CAPITULO 8. DINAMICA DE ROTACIÓN.

Cuando un objeto real gira alrededor de algún eje, su movimiento no se puede analizar como si fuera una partícula, porque en cualquier instante, diferentes partes del cuerpo tienen velocidades y aceleraciones distintas. Por esto es conveniente considerar al objeto real como un gran número de partículas, cada una con su propia velocidad, aceleración. El análisis se simplifica si se considera al objeto real como un cuerpo rígido. En este capítulo se tratará la rotación de un cuerpo rígido en torno a un eje fijo, conocido como movimiento rotacional puro.

8.1 ENERGÍA CINÉTICA DE ROTACIÓN.

Para un cuerpo rígido formado por una colección de partículas que gira alrededor del eje z fijo con velocidad angular ω, cada partícula del cuerpo rígido tiene energía cinética de traslación. Si la partícula de masa m_i, se mueve con velocidad v_i, su energía cinética es:

$$E_{ci} = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Cada partícula del cuerpo rígido tiene la misma velocidad angular ω, pero distintas velocidades lineales, porque estas dependen de la distancia r al eje de rotación, y se relacionan por $v_i = \omega r_i$. Entonces la energía cinética de la partícula i es:

$$E_i = \frac{1}{2} m_i (r_i \omega)^2 = \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

La energía cinética total del cuerpo rígido en rotación es la suma de las energías cinéticas de cada partícula individual, esto es:

$$E_i = \sum E_i = \sum \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2}\left(\sum \frac{1}{2} m_i r_i^2 \right)\omega^2$$

donde se factorizó ω^2 porque es la misma para todo el cuerpo rígido. A la cantidad entre paréntesis en la ecuación anterior se la define como el momento de inercia, I, del cuerpo rígido:

$$I = \sum m_i r_i^2$$

De la definición momento de inercia, sus unidades de medida en el SI son $kg \cdot m^2$. Con esta definición, se puede escribir la energía cinética de rotación de un cuerpo rígido como:

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} I\omega^2} \qquad (8.1)$$

La energía cinética de rotación no es un nueva forma de energía, sino que es el equivalente rotacional de la energía cinética de traslación, se dedujo a partir de esa forma de energía. La analogía entre ambas energías ½ mv^2 y ½ $I\omega^2$ es directa, las cantidades I y ω del movimiento de rotación son análogas a m y v del movimiento lineal, por lo tanto I es el equivalente rotacional de m (algo así como la masa de rotación), y siempre se considera como una cantidad conocida, igual que m, por lo que generalmente se da como un dato. Pero existen técnicas del calculo integral para calcular I, y teoremas asociados, que no se usarán en este curso.

El momento de inercia I es una cantidad que depende del eje de rotación, el tamaño y la forma del objeto. En la siguiente tabla 8.1 se dan los momentos de inercia respecto al centro de masa de figuras geométricas conocidas, de distribución de masa homogénea, cuando giran en torno al eje que se indica.

TABLA 8.1

Objeto (de masa M)	I_{cm}
Aro o cascarón cilíndrico de radio R, eje de rotación por su eje de simetría	MR^2
Disco o cilindro sólido de radio R, eje de rotación por su eje de simetría	$\frac{1}{2}MR^2$
Cilindro hueco, de radios interno R_1 y externo R_2, eje de rotación por su eje de simetría	$\frac{1}{2}M\left(R_1^2+R_2^2\right)$
Esfera sólida de radio R, eje de rotación por su eje de simetría	$\frac{2}{5}MR^2$
Cascarón esférico delgado de radio R, eje de rotación por su eje de simetría	$\frac{2}{3}MR^2$
Barra delgada de largo L, con eje de rotación por el centro	$\frac{1}{12}ML^2$
Barra delgada de largo L, con eje de rotación en el extremo	$\frac{1}{3}ML^2$
Placa rectangular de lados a y b, eje rotación en el centro perpendicular a la placa	$\frac{1}{12}M\left(a^2+b^2\right)$

8.2 RELACIÓN ENTRE TORQUE Y ACELERACIÓN ANGULAR.

Para una partícula de masa m, que gira como se muestra en la figura 8.1, en una circunferencia de radio r con la acción de una fuerza tangencial $\boldsymbol{F_t}$, además de la fuerza centrípeta necesaria para mantener la rotación. La fuerza tangencial se relaciona con la aceleración tangencial a_t por $F_t = ma_t$. El torque alrededor del centro del círculo producido por $\boldsymbol{F_t}$ es:

$$\tau = F_t\, r = (ma_t)r$$

Como la a_t se relaciona con la aceleración angular por $a_t = r\alpha$, el torque se puede escribir como:

$$\tau = (m\, r\alpha)\, r = (m\, r^2)\alpha$$

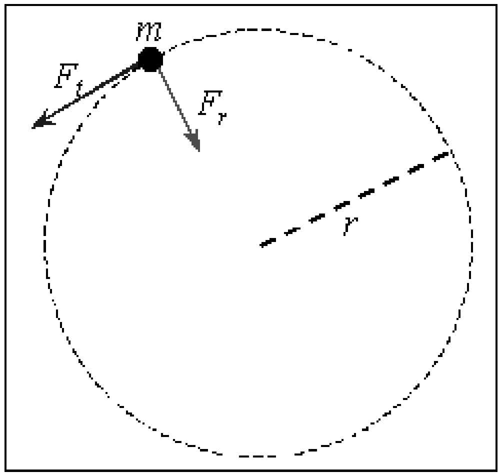

Figura 8.1

y como mr^2 es el momento de inercia de la masa *m* que gira en torno al centro de la trayectoria circular, entonces:

$$\tau = I\alpha$$

El torque que actúa sobre una partícula es proporcional a su aceleración angular α, donde I es la constante de proporcionalidad. Observar que $\tau = I\alpha$ es el análogo rotacional de la segunda ley de Newton $F = ma$.

Se puede extender este análisis a un cuerpo rígido arbitrario que rota en torno a un eje fijo que pase por *O*, como se ve en la figura 8.2. El cuerpo rígido se puede considerar formado por elementos de masa *dm*, que giran en torno a *O* en una circunferencia de radio *r*, por efecto de alguna fuerza tangencial externa dF_t que actúa sobre *dm*.

Por la segunda ley de Newton aplicada a *dm*, se tiene:

$$dF_t = (dm)\, a_t$$

El torque $d\tau$ producido por la fuerza dF_t es:

$$d\tau = rdF_t = (rdm)a_t = (rdm)r\alpha = (r^2\, dm)\alpha$$

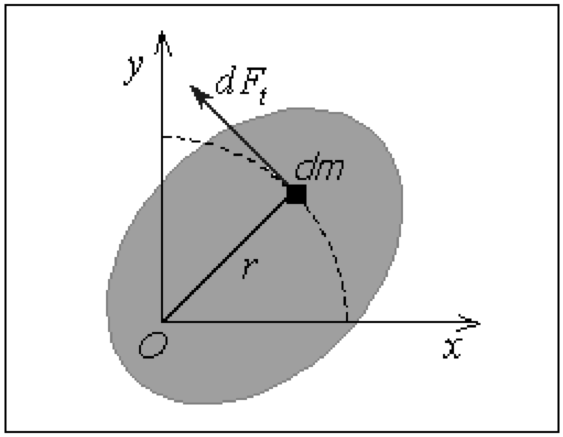

Figura 8.2

El torque neto se obtiene integrando esta expresión, considerando que α tiene el mismo valor en todo el cuerpo rígido,

$$\tau_t = \int d\tau = \int \alpha r^2 dm = \alpha \int r^2 dm$$

Pero la integral es el momento de inercia I del cuerpo rígido alrededor del eje de rotación que pasa por O, entonces,

$$\boxed{\tau_t = I\alpha} \qquad (8.2)$$

Observar que aunque la deducción es compleja, el resultado final es extremadamente simple, como todas las ecuaciones de la Física.

