

Cidália Costa Fonte

Textos de apoio

de

Topografia

ENGENHARIA CIVIL

Departamento de Matemática
FCTUC
Universidade de Coimbra

Índice

Introdução	1
Capítulo 1 - Representação da Terra	3
1.1 A forma da Terra	3
1.1.1 O Geóide.....	3
1.1.2 O Elipsóide	4
1.2 Noção de escala	5
1.3 Representação plana da Terra.....	5
1.3.1 Coordenadas Geográficas	5
1.3.2 Coordenadas Rectangulares.....	6
1.3.3 Projecções Cartográficas	11
1.3.4 Data geodésicos e altimétricos.....	16
1.3.5 Os sistemas de projecção cartográfica.....	17
1.3.6 Cartas.....	21
1.3.7 Representação de pequenas áreas	23
Capítulo 2 - Levantamentos Topográficos	26
2.1 Infra-estruturas cartográficas	26
2.1.1 A rede Geodésica.....	26
2.1.2 Triangulação topográfica	29
2.2 Estudo do teodolito.....	30
2.2.1 Constituição do teodolito.....	31
2.2.2 Nivelas.....	32
2.2.3 A luneta	36
2.2.4 Condições para a medição de ângulos	37
2.3 Métodos para determinação de coordenadas do esqueleto de apoio topográfico	43
2.3.1 Irradiação	43
2.3.2 Triangulação	44
2.3.3 Intersecções	45
2.3.4 Poligonação	48
2.4 Medição de Distâncias.....	57
2.4.1 Processos de medição	57
2.4.2 Medição indirecta de distâncias.....	64
2.5 Nivelamento	73
2.5.1 Noções de altimetria	73
2.5.2 Métodos de nivelamento.....	74
Capítulo 3 - Outros Processos de Recolha de Informação Geográfica	87
3.1 Fotogrametria	87
3.1.1 Aquisição e processamento de fotografias aéreas.....	88
3.1.2 Escala de uma fotografia aérea	89
3.1.3 Estereoscopia.....	90
3.1.4 Paralaxe estereoscópica	91
3.1.5 Utilização e produtos obtidos a partir de fotografias aéreas	91
3.2 Sistema de Posicionamento Global (Global Positioning System - GPS).....	92
3.2.1 Princípio de posicionamento de pontos utilizando satélites artificiais.....	92
Capítulo 4 - Representação do relevo	96
4.1 Com pontos cotados	96
4.1.1 Casos em que se utilizam pontos cotados.....	96
4.2 Com curvas de nível	97
4.2.1 Formas fundamentais do relevo.....	98
4.3 Modelos digitais de terreno	100
4.3.1 Construção de um MDT	101
4.3.2 Exemplos de aplicação dos MDT.....	102
Capítulo 5 - Cartometria	104
5.1 Medição de áreas	104
5.1.1 Método analítico.....	104
5.1.2 Métodos geométricos.....	105
Bibliografia.....	108

Introdução

A Topografia, (do grego TOPOS (lugar) + GRAFIA (descrição)) ocupava-se tradicionalmente da representação plana de regiões pouco extensas da superfície terrestre. A representação de uma zona restrita simplifica os problemas decorrentes de representação causadas pela curvatura da superfície terrestre. Contudo a representação de zonas vizinhas e contínuas deve ser compatível, pelo menos no âmbito geográfico dum país, o que tem como consequência a necessidade de utilizar uma representação cartográfica que não pode ignorar o facto da superfície terrestre ser curva.

A representação da superfície terrestre pode ser planimétrica e altimétrica, sendo a planimetria relativa à representação bidimensional da posição dos pontos no plano da carta e a altimetria relativa à representação da distância vertical dos pontos a uma superfície de referência, o que permite fazer a representação do relevo.

A operação de recolha de informação necessária para a elaboração de uma planta ou carta topográfica de uma região é designada por levantamento topográfico. Os levantamentos topográficos podem ser executados utilizando:

- os métodos clássicos da Topografia, que se baseiam fundamentalmente na medição de ângulos e distâncias recorrendo a instrumentos tais como teodolitos, níveis e distanciômetros;
- métodos fotogramétricos, sendo a informação obtida a partir de fotografias aéreas métricas, ou imagens numéricas multiespectrais recolhidas por sensores instalados em satélites artificiais da Terra;
- o Sistema de Posicionamento Global, mais conhecido por GPS, que utiliza receptores dos sinais emitidos pelos satélites da constelação GPS, permitindo a determinação precisa das coordenadas dos locais onde as antenas dos receptores são colocadas.

Quaisquer dos métodos expostos requer, para além do trabalho de recolha de informação, denominado de trabalho de campo, a posterior execução de ajustamentos e cálculos necessários à obtenção das quantidades pretendidas, a que se chama usualmente trabalho de gabinete.

Outros trabalhos do domínio da Topografia incluem por exemplo a implantação e apoio à construção de obras e a auscultação do comportamento de grandes obras de Engenharia, tais como barragens e pontes.

- A implantação de obras consiste na transferência para o terreno duma obra projectada numa carta (planta). São utilizados métodos análogos aos dos levantamentos topográficos directos.
- A construção de obras de grande dimensão tem de ser acompanhada com operações topográficas – medição de distâncias e de ângulos.
- Em obras de grande responsabilidade e após a sua conclusão, torna-se necessário, como medida de segurança, estudar periodicamente o seu comportamento.

Capítulo 1 - Representação da Terra

1.1 A forma da Terra

A Terra é um planeta aproximadamente esférico, apresentando no entanto alguns desvios relativamente à forma esférica, bem como irregularidades desigualmente distribuídas na sua superfície.

1.1.1 O GEÓIDE

A forma da Terra é definida com base no campo gravítico terrestre, campo este fundamentalmente resultante da força de atracção newtoniana e da força centrífuga devida ao movimento de rotação da Terra. A sua superfície, abstraindo das ondulações do terreno, pode ser definida pela superfície do nível médio das águas do mar, suposta prolongada debaixo dos continentes. Esta superfície de nível, chamada **GEÓIDE**, é uma superfície mal conhecida, não definida matematicamente, cujo estudo é do âmbito da Geodesia. No entanto sabe-se que a sua forma é bastante próxima da superfície de um elipsóide de revolução achatado, diferindo dela devido à existência de ondulações desigualmente distribuídas, provocadas por uma desigual repartição das massas na crosta terrestre.

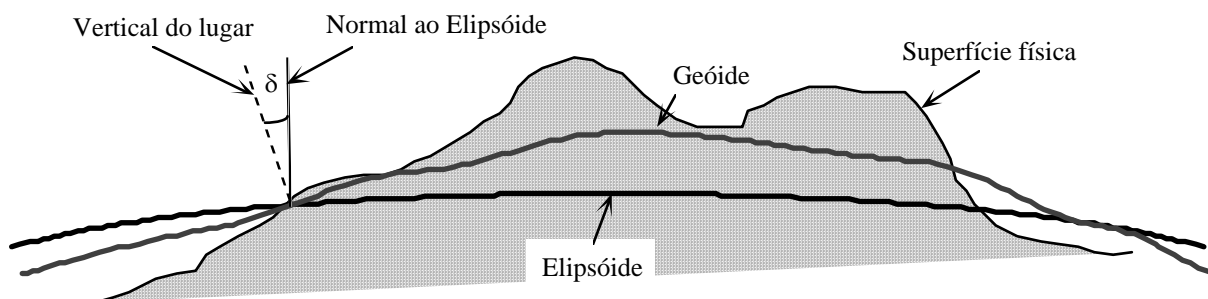


Figura 1 - Representação do elipsóide e do geóide numa dada região, onde o ângulo δ representa o desvio da vertical.

Aquelas ondulações são pouco significativas, quando comparadas com as dimensões do geóide, não ultrapassando geralmente os 30 m o afastamento vertical entre o geóide e o elipsóide que dele mais se aproxima. Ao ângulo formado pela vertical do lugar (normal ao geóide) e pela normal ao elipsóide (normal) chama-se **desvio da vertical** (Figura 1), este ângulo mede a inclinação do geóide relativamente ao elipsóide e o seu valor não ultrapassa normalmente os 10 segundos centesimais. A vertical do lugar, por ser normal às superfícies de nível do geóide, dá a direcção do campo gravítico terrestre e é muito importante em Topografia pois é essa direcção que orienta os instrumentos de medida.

1.1.2 O ELIPSÓIDE

Dada a complexidade do geóide é usual utilizar como superfície de referência um elipsóide de revolução.

Um elipsóide de revolução é o sólido gerado pela rotação de uma semi-elipse em torno de um dos seus eixos. Para o caso em estudo a rotação é feita em torno de eixo polar N-S, sendo a e b respectivamente o semi-eixo equatorial e o semi-eixo polar (Figura 2).

Vários têm sido os geodetas que, em diferentes partes do globo, se têm dedicado à determinação do comprimento dos semi-eixos do elipsóide que melhor se adapta ao Geóide. Estas determinações permitiram concluir que para diferentes regiões do globo se obtêm elipsóides diferentes. Por este motivo a escolha do elipsóide tem de ter em consideração a região que se pretende representar.

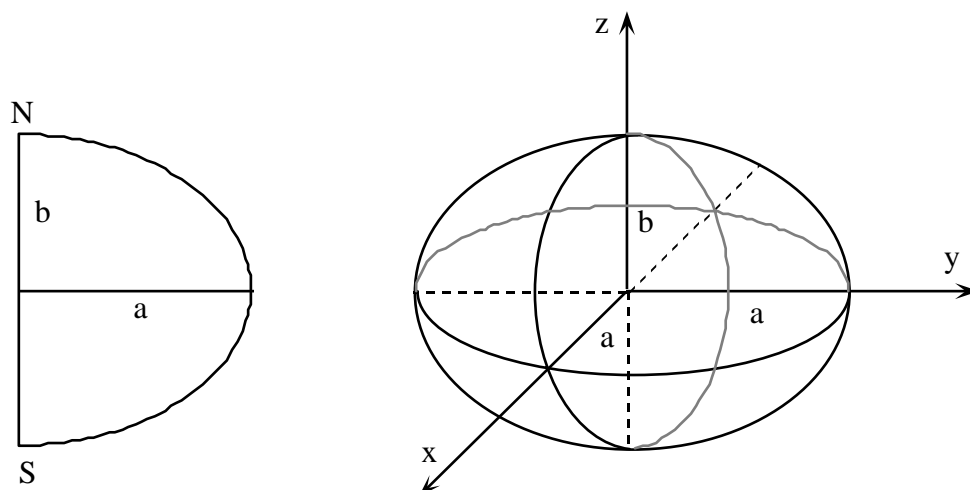


Figura 2 - Elipsóide de revolução com semi- eixo maior a e semi-eixo menor b .

Assim temos, entre outros, os elipsóides de Bessel, Clarke, Fisher, Hayford e o WGS-84 com as seguintes características:

ELIPSÓIDE	SEMI-EIXO MAIOR (a)	SEMI-EIXO MENOR (b)	ACHATAMENTO = $\frac{a-b}{a}$
Bessel (1841)	6377397 m	6356079 m	1/299
Clarke (1866)	6378301 m	6356584 m	1/294
Hayford (1909)	6378388 m	6356912 m	1/297
Fischer (1960)	6378155 m	6356773 m	1/298
WGS - 84	6378137 m	6356752 m	1/298

Em Portugal foi inicialmente utilizado o elipsóide de Bessel, tendo-se mais recentemente optado pelo de Hayford. O elipsóide de Clarke é actualmente adoptado em França e nos Estados Unidos, tendo sido o de Fischer adoptado pela NASA (National Aeronautics and Space Administration). O elipsóide WGS-84 é adoptado como elipsóide de referência para as medições feitas com GPS (Global Positioning System).

Como se pode ver no quadro acima, o achatamento do elipsóide é muito pequeno, aproximando-se a forma da Terra de uma esfera. Por isso, nos trabalhos em que não se exige grande precisão, o elipsóide é substituído por uma esfera de raio igual à média dos semi-eixos.

1.2 Noção de escala

Para efectuar a representação do terreno de forma a manter a grandeza e posição relativa dos objectos, considera-se uma certa razão constante entre o comprimento de uma linha medida na carta e a sua homóloga no terreno, razão a que se chama escala. Se se representar por ℓ o comprimento na carta e por L o mesmo comprimento no terreno, a escala será dada por $\frac{\ell}{L} = \frac{1}{E}$, sendo E normalmente um múltiplo de 10.

Diz-se que a escala $\frac{1}{E_1}$ é superior à escala $\frac{1}{E_2}$ se $E_1 < E_2$.

Nas cartas em escalas pequenas (com denominador maior ou igual a 25 000) utiliza-se, para comodidade de trabalho, uma escala gráfica, constituída por um segmento de recta dividido em segmentos mais pequenos, que indicam a correspondência entre os comprimentos medidos na carta e os comprimentos seus equivalentes no terreno (Figura 3).



Figura 3- Escala gráfica de uma carta.

1.3 Representação plana da Terra

1.3.1 COORDENADAS GEOGRÁFICAS

A *latitude* φ de um ponto é o ângulo formado pela normal ao elipsóide, ou ao geóide, nesse ponto e pelo plano do equador. Conta-se de -90° a $+90^\circ$ a partir do equador, positivamente no hemisfério Norte e negativamente no hemisfério Sul.

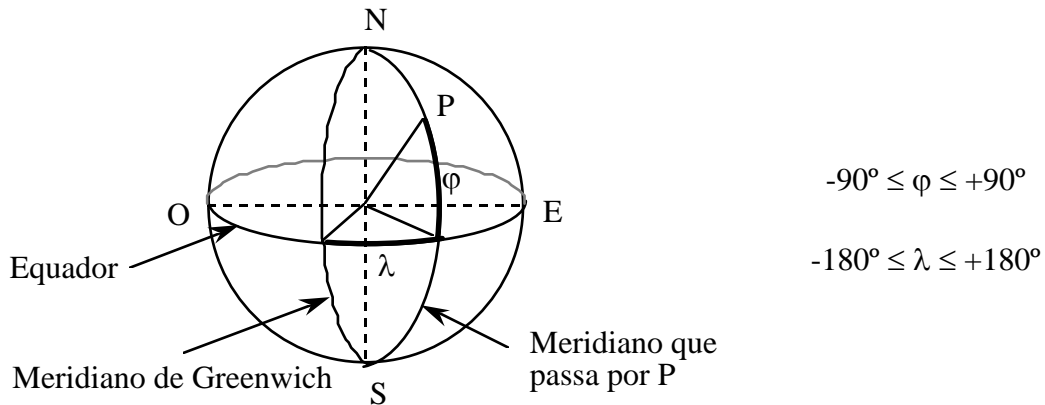


Figura 4 - Representação das coordenadas geográficas (latitude φ e longitude λ) de um ponto P.

A **longitude** λ é o ângulo diedro formado pelo plano do meridiano do lugar com o plano do meridiano de referência e conta-se de -180° a $+180^\circ$, positivamente para Este e negativamente para Oeste. Por acordo internacional adoptou-se para meridiano de referência o meridiano do Observatório de Greenwich em Inglaterra.

As coordenadas geográficas quando determinadas sobre o elipsóide são denominadas de Coordenadas Geodésicas e quando determinadas sobre o Geóide, em virtude de serem determinadas por via astronómica, são denominadas Coordenadas Astronómicas ou Naturais.

A posição de qualquer ponto da superfície da Terra fica perfeitamente definida através das suas coordenadas geográficas e a sua altitude.

1.3.2 COORDENADAS RECTANGULARES

Quando se pretende representar numa superfície plana zonas extensas da superfície terrestre, é necessário adoptar sistemas de representação plana do elipsóide, visto que este não é planificável. Isto é, por intermédio de uma projecção geométrica ou por fórmulas analíticas de transformação, estabelece-se uma correspondência biunívoca entre os pontos do elipsóide definidos pelas suas coordenadas geodésicas e os pontos do plano definidos por coordenadas rectangulares. O posicionamento relativo do elipsóide de referência e do plano cartográfico é definido por intermédio de um ponto, situado de preferência no centro da região a representar, designado por **ponto central**.

Nestas condições, os meridianos e os paralelos são representados por linhas rectas ou curvas, sendo sempre uma linha recta o meridiano que passa pelo ponto central da zona considerada. É a este meridiano central (designado por meridiana) e à recta que lhe é perpendicular e passa no ponto central da região, que se referem as

coordenadas rectangulares, designadas por M (distância à meridiana) e P (distância à perpendicular) (Figura 5).

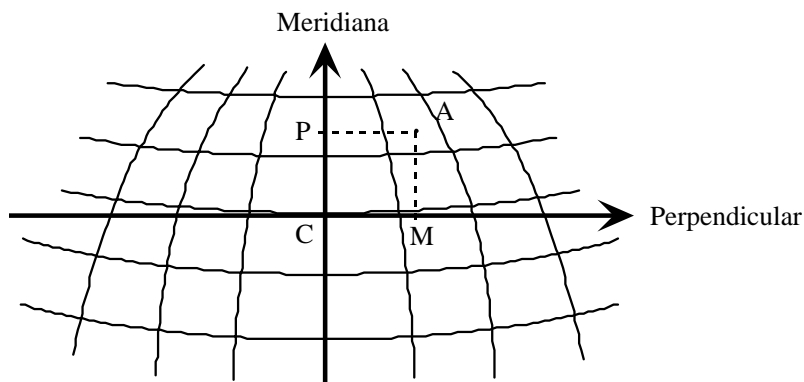


Figura 5 - Representação plana de uma região da superfície terrestre. O ponto C é o ponto central. M e P são as coordenadas rectangulares que definem a posição do ponto A, sendo M a distância à meridiana e P a distância à perpendicular.

Os sistemas de projecção, que permitem representar num plano a superfície de um elipsóide, produzem inevitáveis deformações desta, competindo à Cartografia o seu estudo e a escolha dos sistemas de projecção mais convenientes para cada caso.

