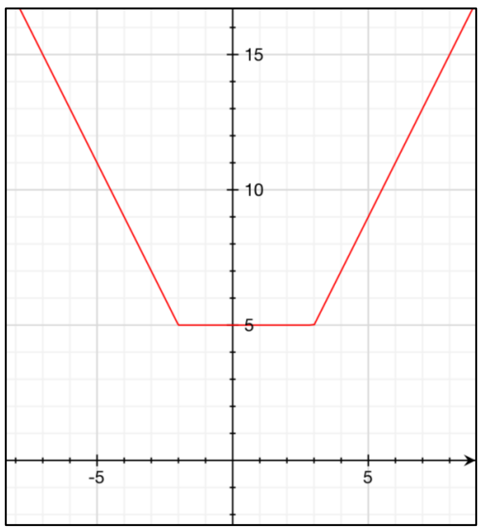
$y = (x + 2) + (-x + 3)$

$y = 5.$

Un análisis similar nos dice que:

Caso 3. *Si* $x \geq 3$ *entonces* $y = 2x - 1$.

Con base en la información obtenida de los casos 1, 2 y 3, obtenemos la siguiente gráfica

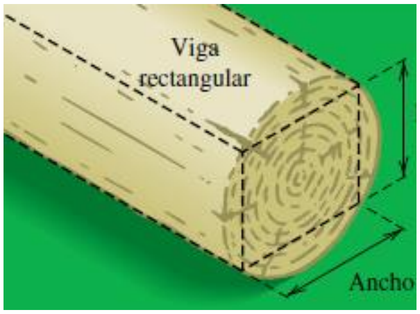


$figura\ 27. grafica\ de\ la\ función\ \ y = |x + 2| + |x - 3|$

Finalmente, concluimos que el rango de $f(x)$ *es en conjunto dado por* $R(f) = [5, \infty)$.

6.- En varias ocasiones existirán ejercicios en las que se espera que podamos traducir las palabras que describen una función o una ecuación en símbolos matemáticos. A continuación veremos algunos ejemplos de este tipo de casos.

La resistencia R de una viga rectangular es directamente proporcional al producto del ancho y el cuadrado de la altura de su sección transversal. Encuentra las dimensiones de la viga más resistente que se pueda obtener de un tronco circular de diámetro a.



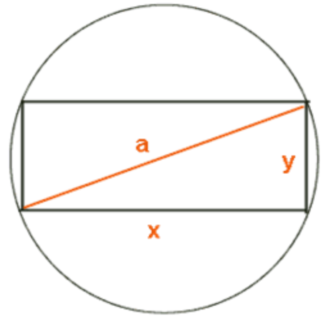


Figura 28. Viga rectangular.

Solucion. Si x representa lo largo de la viga de la sección transversal y y el ancho, entonces de acuerdo a los datos del ejercicio se tiene:

$$R(x, y) = xy^2 \ \dots\ (1)$$

Por otra parte, para el radio $\frac{a}{2}$ del tronco se sabe que

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = \frac{a^2}{4}$$

Multiplicando la expresión por 4 se tiene, $y^2 = a^2 - x^2 \dots\ (2)$

Como$y^2 \geq 0$, entonces se debe tener que

$$a^2 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 \geq x^2 \Leftrightarrow |x| \leq a \Leftrightarrow x \in [-a, a].$$

Y debido a que los valores de x y de y representan longitudes, la ecuación (2) puede reescribirse de la siguiente manera

$$y^2 = a^2 - x^2;\ x \in [0, a]\ \dots\ (3)$$

Sustituyendo la ecuación (3) en la ecuación (1) podemos expresar la resistencia $R(x, y)$ de la viga como función de la variable x de la siguiente forma

$$R(x) = x[a^2 - x^2] = a^2x - x^3;\ x \in [0, a]$$

7.- Se va a construir un vaso de papel en forma de cono circular recto quitando un sector circular a una hoja de papel con forma de círculo y radio R uniendo después las dos orillas rectas del papel restante. Expresa el volumen del vaso en función de la altura h del cono.

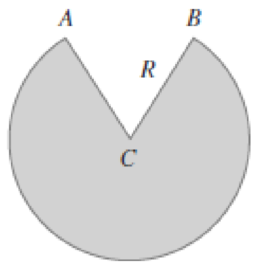


Figura 29. Hoja de papel donde se ha eliminado el sector circular.

Solucion.

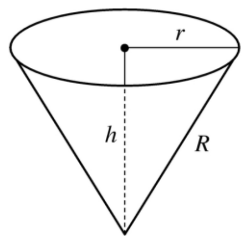


Figura 30. Cono de papel construido quitando un sector circular

El volumen de un cono está dado por la expresión

$$V(r,h) = \frac{\pi}{3} r^2\, h \; \dots \; (1)$$

Por otra parte, de acuerdo a los datos del diagrama se tiene que

$$h^2 + r^2 = R^2$$

Por lo tanto

$$r^2 = R^2 - h^2 \; \dots \; (2)$$

Sustituyendo la ecuación (2) en la (1) podemos expresar al volumen del cono $V(r,h)$ como función de la variable h de la siguiente manera:

$$V(r,h) = \frac{\pi}{3}[R^2 - h^2]h$$

La función está definida ahora en una sola variable y se puede expresar de la siguiente forma

$$V(h) = \frac{\pi}{3} hR^2 - h^3; h \in [0, R] \; \dots \; (3)$$

El dominio de la expresión (3) se debe a que la variable h representa una longitud.

8.- Se van a usar 300 metros de tela de alambre para construir 6 jaulas en un zoológico como se muestra en la figura. Expresa el área que abarcan las jaulas como una función de la longitud x que se indica en la figura.

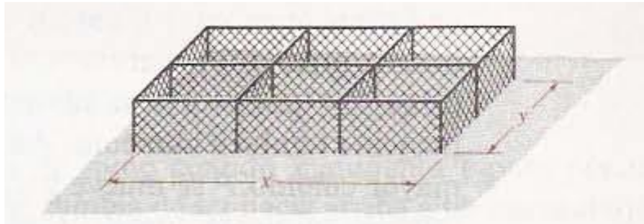


Figura 31. Jaulas de alambre.

Solución. Si x representa la longitud del terreno y y el ancho entonces podemos utilizar el siguiente diagrama

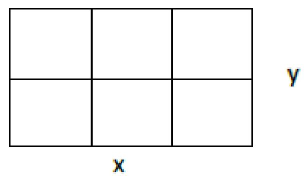


Figura 31. Esquema de las jaulas de alambre

Pero para conocer la cantidad de cerca que se va a utilizar se debe considerar las partes que dividen al terreno en 3 partes, así que el perímetro del terreno P, viene dado por

$$P(x,y) = 3x + 4y$$

Pero de acuerdo con los datos del ejercicio se tiene que

$$300 = 3x + 4y \ \dots \ (1)$$

Por lo tanto

$$y = \frac{300 - 3x}{4} \ \dots \ (2)$$

Además, el ejercicio indica que el área del terreno está dada por

$$A(x,y) = xy \ \dots \ (3)$$

Al sustituir (2) en (3), obtenemos al área $A(x)$ como una función de x

$$A(x) = \frac{300x - 3x^2}{4}$$

Aunque el dominio de la función $A(x)$ es todo $\mathbb{R}$, se sabe que $A(x) \geq 0$ por tratarse de un área. Por lo tanto el dominio de $A(x)$ queda expresado de la siguiente manera

$$A(x) = \frac{300x - 3x^2}{4}; x \in [0,100].$$

1.3 Operaciones con funciones

Una función **algebraica** es aquella que se puede expresar en términos de sumas, restas, productos, cocientes o raíces, de carácter finito, de funciones polinomiales. Por ejemplo,

$$f(x) = 5x^4 - 2\sqrt[3]{x} + \frac{x(x^2+5)}{\sqrt{x^3+\sqrt{x}}}.$$

Las funciones que no son algebraicas se llaman **trascendentes**. Las funciones exponenciales y logarítmicas que se estudian en la unidad temática 5 son ejemplos de funciones trascendentes. Con frecuencia se definen las funciones mediante sumas, restas, productos y cocientes de diferentes expresiones. Por ejemplo, si

$$h(x) = x^2 + \sqrt{5x+1}.$$

Se puede considerar que $h(x)$es una suma de valores de las funciones

$$f(x) = x^2 \text{y} g(x) = \sqrt{5x+1}.$$

A la función h se le llama suma de f y g, y se representa mediante $f+g$. En general, si f y g son funciones cualesquiera, se emplea la terminología y notación que se observa en la siguiente tabla.

$\boldsymbol{Terminolog\acute{i}a}$	$\boldsymbol{Valor\ de\ la\ funci\acute{o}n}$
$Suma\ \ f+g$	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
$Diferencia\ \ f-g$	$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
$Producto\ fg$	$(fg)(x) = f(x)g(x)$
$Cociente\ \ \frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Los dominios de las funciones $f+g$, $f-g$ y fg son la intersección $A \cap B$ de los dominios A y B de f y de g respectivamente. El dominio de f/g es el subconjunto de $A \cap B$ formado por todas las x tales que $g(x) \neq 0$.

1.- Si $f(x) = \sqrt{4-x^2}$y $g(x) = 3x+1$. calcula la función $h = f/g$ y define al dominio correspondiente.

***Solución**. Primero vamos a determinar los dominios de las funciones f y g.*

Puesto que

$$\sqrt{4-x^2} \geq 0 \Leftrightarrow 4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 4 \geq x^2 \Leftrightarrow |x| \leq 2.$$

Entonces el dominio de f es el intervalo cerrado $A = [-2,2]$ y es claro que el dominio de g es $B = \mathbb{R}$.

La intersección de estos dominios es $A \cap B = [-2,2]$. Ahora, para encontrar el dominio de f/g hay que excluir cada numero x en el intervalo $[-2,2]$ tal que $3x + 1 = 0$; es decir, $x = \frac{1}{3}$. Por lo tanto, se tiene lo siguiente:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{3x+1} \text{ y su dominio } D(f) = \left\{x: -2 \leq x \leq 2; x \neq \frac{1}{3}\right\}$$

2.- Si

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} \quad y \quad g(x) = \ln x.$$

Calcula la función $h = fg$ y define al dominio correspondiente.

Solución. Primero vamos a determinar los dominios de las funciones f y g.

Las raíces cubicas de un número x son números y que satisfacen la ecuación:

$$y^3 = x \ *** \ (1)$$

Si x y y son números reales, entonces existe además una única solución; y esta a su vez es un número real, dada por

$$y = x^{\frac{1}{3}}$$

Si se usa la definición (1), se observa que la raíz cubica de un numero negativo es también un numero negativo. Por lo tanto se puede concluir que $D(f) = \mathbb{R}$. Por otra parte, se sabe que $D(g) = (0, \infty)$. La intersección de estos dominios es $A \cap B = (0, \infty)$y por lo tanto, se tiene lo siguiente:

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)(\ln x) \ \text{ y } \ D(fg) = (0, \infty).$$

A continuación explicaremos cómo se pueden usar dos funciones f y g para obtener las funciones compuestas fog y gof. Las funciones de este tipo son muy importantes en cálculo. La función fog se define como sigue.

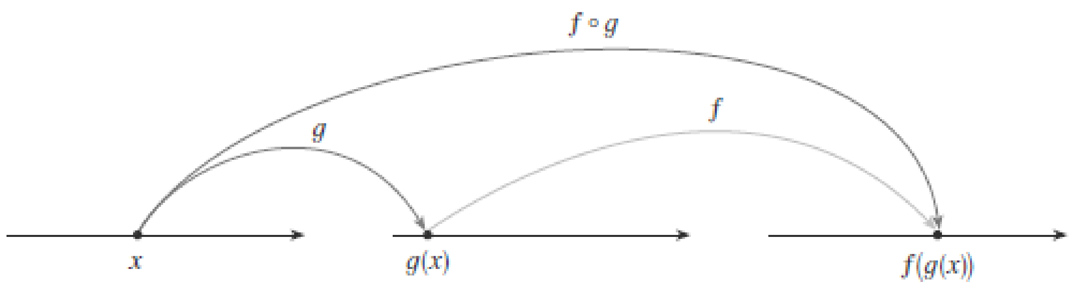
Definición de función compuesta

La función compuesta fog $(f\ circulo\ g)$ *de dos funciones* f *y* g *se define como*

$$(fog)(x) = f\big(g(x)\big).\ \ "f\ de\ g(x)"$$

El dominio de (fog) *es el conjunto de todas las* x *en el dominio de* g*, tales que* $g(x)$ *esté en el dominio de* f*.*

Similarmente, el dominio de (gof) *es el conjunto de todas las* x *en el dominio de* f*, tales que* $f(x)$ *esté en el dominio de* g*.*



$Figura\ 32. Diagrama\ de\ flechas\ para\ la\ composición\ (fog).$

1.- Sean f *y* g *dos funciones cuyas expresiones son:*

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}};\ \ g(x) = 1 - \sqrt{x}$$

$\boldsymbol{i}$ *Determina* $(fog)(x)$ *y el dominio de* fog.

$\boldsymbol{ii}$ *Determina* $(gof)(x)$ *y el dominio de* gof.

$\boldsymbol{iii}$ *Determina* $(gog)(x)$ *y el dominio de* gog.

Solución*.*

$\boldsymbol{i}$ *Determina* $(fog)(x)$ *y el dominio de* fog.

Como la raíz cubica de un numero negativo es también un numero negativo, se puede concluir que $D(f) = \mathbb{R}$ *y que* $D(g) = [0, \infty)$*.*

Por otra parte,

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f\big(1 - \sqrt{x}\big) = \big(1 - \sqrt{x}\big)^{\frac{1}{3}}.$$

El dominio de fog *es el conjunto de todas las* $x \in D(g) = [0, \infty)$ *tales que*

$$g(x) = 1 - \sqrt{x} \in D(f) = \mathbb{R}..$$

Como todo número real tiene raíz cubica, entonces se sigue que

$$g(x) = 1 - \sqrt{x} \in D(f) = \mathbb{R}, \text{ para toda } x \in [0, \infty).$$

Por lo tanto, el dominio de la composición gof *es el conjunto*$D(fog) = [0, \infty)$.

$\boldsymbol{ii}$ *Determina* $(gof)(x)$ *y el dominio de* gof.

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g\left(x^{\frac{1}{3}}\right) = 1 - \sqrt{x^{\frac{1}{3}}}$$

El dominio de gof *es el conjunto de todas las* $x \in D(f) = \mathbb{R}$ *tales que*

$$f(x) = 1 - \sqrt{x} \in D(g) = [0, \infty).$$

El enunciado "$1 - \sqrt{x}$ *está en* $[0, \infty)$" *equivale a la desigualdad:*

$$1 - \sqrt{x} \ \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$$

Por lo tanto, el dominio de gof *es el conjunto*$D(gof) = [0,1]$.

$\boldsymbol{iii}$ *Determina* $(gog)(x)$ *y el dominio de* gog.

La composición de las funciones es:

$$(gog)(x) = g(g(x)) = g\left(1 - \sqrt{x}\right) = 1 - \sqrt{1 - \sqrt{x}}$$

El dominio de gog *es el conjunto de todas las* $x \in D(g) = [0, \infty)$ *tales que*

$$g(x) = 1 - \sqrt{x} \in D(g) = [0, \infty).$$

Nuevamente, el enunciado "$1 - \sqrt{x}$ *está en* $[0, \infty)$" *es equivalente a la desigualdad:*

$$1 - \sqrt{x} \ \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$$

Por lo tanto, el dominio de gog*también es el conjunto* $D(gog) = [0,1]$.

De acuerdo con este ejemplo, $f(g(x))$ *y* $f(g(x))$ *no siempre son iguales; es decir,* $fog \neq gof$*. También es posible que el dominio de una función compuesta pueda ser distinto de los de las dos funciones dadas. Si dos funciones* f *y* g*, tienen ambas el dominio* $\mathbb{R}$*, entonces el dominio de* fog *y de* gof *también es* $\mathbb{R}$*.*

2.- Sea $f(x) = x^2 - 16$ *y* $g(x) = \sqrt{x}$.

Determina $(fog)(x)$ *y el dominio de* gof.

Solución.

(a) $(gof)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 16) = \sqrt{x^2 - 16}$.

(b) Se sabe que el dominio de f *es* $\mathbb{R}$. *y que el dominio de* g *es* $[0, \infty)$. *El dominio de* gof *es el conjunto de todas las* $x \in D(f) = \mathbb{R}$ *tales que*

$$f(x) = x^2 - 16 \in D(g) = [0, \infty).$$

El enunciado "$x^2 - 16\ está\ en\ [0, \infty)$*" equivale a la desigualdad:*

$$x^2 - 16 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 16 \Leftrightarrow |x| \geq 4$$

Por lo tanto, el dominio de gof *es el conjunto*$D(gof) = (-\infty, -4] \cup [4, \infty)$.

3.- Determina la función $f \circ g$ y su respectivo dominio. Si

$$f(x) = x + \frac{1}{x}; g(x) = \frac{x+1}{x+2}$$

Solución.

(a)

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \left(\frac{x+1}{x+2}\right) + \frac{1}{\left(\frac{x+1}{x+2}\right)} = \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+1}$$

(b) El dominio de f es el conjunto $D(f) = \{x: x \neq 0\}$, y el de g es el conjunto

$$D(g) = \{x: x \neq -2\}.$$

El dominio de fog *es el conjunto de todas las* $x \in D(g) = \{x: x \neq -2\}$*tales que*

$$g(x) = \frac{x+1}{x+2} \in D(f) = \{x: x \neq 0\}.$$

Y para que, $\frac{x+1}{x+2} \in D(f)$ *se debe cumplir que*

$$\frac{x+1}{x+2} \neq 0$$

Por lo tanto, el dominio de la composición gof *es el conjunto*

$$D(fog) = \{x | x \neq -1, x \neq -2\}.$$

4.- Determina la función $g \circ f$ y su respectivo dominio. Si

$$f(x) = sen(x) \;\; y \;\; g(x) = 1 - \sqrt{x}$$

Solución.

(a)

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g\big(\,sen\,(x)\big) = 1 - \sqrt{sen(x)}.$$

(b) El dominio de f es el conjunto $D(f) = \mathbb{R}$, y el de g es el conjunto

$$D(g) = [0, \infty).$$

El dominio de gof *es el conjunto de todas las* $x \in D(f) = \mathbb{R}$ *tales que*

$$f(x) = sen(x) \in D(g) = [0, \infty).$$

Y para que, $sen(x) \in D(g)$ *se debe cumplir que*

$$sen(x) \geq 0$$

Por lo tanto, el dominio de la composición gof *es el conjunto*

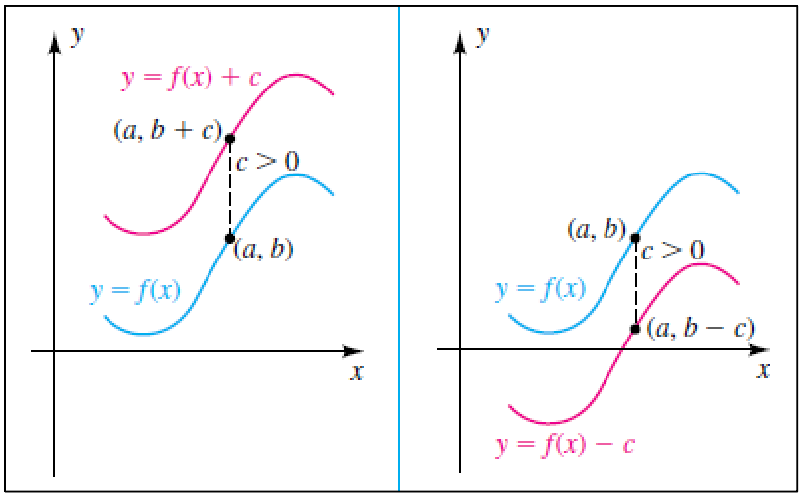
$$D(fog) = D_{g\circ f} = \{x | x \in [2n\pi, \pi + 2n\pi]; n \in \mathrm{Z} \cup \{0\}\,\}.$$

Transformaciones de funciones

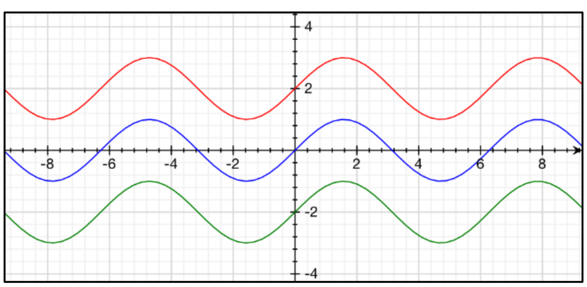
Al aplicar ciertas transformaciones a la gráfica de determinada función podemos obtener las gráficas de otras funciones relacionadas, reduciendo con ello el trabajo de graficación.

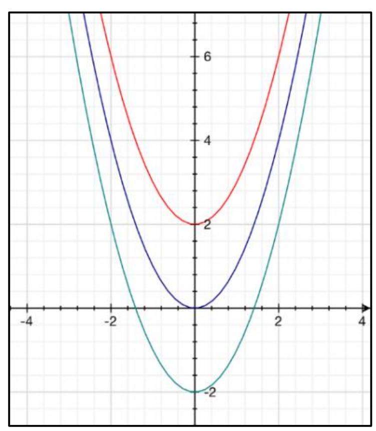
1.- Desplazamientos verticales. Sea f una función dada. Si el número c es positivo entonces tenemos lo siguiente

- Si y=$f(x)+c$ la gráfica de $y=f(x)$ se desplaza c unidades hacia arriba.
- Si $y=f(x)-c$la gráfica de $y=f(x)$ se desplaza c unidades hacia abajo.



Las funciones $f(x)=sen(x)$ y $f(x)=x^2$ con los desplazamientos verticales de 2 y -2 que se indican gráficamente.

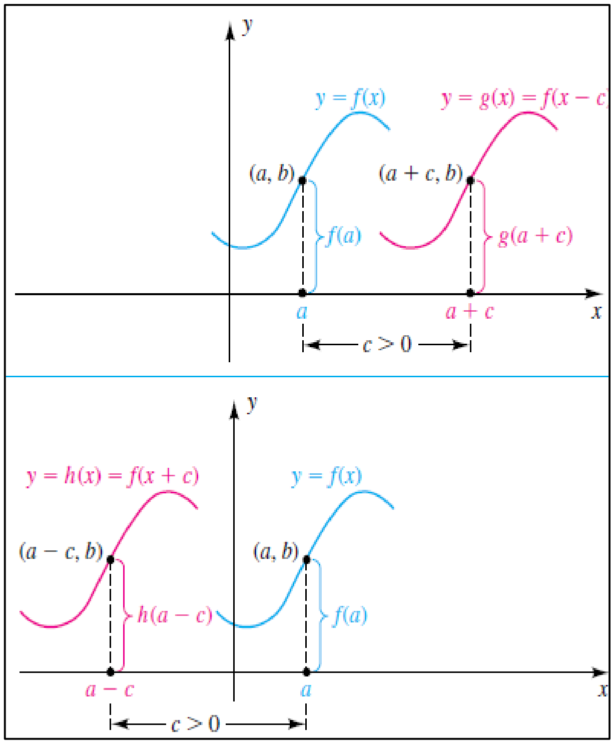




$y=sen(x)+2;\ \ y=sen(x);\ \ y=sen(x)-2$ $\qquad$ $y=x^2+2;\ \ y=x^2;\ \ y=x^2-2$

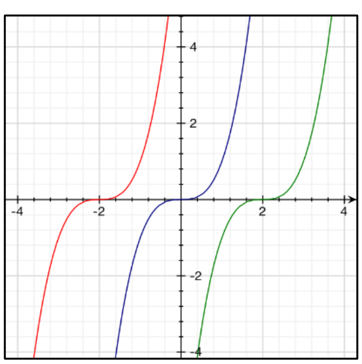
2.- Desplazamientos horizontales. Sea f una función dada. Si el número c es positivo entonces tenemos lo siguiente

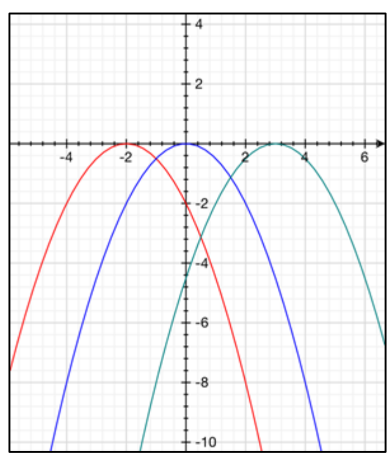
- Si $y = f(x - c)$ la gráfica de $y = f(x)$ se desplaza horizontalmente a la derecha una distancia c.
- Si $y = f(x + c)$ la gráfica de $y = f(x)$ se desplaza horizontalmente a la izquierda una distancia c.



La siguientes gráficas muestran estos efectos en las funciones $f(x) = (x + c)^3$ y

$f(x) = -(x + c)^2$ para $c = -2,0,3$

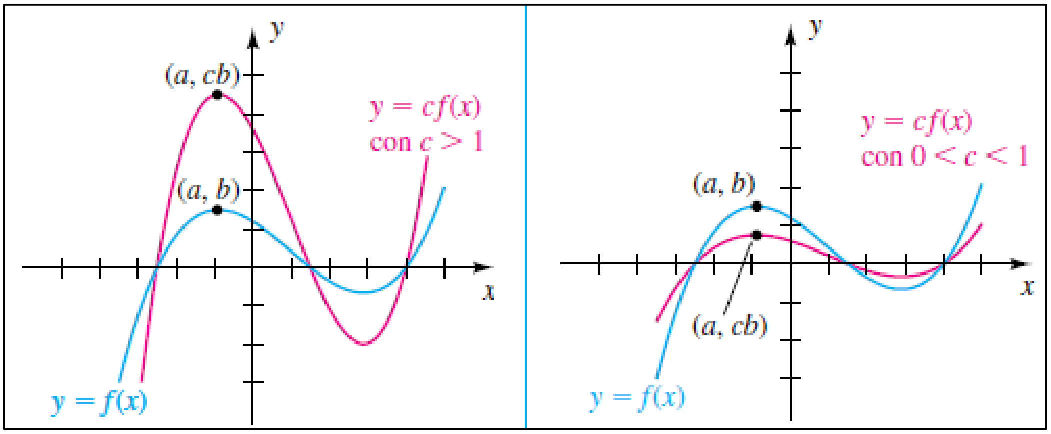




3.- Estiramientos y compresiones verticales

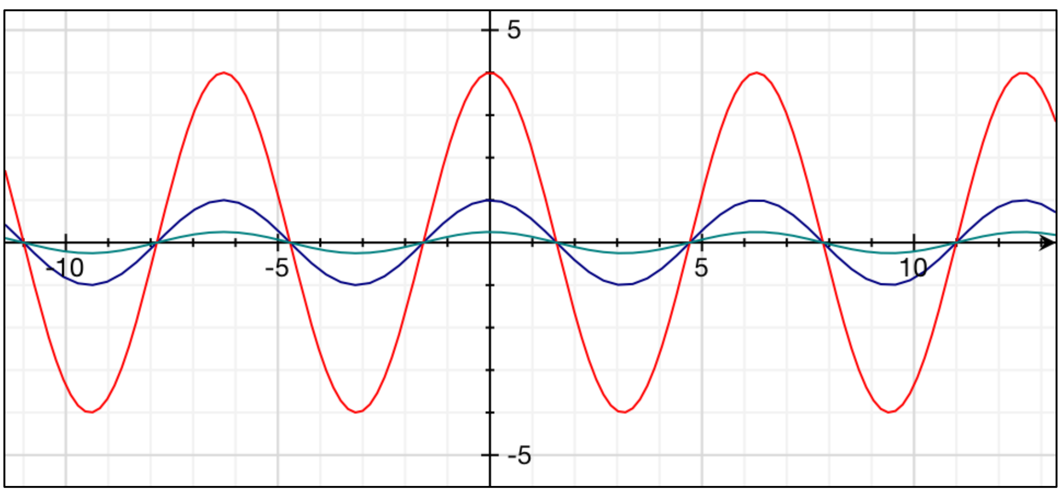
Sea f una función dada. Si el número $c > 1$ entonces tenemos lo siguiente

- Si $y = cf(x)$ la gráfica de $y = f(x)$ se alarga c veces en dirección vertical.
- Si $y = \frac{1}{c}f(x)$ la gráfica de $y = f(x)$ se comprime c veces en dirección vertical.



La siguiente gráfica muestra este efecto en la función $y = cos(x)$.

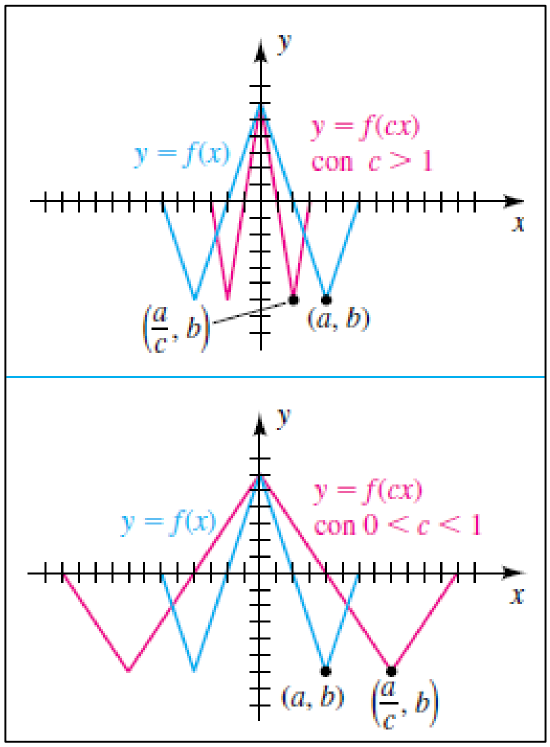
$$y = \cos(x)\,;\ y = 4\cos(x)\ \ y\ \ y = \frac{1}{4}\cos(x).$$



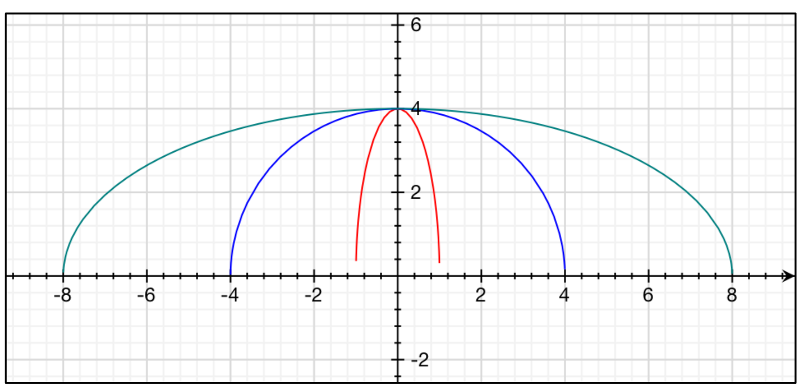
4.- Estiramientos y compresiones horizontales

Sea f una función dada. Si el número $c > 1$ entonces tenemos lo siguiente

- Si $y = f(cx)$ la gráfica de $y = f(x)$ se alarga c veces en dirección vertical.
- Si $y = f\left(\frac{1}{c}x\right)$ la gráfica de $y = f(x)$ se comprime c veces en dirección vertical.



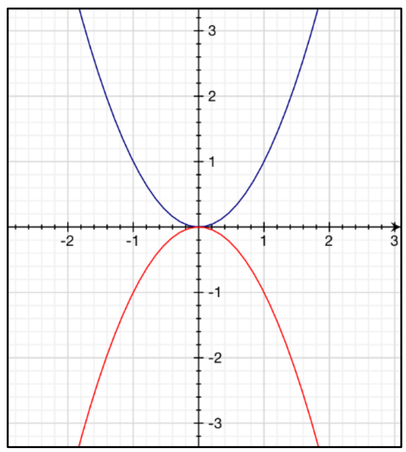
La siguiente gráfica muestra este efecto en la función $y = \sqrt{16 - (cx)^2}$; $c = 1, \frac{1}{2}, 4$



Reflexión de una gráfica sobre el eje x

Podemos obtener la gráfica de $y = -f(x)$ multiplicando por -1 la ordenada de cada punto de la gráfica de $y = f(x)$. Así cada punto (a, b) de la gráfica de $y = f(x)$ que está arriba del eje x determina un punto $(a, -b)$ en la gráfica de $y = -f(x)$, que está bajo dicho eje. Igualmente, si el punto (c, d) queda abajo del eje x, es decir, $d < 0$, entonces $(c, -d)$ queda arriba del eje x. La gráfica de $y = -f(x)$ es una **reflexión** de la de $y = f(x)$ en el eje x o con respecto a este eje.