Ejemplo 8.1. *Una barra uniforme de longitud L y masa M, que gira libremente alrededor de una bisagra sin fricción, se suelta desde el reposo en su posición horizontal, como se muestra en la figura 8.3. Calcular la aceleración angular de la barra y su aceleración lineal inicial de su extremo.*

Solución. Como el torque de la fuerza en la bisagra es cero, se puede calcular el torque en torno a la bisagra producido por la otra fuerza externa que actúa sobre la barra, que es su peso, suponiendo que la barra es homogénea y que el peso actúa en su centro geométrico. Entonces:

$$\tau = rP = \frac{LMg}{2}$$

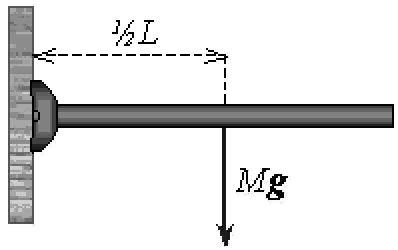

Figura 8.3 Ejemplo 8.1

Como $\tau = I\alpha$, y el momento de inercia de la barra (que se obtiene de la tabla anterior) es $I = (1/3)\, ML^2$, se tiene:

$$I\alpha = \frac{LMg}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\frac{LMg}{2}}{\frac{ML^2}{3}}$$

$$\alpha = \frac{3g}{2L}$$

Para calcular la aceleración lineal del extremo de la barra, usamos la ecuación $a_t = r\alpha$, con $r = L$, reemplazando α:

$$a_t = L\alpha = \frac{3}{2}g$$

Ejemplo 8.2. *Una rueda de radio R, masa M y momento de inercia I, puede girar en torno a un eje horizontal sin roce (figura 8.4). Una cuerda ideal se enrolla alrededor de la rueda y sostiene un bloque de masa m. Cuando se suelta en bloque, la rueda comienza a girar en torno a su eje. Calcular la ace-*

leración lineal del bloque, la tensión de la cuerda y la aceleración angular de la rueda.

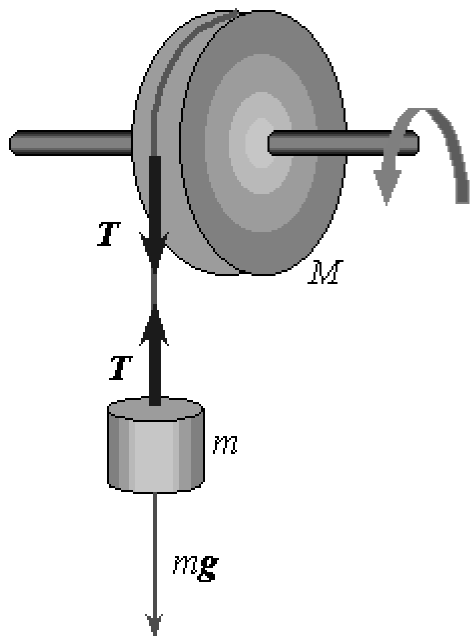

Figura 8.4. Ejemplo 8.2

Solución: el peso de la rueda y la fuerza del eje de rotación no producen torque en torno al eje, por lo que el torque que actúa sobre la rueda en torno a su eje es producido por la tensión de la cuerda, su valor es $\tau = RT$. Como $\tau = I\alpha$, igualando se obtiene

$$I\alpha = RT \Rightarrow T = \frac{I\alpha}{R}$$

Ahora se aplica la segunda ley de Newton al bloque que cae, del DCL se tiene:

$$T - mg = -ma \Rightarrow T = mg - ma$$

Igualando las tensiones y considerando que $a = R\alpha \Rightarrow \alpha = a/R$, se obtiene

$$mg - ma = \frac{I\alpha}{R} = \frac{Ia}{R^2} \Rightarrow \frac{Ia}{R^2} + ma = mg \Rightarrow a\left(\frac{I}{mR^2} + 1\right) = g$$

$$a = \frac{g}{1 + I/mR^2}$$

Con este valor de a se calculan T y α, estos cálculos dan:

$$T = \frac{mg}{1 + mR^2/I}$$

$$\alpha = \frac{g}{R + I/mR}$$

8.3 TRABAJO, ENERGÍA Y POTENCIA EN EL MOVIMIENTO DE ROTACIÓN.

Para un cuerpo rígido que gira en torno a un eje fijo que pasa por O, como se ve en la figura 8.5. Si una fuerza externa $\boldsymbol{F}$ se aplica en un punto Q del cuerpo rígido a un distancia $\boldsymbol{r}$ de O, el trabajo realizado por $\boldsymbol{F}$ cuando el objeto gira una distancia infinitesimal $ds = rd\theta$ es:

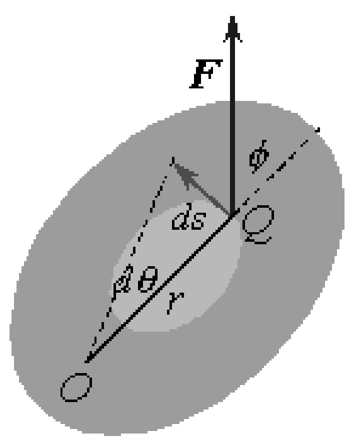

Figura 8.5

$$dW = \mathbf{F \cdot ds} = (F\, sen\phi)\, rd\theta = F_t\, rd\theta$$

donde $F\, sen\phi = F_t$ es la componente tangencial de $\boldsymbol{F}$ o la componente de la fuerza a lo largo del desplazamiento *ds*, que es la componente que realiza trabajo. *La componente radial de F no realiza trabajo porque es perpendicular al desplazamiento.* Como el torque es: $\tau = r\, F\, sen\phi$, el trabajo se escribe:

$$dW = \tau d\theta,$$

integrando, se obtiene:

$$W = \int_i^f \tau d\theta$$

El trabajo de rotación es análogo el de traslación $W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r}$

La potencia con la cual se realiza el trabajo es

$$\frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt}$$

Como $dW/dt = P$ y $d\theta/dt = \omega$, la potencia instantánea es:

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau\omega\,,$$

expresión análoga el cono del movimiento lineal $P = Fv$.