Uma direcção qualquer AB pode ser posicionada relativamente ao sistema de coordenadas rectangulares através do ângulo que forma com a direcção da recta meridiana. Este ângulo chama-se azimute cartográfico ou rumo da direcção AB, representa-se por (AB) e, tendo vértice no ponto A, conta-se no sentido retrógrado (sentido dos ponteiros do relógio) a partir da direcção definida pela meridiana, que corresponde à direcção do Norte Cartográfico, até à direcção definida pelos pontos A e B (Figura 6). O rumo de uma direcção varia entre zero e 400 graus.

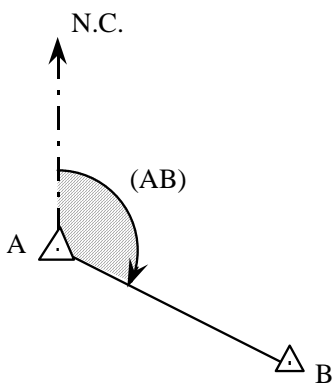


Figura 6 - Rumo da direcção definida pelos pontos A e B, que se representa por (AB).

NOTA:

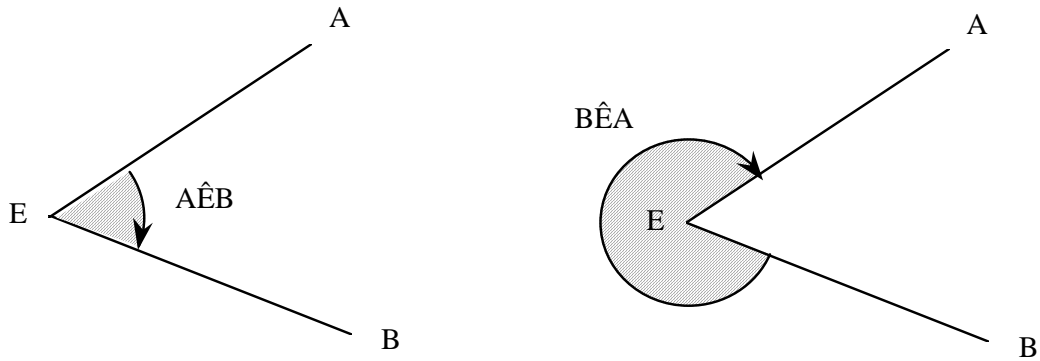


Figura 7 - Os ângulos $A\hat{E}B$ e $B\hat{E}A$, descritos no sentido retrógrado, são os ângulos complementares indicados na figura.

Os ângulos em Topografia são sempre descritos no sentido retrógrado. Deste modo, duas semi-rectas com a mesma origem, como as semi-rectas \overline{EA} e \overline{EB} representadas na Figura 7, definem dois ângulos distintos, o ângulo $A\hat{E}B$ e o ângulo $B\hat{E}A$. Note-se que $A\hat{E}B + B\hat{E}A = 400g$

1.3.2.1 Principais problemas com coordenadas rectangulares

1 - Transmissão de Rumos

a) Cálculo do Rumo Inverso

Suponhamos que se conhece o rumo da direcção $[AB]$ no sentido de A para B e se pretende conhecer o rumo da mesma direcção, mas agora no sentido de B para A. Ou seja, conhece-se (AB) e pretende-se conhecer (BA) .

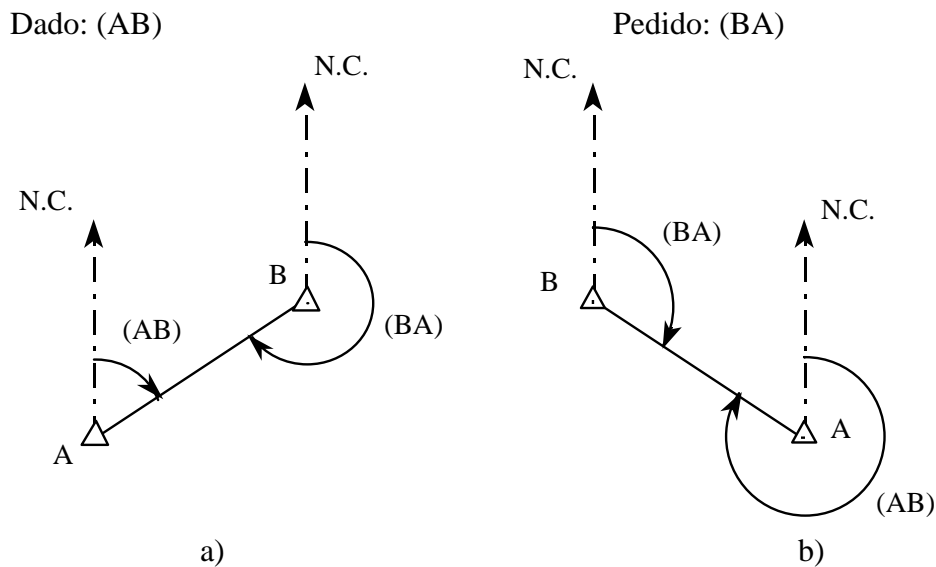


Figura 8 a) e b) - Rumo de uma direcção (AB) e rumo inverso (BA) .

Observando a Figura 8a) pode-se concluir que:

$$(BA) = (AB) + 200g$$

Se os pontos A e B estiverem na posição indicada na Figura 8b) tem-se que

$$(BA) = (AB) - 200g$$

Logo,

$$\boxed{(BA) = (AB) \pm 200g}$$

considerando-se "+" quando $(AB) < 200g$ e "-" quando $(AB) > 200g$.

b) Transporte de Rumos

Conhece-se o rumo da direcção $[AB]$ e o ângulo \widehat{BAC} ou \widehat{CAB} ($\widehat{BAC} = 400^\circ - \widehat{CAB}$) e pretende-se calcular o rumo da direcção AC. Ou seja:

Dados: (AB) ; \widehat{BAC} ou \widehat{CAB}

Pedido: (AC)

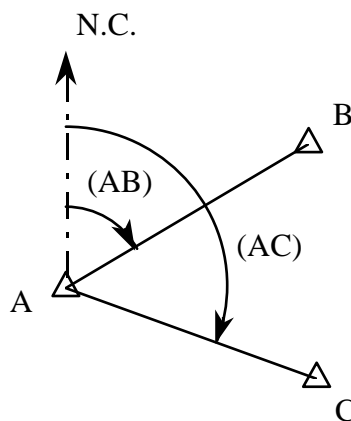


Figura 9 - Transporte de rumos.

Observando a Figura 9 pode-se concluir que:

$$\boxed{(AC) = (AB) + \widehat{BAC}}$$

ou, como $\widehat{BAC} = 400 - \widehat{CAB}$

$$\boxed{(AC) = (AB) + 400 - \widehat{CAB}}$$

2 - Transporte de Coordenadas

O problema de transporte de coordenadas permite determinar as coordenadas de um ponto B a partir das coordenadas de outro ponto A, conhecendo a distância \overline{AB} entre os dois pontos e o rumo da direcção que definem.

Dados: $M_A; P_A; \overline{AB}; (AB)$

Pedido: $M_B; P_B$

Observando a Figura 10 pode-se concluir que:

$$M_B - M_A = \overline{AB} \sin (AB) \quad \text{e} \quad P_B - P_A = \overline{AB} \cos (AB)$$

deste modo:

$$\boxed{M_B = M_A + \overline{AB} \sin (AB)} \quad \text{e} \quad \boxed{P_B = P_A + \overline{AB} \cos (AB)}$$

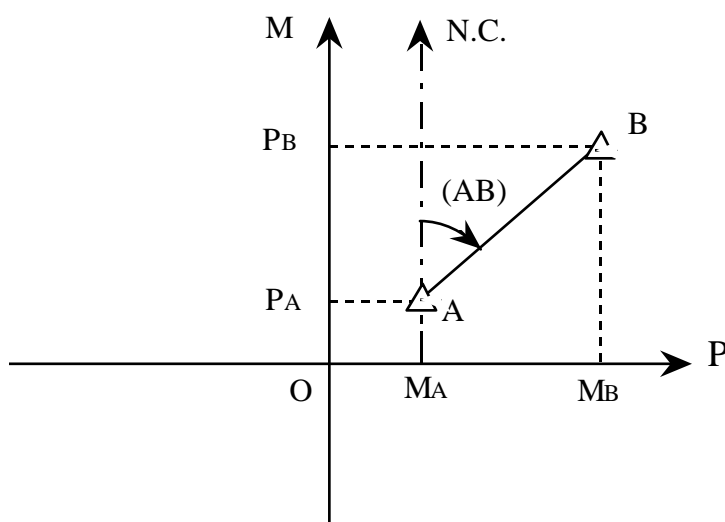


Figura 10 - Transporte de coordenadas.

3 - Cálculo de Rumos

Pretende-se neste ponto calcular o rumo de uma direcção definida por dois pontos, cujas coordenadas rectangulares são conhecidas.

Dados: $M_A; P_A; M_B; P_B$

Pedido: (AB)

Observando a Figura 10 pode-se concluir que:

$$\tan (AB) = \frac{M_B - M_A}{P_B - P_A}$$

Expressão que permite determinar o rumo (AB) sem ambiguidade uma vez que o numerador tem o sinal do seno de (AB) e o denominador o sinal do coseno de (AB).

4 - Cálculo de distâncias

Pretende-se, conhecidas as coordenadas rectangulares de A e B, determinar a distância entre estes pontos.

Dados: M_A ; M_B ; P_A ; P_B

Pedido: \overline{AB}

Observando a Figura 10 também se pode concluir que:

$$\overline{AB} = \sqrt{(M_B - M_A)^2 + (P_B - P_A)^2}$$

Ou, calculando o rumo de (AB), pode-se obter \overline{AB} através de uma das expressões seguintes:

$$\overline{AB} = \frac{M_B - M_A}{\sin(AB)}$$

$$\overline{AB} = \frac{P_B - P_A}{\cos(AB)}$$

1.3.3 PROJECCÕES CARTOGRÁFICAS

A representação de zonas da superfície da Terra implica o cálculo das coordenadas de pontos na sua superfície. Quando se trata de zonas extensas o cálculo dessas coordenadas tem de ter em consideração a curvatura da Terra, e é do domínio da Geodesia. Quanto à sua representação plana, ela só é possível através de sistemas de projecção cartográficas, sendo este assunto do domínio da Cartografia.

Como a forma da Terra não se afasta muito da forma de uma esfera, e para simplificar o problema, vamos considerá-la esférica para estudar algumas projecções cartográficas.

Não é possível representar exactamente num plano a superfície de uma esfera (ou esferóide), da mesma forma que não é possível planificar a casca de uma laranja sem a rasgar. Sendo assim, qualquer que seja o método usado para representar sobre um plano uma grande área da superfície da Terra, haverá sempre distorções.

As projecções cartográficas consistem em transformar as coordenadas geográficas, latitude φ e longitude λ em coordenadas rectangulares M e P . Ou seja, pode-se dizer que as projecções cartográficas são funções matemáticas da seguinte forma:

$$M = f_M(\varphi, \lambda)$$

$$P = f_P(\varphi, \lambda)$$

Projecções ideais, sem distorções, deveriam satisfazer as seguintes condições:

- 1) todas as distâncias e áreas representadas no mapa deveriam ter uma magnitude relativa correcta;
- 2) todos os azimutes e ângulos deveriam estar correctamente representados no mapa;
- 3) todos os círculos máximos da Terra deveriam aparecer no mapa como linhas rectas;
- 4) as latitudes e longitudes geodésicas de todos os pontos devem aparecer correctos no mapa.

É no entanto impossível satisfazer todas estas condições num mesmo mapa, podendo apenas satisfazer-se algumas delas numa representação plana. Podem-se assim considerar algumas classes de projecções cartográficas:

- 1) Projecções *conformes ou ortomórficas* - dão origem a mapas que representam correctamente os ângulos entre quaisquer pares de pequenas linhas que se intersectem, fazendo com que pequenas áreas apareçam no mapa com a sua forma correcta. Como a escala varia de ponto para ponto a forma de grandes áreas é representada incorrectamente.
- 2) Projecções *equivalentes* - resultam em mapas em que as áreas são representadas nas suas dimensões relativas correctas, embora estas áreas tenham uma forma muito diferente da correcta e os mapas tenham ainda outros defeitos.
- 3) Projecções *afiláticas* – Projecções que não são conformes nem equivalentes.

Sublinhe-se que, por exemplo, não se podem fazer medições de áreas num mapa que não tenha sido produzido utilizando uma projecção equivalente.

1.3.3.1 Tipos de projecções

Todas as projecções são obtidas calculando os valores de M e P correspondentes a cada par de valores φ e λ de pontos dos paralelos e meridianos, usando funções f_M e f_P . Podem no entanto distinguir-se dois métodos diferentes de construir a projecção:

- 1) projecções geométricas;
- 2) projecções analíticas.

Nas projecções geométricas selecciona-se uma superfície planificável, como por exemplo um plano, um cone ou um cilindro, de modo que intersecte ou seja tangente à Terra. Escolhe-se então um ponto como centro de projecção e consideram-se linhas que unem o centro de projecção com os pontos da superfície da Terra, prolongando-se essas linhas até que se intersectem com a superfície do mapa. As projecções geométricas podem ser azimutais, cónicas ou cilíndricas.

1.3.3.2 Projecções azimutais

A projecção cartográfica mais fácil de visualizar é a projecção em que a superfície de projecção é um plano tangente à Terra num ponto. Existem então três possibilidades para a localização do centro de projecção:

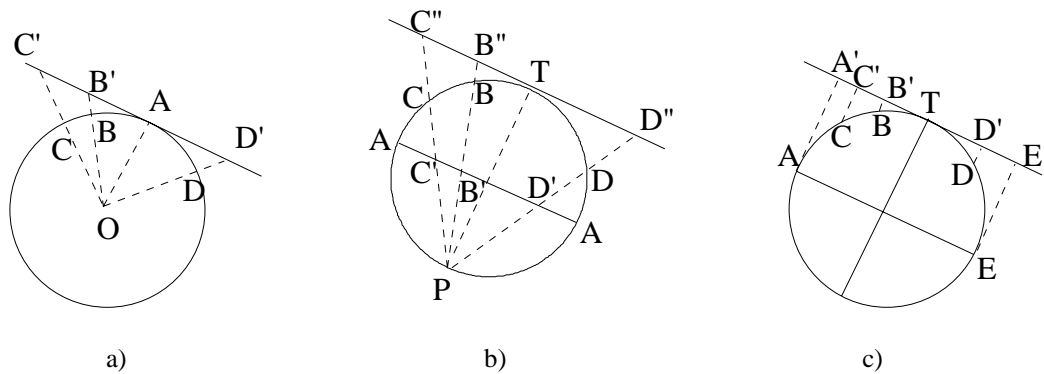


Figura 11 - Projecções: a) gnomónica. b) estereográfica. c) ortográfica.

- 1) o centro de projecção é o centro da esfera - projecção *gnomónica*;
- 2) o centro de projecção é a extremidade oposta ao ponto de tangência do diâmetro da esfera que passa por este - projecção *estereográfica*;
- 3) o centro de projecção está no infinito, sendo neste caso as linhas de projecção paralelas entre si - projecção *ortográfica*.

As projecções azimutais podem ainda ser classificadas em:

- *polares ou normais*, quando o ponto de tangência é o polo
- *equatoriais ou transversas*, quando o ponto de tangência é o equador
- *oblíquas*, quando o ponto de tangência é algures entre o equador e o polo.

1.3.3.3 Projecções cónicas e cilíndricas

Ao contrário de uma esfera, tanto um cone como um cilindro são figuras que se podem planificar sem quaisquer distorções, e são por isso utilizadas em projecções cartográficas. Tal como as projecções azimutais, as projecções cónicas e cilíndricas podem ser classificadas em função da posição do cone ou cilindro em relação à esfera que representa a Terra.

Classificação	Projecções Cónicas	Projecções Cilíndricas
<i>Projecção Normal</i>	o eixo do cone coincide com o eixo polar da esfera	o eixo do cilindro coincide com o eixo polar da esfera
<i>Projecção Transversa</i>	o eixo do cone é perpendicular ao eixo polar da esfera	o eixo do cilindro é perpendicular ao eixo polar da esfera
<i>Projecção Oblíqua</i>	o eixo do cone é inclinado relativamente ao eixo da esfera	o eixo do cilindro é inclinado relativamente ao eixo da esfera

Quando o apex do cone que vai ser usado como superfície de projecção está sobre o eixo polar, ao colocar-se este sobre a esfera ele fica apoiado num círculo de latitude a que se chama paralelo standard. À medida que a altura do cone aumenta o paralelo standard vai-se aproximando do equador. Finalmente, quando o paralelo standard coincide com o equador, os elementos do cone tornam-se paralelos e o cone transforma-se num cilindro. Quando a altura do cone diminui, o paralelo standard vai-se deslocando para latitudes mais elevadas, e finalmente o cone transforma-se num plano tangente à esfera no polo. Deste modo se mostra que as projecções sobre planos (projecções azimutais) e cilindros (projecções cilíndricas) são casos particulares de projecções cónicas.

Uma vez que um cone tangente a uma esfera tem um paralelo de altitude comum com a esfera, a sua representação no mapa será em verdadeira escala, aumentando as distorções de escala à medida que os pontos estejam mais para norte ou sul do paralelo standard. Por esta razão muitas das projecções cónicas utilizam um cone que intersecta a esfera em dois paralelos standard, para minimizar as distorções de escala.