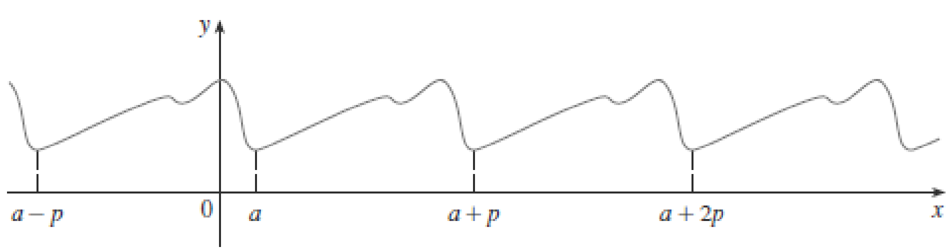
La gráfica de $y = -x^2$ se puede obtener localizando o puntos, o bien podemos trazar la gráfica de $y = x^2$ y luego multiplicamos por -1 las ordenadas de sus puntos. Este procedimiento da como resultado la reflexión en el eje x, como se indica en la figura.



Gráficas de $y = x^2$ *y* $y = -x^2$

Funciones periódicas

Si $f(a + p) = f(a)$ para toda a en el dominio de f, donde p es una constante positiva, a f se le llama funcion periódica y la p mínima se denomina periodo; por ejemplo, el periodo de $y = sen(x)$ es 2π y el de $y = \tan(x)$ es π. Si sabemos como se ve la gráfica en un intervalo de longitud p, podemos emplear la traslación para trazar toda la gráfica de f.



Una función periódica f y su traslacion simetrica

A veces es útil comparar las gráficas de $y = f(x)$ y la de $y = f(cx)$, donde $c \neq 0$. En este caso, los valores de la función de $f(x)$ para

$$a \leq x \leq b$$

Son los mismos que los de la función $f(cx)$ para

$a \leq cx \leq b$ o, lo que es lo mismo, para $\frac{a}{c} \leq x \leq \frac{b}{c}$.

Este procedimiento se ilustra en los siguientes ejercicios, en los cuales los valores de las funciones $y = 3sen2x$ y $y = 2\cos(3x - \pi)$ se repiten por periodos de longitud $p = \pi$ y de $p = \frac{2}{3}\pi$ respectivamente.

Es posible obtener variaciones de las gráficas de funciones trigonométricas por medio de transformaciones de la forma:

$$y = a\ sen(bx + c) + d;\ \ y = \mathrm{a}\cos(bx + c) + d$$

Donde $a, b, c\ y\ d$ son números reales. Nuestro objetivo es el de poder trazar las gráficas de funciones de este tipo sin tener que localizar muchos puntos.

Encuentra la gráfica de la siguiente función

$$y = 2sen(-3x)$$

Solución. Como $sen(-3x) = -sen(3x)$ (función impar) se puede escribir

$$y = -2sen(3x)$$

Se sabe que

$$-1 \leq sen(3x) \leq 1\ \ para\ 0 \leq 3x \leq 2\pi$$

Esto es

$$-1 \leq sen(3x) \leq 1\ \ para\ \ 0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$$

Multiplicando a esta desigualdad por -2 se obtiene

$$2 \geq -2sen(3x) \geq -2\ \ para\ \ 0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$$

O sea

$$-2 \leq -2sen(3x) \leq 2 \quad para \;\; 0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$$

$$-2 \leq y \leq 2 \;\; para \; 0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$$

Vemos entonces que hay exactamente una onda $senoidal$ de amplitud vertical 2 en el intervalo $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$. Notemos que la longitud de este intervalo es de $\frac{2\pi}{3}$. Para trazar la parte correspondiente de esta gráfica y luego repetir este trazo a la derecha e izquierda vamos a utilizar las siguientes consideraciones:

1.- Se sabe que $senx = 0$, si $x = n\pi$ donde n es un número entero positivo o negativo, o bien es cero. Por lo tanto para este ejemplo concluimos que

$$sen3x = 0 \;\; si \;\; 3x = n\pi. \; Esto \; es, para \;\; x = \frac{n}{3}\pi$$

Por lo tanto

Para $n = 0; x = 0$.

Para $n = 1; x = \frac{\pi}{3}$.

Para $n = 2; x = \frac{2}{3}\pi$.

Para $n = 3; x = \pi$.

Para $n = 4; x = \frac{4}{3}\pi$; etc.

Y se procede similarmente con los números enteros negativos.

2.- También se sabe que la función $senx = 1$ si $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$: donde n es un número entero positivo o negativo, o bien es cero. Por lo tanto concluimos que

$$sen3x = 1 \;\; si \;\; 3x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi. \; Esto \; es, para \;\; x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}n\pi$$

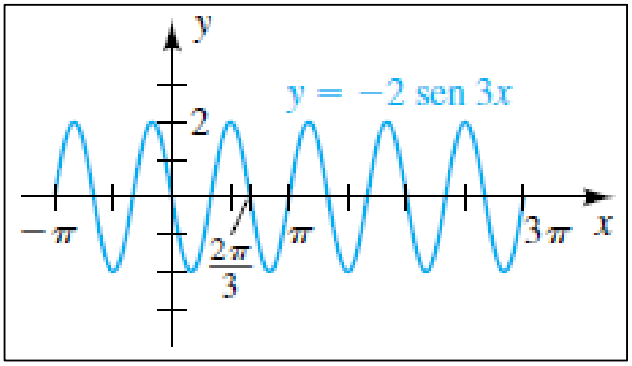
Por lo tanto, ahora obtenemos lo siguiente:

Para $n = 0; x = \frac{\pi}{6}$

Para $n = 1; x = \frac{5}{6}\pi$.

Para $n = 2; x = \frac{9}{6}\pi$; etc.

Con la ayuda los puntos obtenidos en este par de observaciones, y utilizando el hecho de que hay exactamente una onda $senoidal$ de amplitud vertical 2 en el intervalo $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$. Es decir, $-2 \leq y \leq 2\ para\ 0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$. Y obtenemos la gráfica de la función $y = 3sen2x$



Utilizamos el hecho de que la gráfica de f tiene un periódo de longitud $p = \pi$ y utilizamos la traslación para trazar toda la gráfica.

2.- Ahora veamos un ejemplo de una gráfica para una ecuación de la forma

$$y = a\ cos(bx + c)$$

Encuentra la gráfica de la siguiente función

$$y = 2\cos(3x - \pi)$$

Solución. Se sabe que

$$-1 \leq \cos(3x - \pi) \leq 1\ \ para\ 0 \leq 3x - \pi \leq 2\pi$$

Por lo tanto, al multiplicar por 2 a esta última desigualdad,

$$-2 \leq 2\cos(3x - \pi) \leq 2\ \ para\ 0 \leq 3x - \pi \leq 2\pi$$

O sea:

$$-2 \leq 2\cos(3x - \pi) \leq 2\ \ para\ \frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi$$

Esto es:

$$-2 \leq y \leq 2\ \ para\ \frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi$$

Entonces vemos que hay exactamente una onda $cosenoidal$ de amplitud vertical 2 en el intervalo $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$. Notemos que la longitud de este intervalo es de $\frac{2}{3}\pi$. Para trazar la parte correspondiente de esta gráfica y luego repetir este trazo a la derecha e izquierda vamos a utilizar las siguientes consideraciones:

1.- Se sabe que $cosx = 0$, si $x = \frac{(2n-1)}{2}\pi$ donde n es un número entero positivo o negativo, o bien es cero. Por lo tanto para este ejemplo concluimos que

$$cos(3x-\pi) = 0 \;\; si \;\; 3x-\pi = \frac{(2n-1)}{2}\pi. \; Esto\; es, para \;\; x = \frac{2n+1}{6}\pi$$

Por lo tanto

Para $n = 0; x = \frac{\pi}{6}$.

Para $n = 1; x = \frac{\pi}{2}$.

Para $n = 2; x = \frac{5}{6}\pi$.

Para $n = 3; x = \frac{7}{6}\pi$.

Para $n = 4; x = \frac{9}{6}\pi$; etc.

Y se procede similarmente con los números enteros negativos.

2.- También se sabe que la función $cosx = 1$ si $x = 2n\pi$: donde n es un número entero positivo o negativo, o bien es cero. Por lo tanto concluimos que

$$cos(3x-\pi) = 1 \;\; si \;\; 3x-\pi = 2n\pi. \; Esto\; es, para \;\; x = \frac{2n+1}{3}\pi$$

Por lo tanto, ahora obtenemos lo siguiente:

Para $n = 0; x = \frac{1}{3}\pi$

Para $n = 1; x = \pi$.

Para $n = 2; x = \frac{5}{3}\pi$.

Para $n = 3; x = \frac{7}{3}\pi$.

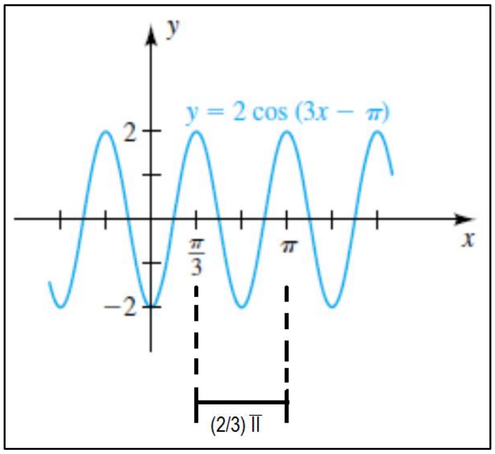
Para $n = 4; x = 3\pi$; etc.

Con la ayuda los puntos obtenidos en este par de observaciones, y utilizando el hecho de que hay exactamente una onda $cosenoidal$ de amplitud vertical 2 en el intervalo $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$. Es decir,

$$-3 \leq y \leq 3 \quad para\ \frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi$$

Obtenemos la gráfica de la función

$$y = 2\cos(3x - \pi)$$

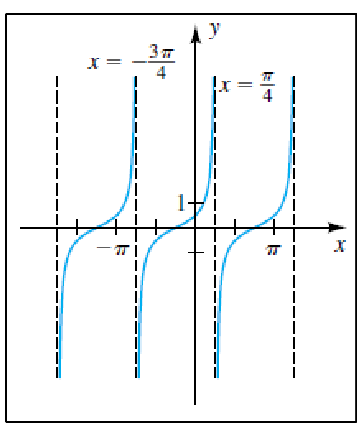


Utilizamos el hecho de que la gráfica de f tiene un período de longitud $p = 2/3\ \pi$ y utilizamos la traslación para trazar toda la gráfica.

3.- Similarmente es posible trazar la gráfica de la función

$$y = \frac{1}{2} tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

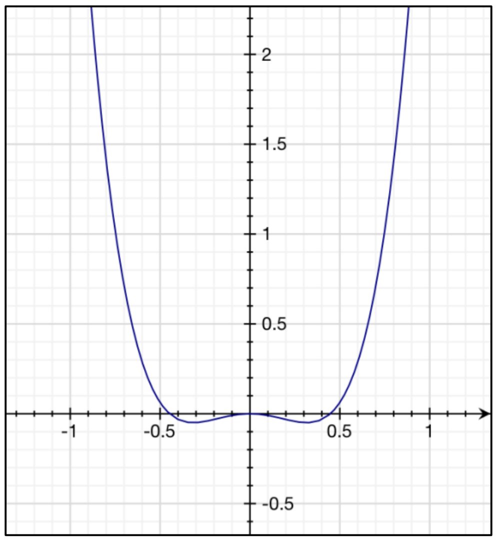
Desplazando la gráfica de $y = \frac{1}{2}\tan(x)$ hacia la izquierda una distancia de longitud $\frac{\pi}{4}$.



Una gráfica **es simétrica con respecto al eje y** siempre que el punto $(-x, y)$ esté en la gráfica cuando el punto (x, y) esté en ella. La prueba para saber si esto ocurre consiste en sustituir la variable x por $-x$ en la función f, obteniéndose la misma ecuación.

1.- La función $f(x) = 5x^4 - x^2$ es simétrica con respecto al eje y, pues

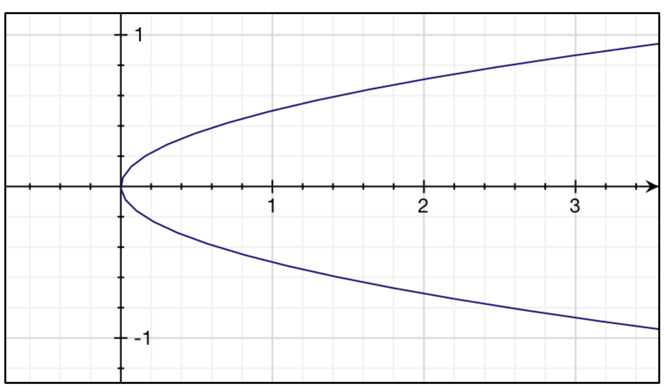
$$f(-x) = 5(-x)^4 - (-x)^2 = 5x^4 - x^2 = f(x)$$



$$y = 5x^4 - x^2$$

2.- La función $x = f(y)$ dada por la expresión $x = 4y^2$ es simétrica con respecto al eje x, pues

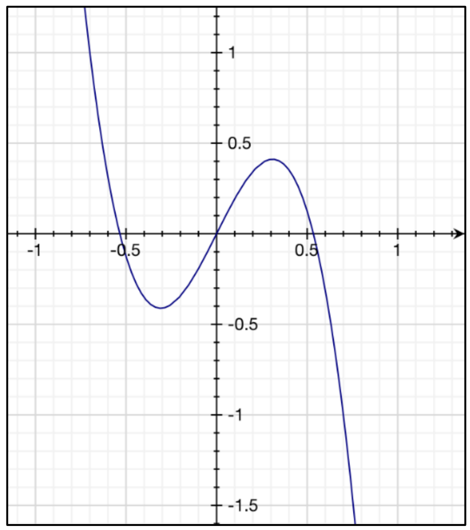
$$f(-y) = 4(-y)^2 = 5y^2 = f(y)$$



$$x = 4y^2$$

3.- La función $f(x) = 2x - 7x^3$ es simétrica con respecto al origen pues $f(-x) = -f(x)$ para toda x.En efecto:

$$f(-x) = 2(-x) - 7(-x)^3 = -2x + 7x^3 = -f(x)$$

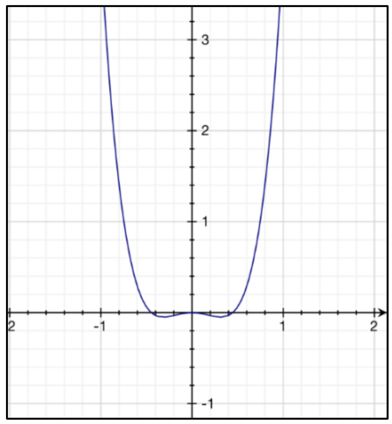


$y = 2x - 7x^3$

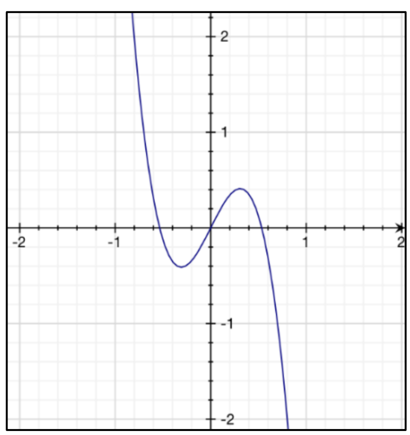
1.4 Propiedades de las Funciones

Funciones Pares

Se dice que una función es par si $f(-x) = f(x)$ para toda x en su dominio. En este caso, la ecuación $y = f(x)$ no cambia si se sustituye x por $-x$, por consiguiente, de acuerdo a las pruebas de simetría, la gráfica de una función par es simétrica respecto al eje y. De esta manera concluimos que la función $f(x) = 5x^4 - x^2$ es par.



Se dice que una función es impar si $f(-x) = -f(x)$ para toda x en su dominio. En este caso, de acuerdo a las pruebas de simetría, la gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen. De esta manera concluimos que la función $f(x) = 2x - 7x^3$ es impar.



Por supuesto que también hay casos en los cuales una función dada no es par ni tampoco impar. La funciones dadas por

$$f(x) = x^3 + x^2 \ \ y \ \ f(x) = 2x - x^2$$

No cumplen ninguna de las dos condiciones, pues, en ambos casos se tiene que

$$f(-x) \neq f(x) \ \ y \ \ f(-x) \neq -f(x).$$

UNIDAD TEMÁTICA II. Límites de Funciones y Continuidad.

2.1 Introducción al Cálculo.

Definición informal de límite de una función

En esta sección el enfoque que se hará acerca del concepto de límite será intuitivo, centrado en la compresión de qué es un límite mediante el uso de ejemplos numéricos y gráficos. Supongamos que L denota a un número finito. El concepto de que $f(x)$ tiende al número L a medida que x tiende a un número a puede definirse informalmente de la siguiente manera.

1. Si $f(x)$ puede hacerse arbitrariamente próximo al número L al tomar x suficientemente cerca de, pero diferente de un número a, por la izquierda y por la derecha de a, entonces el límite de $f(x)$ cuando x tiende al número a es L.

Límites laterales

En general, una función $f(x)$ puede hacerse arbitrariamente próxima a un número L_1 al tomar x suficientemente cerca, pero sin que sea igual al número a por la izquierda, y entonces emplearemos la siguiente notación

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L_1 \text{ o bien, } f(x) \to L_1 \text{ cuando } x \to a^-$$

Similarmente, una función $f(x)$ puede hacerse arbitrariamente próxima a un número L_1 al tomar x suficientemente cerca, pero sin que sea igual al número a por la izquierda, entonces emplearemos la siguiente notación

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L_2 \text{ o bien, } f(x) \to L_2 \text{ cuando } x \to a^+$$

Se cumplen además los siguientes resultados importantes.

(a) Si tanto el límite por la izquierda $\lim_{x\to a^-} f(x)$ como el límite por la derecha $\lim_{x\to a^+} f(x)$ existen y tienen un valor común L, es decir,

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

Entonces se dice que L es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a o bien que $f(x)$ **converge** a L cuando x tiende a a, y en tal caso escribimos (Figura 1)

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \text{ o } f(x) \to L \text{ cuando } x \to a$$

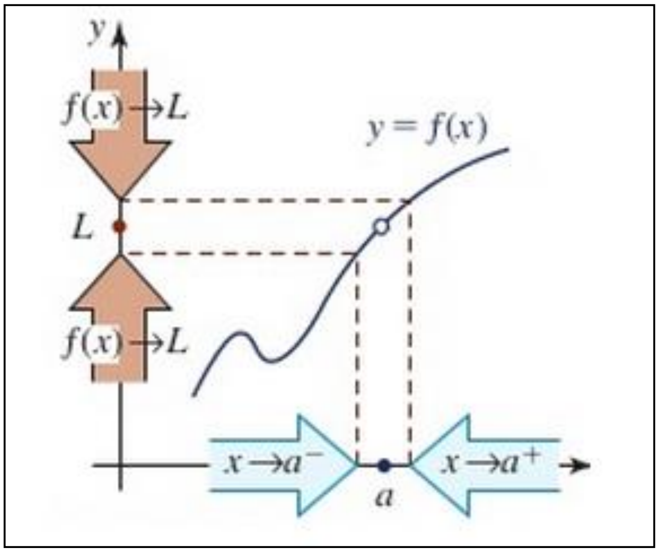
De hecho, el resultado siguiente relaciona el concepto de límite de una función con los límites laterales

(b) $\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$.

Por otra parte, se dice que $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe o que **diverge** en $x = a$ sí

(c) Alguno de los dos límites laterales $\lim_{x\to a^-} f(x)$ ó $\lim_{x\to a^+} f(x)$ no existe

(d) $\lim_{x\to a^+} f(x) = L_2$ y $\lim_{x\to a^-} f(x) = L_1$ pero $L_1 \neq L_2$.



(a) Figura 1. $\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$

1. Consideremos la siguiente función

$$f(x) = \frac{16 - x^2}{4 + x}$$

El dominio de esta función es el conjunto de todos los números reales tales que $x \neq -4$ porque al sustituir $x = -4$ se obtiene la indeterminación de $0/0$, pero ello no importa, porque la definición de $\lim_{x\to a} f(x)$ dice que sólo se toman en cuenta los valores de x cercanos al número a, por la izquierda o por la derecha, pero no iguales a a. En la próxima tabla presentamos los valores de $f(x)$, para valores de x que tienden a -4 pero que no son iguales a -4.

x	-4.1	-4.01	-4.001	-4	-3.999	-3.99	-3.9
$f(x)$	8.1	8.01	8.001		7.999	7.99	7.9

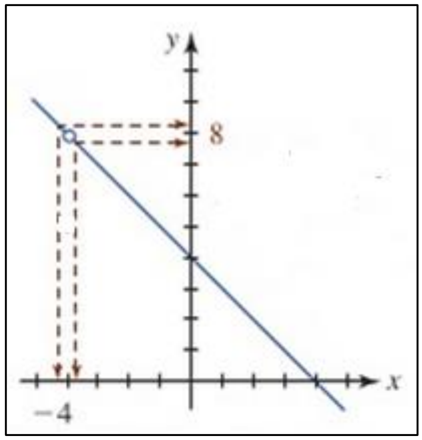
Con base en los valores de la tabla, estimamos que

$$\lim_{x\to -4} \frac{16 - x^2}{4 + x} = 8$$

Obsérvese que cuando $x \neq -4$ se tiene que $4 + x \neq 0$ y por lo tanto, la función f puede simplificarse así:

$$f(x) = \frac{16 - x^2}{4 + x} = \frac{(4 + x)(4 - x)}{4 + x} = 4 - x$$

Y como se ve en la figura 2, la gráfica de f es la gráfica de $y = -4 - x$ con un hueco en el punto correspondiente a $x = -4$.



$Figura\ 2. f(x) = 4 - x$

Para valores de x suficientemente cerca de -4 a la izquierda y a la derecha, descritas por las dos flechas sobre el eje x, las dos puntas de flecha sobre el eje y, representan que los valores de la función $f(x)$ se aproximan cada vez más al número 8. En efecto, para $x \neq -4$, los límites laterales izquierdo y derecho nos dan el siguiente resultado

$$\lim_{x \to -4^-} \frac{16 - x^2}{4 + x} = \lim_{x \to -4^-} \frac{(4 + x)(4 - x)}{4 + x} = \lim_{x \to -4^-} (4 - x) = 8$$

$$y \quad \lim_{x \to -4^+} \frac{16 - x^2}{4 + x} = \lim_{x \to -4^+} \frac{(4 + x)(4 - x)}{4 + x} = \lim_{x \to -4^+} (4 - x) = 8$$

Y por lo tanto, por la propiedad (b) para límites laterales es posible concluir que

$$\lim_{x \to -4} \frac{16 - x^2}{4 + x} = 8$$

2. Consideremos la función definida por partes y algunos de los valores que toma.

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & si\ x \leq 5 \\ 10 - x & si\ x > 5 \end{cases}$$

x	4.9	4.99	4.999	5	5.001	5.01	5.1
$f(x)$	6.9000	6.9900	6.9990		4.9990	4.9900	4.9000

A partir de su tabla de valores correspondientes para valores de x cercanos a 5 pero no iguales a 5 notamos que cuando x se aproxima a 5 por la izquierda:

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^-}(x+2) = 7.$$

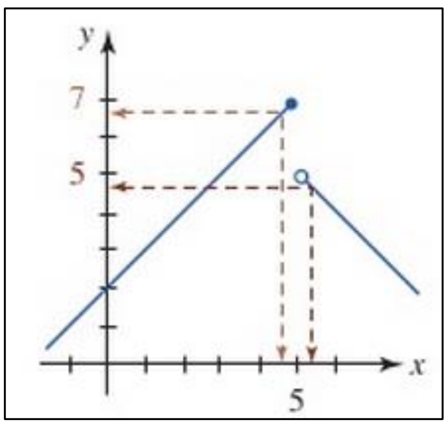
Luego, cuando x tiende a 5 por la derecha, se observa lo siguiente

$$\lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5^+}(10-x) = 5.$$

Y puesto que

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) \neq \lim_{x\to 5^+} f(x)$$

Entonces por la propiedad (d) podemos concluir que $\lim_{x\to 5} f(x)$ no existe.



$$Gráfica\ de\ f(x) = \begin{cases} x+2 & si\ x \leq 5 \\ 10-x & si\ x > 5 \end{cases}$$

3. La función

$$f(x) = \frac{1}{x}; x \neq 0$$

No está definida en $x = 0$, aunque de acuerdo a nuestra definición intuitiva de límite de una función en un punto, esto no tiene ninguna consecuencia cuando se considera $\lim_{x\to 0} f(x)$ pues sólo se toman en cuenta los valores de x cercanos a 0, pero no iguales a 0. A partir de las siguientes tablas de valores,

x	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	-10	-100	-1000		1000	100	10

Podemos observar que los valores de la función $f(x)$ crecen sin límite en valor absoluto cuando x tiende a cero. En otras palabras, cuando el valor de 1 en el numerador, queda dividido entre una cantidad por la izquierda del número cero, que es negativa y que se va haciendo cada vez más pequeña, se concluye que

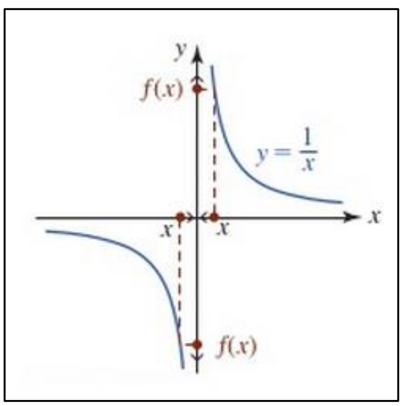
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Y por lo tanto $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}$ no existe.

Por otra parte, cuando el valor de 1 en el numerador, queda dividido entre una cantidad a la derecha del número cero, que es positiva y que se va haciendo cada vez más pequeña, se concluye que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

Y por lo tanto, también en este caso concluimos que $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$ no existe. Finalmente, por la propiedad (c) para límites laterales se concluye que $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ no existe.



2.2 Técnicas para determinar límites

Álgebra de límites

En esta sección nuestro enfoque del concepto fundamental del límite será más analítico, es decir, usaremos métodos algebraicos para calcular el valor del límite de funciones. Los Teoremas que se consideran en esta sección establecen tales mecanismos

Teorema 1. Límites de una suma, producto y cociente de funciones.

Supongamos que a es un número real y que

$$\lim_{x\to a} f(x) = L_1 \quad y \quad \lim_{x\to a} g(x) = L_2$$

Entonces

(i) $\lim_{x\to a}\{ f(x) + g(x) \} = \lim f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L_1 + L_2$

(ii) $\lim_{x\to a}\{f(x)g(x)\} = \lim f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = L_1 \cdot L_2$

(iii) $\lim_{x\to a}\{\alpha f(x)\} = \alpha \cdot L_1$ para toda $\alpha \in \mathbb{R}$.

(iv) $\lim_{x\to a}\{f(x)/g(x)\} = \lim f(x)/ \lim_{x\to a} g(x) = L_1/L_2; \quad L_2 \neq 0$

El Teorema 1 puede plantearse coloquialmente de la siguiente manera

- Si ambos límites existen, entonces

(i) El límite de la suma es la suma de los límites
(ii) El límite del producto es el producto de los límites
(iii) El límite de un cociente es el cociente de los límites, en el supuesto de que el límite del denominador no es cero.

- **Observación.** Si todos los límites existen, entonces el Teorema 1 también es válido para límites laterales; es decir, la notación $x \to a$ en este Teorema puede sustituirse por $x \to a^-$ o por $x \to a^+$.

Aplica el Teorema 1 para determinar los siguientes límites

1.- $\lim_{x\to 1}(x+1)(2x+3)$

Solución. Por la parte (i), (ii) y (iii) del Teorema 1 nos queda

$$\lim_{x\to 1}(x+1)(2x+3) = \lim_{x\to 1}(x+1)\lim_{x\to 1}(2x+3)$$
$$= \left\{\lim_{x\to 1} x + \lim_{x\to 1}(1)\right\}\left\{\lim_{x\to 1} 2x + \lim_{x\to 1}(3)\right\}$$
$$= (1+1)(2+3) = 10$$

2.- $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4}{3x-6}; x \in \mathbb{R}$

Solución. Si hacemos $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = 3x - 6$ para x en $\mathbb{R}$, entonces no se puede usar la parte (iv) del Teorema 1 para evaluar a este límite porque

$$\lim_{x\to 2} h(x) = \lim_{x\to 2}(3x-6) = 3\lim_{x\to 2} x - 6 = 0$$

Sin embargo, si $x \neq 2$, entonces se sigue que

$$\frac{x^2-4}{3x-6} = \frac{(x+2)(x-2)}{3(x-2)} = \frac{x+2}{3}$$

Y por lo tanto

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4}{3x-6} = \lim_{x\to 1}\frac{x+2}{3} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 1}(x+2) = \frac{1}{3}(2+2) = \frac{4}{3}$$

3.- $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}; para\ \ x > 0$

Solución. Nuevamente observamos que si hacemos $f(x) = \sqrt{x} - 1$ y $g(x) = x - 1$ para $x > 0$, entonces no se puede usar la parte (iv) del Teorema 1 para evaluar a este límite porque

$$\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1}(x-1) = 0$$

Sin embargo, si $x \neq 1$, entonces

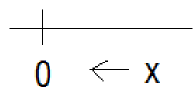
$$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

Y por lo tanto

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(1)}{\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{1}{2}$$

4.- $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x+1}{x^2+2}$

Solución.



Para $x>0$ se tiene que

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x+1}{x^2+2}=\frac{\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)}{\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+2)}=\frac{\lim\limits_{x\to 0^+}(x)+\lim\limits_{x\to 0^+}(1)}{\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2)+\lim\limits_{x\to 0^+}(2)}=\frac{1}{2}$$

Los siguientes ejercicios hacen uso del siguiente límite trigonométrico importante:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}=1 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x}{sen(x)}=1$$

5.- Utilizando el hecho de que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}=1$, prueba que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos(x)}{x}=0$.

Prueba. Como

$$\frac{1-cos(x)}{x}=\left(\frac{1-cos(x)}{x}\right)\left(\frac{1+cos(x)}{1+\cos(x)}\right)=\frac{sen^2(x)}{x(1+\cos(x))}=\left(\frac{sen(x)}{x}\right)\left(\frac{sen(x)}{1+\cos(x)}\right)$$

Entonces por la propiedad (ii) y (iv), las siguientes igualdades entre límites de funciones son equivalentes

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{sen^2(x)}{x(1+\cos(x))}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen(x)}{x}\right)\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen(x)}{1+\cos(x)}\right)=(1)\left(\frac{0}{2}\right)=0$$

6.- $\lim_{x\to 0}\left\{\frac{sen(5x)-sen(3x)}{x}\right\}$

Solución. Observemos que este límite es de la forma indeterminada $0/0$. Sin embargo, la expresión fraccionaria puede escribirse como

$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{sen(5x)-sen(3x)}{x}\right\} = \lim_{x\to 0}\left\{\frac{sen(5x)}{x}-\frac{sen(3x)}{x}\right\}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left\{\frac{5\,sen(5x)}{5x}\right\} - \lim_{x\to 0}\left\{\frac{3\,sen(3x)}{3x}\right\}$$

$$= 5\lim_{x\to 0}\left\{\frac{sen(5x)}{5x}\right\} - 3\lim_{x\to 0}\left\{\frac{sen(3x)}{3x}\right\}$$

Luego, si se hace $u_1 = 5x$ y $u_2 = 3x$, veremos que $x \to 0$ implica que $u_1 \to 0$ y $u_2 \to 0$. En consecuencia

$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{sen(5x)-sen(3x)}{x}\right\}$$

$$= 5\lim_{x\to 0}\left\{\frac{sen(5x)}{5x}\right\} - 3\lim_{x\to 0}\left\{\frac{sen(3x)}{3x}\right\}$$

$$= 5\lim_{u_1\to 0}\left\{\frac{sen(u_1)}{u_1}\right\} - 3\lim_{u_2\to 0}\left\{\frac{sen(u_2)}{u_2}\right\} = 5-3 = 2$$

7.- Evalúa el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{x^2}{\sec(x)-1}\right\}$$

Solución. Puesto que $\lim_{x\to 0}\sec(x)-1=0$, entonces nuevamente se tiene que este límite es de la forma indeterminada $0/0$, pero podemos la fracción de un modo más manejable si la escribimos como

$$\frac{x^2}{\sec(x)-1} = \frac{x^2}{\sec(x)-1}\left(\frac{\sec(x)+1}{\sec(x)+1}\right) = \frac{x^2(\sec(x)+1)}{\sec^2(x)-1} = \frac{x^2(\sec(x)+1)}{\tan^2(x)}$$

De donde:

$$\frac{x^2(\sec(x)+1)}{\tan^2(x)} = \frac{x^2cos^2(x)(\sec(x)+1)}{\text{sen}^2(x)} = \left(\frac{x}{senx}\right)^2 cos^2(x)(\sec(x)+1)$$

Y puesto que cada uno de estos términos tiene límite cuando x tiende a cero, entonces

$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{x^2}{\sec(x)-1}\right\} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{senx}\right)^2 \cdot \lim_{x\to 0} cos^2(x) \cdot \lim_{x\to 0}(\sec(x)+1) = (1)(1)(2) = 2$$

8.- Evalúa el siguiente límite.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}^+} \frac{sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}$$

Solución. Como

$$\frac{sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2} = \left\{\frac{sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}\right\}\left\{\frac{1}{x-\frac{\pi}{4}}\right\}$$

Y sabemos que

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}} = 1$$

Entonces, para $x > \frac{\pi}{4}$ se obtiene que $x - \frac{\pi}{4} > 0$, de esta manera,

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}^+}\left(\frac{1}{x-\frac{\pi}{4}}\right) = \infty \;\; no \;\; existe.$$

Y por lo tanto, se concluye que

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}^+} \frac{sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}^+}\left\{\frac{sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}\right\}\left\{\frac{1}{x-\frac{\pi}{4}}\right\} = (1)\lim_{x\to \frac{\pi}{4}^+}\left\{\frac{1}{x-\frac{\pi}{4}}\right\} = \infty$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}^+} \frac{sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}$ no existe.