Tomando ahora la expresión del torque rotacional $\tau = I\alpha$, aplicando la regla de la cadena:

$$\tau = I\alpha = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = I\omega\frac{d\omega}{d\theta}$$

Al reagrupar esta expresión y considerando que $\tau\, d\theta = dW \Rightarrow dW = I\omega d\omega$. Integrando se encuentra el trabajo total realizado durante la rotación:

$$W = \int_i^f \tau d\theta = \int_i^f I\omega d\omega = \frac{1}{2} I\omega_f^2 - \frac{1}{2} I\omega_i^2$$

Por lo tanto, el trabajo neto realizado por las fuerzas externas al hacer girar un cuerpo rígido es igual a la variación de energía cinética rotacional del objeto.

Ejemplo 8.3. *Para la barra giratoria del ejemplo 8.1, calcular su rapidez angular, la rapidez lineal de su centro de masa y del punto mas bajo de la barra cuando está vertical.*

Solución: Usando el principio de conservación de la energía, considerando que la energía potencial se calcula respecto al centro de masa y la energía cinética es de rotación:

$$E_i = E_f \Rightarrow E_{ci} + E_{gi} = E_{cf} + E_{gf}$$

Cuando la barra esta inicialmente horizontal no tiene E_{ci} y cuando esta vertical tiene solo E_{cf}, entonces:

$$\frac{1}{2} MgL = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} ML^2\right)\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

Para calcular la rapidez del centro de masa, se usa:

$$v_{cm} = r\omega = \frac{L}{2}\omega$$

$$v_{cm} = \frac{1}{2}\sqrt{3gL}$$

En el punto mas bajo la rapidez es $v = 2v_{cm} = \sqrt{3Lg}$.

Ejemplo 8.4. *Para el sistema de la figura 8.6, las masas tienen momento de inercia I en torno a su eje de rotación, la cuerda no resbala en la polea y el sistema se suelta desde el reposo. Calcular la rapidez lineal de las masas después que una ha descendido H y la rapidez angular de la polea.*

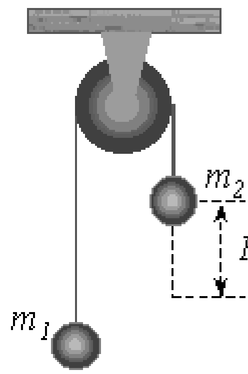

Figura 8.6 Ejemplo 8.4

Solución: como no hay roce en la polea, se conserva la energía, que aplicada a cada masa m_1 y m_2, suponiendo que m_2 se encuentra inicialmente en la parte superior del sistema, es:

$$E_i = E_f \Rightarrow E_{ci1} + E_{ci2} + E_{gi1} + E_{gi2} = E_{cf1} + E_{cf2} + E_{gf1} + E_{gf2}$$

$$0 + m_2 gH = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + m_1gH$$

$$\frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)v^2 = (m_2 - m_1)gH$$

donde se ha usado la relación $v = R\omega$, despejando v se obtiene:

$$v = \sqrt{\frac{2(m_2 - m_1)gH}{m_1 + m_2 + I/R^2}}$$

8.4 MOVIMIENTO DE RODADURA DE UN CUERPO RÍGIDO.

Se considerará ahora el caso más general de movimiento de rotación, donde el eje de rotación no está fijo en el espacio, sino que en movimiento, este se llama movimiento de rodadura. El movimiento general de un cuerpo rígido es muy complejo, pero se puede usar un modelo simplificado limitando el análisis a un cuerpo rígido homogéneo con gran simetría, como un cilindro, una esfera o un aro, y suponiendo que el cuerpo tiene movimiento de rodadura en un plano. Considerar un cilindro uniforme de radio R que rueda sin deslizar en una trayectoria recta, como en la figura 8.7. El centro de masa se mueve en línea recta, pero un punto en el borde se mueve en una trayectoria más compleja, llamada cicloide. A medida que el cilindro gira un ángulo θ, su centro de masa se mueve una distancia $s = R\theta$, por lo tanto, las magnitudes de la velocidad y la aceleración del centro de masa para el movimiento de rodadura puro son:

$$v_{cm} = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

$$a_{cm} = \frac{dv_{cm}}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha$$

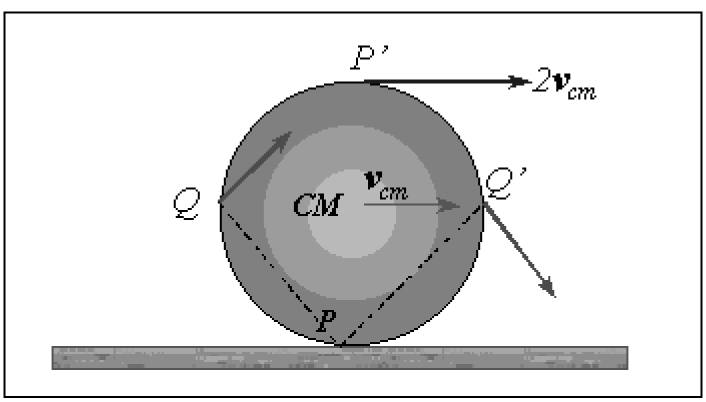

Figura 8.7

Las velocidades lineales en los diferentes puntos P, Q, P' y Q' sobre el cilindro en rotación se ven en los vectores de la figura 8.7. La velocidad lineal de cualquier punto está en dirección perpendicular a la línea de ese punto al punto de contacto P, que en cualquier instante está en reposo, porque no hay deslizamiento.

Un punto general del cilindro, como Q tiene una velocidad con componente horizontal y vertical. Pero los puntos P, CM y P' tienen velocidades respectivamente cero en P porque $R = 0$, $v_{cm} = R\omega$ en el CM y $(2R)\omega = 2(R\omega) = 2v_{cm}$ en P', ya que todos los puntos del cilindro tienen la misma ω.

La energía cinética total del cilindro rodante es

$$E_c = \frac{1}{2} I_P \omega^2$$

donde I_P es el momento de inercia alrededor de un eje que pasa por P. Se puede demostrar que $I_p = I_{cm} + MR^2$ y al reemplazar en E_c se tiene:

$$E_c = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} MR^2 \omega^2 ,$$

pero $v_{cm} = R\omega$, entonces:

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2} \qquad (8.3)$$

Esto significa que la energía cinética total de un objeto en movimiento de rodadura está dada por la energía cinética de rotación en torno al centro de masa y la energía cinética de traslación del centro de masa del objeto. El movimiento de rodadura sólo es posible si existe roce entre el cuerpo rígido que se mueve y la superficie, ya que la fuerza de roce produce el torque necesario para hacer rodar el cuerpo rígido en torno al centro de masa. A pesar del roce no hay pérdida de energía mecánica, porque el punto de contacto está en reposo respecto a la superficie en cualquier instante.