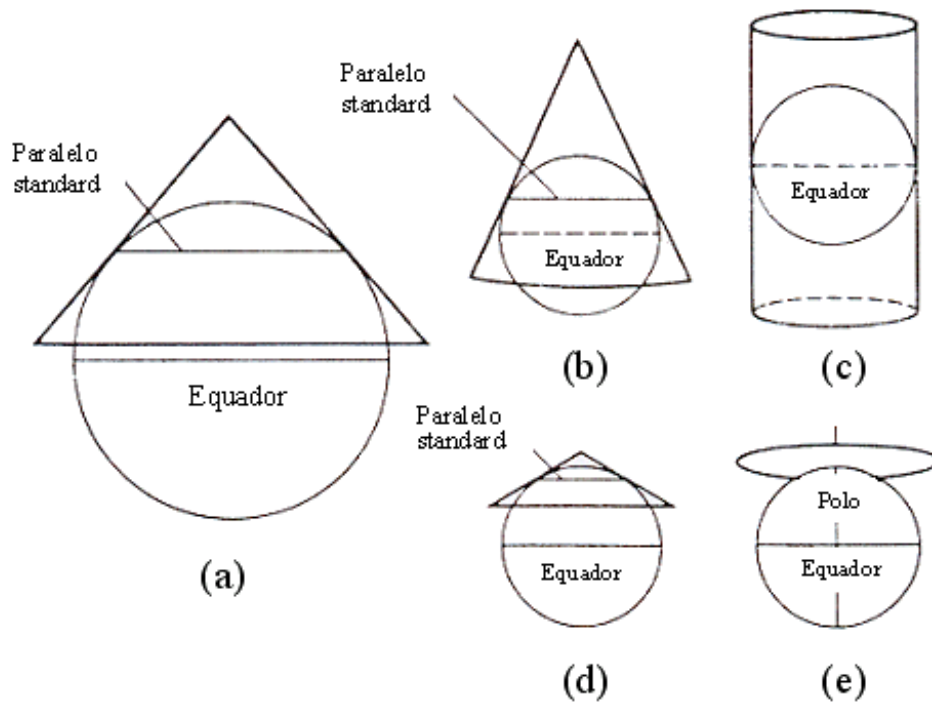


Figura 12 - a) Um cone tangente a uma esfera. b) Um cone tangente a uma esfera com o paralelo standard mais próximo do equador. c) Um cilindro tangente a uma esfera no equador. d) Cone com o paralelo standard a uma latitude mais elevada. e) Plano tangente a uma esfera no polo.

Nas projecções analíticas não existe nenhum ponto de projecção, são utilizadas as funções f_M e f_P para calcular os valores de M e P correspondentes a cada par φ, λ .

As projecções analíticas podem apresentar características semelhantes às das projecções geométricas. Por exemplo uma projecção analítica que transforme os meridianos e paralelos em linhas semelhantes às imagens dos meridianos e paralelos por uma projecção geométrica cónica, diz-se uma projecção *pseudo-cónica*. Algumas das projecções cartográficas usadas em Portugal são:

Projecção de Lambert -projecção cónica conforme, com dois paralelos standard.

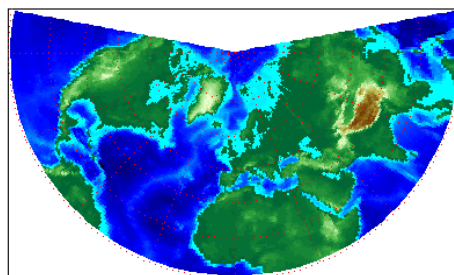


Figura 13 – Projecção de Lambert cónica e conforme

Projeção de Bonne – projeção analítica pseudo-cônica equivalente. O cone cartográfico é disposto em posição normal e tangente ao paralelo do ponto central.

Projeção de Gauss - projeção de Mercator transversa - é uma projeção analítica conforme, sobre um cilindro tangente à Terra no meridiano central.

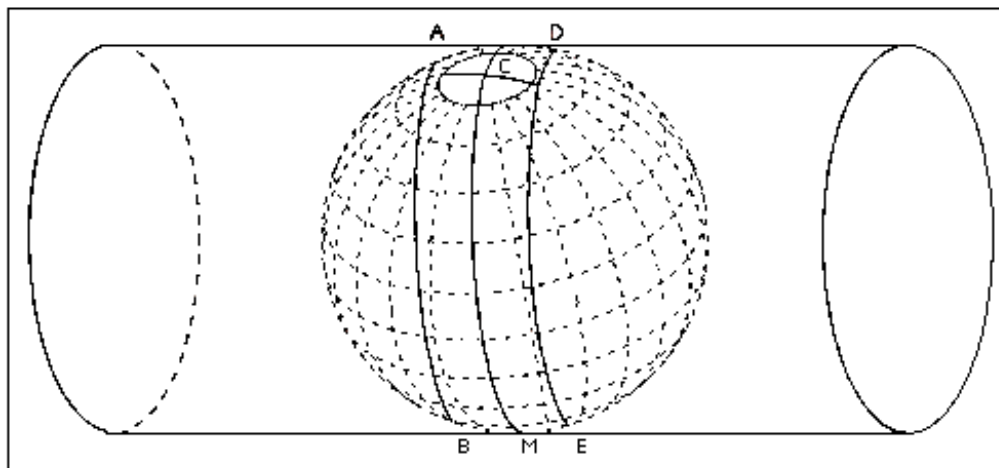


Figura 14 – Projeção de Mercator transversa

1.3.4 DATA GEODÉSICOS E ALTIMÉTRICOS

Um datum (no plural data) é um conjunto de quantidades numéricas ou entidades geométricas que são utilizadas como referência para outras quantidades numéricas ou geodésicas. Consideram-se os *data geodésicos*, para definir posições geodésicas elipsóidais (latitudes, longitudes e altitudes geodésicas) e rectangulares dos pontos do terreno; e os *data altimétricos*, para definir as altitudes ortométricas (relativamente ao geóide) dos pontos do terreno.

Os data geodésicos podem ser locais ou globais. Um *datum local* é constituído por um elipsóide de referência, posicionado num ponto terrestre de coordenadas astronómicas conhecidas de forma a que as coordenadas elipsóidais desse ponto coincidam com as coordenadas astronómicas. Um *datum global* é constituído por um elipsóide de referência, posicionado de modo a que o seu centro coincida com o centro de massa da Terra e o seu eixo polar coincida com a posição média do eixo de rotação da terra.

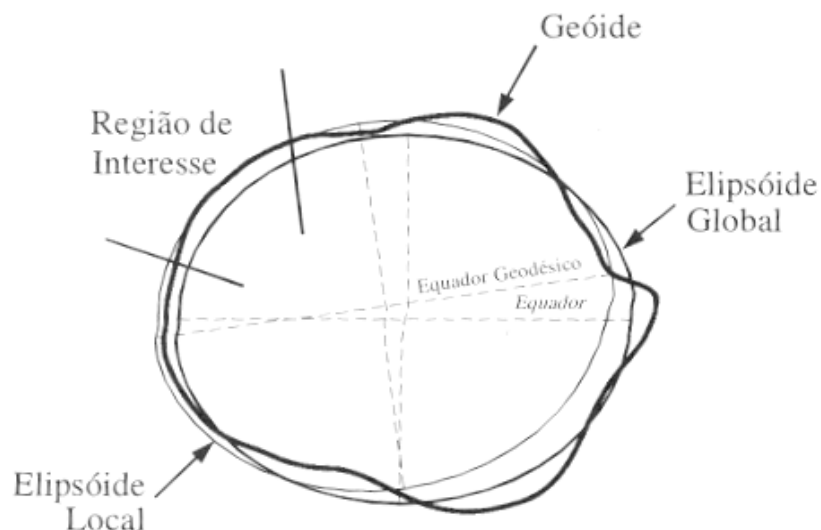


Figura 15 – Representação de um elipsóide local e de um elipsóide global.

Caso se pretenda representar a totalidade da superfície terrestre ou um hemisfério, é adoptado um datum global, designando-se o elipsóide associado por elipsóide *geocêntrico*. Saliente-se que o afastamento vertical entre o geóide e o elipsóide que dele mais se aproxima não ultrapassa os 30 m.

Caso se pretenda representar uma pequena zona do globo, como por exemplo um continente ou um país, escolhemos um datum local, também denominado por astronómico. Saliente-se que o elipsóide associado a um datum local não é necessariamente um elipsóide geocêntrico.

Designa-se por *ponto astronómico fundamental* o ponto de um datum local onde é efectuada a coincidência entre as coordenadas astronómicas e geodésicas.

1.3.5 OS SISTEMAS DE PROJECCÃO CARTOGRÁFICA

Por *sistema de projecção cartográfica* entende-se um conjunto formado por:

- um datum geodésico,
- um ponto central
- um factor de escala, próximo da unidade
- uma origem para as coordenadas cartográficas

De entre os sistemas de projecção cartográfica utilizados em Portugal, salientamos:

Sistema Puissant-Bonne:

As coordenadas geográficas da rede geodésica são calculadas sobre o elipsóide de Puissant, com origem no vértice Lisboa (Castelo de S. Jorge) de coordenadas

$$\varphi = 38^{\circ} 42' 56''.73N, \lambda = 0^{\circ} 0' 0''.00$$

As correspondentes coordenadas rectangulares são relativas à projecção pseudo-cónica de Bonne, com origem no vértice Lisboa.

Este sistema de projecção foi utilizado na primeira carta topográfica de Portugal executada em moldes científicos modernos, a “Carta Geral do Reyno”, à escala 1:100 000, cujo levantamento decorreu na segunda metade do século XIX.

Sistema Bessel-Bonne :

Nos finais do século XIX foi adoptado o sistema Bessel-Bonne. As coordenadas geográficas da rede geodésica são calculadas sobre o elipsóide de Bessel, com origem no vértice Lisboa (Castelo de S. Jorge) de coordenadas

$$\varphi = 38^{\circ} 42' 43''.631N, \lambda = 9^{\circ} 07' 54.806''$$

As correspondentes coordenadas rectangulares são relativas à projecção pseudo-cónica de Bonne, com origem no ponto central.

NOTA:

Nos sistemas que utilizam como origem das coordenadas o ponto central, a direcção N-S cartográfico é a direcção definida pela representação plana do meridiano central (meridiano que passa pelo ponto central). Nestas condições, e uma vez que os ângulos são descritos no sentido retrógrado, no nosso país, o primeiro quadrante (M>0, P>0) é o N-E; o segundo quadrante (M>0; P<0) é o S-E; o terceiro quadrante (M<0; P<0) é o S-W e finalmente o quarto quadrante (M<0; P>0) é o N-W.

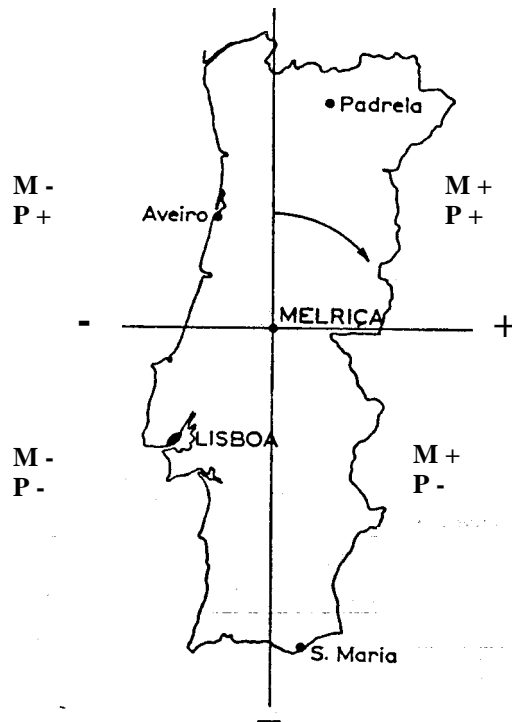


Figura 16 - Sistema Português de coordenadas rectangulares.

Os sistemas Hayford-Gauss

No sistema *Hayford-Gauss Antigo* (HGA) as coordenadas geográficas da rede geodésica são calculadas sobre o elipsóide de Hayford, com origem no vértice Lisboa (Castelo de S. Jorge) de coordenadas

$$\varphi = 38^{\circ}42'43''.631N, \lambda = 9^{\circ}07'54''.862$$

As correspondentes coordenadas rectangulares são relativas à projecção de Gauss, com origem no ponto central.

O sistema *Hayford-Gauss Militar* (HGM), deriva do sistema anterior por uma translação da origem das coordenadas cartográficas para o ponto fictício, situado a S-W do Cabo de S. Vicente e distanciado 200 Km para Oeste e 300 Km para Sul do ponto central e com eixos paralelos aos do Sistema HGA. Esta deslocação tem como consequência imediata colocar todo o território de Portugal Continental no primeiro quadrante, o que significa que todos os pontos têm coordenadas militares positivas. Tem-se então que as coordenadas militares M_{HGM} e P_{HGM} são obtidas através de:

$$M_{HGM} = M_{HGA} + 200km, \quad P_{HGM} = P_{HGA} + 300km$$

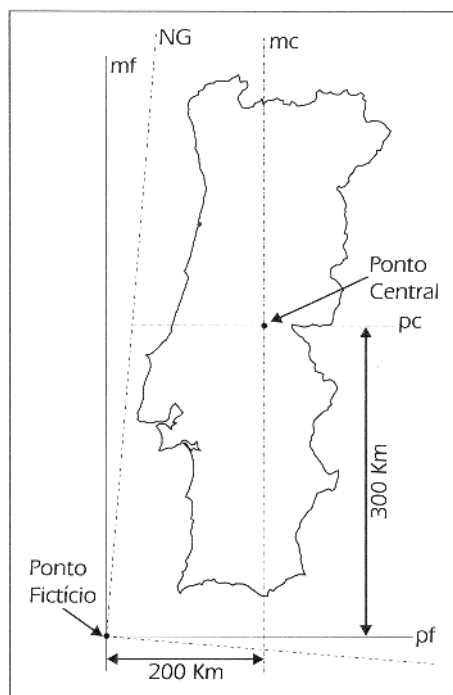


Figura 17 – Origem das coordenadas do Sistema Hayford Gauss Militar.

Após 1973 foi considerado o sistema *Hayford-Gauss Moderno*, também conhecido por sistema do *datum 73* (SHG73). Neste sistema as coordenadas geográficas da rede geodésica são calculadas sobre o elipsóide de Hayford, com origem no vértice Melriça com as seguintes coordenadas

$$\varphi = 39^{\circ}40', \lambda = 8^{\circ}07'54''.862$$

Deve notar-se que, embora o ponto central dos SHGA e SHGM seja definido pelas mesmas coordenadas geodésicas elipsoidais do que o ponto central do SHG73, devido à mudança do ponto de fixação do elipsóide de Hayford de Lisboa para Melriça, aquelas coordenadas não identificam o mesmo ponto do terreno. Para minimizar globalmente as diferenças entre as coordenadas cartográficas SHG73 e SHGA, a origem das coordenadas cartográficas do SHG73 sofre uma pequena translação relativamente ao ponto central:

$$M_{HG73} = M_{SHG73} + 180.598m$$

$$P_{HG73} = P_{SHG73} - 86.990m$$

Assim, as diferenças entre as duas coordenadas são inferiores a poucos metros em todo o território.

1.3.6 CARTAS

A informação, qualitativa e quantitativa, relativa aos fenómenos de natureza física, humana, etc., que se distribuem espacialmente sobre a superfície terrestre, é designada por *informação geográfica*. A *cartografia topográfica* tem como objectivo a representação plana da informação geográfica designada por informação topográfica: o relevo, as linhas de água, a vegetação, construções, vias de comunicação, redes de transporte de energia. etc.. A informação geográfica não topográfica (demografia, exposição solar, pluviosidade, aptidão para construção, etc.) é designada por informação temática e a sua representação sobre uma base topográfica é designada por *cartografia temática*.

As representações cartográficas são classificadas em três categorias: os mapas geográficos, as cartas e as plantas topográficas. Designam-se por *mapas geográficos* as representações de informação topográfica a escalas inferiores a 1:500 000, que podem utilizar uma esfera para substituir o geóide como superfície de referência. As *cartas topográficas* são representações nacionais ou regionais a escalas iguais ou superiores a 1:500 000 e geralmente inferiores a 1:10 000. São de grande utilidade para o engenheiro em estudos gerais de vias de comunicação, de hidráulica, etc. As *plantas topográficas* são representações de âmbito local, a escalas iguais ou superiores a 1:10 000.

As cartas que derivam directamente de um levantamento denominam-se de *cartas de base*, e as cartas obtidas a partir das cartas de base, com ou sem redução destas, são chamadas *cartas derivadas*, entre as quais se contam as cartas temáticas, como por exemplo as cartas geológicas, florestais, etc..

Nas cartas e nas plantas, a representação do terreno é feita tanto em planimetria como em altimetria. Por *planimetria* entende-se a representação bidimensional da posição dos pontos na carta e por *altimetria* a representação do relevo. Esta última é normalmente feita por intermédio de curvas de nível ou pontos cotados.

Numa carta estão traçados os meridianos e os paralelos, e também as linhas rectas paralelas aos eixos rectangulares, que se denominam as rectas meridianas e as rectas paralelas, cujo conjunto constitui a quadrícula da carta.

As rectas paralelas à recta meridiana formam com as linhas que representam os meridianos na carta, um ângulo que aumenta à medida que nos afastamos do meridiano origem. Esse ângulo denomina-se a *convergência dos meridianos*, e pode, sem grande erro, ser considerado constante nas zonas em que se divide a carta de um país. Sendo o *Norte Cartográfico* (N.C.) a direcção definida pelo meridiano central e o *Norte*

Geográfico (N.G.) a direcção definida pelos outros meridianos representados na carta, pode-se dizer que a convergência dos meridianos é o ângulo formado pelo N.C. e pelo N.G. (ver Figura 18).