9.- Evalúa el siguiente límite.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1+3x}}{x+2x^2}$$

Solución. Como

$$\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1+3x}}{x+2x^2}=\left\{\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1+3x}}{x+2x^2}\right\}\left\{\frac{\sqrt{1+2x}+\sqrt{1+3x}}{\sqrt{1+2x}+\sqrt{1+3x}}\right\}$$

$$=\frac{-x}{(x+2x^2)\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1+3x}\right)}$$

Entonces, para $x>0$ se tiene que

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1+3x}}{x+2x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{(x+2x^2)\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1+3x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{(1+2x)\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1+3x}\right)}=\frac{\lim_{x\to 0^+}(-1)}{\lim_{x\to 0^+}(1+2x)\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1+3x}\right)}=-\frac{1}{(1)(2)}=-\frac{1}{2}$$

10.- Encuentra $\lim_{x\to 0} f(x)$ si f es la función definida por partes dada por

$$f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x} & si\ x\neq 0\\ \\ 1 & si\ x=0\end{cases}.$$

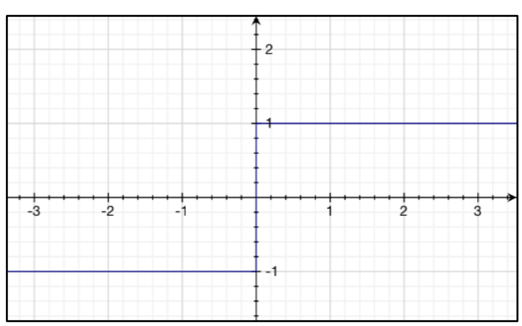
Solución. Vamos a utilizar límites laterales. Para $x>0$ se tiene

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

Por otra parte, para $x<0$, este límite nos queda así

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$

Como los limites laterales izquierdo y derecho de $f(x)$, cuando x tiende a cero existen pero no coinciden, se concluye que $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.



$Gráfica\ de\ f(x)$

Límites infinitos y asíntotas verticales

El límite de una función f no existe cuando x tiende a un número a siempre que los valores de la función crecen o decrecen sin límite. El hecho de que los valores de $f(x)$ crecen sin límite cuando x tiende a un número a, se expresa de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty *** (1)$$

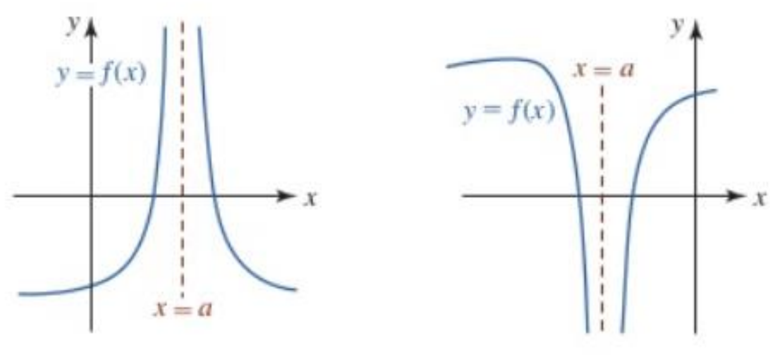
Si los valores de la función f decrecen sin límite cuando x tiende a a, se escribe:

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty *** (2)$$

Recordemos que el uso del símbolo $x \to a$ significa que f muestra el mismo comportamiento –en este caso, no existe el límite – a ambos lados del número a en el eje x. Por ejemplo, la notación en (1) indica que

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \quad y\ que \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

Tal y como se muestra en la siguiente figura



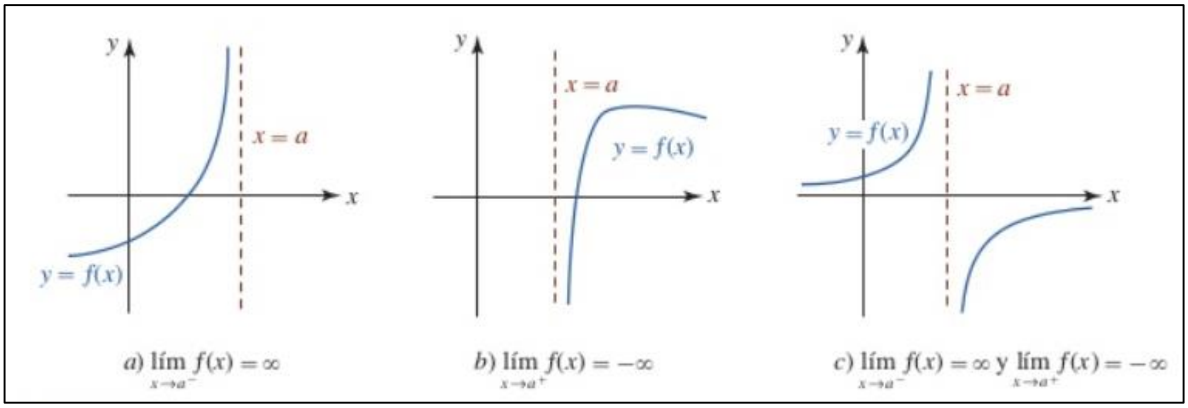
$a)$ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ $\quad$ $b)$ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

En general, cualquiera de los seis tipos de límites que aparecen en la siguiente definición, se denomina **límite infinito**, y nos servirán para establecer la definición de asíntota vertical.

Definición. Sea f una función definida en ambos lados de un número real a, excepto posiblemente en a mismo. La recta $x = a$ se llama **asíntota vertical** de la curva $y = f(x)$ si por lo menos uno de los siguientes enunciados es verdadero.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$	$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \infty$	$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty$
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

Ejemplos de algunos de estos casos se presentan en la siguiente figura



a) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \infty$ b) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ c) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

1.- Determina las asíntotas verticales de la función

$$f(x) = \frac{2x}{x-3}$$

Solución. Hay asíntotas verticales donde $x - 3 = 0$, o sea, para $x = 3$. En efecto, para ver esto estudiaremos el comportamiento de los límites laterales en el punto $x = 3$.

$$x \longrightarrow 3$$

(a) Para $x < 3$, se tiene que $x - 3 < 0$ y por lo tanto, el denominador dado por el número $x - 3$ es negativo, de manera que cuando x tiende a 3 por la izquierda, el denominador $x - 3$ es negativo y tiende a cero, por lo tanto

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{2x}{x-3} = \frac{\lim\limits_{x\to 3^-} 2x}{\lim\limits_{x\to 3^-} (x-3)} = \frac{6}{\lim\limits_{x\to 3^-} (x-3)} = -\infty$$

$$3 \longleftarrow x$$

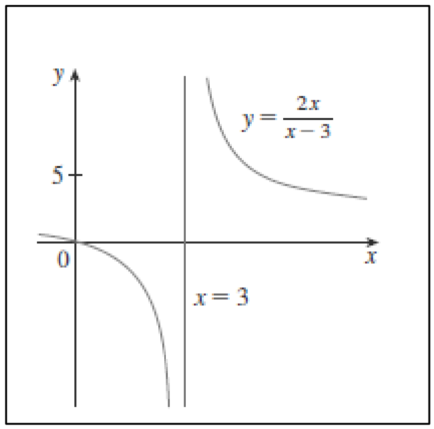
(b) Similarmente, para $x > 3$, se tiene que $x - 3 > 0$ y por lo tanto, el denominador dado por el número $x - 3$ es positivo, de manera que cuando x tiende a 3 por la derecha, el denominador $x - 3$ es positivo y tiende a cero, por lo tanto

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{2x}{x-3} = \frac{\lim\limits_{x\to 3^+} 2x}{\lim\limits_{x\to 3^+} (x-3)} = \frac{6}{\lim\limits_{x\to 3^+} (x-3)} = \infty$$

Por lo tanto, de acuerdo con la definición de asíntota vertical, se concluye que la recta $x = 3$ es asíntota vertical de la función

$$f(x) = \frac{2x}{x-3}$$

Cabe hacer señalar que no es necesario resolver para los dos casos (a) y (b) para afirmar que la recta $x = 3$ es asíntota horizontal de la función $f(x)$. Basta con mostrar que se cumple uno sólo de los casos que aparecen en la definición de asíntota horizontal. Sin embargo, hacer el análisis de ambos, puede resultar de ayuda como información para trazar la gráfica de $f(x)$, que se muestra a continuación.



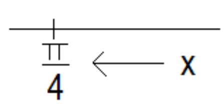
2.- Determina las asíntotas verticales de la siguiente función.

$$f(x) = \frac{sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}$$

Solución. Como

$$f(x) = \frac{sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2} = \left\{\frac{sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}}\right\}\left\{\frac{1}{x - \frac{\pi}{4}}\right\}$$

Entonces, hay asíntotas verticales donde $x - \frac{\pi}{4} = 0$, o sea, para $x = \frac{\pi}{4}$. En efecto, para ver esto estudiaremos el comportamiento de los límites laterales en el punto $x = \frac{\pi}{4}$.



Para $x > \frac{\pi}{4}$ se obtiene que $x - \frac{\pi}{4} > 0$ y como $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}^+} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$, entonces

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^{+}}\left(\frac{1}{x-\frac{\pi}{4}}\right)=\infty.$$

Sabemos también que

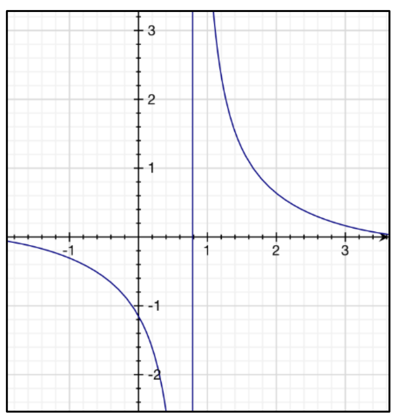
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^{+}}\frac{sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}=1.$$

Y por lo tanto, se concluye que

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^{+}}\frac{sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^{+}}\left\{\frac{sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}\right\}\left\{\frac{1}{x-\frac{\pi}{4}}\right\}=(1)\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^{+}}\left\{\frac{1}{x-\frac{\pi}{4}}\right\}=\infty$$

No existe. Así, se concluye que la recta $x=\frac{\pi}{4}$ es asíntota vertical de la función $f(x)$. Análogamente, es posible probar que para $x<\frac{\pi}{4}$ se tiene

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^{-}}\frac{sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2}}=-\infty$$



$$f(x)=\frac{sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2}}$$

3.- Para la función

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

Podemos observar que los valores de $f(x)$ crecen sin límite en valor absoluto cuando x tiende a cero. En otras palabras, cuando el valor de 1 en el numerador, queda dividido entre una cantidad por la izquierda del número cero, que es negativa y que se va haciendo cada vez más pequeña, se concluye que

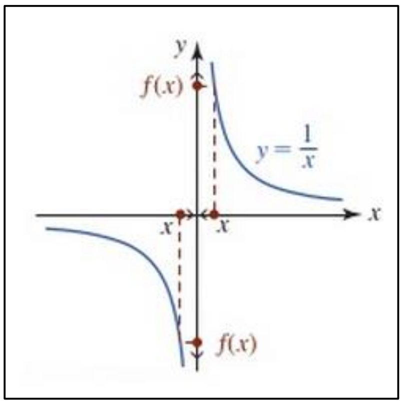
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Y por lo tanto $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x}$ no existe. De esta manera, podemos concluir que la recta $x = 0$ es asíntota vertical de la función $f(x) = \frac{1}{x}$.

Similarmente, cuando el valor de 1 en el numerador, queda dividido entre una cantidad a la derecha del número cero, que es positiva y que se va haciendo cada vez más pequeña, se concluye que

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

Y por lo tanto, también en este caso concluimos que $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}$ no existe.



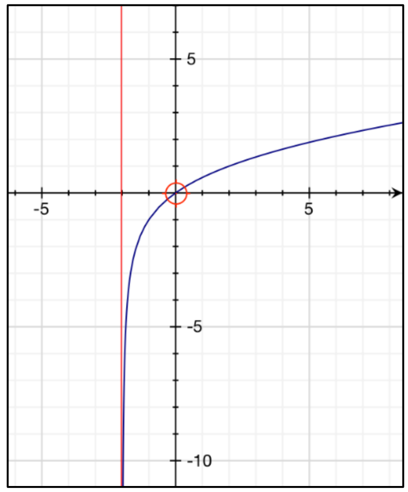
4.- Determina las asíntotas verticales de la siguiente función.

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+2}}$$

Solución. Se puede observar que el dominio de la función f es el conjunto $(-2, \infty)$ y la intersección con el eje y se da en el punto $(0,0)$. Por otra parte, afirmamos que la recta $x = -2$ es asíntota vertical para la función $f(x)$. En efecto, para $-2 < x$ se tiene que $0 < x + 2$ y $\lim_{x \to -2^+} \sqrt{x+2} = 0$. De esta manera,

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x}{\sqrt{x+2}} = \frac{\lim_{x \to -2^+} x}{\lim_{x \to -2^+} \sqrt{x+2}} = \frac{-2}{\lim_{x \to -2^+} \sqrt{x+2}} = -\infty$$

Por lo tanto, la recta $x = -2$ es asíntota vertical para la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+2}}$.



$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+2}}$$

Limites en el infinito y Asíntotas horizontales

Si una función f tiende a un valor constante L cuando la variable independiente x crece sin límite $(x \to \infty)$ o cuando x decrece sin límite $(x \to -\infty)$, entonces se escribe

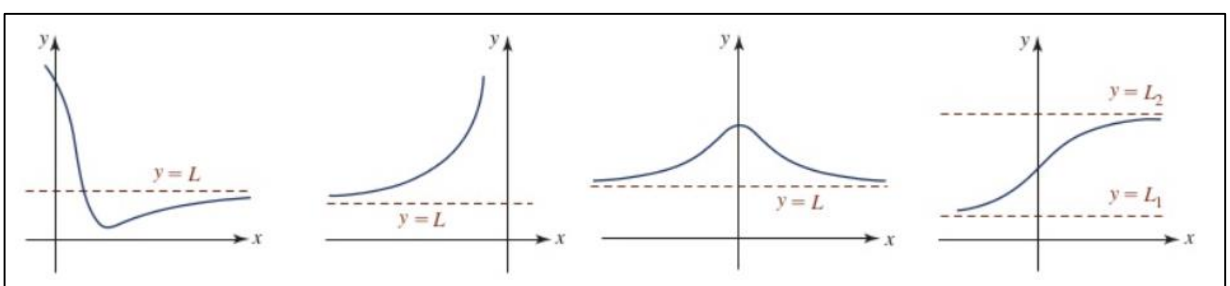
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \quad o \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Y se dice que f posee límite en el infinito.

Definición. Se dice que la recta $y = L$ es una **asíntota horizontal** para la gráfica de una función $f(x)$ si se cumple alguna de las dos condiciones siguientes.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \quad o \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

La siguiente figura muestra algunas asíntotas horizontales típicas.



a) $f(x) \to L$ cuando $x \to \infty$ b) $f(x) \to L$ cuando $x \to -\infty$ c) $f(x) \to L$ cuando $x \to -\infty$, d) $f(x) \to L_1$ cuando $x \to -\infty$,

1.- Determina cuales son las asíntotas verticales de la siguiente función.

$$f(x) = x^2 - \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$$

Solución. Vamos a evaluar el siguiente límite

$$\lim_{x\to\infty} \left(x^2 - \sqrt{x^4 - x^2 + 1} \right)$$

Este límite es una forma indeterminada del tipo $\infty - \infty$ así que para poder evaluarlo vamos a racionalizar la expresión $x^2 - \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$ para reescribir a esté límite como

$$\lim_{x\to\infty} \left(x^2 - \sqrt{x^4 - x^2 + 1} \right) = \lim_{x\to\infty} \left(\left(x^2 - \sqrt{x^4 - x^2 + 1} \right) \frac{x^2 + \sqrt{x^4 - x^2 + 1}}{x^2 + \sqrt{x^4 - x^2 + 1}} \right)$$

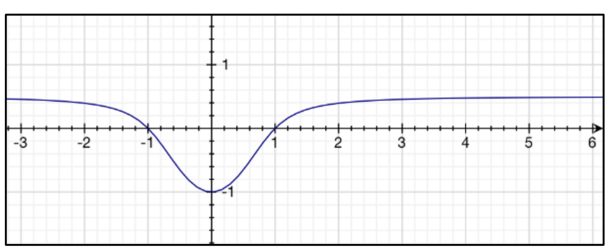
$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + \sqrt{x^4 - x^2 + 1}} \right)$$

Y ahora simplemente hay que observar que

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + \sqrt{x^4 - x^2 + 1}} \right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + \sqrt{\frac{x^4 - x^2 + 1}{x^4}}} \right)$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{\lim_{x\to\infty} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}}\right)} = \frac{1 - 0}{1 + \sqrt{1 - 0 + 0}} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, concluimos que la recta $y = \frac{1}{2}$ es asíntota vertical de la función $f(x)$. Similarmente, es posible verificar que $\lim_{x\to-\infty} \left(x^2 - \sqrt{x^4 - x^2 + 1} \right) = \frac{1}{2}$



$y = x^2 - \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$

2.- Determina cuales son las asíntotas verticales de la siguiente función.

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{3x^2 + 1}$$

Solución. Vamos a evaluar el siguiente límite

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x^2 + x - 1}{3x^2 + 1}$$

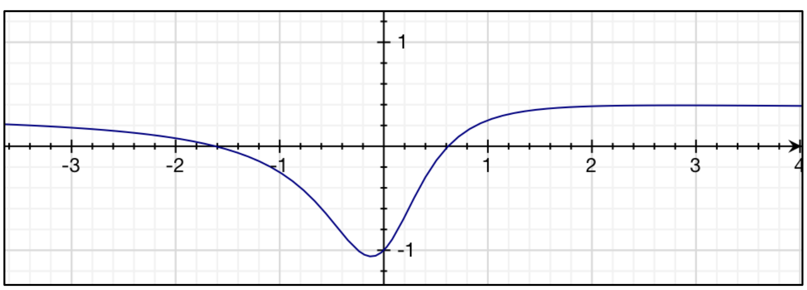
Este límite se puede reescribir así

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x - 1}{3x^2 + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{3 + \frac{1}{x^2}}$$

Y ahora utilizamos el Teorema para calcular el límite de la suma producto y cociente de funciones, para obtener la siguiente igualdad

$$= \frac{\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{\lim_{x \to \infty} \left(3 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{\lim_{x \to \infty} \{1\} + \lim_{x \to \infty} \left\{\frac{1}{x}\right\} - \lim_{x \to \infty} \left\{\frac{1}{x^2}\right\}}{\lim_{x \to \infty} \{3\} + \lim_{x \to \infty} \left\{\frac{1}{x^2}\right\}} = \frac{1 + 0 - 0}{3 + 0} = \frac{1}{3}$$

Similarmente, es posible verificar que $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+x-1}{3x^2+1} = \frac{1}{3}$ Por lo tanto, concluimos que la recta $y = \frac{1}{3}$ es asíntota vertical de la función $f(x)$.



$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{3x^2 + 1}$$

3.- Determina cuales son las asíntotas verticales de la siguiente función.

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$$

Solución. Vamos a evaluar el siguiente límite

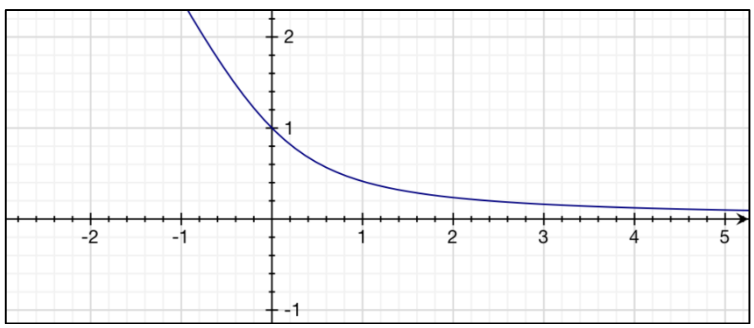
$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1} - x$$

Si racionalizamos a la expresión $\sqrt{x^2+1} - x$. Nos queda

$$\lim_{x\to\infty} \left\{\sqrt{x^2+1} - x\right\} = \lim_{x\to\infty} \left\{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)\right\}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left\{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right\} = 0$$

Por lo tanto, la recta $y = 0$ es asíntota vertical de la función $f(x)$.



4.- Determina cuales son las asíntotas verticales de la siguiente función.

$$f(x) = \frac{6}{1+e^{-x}}$$

Solución. Primero vamos a evaluar el siguiente límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{6}{1+e^{-x}}$$

Para $x > 0$, $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$. Por lo tanto,

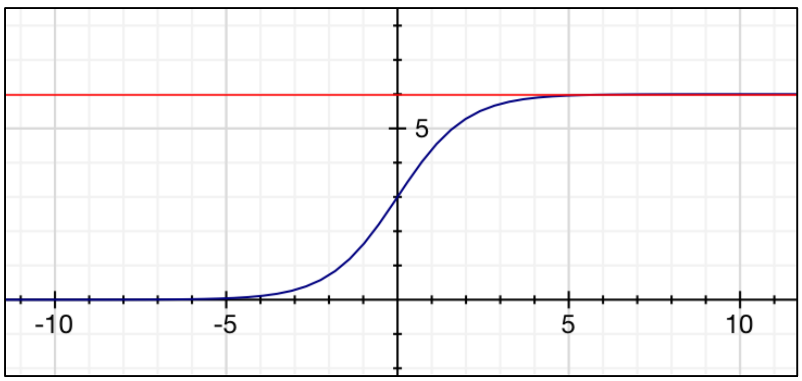
$$\lim_{x\to\infty} \frac{6}{1+e^{-x}} = \frac{\lim_{x\to\infty} 6}{\lim_{x\to\infty}(1+e^{-x})} = \frac{6}{1} = 6$$

Por lo tanto, la recta $y = 6$ es asíntota vertical de la función $f(x)$.

Por otra parte, para $x < 0$, $\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = \infty$. Entonces,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{6}{1 + e^{-x}} = \frac{\lim_{x \to \infty} 6}{\lim_{x \to \infty} (1 + e^{-x})} = \frac{6}{1 + \lim_{x \to \infty} (e^{-x})} = 0$$

Por lo tanto, la recta $y = 0$ es asíntota vertical de la función $f(x)$.



2.3 Continuidad

A menudo se puede calcular el límite de una función cuando x tiende a a, con sólo calcular el valor de la función en a. Se dice que las funciones con esta propiedad son continuas en a.

Definición 1. Se dice que una función f es continua en un número a si

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Notemos además, que la definición anterior requiere implícitamente de tres cosas:

(a) f está definida en a. (Es decir, a esta en el dominio de f)

(b) $\lim_{x\to a} f(x)$ existe

(c) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Si f está definida cerca de a, es decir, f está definida en un intervalo abierto que contiene a a, excepto tal vez en a, se dice que f es **discontinua** en a, o que f no es continua en a. Geométricamente, una función continua en todo numero de un intervalo dado, se puede concebir como una función cuya gráfica no se interrumpe.

1.- Determina si la siguiente función definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} & si\ x \neq 1 \\ \\ \dfrac{1}{2} \quad si & \quad x = 1 \end{cases}$$

Es continua en 1.

Solución.

(a) f está definida en $x = 1$, es decir $f(1) = \frac{1}{2}$.

(b) Veamos si $\lim_{x\to 1} f(x)$ existe. Puesto que para $\sqrt{x} - 1 \neq 0$

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x} + 1$$

Y en tal caso

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1}(\sqrt{x} + 1) = 2$$

(c) Puesto que $\lim_{x \to 1} f(x)$ existe pero no es igual a $f(1) = \frac{1}{2}$, se concluye que la función $f(x)$ no es continua en $x = 1$.

2.- Determina si la siguiente función definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} & si\ x \neq 1 \\ \\ 3\ \ si & x = 1 \end{cases}$$

Es continua en 1.

Solución.

(a) f está definida en $x = 1$, es decir $f(1) = 3$.

(b) Veamos si $\lim_{x \to 1} f(x)$ existe. Puesto que para $x - 1 \neq 0$

$$\frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = x^2 + x + 1$$

Y en tal caso

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x^2 + x + 1) = 3$$

(c) Puesto que $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = 3$, se concluye que la función $f(x)$ es continua en $x = 1$.

Continuidad por la izquierda y por la derecha de una función f en un punto.

Definición 2. Una función f es continua por la derecha de un número real a, si

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

Una función f es continua por la izquierda de un número real a, si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

Al igual que con la definición de límite de una función en un punto, el resultado siguiente relaciona el concepto de continuidad de una función con la continuidad por la izquierda y por la derecha de una función f en un punto.

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)}$$

1.- Determina si la siguiente función definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} & si\ x \neq 1 \\ \\ \dfrac{1}{2} \quad si & x = 1 \end{cases}$$

Es continua en 1.

Solución. Utilizaremos límites laterales.

Límite lateral izquierdo. Puesto que para $0 < x < 1$ se cumple que $0 < \sqrt{x} < 1$.

De manera que para $\sqrt{x} < 1$ se concluye que $\sqrt{x} - 1 < 0$, por lo tanto, para $0 < x < 1$:

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}+1; \ \ \sqrt{x}-1 < 0$$

Por lo tanto

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1^-} (\sqrt{x}+1) = 2$$

Límite lateral derecho. Para $x > 1$ se cumple que $\sqrt{x} > 1$.

De manera que para $\sqrt{x} > 1$ se concluye que $\sqrt{x} - 1 > 0$, y para $x > 1$:

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}+1; \ \ \sqrt{x}-1 > 0$$

Por lo tanto

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1^+} (\sqrt{x}+1) = 2$$

Puesto que

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$$

Se tiene que

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = 2$$

Y por lo tanto la función f definida por partes es continua en 1.

2.- Determina si la siguiente función definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & si\ x \neq 0 \\ \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$$

Es continua en 0.

Solución. Vamos a utilizar límites laterales.

Límite lateral derecho. Para $x > 0$ se tiene

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

Límite lateral izquierdo. Por otra parte, para $x < 0$, este límite nos queda así

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

Como los limites laterales izquierdo y derecho de $f(x)$, cuando x tiende a cero existen pero no coinciden, se concluye que $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe, y que por lo tanto, la función f definida por partes no es continua en 0.

3.- Encuentra los valores de m y de n de tal manera que la función f sea continua en $x = 3$.

$$f(x) = \begin{cases} mx & si\ x < 3 \\ n & si\ x = 3 \\ -2x + 9 & si\ x > 3 \end{cases}$$

Solución. Vamos a utilizar límites laterales.

Límite lateral izquierdo. Para $x < 3$ se tiene

$$\lim_{x \to 3^-} mx = 3m$$

Límite lateral derecho. Para $x > 3$ se tiene

$$\lim_{x \to 3^+} (-2x + 9) = 3$$

Y para $x = 3$

$$\lim_{x \to 3} n = n$$

Finalmente, para que se cumpla la condición

$$\lim_{x\to 3} f(x) = n \Leftrightarrow \lim_{x\to 3^-} f(x) = 3m = \lim_{x\to 3^+} f(x) = 3$$

Se debe tener que $m = 1$, con lo cual se obtiene que $n = 3$.

4.- Escribe los valores de c y de d para los que la función f es continua en $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} 2x & si\ x < 3 \\ cx^2 + d & si\ 1 \leq x < 2. \\ .4x & si\ x \geq 2 \end{cases}$$

- Para $x < 3$, $f(x)$ corresponde a la gráfica de $y_1 = 2x$. Notemos que para $x = 1$, obtenemos el punto $P_1 = (1{,}2)$ que pertenece a esta recta.

- Por otra parte, para $x \geq 2$, la función $f(x)$ corresponde a la gráfica de $y_3 = 4x$. Para $x = 2$, obtenemos el punto $P_2 = (2{,}8)$ el cual pertenece a esta otra recta.

Sabemos que geométricamente, una función continua en todo numero de un intervalo dado, se puede concebir como una función cuya gráfica no se interrumpe. De esta manera, para que esta condición pueda cumplirse en la gráfica de $f(x)$, necesariamente se debe cumplir que los puntos $P_1 = (1{,}2)$ y $P_2 = (2{,}8)$ pertenezcan a la parábola

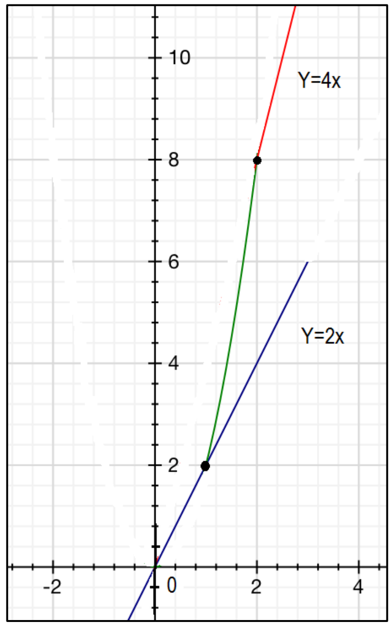
$$y_2 = cx^2 + d$$

Esta observación nos conduce al siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} c + d = 2 \\ 4c + d = 8 \end{cases}$.

La solución está dada por $c = 2$ y $d = 0$. Por lo tanto concluimos que

$$f(x) = \begin{cases} 2x & si\ x < 3 \\ 2x^2 & si\ 1 \leq x < 2. \\ 4x & si\ x \geq 2 \end{cases}$$

Y se verifica fácilmente lo siguiente: $\lim_{x\to 2} 4x = \lim_{x\to 2} 2x^2 = 8 = f(2)$ y $\lim_{x\to 1} 2x = \lim_{x\to 1} 2x^2 = 2 = f(1)$. La gráfica de $f(x)$ se indica a continuación.



5.- Determina si la siguiente función.

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+2}};\ x + 2 > 0$$

Es continua en continua en $x = -2$.

Solución. Utilizaremos al límite lateral derecho para investigar la continuidad de esta función en el punto $x = -2$.

Para $-2 < x$ se tiene que $0 < x + 2$ y $\lim_{x \to -2^+} \sqrt{x+2} = 0$. De esta manera,

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x}{\sqrt{x+2}} = \frac{\lim_{x \to -2^+} x}{\lim_{x \to -2^+} \sqrt{x+2}} = \frac{-2}{\lim_{x \to -2^+} \sqrt{x+2}} = -\infty$$

Puesto que $\lim_{x \to -2^+} \frac{x}{\sqrt{x+2}}$ no existe, se concluye que $\lim_{x \to -2} \frac{x}{\sqrt{x+2}}$ tampoco existe y por lo tanto, la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+2}}; x + 2 > 0$ no es continua en $x = -2$. Notemos que este hecho también se puede verificar más fácilmente observando que la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+2}}; x + 2 > 0$ no está definida en $x = -2$.

Continuidad en un intervalo abierto y en un intervalo cerrado

Definición 3. Una función f es continua

(a) Sobre **un intervalo abierto** (a,b) si es continua en todo número del intervalo; y

(b) Sobre **un intervalo cerrado** $[a,b]$ si es continua en el intervalo (a,b) y, además

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \quad y \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$$

Comprueba que la función

$$h(x) = x\sqrt{16 - x^2}$$

Es continua en el intervalo $[-4,4]$.