Ejemplo 8.5*: Usar la conservación de la energía para describir el movimiento de rodadura de un cuerpo rígido de masa M que rueda por un plano inclinado* α *y rugoso, que se muestra en la figura 8.8.*

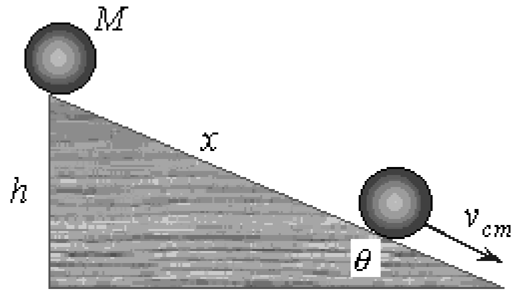

Figura 8.8. Ejemplo 8.5

Solución: Se supone que el cuerpo rígido parte del reposo desde una altura *h* y que rueda por el plano sin resbalar. La conservación de energía da:

$$E = cte \Rightarrow E_c + E_g = cte \Rightarrow E_{ci} + E_{gi} = E_{cf} + E_{gf}$$

Pero $E_{ci} = 0$ *y* $E_{gf} = 0$,entonces

$$Mgh = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2$$

Como $v_{cm} = R\omega \Rightarrow \omega = v_{cm}/R$, se reemplaza en la ecuación anterior

$$\frac{1}{2} I_{cm} \frac{v_{cm}^2}{R^2} + \frac{1}{2} M v_{cm}^2 = Mgh$$

Despejando v_{cm} se obtiene:

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + I_{cm}/MR^2}}$$

Por ejemplo, para una esfera sólida uniforme, de momento de inercia $I_{cm} = \frac{2}{5}MR^2$, se puede calcular su v_{cm} en el punto más bajo del plano y su aceleración lineal.

$$v_{cm}^2 = \frac{2gh}{1+\frac{(2/5)MR^2}{MR^2}} = \frac{2gh}{1+\frac{2}{5}} = \frac{10}{7}gh \;\Rightarrow$$

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$$

La aceleración lineal se puede calcular con la ecuación

$$v_{cm}^2 = v_{icm}^2 + 2a_{cm}x = 2a_{cm}x \Rightarrow a_{cm} = \frac{v_{cm}^2}{2x}$$

De la geometría de la figura, se tiene: $h = x\, sen\alpha$, donde x es la longitud del plano, reemplazando en a_{cm}:

$$a_{cm} = \frac{\frac{10}{7}gxsen\alpha}{2x} = \frac{5}{7}gsen\alpha$$

8.5 MOMENTO ANGULAR DE UNA PARTÍCULA.

Una partícula de masa m, ubicada en una posición $\vec{r}$ desde el origen O, que se mueve con velocidad $\vec{v}$, tiene momento lineal $\vec{p}$. Se define el momento angular $\vec{L}$ de una partícula respecto al origen, como el producto vectorial entre la posición $\vec{r}$ y el momento lineal $\vec{p}$, esto es:

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}} \qquad (8.4)$$

La unidad de medida de ***L*** en el SI es *kg m²/s*. La dirección de ***L*** es perpendicular el plano formado por ***r*** y ***p*** y su sentido dado por la regla de la mano derecha. En la figura 8.9 se muestra los vectores ***r*** y ***p*** que están en el plano *xy*, por lo tanto ***L*** apunta en dirección del eje *z*. ***L*** es cero cuando ***r*** es paralela a ***p*** (α = 0 ó 180°), este es el caso cuando la partícula pasa por el origen. Si ***r*** es perpendicular a ***p***, α =90°, entonces $L=mvr$.

Como ***p*** = *m* ***v***, la magnitud de ***L*** si α es el ángulo entre ***r*** y ***p***, es:

$$L = mvrsen\alpha$$

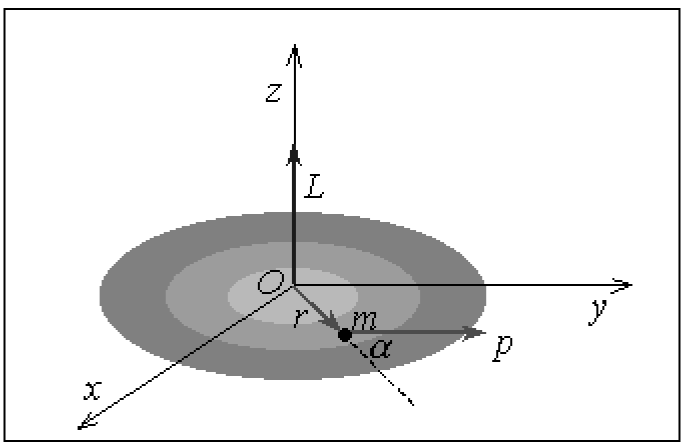

Figura 8.9

Si se calcula la derivada temporal del momento angular, se obtiene un resultado interesante, en efecto:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Como $d\vec{r}/dt = \vec{v}$, el primer término es cero ya que es el producto vectorial de vectores paralelos; en el segundo término se usa la segunda ley de Newton en la forma $\vec{F} = d\vec{p}/dt$, entonces queda:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

que es el análogo rotacional de la segunda Ley de Newton. Esta ecuación indica que el torque sobre una partícula es igual a variación temporal del momento angular de la partícula.

Para un sistema de partículas, el momento angular total es la suma vectorial de los momentos angulares de las partículas individuales, esto es:

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \cdots\cdots + \vec{L}_n = \Sigma \vec{L}_i$$

Si el torque neto, $\Sigma\vec{\tau}$, es distinto de cero, entonces puede cambiar el momento angular total del sistema de partículas ya que se tiene:

$$\sum \vec{\tau} = \sum \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\sum \vec{L}_i = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

que significa que la variación temporal del momento angular total del sistema de partículas en torno a algún origen es igual al torque neto que actúa sobre el sistema.

8.6 ROTACIÓN DE UN CUERPO RÍGIDO EN TORNO A UN EJE FIJO.

Considerar un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje que tiene una dirección fija y supongamos que esta dirección coincide con el eje *z*, como se ve en la figura 8.10. Cada partícula del cuerpo rígido gira en el plano *xy* en torno al eje z con rapidez angular ω. Entonces la magnitud del momento angular de la partícula en torno al origen O es $L_i = m_i v_i r_i$, ya que $\boldsymbol{v}$ es perpendicular a $\boldsymbol{r}$. Pero como $v_i = r_i\omega$, la magnitud del momento angular para una partícula i se puede escribir como:

$$L_i = m_i r_i^2 \omega$$

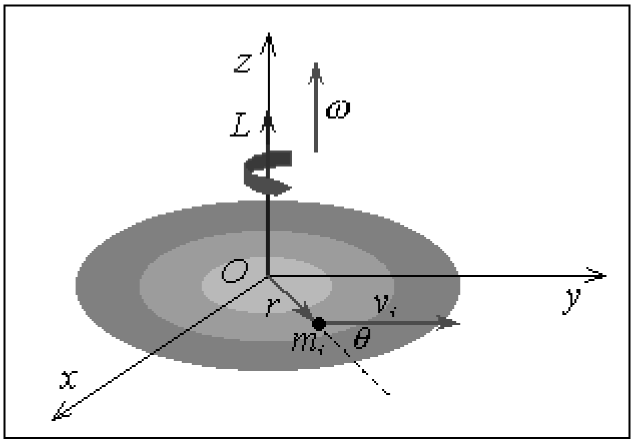

Figura 8.10

El vector $\boldsymbol{L}$ está en dirección del eje z igual que el vector $\boldsymbol{\omega}$, por lo que se considera como la componente z del momento angular de la partícula i.