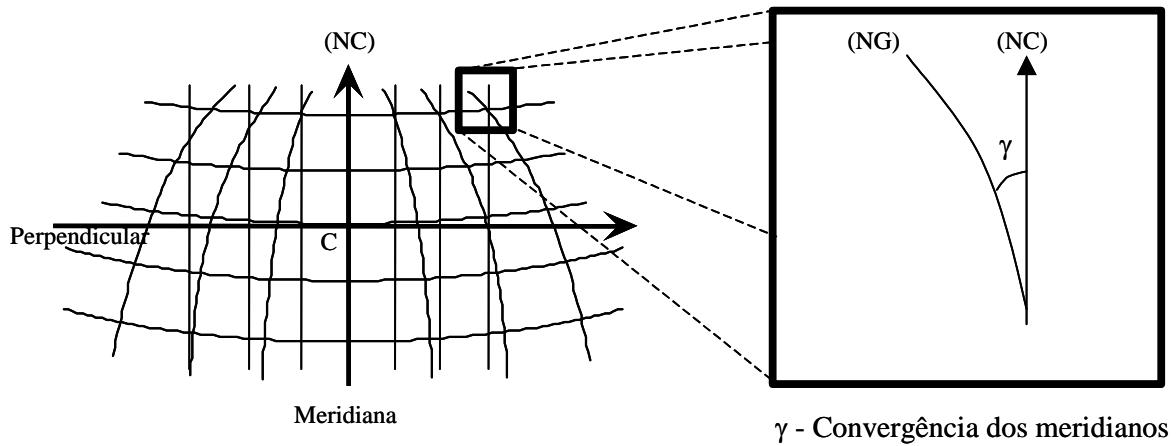


Figura 18 – Quadrícula de uma carta e representação do ângulo formado pelo Norte Cartográfico e Norte Geográfico, denominado de convergência dos meridianos.

Usualmente indica-se na margem das folhas as direcções do Norte Geográfico, do Norte Cartográfico e do Norte Magnético (N.M.), elementos que são destinados a permitir a orientação de direcções quando se conhece ou o rumo Cartográfico, ou o rumo Geográfico, ou o azimute ou rumo Magnético (Figura 19).

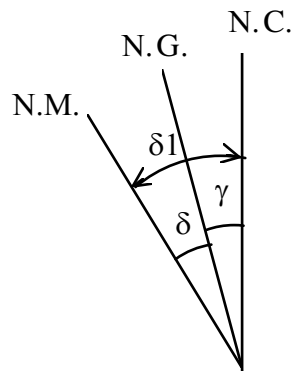


Figura 19 - Ao ângulo δ , formado pelas direcções do N.G. e do N.M., chama-se declinação magnética. Ao ângulo γ , formado pelas direcções do N.G. e do N.C., chama-se convergência de meridianos. O ângulo δ_1 , formado pela direcção do N.M. e do N.C., é a declinação relativamente à quadrícula da carta.

Se δ for a declinação magnética (ângulo formado pela direcção do Norte Magnético e pela direcção do Norte Geográfico) e γ a convergência dos meridianos, tem-se que a declinação relativamente à quadrícula da carta δ_1 é dada por:

$$\delta_1 = \delta \pm \gamma$$

aplicando-se o sinal positivo (negativo) quando o ponto considerado estiver situado a Leste (Oeste) do meridiano origem.

1.3.6.1 Cartas em Portugal

Os principais produtores portugueses de cartografia são o Instituto Geográfico Português, formado em 2002 e integrando os entretanto extintos Instituto Português de Cartografia e Cadastro (IPCC) e o Centro Nacional de Informação Geográfica (CNIG), e o Instituto Geográfico do Exército (IGeoE). Em Portugal as cartas mais utilizadas relativas a grandes extensões são as cartas de base do antigo IPCC, disponíveis por exemplo nas escalas 1:50 000 e 1:100 000 e a carta 1:25 000 do Instituto Geográfico do Exército (IGeoE). Existem ainda mais cartas em várias escalas inferiores, tais como a 1:200 000 do IPCC.

Quanto às cartas de maiores escalas, as mais usadas são as de 1:10 000, 1:5 000, 1:2 000, 1:1 000, 1:500, competindo ao Engenheiro a sua escolha de acordo com a natureza do trabalho a realizar. Está em fase de execução por parte do Instituto Geográfico a cobertura nacional na escala 1:10 000. As cartas em escalas maiores são da competência das administrações regionais, nomeadamente Câmaras Municipais.

Não há normas rígidas para a escolha da escala das cartas a utilizar, existindo, no entanto, casos em que a escala está mais ou menos consagrada. Assim, nos levantamentos de povoações usam-se, para estudos de urbanização, redes de distribuição de águas, de evacuação de esgotos e de energia eléctrica, levantamentos nas escalas 1:1 000 e 1:2 000; nos estudos de pormenor de obras usam-se cartas com escalas de 1:100 a 1:500.

1.3.7 REPRESENTAÇÃO DE PEQUENAS ÁREAS

Vamos de seguida mostrar que, se as zonas que se pretendem representar são pouco extensas, é admissível considerar a Terra como uma superfície plana, podendo-se substituir o elipsóide de referência por um plano que lhe é tangente no ponto central da região a representar, cometendo-se um erro inferior ao erro de graficismo. Falta agora saber até que dimensões se pode fazer a referida substituição, o que vai evidentemente depender da escala da representação.

Considerando a Terra como esférica, de centro O e raio médio $R=6400$ Km, seja D a maior das distâncias, sobre a superfície de referência, entre o ponto central e a fronteira de uma região a representar. Sejam ainda A e B dois pontos do terreno cujas projecções ortogonais sobre a superfície de referência são respectivamente \underline{a} e \underline{b} , sendo

$\underline{b'}$ o ponto de intersecção da recta projectante de B sobre b, com o plano tangente à superfície de referência no ponto \underline{a} (Figura 20).

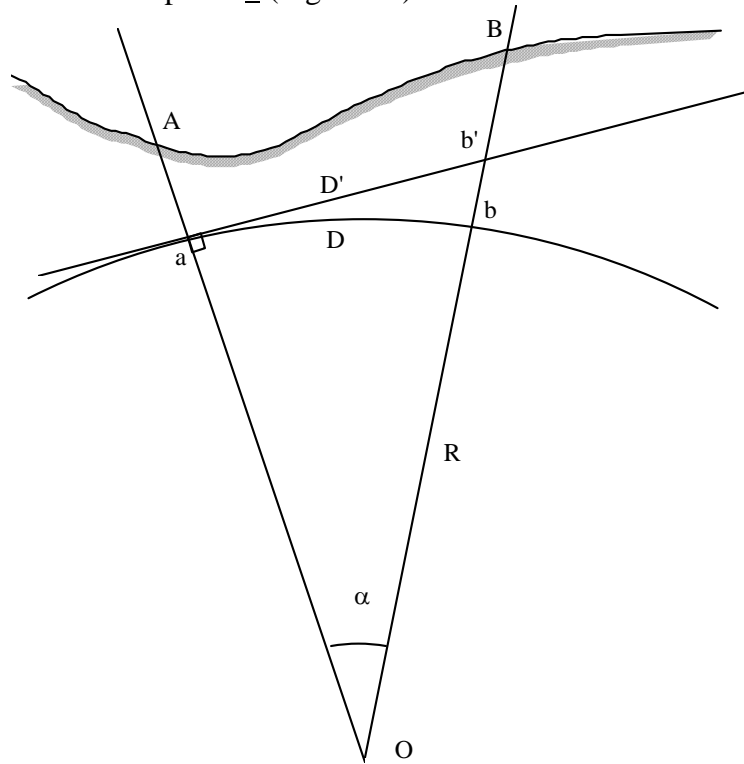


Figura 20

Determinem-se agora as distâncias D e D':

$$D = ab = R\alpha \quad (\text{com } \alpha \text{ em radianos}) \quad (1)$$

$$D' = \overline{ab'} = R \tan \alpha$$

deste modo,

$$\Delta D = D' - D = R(\tan \alpha - \alpha)$$

Uma vez que quando α toma valores pequenos se pode truncar o desenvolvimento de $\tan \alpha$ em série de Mac-Laurin sem cometer um erro considerável, tem-se que

$$\tan \alpha \approx \alpha + \frac{\alpha^3}{3}$$

logo ΔD poder-se-à escrever da seguinte forma:

$$\Delta D \approx \frac{R \alpha^3}{3}$$

e como de (1) se pode tirar que $\alpha = \frac{D}{R}$ tem-se

$$\Delta D \approx \frac{D^3}{3 R^2}$$

Quando ΔD puder ser considerado nulo pode-se substituir a superfície de referência (neste caso uma esfera) pelo plano que lhe é tangente no ponto central da zona a representar. Quando se faz a representação da área numa carta, ΔD pode ser considerado nulo quando for inferior ao erro de graficismo, que é aproximadamente 0.1 mm. Assim, se a escala da carta for 1/E, poderemos substituir o elipsóide por um plano tangente à superfície quando:

$$\frac{\Delta D}{E} < \text{erro de graficismo (0.1 mm = } 10^{-7} \text{ Km)}$$

ou seja, quando

$$\frac{D^3}{3 R^2 E} < 10^{-7} \Leftrightarrow D < \frac{\sqrt[3]{0.3 R^2 E}}{100}$$

A relação anterior permite determinar até que valores de D se poderá considerar a Terra plana em função da escala da representação:

$$\text{para a escala } 1 / 1000 \quad \Rightarrow \quad D < 23 \text{ Km}$$

$$\text{para a escala } 1 / 5000 \quad \Rightarrow \quad D < 39 \text{ Km}$$

$$\text{para a escala } 1 / 10\ 000 \quad \Rightarrow \quad D < 50 \text{ Km}$$

$$\text{para a escala } 1 / 25\ 000 \quad \Rightarrow \quad D < 67 \text{ Km}$$

Como em trabalhos de Topografia não são consideradas áreas com diâmetros (maior distância entre pontos dessa região) superiores a 6 Km, excepcionalmente 10 Km, são insignificantes os erros cometidos na substituição do elipsóide de referência por um plano que lhe seja tangente no ponto central da região a cartografar. É precisamente neste facto que se encontra a grande diferença entre a Geodesia e a Topografia - enquanto nesta se considera a Terra plana, não tendo em conta a sua curvatura, naquela trabalha-se sobre o elipsóide e a consideração dessa curvatura é essencial.

Capítulo 2 - Levantamentos Topográficos

2.1 Infra-estruturas cartográficas

2.1.1 A REDE GEODÉSICA

Os levantamentos topográficos são, em geral, apoiados num conjunto de pontos de coordenadas geodésicas conhecidas - cuja determinação pertence à Geodesia - materializados por sinais estáveis, facilmente visíveis, e que se chamam *vértices geodésicos*. Tal conjunto é representado graficamente por uma malha triangular, designada por rede geodésica, em associação com o método utilizado na determinação das coordenadas dos vértices: a *triangulação geodésica*.

A triangulação geodésica consiste na medição dos ângulos horizontais dos triângulos da malha e na propagação das coordenadas astronómicas (ou naturais) do ponto astronómico fundamental.

Resumidamente podemos dizer que no ponto astronómico fundamental se mede um azimute e uma base - lado de um dos triângulos - a partir das extremidades dessa base são medidos os ângulos dos triângulos. No termo das operações de triangulação teremos pontos onde as coordenadas geodésicas são distintas das coordenadas astronómicas. Além disso às observações angulares estão associados erros que poderão ser controlados por imposição de condições em diversos pontos da rede onde são determinadas as coordenadas astronómicas e medidas novas bases.

Os pontos onde é possível re-orientar a triangulação são designados por *pontos de Laplace*. A re-orientação da rede é efectuada recorrendo à equação de Laplace que proporciona o azimute geodésico em combinação com as latitudes e longitudes astronómicas e geodésicas.

As redes geodésicas podem ser classificadas em três ordens:

Primeira ordem, ou rede primordial quando a distancia entre os vértices se situa entre 30 e 60 Km, em condições excepcionais até 100 ou 200 Km que é o alcance máximo dos instrumentos de medida.

Como as malhas assim obtidas são demasiadamente grandes, retalha-se a rede com novos vértices, afastados entre si e dos primeiros por distâncias da ordem dos 20 a 30 Km, e que formam com aqueles a *rede geodésica de segunda ordem*.

As malhas desta rede são ainda demasiadamente grandes para se utilizarem os métodos topográficos e, portanto, introduzem-se novos vértices apoiados nos anteriores formando malhas cujos vértices estão distanciados de 5 a 10 Km. A rede assim obtida, *rede geodésica de terceira ordem*, é constituída por malhas onde se podem já aplicar os métodos topográficos.

A construção e manutenção das três primeiras ordens de vértices da rede geodésica é da responsabilidade exclusiva do Instituto Geográfico Nacional (em que foi integrado o antigo IPCC). O adensamento da rede geodésica, por vezes designado por *rede de quarta ordem* é efectuado por diversas entidades sendo em geral escolhidos pontos notáveis de edifícios ou outro tipo de construções com características de dominância na paisagem.

A escolha destes vértices é evidentemente condicionada pela sua intervisibilidade e, por isso mesmo, antes de se iniciarem os trabalhos necessários ao cálculo de qualquer triangulação, deve fazer-se um projecto da mesma e realizar-se, em seguida, o reconhecimento do terreno, operação importante pois dela depende em grande parte a rapidez e facilidade da sua execução e a precisão dos resultados obtidos.

Forma dos triângulos

Quando do estabelecimento duma triangulação, há que determinar a configuração mais conveniente a adoptar para os triângulos:

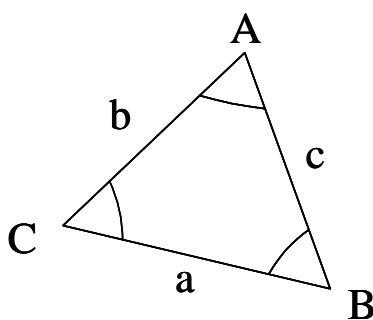


Figura 21 – Triângulo com vértices A, B e C e lados a, b e c.

Um triângulo é composto de seis elementos principais, os seus três lados e três ângulos. Diz-se que um triângulo fica definido quando se conhecem três elementos principais um dos quais é necessariamente um lado, e a resolução de triângulos consiste em determinar, a partir dos elementos conhecidos, os restantes elementos (lados ou ângulos). Por vezes são considerados elementos ditos secundários, tais como alturas, medianas, o raio de círculo inscrito, etc.

Existem fundamentalmente dois processos para resolver triângulos:

Analogia dos senos: num triângulo é constante a razão entre a medida de um lado e o seno do ângulo oposto, ou seja:

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \hat{A}} = \frac{\overline{CA}}{\sin \hat{B}} = \frac{\overline{AB}}{\sin \hat{C}}.$$

Teorema de Carnot: Num triângulo o quadrado do comprimento de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados diminuída do dobro do produto desses lados pelo co-seno do ângulo por eles formado, isto é:

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= \overline{CA}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{CA} \cdot \overline{BC} \cos \hat{C} \\ \overline{CA}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cos \hat{B} \\ \overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cos \hat{A}\end{aligned}$$

Considere-se então o triângulo $[ABC]$ e suponha-se conhecido o comprimento do lado $a = \overline{BC}$. Ao efectuarem-se as medidas angulares necessárias à resolução desse triângulo cometem-se erros que irão afectar os comprimentos dos lados $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$.

Para analisar a influência dos erros cometidos, na medição dos ângulos \hat{B} e \hat{C} , e do lado a sobre o lado b , logaritmize-se a expressão de b , obtida utilizando a analogia dos senos:

$$b = a \frac{\sin \hat{B}}{\cos \hat{A}},$$

isto é

$$\log b = \log a + \log(\sin \hat{B}) - \log(\sin \hat{A})$$

diferenciando

$$\frac{1}{b} db = \frac{1}{a} da + \cot \hat{B} d\hat{B} - \cot \hat{A} d\hat{A},$$

identificando de seguida a diferencial com o erro e tomando módulos tem-se

$$|\Delta b| \leq b \left(\frac{1}{a} |\Delta a| + |\cot \hat{B}| |\Delta \hat{B}| + |\cot \hat{A}| |\Delta \hat{A}| \right),$$

expressão que permite concluir que o erro em b depende dos erros cometidos em a , \hat{A} e \hat{B} .

Como os erros em \hat{A} e \hat{B} vêm multiplicados, respectivamente, por $\cot \hat{A}$ e $\cot \hat{B}$, a sua influência em Δb será tanto maior quanto menores forem os ângulos \hat{A} e \hat{B} . Considerações análogas se podiam fazer para o lado c e chegar, portanto, à conclusão que os ângulos dos triângulos devem ser os maiores possíveis.

Na prática a escolha dos vértices está sujeita às condições do terreno, contudo sempre que possível deve-se:

- adoptar a forma equilátera,
- evitar a construção de ângulos menores do que 25° , ou maiores do que 100° .

2.1.2 TRIANGULAÇÃO TOPOGRÁFICA

Como em topografia interessa fundamentalmente o pormenor, não é possível utilizar apenas os vértices geodésicos para apoio dos levantamentos, pois as distâncias entre eles é muito grande, variando normalmente entre 5 e 10 km.

Por este motivo aumenta-se a densidade de pontos da rede utilizando novos vértices, que se apoiam nos vértices geodésicos e nos próprios vértices que se vão criando. Obtém-se assim a rede topográfica constituída por triângulos, cujos lados têm comprimentos entre 500 m e 1 km.

2.1.2.1 triangulação topográfica com apoio geodésico

É constituída com apoio nos vértices geodésicos existentes, podendo-se quando necessário (por exemplo em zonas de visibilidade reduzida, onde as condições são pouco favoráveis ao estabelecimento de triângulos), introduzir mais vértices com poligonação.

Pode acontecer que no levantamento de zonas pouco extensas, ou mesmo em regiões extensas em que as condições morfológicas dificultem o estabelecimento de uma triangulação (por exemplo terrenos planos cobertos de floresta), se usem apenas redes de poligonais para a determinação dos pontos de apoio.

2.1.2.2 triangulação topográfica independente

É sempre conveniente que ao estabelecer-se uma rede de triangulação se use o apoio geodésico, para que os diferentes trabalhos se enquadrem num esquema conjunto.

No entanto, pode acontecer que, devido aos pontos de apoio se encontrarem muito distantes e o tipo de trabalho não justificar a construção de pontos de apoio mais próximos, se construa uma rede sem apoio nos vértices geodésicos, a que se chama triangulação topográfica independente.