Solución. Como podemos observar, $h = fg$ donde $f(x) = x$ y $g(x) = \sqrt{16 - x^2}$. El dominio de $f(x)$ es el conjunto $\mathbb{R}$ y el dominio de $g(x)$ es el conjunto $[-4,4]$. Por lo tanto, el dominio de la función $h(x)$ es el conjunto $[-4,4]$. Y de esta forma, para $a \in (-4,4)$, se tiene

$$\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} x\sqrt{16 - x^2} = \left(\lim_{x\to a} x\right)\left(\lim_{x\to a}\sqrt{16 - x^2}\right) = \left(\lim_{x\to a} x\right)\left(\sqrt{\lim_{x\to a}(16 - x^2)}\right)$$

$$= (a)\left(\sqrt{16 - a^2}\right) = h(a)$$

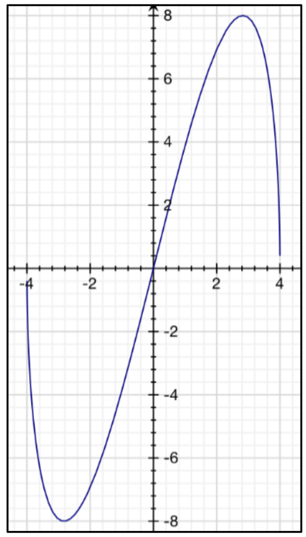
Y de acuerdo a la definición 3, h es continua en el intervalo $(-4,4)$. También debemos calcular el límite derecho en -4 y el límite izquierdo en 4.

$$\lim_{x\to -4^+} h(x) = \lim_{x\to -4^+} x\sqrt{16 - x^2} = \left(\lim_{x\to -4^+} x\right)\left(\sqrt{\lim_{x\to -4^+}(16 - x^2)}\right) = (-4)\,(0) = h(0)$$

Y por lo tanto $h(x)$ es continua por la derecha en -4. Similarmente,

$$\lim_{x\to 4^-} h(x) = \lim_{x\to 4^-} x\sqrt{16 - x^2} = \left(\lim_{x\to 4^-} x\right)\left(\sqrt{\lim_{x\to 4^-}(16 - x^2)}\right) = (4)\,(0) = h(0)$$

De manera que h(x) también es continua por la derecha; por consiguiente, según la definición 3, la función $h(x)$ es continua en el intervalo $[-4,4]$.



$h(x) = x\sqrt{16 - x^2}$

Operaciones con funciones continuas

En lugar de aplicar siempre las definiciones 1, 2 y 3 para comprobar la continuidad de una función, como en los ejercicios anteriores, resulta conveniente aplicar el teorema siguiente.

Teorema 1. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sean f y g funciones definidas de A a $\mathbb{R}$. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $c \in A$, tales que f y g son funciones continuas en a. Entonces las siguientes funciones también son continuas en a.

(i) $f + g, f - g, fg$ y αf.

(ii) La función $h = \frac{f}{g}$ siempre que $g(x) \neq 0$ para toda x en A.

Continuidad de una función compuesta

El siguiente teorema establece que la composición de dos funciones continuas es continua.

Teorema 2. Si g es continua en un número a y f es continua en $g(a)$, entonces la función compuesta $(fog)(x) = (f(g(x))$ es continua en a.

1.- Sean $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ y $g(x) = 1 - \sqrt{x}$.

$(\boldsymbol{i})$ *Determina $(fog)(x)$ y el dominio de fog.*

$(\boldsymbol{ii})$ *Donde es continua la función $h(x) = (fog)(x)$*

Solución. $(\boldsymbol{i})$ *Como la raíz cubica de un numero negativo es también un numero negativo, se puede concluir que $D(f) = \mathbb{R}$ y que $D(g) = [0, \infty)$.*

Por otra parte,

$$h(x) = f(g(x)) = f\left(1-\sqrt{x}\right) = \left(1-\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

El dominio de $h = fog$ *es el conjunto de todas las* $x \in D(g) = [0,\infty)$ *tales que*

$$g(x) = 1-\sqrt{x} \in D(f) = \mathbb{R}..$$

Como todo número real tiene raíz cubica, entonces se sigue que

$$g(x) = 1-\sqrt{x} \in D(f) = \mathbb{R}, \text{ para toda } x \in [0,\infty).$$

Por lo tanto, el dominio de la composición $h = gof$ *es el conjunto*$D(fog) = [0,\infty)$.

$(\boldsymbol{ii})$ *Por el teorema 2,* $h(x)$ *es continua para toda* $a \in [0,\infty)$ *pues* $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = \lim\limits_{x\to a}\left\{f\left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right)\right\} = \left(1-\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{3}} = (1-a)^{\frac{1}{3}} = h(a)$.

2.- Sean $f(x) = sen(x)$ y $g(x) = 1-\sqrt{x}$

$(\boldsymbol{i})$ *Determina* $h(x) = (gof)(x)$ *y el dominio de* $h(x)$.

$(\boldsymbol{ii})$ *Donde es continua la función* $h(x) = (gof)(x)$

Solución. $(\boldsymbol{i})$

$$h(x) = g(f(x)) = g\left(sen\,(x)\right) = 1-\sqrt{sen(x)}.$$

El dominio de f es el conjunto $D(f) = \mathbb{R}$, y el de g es el conjunto

$$D(g) = [0,\infty).$$

Y para que, $sen(x) \in D(g)$ *se debe cumplir que*

$$sen(x) \geq 0$$

Por lo tanto, el dominio de la composición $h = gof$ *es el conjunto*

$$D(h) = D_{g\circ f} = \{x | x \in [2n\pi, \pi + 2n\pi]; n \in \mathrm{Z} \cup \{0\}\}.$$

$(\boldsymbol{ii})$ *Por el teorema 2,* $h(x)$ *es continua para toda*

$$a \in \{x | x \in [2n\pi, \pi + 2n\pi]; n \in \mathrm{Z} \cup \{0\}\}$$

Pues en tal caso

$$\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} g\left(f(x)\right) = \lim_{x\to a}\left\{g\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\right\}$$

$$= 1 - \sqrt{\lim_{x \to a} sen(x)} = 1 - \sqrt{sen(a)} = h(a)$$

Finalmente tenemos el resultado siguiente.

Teorema 3. Los siguientes tipos de funciones son continuos en todo número de sus dominios.

- Polinomios
- Funciones Racionales
- Funciones Raíz
- Funciones Trigonométricas
- Funciones Trigonométricas Inversas
- Funciones Exponenciales
- Funciones Logarítmicas

1.- Comprueba que la función

$$h(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{3x + 1}$$

Es continua en el intervalo $[-2, \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, 2]$

Solución.

Sean $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ *y* $g(x) = 3x + 1$. *Primero vamos a calcular al dominio correspondiente de la función* $h = f/g$.

Puesto que

$$\sqrt{4 - x^2} \geq 0 \Leftrightarrow 4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 4 \geq x^2 \Leftrightarrow |x| \leq 2.$$

Entonces el dominio de f *es el intervalo cerrado* $A = [-2,2]$ *y es claro que el dominio de* g *es* $B = \mathbb{R}$.

La intersección de estos dominios es $A \cap B = [-2,2]$. *Ahora, para encontrar el dominio de* f/g *hay que excluir cada numero* x *en el intervalo* $[-2,2]$ *tal que* $3x + 1 = 0$; *es decir,* $x = \frac{1}{3}$. *Por lo tanto, se tiene lo siguiente:*

$$h(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{3x+1} \quad y \quad D(h) = \left\{x: -2 \leq x \leq 2; x \neq \frac{1}{3}\right\} = [-2, \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, 2]$$

Entonces, por el teorema 1 se tiene que para $a \in [-2, \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, 2]$

$$\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{4-x^2}}{3x+1} = \frac{\lim_{x\to a}\left(\sqrt{4-x^2}\right)}{\lim_{x\to a}(3x+1)} = \frac{\sqrt{\lim_{x\to a}(4-x^2)}}{\lim_{x\to a}(3x+1)} = \frac{\sqrt{4-a^2}}{3a+1} = h(a)$$

Y por el teorema 3, la función $h(x)$ *es continua en* $[-2,\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3},2]$.

2.- Comprueba que la función

$$h(x) = x^{\frac{1}{3}} \ln(x)$$

Es continua en el intervalo $(0,\infty)$.

***Solución**. Sean*

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} \quad y \quad g(x) = \ln x.$$

Ahora, vamos a determinar los dominios de las funciones f *y* g. *Se observa que la raíz cubica de un numero negativo es también un numero negativo. Por lo tanto se puede concluir que* $D(f) = \mathbb{R}$. *Por otra parte, se sabe que* $D(g) = (0,\infty)$. *La intersección de estos dominios es* $A \cap B = (0,\infty)$ *y por lo tanto, se tiene lo siguiente:*

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)(\ln x) \;\; y \;\; D(fg) = (0,\infty).$$

Entonces, por el teorema 1 se tiene que para $a \in (0,\infty)$

$$\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a}\left(x^{\frac{1}{3}}\right)(\ln x) \;\; = \lim_{x\to a}\left(x^{\frac{1}{3}}\right)\lim_{x\to a}(\ln x)$$

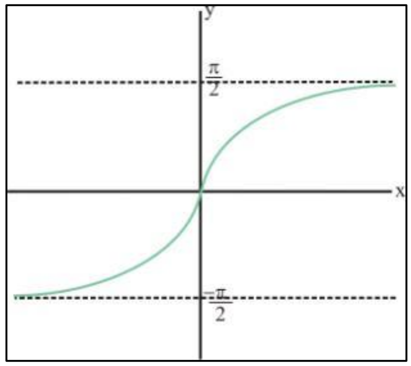
$$= \lim_{x\to a}\left(x^{\frac{1}{3}}\right)\left\{ln\left(\lim_{x\to a}(x)\right)\right\} \;\; = a^{\left(\frac{1}{3}\right)} \ln(a) = h(a)$$

Y por el teorema 3, la función $h(x)$ *es continua en* $(0,\infty)$.

3.- Consideremos a la función

$$f(x) = \arctan(x)$$

La función tangente inversa, tiene su dominio en $\mathbb{R}$ *y contradominio en* $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. *En la siguiente figura podemos ver su gráfica.*



$f(x) = \arctan(x)$

Sea $a = 1$*. Como* $a \in \mathbb{R}$ *entonces por el teorema 3,* $y = \arctan(x)$ *es continua en 1 ya que*

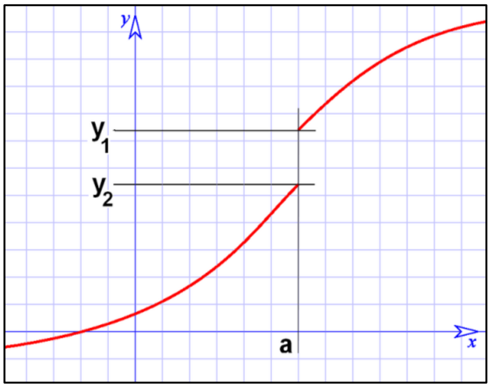
$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \arctan(x) \quad = \arctan\left\{\lim_{x\to 1}(x)\right\} = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} = f(1)$$

Tipos de discontinuidades

En las siguientes figuras aparecen las gráficas de varias funciones que no son continuas en el número $x = a$.

(i) **Discontinuidad de Salto en a**

En este caso los límites laterales izquierdo y derecho de la función $y = f(x)$ cuando x tiende a a existen pero son distintos y por lo tanto la condición (b) de la definición 1 de continuidad en un punto falla.



$$y_1 = \lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x) = y_2$$

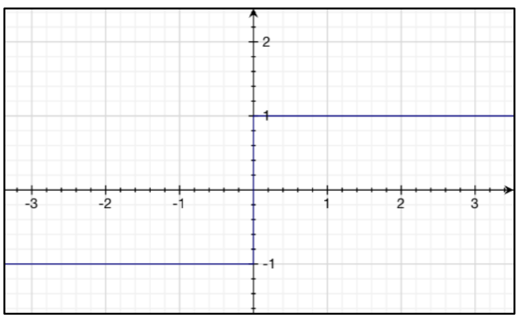
La función

$$f(x) = \frac{|x|}{x}.$$

No es continua en $x = 0$ ya que como vimos anteriormente

$$-1 = \lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

Y de este modo, la función $f(x) = \frac{|x|}{x}$ tiene una discontinuidad de salto en $x = 0$.



$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

2. Consideremos la función definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & si\ x \leq 5 \\ 10 - x & si\ x > 5 \end{cases}$$

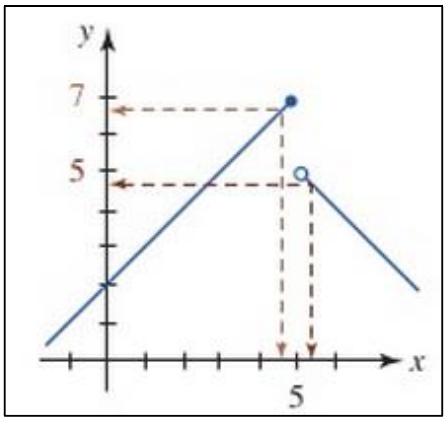
Cuando x se aproxima a 5 por la izquierda, se tiene

$$\lim_{x\to5^-} f(x) = \lim_{x\to5^-} (x+2) = 7.$$

Luego, cuando x tiende a 5 por la derecha, se observa lo siguiente

$$\lim_{x\to5^+} f(x) = \lim_{x\to5^+} (10-x) = 5.$$

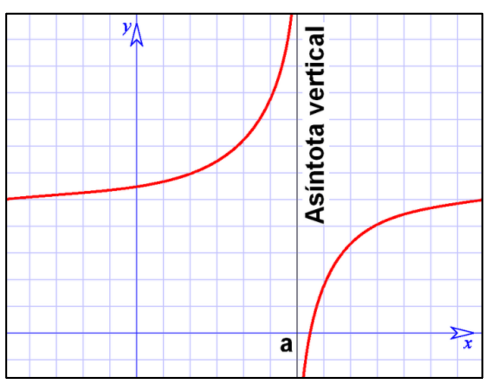
Y puesto que $\lim_{x\to5^-} f(x) \neq \lim_{x\to5^+} f(x)$, entonces podemos concluir que la función $f(x)$ tiene una discontinuidad de salto en $x = 5$.



$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & si\ x \leq 5 \\ 10 - x & si\ x > 5 \end{cases}$$

(ii) **Discontinuidad Infinita en** $\boldsymbol{a}$

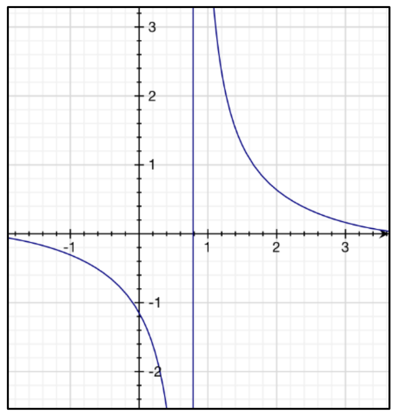
Si $x = a$ es una asíntota vertical para la gráfica de $y = f(x)$, entonces se dice que f tiene una discontinuidad infinita en $x = a$. En este caso no se satisface ninguna de las tres condiciones de la definición 1 de continuidad.



La función

$$f(x) = \frac{sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}$$

Tiene una asíntota vertical en el punto $x = \frac{\pi}{4}$ por lo tanto f tiene una discontinuidad infinita en $x = \frac{\pi}{4}$.

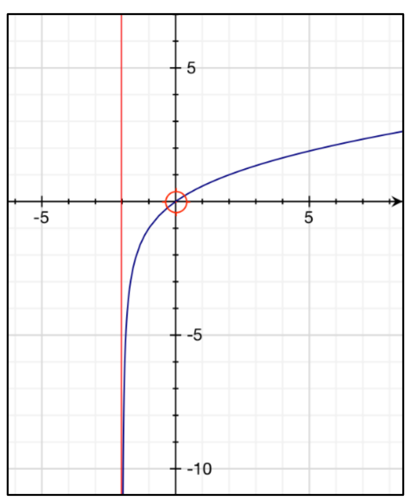


$$f(x) = \frac{sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}$$

2.- La función.

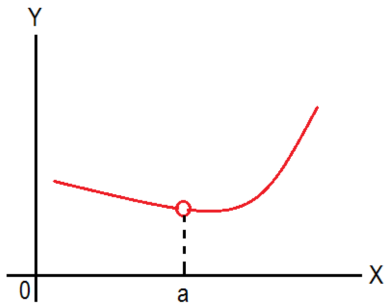
$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x + 2}}$$

Tiene una asíntota vertical en el punto $x = -2$ por lo tanto f tiene una discontinuidad infinita en $x = -2$.

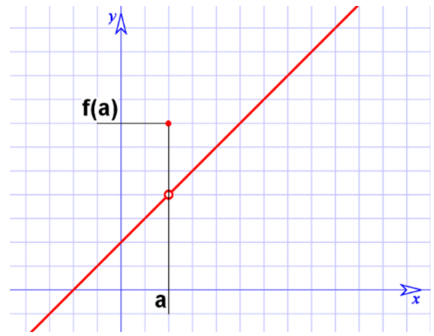


$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x + 2}}$$

(iii) **Discontinuidad Evitable o Removible en a**



(a)



(b)

En las gráficas que se muestran a continuacion se observa que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe.

- En el caso (a) se tiene que $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ ya que la función f no esta definida en $x = a$.

- En el caso (b) se tiene que $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ a pesar de que f si esta definida en $x = a$.

Si $f: A \to \mathbb{R}$ es una función que tiene una discontinuidad evitable en $x = a$ y se define(o se vuelve a definir) a $f(a)$ como $\lim_{x\to a} f(x)$ entonces la nueva función resultante $F: A \cup \{a\} \to \mathbb{R}$ es continua en a.

1.- Sea

$$f(x) = \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}; x \neq 9$$

En este caso $f(x)$ no está definida en $x = 9$ y por lo tanto f no puede ser continua es este punto. Sin embargo, para evaluar

$$\lim_{x\to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$$

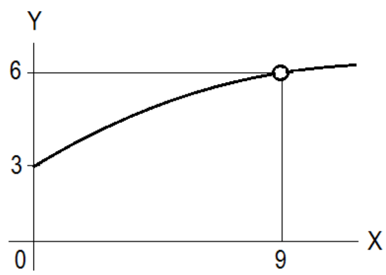
Cambiamos la forma de $f(x)$ racionalizando el denominador de la siguiente manera. Para $x \neq 9$:

$$\lim_{x\to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} = \lim_{x\to 9} \left\{\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}\right\} \left\{\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}\right\} = \lim_{x\to 9} \left\{\sqrt{x}+3\right\} = 6$$

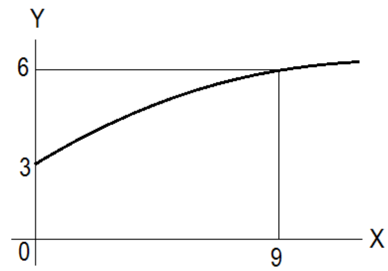
Y como $\lim_{x\to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$ existe, entonces podemos definir la función $F(x)$ como

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3} & si\ x \neq 9 \\ \\ 6\ \ si\ \ x = 9 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{x}+3\ \ si\ x \neq 9 \\ \\ 6\ si\ x = 9 \end{cases}$$

Y entonces la función resultante F es continua en $x = 9$. Con esto se logra evitar la discontinuidad de la función $f(x)$ en $x = 9$.



$f(x) = \dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}; x \neq 9$



$F(x)$

Observación. Si una función $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no tiene límite en $x = a$, entonces no hay manera de obtener una función $F: A \cup \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ que sea continua en a. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \frac{1}{x}; x \neq 0$$

No tiene límite en $x = 0$ y por lo tanto, no hay valor que se le pueda asignar en $x = 0$ para obtener una extensión continua de $f(x)$.

2.- Consideremos la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{16-x^2}{4+x} & si\ x \neq -4 \\ \\ 6\ \ si\ \ x = -4 \end{cases}$$

Los límites laterales izquierdo y derecho nos dan el siguiente resultado

$$\lim_{x\to -4^-} \frac{16-x^2}{4+x} = \lim_{x\to -4^-} \frac{(4+x)(4-x)}{4+x} = \lim_{x\to -4^-} (4-x) = 8$$

$$y \quad \lim_{x\to -4^+} \frac{16-x^2}{4+x} = \lim_{x\to -4^+} \frac{(4+x)(4-x)}{4+x} = \lim_{x\to -4^+} (4-x) = 8$$

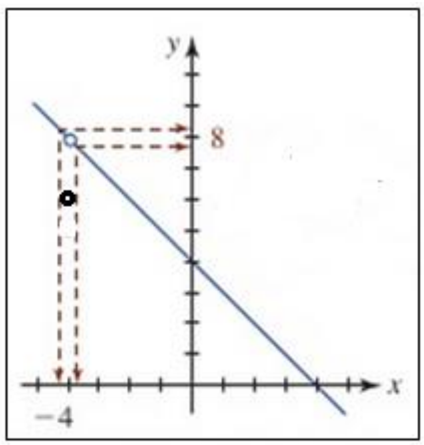
Y por lo tanto, por la propiedad (b) para límites laterales es posible concluir que

$$\lim_{x\to -4} \frac{16-x^2}{4+x} = 8$$

Notemos además que $\lim_{x\to -4} \frac{16-x^2}{4+x} \neq f(-4)$ a pesar de que f si esta definida en $x = a$. Y como $\lim_{x\to -4} \frac{16-x^2}{4+x}$ existe, entonces podemos definir la función $F(x)$ como

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{16-x^2}{4+x} & si\ x \neq -4 \\ 8 \ si\ \ x = -4 \end{cases} = \begin{cases} 4 - x \ \ si\ x \neq -4 \\ 8\ si\ x = -4 \end{cases}$$

Y entonces la función resultante F es continua en $x = -4$. Con esto se logra evitar la discontinuidad de la función $f(x)$ en $x = -4$. Mientras que, como se ve en la figura, la gráfica de f resulta ser la gráfica de $y = -4 - x$ con un hueco en el punto correspondiente a $x = -4$.



$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{16-x^2}{4+x} \ si\ x \neq -4 \\ 6\ \ si\ \ x = -4 \end{cases}$$

UNIDAD TEMÁTICA III. La Derivada y las técnicas de derivación

3.1 Derivada.

Introducción a la derivada: pendiente, velocidad, razón de cambio.

1.- (a) Establece si existe $f'(0)$ para la función

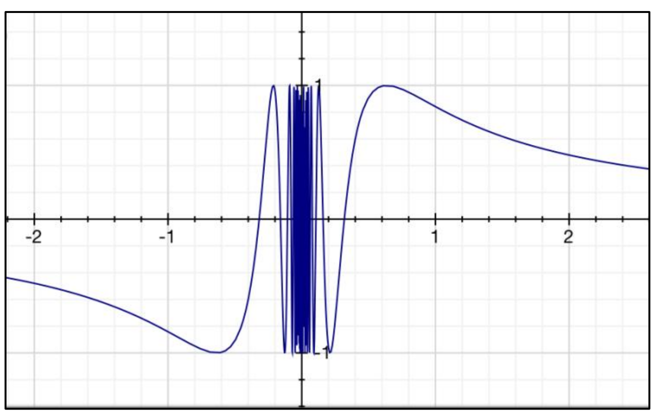
$$f(x) = \begin{cases} x\, sen\, \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Solución. Para establecer la existencia de $f'(0)$ vamos a utilizar la definición de derivada de una función en un punto con límites laterales.

$$f'(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h\, sen\, (\frac{1}{h}) - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{h\, sen\, (\frac{1}{h})}{h} = \lim_{h \to 0^+} sen\, (\frac{1}{h})$$

Y como $\lim_{h \to 0^+} sen\, \left(\frac{1}{h}\right) \in [-1,1]$, entonces se concluye que $f'(0)$ no existe.



$$f(x) = \begin{cases} x\, sen\, \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

2.- Establece si existe $f'(0)$ para la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sen\ \dfrac{1}{x}; & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Solución. Nuevamente vamos a utilizar la definición de derivada de una función para investigar esto.

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 sen\ \left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 sen\ (\frac{1}{h})}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} h\ sen\ (\frac{1}{h})$$

Para calcular este último límite, vamos a hacer lo siguiente. Recordemos que para todo $x \in \mathbb{R} - 1 \leq sen\ x\ \leq 1$. Entonces, para $x = \frac{1}{h}$; $h \neq 0$ se tiene

$$-1\ \leq sen\left(\frac{1}{h}\right) \leq 1\ \ldots\ \ (1).$$

Como $h \neq 0$ vamos a considerar dos casos

(a) Si $h > 0$, entonces de la desigualdad (1) obtenemos

$$-h \leq h\ sen\ \left(\frac{1}{h}\right) \leq h.$$

De manera que por el teorema de compresión

$$0 = \lim_{h \to\ 0^+} (-h) \leq \lim_{h \to\ 0^+} h\ sen\ \left(\frac{1}{h}\right) \leq \lim_{h \to\ 0^+} h = 0.$$

Por lo tanto

$$\lim_{h \to\ 0^+} h\ sen\ \left(\frac{1}{h}\right) = 0$$

(b) Si $h < 0$ entonces de la desigualdad (1) se obtiene

$$-h \geq h\, sen\left(\frac{1}{h}\right) \geq h.$$

O sea

$$h \leq h\, sen\left(\frac{1}{h}\right) \leq -h.$$

Como $h < 0$ entonces $-h > 0$ y de este modo

$$0 = \lim_{h\to 0^-} h \leq \lim_{h\to 0^-} h\, sen\left(\frac{1}{h}\right) \leq \lim_{h\to 0^-}(-h) = 0.$$

Por lo tanto, nuevamente se obtiene

$$\lim_{h\to 0^-} h\, sen\left(\frac{1}{h}\right) = 0.$$

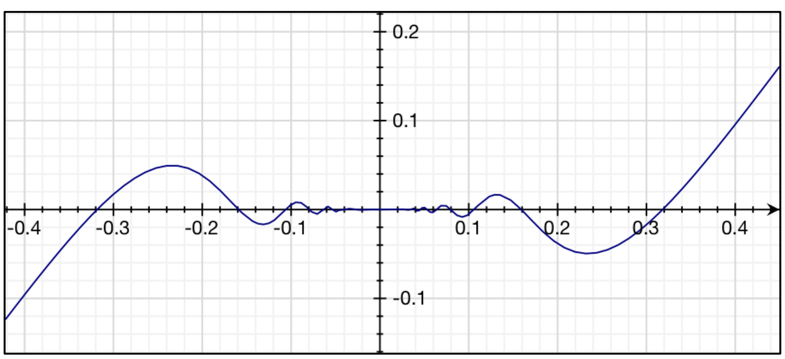
Como los límites laterales izquierdo y derecho existen y son iguales a cero, se concluye que

$$\lim_{h\to 0} h\, sen\left(\frac{1}{h}\right) = 0.$$

Por lo tanto

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} h\, sen\left(\frac{1}{h}\right) = 0$$

Y así, concluimos que $f'(0)$ existe.



$$f(x) = \begin{cases} x^2 sen\,\dfrac{1}{x}; & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

3.- Sea $$f(x) = \begin{cases} 2 - x \;si\; x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 2 \;si\; x > 1 \end{cases}$$

¿Es derivada f en 1? Dibuja la gráfica de $f(x)$.

Solución. Vamos a utilizar límites laterales para verificar esto.

Límite lateral izquierdo.

$$f'(1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{2-(1+h)-1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

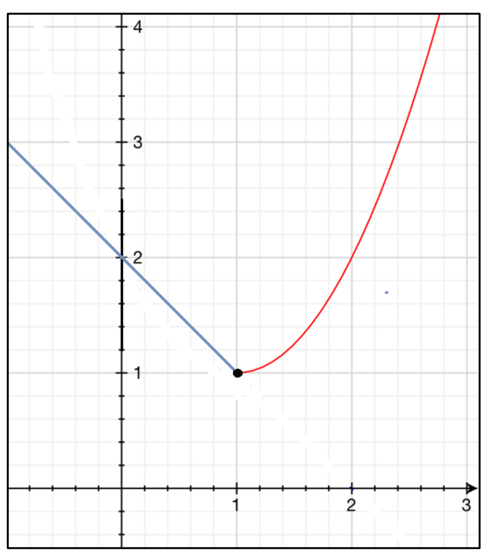
Por otra parte, para el límite lateral derecho tenemos

$$f'(1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\{(1+h)^2 - 2(1+h) + 2\} - 1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0^+} h = 0$$

Puesto que los límites laterales izquierdo y derecho existen pero no coinciden, se concluye que $f'(1)$ no existe y por lo tanto, f no es derivable en $x = 1$.



4.- Sea $$f(x) = \begin{cases} x^2 \; si \; x \le 2 \\ mx + b \; si \;\; x > 2 \end{cases}$$

Determina los valores de m y de b que hacen que f sea siempre derivable.

Solución. Para que la función $f(x)$ sea siempre derivable en $c = 2$ se debe cumplir que

$$f'(c) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Límite lateral izquierdo. Para $x < 2$ se tiene

$$f'(2) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{(2+h)^2 - (2)^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{4h + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}(4+h) = 4.$$

Por otra parte, para $x > 2$, el límite lateral derecho nos da

$$f'(2) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{m(2+h) + b - (2m+b)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{mh}{h} = m$$

De esta manera, para que los límites laterales izquierdo y derecho sean iguales, se debe tener que $m = 4$. Por otra parte, observamos que para $x = 2$ $f(2) = 4$.Como el punto $p = (2,4)$ también debe estar en la curva $y = f(x)$, entonces para el caso $x > 2$ utilizamos la fórmula punto-pendiente $y - y_0 = m(x - x_0)$. De donde

$$y - 4 = 4(x - 2)$$

$$y = 4x - 4.$$

Y por lo tanto $b = -4$.

En conclusión, para que la función $y = f(x)$ definida por partes sea siempre derivable en el punto $x = 2$, se debe tener que

$$m = 4 \text{ y } b = -4$$

5.- Encuentra la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto indicado

$$y = \frac{x-1}{x-2} \ ; \ p(3,2)$$

Solución. Utilizando las fórmulas de derivación se obtiene que

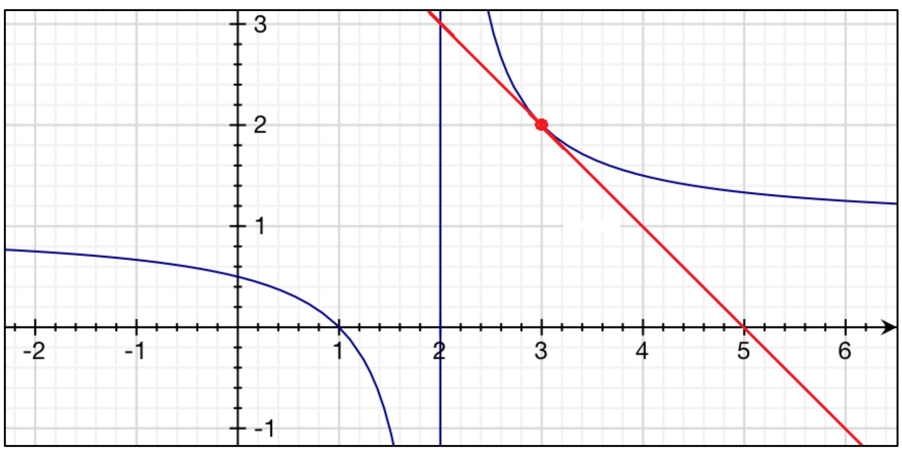
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(x-2)^2} = f'(x).$$

De modo que para $x = 3$ obtenemos que $f'(3) = -1$. Para obtener la ecuación de la recta tangente, utilizamos la fórmula punto pendiente

$$y - y_0 = m(x - x_0) \ ; \ \ p = (3,2) \ , m = -1$$

$$y - 2 = (-1)(x - 3)$$

$$y = -x + 5$$



$$y = \frac{x-1}{x-2} \ ; \ p(3,2)$$

6.- Encuentra una ecuación de la recta tangente a la curva $y = x\sqrt{x}$ que es paralela a la curva $y = 1 + 3x$

Solución. Sea y_1 la ecuación de la recta que estamos buscando. Para que la recta con ecuación $y = 3x + 1$ Sea paralela con la recta $y_1 = f'(c)x + b$ se debe cumplir que $f'(c) = 3$, donde

$$f(x) = x\sqrt{x} \qquad \text{y} \qquad f'(x) = \tfrac{3}{2}\sqrt{x}$$

Por lo tanto, para c en el dominio de $f(x)$, se tiene que $f'(c) = 3$, o sea

$$\frac{3}{2}\sqrt{c} = 3$$

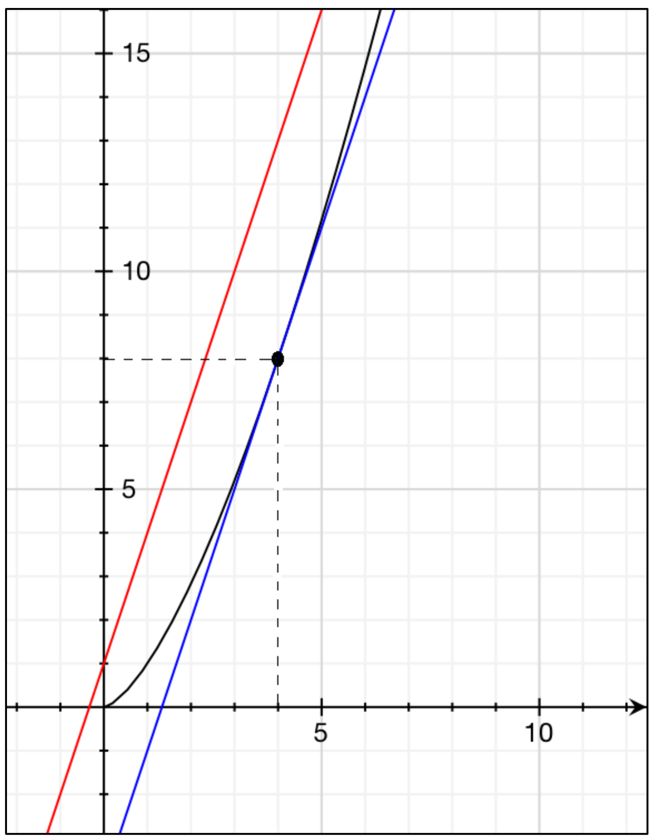
Al despejar obtenemos que $c = 4$. Ahora bien, para $c = 4$, $f(4) = 8$ y por lo tanto la recta y_1 que estamos buscando tiene pendiente $f'(c) = 3$ y pasa por el punto $p = (4{,}8)$. De esta manera, utilizando la fórmula punto pendiente $y - y_0 = m(x - x_0)$. Se tiene

$$y - 8 = f'(c)(x - 4)$$

$$y - 8 = 3(x - 4)$$

$$y = 3x - 4.$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x\sqrt{x}$ que buscamos tiene ecuación $y_1 = 3x - 4$



7.- Comprueba de manera analítica que la función

$$f(x) = |x - 6|$$

No es derivable en $x = 6$.