Para todo el cuerpo rígido, la componente z del momento angular total es la suma de $\boldsymbol{L}_i$ de cada partícula del cuerpo rígido:

$$L_z = \sum m_i r_i^2 \omega \Rightarrow L_z = I\omega$$

donde I es el momento de inercia del cuerpo rígido alrededor del eje z. Notar que $L = I\omega$ es el análogo rotacional del momento lineal $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$. Se puede derivar L_z respecto al tiempo considerando que I es constante:

$$\frac{dL_z}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha$$

donde α es la aceleración angular del cuerpo rígido. Pero dL_z/dt es el torque neto, entonces se puede escribir

$$\Sigma\tau = I\alpha$$

que dice que el torque neto sobre un cuerpo que gira en torno a un eje fijo es igual al momento de inercia por la aceleración angular, ecuación que ya había sido deducida anteriormente.

***Ejemplo 8.6**: Una barra rígida de masa M y largo L gira en un plano vertical alrededor de un eje sin fricción que pasa por su centro. En los extremos de la barra se unen dos cuerpos de masas* m_1 y m_2*, como se ve en la figura 8.11. Calcular la magnitud del momento angular del sistema cuando su rapidez angular es* ω *y la aceleración angular cuando la barra forma un ángulo* ϕ *con la horizontal.*

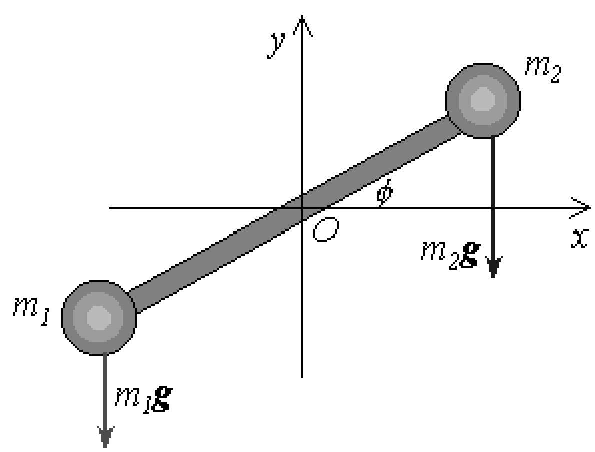

Figura 8.11 Ejemplo 8.6

Solución: El momento de inercia por el eje de rotación del sistema es igual a la suma de los momentos de inercia de los tres componentes del sistema: m_1, barra y m_2,, con los valores de la tabla 8.1, se obtiene:

$$I = \frac{1}{12}ML^2 + m_1\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{L^2}{4}\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{3}\right)$$

Como el sistema gira con rapidez angular ω, la magnitud del momento angular es:

$$L = I\omega = \frac{L^2}{4}\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{3}\right)\omega$$

Para calcular la aceleración angular usamos la relación $\tau_t = I\alpha \Rightarrow \alpha = \tau_t/I$, al calcular el torque total en torno el eje de rotación, se obtiene:

$$\tau_t = m_1 g \frac{L}{2}\cos\phi - m_2 g \frac{L}{2}\cos\phi = \frac{1}{2}(m_1 - m_2)gL\cos\phi$$

Reemplazando en α los valores de I y de τ_t, se obtiene la aceleración angular:

$$\alpha = \frac{\tau_t}{I} = \frac{2(m_1 - m_2)g\cos\phi}{L(m_1 + m_2 + M/3)}$$

Ejemplo 8.7. *En la figura 8.12 las masas m_1 y m_2 se conectan por una cuerda ideal que pasa por una polea de radio R y momento de inercia I alrededor de su eje. La mesa no tiene roce, calcular la aceleración del sistema.*

Solución: primero se calcula en momento angular del sistema de las dos masas mas la polea:

$$L = m_1 vR + m_2 vR + I\frac{v}{R}$$

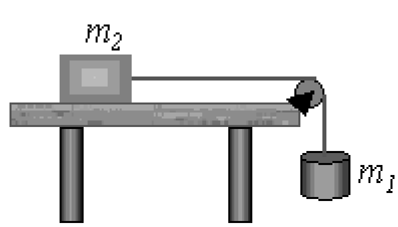

Figura 8.12 Ejemplo 8.7

Luego se calcula el torque externo sobre el sistema, la única fuerza externa que contribuye al torque total es $m_1\mathbf{g}$, el valor de este torque es: $\tau = m_1gR$. Entonces se tiene:

$$\tau = \frac{dL}{dt} \Rightarrow m_1 gR = \frac{d}{dt}\left[(m_1 + m_2)vR + I\frac{v}{R}\right]$$

$$m_1 gR = (m_1 + m_2)R\frac{dv}{dt} + \frac{I}{R}\frac{dv}{dt}$$

$$a = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2 + I/R^2}$$

8.7 CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR.

De la ecuación:

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

si el torque neto que actúa sobre el sistema es cero, entonces:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = cte} \qquad (8.5)$$

Esta ecuación dice que el momento angular total de un sistema es constante si el torque neto que actúa sobre el sistema es cero: es el ***principio de conservación del momento angular***.

Si un cuerpo rígido experimenta una redistribución de su masa, entonces su momento de inercia cambia, en este caso la conservación del momento angular se escribe en la forma:

$$L_i = L_f$$

Si el cuerpo gira entorno a un eje fijo, entonces $L = I\omega$, y se puede escribir

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f$$

Esta es la tercera Ley de conservación que hemos deducido. Entonces ahora podemos afirmar que para un sistema aislado, la energía, el momento lineal y el momento angular permanecen constantes. Son los principios de conservación en Física.

Ejemplo 8.8. *Un proyectil de masa m y velocidad v_o se dispara contra un cilindro sólido de masa M y radio R (figura 8.13). El cilindro está inicialmente en reposo montado sobre un eje horizontal fijo que pasa por su centro de masa. El proyectil se mueve perpendicular al eje y se encuentra a una distancia D < R sobre el eje. Calcular la rapidez angular del sistema después que el proyectil golpea al cilindro y queda adherido a su superficie.*

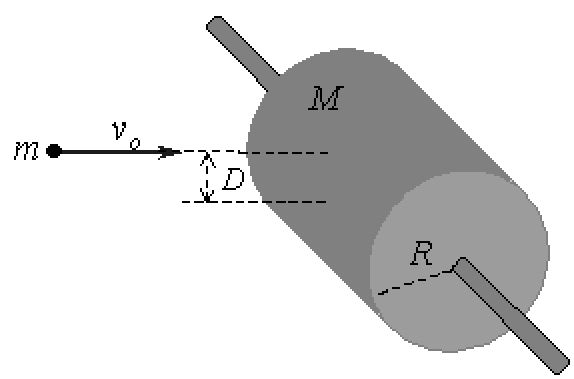

Figura 8.13 Ejemplo 8.8

Solución: el momento angular del sistema se conserva, entonces $L_i = L_f$:

$$mv_o D = I\omega = \left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega \Rightarrow$$

$$\omega = \frac{mv_o D}{\frac{1}{2}MR^2 + mR^2}$$

Ejemplo 8.9*. Un disco de masa M y radio R gira en un plano horizontal en torno a un eje vertical sin roce. Un gato de masa m camina desde el borde del disco hacia el centro. Si la rapidez angular del sistema es ω_o cuando el gato está en el borde del disco, calcular: a) la rapidez angular cuando el gato ha llegado a un punto a R/4 del centro, b) la energía rotacional inicial y final del sistema.*