Para a sua construção é necessário:

- medir uma base (um comprimento);
- atribuir um rumo qualquer a um dos lados da triangulação (de preferência a base);
- atribuir coordenadas a um vértice da triangulação (de preferência um dos vértices da base).

Pode ainda medir-se mais do que uma base para controlo de resultados.

Tal como no caso da triangulação topográfica com apoio geodésico a densificação da rede pode ser feita com poligonação.

2.2 Estudo do teodolito

Os ângulos que interessa medir, quer para a execução de levantamentos quer para outros fins de utilidade para o engenheiro, são os ângulos horizontais e verticais.

Ângulo horizontal ou azimutal de duas direcções, que passam por um ponto, é o rectilíneo do diedro formado pelos planos verticais que contêm essas direcções, isto é, o ângulo formado pelas projecções dessas direcções sobre o plano horizontal.

Para se definir o ângulo vertical de uma direcção emergente de um ponto, temos que distinguir os casos em que o elemento de referência é o plano horizontal ou a vertical que passa nesse ponto. Assim tem-se:

- 1) Altura de uma direcção - é o ângulo que essa direcção forma com o plano horizontal, é contada a partir do plano horizontal de onde emerge a direcção e varia entre -100 e +100 grados.
- 2) Distância zenital de uma direcção - é o ângulo que essa direcção faz com a vertical que passa pelo ponto de onde emerge, é contada a partir da vertical e varia entre zero e 200 grados.

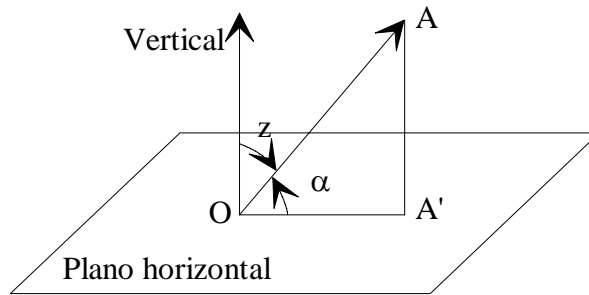


Figura 22 - O ângulo α é a altura de direcção OA e o ângulo z a sua distância zenital.

Tem-se desta forma que $z = 100^g - \alpha$.

Os instrumentos capazes de medir ângulos horizontais e ângulos verticais são chamados de teodolitos e têm como componentes fundamentais:

- 1) *uma luneta* - cujo eixo óptico materializa as direcções, podendo tomar todas as posições no espaço com movimentos em torno de um eixo que, depois do estacionamento do teodolito, ficará colocado na posição vertical (eixo principal) e outro que ficará na posição horizontal (eixo secundário);
- 2) *dois limbos graduados* - destinados a medir os ângulos e que estão colocados na posição horizontal e vertical, de forma que os seus centros existam teoricamente sobre os eixos atrás mencionados;
- 3) *nivelas* - cuja finalidade é colocar vertical o eixo principal do teodolito.

2.2.1 CONSTITUIÇÃO DO TEODOLITO

O teodolito dispõe de uma parte fixa, chamada base, onde se apoia o instrumento, e outra móvel, chamada alidade, susceptível de rodar em torno do eixo principal do teodolito. O eixo em torno do qual bascula a luneta chama-se eixo secundário ou eixo dos munhões. É um eixo supostamente perpendicular ao eixo principal e que o deve intersectar num ponto chamado centro do teodolito. A luneta dispõe ainda de um eixo óptico, que deve passar pelo centro do teodolito.

Associado ao eixo principal existe o limbo azimutal ou horizontal e associado ao eixo secundário existe o limbo vertical (que na maior parte dos instrumentos tem como finalidade medir ângulos zenitais, sendo portanto chamado de limbo zenital).

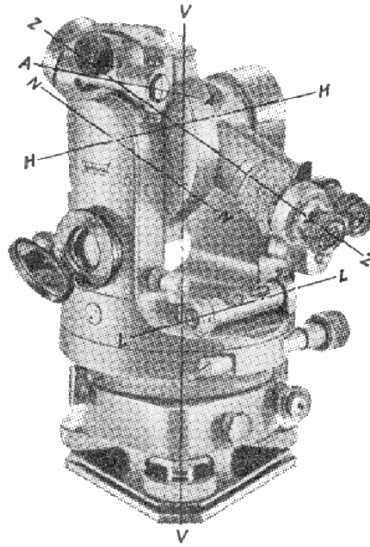


Figura 23 - Constituição de um teodolito: VV representa o eixo principal, HH o eixo secundário e ZZ o eixo óptico do teodolito.

2.2.2 NIVELAS

Existem dois tipos de nivelas: as nivelas tóricas e as nivelas esféricas.

2.2.2.1 Nivelas tóricas

São formadas por um tubo de vidro com a forma de uma porção de um toro de revolução de grande raio (o círculo gerador tem em média 1 cm de raio e o equador entre 15 e 200 m), quase cheio de um líquido não viscoso (normalmente éter), sendo o restante espaço ocupado por vapores desse líquido que formam a bolha da nivela.

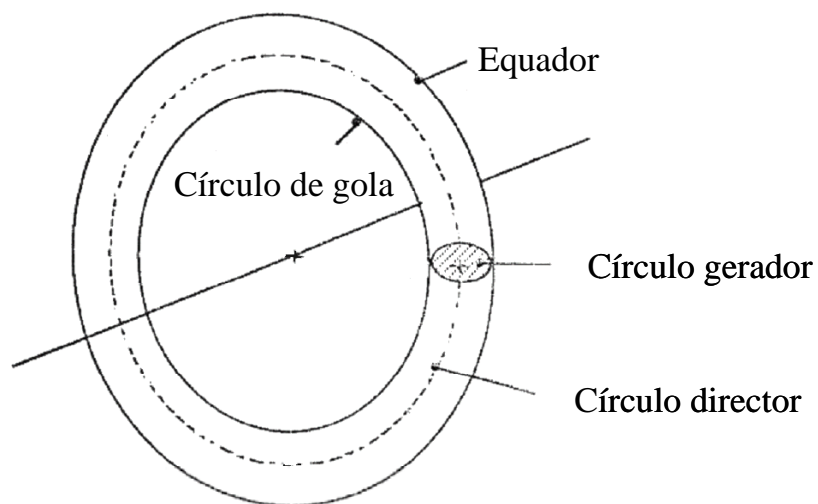


Figura 24- Toro de revolução

Em virtude dos princípios de equilíbrio dos fluidos, a bolha ocupará sempre a parte mais elevada do toro, de modo que se o plano do equador for vertical, a tangente ao toro no meio da bolha será horizontal.

Os elementos geométricos de uma nivela tórica são: o *plano médio da nivela*, que é o plano do equador e corta o toro segundo dois arcos de circunferência concêntricos, designando-se o exterior por *linha média da nivela* e o seu raio por *raio de curvatura da nivela*. *Directriz da nivela* é a tangente à linha média da nivela no seu ponto médio chamado *centro da nivela*. O centro da nivela é definido pela sua graduação, não sendo na maior parte das vezes gravado na nivela.

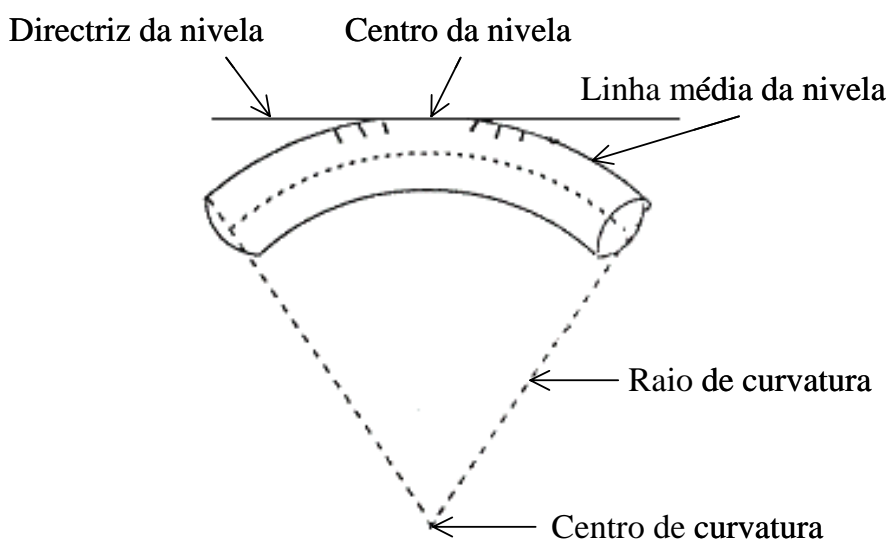


Figura 25 - Elementos geométricos de uma nivela tórica.

Diz-se que uma nivela está *calada* quando o centro da bolha coincide com o centro da nivela.

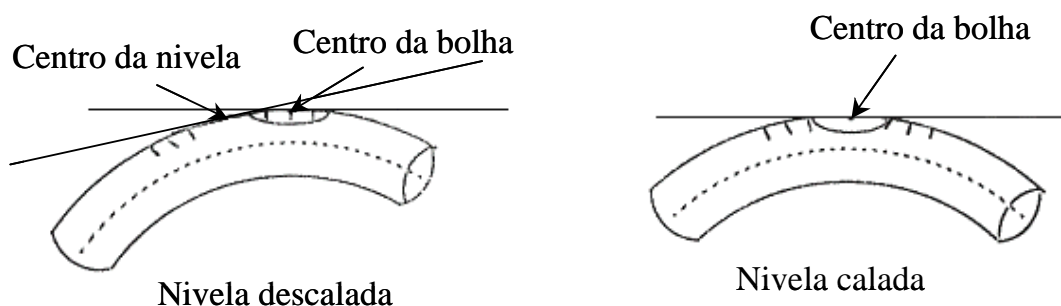


Figura 26 - Uma nivela tórica calada e descalada.

Chama-se *sensibilidade* de uma nivela à propriedade de esta, quando se bascula o seu plano médio, traduzir através de deslocamentos da bolha pequenas variações de inclinação da sua directriz. É expressa pelo ângulo α de que roda a directriz quando a bolha se desloca de um determinado arco ℓ , o seu valor em segundos centesimais é dado pela expressão:

$$\alpha = \frac{\ell}{R} \rho$$

em que ρ é o valor de um radiano em segundos centesimais ($\rho = 636620$). Uma nivela é tanto mais sensível quanto maior for o deslocamento da bolha para um dado α , isto é, quanto maior for o raio de curvatura R. Uma nivela é caracterizada pelo valor do ângulo α correspondente a uma divisão da graduação. Temos assim, por exemplo, as seguintes três nivelas com sensibilidade decrescente:

$\ell = 2 \text{ mm}$	$\alpha = 1''$	$R = 1273 \text{ m}$
$\ell = 2 \text{ mm}$	$\alpha = 20''$	$R = 63 \text{ m}$
$\ell = 2 \text{ mm}$	$\alpha = 30''$	$R = 42 \text{ m}$

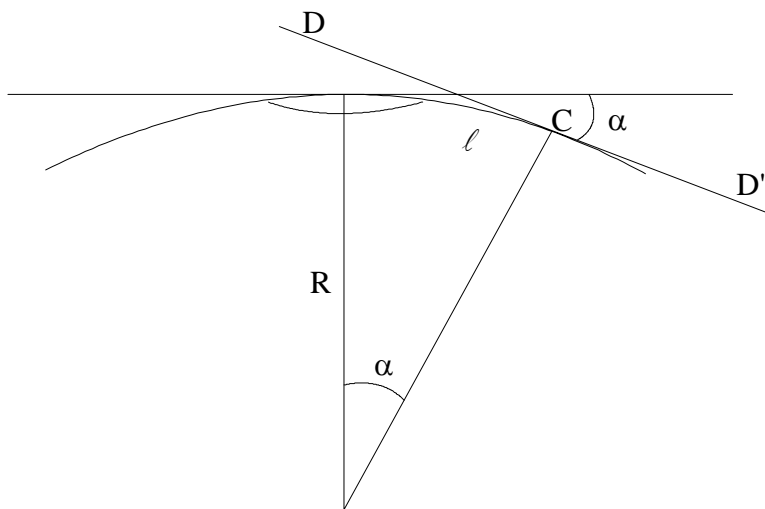


Figura 27 - A sensibilidade de uma nivela é caracterizada pelo ângulo α que roda a directriz quando a bolha se desloca de um arco ℓ .

Montagem das nivelas tóricas nos instrumentos

Nos teodolitos as nivelas estão normalmente solidárias com o eixo principal, tendo como finalidade colocá-lo vertical. Desta forma, o plano médio da nivela deve ser paralelo ao eixo a que a nivela é solidária, e a sua directriz deve ser perpendicular a este eixo, quando isto não acontecer diz-se que a nivela está *desrectificada*. O eixo principal

é suportado por uma base triangular munida de três parafusos nivelantes, que permitem variar a inclinação conjunta do eixo e da nivela, parafusos estes que vão ser utilizados para calar a nivela. Partindo do princípio de que a nivela está rectificadada, os procedimentos a seguir são (Figura 28):

- 1) Colocar a nivela de modo que a directriz desta fique aproximadamente paralela ao plano vertical que passa por dois dos parafusos nivelantes;
- 2) Rodar esses dois parafusos em sentidos contrários até calar a nivela;
- 3) Rodar a nivela de 100 grados em torno do eixo principal;
- 4) Voltar a calar a nivela rodando agora apenas o terceiro parafuso nivelante.

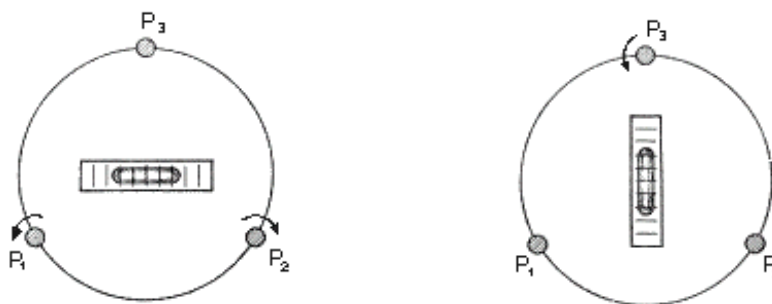


Figura 28 - Representação esquemática dos parafusos nivelantes de um teodolito e da nivela tórica, durante o procedimento de verticalização do eixo principal.

Depois de efectuadas estas operações o eixo principal deve estar vertical e, ao rodar-se o teodolito em torno deste, a bolha da nivela tórica não se deve deslocar. Se isso acontecer a nivela não está rectificadada e neste caso adoptam-se outros procedimentos para verticalizar o eixo principal, que não serão estudados neste curso.

2.2.2.2 Nivelas esféricas

Uma nivela esférica é um recipiente com a forma de um cilindro, limitado superiormente por uma calote esférica, com uma circunferência de referência gravada no seu centro, e inferiormente por uma superfície qualquer. Está igualmente quase completamente cheia de um líquido de baixa viscosidade. A bolha ocupa a parte mais elevada da calote esférica e o plano tangente ao centro da bolha é horizontal.

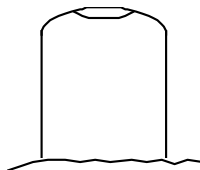


Figura 29 - Representação de uma nivela esférica.

Chama-se *plano director* ao plano tangente à calote no centro do círculo de referência. A nivela está calada quando a bolha está concêntrica com a circunferência de referência, ficando então o plano director horizontal.

Nos teodolitos a nivela esférica é normalmente solidária ao eixo principal, que é necessário verticalizar. A nivela está assim rectificada quando o seu plano director é perpendicular a este eixo.

As nivelas esféricas são nivelas de baixa precisão e são utilizadas apenas para fazer uma verticalização aproximada do eixo principal, usando os três parafusos nivelantes, sendo essa verticalização depois refinada com a nivela tórica.

2.2.3 A LUNETETA

Fundamentalmente a luneta é composta por dois sistemas ópticos, a *ocular* e a *objectiva*, funcionando qualquer deles como uma lente convergente. Como o objecto a focar está sempre situado muito além do foco da objectiva, esta vai originar uma imagem real e invertida. A ocular vai funcionar em relação a esta imagem como uma lupa, pelo que esta vai ter que se formar entre o centro óptico e o foco da ocular. Podemos então afirmar que a luneta origina uma imagem virtual, invertida e com um aumento considerável do diâmetro do objecto. Nas lunetas de fabrico moderno, graças a um conjunto de prismas incorporado no corpo da luneta, as imagens observadas através da ocular são imagens direitas.

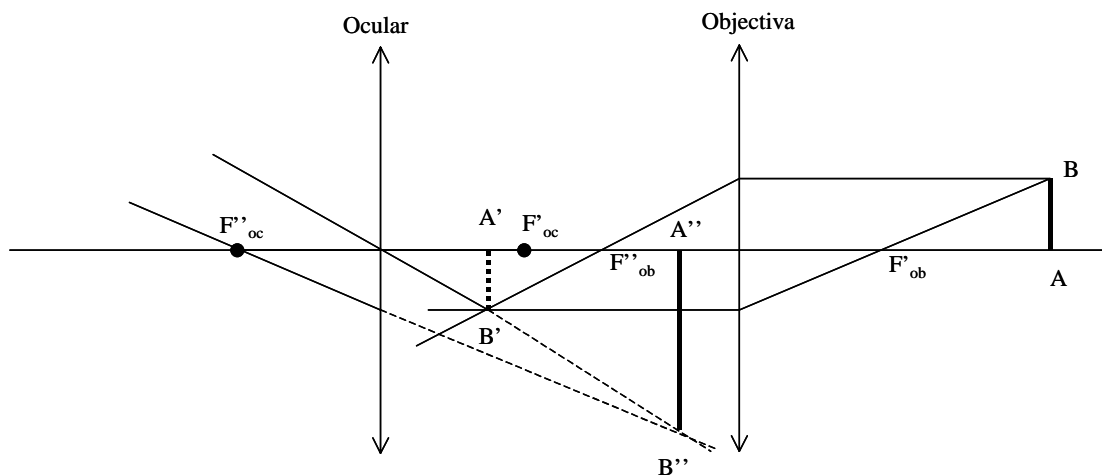


Figura 30 - Esquema de uma luneta. Oc - Ocular; Ob - Objectiva; AB - Objecto; $A''B''$ - Imagem obtida com o conjunto das duas lentes; F'_{oc} e F''_{oc} - Focos da ocular; F'_{ob} e F''_{ob} - Focos da objectiva.