Solución. Vamos a utilizar la definición de la derivada de una función en $x = 6$. Si $h > 0$ se tiene

$$\begin{aligned} f'(6) &= \lim_{h \to 0^+} \frac{f(6+h) - f(6)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^+} \frac{|(6+h) - 6| - |0|}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1 \end{aligned}$$

Por otra parte. Si $h < 0$ entonces

$$\begin{aligned} f'(6) &= \lim_{h \to 0^-} \frac{f(6+h) - f(6)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^-} \frac{|(6+h) - 6| - |0|}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1 \end{aligned}$$

Puesto que los límites laterales izquierdo y derecho de $f'(6)$ existen pero no son iguales, se concluye que

$$f'(6) = \lim_{h \to 0} \frac{f(6+h) - f(6)}{h}$$

No existe y por lo tanto $f(x) = |x - 6|$ no es derivable en $x = 6$.

Derivadas en intervalos abiertos y en intervalos cerrados

1.- Para qué valores de x es derivable la función

$$f(x) = x|x|$$

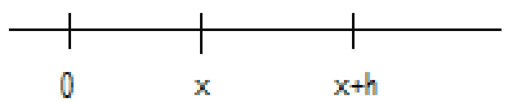
Solución. Se tienen 3 casos $(i)\ x > 0$, $(ii)\ x = 0$ y $(iii)\ x < 0$.

$\boldsymbol{Caso}\ (\boldsymbol{i})\ x > 0$. En este caso

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)|x+h| - x|x|}{h} \quad *** \ (1)$$

Ahora bien, si $x > 0$ entonces $|x| = x$ y se puede elegir a $h > 0$ suficientemente pequeño de tal manera que $x + h > 0$



De donde $|x+h| = \mathrm{x} + \mathrm{h}$. Y por lo tanto de (1) obtenemos lo siguiente

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)|x+h| - x|x|}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x+h) = 2x.$$

Y así $f(x)$ es derivable para toda $x > 0$.

$\boldsymbol{Caso}\ (\boldsymbol{ii})\ x = 0$, en este caso

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

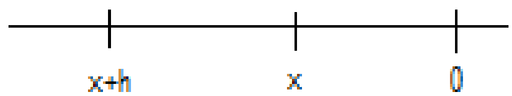
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(0+h)|0+h| - 0|0|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h|h|}{h} = \lim_{h \to 0} |h| = 0.$$

De manera que $f(x)$ es derivable para $x = 0$.

Caso (***i i i***) $Si \quad x < 0$, entonces

$$f'(x) \ = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)|x+h| - x|x|}{h} \ *** \ (2)$$

De manera análoga al caso (***i***) si $x < 0$ entonces se puede elegir $h < 0$ y suficientemente pequeña de tal manera que $x + h < 0$



Y por lo tanto de (2) se obtiene

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)|x+h| - x(-x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)\{-(x+h)\} + x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-(x+h)^2 + x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-\left(2xh + h^2\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h(2x+h)}{h} = \lim_{h \to 0} -(2x+h) = -2x.$$

Como $x \ < \ 0$ se tiene que $f'(x) = -2x > 0$.

Por lo tanto $f(x)$ también es derivable para toda $x \ < \ 0$.

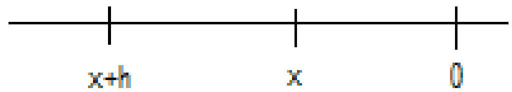
Finalmente, a partir de los resultados obtenidos con la ayuda de los límites concluimos que $f(x)$ es derivable para toda x en $\mathbb{R}$.

2.- Sea

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ 5 - x & si \quad 0 < x < 4 \\ \dfrac{1}{5-x} & si \quad x \geq 4 \end{cases}$$

(a) ¿Dónde es $f(x)$ discontinua?
(b) ¿Dónde es $f(x)$ derivable?

- Si $x \leq 0$ entonces podemos escoger h suficientemente pequeño de tal manera que $x + h < 0$ y en tal caso

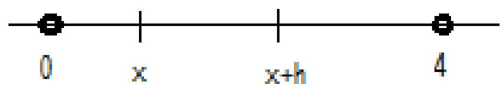


$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

De esta manera $f(x)$ es derivable para toda $x \in (-\infty, 0]$ y por lo tanto tambien es continua en este intervalo.

- Si $0 < x < 4$ entonces para $h > 0$ tal que $0 \leq x + h < 4$ se tiene



$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{5 - (x+h) - (5 - x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

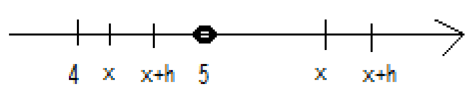
De esta manera $f(x)$ es derivable para toda $x \in (0,4)$ y tambien es continua en este intervalo.

- La función $f(x)$ es discontinua cuando $x = 5 \in [4, \infty)$ ya que este punto es una asíntota vertical de la función. De manera que

$$f'(5) = \lim_{h \to 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h}$$

No existe.

- Si $x \in [\,4,5\,) \cup (\,5, \infty\,)$ entonces para $h > 0$ suficientemente pequeño se tiene



$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{5-(x+h)} - \frac{1}{5-x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{(5-x-h)(5-x)} = \frac{1}{(5-x)^2}$$

Con base en estas observaciones concluimos que

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ -1 & si \quad 0 < x < 4 \\ \dfrac{1}{(5-x)^2} & si \quad x \geq 4 \end{cases}$$

$f'(x)$ es derivable y continua en todo punto de su dominio siempre que $x \neq 5$.

3.2 Reglas para encontrar derivadas

- Utiliza la regla de la cadena para obtener la primera derivada de las siguientes funciones

$\mathbf{1.-}\quad y=|x|$

Solución. Escribimos $y=\sqrt{x^2}$, de esta manera y puede expresarse en la forma

$$y=(f\ o\ g)(x)=f\big(g(x)\big).$$

Donde $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x)=x^2$ y como $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ y $g'(x)=2x$.

Entonces utilizando la regla de la cadena nos queda

$$\frac{d}{dx}f\big(g(x)\big)=f'\big(g(x)\big)g'(x)$$

$$=\frac{2x}{2\sqrt{x^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2}}=\frac{x}{|x|};x\neq 0$$

$\mathbf{2.-}\quad y=2^{(sen\pi x)}$

Solución. La expresión $y=2^{(sen\pi x)}$ puede expresarse en la forma

$$y=(f\ o\ g)(x)=f\big(g(x)\big).$$

Donde$f(x)=2^x$ y $g(x)=sen\pi x$, como $f'(x)=2^x\ln(2)$ y $g'(x)=\pi cos\pi x$.

Entonces utilizando la regla de la cadena nos queda

$$\frac{d}{dx}f\big(g(x)\big)=f'\big(g(x)\big)g'(x)$$

$$=f'(sen\pi x)\pi cos\pi x$$

$$=2^{sen\pi x}\ln(2)\pi cos\pi x$$

$\mathbf{3.-}\quad y = \operatorname{arc}\cos(x + arc\ senx)$

Solución. Nuevamente la expresión dada puede verse en la forma

$$y = (f\ o\ g)(x) = f\big(g(x)\big).$$

Donde$f(x) = arc\ cosx$ y $g(x) = x + arc\ senx$, puesto que $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ y $g'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, entonces

$$\frac{d}{dx} f\big(g(x)\big) = f'\big(g(x)\big) g'(x)$$

$$= f'(x + arc\ senx)\left\{1 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right\}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-(x + arc\ senx)^2}}\left\{1 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right\}$$

$\mathbf{4.-}$ Utiliza la regla de la cadena para probar que

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

Solución. Se sabe que $\quad x = \ln(e^x) \ldots (1)$

Notemos que $x = \ln(e^x)$ es de la forma $(f\ o\ g)(x) = f(g(x))$, donde

$$f(x) = \ln(x) \text{ y } \qquad g(x) = e^x.$$

Y ahora, vamos a derivar a ambos lado de la expresión (1) utilizando la regla de la cadena

$$\frac{d}{dx} \ln(e^x) = 1$$

$$\frac{1}{e^x} \cdot \frac{d}{dx}(e^x) = 1$$

De donde

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

5. $-\ \ y = sen(\tan 2x)\ \ldots\ (1)$

Solución. La expresión para y puede expresarse en la forma

$$y = (f\ o\ g\ o\ h)(x) = f\left(g\big(h(x)\big)\right).$$

Donde

$$f(x) = sen\ x$$
$$g(x) = \tan x$$
$$h(x) = 2x.$$

Y como $f'(x) = \cos x$, $g'(x) = sec^2 x$ y $h'(x) = 2$.

Entonces al derivar la expresión (1) utilizando la regla de la cadena, se obtiene lo siguiente

$$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}f\left(g\big(h(x)\big)\right)$$

$$= f'\left(g\big(h(x)\big)\right)g'\big(h(x)\big)h'(x).$$

Sustituyendo nos queda

$$\frac{dy}{dx} = f'(\tan 2x)g'(2x)\cdot 2$$

$$= \cos(\tan 2x)\, sec^2(2x)\cdot 2$$

6. $-\ \ \ y = cos\sqrt{sen\ (\tan \pi x)}\ \ldots\ \ (1)$

Solución. La expresión dada para y puede escribirse en la forma

$$y = (f\ o\ g\ o\ h\ o\ r\ o\ s)(x).$$

Donde

$$f(x) = \cos x\ \ ;\ \ f'(x) = -sen\ x$$
$$g(x) = \sqrt{x}\ \ ;\ \ g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$h(x) = sen\ x\ \ ;\ \ h'(x) = \cos x$$

$$r(x) = \tan x \;\; ; \;\; r'(x) = sec^2 x$$
$$s(x) = \pi x \; ; \;\; s'(x) = \pi.$$

De esta manera, al derivar la expresión (1) utilizando la regla de la cadena nos queda

$$\frac{dy}{dx} = f'(g \;\; o \;\; h \;\; o \;\; r \;\; o \;\; s)\, g'\,(h \;\; o \;\; r \; o \;\; s)\, h'\,(r \;\; o \;\; s)\, r'\,(s)\, s'$$

$$= -sen\{\sqrt{sen\,(\tan \pi x}\} \cdot \frac{1}{2\sqrt{sen(\tan \pi x)}} \cdot sen(\tan \pi x) \;\cdot\; sec^2\,(\pi x) \cdot \pi$$

7. – Encuentra la derivada de la siguiente función

$$y = |sen\ x|$$

Solución. Esta expresión tiene la forma $y = f(g(x))$ donde $f(x) = |x|$ y $g(x) = sen\ x$, de manera que $f'(x) = \frac{x}{|x|}$ y $g(x) = cos\ x$. Por lo tanto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{sen\ x. cos\ x}{|sen\ x|} ; x \neq n\pi, n\ entero$$

Derivación implícita

Utilizando derivación implícita encuentra la ecuación de la recta tangente con el punto indicado para las siguientes funciones.

1.- $$(x^2+y^2)^2 = 4x^2y \; ; \; p = (1,1)$$

Solución. Derivamos a ambos lados de la ecuación dada con respecto a x obtenemos

$$\frac{d}{dx}(x^2+y^2)^2 = \frac{d}{dx}4x^2y$$

$$2(x^2+y^2)\left(2x+2y\frac{dy}{dx}\right) = 4\left\{x^2\frac{dy}{dx}+2xy\right\}$$

$$2(x^2+y^2)2x+2(x^2+y^2)2y\frac{dy}{dx} = 4x^2\frac{dy}{dx}+8xy$$

$$4x(x^2+y^2)+4y(x^2+y^2)\frac{dy}{dx} = 4x^2\frac{dy}{dx}+8xy$$

$$4y(x^2+y^2)\frac{dy}{dx}-4x^2\frac{dy}{dx} = 8xy-4x(x^2+y^2)$$

$$\frac{dy}{dx}\{4y(x^2+y^2)-4x^2\} = 8xy-4x(x^2+y^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8xy-4x(x^2+y^2)}{4y(x^2+y^2)-4x^2}$$

Y ahora, para $x = 1$, $y = 1$ se tiene que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8(1)(1)-4(1)(2)}{4(1)(2)-4(1)} = 0.$$

Ahora, para calcular la ecuación de la recta tangente en el punto $p = (1,1)$, utilizamos la fórmula punto-pendiente:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \text{ ; donde } m = 0$$

Y nos queda

$$y - 1 = 0(x-1)$$

$$y = 1.$$

2.- $$7x^2 - 6\sqrt{3}(xy) + 13y^2 = 16 \;;\; p = (\sqrt{3}, 1)$$

Solución. Derivamos a ambos lados de la ecuación dada con respecto a x.

$$\frac{d}{dx}\left\{7x^2 - 6\sqrt{3}(xy) + 13y^2\right\} = 0$$

$$14x - 6\sqrt{3}\left(x\frac{dy}{dx} + y\right) + 26y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$14x - 6\sqrt{3}x\frac{dy}{dx} - 6\sqrt{3}y + 26y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\left\{26y - 6\sqrt{3}x\right\}\frac{dy}{dx} = 6\sqrt{3}y - 14x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6\sqrt{3}y - 14x}{26y - 6\sqrt{3}x}.$$

Y ahora, para $x = \sqrt{3}\;;\; y = 1$ nos queda

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6\sqrt{3}(1) - 14(\sqrt{3})}{26(1) - 6\sqrt{3}(\sqrt{3})} = -\frac{8\sqrt{3}}{8} = -\sqrt{3}$$

Nuevamente, para calcular la ecuación de la recta tangente en el punto $p = \left(\sqrt{3}, 1\right)$ utilizamos la fórmula punto pendiente $y - y_0 = m(x - x_0)$; donde

$$m = -\sqrt{3} \qquad \text{y} \;\; P = (x_0, y_0) = (\sqrt{3}, 1)$$

Y nos queda

$$y - 1 = -\sqrt{3}(x - \sqrt{3})$$

$$y = -\sqrt{3}x + 4.$$

3.- $$y = (\cos x)^x$$

Solución. Escribimos a esta expresión así

$$\ln(y) = x\ln(\cos x).$$

Y ahora derivamos con respecto a x a ambos lados de esta ecuación resultante:

$$\frac{d}{dx}\ln(y) = \frac{d}{dx}\{x\ln(\cos x)\}$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x\left\{\frac{1}{\cos x}\cdot sen\ x\right\} + \ln(\cos x).$$

Por lo tanto

$$\frac{dy}{dx} = y\{x\tan x + \ln(\cos x)\}.$$

Pero $y = (\cos x)^x$, por lo tanto

$$\frac{dy}{dx} = (\cos x)^x\{x\tan x + \ln(\cos x)\}$$

4.- $y = \arctan(x)$

Solución. Se sabe que

$y = \arctan(x)$ si y sólo si $x = \tan(y)$.

Al derivar implícitamente $x = \tan(y)$ con respecto a x obtenemos

$$\frac{d}{dx}\tan(y) = 1$$

$$sec^2 y\cdot\frac{dy}{dx} = 1.$$

O sea

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{sec^2 y} = \frac{1}{1 + tan^2 y}.$$

Pero como $x = \tan(y)$ entonces $x^2 = tan^2 y$ y al sustituir esto nos queda $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$.
Por lo tanto $\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$.

5.- $$y = \sqrt{\arctan x}$$

Solución. Equivalentemente podemos escribir

$$y^2 = \arctan x \ \ldots \ (1)$$

Y ahora, derivamos a la expresión (1) con respecto a x utilizando derivación implícita.

$$\frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}\arctan x$$

$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y(1+x^2)}.$$

Pero como $y = \sqrt{\arctan x}$ entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{\arctan x\,(1+x^2)}}.$$

Aplicaciones

1.- Demuestra que la tasa de cambio del volumen de una esfera con respecto al radio es igual al área de la superficie.

Demostración. Se sabe que el volumen de una esfera de radio r está dado por la fórmula

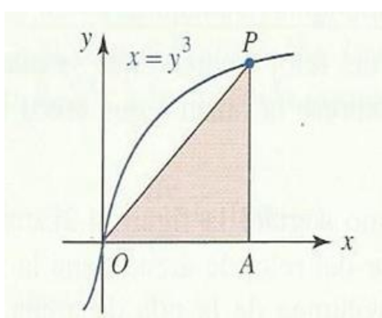
$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

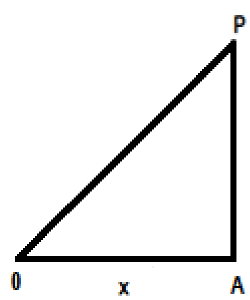
Por lo tanto, al derivar a ambos lados de esta ecuación con respecto a r obtenemos lo siguiente

$$\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$$

Esta expresión es precisamente la fórmula para calcular el área de la superficie de una esfera.

2.- La coordenada x del punto $\boldsymbol{P}$ que se muestra en la figura tiene una tasa de crecimiento de $\frac{1}{3}cm/h$. ¿Cuán rápido crece el área del triángulo rectángulo $\boldsymbol{OPA}$ cuando las coordenadas de $\boldsymbol{P}$ son $(8,2)$?





Solución. Sean x y y las distancias de los segmentos $\overline{0A}\ y\ \overline{AP}$ respectivamente y denotemos por $A(x, y)$ el área del triángulo $\boldsymbol{OAP}$ tal y como se indica en la figura. Entonces se tiene la siguiente información.

<u>Datos</u> $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{3}cm/h$

<u>Incógnita</u> Hallar el valor de $\frac{dA}{dt}$ cuando $\boldsymbol{P} = (x, y) = (8,2)$

De acuerdo con la figura descrita para este ejercicio, se deduce que el área del triángulo $\boldsymbol{OAP}$ es

$$A(x,y)=\frac{1}{2}xy *** (1)$$

Y además se sabe que la ecuación de la curva es

$$x=y^3 \Rightarrow y=x^{\frac{1}{3}} *** (2)$$

La ecuación (1) es la ecuación que relaciona las variables. Ahora derivamos ambos lados de la ecuación (1) con respecto a t para obtener

$$\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}\left[x\frac{dy}{dt}+y\frac{dx}{dt}\right] *** (3)$$

El único dato que no conocemos en esta ecuación es el diferencial $\frac{dy}{dt}$ pero lo podemos conocer derivando a la ecuación (2), con lo cual obtenemos

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\frac{dx}{dt} *** (4)$$

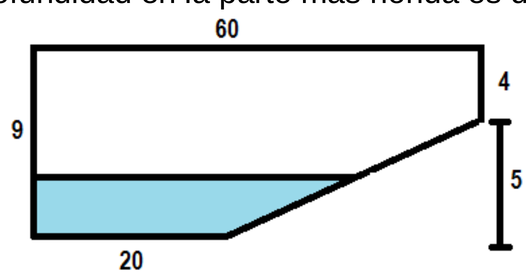
Sustituyendo (4) en (3) y sustituyendo valores $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{3}, x=8$ y $y=2$ se obtiene lo siguiente

$$\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}\frac{dx}{dt}+y\frac{dx}{dt}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(8)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)+(2)\frac{1}{3}\right]=\frac{4}{9}$$

Por lo tanto

$$\frac{dA}{dt}=\frac{4}{9}cm^2/h.$$

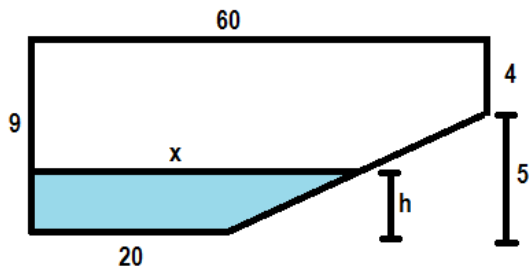
3.- La orilla de una alberca es un rectángulo de 60 metros de largo y 30 de ancho, y su sección transversal tiene las dimensiones (en metros) que se indican en la figura. La alberca se está llenando a razón de 500 metros cúbicos de agua por minuto. Calcula aproximadamente la razón de cambio del nivel del agua $\boldsymbol{h}$ en el momento en que la profundidad en la parte más honda es de 4 metros



Solución. Sea x la longitud horizontal y h la altura del nivel del agua de la alberca que se indican en el diagrama anterior. Entonces tenemos lo siguiente

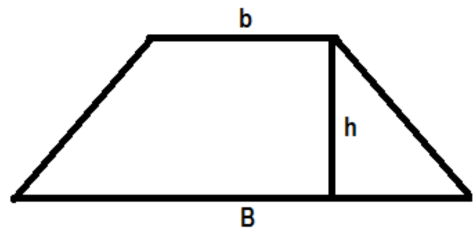
Datos. $\frac{dV}{dt} = 500m^3/min$

Incógnita. Hallar $\frac{dh}{dt}$ cuando $h = 4$.



Con la ayuda del diagrama anterior vamos a determinar cuál es la ecuación que relaciona las variables V & h. Para ello vamos a utilizar la fórmula para calcular el área de un trapecio dada por

$$A = \frac{1}{2}(B + b)h *** (1)$$



Y también un poco de semejanza, como podemos observar del diagrama anterior se tiene la siguiente relación entre segmentos

$$\frac{60}{x} = \frac{5}{h}$$

Esto es

$$x = 12h *** (2)$$

En nuestro caso solamente necesitamos calcular el valor de $A_1 = \frac{1}{2}A$ dado en (1) el cual representa al área de la zona sombreada en el diagrama, por lo cual encontramos que el valor de esta área es

$$A_1 = \frac{1}{4}(2x + 40)h *** (3)$$

Pero por (2) se llega a

$$A_1 = \frac{1}{4}(24h + 40)h *** (4)$$

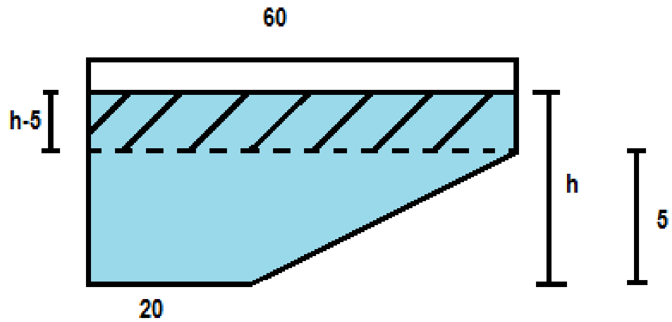
Por lo tanto, el volumen de agua en la parte sombreada puede expresarse en términos de la altura del nivel del agua h como

$$V(h) = (6h + 10)30h; 0 \leq h \leq 5 *** (5)$$

Donde

$$V(0) = 0 \; y \; V(5) = 6000 \, m^3$$

Ahora vamos a obtener el volumen de agua cuando la altura h se encuentra como se indica la figura siguiente.



El área de la sección transversal A_2 correspondiente a la parte rayada puede expresarse en términos de la altura del nivel del agua h como

$$A_2 = (60)(h - 5); \;\; 5 \leq h \leq 9.$$

Por lo tanto, el volumen correspondiente a esta sección transversal de la piscina puede expresarse en términos de la altura del nivel del agua h como

$$V(h) = (60)(30)(h - 5); 5 \leq h \leq 9 *** (6)$$

Donde

$$V(5) = 0 \; y \; V(9) = 7{,}200 \, m^3$$

A partir de las ecuaciones (5) y (6) podemos observar que de hecho, el volumen de la piscina es una **función continua** definida por partes con dominio definido para $5 \leq h \leq 9$ dada de la siguiente manera

$$V(h) = \begin{cases} (6h + 10)30h & si \quad 0 \leq h \leq 5 \\ \\ 6{,}000 + (1800)(h - 5) & si \quad 5 \leq h \leq 9 \end{cases} \quad *** (7)$$

De acuerdo con los datos de este ejercicio necesitamos derivar a ambos lados de la ecuación (7) con respecto a t para obtener que

$$\frac{dV}{dt} = 360h\frac{dh}{dt} + 300; 0 \leq h \leq 5$$

Por lo tanto

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt} - 300}{360h} *** (8)$$

Pero como $\frac{dV}{dt} = 500m^3/min$, entonces cuando $h = 4$ de (8) se concluye que

$$\frac{dh}{dt} = \frac{500 - 300}{360(4)} = \frac{5}{36}$$

Por lo tanto la razón de cambio del nivel del agua $\boldsymbol{h}$ en el momento en que la profundidad en la parte más honda de la piscina es de 4 metros es de aproximadamente $\frac{5}{36}\frac{m}{min}$.

Derivadas de orden superior

Recordemos que la derivada de una función f(x) se define como

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

A $f'(x)$ se le considera como una nueva función llamada derivada de f y se puede considerar geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P = (x, f(x))$. Puesto que $f'(x)$ también es una función, entonces $f'(x)$puede tener una derivada de sí misma y se indica como $f''(x)$ que se define de la siguiente manera

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}.$$

Y se le puede interpretar como la pendiente de la curva $y = f'(x)$ en el punto $(x, f(x))$. Utilizando la notación de Leibnitz, la segunda derivada de $y = f(x)$ se expresa como

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Similarmente, se puede definir la derivada de orden 3 y 4, continuando con este procedimiento en general, la n –ésima derivada de $y = f(x)$ se expresa así

$$y^n = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^2}.$$

1.- Aplica la definición de una derivada para hallar a $f'(x)$ y $f''(x)$. Después grafica a las funciones $f(x)$, $f'(x)$ y $f''(x)$ y verifica que tus respuestas sean correctas, para las siguientes funciones

(a) $f(x) = 1 + 4x - x^2$

(b) $f(x) = \frac{1}{x}$

Solución. (a)

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\{1 + 4(x+h) - (x+h)^2\} - \{1 + 4x - x^2\}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4h - 2xh - h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(4-2x-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (4 - 2x - h)$$

$$= 4 - 2x.$$

Y ahora

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\{4 - 2(x+h)\} - \{4 - 2x\}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2h}{h} = -2$$

(b)

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x - (x+h)}{hx(x+h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{hx(x+h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} -\frac{1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

Y ahora

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-\frac{1}{(x+h)^2} - \left(-\frac{1}{x}\right)^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-\frac{1}{(x+h)^2} + \frac{1}{x^2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{hx^2(x+h)^2}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2x + h}{x^2(x+h)^2}$$

$$= \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

2.- Si se lanza una pelota en el aire con una velocidad de $40\ pies/segundo$, su altura en pies, después de t segundos se expresa por

$$f(t) = 40t - 16t^2$$

(a) Encuentra la velocidad promedio para el periodo que se inicia cuando $t = 2$ y dura 0.05 segundos.

(b) Encuentra la velocidad instantánea y su aceleración para el valor de $t = 2$ segundos.

Solución. (a) La velocidad promedio se define como la pendiente

$$m_{QP} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}; a = 2, h = 0.05.$$

Donde

$$[a, a+h] = [2, 2.05]$$

Sustituyendo se obtiene

$$m_{QP} = \frac{\{40(2.05) - 16(2.05)^2\} - \{40(0.05) - 16(0.05)^2\}}{0.05}$$

$$= \frac{14.76 - 1.96}{0.05} = 256\ {}^{pies}/_{s}.$$

(b) La velocidad se define como el cambio instantáneo de la posición de la pelota con respecto al tiempo y esta dad por

$$f'^{(t)} = 40 - 32t.$$

Para $t = 2$, $f'(2) = 40 - 32(2) = -24\,m/s$ por otra parte, la aceleración se define como el cambio instantáneo de la velocidad de la pelota con respecto al tiempo, en este caso se tiene $f''(t) = -32$. Para $t = 2$, $f'(2) = -32\,pies/s^2$.

UNIDAD TEMÁTICA IV. Técnicas de integración y la integral definida.

La integral definida

En los siguientes ejercicios vamos a utilizar los siguientes resultados.

- ***Teorema.*** Si f es integrable en el intervalo $I = [a, b]$ entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \quad . . . \ (1).$$

  Dónde: $x_k = a + k\Delta x \quad y \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}$

- **Teorema.** Si f es continua en $I = [a, b]$, o si f tiene únicamente un número finito de saltos discontinuos, entonces f es integrable en $I = [a, b]$; es decir, la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ existe.

1.- Evalúa la integral definida mediante sumas de Riemann para la siguiente función.

$$f(x) = x \ para \ x \in [a, b]$$

Solución:

Sea $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ una partición regular del intervalo $I = [a, b]$. Como la función $f(x) = x$ es continua en el intervalo $I = [a, b]$, entonces $f(x)$ es integrable en $I = [a, b]$. Y de acuerdo a la fórmula (1) obtenemos lo siguiente

$$\int_a^b x\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right) \frac{b-a}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left\{a + \frac{k(b-a)}{n}\right\}\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{k=1}^{n} \left\{a + \frac{k(b-a)}{n}\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{b-a}{n}\right)\left\{\sum_{k=1}^{n} a + \sum_{k=1}^{n} \frac{k(b-a)}{n}\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{b-a}{n}\right) \left\{na + \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} k\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{b-a}{n}\right) \left\{ na + \frac{b-a}{n} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) \right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ (b-a)a + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) \right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ (b-a)a + \frac{b^2-2ab+a^2}{n^2} \; \frac{n(n+1)}{2} \right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ (b-a)a + \left(\frac{b^2-2ab+a^2}{2}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right) \right\}$$

$$= (b-a)a + \frac{b^2-2ab+a^2}{2}$$

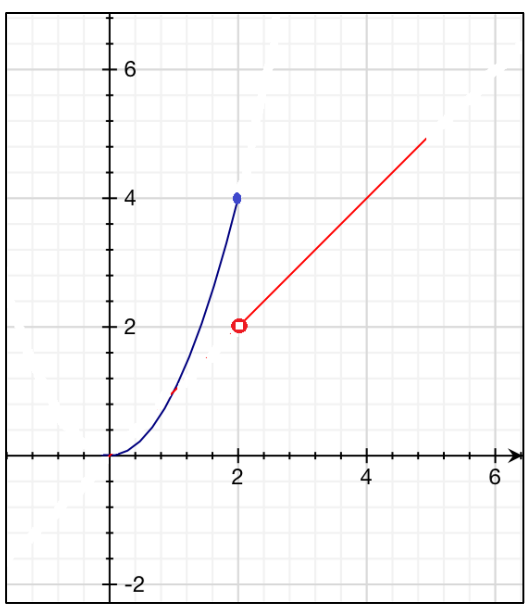
$$= ab - a^2 + \frac{b^2}{2} - ab + \frac{a^2}{2}$$

$$= \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2}(a^2 - b^2).$$

2.- Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \;\; si \;\; 0 \le x \le 2 \\ x \;\; si \; 2 < x \le 5 \end{cases}$$

Encuentra el área de la región limitada por la gráfica de $f(x)$ y el eje x.