Solución. Llamando I_d al momento de inercia del disco e I_g al momento de inercia del gato, el momento de inercia total inicial y final del sistema es:

$$I_i = I_d + I_g = ½\, MR^2 + m\, R^2$$

$$I_f = ½\, MR^2 + m\, r^2 = ½\, MR^2 + m\, (R/4)^2$$

a) Como no hay torques externos sobre el sistema en torno al eje de rotación, se puede aplicar la conservación del momento angular

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f$$

$$(½\, MR^2 + m\, R^2)\omega_o = (½\, MR^2 + m\, (R/4)^2)\omega_f$$

$$\omega_f = \frac{MR^2/2 + mR^2}{MR^2/2 + mR^2/16}\omega_o = \frac{M/2 + m}{M/2 + m/16}\omega_o$$

b) $$E_{Ci} = \frac{1}{2} I_i \omega_o^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega_o^2$$

$$E_{Cf} = \frac{1}{2} I_f \omega_f^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2 + m\left(\frac{R}{4}\right)^2\right)\omega_f^2 \Rightarrow$$

$$E_{Cf} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2 + m\left(\frac{R}{4}\right)^2\right)\left(\frac{M/2 + m}{M/2 + m/16}\right)\omega_o^2$$

La energía rotacional aumenta.

PROBLEMAS.

8.1. El centro de masa de una pelota de radio R, se mueve a una rapidez v. La pelota gira en torno a un eje que pasa por su centro de masa con una rapidez angular ω. Calcule la razón entre la energía rotacional y la energía cinética de traslación. Considere la pelota una esfera uniforme.

8.2. Un volante en la forma de un cilindro sólido de radio R = 0.6 m y masa M = 15 kg puede llevarse hasta una velocidad angular de 12 rad/s en 0.6 s por medio de un motor que ejerce un torque constante. Después de que el motor se apaga, el volante efectúa 20 rev antes de detenerse por causa de la fricción (supuesta constante). ¿Qué porcentaje de la potencia generada por el motor se emplea para vencer la fricción? R: 2.8%.

8.3. Un bloque de masa m_1 y uno de masa m_2 se conectan por medio de una cuerda sin masa que pasa por una polea en forma de disco de radio R, momento de inercia I y masa M. Asimismo, se deja que los bloques se muevan sobre una superficie en forma de cuña con un ángulo θ como muestra la figura 8.14. El coeficiente de fricción cinético es μ para ambos bloques. Determine a) la aceleración de los dos bloques y b) la tensión en cada cuerda. R: a) $(m_2 sen\theta - \mu)(m_1 + m_2 cos\theta)g/(m_1 + m_2 + M)$, b) $T_1 = \mu m_2 g + m_1 a$, $T_2 = T_1 + ½Ma$.

8.4. Una masa m_1 y una masa m_2 están suspendidas por una polea que tiene un radio R y una masa m_3 (figura 8.15). La cuerda tiene un masa despreciable y hace que la polea gire sin deslizar y sin fricción. Las masas empiezan a moverse desde el reposo cuando están separadas por una distancia D. Trate a la polea como un disco uniforme, y determine las velocidades de las dos masas cuando pasan una frente a la otra.

8.5. Un disco sólido uniforme de radio R y masa M puede girar libremente sobre un pivote sin fricción que pasa por un punto sobre su borde (figura 8.16). Si el disco se libera desde el reposo en la posición mostrada por el círculo. a) ¿Cuál es la rapidez de su centro de masa cuando el disco alcanza la posición indicada en el círculo punteado? b) ¿Cuál es la rapidez del punto más bajo sobre el disco en la posición de la circunferencia punteada? c) Repetir para un aro uniforme. R: a) $2(Rg/3)^{½}$, b) $4(Rg/3)^{½}$, c) $(Rg)^{½}$.

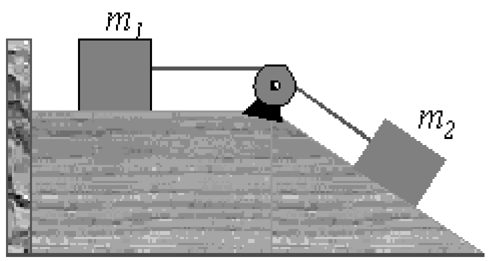

Figura 8.14

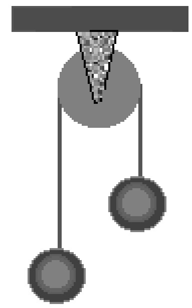

Figura 8.15

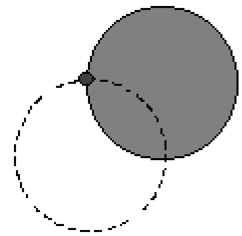

Figura 8.16

8.6. Un peso de 50 N se une al extremo libre de una cuerda ligera enrollada alrededor de una pelota de 0.25 m de radio y 3 kg de masa. La polea puede girar libremente en un plano vertical en torno al eje horizontal que pasa por su centro. El peso se libera 6 m sobre el piso. a) calcular la tensión de la cuerda, la aceleración de la masa y la velocidad con la cual el peso golpea el piso. b) Calcular la rapidez con el principio de la conservación de la energía. R: a) 11.4N, 7.6 m/s^2, 9.5 m/s, b) 9.5 m/s.

8.7. Una ligera cuerda de nylon de 4 m está enrollada en un carrete cilíndrico uniforme de 0.5 m de radio y 1 kg de masa. El carrete está montado sobre un eje sin fricción y se encuentra inicialmente en reposo. La cuerda se tira del carrete con una aceleración constante de 2.5 m/s^2. a) ¿Cuánto trabajo se ha efectuado sobre el carrete cuando éste alcanza una velocidad angular de 8 rad/s? b) Suponiendo que no hay la suficiente cuerda sobre el carrete, ¿Cuánto tarda éste en alcanzar esta velocidad angular? c) ¿Hay suficiente cuerda sobre el carrete? R: a) 4 J, 1.6 s, c) sí.

8.8. Una barra uniforme de longitud *L* y masa *M* gira alrededor de un eje horizontal sin fricción que pasa por uno de sus extremos. La barra se suelta desde el reposo en una posición vertical (figura 8.17). En el instante en que está horizontal, encuentre a) su rapidez angular, b) la magnitud de su aceleración angular, c) las componentes *x* e *y* de la aceleración de su centro de masa, y d) las componentes de la fuerza de reacción en el eje. R: a) $(3g/L)^{1/2}$, b) 3g/2L, c) $-(3/2\hat{\imath} + 3/4\hat{\jmath})g$, d) $(-3/2\hat{\imath} + 1/4\,\hat{\jmath})Mg$.