Para se definirem linhas de pontaria existe, no corpo da luneta, entre a ocular e a objectiva, uma lâmina de vidro com um sistema de linhas cruzadas, finamente gravadas, a que se dá o nome de retículo.

Chama-se *linha de pontaria* ou *linha de visada* ao lugar geométrico dos pontos do espaço cujas imagens se formam sobre o ponto de cruzamento dos fios do retículo.

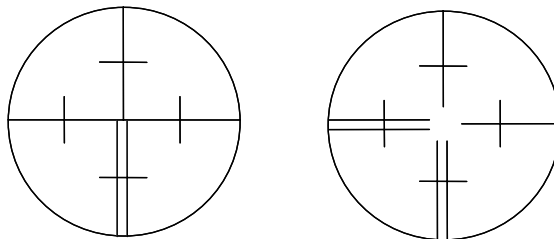


Figura 31 - Dois possíveis aspectos do retículo, quando observado através da luneta.

Fazer pontaria a um ponto equivale a obrigar que a linha de pontaria da luneta passe por esse ponto.

Podemos ainda diferenciar *pontarias em azimute* e *pontarias em altura*. Diz-se que se está a apontar em azimute para um determinado ponto quando a imagem desse ponto se situar sobre o fio vertical do retículo. Diz-se que se está a apontar em altura quando a imagem do ponto se situar sobre o fio horizontal do retículo.

Para referenciar a posição da imagem do objecto relativamente aos fios do retículo convém que essa imagem se forme no plano do retículo. Diz-se que há *paralaxe da imagem* quando a imagem do objecto, dada pela objectiva não se forma sobre esse plano. Um observador constata a existência ou não de paralaxe da imagem deslocando a vista em frente da ocular, se as duas imagens, objecto e retículo não se deslocarem relativamente uma à outra, não há paralaxe; se elas se deslocarem então há paralaxe.

Para se evitar a existência de paralaxe a focagem deve constar de duas operações essenciais:

- 1) focagem do retículo;
- 2) focagem do objecto.

2.2.4 CONDIÇÕES PARA A MEDIÇÃO DE ÂNGULOS

Para que com um teodolito se possam medir realmente ângulos horizontais e verticais com vértice no ponto onde o teodolito está estacionado, devem verificar-se, além de algumas condições de construção que serão expostas mais à frente, as seguintes condições de estação:

- 1) o eixo principal deve estar vertical;
- 2) o eixo principal deve passar pelo ponto estação.

Estas condições têm de ser satisfeitas quando do estacionamento do teodolito no vértice do ângulo a medir (ponto estação), o que se consegue com o auxílio de nivelas e dispositivos de centragem e mediante as seguintes operações:

a) Centragem do teodolito - o centro do teodolito e o ponto estação devem ficar sobre a mesma vertical, primeiro é feita uma centragem aproximada no ponto estação com um fio de prumo e depois uma centragem rigorosa com um prumo óptico ou uma haste prumada.

b) Verticalização do eixo principal - esta verticalização é feita com o auxílio de nivelas solidárias com o eixo principal.

Na prática o estacionamento de um teodolito sobre um tripé é feito por fases:

- 1) antes de colocar o teodolito sobre o tripé, faz-se uma centragem aproximada deste com um fio de prumo;
- 2) depois coloca-se o instrumento no tripé e faz-se uma verticalização aproximada do eixo principal, com o auxílio da nivela esférica;
- 3) em seguida refina-se a centragem do teodolito com recuso a um prumo óptico ou um haste prumada;
- 4) por fim faz-se a verticalização rigorosa do eixo principal com o auxílio da nivela tórica.

2.2.4.1 Medição de ângulos azimutais:

O limbo azimutal de um teodolito está solidário com a base deste e portanto permanece fixo durante as observações, variando as leituras com as pontarias feitas para as várias posições. A graduação do limbo azimutal é normalmente feita em grados e no sentido retrógrado (sentido dos ponteiros do relógio).

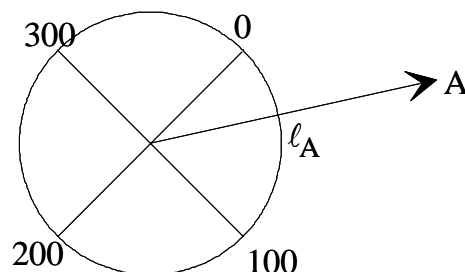


Figura 32 - Limbo azimutal de um teodolito. À pontaria para o ponto A corresponde a leitura azimutal l_A .

Para medir o ângulo azimutal formado pelas direcções AB e AC, estaciona-se o teodolito no ponto A, aponta-se a luneta sucessivamente para B e C e faz-se, em cada uma das pontarias, uma leitura no limbo azimutal. A diferença das duas leituras dá o valor do ângulo azimutal.

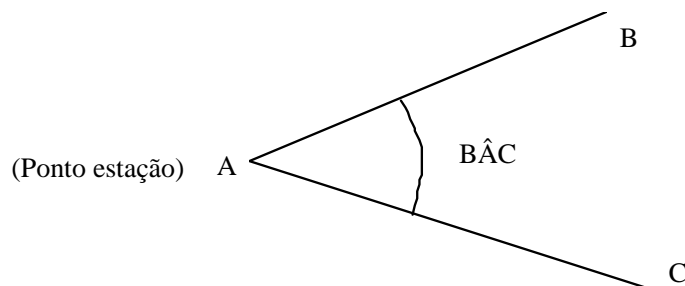


Figura 33 - Medição de um ângulo azimutal. É feita pontaria para B obtendo-se a leitura l_{AB} no limbo azimutal, de seguida faz-se pontaria para C obtendo-se a leitura no limbo azimutal correspondente a esta pontaria l_{AC} . O ângulo $B\hat{A}C = l_{AC} - l_{AB}$.

Para que, depois de estacionado o teodolito, se meçam realmente ângulos azimutais o teodolito deve satisfazer as seguintes condições de construção:

Condições de construção para medição de ângulos horizontais

- 1) O eixo principal do teodolito deve ser normal ao plano do limbo horizontal e passar pelo seu centro;
- 2) A graduação do limbo deve ser exacta;
- 3) O eixo óptico deve intersectar o eixo principal;
- 4) O eixo secundário deve ser normal ao eixo principal;
- 5) O eixo óptico da luneta deve ser perpendicular ao eixo secundário.

Estas condições devem ser teoricamente satisfeitas embora na prática muitas vezes existam pequenos erros residuais. Quando se pretenderem fazer observações com grande precisão, ou os erros tiverem grande amplitude, podem-se eliminar os efeitos dos erros através de métodos de observação.

Tabela 1 - Erros resultantes das condições de construção não se verificarem perfeitamente

Condição de construção <u>não</u> satisfeita	Erro resultante
Perpendicularidade entre o eixo principal e o plano do limbo horizontal	Erro de inclinação do eixo principal sobre o plano do limbo
Passagem do eixo principal pelo centro do limbo azimutal	Erro de excentricidade da alidade
Graduação do limbo exacta	Erro de graduação
Intersecção do eixo óptico com o eixo principal	Erro de excentricidade do eixo óptico
Perpendicularidade entre o eixo secundário e o eixo principal	Erro de inclinação do eixo secundário
Perpendicularidade entre o eixo óptico da luneta e o eixo secundário	Erro de colimação do eixo óptico

Observações conjugadas

Fazer *observações conjugadas* consiste em fazer duas pontarias para um mesmo ponto, rodando o teodolito de 200 graus em torno do eixo principal e basculando a luneta em torno do eixo secundário. Tem-se assim numa das pontarias o círculo zenital à esquerda e na outra o círculo zenital à direita. Faz-se uma leitura azimutal correspondente a cada uma das pontarias (ℓ_1 e ℓ_2), leituras que devem diferir de aproximadamente 200 graus.

Leitura feita com o círculo zenital à esquerda (posição directa) $\rightarrow \ell_1$

Leitura feita com o círculo zenital à direita (posição inversa) $\rightarrow \ell_2$

A leitura correcta ℓ é obtida através de $\ell = \frac{\ell_1 + \ell_2 \pm 200}{2}$.

Com a utilização de observações conjugadas consegue-se eliminar o efeito do erro de excentricidade da alidade, do erro de excentricidade do eixo óptico, do erro de inclinação do eixo secundário e do erro de colimação do eixo óptico.

Quanto ao erro de graduação, existem métodos próprios para a atenuação do seu efeito sobre as medições, métodos que não vão ser aqui expostos, pois só são utilizados quando se pretende medir ângulos com grande precisão.

Quanto ao erro de inclinação do eixo principal sobre o plano do limbo, é um erro normalmente muito pequeno e de natureza semelhante ao erro de graduação, sendo portanto atenuado o seu efeito utilizando os mesmos métodos.

2.2.4.2 Medição de ângulos zenitais:

A distância zenital da direcção CA, definida pelo centro do teodolito e pelo ponto A, a que se faz pontaria, determina-se com uma só leitura no limbo zenital e não com a diferença de duas leituras como acontece na medição dos ângulos azimutais. Ao contrário do que acontece nas observações azimutais, em que o limbo está fixo e é o índice de leitura que se desloca com a alidade, nas observações zenitais os construtores fixam normalmente o índice e é o limbo que se desloca com a luneta. Sendo assim, o limbo está graduado no sentido directo e a linha $0 \rightarrow 200$ graus tem a direcção da linha de pontaria.

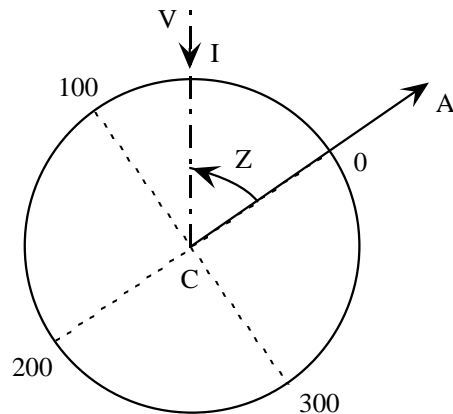


Figura 34 - Limbo zenital. V representa a vertical, I a posição do índice e z o ângulo zenital da direcção CA.

Para que a leitura obtida seja correcta é necessário que o índice esteja numa posição bem determinada, posição essa que numa visada horizontal dê origem a uma leitura zenital de exactamente 100 graus. Se tal não suceder diz-se que o teodolito tem erro de índice.

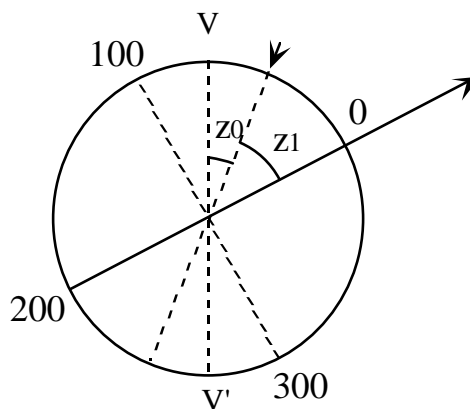


Figura 35 - Em virtude do índice de leitura se encontrar na posição indicada pela seta e não na vertical, existe erro de índice z_0 .

Para orientar o índice existe nos aparelhos mais antigos uma nivela que lhe está associada e que se chama nivela de calagem zenital. Ao medir-se um ângulo zenital tem de se ter o cuidado de calar sempre a nivela antes de fazer a leitura. Nos teodolitos mais modernos a nivela de calagem zenital foi substituída por um dispositivo pesado chamado dispositivo de colimação vertical automático, que orienta automaticamente o índice.

Tal como para a medição de ângulos azimutais também existem condições que devem ser satisfeitas para a correcta medição de ângulos zenitais.

Condições de construção para medição de ângulos zenitais

- 1) O eixo secundário deve ser perpendicular ao plano do limbo zenital e passar pelo seu centro.
- 2) A graduação do limbo zenital deve ser exacta.
- 3) O erro de índice deve ser nulo.

A não verificação das duas primeiras condições origina erros análogos aos seus homólogos na medição de ângulos horizontais. No entanto, como, devido ao erro provocado pela refração terrestre, a medição de ângulos zenitais é menos precisa que a medição de ângulos azimutais, os efeitos dos erros resultantes da não verificação das duas primeiras condições é desprezável.

Estudo do erro de índice

Vamos de seguida provar que o efeito do erro de índice se elimina com leituras conjugadas.

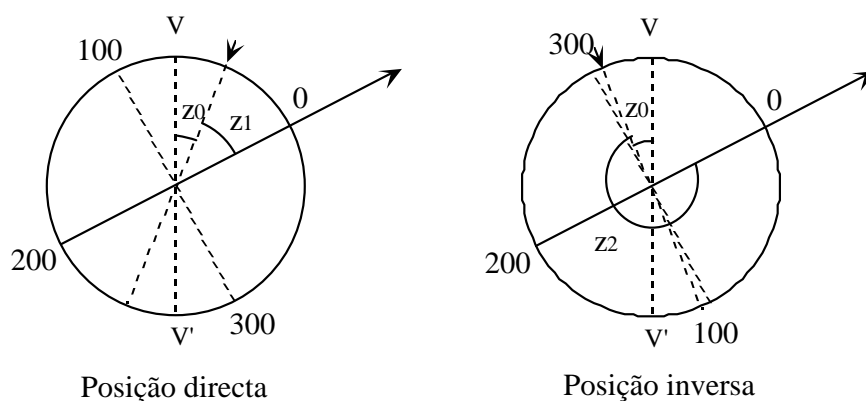


Figura 36 - Medição da distância zenital na posição directa e inversa, quando existe erro de índice z_0 .

Sendo z_1 a leitura feita na posição directa, z_2 a leitura feita na posição inversa e z_0 o erro de índice, a leitura correcta z , quando na posição directa pode ser obtida através de:

$$z = z_1 + z_0 \quad (1)$$

Na posição inversa tem-se que:

$$z = 400 - (z_2 + z_0) \quad (2)$$

Igualando (1) e (2) obtém-se $z_1 + z_0 = 400 - (z_2 + z_0)$

Donde se pode obter:

$$z_0 = \frac{400 - (z_2 + z_1)}{2}$$

Somando membro a membro (1) e (2) vem:

$$z = \frac{z_1 + (400 - z_2)}{2} \quad (3)$$

Como normalmente o valor do erro de índice não é conhecido, utiliza-se a expressão (3) para calcular a leitura correcta.

2.3 Métodos para determinação de coordenadas do esqueleto de apoio topográfico

- Irradiação
- Triangulação
- Intersecções
- Poligonação

2.3.1 IRRADIAÇÃO

Dadas as coordenadas de dois pontos A e B, pretende-se determinar as coordenadas do ponto C. Estaciona-se um teodolito em B e fazem-se pontarias para A e B, medindo-se a distância \overline{BC} e o ângulo azimutal \widehat{ABC} .

As coordenadas de A e B permitem obter o rumo (BA) e a distância \overline{AB} . É então calculado o rumo (BC) adicionando a (BA) o ângulo \widehat{ABC} . Finalmente as coordenadas de C são obtidas a partir das coordenadas de B, da distância \overline{BC} e do rumo (BC) .

Dados: M_A, P_A, M_B, P_B

Elem. medidos: $\widehat{ABC}, \overline{BC}$

Pedido: M_C, P_C

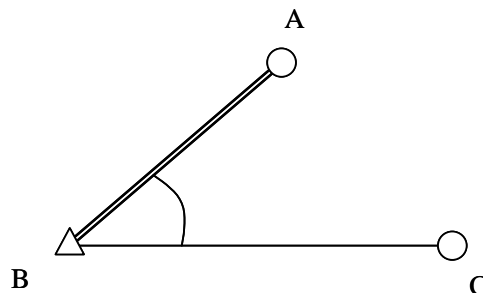


Figura 37 – Irradiação das coordenadas de B para C.

2.3.2 TRIANGULAÇÃO

Neste método estacionam-se todos os vértices dos triângulos, efectuando-se, em seguida, uma compensação dos valores angulares obtidos. O procedimento a seguir é então o seguinte:

- Estacionam-se todos os vértices do triângulo e medem-se todos os ângulos internos destes;
- Faz-se a compensação dos valores angulares obtidos, distribuindo o erro igualmente pelos três ângulos;
- Determinam-se as coordenadas do ponto pretendido.

Considere-se então um triângulo [ABC], de que são conhecidas as coordenadas dos pontos B e C, e de que se mediram todos os ângulos \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} , pretendendo calcular-se as coordenadas do ponto A.

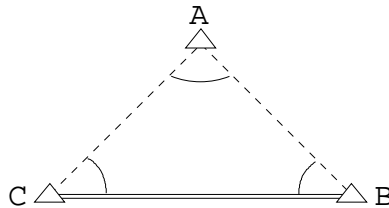


Figura 38 - Triângulo [ABC].