Solución. Como podemos observar, la función $f(x)$ tiene una discontinuidad de salto en el punto $x = 2$ por lo tanto, $f(x)$ es continúa trozos_en el intervalo $I = [0,5]$ y entonces, la integral de $f(x)$ existe en $I = [0,5]$ y por las propiedades de la integral de Riemann, se puede calcular así:

$$\int_0^5 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^5 f(x)dx$$

$$= \int_0^2 x^2dx + \int_2^5 xdx$$

Utilizando la formula (1) para $I = [0,2], f(x) = x^2$ se obtiene

$$\int_0^2 x^2dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(0+\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}$$

$$= \lim_{\boldsymbol{n}\to\infty} \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{n}} \left(\frac{2k}{n}\right)^{\boldsymbol{2}}\frac{2}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n^3}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{8}{6}\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{8}{6}(1)\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{8}{6}(2) = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}\ u^2 \quad . . . (*)$$

Por otra parte, para $I = (2,5], f(x) = x$ de modo que

$$\int_2^5 f(x)dx = \int_2^5 xdx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(2+\frac{3k}{n}\right)\frac{3}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{2+\frac{3k}{n}\right\}\frac{3}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{3k}{n}\right)\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\left\{\sum_{k=1}^{n} 2 \; + \; \sum_{k=1}^{n} \frac{3k}{n}\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\left\{2n + \frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n} k\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\left\{2n + \frac{3}{n}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{6 + \frac{9}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{6 + \frac{9}{2}\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{6 + \frac{9}{2}(1)\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$= 6 + \frac{9}{2} = \frac{21}{2}\,u^2 \quad . \; . \; . \; (*\,*)$$

Finalmente, de (*) y (* *) se concluye lo siguiente.

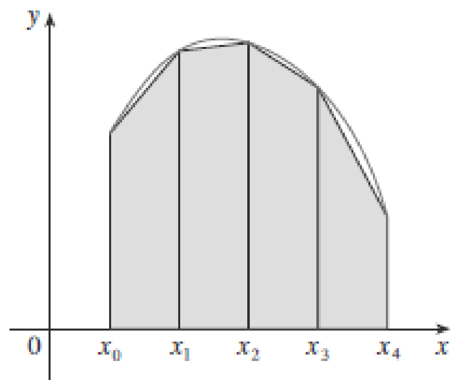
$$\int_0^5 f(x)dx = \int_0^2 x^2dx + \int_2^5 xdx = \frac{8}{3}\,u^2 + \frac{21}{2}u^2 = \frac{79}{6}\,u^2.$$

Integración Numérica.

Regla del Trapecio.

La razón para el nombre de la regla del trapecio se puede ver en la figura, la cual ilustra el caso para $f(x) \geq 0$. El área del trapecio que yace arriba del i-ésimo subintervalo es

$$\frac{1}{2}\Delta x[f(x_{i-1}) + f(x_i)];\ \Delta x = \frac{b-a}{n}; i = 0, 1, 2, 3, 4.$$



$Aproximación\ trapezoidal$

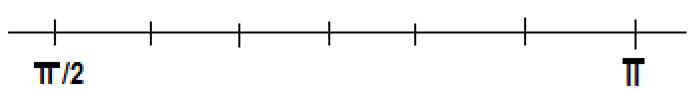
Y en tal caso, se tiene

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{2}\ \{f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\} \quad ...(1)$$

Utiliza la regla del trapecio con el valor de n que se indica para aproximar las siguientes integrales:

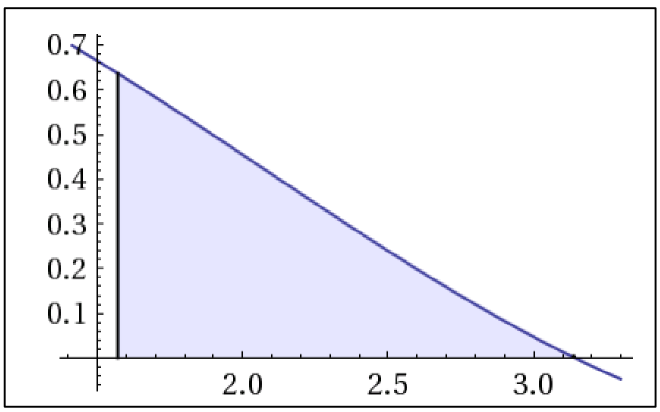
$$\mathbf{1.}- \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx; n = 6$$

Solución. Con $n = 6; a = \frac{\pi}{2}\ y\ b = \pi$, tenemos que $\Delta x = \frac{\pi}{2}$ y así, la regla del trapecio nos da



$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{sen\,x}{x}dx \approx \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)}{6}\left\{ f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \ 2f\left(\frac{7}{12}\pi\right) + \ 2f\left(\frac{8}{12}\pi\right) + \ 2f\left(\frac{9}{12}\pi\right) + \ 2f\left(\frac{10}{12}\pi\right) + 2f\left(\frac{11}{12}\pi\right) + f(\pi) \right\}$$

$$= \frac{\pi}{12}\left\{ \frac{sen\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}} + 2\left(\frac{sen\left(\frac{7}{12}\pi\right)}{\frac{7}{12}\pi}\right) + 2\left(\frac{sen\left(\frac{8}{12}\pi\right)}{\frac{8}{12}\pi}\right) + 2\left(\frac{sen\left(\frac{9}{12}\pi\right)}{\frac{9}{12}\pi}\right) + 2\left(\frac{sen\left(\frac{10}{12}\pi\right)}{\frac{10}{12}\pi}\right) + 2\left(\frac{sen\left(\frac{11}{12}\pi\right)}{\frac{11}{12}\pi}\right) + \frac{sen(\pi)}{\pi} \right\} = 0.481672\, u^2.$$

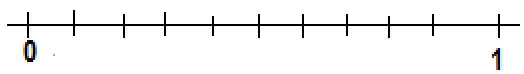


2. $-\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-x^2}dx; n = 10.$

Solución. Como el integrando $f(x) = e^{-x^2}$ es una función continua y además es par en el intervalo $[-1,\ 1]$, entonces

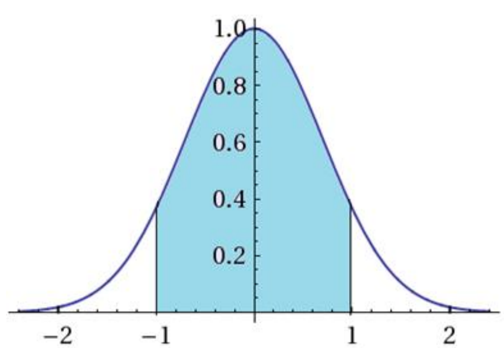
$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2}dx = 2\int_{0}^{1} e^{-x^2}dx$$

Con $n = 10, a = 0,\ b = 1$ y $\Delta x = \frac{1}{10}$, la regla del trapecio nos da



$$2\int_{0}^{1} e^{-x^2}\,dx \approx 2\frac{\left(\frac{1}{10}\right)}{2}\left\{f(0) + 2f\left(\frac{1}{10}\right) + 2f\left(\frac{2}{10}\right) + 2f\left(\frac{3}{10}\right) + 2f\left(\frac{4}{10}\right) + 2f\left(\frac{5}{10}\right) + 2f\left(\frac{6}{10}\right) + 2f\left(\frac{7}{10}\right) + 2f\left(\frac{8}{10}\right) + 2f\left(\frac{9}{10}\right) + f(1)\right\}$$

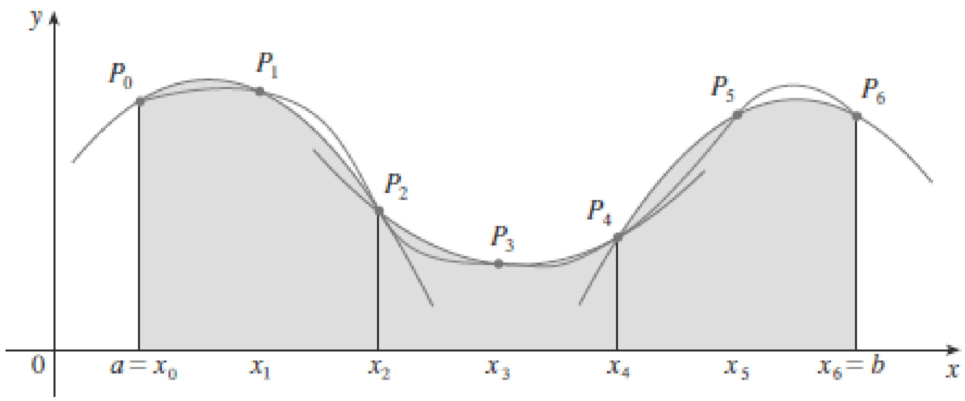
$$= \frac{1}{10}\left\{e^{-0^2} + 2e^{-\left(\frac{1}{10}\right)^2} + 2e^{-\left(\frac{2}{10}\right)^2} + 2e^{-\left(\frac{3}{10}\right)^2} + 2e^{-\left(\frac{4}{10}\right)^2} + 2e^{-\left(\frac{5}{10}\right)^2} + 2e^{-\left(\frac{6}{10}\right)^2} + 2e^{-\left(\frac{7}{10}\right)^2} + 2e^{-\left(\frac{8}{10}\right)^2} + 2e^{-\left(\frac{9}{10}\right)^2} + e^{-(1)^2}\right\} = 1.492422\,u^2.$$



Regla de Simpson

Esta regla para aproximar resultados de integración emplea segmentos parabólicos en lugar de segmentos de recta y nos dice lo siguiente. Para $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}\{f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\} *** (2)$$



- Aplica la regla de Simpson, con el valor de n que se indica para aproximar las siguientes integrales:

1.$-\int_{-1}^{1}\sqrt{1+x^3}dx; n = 8.$

Solución. Primero notamos que

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1+x^3}dx = \int_{-1}^{0}\sqrt{1+x^3}dx + \int_{0}^{1}\sqrt{1+x^3}dx$$

De manera que vamos a aplicar la regla de Simpson para cada una de estas integrales. No tomamos directamente a $I = [a,b] = [-1,1]$, porque entonces obtendríamos que $\Delta x = 0$. Para la integral $\int_{-1}^{0}\sqrt{1+x^3}dx$ tenemos que $f(x) = \sqrt{1+x^3}; a = -1, b = 0\ y\ n = 8$. De manera que por la ecuación (2) nos queda $\Delta x = \frac{1}{8}$ y por lo tanto

$$\int_{-1}^{0}\sqrt{1+x^3}dx \approx \frac{\left(\frac{1}{8}\right)}{3}\left\{f(-1) + 4f\left(-\frac{7}{8}\right) + 2f\left(-\frac{6}{8}\right) + 4f\left(-\frac{5}{8}\right) + 2f\left(-\frac{4}{8}\right) + 4f\left(-\frac{3}{8}\right) + 2f\left(-\frac{2}{8}\right) + 4f\left(-\frac{1}{8}\right) + f(0)\right\}$$

$$= \frac{1}{24}\left\{\sqrt{1+(-1)^3} + 4\sqrt{1+\left(-\frac{7}{8}\right)^3} + 2\sqrt{1+\left(-\frac{6}{8}\right)^3} + 4\sqrt{1+\left(-\frac{5}{8}\right)^3} + 2\sqrt{1+\left(-\frac{4}{8}\right)^3} + 4\sqrt{1+\left(-\frac{3}{8}\right)^3} + 2\sqrt{1+\left(-\frac{2}{8}\right)^3} + 4\sqrt{1+\left(-\frac{1}{8}\right)^3} + \sqrt{1+(0)^3}\right\} = 0.84131.\,...\ (*)$$

Por otra parte, para la integral $\int_0^1 \sqrt{1+x^3}dx$ se obtiene

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^3}dx$$

$$\approx \frac{1}{24}\left\{\sqrt{1+(0)^3} + 4\sqrt{1+\left(\frac{1}{8}\right)^3} + 2\sqrt{1+\left(\frac{2}{8}\right)^3} + 4\sqrt{1+\left(\frac{3}{8}\right)^3} + 2\sqrt{1+\left(\frac{4}{8}\right)^3} + 4\sqrt{1+\left(\frac{5}{8}\right)^3} + 2\sqrt{1+\left(\frac{6}{8}\right)^3} + 4\sqrt{1+\left(\frac{7}{8}\right)^3} + \sqrt{1+(1)^3}\right\} = 1.114.\ ...\ (**)$$

Finalmente, por (*) y (* *) concluimos que

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1+x^3}dx = \int_{-1}^0 \sqrt{1+x^3}dx + \int_0^1 \sqrt{1+x^3}dx \approx 0.84131 + 1.114 = 1.95531.$$

2.– $\int_0^{\frac{1}{2}} \cos(e^x)\, dx; n = 8$

Solución. Para $a = 0, b = \frac{1}{2}\ y\ n = 8$. De manera que por la ecuación (2) nos queda $\Delta x = \frac{1}{16}$ y por lo tanto

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \cos(e^x)\, dx \approx \frac{\left(\frac{1}{16}\right)}{3}\left\{f(0) + 4f\left(\frac{1}{10}\right) + 2f\left(\frac{2}{10}\right) + 4f\left(\frac{3}{10}\right) + 2f\left(\frac{4}{10}\right) + 4f\left(\frac{5}{10}\right) + 2f\left(\frac{6}{10}\right) + 4f\left(\frac{7}{10}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{48}\left\{\cos(e^x) + 4\cos\left(e^{\frac{1}{16}}\right) + 2\cos\left(e^{\frac{2}{16}}\right) + 4\cos\left(e^{\frac{3}{16}}\right) + 2\cos\left(e^{\frac{4}{16}}\right) + 4\cos\left(e^{\frac{5}{16}}\right) + 2\cos\left(e^{\frac{6}{16}}\right) + 4\cos\left(e^{\frac{7}{16}}\right) + \cos\left(e^{\frac{1}{2}}\right)\right\} = 0.13273.$$

Teorema fundamental de cálculo (T.F.C)

$\mathbf{1.}-$ Si f es una función continua en el intervalo $I = [a, b]$, entonces la función $f(x)$ definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt\ ;\ a \ \leq x \leq \ b \ .$$

Es continua en $I = [a, b]$ y diferenciable en el intervalo abierto (a, b) y $F'(x) = f(x)$.

$\mathbf{2.}-$ Sea $F(x)$ cualquier antiderivada de $f(x)$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)\,.$$

Encuentra la derivada de las siguientes funciones

$\mathbf{1.}-\ \ F(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt$

Solución. Para poder aplicar la primera parte del T.F.C. hay que garantizar que el integrando $f(t) = \frac{\operatorname{sen} t}{t}$ sea continua en el intervalo de integración, para lograr esto vamos a reescribir a la integral dada así

$F(x) = \int_{x^2}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt$

$$= -\int_{\pi}^{x^2} \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt \ ; x \in [\pi, a]$$

Con esto se debe tener que el integrando $f(x) = \frac{\operatorname{sen} t}{t}$ es continuo para toda $x \in [\pi, a]$ a $\in \mathbb{R}$ fija. Ahora, debemos ser cuidadoso al empezar la regla de la cadena junto con la primera parte del T.F.C. Sea $g(x) = x^2$. En este caso

$$\frac{d}{dx}\left\{-\int_{\pi}^{x^2} \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt\right\} = -\frac{d}{dx} F(x^2)$$

$$= -\frac{d}{dx} F\big(g(x)\big) = -F'\big(g(x)\big)g'(x)$$

$$= -f(g(x))g'(x) = -\left\{\frac{sen(g(x))}{g(x)}\right\} g'(x) = -\frac{sen(x^2)}{x^2} \cdot 2x$$

$\mathbf{2.-}$ $F(x) = \int_{-5}^{senx} tcos(t^3)dt \,;x \,\in [-5, b]$

Solución. Como el integrando $F(x) = xcos(x^3)$ es continuo para toda $x \in [-5, b]$ para $b \in R$ fijo, entonces haciendo $g(x) = senx$ se tiene

$$\frac{d}{dx}\left\{\int_{-5}^{senx} tcos(t^3)dt\right\} = \frac{d}{dx}F(senx) = \frac{d}{dx}F(g(x))$$

$$= F'\big(g(x)\big)g'(x) = f\big(g(x)\big)g'(x) = \{(senx)\cos(sen^2x)\}cosx \ .$$

$\mathbf{3.-}$ $F(x) = \int_{1}^{x} (t-1)^{20}dt \,; x \in [1{,}3].$

Solución. Como la función $F(t) = (t-1)^{20}$ es continua en el intervalo $I = [1{,}3]$, entonces la primera parte del T.F.C. nos da que

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left\{\int_{1}^{x} (t-1)^{20}dt\right\} = (x-1)^{20} = f(x) \, .$$

$\mathbf{4.-}$ $F(x) = \int_{1}^{x} \sqrt{1+t^2}dt \,; x \in [0{,}1]$

Solución. Como en el caso anterior, la función $f(t) = \sqrt{1+t^2}$ es continua en el intervalo $I = [0{,}1]$, entonces la primera parte del T.F.C. nos da que

$$F'(x) = \frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\left\{\int_{1}^{x} \sqrt{1+t^2}dt\right\} = \sqrt{1+t^2} = f(x) \, .$$

$\mathbf{5.-}$ Evalúa la segunda integral o define cuando no existe.

$(\boldsymbol{a})$ $\quad \int_{-2}^{4} (3x-5)dx$

Solución. La función $F(x) = 3x - 5$ es continua en el intervalo $I = [-2{,}4]$ y sabemos que una antiderivada de $f(x)$ es $F(x) = \frac{2}{3}x^2 - 5x$ así que, de acuerdo con la segunda parte del T.F.C.

$$\int_{-2}^{4} (3x-5)dx \ = F(4) - F(-2) = \left\{\frac{2}{3}(4)^2 - 5(4)\right\} - \left\{\frac{2}{3}(-2)^2 - 5(-2)\right\} = -12 \, .$$

$(\boldsymbol{b})$ $\int_{1}^{2} \frac{x^2+1}{\sqrt{x}} dx$

Solución. Como la función $F(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{x}}$ es continua en el intervalo $I = [1,2]$ y sabemos que $F(x) = \frac{2}{5}\sqrt{x}\{x^2+5\}$ es una antiderivada de $F(x)$, entonces por la segunda parte del T.F.C.

$$\int_{1}^{2} \frac{x^2+1}{\sqrt{x}} dx = F(2) - F(1) = \left\{\frac{2}{5}\sqrt{2}((2)^2+5)\right\} - \left\{\frac{2}{5}\sqrt{1}((1)^2+5)\right\} = \frac{18}{5}\sqrt{2} - \frac{12}{5} .$$

$(\boldsymbol{c})$ $\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{6}{1+x^2} dx$

Solución. Puesto que la función $F(x) = \frac{6}{1+x^2}$ es continua en el intervalo $I = [1,\sqrt{3}]$ y sabemos que una antiderivada de $f(x)$ es la función $F(x) = 6\,arctan(x) + C$, donde C es una constante arbitraria, entonces por la segunda parte del T.F.C.

$$\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{6}{1+x^2} dx = F(\sqrt{3}) - F(1) = \{6actan(\sqrt{3}) + C\} - \{6actan(1) + C\} = \frac{1}{2}\pi.$$

$(\boldsymbol{d})$ $\int_{-2}^{2} \frac{6}{t^2} dt$

Solución. Puesto que el integrando $F(x) = \frac{2}{x^6}$ tiene una asíntota vertical en $x = 0$, entonces se tiene que la función $F(x)$ no es continua en el intervalo $I = [-4,2]$ y por lo tanto no es posible utilizar la segunda parte del T.F.C. para evaluar esta integral.

4.2 Técnicas de integración

En los siguientes ejercicios vamos a utilizar los siguientes resultados.

Regla de sustitución para integrales indefinidas

- ***Teorema.*** *Si* $u = g(x)$ es derivable en el intervalo $I = [a, b]$ y si f es continua sobre el intervalo $I = [a, b]$ entonces

$$\int f\big(g(x)\big)dx = \int f(u)du = F(u) + C.$$

Donde F es una antiderivada de f.

Integración por partes

- Sea $u = f(x)\ y\ v = g(x)$, entonces $du = f'(x)dx\ y\ dv = g'(x)dx$ entonces

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Resuelve las siguientes integrales utilizando el método de integración más apropiado

1. $- \quad \int \ln(x^2 + 1)\, dx$

Solución. Integramos por partes. Sea $u = \ln(x^2 + 1)$; $dv = dx$ entonces $du = \frac{2x}{x^2+1} dx$ y $v = x$, y sustituyendo nos queda

$$\int \ln(x^2 + 1)\, dx = x\ln(x^2 + 1) - \int \frac{2x^2}{x^2 + 1} dx$$

$$= x\ln(x^2 + 1) - 2\int \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1}\right) dx$$

$$= x\ln(x^2 + 1) - 2x + 2\int \left(\frac{1}{x^2 + 1}\right) dx$$

$$= x\ln(x^2 + 1) - 2x + 2\arctan(x) + C.$$

$\mathbf{2.}-\int x(x+1)^{1/3}dx$

Solución. Hacemos $u=x+1$ entonces $du=dx$ y

$$\int x(x+1)^{1/3}dx=\int (u-1)u^{1/3}du=\int (u^{4/3}-u^{1/3})du$$

$$=\int u^{4/3}du-\int u^{1/3}du=\frac{3}{7}u^{7/3}-\frac{3}{4}u^{4/3}+C=\frac{3}{7}(x+1)^{7/3}-\frac{3}{4}(x+1)^{4/3}+C.$$

$\mathbf{3.}-\int \frac{x^{1/3}}{x^{2/3}+2}dx$

Solución. Hacemos $u=x^{1/3}$ entonces $du=\frac{x^{1/3}}{3x^{2/3}}du$ y entonces

$$\int \frac{x^{1/3}}{x^{2/3}+2}dx=3\int \frac{u^3}{u^2+2}du=3\int \left(u-\frac{2u}{u^2+2}\right)du$$
$$=3\int u\,du-6\int \frac{u}{u^2+2}du\ \ldots(1)$$

Para la integral $\int \frac{u}{u^2+2}du$ ahora hacemos $w=u^2+2$ entonces $dw=2udu$,

y nos queda

$$\int \frac{u}{u^2+2}du=\frac{1}{2}\int \frac{1}{w}dw\ \ldots(2)$$

Sustituyendo la expresión (2) en (1)

$$\int \frac{x^{1/3}}{x^{2/3}+2}dx=3\int udu-3\int \frac{1}{w}dw=\frac{3}{2}u^2-3\ln(w)+C=\frac{3}{2}x^2-3\ln\left(x^{2/3}+2\right)+C.$$

$\mathbf{4.}-\int \sqrt{1-\sqrt{x}}\,dx$

Solución. Hacemos $u=\sqrt{x}$ entonces $du=\frac{1}{2}\sqrt{x}dx$ y de esta manera obtenemos

$$\int \sqrt{1-\sqrt{x}}\,dx=2\int \sqrt{1-u}\,udu\ \ldots(1)$$

Para esta nueva integral ahora hacemos $w = 1 - u$ entonces $dw = -du$ y de modo que la integral (1) nos queda así

$$2\int \sqrt{1-u}\, udu = 2\int (w-1)w^{1/2}dw = 2\int (w^{3/2} - w^{1/2})dw$$

$$= 2\int w^{3/2}dw - 2\int w^{1/2}\,dw = \frac{4}{5}w^{5/2} - \frac{4}{5}w^{3/2} + C$$

$$= \frac{4}{5}(1-u)^{5/2} - \frac{4}{5}(1-u)^{3/2} + C = \frac{4}{5}(1-\sqrt{x})^{5/2} - \frac{4}{5}\left(1-\sqrt{x}\right)^{3/2} + C.$$

5.$-$ $\displaystyle\int \frac{1}{x^{1/3}+x^{2/3}}dx$

Solución. Hacemos $u = x^{1/3}$ entonces $du = \frac{1}{3x^{2/3}}dx$ y por lo tanto

$$\int \frac{1}{x^{1/3}+x^{2/3}}dx = 3\int \frac{u^2}{u^2+u}du = 3\int \frac{u}{u+1}du$$

$$= 3\int \left(1 - \frac{1}{u+1}\right)du = 3\int du - 3\int \frac{1}{u+1}du.$$

Para la integral $\int \frac{1}{u+1}du$ hacemos $w = u + 1$ entonces $dw = du$ y de esta manera

$$\int \frac{1}{u+1}du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{w}dw \quad \ldots(2)$$

Sustituyendo (2) en (1) nos queda

$$\int \frac{1}{x^{1/3}+x^{2/3}}dx = 3\int u\,du - 3\int \frac{1}{w}du = 3u - 3\ln(w) + C$$

$$= 3x^{1/3} - 3\ln(u+1) + C = 3x^{1/3} - 3\ln\left(x^{1/3}+1\right) + C.$$

6.$-$ $\displaystyle\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$

Solución. Hacemos $u = x^2$ entonces $du = 2xdx$ de manera que nos queda

$$\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int \frac{u}{\sqrt{u+1}}du \quad \ldots(1).$$

Y ahora, hacemos $w = u + 1$ entonces $dw = du$ y así, la integral (1) se convierte en

$$\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int \frac{u}{\sqrt{u+1}}du = \int \frac{(w-1)}{\sqrt{w}}dw$$

$$= \int \left(\sqrt{w} - \frac{1}{\sqrt{w}}\right)dw = \int \sqrt{w}\,dw - \int \frac{1}{\sqrt{w}}dw = \frac{2}{3}w^{3/2} - 2\sqrt{w} + C$$

$$= \frac{2}{3}(u+1)^{3/2} - 2\sqrt{u+1} + C = \frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2} - \sqrt{x^2+1} + C.$$

7.– $\int x^3 \cos(1-2x^2)\,dx$

Solución Esta integral puede escribirse así

$$\int x^3 \cos(1-2x^2)\,dx = \int x^2 \cdot \mathrm{x}\cos(1-2x^2)\,dx.$$

Y ahora vamos a integrar por partes sea $u = x^2$ entonces $du = 2xdx$ y

$dv = \mathrm{x}\cos(1-2x^2)dx$, entonces $v = \frac{1}{4}\mathrm{sen}(1-2x^2)$, por lo tanto

$$\int x^2 \cdot \mathrm{x}\cos(1-2x^2)\,dx = -\frac{x^2}{4}\mathrm{sen}(1-2x^2) + \frac{1}{2}\int x\mathrm{sen}(1-2x^2)dx \;\ldots(1).$$

Para la integral

$$\int x\mathrm{sen}(1-2x^2)dx$$

Hacemos $w = 1-2x^2$ entonces $dw = -4xdx$ y de esta manera

$$\int x\mathrm{sen}(1-2x^2)dx = -\frac{1}{4}\int \mathrm{sen}(w)dw \;\ldots(2)$$

Sustituyendo la expresión (2) en (1) nos queda

$$\int x^2 \cdot \mathrm{x}\cos(1-2x^2)\,dx = -\frac{x^2}{4}\mathrm{sen}(1-2x^2) + \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{4}\int \mathrm{sen}(w)dw\right\}$$

$$= -\frac{x^2}{4}\mathrm{sen}(1-2x^2) + \frac{1}{8}\cos(w) + C$$

$$= -\frac{x^2}{4}\mathrm{sen}(1-2x^2) + \frac{1}{8}\cos(1-2x^2) + C.$$

8. $- \int \operatorname{sen}^5 x \cdot \cos^2 x dx$

Solución Reescribimos esta integral así

$$\int (\operatorname{sen}^2 x)^2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos^2 x dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \cdot senx \cdot \cos^2 x\, dx$$

sea $u = \cos x$ entonces $du = -\operatorname{sen} x dx$ y por lo tanto

$$\int \operatorname{sen}^5 x \cdot \cos^2 x dx = -\int (1-u)^2\, u^2$$

$$= -\int (u^6 - 2u^4 + u^2) du = -\frac{1}{7}u^7 + \frac{2}{5}u^5 - \frac{1}{3}u^3 + C$$

$$= -\frac{1}{7}\cos^7 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C.$$

Propiedades de la integral definida

En los siguientes ejercicios vamos a utilizar el siguiente resultado.

Regla de sustitución para integrales definidas

- ***Teorema.*** Si $u = g'(x)$ es una función continua en el intervalo $I = [a, b]$ y si f es continua sobre el rango de $u = g(x)$ entonces

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = F(g(b)) - F\big(g(a)\big).$$

Donde F es una antiderivada de la función f.

Evalúa las siguientes integrales

$\mathbf{1.-}\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} -2\cos^2 x \cdot \operatorname{sen} x dx$

Solución Sea $u = \cos x$ entonces $du = -\operatorname{sen} x dx$. Notamos que cuando $x = \frac{\pi}{2}$ se hace que $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ y que cuando $x = 0$, $\cos(0) = 1$. Y por la regla de sustitución pata integrales definidas

$$-2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \operatorname{sen} x dx = 2\int_0^1 u^2 du = \left\{-\frac{2}{3}u^3\right\}_0^1 = -\frac{2}{3}.$$

$\mathbf{2}.-\ \int_1^e \frac{lnx}{x} dx$

Solución Sea $u = lnx$ entonces $du = \frac{1}{x}dx$. Para $x = e$ y $x = 1$ obtenemos

$u = 1$ y $u = 0$ respectivamente, por lo tanto, por el teorema de cambio de variables pata integrales definidas

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_0^1 u du = \left[\frac{1}{2}u^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

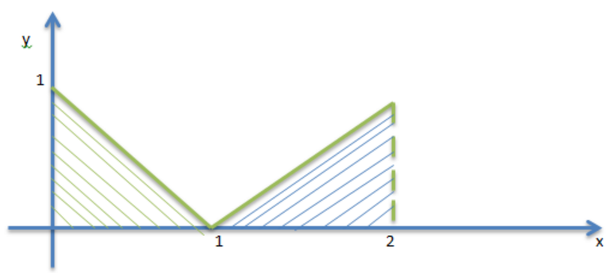
$$\textbf{3.}- \int_1^4 \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$$

Solución Sea $u = 1+\sqrt{x}$ entonces $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$. Para $x = 1$ y $x = 4$ se tiene $u = 2$ y $x = 3$ respectivamente, de manera que

$$\int_1^4 \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int_2^3 \sqrt{u}\,dx = 2\left\{\frac{2}{3}u^{3/2}\right\}_2^3 = 3.15.$$

$$\textbf{4.}- \int_0^2 |1-x|dx$$

Solución. La grafica de $f(x) = |1-x|;\ X \in [0\,,2]$ es la siguiente

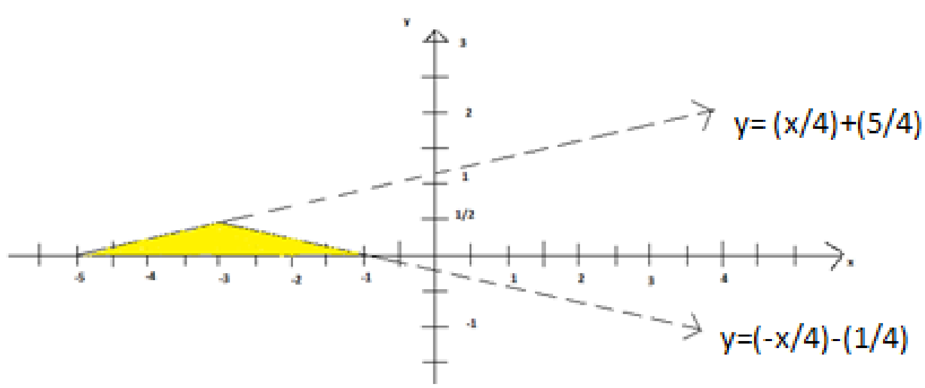


Es claro que $f(x) = |1-x| \geq 0$ para toda $x \in [0\,,2]$ y se observa que

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx = \int_0^1 (1-x)\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1.$$

$$\textbf{5.}- \int_{-5}^{-1} \frac{1}{2}\left[1 - \frac{|x+3|}{2}\right]dx$$

Solución. La grafica del integrando $f(x)$ está dada en la siguiente figura.