8.9. Los bloques mostrados en la figura 8.18 están unidos entre si por una polea de radio *R* y momento de inercia *I*. El bloque sobre la pendiente sin fricción se mueve hacia arriba con una aceleración constante de magnitud *a*. a) Determine las tensiones en las dos partes de la cuerda, b) encuentre el momento de inercia de polea. R: a) $T_1 = m_1(a + gsen\theta)$, $T_2 = m_2(g-a)$, b) $m_2R^2g/a - m_1R^2 - m_2R^2 - m_1R^2(g/a)sen\theta$.

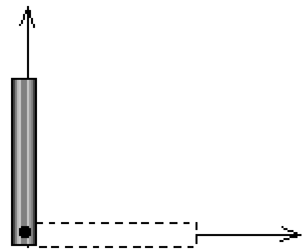

Figura 8.17

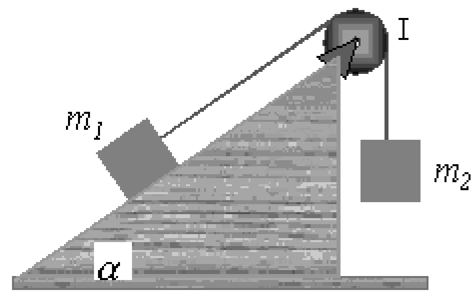

Figura 8.18

8.10. Un carrete cilíndrico hueco y uniforme tiene radio interior *R/2*, radio exterior *R* y masa *M* (figura 8.19). Está montado de manera que gira sobre un eje horizontal fijo. Una masa *m* se conecta al extremo de una cuerda enrollada alrededor del carrete. La masa *m* desciende a partir del reposo una distancia *y* durante un tiempo *t*. Demuestre que el torque debido a las fuerza de roce entre el carrete y el eje es:

$$\tau = R\left[m\left(g - \frac{2y}{t^2}\right) - \frac{5}{4}M\frac{y}{t^2}\right]$$

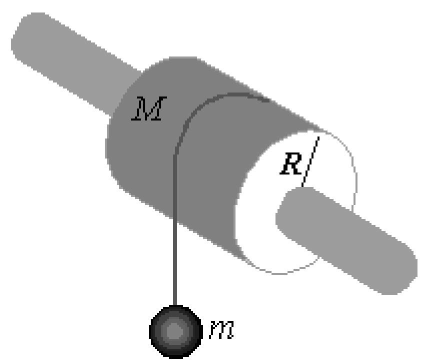

Figura 8.19

8.11. Un cilindro de 10 kg de masa rueda sin deslizar sobre una superficie horizontal. En el instante en que se su centro de masa tiene una rapidez de 10 m/s, determine: a) la energía cinética traslacional de su centro de masa, b) la energía rotacional de su centro de masa, y c) su energía total. R: a) 500 J, b) 250 J, c) 750 J.

8.12. Una esfera sólida tiene un radio de 0.2 m y una masa de 150 kg. ¿Cuánto trabajo se necesita para lograr que la esfera ruede con una rapidez angular de 50 rad/s sobre una superficie horizontal? (Suponga que la esfera parte del reposo y rueda sin deslizar).

8.13. Un disco sólido uniforme y un aro uniforme se colocan uno frente al otro en la parte superior de una pendiente de altura h. Si se sueltan ambos desde el reposo y ruedan sin deslizar, determine sus rapideces cuando alcanzan el pie de la pendiente ¿Qué objeto llega primero a la parte inferior?

8.14. Una bola de boliche tiene una masa M, radio R y un momento de inercia de $(2/5)MR^2$. Si rueda por la pista sin deslizar a una rapidez lineal v, ¿Cuál es su energía total en función de M y v? R: $0.7Mv^2$.

8.15. Un anillo de 2.4 kg de masa de radio interior de 6 cm y radio exterior de 8 cm sube rodando (sin deslizar) por un plano inclinado que forma un ángulo de $\theta = 37°$ con la horizontal. En el momento en que el anillo ha recorrido una distancia de 2 m al ascender por el plano su rapidez es de 2.8 m/s. El anillo continua ascendiendo por el plano cierta distancia adicional y después rueda hacia abajo. Suponiendo que el plano es lo suficientemente largo de manera que el anillo no ruede fuera en la parte superior, ¿qué tan arriba puede llegar?

8.16. Una barra rígida ligera de longitud D gira en el plano xy alrededor de un pivote que pasa por el centro de la barra. Dos partículas de masas m_1 y m_2 se conectan a sus extremos. Determine el momento angular del sistema alrededor del centro de la barra en el instante en que la rapidez de cada partícula es v. R: $½(m_1 + m_2)vD$.

8.17. Un péndulo cónico consta de masa M que se mueve en una trayectoria circular en un plano horizontal. Durante el movimiento la cuerda de longitud L mantiene un ángulo constante con la θ vertical. Muestre que la magnitud del momento angular de la masa respecto del punto de soporte es:

$$L = \sqrt{\frac{gM^2 L^3 sen^4\theta}{\cos\theta}}$$

8.18. Una partícula de masa m se dispara con una rapidez v_o formando un ángulo θ con la horizontal. Determine el momento angular de la partícula respecto del origen cuando ésta se encuentra en: a) el origen, b) el punto más alto de su trayectoria, c) justo antes de chocar con el suelo. R: a) 0, b) $-mv_o^3 sen^2\theta \cos\theta/2g$, c) $-2mv_o^3 sen^2\theta \cos\theta/g$.

8.19. Un disco sólido uniforme de masa M y radio R gira alrededor de un eje fijo perpendicular su cara. Si la rapidez angular es ω, calcular el momento angular del disco cuando el eje de rotación a) pasa por su centro de masa, y b) pasa por un punto a la mitad entre el centro y el borde.

8.20. Una partícula de 0.4 kg de masa se une a la marca de 100 cm de una regla de 0.1 kg de masa. La regla gira sobre una mesa horizontal sin fricción con una velocidad angular de 4 rad/s. Calcular el momento angular del sistema cuando la regla se articulan torno de un eje, a) perpendicular a la mesa y que pasa por la marca de 50 cm, b) perpendicular a la mesa y que pasa por la marca de 0 cm. R: a) 0.43 kgm^2/s, b) 1.7 kgm^2/s.

8.21. Una mujer de 60 kg que está parada en el borde de una mesa giratoria horizontal que tiene un momento de inercia de 500 kg·m^2 y un radio de 2 m. La mesa giratoria al principio está en reposo y tiene libertad de girar alrededor de un eje vertical sin fricción que pasa por su centro. La mujer empieza a caminar alrededor de la orilla en sentido horario (cuando se observa desde arriba del sistema) a una rapidez constante de 1.5 m/s en relación con la Tierra. a) ¿En qué dirección y con qué rapidez angular gira la mesa giratoria b) ¿Cuánto trabajo realiza la mujer para poner en movimiento la mesa giratoria? R: a) 0.36 rad/s, antihorario.