Dados: M_B, P_B, M_C, P_C Elem. medidos: $\hat{A}^*, \hat{B}^*, \hat{C}^*$ Pedido: M_A, P_A

1) Cálculo de (BC) e de \overline{BC} .

$$\overline{BC} = \sqrt{(M_C - M_B)^2 + (P_C - P_B)^2} \quad \tan(BC) = \frac{M_C - M_B}{P_C - P_B}$$

2) Compensação angular

Calcula-se o erro de fecho angular ε_a através de:

$$\varepsilon_a = 200 - \hat{A}^* - \hat{B}^* - \hat{C}^*$$

Divide-se depois este valor pelos 3 ângulos, adicionando-se algebricamente a cada um deles uma correcção a_i , tal que:

$$a_1 \approx a_2 \approx a_3 \approx \frac{\varepsilon_a}{3}$$

obtendo-se então os ângulos compensados:

$$\hat{A} = \hat{A}^* + a_1$$

$$\hat{B} = \hat{B}^* + a_2$$

$$\hat{C} = \hat{C}^* + a_3$$

3) Determinação de \overline{BA} e \overline{CA}

$$\overline{BA} = \overline{BC} \frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{A}} \qquad \overline{CA} = \overline{BC} \frac{\sin \hat{B}}{\sin \hat{A}}$$

4) Determinação de (BA) e (CA)

$$(BA) = (BC) + \hat{B} \qquad (CA) = (CB) - \hat{C}$$

5) Determinação das coordenadas de A

a) a partir de B

$$M_A = M_B + \overline{BA} \sin(BA)$$

$$P_A = P_B + \overline{BA} \cos(BA)$$

b) a partir de C

$$M_A = M_C + \overline{CA} \sin(CA)$$

$$P_A = P_C + \overline{CA} \cos(CA)$$

2.3.3 INTERSECÇÕES

Neste método as figuras consideram-se independentes umas das outras e não se estacionam todos os vértices. A intersecção pode ser:

- simples, isto é quando o vértice a determinar fica definido pela consideração de uma única figura,
- múltipla, quando o vértice a determinar fica definido pela consideração de mais do que uma figura.

Vamos apenas considerar intersecções simples, com ou sem verificação, as quais podem ser de três tipos:

- intersecção directa
- intersecção lateral
- intersecção inversa

2.3.3.1 Intersecção directa

Neste método não se estaciona o vértice a determinar Q , estacionando-se dois vértices de coordenadas conhecidas A e B e medindo-se os ângulos azimutais α e β .

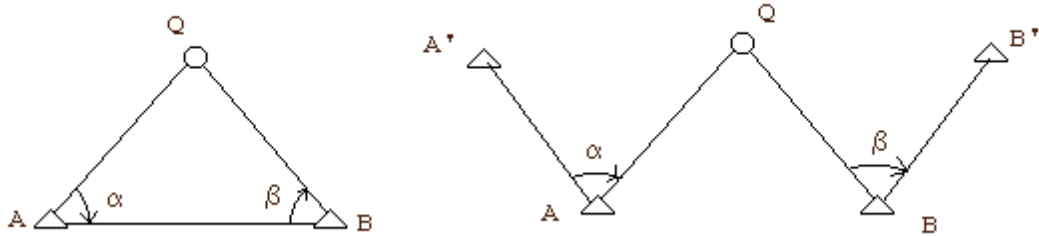


Figura 39 - Intersecção directa

Convém que o ângulo em Q esteja compreendido entre 50° e 150° , pois um ângulo muito agudo ou muito obtuso pode conduzir a grandes erros no posicionamento do vértice.

2.3.3.2 Intersecção lateral

Nesta intersecção estaciona-se o vértice de coordenadas a determinar Q e um dos vértices de coordenadas conhecidas, que designaremos sempre por A , medidos igualmente dois ângulos azimutais γ e α .

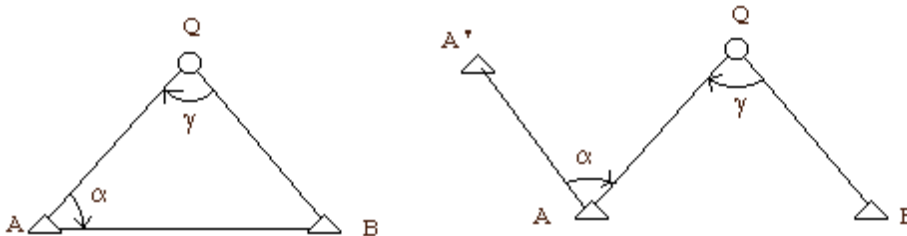


Figura 40 - Intersecção lateral

É evidente que tanto a intersecção directa como a lateral se podem resolver por um processo análogo ao do triângulo. No entanto, estas intersecções resolvem-se na prática, do modo a seguir indicado.

Esquema geral da resolução duma intersecção directa ou lateral

Através das observações efectuadas determinam-se (AQ) e (BQ)

Directa	$(AQ) = (AB) - \alpha$	$(BQ) = (BA) + \beta$
	$(AQ) = (AA') + \alpha$	$(BQ) = (BB') - \beta$
Lateral	$(AQ) = (AB) - \alpha$	$(QB) = (QA) - \gamma$
	$(AQ) = (AA') + \alpha$	$(QB) = (QA) - \gamma$

Recordando que para dois pontos genéricos X e Y :

$$M_Y - M_X = (P_Y - P_X) \tan(XY)$$

$$P_Y - P_X = (M_Y - M_X) \cot(XY),$$

então:

$$\begin{aligned} & M_B - M_A \\ &= (M_Q - M_A) - (M_Q - M_B) \\ &= (P_Q - P_A) \tan(AQ) - (P_Q - P_B) \tan(BQ) \\ &= (P_Q - P_A) \tan(AQ) - \left[(P_Q - P_A) - (P_B - P_A) \right] \tan(BQ) \\ &= (P_Q - P_A) [\tan(AQ) - \tan(BQ)] + (P_B - P_A) \tan(BQ) \end{aligned}$$

donde

$$\boxed{P_Q - P_A = \frac{(M_B - M_A) - (P_B - P_A) \tan(BQ)}{\tan(AQ) - \tan(BQ)}} \quad \text{e} \quad \boxed{M_Q - M_A = (P_Q - P_A) \tan(AQ)}$$

No caso de (AQ) ter um valor muito próximo de 100° ou de 300° para evitar a ampliação do erro na determinação de $M_Q - M_A$ devem substituir-se estas fórmulas por outras em que entrem co-tangentes:

$$\begin{aligned}
& P_B - P_A \\
&= \left(P_Q - P_A \right) - \left(P_Q - P_B \right) \\
&= \left(M_Q - M_A \right) \cot(AQ) - \left(M_Q - M_B \right) \cot(BQ) \\
&= \left(M_Q - M_A \right) \cot(AQ) - \left[\left(M_Q - M_A \right) - \left(M_B - M_A \right) \right] \cot(BQ) \\
&= \left(M_Q - M_A \right) \left[\cot(AQ) - \cot(BQ) \right] + \left(M_B - M_A \right) \cot(BQ)
\end{aligned}$$

donde

$$M_Q - M_A = \frac{\left(P_B - P_A \right) - \left(M_B - M_A \right) \cot(BQ)}{\cot(AQ) - \cot(BQ)} \quad \text{e} \quad P_Q - P_A = \left(M_Q - M_A \right) \cot(AQ)$$

Verificação de cálculos: A partir das coordenadas de B conhecidas, e de Q , calculadas a partir do ponto A , determina-se o rumo $(BQ)^*$. Seguidamente comparam-se o rumo $(BQ)^*$ com o rumo (BQ) calculado a partir das observações. A diferença $(BQ) - (BQ)^*$ deve ser nula.

2.3.4 POLIGONAÇÃO

A poligonação consiste no estabelecimento, observação e cálculo de poligonais. Poligonais não são mais do que um conjunto de sucessivos segmentos de recta formando uma linha poligonal, da qual se medem os comprimentos dos lados e os ângulos que estes formam.

Como a poligonação é um método de cálculo de coordenadas, que, para a obtenção do mesmo número de pontos de apoio, é de execução muito mais rápida do que a triangulação e as intersecções, em determinados estudos, não sendo a precisão um factor primordial, pode-se utilizar apenas a poligonação para obtenção do apoio necessário. Em algum tipo de levantamentos, em que é necessário fazer o levantamento de uma faixa de terreno comprida e estreita, como por exemplo, no caso de traçado de estradas, caminhos de ferro, redes de saneamento, linhas de alta tensão, etc, também é normalmente utilizada a poligonação.

Como norma, uma rede de poligonais deve sempre apoiar-se numa triangulação topográfica. Sendo este o caso, essa rede é constituída por poligonais principais (poligonais que ligam entre si vértices da triangulação) e poligonais secundárias (que

ligam entre si vértices das poligonais principais ou um vértice de uma poligonal principal e um vértice de uma triangulação).

Quando uma poligonal não for apoiada em vértices de uma triangulação deve ser apoiada em vértices de outras poligonais, ou ser uma poligonal fechada sobre si mesma (poligonal em que o primeiro vértice de apoio coincide com o último).

2.3.4.1 Normas para o estabelecimento de uma poligonal

O estabelecimento de uma poligonal deve ser feito após um prévio reconhecimento da zona, dependendo o seu traçado do acidentado do terreno e do facto de se tratar, ou não, de uma zona densamente arborizada. Não se podem por isso estabelecer normas rígidas para o traçado de poligonais, no entanto, para se melhorar a precisão dos resultados obtidos, convém que a escolha dos vértices tenha em atenção o seguinte:

1) As poligonais não fechadas sobre si mesmas devem, tanto quanto possível, ser “esticadas”, isto é, o seu traçado em planta deve aproximar-se da recta que une os seus extremos;

2) Não são aconselhados desníveis acentuados entre vértices consecutivos de uma poligonal;

3) O comprimento dos lados de uma poligonal deve ser, tanto quanto possível, da mesma ordem de grandeza, evitando-se portanto a existência simultânea de lados compridos e curtos;

4) O comprimento dos lados deve ser tão grande quanto possível, a fim de diminuir o número de vértices e, conseqüentemente, atenuar a influência dos erros cometidos nas observações. O valor deste comprimento é evidentemente limitado, não só pelo acidentado do terreno, como pelas características dos instrumentos utilizados.

2.3.4.2 Cálculo e compensação de uma poligonal

Analisaremos o cálculo de uma poligonal com vértices A, 1, 2, 3 e B, apoiada nos vértices A e B de uma triangulação. Conhecem-se ainda as coordenadas dos vértices A' e B', ou os rumos (AA') e (BB').

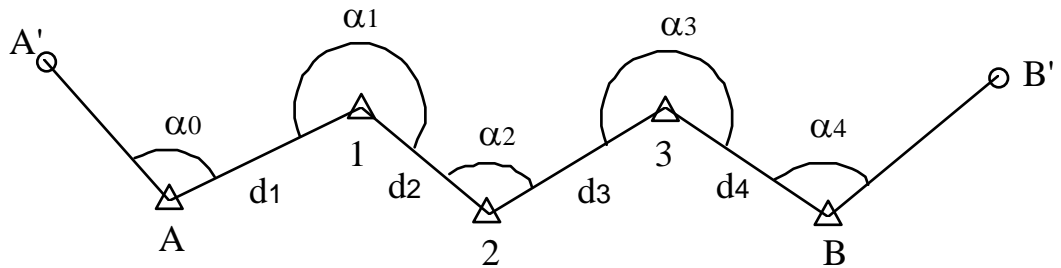


Figura 41 - Uma linha poligonal apoiada nos vértices A e B de uma triangulação.

Nesta poligonal medem-se os ângulos $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e α_4 (5 ângulos) e os lados d_1, d_2, d_3 e d_4 (4 lados). Note-se que para determinar as coordenadas dos vértices 1, 2 e 3 eram apenas necessárias as medidas de 3 ângulos (α_0, α_1 , e α_2) e 3 lados (d_1, d_2 e d_3), ficando assim 3 medidas em excesso, que permitem fazer o ajustamento da poligonal.

De um modo geral, no caso de uma poligonal apoiada, sendo n o número de vértices da poligonal (contando com os vértices de apoio A e B) medem-se n ângulos e $(n-1)$ lados, obtendo-se no total $(2n-1)$ medidas. Como para a determinação dos $(n-2)$ vértices da poligonal a calcular são suficientes $(n-2)$ ângulos e $(n-2)$ lados, no total $(2n-4)$ medidas, sobram 3 medidas para o ajustamento da poligonal.

No caso de uma poligonal fechada sobre si mesma, tudo se passa de forma semelhante, havendo igualmente três medidas em excesso para o ajustamento. Note-se que nestas poligonais, como o vértice final é coincidente com o vértice inicial, este conta-se duas vezes na determinação de n .

O ajustamento de uma poligonal pode ser feita por processos rigorosos, mas tal, na maior parte das vezes, não se justifica em virtude da precisão exigida não ser grande. Vamos assim estudar um processo expedito de fácil aplicação e de resultados aceitáveis.

Neste método, o cálculo e o ajustamento de uma poligonal são feitos simultaneamente e em duas fases:

1ª fase: Nesta fase faz-se o cálculo dos rumos provisórios dos lados da poligonal; calcula-se o erro de fecho angular, que não deve exceder determinadas tolerâncias; e finalmente os rumos definitivos.

2ª fase: Na segunda fase calculam-se as coordenadas relativas provisórias; o erro de fecho linear, que também não deve exceder determinadas tolerâncias; e as coordenadas absolutas dos vértices da poligonal.

A classificação de uma poligonal quanto à precisão depende da precisão exigida na medição do comprimento dos seus lados, dividindo-se estas normalmente em três tipos: poligonais de baixa precisão ou expeditas, poligonais de média precisão e poligonais de alta precisão.

2.3.4.3 Esquema geral de resolução de uma poligonal

Vamos apresentar este esquema supondo que a poligonal a resolver é uma poligonal aberta, apoiada nos pontos A e B de uma triangulação (ver Figura 41). A adaptação deste tipo de poligonal a qualquer outro tipo (por exemplo poligonais fechadas ou poligonais fechadas sobre si mesmas) é simples, requerendo apenas uma adaptação em relação aos vértices inicial e final.

<u>Dados:</u>	<u>Quantidades observadas:</u>		<u>Pedidos:</u>
M_A, P_A	leituras azimutais:	distâncias:	M_1, P_1
$M_{A'}, P_{A'}$	$l_{AA'}, l_{A1}$	d_1	M_2, P_2
M_B, P_B	l_{1A}, l_{12}	d_2	M_3, P_3
$M_{B'}, P_{B'}$	l_{21}, l_{23}	d_3	
	l_{32}, l_{3B}	d_4	
	$l_{B3}, l_{BB'}$		

Começa-se por calcular os ângulos α_i a partir das leituras azimutais feitas:

$$\alpha_0 = l_{A1} - l_{AA'}$$

$$\alpha_1 = l_{12} - l_{1A}$$

$$\alpha_2 = l_{23} - l_{21}$$

$$\alpha_3 = l_{3B} - l_{32}$$

$$\alpha_4 = l_{BB'} - l_{B3}$$

1ª FASE: CÁLCULO DOS RUMOS

1) Cálculo dos rumos (AA') e (BB'):

Com as coordenadas dos vértices A, A', B e B' determinam-se os rumos (AA') e (BB').

$$\tan (AA') = \frac{M_{A'} - M_A}{P_{A'} - P_A}$$

$$\tan (BB') = \frac{M_{B'} - M_B}{P_{B'} - P_B}$$

2) Cálculo de (BB')*

Designando por (BB')* o rumo (BB') calculado utilizando as medições feitas obtém-se:

$$(A1) = (AA') + \alpha_0$$

$$(12) = (A1) + \alpha_1 \pm 200$$

$$(23) = (12) + \alpha_2 \pm 200$$

$$(3B) = (23) + \alpha_3 \pm 200$$

$$(BB') = (3B) + \alpha_4 \pm 200$$

$$(BB')^* = (AA') + \sum_{i=0}^4 \alpha_i - 200 k$$

Sendo k um número inteiro.

3) Determinação do erro de fecho angular e verificação da tolerância:

Como (BB') e (BB')* normalmente não são iguais, calcula-se o erro de fecho angular através da seguinte equação:

$$\varepsilon_a = (BB') - (BB')^*$$

É agora necessário verificar se o erro angular é admissível para a precisão exigida na poligonal em questão. Pode-se então considerar que o erro terá que ser menor do que as tolerâncias abaixo indicadas para poligonais de alta, média e baixa precisão.

Tolerância angular:

$$\text{Alta precisão: } T_a = (\sqrt{n})' \quad \underline{n} \rightarrow \text{número de ângulos}$$

$$\text{Média precisão: } T_a = (2\sqrt{n})'$$

$$\text{Baixa precisão: } T_a = (4\sqrt{n})'$$

Se $|\varepsilon_a| < T_a \Rightarrow$ Pode-se continuar o cálculo da poligonal!

4) Cálculo dos ângulos corrigidos

Se o erro estiver dentro da tolerância distribui-se o seu valor uniformemente pelos ângulos α_i , obtendo-se os ângulos compensados $\overline{\alpha}_i$.

$$\overline{\alpha}_0 = \alpha_0 + c_0 \quad \text{sendo } c_0 \approx c_1 \approx c_2 \approx c_3 \approx c_4 \approx \frac{\varepsilon_a}{5}$$

$$\overline{\alpha}_1 = \alpha_1 + c_1$$

$$\overline{\alpha}_2 = \alpha_2 + c_2$$

$$\overline{\alpha}_3 = \alpha_3 + c_3$$

$$\overline{\alpha}_4 = \alpha_4 + c_4$$

5) Cálculo dos rumos definitivos

Finalmente procede-se ao cálculo dos rumos definitivos da seguinte forma:

$$(A1) = (AA') + \overline{\alpha}_0$$

$$(12) = (A1) + \overline{\alpha}_1 \pm 200$$

$$(23) = (12) + \overline{\alpha}_2 \pm 200$$

$$(3B) = (23) + \overline{\alpha}_3 \pm 200$$

$$(BB') = (3B) + \overline{\alpha}_4 \pm 200$$

2ª FASE: CÁLCULO DAS COORDENADAS

Por coordenadas relativas de um vértice entende-se as coordenadas desse vértice em relação a um sistema de eixos paralelos aos do sistema principal e com origem no vértice anterior. Deste modo:

$$M_i - M_{i-1} = \Delta M_i = d_i \sin(i-1, i)$$

$$P_i - P_{i-1} = \Delta P_i = d_i \cos(i-1, i)$$

considerando-se, neste exemplo, $M_0 = M_A$, $P_0 = P_A$, $M_4 = M_B$ e $P_4 = P_B$.