Por lo tanto

$$\int_{-5}^{-1} f(x)dx = \int_{-5}^{-3} f(x)\,dx + \int_{-3}^{-1} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-5}^{-3}\left(\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}\right)dx + \int_{-3}^{-1}\left(-\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\right)dx \quad = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

$$7.- \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 sen\, x}{1+x^6}\,dx.$$

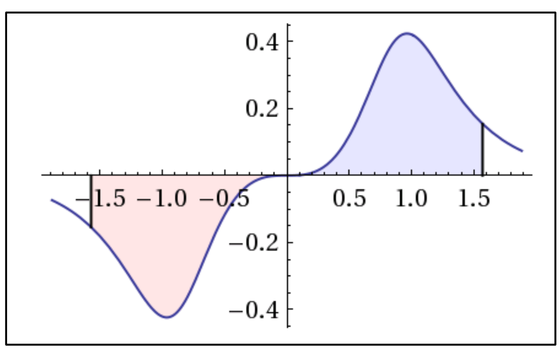
Solucion. Como el integrando

$$f(x) = \frac{x^2 sen\, x}{1+x^6}$$

Es una función continua y además es impar en el intervalo de integración $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, entonces

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 sen\, x}{1+x^6}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{x^2 sen\, x}{1+x^6}\,dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 sen\, x}{1+x^6}\,dx$$

$$= -\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 sen\, x}{1+x^6}\,dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 sen\, x}{1+x^6}\,dx = 0.$$



$$f(x) = \frac{x^2 sen\, x}{1+x^6}$$

Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales

Caso 1: El denominador Q(x) es un producto de factores lineales distintos.

1.- Resuelva la siguiente integral

$$\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}dx \quad . . . \ (1)$$

Solución: Ya que el grado del numerador es menor que el del denominador, no necesitamos dividir, en su lugar factorizamos el denominador como sigue

$$x^3+x^2-6x = x(x^2+x-6) = x(x+3)(x-2)$$

Como el denominador tiene tres factores finales distintos entonces la descomposición en fracciones parciales del integrando posee la siguiente forma

$$\frac{x+1}{x^3+x^2-6x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-2} \quad . . . \ (2)$$

Para encontrar los valores de A, B y de C vamos a multiplicar ambos lados de la ecuación (1) por el factor x(x+3) (x-2) para obtener

$$x+1 = A(x+3)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+3)$$

$$x+1 = (A+B+C)x^2 + x(A-2B-3C) - 6A$$

Esta última expresión también la podemos escribir así

$$0(x^2) + x + 1 = (A+B+C)x^2 + (A-2B+3C)x - 6A \quad . . . \ (3)$$

Como dos polinomios del mismo grado son iguales si y solo si son iguales coeficiente a coeficiente, entonces obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones en A, B y C.

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ A-2B+3C=1 \\ -6A=1 \end{cases}$$

Al resolver este sistema obtenemos

$$\begin{cases} A=-\dfrac{1}{6} \\ B=-\dfrac{2}{15} \\ C=\dfrac{3}{10} \end{cases}$$

Al sustituir estos valores podemos reescribir la integral (1) de la siguiente manera

$$\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}\,dx = \int \left\{ \frac{-\frac{1}{6}}{x} + \frac{-\frac{2}{15}}{x+3} + \frac{\frac{3}{10}}{x-2} \right\} dx$$

$$= -\frac{1}{6}\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{2}{15}\int \frac{1}{x+3}\,dx + \frac{3}{10}\int \frac{1}{x-2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{6}\ln|x| - \frac{2}{15}\ln|x+3| + \frac{3}{10}\ln|x-2| + C.$$

Caso II: El denominador Q(x) es un producto de factores lineales algunos de los cuales se repiten.

Resuelve la siguiente integral

$$\int \frac{\mathrm{x}^4}{(x-1)^3}\,dx$$

Solución: Como el grado del numerador es más grande que el denominador, podemos efectuar la división entre estos factores para obtener

$$\frac{x^4}{(x-1)^3} = \frac{x^4}{x^3-3x^2+3x-1} = (x+3) + \frac{6x^2-8x+3}{x^3-3x^2+3x-1}$$

$$= (x+3) + \frac{6x^2-8x+3}{(x-1)^3} \quad . . . \ (1).$$

Y ahora aplicamos la descomposición en fracciones parciales a la fracción resultante

$$\frac{6x^2-8x+3}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} \quad . . . \ (2).$$

Para encontrar los valores de A, B y C vamos a multiplicar ambos lados de la ecuación (2) por el factor $(x-3)^3$ para obtener

$$6x^2 - 8x + 3 = A(x-1)^2 + B(x-1) + C$$

$$= Ax^2 + x(-2A+B) + A - B + C.$$

Al igualar coeficiente a coeficiente en esta igualdad de polinomios de grado dos, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones en A, B y C.

$$\left\{ \begin{array}{c} A = 6 \\ -2A + B = -8. \\ A - B + C = 3 \end{array} \right.$$

Al resolver este sistema de ecuaciones obtenemos

$$\begin{cases} A = 6 \\ B = 4 \\ C = 1 \end{cases}$$

Al sustituir estos valores en la expresión (2) nos queda

$$\frac{6x^2 - 8x + 3}{(x-1)^3} = \frac{6}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} \quad . . . \ (3).$$

Finalmente sustituimos la expresión (3) en la (1) con lo cual obtenemos la descomposición en fracciones parciales de integrando

$$\int \frac{x^4}{(x-1)^3} dx = \int \left\{ (x+3) + \frac{6}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} \right\} dx$$

$$= \int (x+3) dx + 6 \int \frac{1}{x-1} dx + 4 \int \frac{1}{(x-1)^2} dx + \int \frac{1}{(x-1)^3} dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 + 3x + 6 \ln|x-1| - \frac{4}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2} + C.$$

<u>Caso III:</u> El denominador Q(x) contiene factores cuadráticos irreducibles, ninguno de los cuales se repite.

Resuelve la siguiente integral

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 3}{x^3 - 2x^2 + 3x} dx$$

Solución: Como el grado del numerador es mayor que el gado del denominador, primero efectuaremos la división, con lo cual obtenemos lo siguiente

$$\frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 3}{x^3 - 2x^2 + 3x} = x - \frac{x-3}{x^3 - 2x^2 + 3x}$$

$$x - \frac{x-3}{x(x^2 - 2x + 3)} \quad . . . \ (1).$$

Puesto que el factor cuadrático $x^2 - 2x + 3$ es irreducible entonces a la fracción resultante se le aplican fracciones parciales (caso I y III).

$$\frac{x-3}{x(x^2 - 2x + 3)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 3} \quad . . . \ (2).$$

Para obtener los valores de A, B y C vamos a multiplicar la expresión (2) por el factor $x(x^2 - 2x + 3)$ para obtener

$$x - 3 = A(x^2 - 2x + 3) + x(Bx + C)$$

$$x - 3 = x^2(A + B) + x(-2A + C) + 3A.$$

Esta última expresión se puede reescribir así:

$$0(x^2) + x - 3 = x^2(A + B) + x(-2A + C) + 3A$$

Igualando coeficiente a coeficiente de estas ecuaciones de grado 2 se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -2A + C = 1 \\ 3A = -3 \end{cases}$$

Cuya solución es el conjunto

$$\begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \\ C = -1 \end{cases}$$

Sustituyendo estos valores en (2) nos queda

$$\frac{x - 3}{x(x^2 - 2x + 3)} = \frac{-1}{x} + \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 3} \quad . \, . \, . (3).$$

Por lo tanto, sustituyendo la expresión (3) en la (1) obtenemos lo siguiente

$$\frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 3}{x^3 - 2x^2 + 3x} = x - \left\{\frac{-1}{x} \;+\; \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 3}\right\}$$

$$= x + \frac{1}{x} - \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 3}.$$

Por lo tanto

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 3}{x^3 - 2x^2 + 3x} dx = \int \left\{x + \frac{1}{x} - \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 3}\right\} dx$$

$$= \int x dx + \int \frac{1}{x}\, dx - \int \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 3} dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \ln|x| - \ln\left|(x^2 - 2x + 3)^{\frac{1}{2}}\right| + C.$$

<u>Caso IV:</u> El denominador Q(x) contiene un factor cuadrático irreducible que se repite.

Resuelve la siguiente integral

$$\int \frac{2x^3}{(x^2 + 1)^2} dx$$

Solución: Ya que el grado del numerador es menor que el grado del denominador, no necesitamos dividir, en su lugar notamos que el denominador consiste en un polinomio de grado dos irreducible que se repite. Por lo tanto podemos aplicar el caso IV del teorema de fracciones parciales para reescribir al integrando así

$$\frac{2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{A_1 + B_1 x}{x^2+1} = \frac{A_2 + B_2 x}{(x^2+1)^2} \quad . \; . \; . \; (1).$$

Ahora, necesitamos encontrar los valores de los coeficientes $A_1,\ A_2, B_1\ y\ B_2$, por lo cual vamos a multiplicar a ambos lados de la expresión (1) por el factor $(x^2+1)^2$, para obtener lo siguiente

$$2x^3 = (x^2+1)(A_1 + B_1 x) + (A_2 + B_2 x)$$

$$2x^3 = B_1 x^3 + A_1 x^2 + (B_1 + B_2)x + (A_1 + A_2).$$

A esta última expresión la podemos reescribir así

$$2x^3 + (0)(x^2) + (0)(x) + 0 = B_1 x^3 + A_1 x^2 + (B_1 + B_2)x + (A_1 + A_2)$$

Entonces, al igualar coeficiente a coeficiente de este par de ecuaciones de grado tres, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} B_1 = 2 \\ A_1 = 0 \\ B_1 + B_2 = 0 \\ A_1 + A_2 = 0 \end{cases}$$

Cuya solución es el conjunto

$$\begin{cases} A_1 = 0 \\ A_2 = 0 \\ B_1 = 2 \\ B_2 = -2 \end{cases}$$

Y estos valores se pueden sustituir en la expresión (1). Por lo tanto

$$\frac{2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

Y ahora, podemos sustituir esta descomposición en la integral dada

$$\int \frac{2x^3}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \left\{\frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x}{(x^2+1)^2}\right\} dx$$

$$= \ln|x^2+1| + \frac{1}{x^2+1} + C.$$

Integrales de expresiones cuadráticas

Una función cuadrática es una función de la forma $F(x) = ax^2 + bx + c = 0\,; a \neq 0$. Algunas de las formas en la que puede aparecer en el integrando se ilustran a continuación.

$\mathbf{1.}-\int \frac{4x+3}{x^2-2x+3}dx$

Solución. Primero describiremos al integrando así

$$\frac{4x+3}{x^2-2x+3} = \frac{4x+3+(4-4)}{x^2-2x+3}$$

$$= \frac{(4x-4)+7}{x^2-2x+3}$$

$$= \frac{2(2x-2)}{x^2-2x+3} + \frac{7}{x^2-2x+3}$$

Por lo tanto

$$\int \frac{4x+3}{x^2-2x+3}dx = \int \left\{\frac{2(2x-2)}{x^2-2x+3} + \frac{7}{x^2-2x+3}\right\}dx$$

$$= 2\int \frac{2(2x-2)}{x^2-2x+3}dx + 7\int \frac{1}{x^2-2x+3}dx \ldots (1).$$

Para la integral

$$2\int \frac{2(2x-2)}{x^2-2x+3}dx.$$

Hacemos $u = x^2 - 2x + 3$ entonces $du = (2x-2)dx$ y al sustituir nos queda

$$2\int \frac{2(2x-2)}{x^2-2x+3}dx = 2\int \frac{1}{u}du \ldots (2).$$

Por otra parte para la integral

$$7\int \frac{1}{x^2-2x+3}dx.$$

Podemos completar a la expresión cuadrática así

$$7\int \frac{1}{x^2-2x+3}dx = 7\int \frac{1}{(x-1)^2+2}dx.$$

Y ahora hacemos $w = x - 1$ y entonces $dw = dx$. Al sustituir esto nos queda

$$7\int \frac{1}{(x-1)^2+2}dx = 7\int \frac{1}{w^2+2}dw = 7\int \frac{1}{w^2+(\sqrt{2})^2}dw \ldots (3).$$

La integral $\int \frac{1}{w^2+(\sqrt{2})^2}dw$ tiene la forma $\int \frac{1}{v^2+a^2}dv$; $a = \sqrt{2}$.

Por lo tanto al sustituir las expresiones (2) y (3) en la (1) nos queda

$$\int \frac{4x+3}{x^2-2x+3}dx = 2\int \frac{1}{u}du + 7\int \frac{1}{w^2+(\sqrt{2})^2}dw$$

$$= 2ln|u| + \frac{7}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{w}{\sqrt{2}}\right) + C$$

$$= 2ln|x^2-2x+3| + \frac{7}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) + C$$

2.$-\int \frac{x^2}{x^2+2x+5}dx$

Solución. Como el grado del numerador es igual al grado del denominador entonces al realizar la división, encontramos que podemos reescribir a esta integral así

$$\int \frac{x^2}{x^2+2x+5}dx = \int \left\{1 - \frac{2x+5}{x^2+2x+5}\right\}dx$$

$$= \int dx - \int \frac{2x+5}{x^2+2x+5}dx = x - \int \frac{2x+5}{x^2+2x+5}dx \ldots (1).$$

Ahora sea $u = x^2 + 2x + 5$ entonces $du = 2x + 2$ y de este modo

$$\int \frac{2x+5}{x^2+2x+5}dx = \int \frac{(2x+2)+3}{x^2+2x+5}dx = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx + \int \frac{3}{x^2+2x+5}$$

$$= \int \frac{1}{u} du + \int \frac{3}{x^2 + 2x + 5} dx \dots (2).$$

Para la integral $\int \frac{3}{x^2+2x+5} dx$ vamos a completar el cuadrado para obtener

$$\int \frac{3}{x^2 + 2x + 5} dx = \int \frac{3}{(x+1)^2 + 4} dx = \int \frac{3}{(x+1)^2 + 2^2} dx.$$

La integral (3) tiene la forma

$$\int \frac{1}{\sqrt{v^2 + a^2}} dv \; ; \; v = x + 1 \; ; \; a = 2 \dots (3).$$

Por lo tanto, sustituyendo a las expresiones (2) y (3) en la (1) se obtiene

$$\int \frac{x^2}{x^2 + 2x + 5} dx = x - \int \frac{2x + 5}{x^2 + 2x + 5} dx$$

$$= x - \int \frac{1}{u} du - 3 \int \frac{1}{v^2 + a^2} dv$$

$$= x - ln|u| - 3\left\{\frac{1}{2} arctan\left(\frac{v}{2}\right)\right\} + \mathrm{C}$$

$$= x - ln|x^2 + 2x + 5| - \frac{3}{2} arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + \mathrm{C}.$$

3. $- \int \frac{x+1}{\sqrt{2x - x^2}} dx.$

Solución. Hacemos $u = 2x - x^2$ entonces $du = (2 - 2x)dx$. Para poder sustituir esta información primero reescribimos la integral dada así

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{2x - x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{-2(x+1)}{\sqrt{2x - x^2}} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{-2x - 2 + (2 - 2)}{\sqrt{2x - x^2}} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{(2x - 2x) - 4}{\sqrt{2x - x^2}} dx.$$

$$= -\frac{1}{2}\left\{\int \frac{2 - 2x}{\sqrt{2x - x^2}} dx - 4 \int \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}} dx\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du + 2\int \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}dx \ldots (1).$$

Completamos el cuadrado en la siguiente integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{2x - x^2 + (1 - 1)}}dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1 - (x - 1)^2}}dx.$$

Y ahora notamos que esta integral tiene la forma

$$\int \frac{dv}{\sqrt{a - v^2}} \;\; ; \;\; a = 1; v = x - 1 \ldots (2).$$

Por lo tanto, sustituyendo la expresión (2) en la (1) nos queda

$$\int \frac{x + 1}{\sqrt{2x - x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du + 2\int \frac{dv}{\sqrt{a^2 - v^2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|u| + 2arcsen\left(\frac{v}{a}\right) + C$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|2x - x^2| + 2arcsen(x - 1) + C.$$

UNIDAD TEMATICA V. Funciones trascendentales.
Función logarítmica y exponencial natural

La función logarítmica con base $b = e$ se define por

$$y = \ln x \quad si\ y\ sólo\ si \quad x = e^y$$

La derivada de la función logarítmica natural es

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

Si $y = g(x)$ es una función diferenciable, entonces por la regla de la cadena

$$\frac{d}{dx}\ln(u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

Encuentra la derivada de la función dada

$1.-\ y = x(\ln x)^2$

Solución. Esta expresión tiene la forma $y = f(x)g(h(x))$ donde

$f(x) = x,\ \ g(x) = x^2\ y\ h(x) = \ln x \quad y \quad f'(x) = 1,\ g'(x) = 2x \quad y\ h'(x) = \frac{1}{x}.$

Por lo tanto utilizando la regla del producto junto con la regla de la cadena obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\frac{d}{dx}g\big(h(x)\big) + \frac{d}{dx}f(x)g(h(x))$$

$$= f(x)g'\big(h(x)\big)h'(x) + f'(x)g(h(x))$$

$$= 2x\{\ln(x)\}\frac{1}{x} + (\ln x)^2$$

$$= 2\ln(x) + (\ln(x))^2$$

$$= \ln(x)\{\ln(x) + 2\}$$

$\mathbf{2.}-\ y = x - \ln|5x + 1|$

Solución. La expresión y tiene la forma

$$y = s(x) + (f\ o\ g\ o\ h)(x)$$

$$= s(x) + f(g(h(x)))$$

Donde $s(x) = x,\ f(x) = \ln(x)\,,\ \ g(x) = |x|\ y\ h(x) = 5x + 1$ y además

$$s'(x) = 1, \qquad f'(x) = \frac{1}{x}, \qquad g'(x) = \frac{x}{|x|} \quad y\, h'(x) = 5$$

De manera que

$$\frac{dy}{dx} = 1 + f'\left(g\big(h(x)\big)\right) g'\big(h(x)\big)h'(x)$$

$$= 1 + \frac{1}{|5x+1|} * \frac{5x+1}{|5x+1|} * 5$$

$$= 1 + \frac{5(5x+1)}{|5x+1|^2}$$

$$= 1 + \frac{5(5x+1)}{(5x+1)^2}$$

$$= 1 + \frac{5}{5x+1}$$

$3.-\ \ y = \sqrt{ln\sqrt{x}}$

Solución. Esta expresión tiene la forma

$$y = (f\ o\ g\ o\ h)(x)$$

$$= f(g(h(x))).$$

Donde

$$f(x) = \sqrt{x} \quad ; g(x) = \ln(x)\ \ y\ h(x) = \sqrt{x}.$$

Por lo tanto

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad g'(x) = \frac{1}{x}\ \ y\ h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

De manera que al utilizar la regla de la cadena se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = f'\left(g\big(h(x)\big)\right) g'\big(h(x)\big)\, h'(x).$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{ln\sqrt{x}}} * \frac{1}{\sqrt{x}} * \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{4x\sqrt{ln\sqrt{x}}}$$

$4.- \ y = \frac{1}{3}\ln|sen\ 3x|$

Solución. Escribimos

$$y = \frac{1}{3}(f\ o\ g\ o\ s)(x).$$

Donde

$$f(x) = \ln(x)\,, \qquad g(x) = |x|, \qquad h(x) = sen\,x \quad y \quad s(x) = 3x.$$

Y por lo tanto

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \qquad g(x) = \frac{x}{|x|}, \qquad h'(x) = \cos x \ \ y \ \ s'(x) = 3.$$

Al utilizar la regla de la cadena se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\ f'(g\ o\ h\ \ o\ s)g'(h\ o\ s)h'(s)s'$$

$$= \frac{1}{3}\frac{1}{|sen\ x|} * \frac{sen\ 3x}{|sen\ 3x|} * 3\cos(3x)$$

$$= \frac{sen\ 3x}{|sen\ 3x|^2} * \cos 3x$$

$$= \frac{sen\ 3x}{(sen\ 3x)^2} * \cos 3x = \frac{\cos 3x}{sen\ 3x} = \cot 3x.$$

$5.- \quad y = \ln(x\ln(x))$

Solución. Ponemos

$$y = f(g(x))$$

Donde

$$f(x) = \ln(x) \ \ y\ g(x) = xln\ (x)$$

Por lo tanto

$$f'(x) = \frac{1}{x} \ \ y \quad g'(x) = 1 + \ln(x)$$

De esta manera utilizando la regla de la cadena se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = f'\big(g(x)\big)g'(x) = \frac{1}{xln(x)} * (1 + \ln(x)) = \frac{1 + \ln(x)}{x\ln(x)}$$

Derivadas de funciones exponenciales

Si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}$$

Encuentra la derivada de las siguientes funciones

$1. -\quad y = e^{e^{x^2}}$

Solución. La expresión y tiene la forma

$$y = (f\ o\ g\ o\ h)(x) = f(g(h(x)))$$

Donde

$$f(x) = e^x;\quad g(x) = e^x\ y\quad h(x) = x^2$$

Por lo tanto

$$f'(x) = e^x;\ \ g'(x) = e^x\quad y\quad h'(x) = 2x$$

Al utilizar la regla de cadena obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = f'(g\ o\ h)\ g'(h)h'$$

$$= e^{e^{x^2}} * e^{x^2} * 2x$$

$$= 2x\ e^{\{e^{x^2}+x^2\}}$$

$2. -\ \ y = e^{x\sqrt{x^{2+1}}}$

Solución. La expresión ‘y’ tiene la forma

$$y = f\big(g(x)\big).$$

Donde

$f(x) = e^x\ \ y\ \ g(x) = x\sqrt{x^2+1}.$

Por lo tanto

$f'(x) = e^x\ \ y\ \ g'(x) = x * \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} + \sqrt{x^2+1}\,.$

Utilizando la regla de la cadena obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = f'\big(g(x)\big)g'(x) = e^{x\,\sqrt{x^2+1}}\left\{\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}\right\}.$$

3.− El modelo matemático de $\boldsymbol{Jenss}$ (1937) constituye una de las formulas empíricas más precisas para pronosticar la estatura $\boldsymbol{h}$ (en centímetros) en términos de la edad $\boldsymbol{t}$(en años) para niños en edad preescolar (de 3 meses a 6 años);

$$h(t) = 79.04 \; + \; 6.39\; t - e^{3.26-0.99t}$$

a) ¿Qué estatura pronostica este modelo para un niño de 2 años?
b) ¿Cuán rápido crece en estatura un niño de dos años?
c) Utiliza la gráfica de $h(t)$ para $t \in \; [1/4\,,6]$ para estimar la edad de un niño de preescolar que mide 100 cm de estatura.

Solución (a) Para $t = 2$, la estatura que pronostica este modelo es de

$$h(2) = \; 95.416\; cm$$

(b) Debido a que $h'(t)$ representa la variación exacta de la estatura con respecto a la edad de un niño de preescolar a la edad t, donde

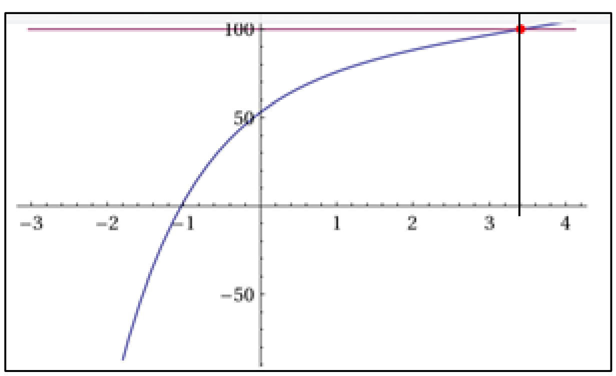
$$\frac{d}{dt}h(t) = h'(t) = 6.39 + (0.99)e^{3.26-0.99t}.$$

Entonces para $t = 2$, se obtiene $h'(2) = 9.950$. Por lo tanto a la edad de 2 años un niño de preescolar crece con una rapidez de $9.950\; cm$.

(c) Con la ayuda de la gráfica de la función $h(t)$ encontramos el valor de $t \in [1/4\,,6]$ tal que satisface la ecuación.

$$100 = 79.04 \; + \; 6.39\; t - e^{3.26-0.99t}.$$

Corresponde al valor de $t = 3.41835$ años.



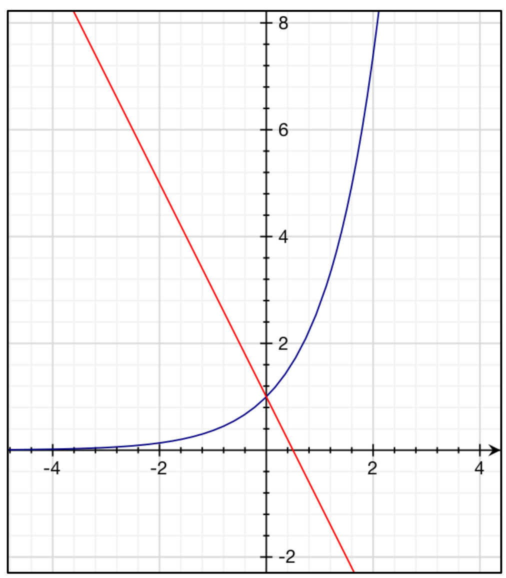
4. – Explica por qué sobre la gráfica de $y = e^x$ no hay ningún punto donde la recta tangente sea paralela a la recta $2x + y = 1$

Solución. Sea $f(x) = 1 - 2x$ o sea $f(x) = -2x + 1$, la función f representa la ecuación de una recta con pendiente $m = -2$ y ordenada al origen $b = 1$.

Sea $g(x) = e^x$, como $g'(x) = e^x$ y $g'(x)$ representa la pendiente de la recta tangente $\boldsymbol{L}$ a la curva $y = e^x$ en el punto $P = \big(x, f(x)\big) = (x, e^x)$, entonces, para que la recta $f(x) = -2x + 1$ sea paralela a la recta $\boldsymbol{L}$, debemos ser capaces de encontrar el valor del número real x tal que se cumpla la ecuación $g'(x) = m$, o sea

$$e^x = -2 \quad ...(1).$$

Puesto que la función exponencial $y = e^x$ es estrictamente positiva para toda x en los números reales, entonces concluimos que la ecuación (1) no tiene solución y por lo tanto no existe ningún punto donde la recta $\boldsymbol{L}$ a la curva $g(x) = e^x$ sea paralela a la curva $f(x) = -2x + 1$.



Integración de funciones exponenciales

Resuelve las siguientes integrales indefinidas

$$1.- \int \frac{e^{-x}}{(e^{-2x}+1)^{\frac{3}{2}}}dx$$

Solución. Sustituimos $u = e^{x}$ entonces $du = e^{x}dx$ y al sustituir nos queda la siguiente integral

$$\int \frac{1}{\left(\frac{1}{e^{2x}}+1\right)^{\frac{3}{2}} e^{x}}dx = \int \frac{1}{\left(\frac{1}{u^{2}}+1\right)^{\frac{3}{2}} u}du$$

Ahora, hacemos $w = \frac{1}{u}$ entonces $dw = -\frac{1}{u^{2}}du$ por lo cual $-u^{2}dw = du$ o sea que $-\frac{1}{w^{2}}dw = du$. Al sustituir obtenemos

$$\int \frac{1}{(w^{2}+1)^{\frac{3}{2}}} \cdot w\left(-\frac{1}{w^{2}}\right)dw = -\int \frac{1}{(w^{2}+1)^{\frac{3}{2}} w}dw$$

Para esta integral hacemos la sustitución trigonométrica $w = \tan(v)$ y entonces

$dw = sec^{2}(v)dv$. Por lo tanto esta última integral se convierte en

$$= -\int \frac{sec^{2}(v)}{(tan^{2}(v)+1)^{\frac{3}{2}} \cdot \tan(v)}dv = -\int \frac{sec^{2}(v)}{sec^{3}(v)\tan(v)}dv$$

$$= -\int \frac{1}{\sec(v)\tan(v)}dv = -\int \frac{sen(v)}{cos^{2}(v)}dv$$

Finalmente, hacemos $z = \cos(v)$ entonces $dz = -sen(v)dv$, de modo que la última integral se convierte en

$$\int \frac{1}{z^{2}}dz = \int z^{-2}dz = -\frac{1}{z}+C$$

De donde

$$\frac{1}{z}+C = \frac{-1}{\cos(v)}+C \; ; \; w = \tan(v)$$

$$= \frac{-1}{cos\left(arctan\left(\frac{1}{e^{x}}\right)\right)}+C.$$

$2.- \int e^{-3x} sen\ 5x\ dx$

Solución. Vamos a integrar por partes.

Sea $u = sen\ 5x$ y $dv = e^{-3x}dx$ entonces $du = 5\cos 5x$ o sea, $\frac{1}{5}du = \cos 5x$ y $v = -\frac{1}{3}e^{-3x}$ por lo tanto

$$\int e^{-3x} sen\ 5x\ dx = -\frac{1}{3}e^{-3x} sen\ 5x + \int \frac{5}{3}e^{-3x}\cos 5x\ dx \ \ *** (1)$$

Para la integral $\int \frac{5}{3}e^{-3x} \cos 5x\ dx$ volvemos a integrar por partes, ahora hacemos

$u = \cos 5x$ y $dv = e^{-3x}dx$ por lo tanto $du = -5sen\ 5x$ y $v = -\frac{1}{3}e^{-3x}$.

De esta manera

$$\frac{5}{3}\int e^{-3x}\cos 5x\ dx = -\frac{5}{9}e^{-3x}\cos 5x - \frac{25}{9}\int e^{-3x} sen\ 5x\ dx$$

Sustituyendo todo en la integral (1) nos queda

$$\int e^{-3x} sen\ 5x\ dx = -\frac{1}{3}e^{-3x} sen\ 5x - \frac{5}{9}e^{-3x}\cos 5x - \frac{25}{9}\int e^{-3x} sen\ 5x\ dx.$$

Como podemos observar, solo necesitamos despejar el valor de la integral $\int e^{-3x} sen\ 5x\ dx$ agrupando todo en el mismo lado de la igualdad para obtener

$$\frac{34}{9}\int e^{-3x} sen\ 5x\ dx = -\frac{1}{3}e^{-3x}\ sen\ 5x - \frac{5}{9}e^{-3x}\cos 5x + C_1.$$

Finalmente

$$\int e^{-3x} sen\ 5x\ dx = \frac{9}{34}\left\{-\frac{1}{3}e^{-3x} sen\ 5x - \frac{5}{9}e^{-3x}\cos 5x\right\} + C_2 \ \ ; C_2 = \frac{9}{34}C_1.$$

3.− $\int \frac{1}{(e^x+e^{-x})^2}dx$

Solución: esta integral es igual a

$$\int \frac{e^{2x}}{2e^{2x}+e^{4x}+1}dx = \int \frac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}dx$$

Ahora, hacemos $u = e^{2x}+1$ entonces $du = 2e^{2x}dx$ o bien, $\frac{1}{2}du = e^{2x}dx$,

Por lo tanto al sustituir obtenemos

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2}du = -\frac{1}{2u} + C = -\frac{1}{2(e^{2x}+1)} + C.$$

Derivada de la función logarítmica

Calcula la derivada de las siguientes funciones

$1.-\ \ y = x^{\sqrt{x}}$

Solución. Vamos a tomar el logaritmo natural a ambos lados de esta expresión

$$\ln y = \ln\left\{x^{\sqrt{x}}\right\} = \sqrt{x}\ln(x)$$

Y ahora vamos a derivar implícitamente con respecto a x ambos lados de la igualdad

$$\frac{d}{dx}\ln(y) = \frac{d}{dx}\{\sqrt{x}\ln(x)\}$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \sqrt{x}\frac{1}{x} + \ln(x)\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}}$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{2\sqrt{x} + \sqrt{x}\ln(x)}{2x}$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left\{\frac{2\sqrt{x} + \sqrt{x}\ \ln(x)}{2x}\right\} = x^{\sqrt{x}}\left\{\frac{2\sqrt{x} + \sqrt{x}\ \ln(x)}{2x}\right\}$$

$2.-\ \ y = x\sqrt{x+1}\ \sqrt[3]{x^2+2}$

Solución. Tomando logaritmo natural a ambos lados de la expresión y luego simplificando se obtiene

$$\ln(y) = \ln\{x\sqrt{x+1}\ \sqrt[3]{x^2+2}\}$$

$$= \ln(x) + \ln(x+1)^{\frac{1}{2}} + \ln(x^2+2)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \ln(x) + \frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{1}{3}\ln(x^2+2)$$

Y ahora utilizaremos derivación implícita para despejar a $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{d}{dx}\ln(y) = \frac{d}{dx}\{\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{1}{3}\ln(x^2+2)\}$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{2x}{3(x^2+2)}.$$

De donde

$$\frac{dy}{dx} = y\left\{\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{2x}{3(x^2+2)}\right\}$$

Pero por (1)

$$\frac{dy}{dx} = \left\{x\sqrt{x+1}\ \sqrt[3]{x^2+2}\right\}\left\{\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{2x}{3(x^2+2)}\right\}$$

$\mathbf{3.-}$ Encuentra la segunda derivada con respecto a x de la función

$y = \sqrt{x^x} *** (1)$

Solución. Tomamos logaritmo natural a ambos lados de esta expresión

$$\ln(y) = \ln(x^x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^x)$$

$$= \frac{1}{2}x\ln(x)$$

Y ahora derivamos con respecto a x.

$$\frac{d}{dx}\ln(y) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(x\ln(x))$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left\{x\frac{1}{x} + \ln(x)\right\} = \frac{1}{2}\{1 + \ln(x)\}.$$

Por lo tanto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}y\,\{1 + \ln(x)\}\ *** (2).$$

Pero por (1) $y = (x^x)^{1/2}$, por lo cual al sustituir en (2) nos queda

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(x^x)^{1/2}\{1 + ln\ (x)\}.$$

$4. -\quad y = x^x e^{x^x} *** (1)$

Solución. Tomamos logaritmo a ambos lados de la expresión (1)

$$\ln y = \ln\{x^x e^{x^x}\}$$
$$= \ln(x\, e^x)^x$$
$$= x\ln(\, xe^x)$$
$$= x\{\ln(x) + \ln(e^x)\}$$
$$= x\{\ln(x) + x\}$$
$$= x\ln(x) +\ x^2.$$

Y ahora vamos a derivar implícitamente con respecto a x para hallar $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{d}{dx}\ln(y) = \frac{d}{dx}\{x\ln x +\ x^2\}$$
$$= x\frac{1}{x} + \ln(x) + 2x$$
$$= 1 + \ln(x) + 2x$$

Por lo tanto, $\frac{dy}{dx} = x^x e^{x^x}\{1 + \ln(x) + 2x\}$.