8.22. Una barra uniforme de masa M y longitud d gira en un plano horizontal en torno de un eje vertical fijo sin fricción que pasa por su centro. Dos pequeñas cuentas, cada una de masa m, se montan sobre la barra de manera tal que pueden deslizar sin fricción a lo largo de su longitud. Al principio las cuentas se fijan por medio de retenes ubicados en las posiciones x (donde $x < d/2$) a cada lado del centro, tiempo durante el cual el sistema gira una rapidez angular ω. Repentinamente, los retenes se quitan y las pequeñas cuentas se deslizan saliendo de la barra. Encuentre, a) la rapidez angular del sistema en el instante en que las cuentas alcanzan los extremos de la barra, y b) la rapidez angular de la barra después de que las cuentan han salido de ella.

8.23. Un bloque de madera de masa M que descansa sobre una superficie horizontal sin fricción está unido a una barra rígida de longitud L y masa despreciable. La barra gira alrededor de un pivote en el otro extremo. Una bala de masa m que se desplaza paralela a la superficie horizontal y normal a la barra con rapidez v golpea el bloque y queda incrustada en él. a) ¿Cuál es el momento angular del sistema bala-bloque? b) ¿Qué fracción de la energía cinética original se pierde en la colisión? R: a) mvl, b) $M/(M+m)$.

8.24. Una cuerda se enrolla alrededor de un disco uniforme de radio R y masa M. El disco se suelta desde el reposo con la cuerda vertical y su extremo superior amarrado a un soporte fijo. A medida que el disco desciende, demuestre que a) la tensión en la cuerda es un tercio del peso del disco. b) La magnitud de la aceleración del centro de masa es $2g/3$, y c) la rapidez del centro de masa es $(4gh/3)^{½}$. Verifique su respuesta a la pregunta c) utilizando métodos de energía.

8.25. Una pequeña esfera sólida de masa m y de radio r rueda sin deslizar a lo largo de la pista mostrada en la figura 8.20. Si parte del reposo en la parte superior de la pista a una altura h, donde h es grande comparada con r a) Cuál es el valor mínimo de h (en función de R) de modo que la esfera complete la trayectoria? b) ¿Cuáles son las componentes de fuerza de la esfera en el punto P si $h = 3R$?

8.26. Un proyectil de masa m se mueve a la derecha con rapidez v_o. El proyectil golpea y queda fijo en el extremo de una barra estacionaria de masa M y longitud D que está articulada alrededor de un eje sin fricción que pasa por su centro (figura 8.21). a) Encuentre la rapidez angular del sistema justo después de la colisión. b) Determine la pérdida fraccionaria de energía mecánica debida a la colisión.

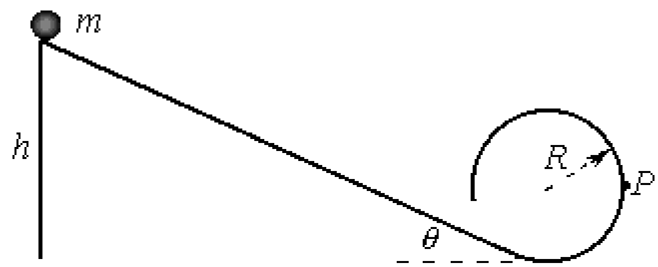

Figura 8.20

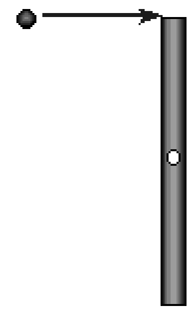

Figura 8.21

8.27. A una bola de boliche se le da una rapidez inicial v_o en una canal de manera tal que inicialmente se desliza sin rodar. El coeficiente de fricción entre la bola y la canal es μ. Demuestre que durante el tiempo en que ocurre el movimiento de rodamiento puro, a) la rapidez del centro de masa de la bola es $5v_o/7$, y b) la distancia que recorre es $12v_o^2/49\mu g$. (*Sugerencia:* Cuando ocurre el movimiento de rodamiento puro, $v_{cm} = R\omega$. Puesto que la fuerza de fricción proporciona la desaceleración, a partir de la segunda ley de Newton se concluye que $a_{cm} = \mu g$.)

8.28. El alambre de un carrete de masa M y radio R se desenrolla con una fuerza constante F (figura 8.22). Suponiendo que el carrete es un cilindro sólido uniforme que no desliza, muestre que, a) la aceleración del centro de masa es $4\mathbf{F}/3M$, y b) la fuerza de fricción es hacia la *derecha* y su magnitud es igual a $F/3$. c) Si el cilindro parte del reposo y rueda sin deslizar, ¿Cuál es la rapidez de su centro de masa después que ha rodado una distancia D? R: c) $(8FD/3M)^{½}$.

8.29. Suponga un disco sólido de radio R al cual se le da una rapidez angular ω_o alrededor de un eje que pasa por su centro y después se baja hasta una superficie horizontal y se suelta, como en la (figura 8.23). Suponga también que el coeficiente de fricción entre el disco y la superficie es μ. a) Calcular la rapidez angular del disco una vez que ocurre el rodamiento puro. b) Calcular la pérdida fraccionaria de energía cinética desde el momento en que el disco se suelta hasta que ocurre el rodamiento puro c) Muestre que el tiempo que tarda en ocurrir el movimiento de rodamiento puro es $R\omega_0/3\mu g$. d) Muestre que el tiempo que recorre el disco antes de que ocurra el rodamiento puro es $R^2\omega_0^2/18\mu g$.

8.30. La figura 8.24 muestra un carrete de alambre que descansa sobre una superficie horizontal. Cuando se tira, no se desliza en el punto de contacto *P*. El carrete se tira en las direcciones indicadas por medio de los vectores $\boldsymbol{F_1}$, $\boldsymbol{F_2}$, $\boldsymbol{F_3}$ y $\boldsymbol{F_4}$. Para cada fuerza determine la dirección en que rueda el carrete. Advierta que la línea de acción de $\boldsymbol{F_2}$ pasa por *P*.

8.31. El carrete mostrado en la figura 8.24 tiene un radio interior *r* y un radio externo *R*. El ángulo θ entre la fuerza aplicada y la horizontal puede variar. Demuestre que el ángulo crítico para el cual el carrete no rueda y permanece estacionario está dado por $\cos\theta = r/R$. (Sugerencia: En el ángulo crítico la línea de acción de la fuerza aplicada pasa por el punto de contacto.)

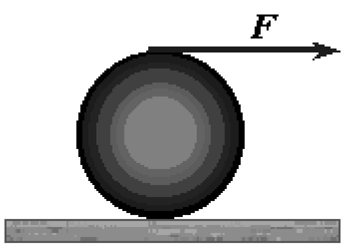

Figura 8.22

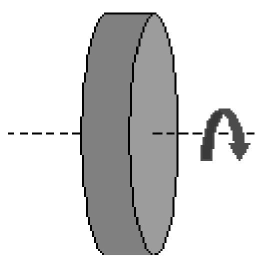

Figura 8.23

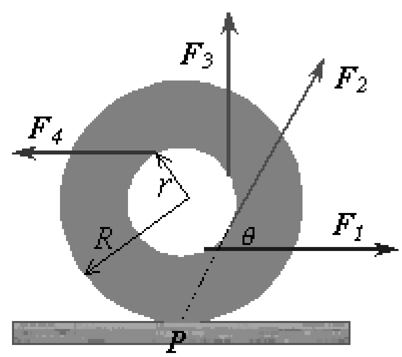

Figura 8.24