$5. -\quad y = \frac{(x^2+1)^x}{x^2}.$

Solución. Tomamos logaritmos a ambos lados:

$$\ln(y) = \ln\left\{\frac{(x^2+1)^x}{x^2}\right\}$$
$$\ln(y) = \ln(x^2+1)^x - \ln(x^2)$$
$$ln(y) = x\ln(x^2+1) - 2\ln(x).$$

Y ahora derivamos con respecto a x

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2}{x^2+1} + \ln(x^2+1) - \frac{2}{x}.$$

Por lo tanto

$$\frac{dy}{dx} = y\ \left\{\frac{2x^2}{x^2+1} + \ln(x^2+1) - \frac{2}{x}\right\} = \left\{\frac{(x^2+1)^x}{x^2}\right\}\left\{\frac{2x^2}{x^2+1} + \ln(x^2+1) - \frac{2}{x}\right\}.$$

Integrales de funciones logarítmicas

Evalúa las siguientes integrales

$1.- \int (\ln x)^2 dx$

Solución. Integrando por partes, hacemos $u = (\ln x)^2$, entonces $du = \frac{2\ln x}{x}dx$ y sea $dv = dx$, entonces $v = x$. Por lo tanto,

$$\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - \int 2\ln x\, dx$$

Ahora volvemos a integrar por partes a la integral $\int 2\ln x\, dx$, haciendo $u = \ln x$ y $dv = dx$ entonces $du = \frac{1}{x}dx$ y $v = x$. Sustituyendo,

$$\int 2\ln x\, dx = 2xln\, x - 2\int dx = 2x\ln x - 2x + C.$$

Por lo tanto

$$\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - \int 2\ln x\, dx = x(\ln x)^2 - 2xln\, x + 2x + C$$

$2.- \int \operatorname{sen}(\ln x) dx.$

Solución. Hacemos la sustitución $u = \ln x$, entonces $du = \frac{1}{x}dx$ y $x = e^u$. De esta manera,

$$\int \operatorname{sen}(\ln x) dx = \int e^u sen(u) du.$$

Para esta integral resultante, podemos utilizar la siguiente fórmula

$$\int e^{\propto v} sen(\beta v) dv = \frac{e^v\{\alpha\, sen(\beta v) - \beta cos(\beta v)\}}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Al sustituir $\alpha = 1$ y $\beta = 1$, nos queda

$$\int \operatorname{sen}(\ln x) dx = \int e^u sen(u) du = \frac{1}{2}e^u\{sen\, u - \cos u\} + C\, ; u = \ln x$$

$$= \frac{x}{2}\{sen\ (\ln x) - \cos(\ln x)\} + C.$$

$$3.- \int \frac{1}{xln\,x}dx$$

Solución. Hacemos $u = \ln x$, entonces $du = \frac{1}{x}dx$ y al sustituir

$$\int \frac{1}{xln\,x}dx = \int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C = \ln|\ln x| + C$$

$$4.- \int_0^1 \frac{ln\theta}{\theta - 1}\theta^x;\ \theta > 1.$$

Solución. Hacemos $u = \theta^x$, entonces $du = \theta^x \ln\theta\, dx$. Sustituyendo nos queda

$$\int_0^1 \frac{ln\theta}{\theta - 1}\theta^x = \frac{1}{\theta - 1}\int_0^1 du = [u]_0^1 = 1$$

Ecuaciones trigonométricas

Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones

1. $-\quad sen^2x - 4sen\,x + 1 = 0$

Solución. Completamos el cuadrado en esta ecuación así

$$sen^2x - 4sen\,x + 4 = 3$$

$$(sen\,x - 2)^2 = 3$$

Ahora tomamos raíz cuadrada a ambos lados de esta última igualdad, con lo cual se obtiene $sen\,x - 2 = \pm\sqrt{3}$. Para poder resolver esta ecuación buscamos los valores de $x \in [0, 2\pi]$ para los cuales

$$\begin{cases} sen\,x = 2 + \sqrt{3} *** (1) \\ \\ sen\,x = 2 - \sqrt{3} *** (2) \end{cases}$$

La ecuación (1) no tiene solución porque $-1 \leq sen\,x \leq 1$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Por otra parte, para la ecuación (2) se obtiene que

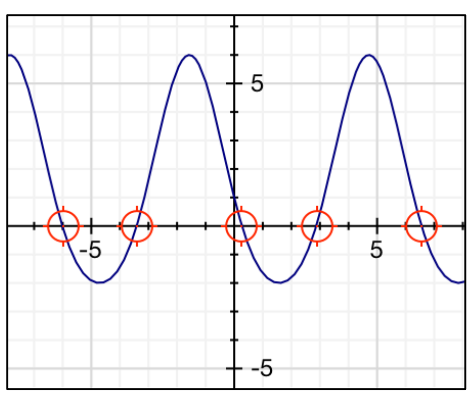
$x = arc\,sen\left(2 - \sqrt{3}\right) \approx 15^o$.

Como la función $sen\,x$ tiene periodo 2π, entonces podemos hallar todas las soluciones de estas ecuaciones al sumar múltiplos de 2π a las soluciones que están en el intervalo $[0, 2\pi]$. Si $sen\,x = 2 - \sqrt{3}$, el ángulo de referencia es de

$$x = \frac{\pi}{12} \text{ ó } x = \pi - \frac{\pi}{12} = \frac{11}{12}\pi.$$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación dada son las siguientes

$$x = \frac{\pi}{12} + 2n\pi \text{ ó } x = \frac{11}{12}\pi + 2n\pi;\ n\,entero.$$



2.− $5cos^2x + 3cos\,x - 2 = 0$

Solución. Esta ecuación se puede factorizar así

$$(\cos x + 1)(5\cos x - 2) = 0$$

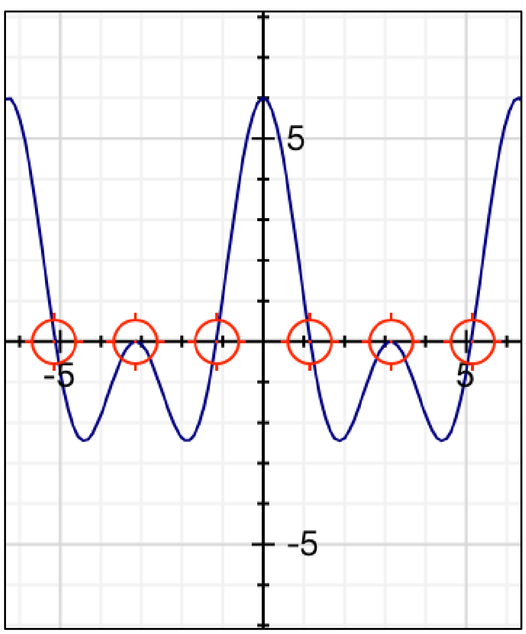
Ahora buscamos los valores de $x \in [0, 2\pi]$ para los cuales

$$\begin{cases} cos\ x = -1 *** (1) \\ \\ cos\ x = \dfrac{2}{5} *** (2) \end{cases}$$

Como la función $sen\,x$ tiene periodo 2π, entonces podemos hallar todas las soluciones de estas ecuaciones al sumar múltiplos de 2π a las soluciones que están en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Si $cos\ x = -1$, el ángulo de referencia es de $x = \pi$ ó $x = 2\pi - \pi = \pi$. Por otra parte, si $cos\ x = \frac{2}{5}$, entonces $x = arc\ cos\left(\frac{2}{5}\right) \approx 66^o$ por lo cual el ángulo de referencia es $x = \frac{11}{30}\pi$ ó $x = 2\pi - \frac{11}{30}\pi = \frac{49}{30}\pi$. Por lo tanto, las soluciones de la ecuación dada son las siguientes

$$x = \pi + 2n\pi;\ \ x = \frac{11}{30}\pi + 2n\pi\ \ ó\ \ x = \frac{49}{30}\pi + 2n\pi;\ n\ entero.$$



3. – El interés por los números críticos está relacionado con la búsqueda de valores extremos que puede alcanzar una función f en un intervalo cerrado $[a, b]$ y se definen de la siguiente manera.

Dada una función f, los números c en el dominio de f para los cuales $f'(c) = 0$ o bien $f'(c)$ no existe se denominan números críticos de f.

Encuentra los puntos críticos de la siguiente función.

$$f(x) = sen\,(x) - sen^2(x); x \in [0, 2\pi]$$

Solución. La derivada de la función f es

$$f'(x) = \cos x - 2sen\,x\cos x = \cos x\,(1 - 2sen\,x)$$

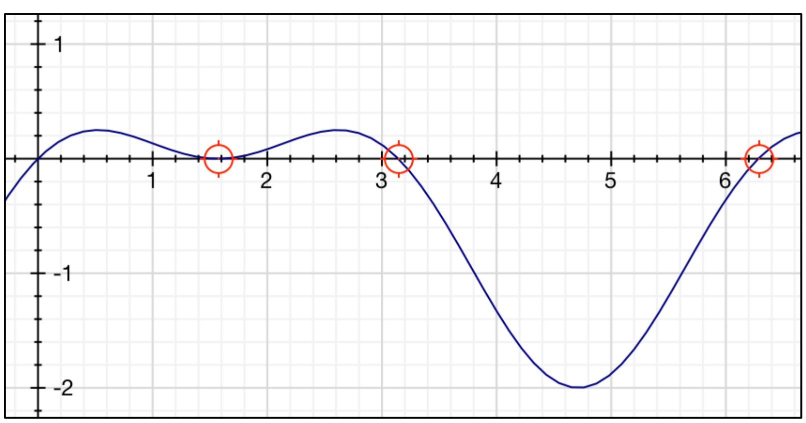
Debido a que f' está bien definida para toda $x \in [0, 2\pi]$ entonces para obtener los números críticos de f, resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$, o sea,

$$\cos x\,(1 - 2sen\,x) = 0 *** (1).$$

Esto se verifica cuando

$$\begin{cases} cos\,x = 0 *** (2) \\ 1 - 2sen\,x = 0 *** (3) \end{cases}.$$

La ecuación (2) se verifica cuando $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{3}{2}\pi$; y cuando $sen\,x = \frac{1}{2}$, que da $x = \frac{1}{6}\pi$ y $x = \frac{5}{6}\pi$. Por lo tanto, los números $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$ y $\frac{3}{2}\pi$ son números críticos de la función f en el intervalo abierto $(0, 2\pi)$. A partir de la gráfica de la función f, podemos observar que los extremos 0 y 2π también son números críticos que corresponden a un valor mínimo $f(0) = 0$ y un valor máximo local $f(2\pi) = 0$ en los extremos del intervalo.



Integración por sustitución trigonométrica

Directrices para las sustituciones trigonométricas para integrales que contienen

· $\sqrt{a^2 - u^2}$, $a > 0$, hacemos $u = a\, sen\theta$ donde $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

· $\sqrt{a^2 + u^2}$, $a > 0$, hacemos $u = a \tan\theta$ donde $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

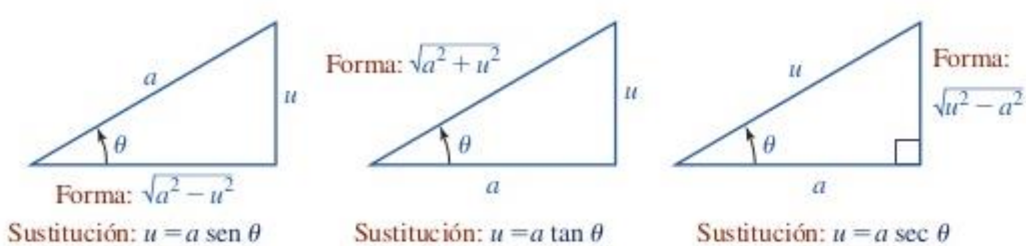
· $\sqrt{a^2 - u^2}$, $a > 0$, hacemos $u = a \sec\theta$

$$\text{Donde} \begin{cases} 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}\ si\ u \geq a \\ \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi\ si\ u \leq -a \end{cases}$$

Como podemos observar en cada caso, la restricción impuesta sobre la variable θ es precisamente la que acompaña a la funcion trigonométrica inversa correspondiente, por ejemplo, si queremos escribir $\theta = arcsen\left(\frac{u}{a}\right)$, etcétera. Después de llevar a cabo la integración en θ es necesario volver a la variable original x. Si se construye en triángulo rectángulo de referencia, uno donde

$$sen\theta = \frac{u}{a}\ , \ tan\theta = \frac{u}{a}\ \text{ó}\ \sec = \frac{u}{a}$$

Como se muestra en la figura, entonces las otras expresiones trigonométricas pueden expresarse fácilmente en términos de u.



Evalúa las integrales indefinidas que se indican a continuación por medio de una sustitución trigonométrica

$1.- \quad \int \frac{1}{(x^2 + 6x + 13)^2} dx$

Solución. Vamos a reescribir a esta integral así

$$\int \frac{1}{[(x+3)^2 + 4]^2} dx.$$

Hacemos $u = x + 3$ entonces $du = dx$ y sustituyendo nos queda

$$\int \frac{1}{(u^2 + 4)^2} dx.$$

Para el integrando $\frac{1}{(u^2+4)^2}$, hacemos la sustitución trigonométrica $u = 2\tan w$ entonces $du = 2\,sec^2w\,dw$ y $w = arctan\left(\frac{u}{2}\right)$. Y al sustituir nuevamente obtenemos

$\int \frac{2sec^2w}{(4tan^2(w)+4)^2} dw$; $sec^2w = \ tan^2\theta + 1$

$$= \int \frac{2sec^2w}{16sec^4w} dw$$

$$= \frac{1}{8}\int cos^2w\,dw$$

$$= \frac{1}{8}\int \left\{\frac{1}{2}\cos(2w) + \frac{1}{2}\right\} dw$$

$$= \frac{1}{16}\int \cos(2w)\,dw + \frac{1}{16}\int dw$$

$$= \frac{1}{16}\left[\frac{1}{2}sen(2w)\right] + \frac{1}{16}w + C$$

$= \frac{1}{32}sen\,2w + \frac{1}{16}w + C.$ Donde $w = \arctan\left(\frac{u}{2}\right) = \ arctan\left(\frac{x+3}{2}\right)$.

$2. - \int \sqrt{6x - x^2}\,dx$

Solución. Primero vamos a completar el cuadrado en el integrando $\sqrt{6x - x^2}$ así

$$\int \sqrt{9 - (x-3)^2}\,dx.$$

Luego sustituimos $u = x - 3$ y $du = dx$ con lo cual la integral anterior nos queda así

$$\int \sqrt{9 - u^2}du.$$

Para esta integral, hacemos la sustitución trigonométrica $u = 3sen(w)$ entonces $du = 3\cos(w)dw$. De esta manera nos queda

$$\int \sqrt{9-u^2}\,du = \int \sqrt{9-9sen^2w}\ \cdot 3\cos w\,dw$$

$$= \int 3\sqrt{1-sen^2w}\ \cdot 3\cos w\ dw$$

$$= 9\int cos^2w\,dw$$

$$= 9\int \left\{\frac{1}{2}\cos(2w)+\frac{1}{2}\right\}dw$$

$$= \frac{9}{2}\int \cos(2w) + \frac{9}{2}\int dw$$

$= \frac{9}{4}sen(2w) + \frac{9}{2}w + C$. Donde $w = arcsen\left(\frac{4}{3}\right) = arcsen\left(\frac{x-3}{3}\right)$.

$$3.- \int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx$$

Solución. Hacemos la sustitución trigonométrica $x = \tan(u)$ entonces $dx = sec^2u\,du$, y al sustituir nos queda la siguiente integral

$$\int \frac{sec^2u}{(tan^2u+1)^2}du$$

$$= \int \frac{sec^2u}{sec^4u}du$$

$$= \int cos^2u\,du$$

$$= \int \left\{\frac{1}{2}\cos(2u)+\frac{1}{2}\right\}du$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos(2u) + \frac{1}{2}\int du$$

$= \frac{1}{4}sen(2u) + \frac{1}{2}u + C$. Donde $u = \arctan x$.

$$4.- \quad \int \frac{2x-3}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Solución. Hacemos $x = sen(u)$ y entonces $dx = \cos u \, du$ de manera que

$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-sen^2 u} = \cos u$, por lo tanto,

$$\int \frac{2x-3}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= \int \frac{2sen\,u - 3}{\cos u} \cdot \cos u \;\; du$$

$$= \int (2\;sen\,u - 3)du$$

$$= \int 2sen\,u\,du - \int 3\,du$$

$$= -2\cos(u) - 3u + C.$$

Pero como $x = sen\,u$ entonces $u = arcsen(x)$ por lo tanto

$\int \frac{2x+3}{\sqrt{1-x^2}}dx = -2\;cos\big(arcsen(x)\big) - 3arcsen\;x + C.$

$$5.- \quad \int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-1}}dx$$

Solución. Hacemos la sustitución trigonométrica $x = \sec u$ entonces $dx = \tan u \sec u \; du$ y al sustituir nos queda

$$\int \frac{\tan u \;\cdot \sec u}{sec^3 u\;\sqrt{sec^2 u - 1}}du$$

$$= \int cos^2(u)du = \int \left\{\frac{1}{2}\cos(2u) + \frac{1}{2}\right\}du$$

$= \frac{1}{2}\int \cos(2u) + \frac{1}{2}\int du = \frac{1}{4}sen(2u) + \frac{1}{2}u + C.$ Donde $u = \operatorname{arcsec} x.$

$$6.- \int \frac{(2+tan^2x)sec^2x}{1+tan^3x}dx$$

Solución. Hacemos $u = \tan x$ entonces $du = sec^2x\, dx$ y al sustituir nos queda

$$\int \frac{u^2+2}{u^3+1}du$$

Y ahora utilizamos fracciones parciales para descomponer a ésta última integral, con lo cual la podemos escribir así

$$\int \left\{\frac{1}{u^2-u+1}+\frac{1}{u+1}\right\}du = \int \frac{1}{u^2-u+1}du + \int \frac{1}{u+1}du \quad *** (1).$$

Para la integral

$$\int \frac{1}{u^2-u+1}du$$

Completamos el cuadrado de la siguiente manera

$$\int \frac{1}{u^2-u+1}du = \int \frac{1}{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}du$$

Y ahora tomamos el cambio de variable $w = u - \frac{1}{2}$ entonces $dw = du$ y por lo tanto

$$\int \frac{1}{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}du = \int \frac{1}{w^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dw \quad *** (2)$$

Si sustituimos la integral (2) en (1) se obtiene

$$\int \frac{1}{w^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dw + \int \frac{1}{u+1}du$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}w\right) + \ln(u+1) + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}arctan\left(\frac{2\left(u-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right) + \ln(u+1) + C.$$ Donde $u = \tan x$.

Funciones hiperbólicas

Derivadas de las funciones hiperbólicas

Encuentra la derivada de las siguientes funciones

$1.-\ \ y = e^{x}e^{cosch\, x^2}$

Solución. La expresión y tiene la forma $y = f\ \{g\ o\ h\ o\ s\}$, donde

$$f(x) = e^{x};\ \ g(x) = e^{x};\ \ h(x) = cosch\ (x)\ \ y\ \ s(x) = x^2.$$

Por lo tanto

$$f'(x) = e^{x};\ \ g'(x) = e^{x};\ \ h'(x) = -cosch(x)\coth(x)\ \ y\, s'(x) = 2x.$$

De esta manera utilizando la regla de la cadena obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\frac{d}{dx}\{(g\ o\ h\ o\ s)(x)\} + \frac{d}{dx}f(x)\{(g\ o\ h\ o\ s)(x)\}$$

$$= e^{x}\{g'(h\ o\ s)h'(s)s'\} + \ e^{x}\{e^{coschx^2}\}$$

$$= e^{x}\left\{e^{coschx^2}\right\} - 2x\ e^{x}\left\{e^{coschx^2}\right\}\{coschx^2\coth x^2\}$$

$$= e^{coschx^2+2}\{1 - 2xcoschx^2cothx^2\}.$$

$2.-\ \ y = \tanh(senh\, x^3)$

Solución. La expresión ‘y’ tiene la forma

$$y = (f\ o\ g\ o\ h)(x)$$
$$= f(g(h(x)))$$

Donde

$$f(x) = \tanh(x);\ \ g(x) = senh\ (x);\ \ \ h(x) = x^3$$

Por lo tanto

$$f'(x) = sech^2(x);\ \ g'(x) = \cosh(x);\ \ \ y\ \ \ h'(x) = 3x^2$$

Utilizando la regla de la cadena $\frac{dy}{dx} = f'\left(g\big(h(x)\big)\right)g'\big(h(x)\big)h'(x)$, se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = sech^2\big(senh\ (x^3)\big)\cosh(x^3)\,3x^2 = 3x^2sech^2\big(senh(x^3)\big)\cosh(x^3).$$

3. – Encuentra el o los puntos sobre la gráfica de la siguiente función donde la tangente es horizontal

$$f(x) = (x^2 - 2)\cosh(x) - 2x\, senh(x)$$

Solución. Como

$$f(x) = (x^2 - 2) senh(x) + 2x\cosh(x) - \{2x\cosh(x) + 2\, senh(x)\}.$$

Entonces

$f'(x) = x^2 senh\,(x) - 2senh(x) + 2x\cosh(x) - 2x\cosh(x) - 2senh(x)$

$= x^2 senh(x) - 4\, senh(x)$

$= senh(x)\{x^2 - 4\}.$

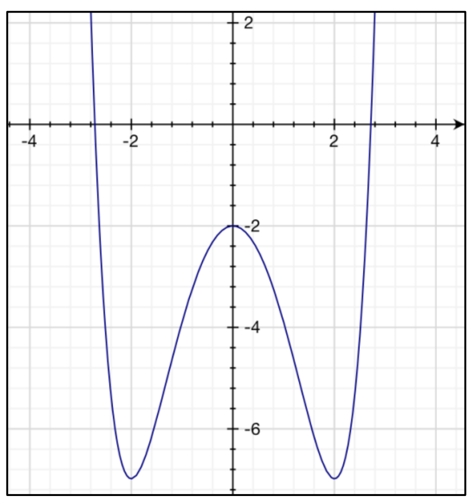
Para contestar a esta pregunta debemos encontrar los valores de x en $\mathbb{R}$ tales que $f'(x) = 0$, o sea, los valores de x para los cuales se cumple la igualdad.

$$senh(x)\{x^2 - 4\} = 0$$

Esto es cierto para

$$x = 0; \quad x = 2; \quad y\, x = -2$$

Por lo tanto, los puntos sobre la gráfica de $f(x)$ donde la recta es tangente es horizontal son $P_1 = (0, -2)$, $P_2 = (2, -14.507)$ y $P_3 = (-2, -14.507)$.



$4. -$ Demuestra que para cualquier entero positivo n, se cumple

$$\left(\cosh(x) + senh(x)\right)^n = \cosh(nx) + senh(nx)$$

Demostración. Procederemos por matemática.

- Para $n = 1$ se tiene el resultado
- Supongamos que este resultado se cumple para todo k número natural y veamos que también es cierto para $k + 1$, es decir, se cumple
$$\left(\cosh(x) + senh(x)\right)^{k+1} = \cosh\{(k+1)x\} + senh\{(k+1)x\}$$

Puesto que

$(\cosh(x) + senh(x))^{k+1}$

$= \left(\cosh(x) + senh(x)\right)^k (\cosh(x) + senh(x))$

$= \{\cosh(kx) + senh(kx)\}(\cosh(x) + senh(x))$

$= \{senh(kx)\cosh(x) + \cosh(kx)\, senh(x)\} + \{\cosh(kx)\cosh(x) + sen(kx) senh(x)\}$

$= senh\{x(k+1)\} + \cosh\{x(k+1)\}.$

Por lo tanto, este resultado también es válido para $k + 1$ y de esta manera se cumpla para todo entero positivo n.

Derivadas de las Funciones Hiperbólicas Inversas

Encuentra la derivada de las siguientes funciones

$1. -\ y = x \operatorname{arctanh} x + ln\sqrt{1 - x^2}$

Solución. Vamos a utilizar la regla del producto para el factor $x \operatorname{arctanh} x$, y la regla de la cadena para el término $ln\sqrt{1 - x^2}$ junto con la regla de la suma, para poder calcular la derivada de la función y .

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\, x \operatorname{arctanh} x + \frac{d}{dx}\, ln\sqrt{1 - x^2}$

$= x\left\{\frac{1}{1 - x^2}\right\} + \operatorname{arctanh} x + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}}$

$= \frac{x}{1 - x^2} + \operatorname{arctanh} x - \frac{x}{1 - x^2}.$

2.$-\quad y = \dfrac{1}{[arctanh(2x)]^3}$

Solución. Utilizando la regla de la derivada de un cociente junto con la regla de la cadena se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3[\text{arctanh}(2x)]^2 \cdot \left\{\frac{1}{1-\ x^2} \cdot -2x\right\}}{[\text{arctanh}(2x)]^6}$$

$$= \frac{\left\{\frac{6x}{1-\ x^2}\right\}}{[\text{arctanh}(2x)]^4}$$

$$= \frac{6x}{(1-\ x^2)\ [\text{arctanh}(2x)]^4}.$$

$3.-\quad y = arc\ coth\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Solución. La expresión y es de la forma $y = f(g(x))$, donde $f(x) = \text{arccoth}(x)$ y $g(x) = \frac{1}{x}$ de manera que $f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$ y $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Por lo tanto

$$\frac{dy}{dx} = f'\big(g(x)\big)g'(x) = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-\left(\frac{1}{x^2}\right)}{1-\frac{1}{x^2}}$$

$$= -\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{1-\ x^2}.$$

$4.-\quad y = arc\ senh(sen\ x)$

Solución. Esta expresión tiene la forma $y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$, donde

$f(x) = arcsenh\ x$ y $g(x) = sen(x)$. Como $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$; $g(x) = \cos x$ entonces,

$\frac{dy}{dx} = f'\big(g(x)\big)g'(x) = \frac{1}{\sqrt{sen^2\ x+1}}\cos x.$

Integración de funciones hiperbólicas inversas

Resuelve las siguientes integrales

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-36}}dx \;\; *** \, (1)$$

Solución. Esta integral puede resolverse rápidamente por medio de la sustitución trigonométrica $x = 6\sec u$. Pero con un poco más de atención, podemos observar que como

$$\frac{d}{dx}\text{arc cosh}\left(\frac{\text{w}}{\text{a}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\text{w}^2-\text{a}^2}}\frac{\text{dw}}{\text{dx}}$$

Entonces sustituyendo $w = x$ y $a = 6$, entonces $dw = dx$, de manera que

$$\frac{d}{dx}\left\{\text{arc cosh}\left(\frac{\text{w}}{\text{a}}\right)\right\} = \frac{1}{\sqrt{\text{w}^2-\text{a}^2}}$$

$$d\left\{\text{arc cosh}\left(\frac{\text{w}}{\text{a}}\right)\right\} = \frac{1}{\sqrt{\text{w}^2-\text{a}^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{\text{w}^2-\text{a}^2}}dw$$

Por lo tanto

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-36}}dx = \int d\left\{arc\ cosh\left(\frac{x}{6}\right)\right\} = arccosh\left(\frac{x}{6}\right) + C.$$

Y como toda función hiperbólica inversa se puede expresar como un logaritmo natural, donde

$$\text{arc cosh}(v) = \ln\left|v + \sqrt{v^2-1}\right|;\ v \geq 1$$

Entonces tomando $v = \frac{x}{6}$ obtenemos

$$arc\ cosh\left(\frac{x}{6}\right) + C = \ln\left|\frac{x}{6} + \sqrt{\frac{x^2}{36} - 1}\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{x}{6} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{6}\right| + C$$

Por lo tanto

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-36}}dx = \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{6}\right| + C.$$

$$2.- \int \frac{1}{6x-x^2}dx$$

Solución. Completando el cuadrado, podemos reescribir esta integral de la siguiente manera

$$\int \frac{1}{9-(x-3)^2}dx$$

Y ahora haciendo $u = x - 3$ nos queda que $du = dx$ y al sustituir en la integral obtenemos

$$\int \frac{1}{9-(x-3)^2}dx = \int \frac{1}{9-u^2}du$$

Pero como

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{3}arc\ tanh\left(\frac{u}{3}\right)\right\} = \frac{1}{9-u^2}\frac{du}{dx} = \frac{1}{9-u^2}.$$

Entonces

$$d\left\{\frac{1}{3}arc\ tanh\left(\frac{u}{3}\right)\right\} = \frac{1}{9-u^2}dx = \frac{1}{9-u^2}du.$$

Y por el teorema fundamental del cálculo obtenemos

$$\int \frac{1}{9-u^2}du = \int d\left\{\frac{1}{3}arctanh\left(\frac{u}{3}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{3}arctanh\left(\frac{u}{3}\right) + C.$$

Y utilizando el hecho de que

$$\operatorname{arctanh}(v) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+v}{1-v}\right| \ ; |v| < 1$$

Entonces concluimos lo siguiente

$$\int \frac{1}{9-u^2}du = \frac{1}{3}arctanh\left(\frac{u}{3}\right) + C = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{1+\left(\frac{x-3}{3}\right)}{1-\left(\frac{x-3}{3}\right)}\right| + C = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x}{6-x}\right| + C.$$

REFERENCIAS

1.- Larson Ron, Hostetler Robert P. y Edwars Bruce H. Cálculo y Geometría Analítica, Ed. Mc Graw Hill., España, 2006, Octava edición, 1138 págs., ISBN 970-10-5710-4.

2.- Leithold Louis. El Cálculo, Ed. Oxford, México, 1999, Séptima edición, 1360 págs, ISBN 970-613-182-5.

3.- Purcell Edwin J., Varberg Dale, Rigdon Steven E. Cálculo, Editorial Pearson/ Prentice Hall, México, 2007, Novena Edición, 872 págs., ISBN 978-970-26-0919-3.

4.- Saturnino L. Salas, Einar Hille, Garret J. Etgen. Calculus, Editorial Reverté, 4ta Edición 2002, Volumen 2. ISBN: 9788429151572.

5.- Stewart James. Cálculo Trascendentes Tempranas, Ed. Cengage Learning, México 2008, Sexta Edición, 1138 págs. ISBN 0-495-01166-5.

6.- Swokowski Earl W. Cálculo con Geometría Analítica. Grupo Editorial Iberoamericana, Mexico 1989, Segunda Edición, ISBN: 9687270430.

7.- Swokowski Earl W, Jeffery A. Cole. Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica. Cengage Learning, México 2009, Décimo Segunda Edición. ISBN-13: 978-607-481-186-5, ISBN-10: 607-481-186-5.

8.- Thomas George B., Finney Ross L. Cálculo una Variable, Ed. Pearson, México, 1998, Novena edición, 707 págs., ISBN 444 968 279 3.

9.- Zill Dennis G, Warren S. Wright. Calculo. Tracendentes Tempranas. Editorial Mc Graw Hill/Interamericana Editores S.A. de C.V. Cuarta Edición 2011, ISBN 13: 978-607-15-0502-6.