1) Cálculo das coordenadas relativas provisórias:

$$\Delta M_1 = M_1 - M_A = d_1 \sin(A_1)$$

$$\Delta M_2 = M_2 - M_1 = d_2 \sin(12)$$

$$\Delta M_3 = M_3 - M_2 = d_3 \sin(23)$$

$$\Delta M_4 = M_B^* - M_3 = d_4 \sin(3B)$$

$$\sum \Delta M_i = M_B^* - M_A \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_B^* = M_A + \sum \Delta M_i}$$

Comparando os valores obtidos por cálculo com os valores conhecidos de M_B , pode escrever-se a equação da projecção do erro de fecho linear sobre \vec{OP} (ϵ_M).

$$\boxed{\epsilon_M = M_B - M_B^*}$$

Da mesma forma para as coordenadas P:

$$\Delta P_1 = P_1 - P_A = d_1 \cos(A_1)$$

$$\Delta P_2 = P_2 - P_1 = d_2 \cos(12)$$

$$\Delta P_3 = P_3 - P_2 = d_3 \cos(23)$$

$$\Delta P_4 = P_B^* - P_3 = d_4 \cos(3B)$$

$$\sum \Delta P_i = P_B^* - P_A \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_B^* = P_A + \sum \Delta P_i}$$

Comparando os valores obtidos por cálculo com os valores conhecidos de P_B , pode escrever-se a equação da projecção do erro de fecho linear sobre \vec{OM} (ϵ_P).

$$\boxed{\epsilon_P = P_B - P_B^*}$$

2) Cálculo do erro de fecho linear e verificação da tolerância:

Com os valores de ϵ_M e ϵ_P calcula-se o erro de fecho linear da poligonal:

$$\epsilon_\ell = \sqrt{\epsilon_M^2 + \epsilon_P^2}$$

Valores da tolerância linear: $L = \sum d_i$ (comprimento da poligonal)

Alta precisão: $T_\ell = 0,005\sqrt{L} + 0,05$

Média precisão: $T_\ell = 0,01\sqrt{L} + 0,1$

Baixa precisão: $T_\ell = 0,06\sqrt{L}$

Se $\varepsilon_\ell < T_\ell \Rightarrow$ Pode-se continuar o cálculo da poligonal!

Se este valor não ultrapassar a tolerância linear respectiva, de acordo com a precisão da poligonal, faz-se a sua distribuição pelas coordenadas relativas provisórias ΔM_i e ΔP_i , obtendo-se as coordenadas relativas corrigidas $\overline{\Delta M}_i$ e $\overline{\Delta P}_i$.

3) Cálculo das coordenadas relativas corrigidas:

A distribuição de ε_M e ε_P pelas coordenadas relativas provisórias é feita proporcionalmente aos valores absolutos dessas coordenadas, utilizando-se na prática uma forma simplificada e expedita de o fazer.

$$\overline{\Delta M}_1 = \Delta M_1 + m_1$$

$$\overline{\Delta P}_1 = \Delta P_1 + p_1$$

$$\overline{\Delta M}_2 = \Delta M_2 + m_2$$

$$\overline{\Delta P}_2 = \Delta P_2 + p_2$$

$$\overline{\Delta M}_3 = \Delta M_3 + m_3$$

$$\overline{\Delta P}_3 = \Delta P_3 + p_3$$

$$\overline{\Delta M}_4 = \Delta M_4 + m_4$$

$$\overline{\Delta P}_4 = \Delta P_4 + p_4$$

$$\frac{m_1}{|\Delta M_1|} = \frac{m_2}{|\Delta M_2|} = \frac{m_3}{|\Delta M_3|} = \frac{m_4}{|\Delta M_4|} = \frac{\varepsilon_M}{\sum |\Delta M_i|} \Rightarrow m_i = |\Delta M_i| \frac{\varepsilon_M}{\sum |\Delta M_i|}$$

$$\frac{p_1}{|\Delta P_1|} = \frac{p_2}{|\Delta P_2|} = \frac{p_3}{|\Delta P_3|} = \frac{p_4}{|\Delta P_4|} = \frac{\varepsilon_P}{\sum |\Delta P_i|} \Rightarrow p_i = |\Delta P_i| \frac{\varepsilon_P}{\sum |\Delta P_i|}$$

4) Cálculo das coordenadas definitivas:

De posse das coordenadas relativas corrigidas imediatamente se calculam as coordenadas absolutas:

$$M_1 = M_A + \overline{\Delta M_1}$$

$$P_1 = P_A + \overline{\Delta P_1}$$

$$M_2 = M_1 + \overline{\Delta M_2}$$

$$P_2 = P_1 + \overline{\Delta P_2}$$

$$M_3 = M_2 + \overline{\Delta M_3}$$

$$P_3 = P_2 + \overline{\Delta P_3}$$

$$M_B = M_3 + \overline{\Delta M_4}$$

$$P_B = P_3 + \overline{\Delta P_4}$$

2.3.4.4 Medição dos lados e ângulos de uma poligonal

Os lados das poligonais podem ser medidos por processos directos, utilizando uma fita, ou por processos indirectos. Os ângulos são medidos com um teodolito, devendo utilizar-se um teodolito de segundos quando se trate de uma poligonal de precisão.

A precisão de medição dos ângulos na observação de uma poligonal é de grande importância e, para se obterem os melhores resultados, é necessário ter o maior cuidado na centragem do teodolito e na pontaria aos sinais. Efectivamente, um erro de centragem do teodolito traduz-se sempre num erro de medição do ângulo no vértice respectivo, o mesmo sucedendo com um erro de pontaria ao sinal.

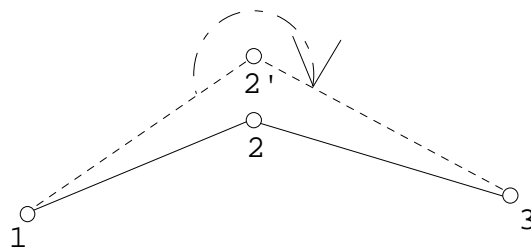


Figura 42 - Erro na medição de um ângulo, devido a um erro de centragem do teodolito.

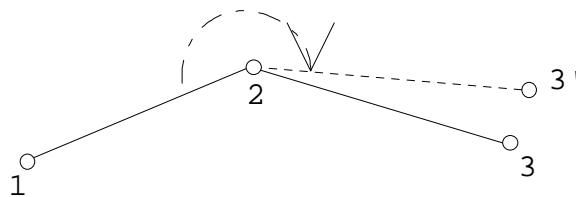


Figura 43 - Erro na medição de um ângulo, devido a um erro de pontaria.

Um erro na medição de um dos ângulos de uma poligonal acarreta sempre uma rotação da mesma igual ao valor angular do referido erro. Se a poligonal for comprida essa rotação origina um deslocamento considerável para o vértice final.

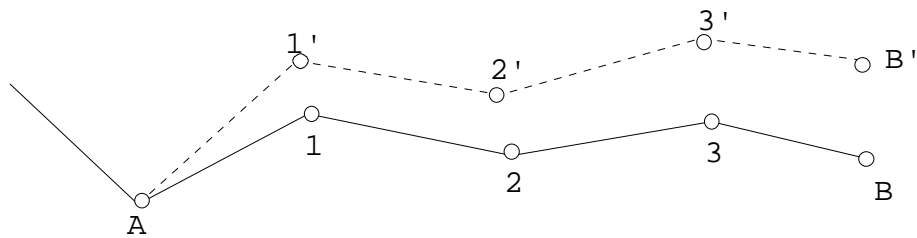


Figura 44 - Rotação de uma poligonal, devido a um erro de pontaria no vértice A.

2.4 Medição de Distâncias

Na medição de distâncias podemos considerar, quanto à precisão, medidas de baixa, média e alta precisão. Dentro da alta precisão podemos distinguir ainda a alta precisão topográfica e a muito alta precisão ou alta precisão geodésica.

		<u>Erros Toleráveis</u>
Baixa precisão.....		1 ou 2 dm por 100 metros
Média precisão.....		1 ou 2 cm por 100 metros
Alta precisão	Topográfica.....	1 ou 2 mm por 100 metros
	Geodésica.....	1 ou 2 mm por 1000 metros

Vejamos agora como se distribuem as diferentes precisões nos trabalhos topográficos correntes:

A baixa precisão utiliza-se normalmente em levantamentos de pormenor e excepcionalmente em poligonação (poligonais expeditas ou de baixa precisão).

A média precisão utiliza-se em poligonação e excepcionalmente em levantamento de pormenor (em zonas urbanas onde os terrenos sejam muito caros).

A alta precisão topográfica utiliza-se na medição de bases em triangulações topográficas independentes.

A alta precisão geodésica utiliza-se na medição de bases de triangulações geodésicas.

2.4.1 PROCESSOS DE MEDIÇÃO

Fundamentalmente temos a considerar dois processos de medição de distâncias: medição directa, caracterizada pela aposição à distância a medir de um escalão de

medida e *medição indirecta* que consiste em medir outras grandezas relacionadas com a grandeza a medir e calcular esta a partir dessas grandezas. Dentre as medições indirectas podemos ainda distinguir:

- 1) medições por via trigonométrica;
- 2) medições por via electromagnética.

Para se atingir a mesma precisão, os métodos directos exigem material mais simples e mais barato do que os métodos indirectos. Estes, contudo, são de mais rápida execução, pelo que a economia de tempo acarreta uma economia de conjunto.

Em certas circunstâncias, por exemplo em terrenos muito acidentados, ou em zonas de grande movimento, os métodos indirectos são os únicos de utilização possível.

Por outro lado, até à pouco tempo, apenas os métodos directos permitiam atingir alta precisão. No entanto, actualmente, os distanciómetros electrónicos permitem atingir a alta e mesmo a muito alta precisão.

2.4.1.1 Medição directa de distâncias

A medição directa de uma distância entre dois pontos faz-se comparando esta distância com o comprimento de um instrumento de medição (fita ou fio), segundo o alinhamento definido por esses pontos. É portanto necessário traçar esse alinhamento, sempre que a distância a medir seja demasiado grande para ser medida apenas com uma fitada. Neste caso, é necessário dividir a distância em vários troços, todos no mesmo alinhamento, o que se faz geralmente por intermédio de hastes de madeira ou de metal chamadas bandeirolas.

O material fundamental a utilizar é constituído por fitas ou fios com características que diferem consoante a precisão a atingir.

PARA BAIXA PRECISÃO:

Material necessário: - Fitas de plástico ou pano;

- Bandeirolas para os alinhamentos.

Os alinhamentos são definidos com bandeirolas nos extremos dos troços a medir. Sempre que seja necessário, podem colocam-se mais bandeirolas dentro de cada troço, sendo os alinhamentos feitos à vista desarmada de modo que o observador veja sempre duas bandeirolas olhando para trás ou para a frente. As distâncias entre as bandeirolas devem ser sempre que possível aproximadamente o comprimento da fita.

PARA MÉDIA PRECISÃO:

Material necessário: - Fios de aço;

- Um óculo para os alinhamentos;
- Estacas com ref. metálicas para definir os alinhamentos;
- Dinamómetro para medir a tensão na fita;
- Termómetro.

Em média precisão as fitas devem ser suspensas e a sua tensão medida com um dinamómetro, obrigando a que a sua tensão na altura da medição seja a recomendada pelo construtor. Os alinhamentos devem ser feitos com um óculo e definidos por meio de estacas, que na parte superior devem ter uma placa metálica com uma referência. Deve ainda medir-se a temperatura da fita, o que é feito com um termómetro.

PARA ALTA PRECISÃO

Material necessário: - Fitas ou fios de invar;

- Um óculo para os alinhamentos;
- Tripés com ref. metálicas;
- Dispositivos tensores;
- Termómetro.

Os fios ou fitas a utilizar são de uma liga metálica de aço e níquel, chamada invar, que tem um baixo coeficiente de dilatação, sendo portanto muito menos sensíveis às variações de temperatura do que as fitas de aço. Os fios e as fitas não devem no entanto ser torcidos ou sofrer choques, pois isso altera o seu comprimento e não devem ser enrolados em espiras pequenas para não se produzirem deformações.

Os fios têm sobre as fitas as vantagens de serem menos sensíveis à acção do vento mas, por outro lado, estes têm a vantagem de denunciar mais facilmente qualquer torção.

Os fios ou as fitas são estendidos, sendo mantidos esticados através de dispositivos de tensão (normalmente massas tensoras)

Os alinhamentos são feitos com um óculo e com tripés de referência, de modo que os pontos que delimitam os vários troços do comprimento a medir fiquem definidos com precisão.

As diferenças de nível entre as diferentes referências são calculadas com nivelamento de precisão.

Cada troço deve ser medido quatro vezes, com dois ou mais fios, sendo o valor adoptado para cada troço a média das medidas feitas.

CORRECÇÕES NA MEDIÇÃO DIRECTA DE DISTÂNCIAS

Correcção de inclinação

Como a distância que se pretende calcular não é a distância medida no terreno (L) mas sim a distância horizontal (D), é necessário subtrair ao valor medido uma correcção C_i tal que:

$$D = L - C_i$$

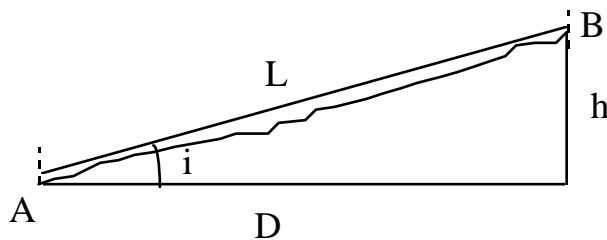


Figura 45 - D representa a distância horizontal entre os pontos A e B; e L a distância inclinada, medida por métodos directos.

Como

$$D = L \cos i$$

podemos concluir que:

$$C_i = L(1 - \cos i)$$

ou, como $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ tem-se que:

$$C_i = 2L \sin^2 \frac{i}{2}$$

Para se poder calcular o valor da correcção C_i é necessário conhecer o valor de i .

Determinação de i :

Em medições de baixa precisão faz-se com um teodolito uma visada para um ponto na vertical de B a uma distância de B igual à altura do instrumento colocado em A, e mede-se a distância zenital z , sendo depois $i = 100^g - z$.

Se o terreno não tiver toda a mesma inclinação e o comprimento a medir tiver sido dividido em vários troços, é necessário calcular o valor de i para cada troço.

Em trabalhos de baixa precisão pode-se utilizar o processo indicado na Figura 46, em que se mede directamente a distância horizontal de cada troço.

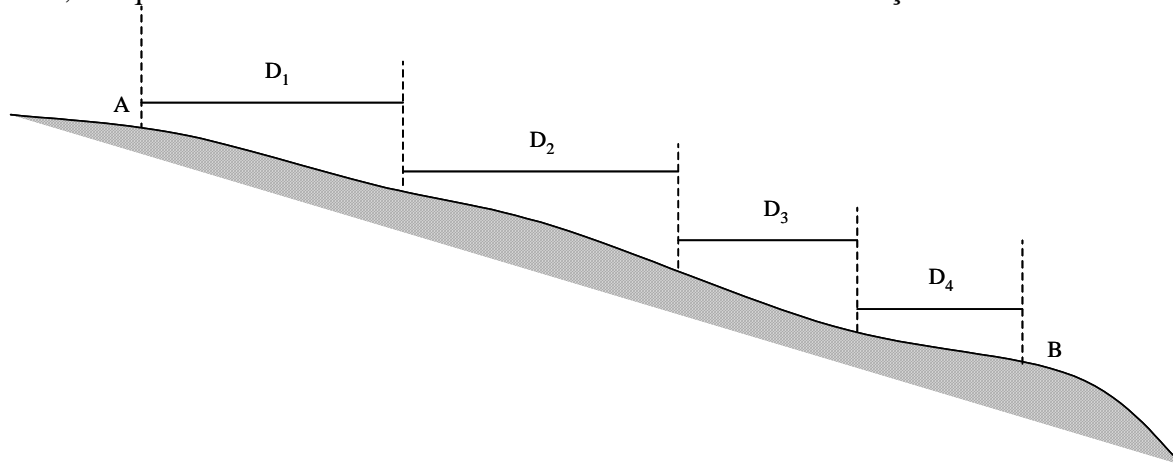


Figura 46 - Método de medição directa de distâncias que só pode ser utilizado quando é exigida baixa precisão.

Como o ângulo i nunca se consegue determinar com grande precisão, em trabalhos de média e alta precisão determina-se a correcção C a partir do desnível h entre A e B (ver Figura 45).

$$\text{Sendo } C_i = L(1 - \cos i); \quad \cos i = \sqrt{1 - \sin^2 i} \quad \text{e} \quad \sin i = \frac{h}{L}$$

vem:

$$C_i = L \left[1 - \left(1 - \frac{h^2}{L^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$\text{Como } 0 \leq \frac{h^2}{L^2} \leq 1$$

Podemos desenvolver $\sqrt{1 - \frac{h^2}{L^2}}$ em série de Taylor, em torno do ponto 0.

Sendo o desenvolvimento de $f(x)$ em série de Taylor em torno de um ponto a dado por:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \frac{f'''(a)(x-a)^3}{3!} + \dots$$

para $a = 0$ vem:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + \dots$$

Para $f(x) = (1-x)^{\frac{1}{2}}$, com $x = \frac{h^2}{L^2}$ vem:

$$\left(1 - \frac{h^2}{L^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{h^2}{L^2} - \frac{1}{8} \frac{h^4}{L^4} - \frac{1}{16} \frac{h^6}{L^6} - \dots$$

$$\text{Logo: } C_i = L \left[1 - \left(1 - \frac{h^2}{L^2}\right)^{\frac{1}{2}} \right] = L \left[\frac{1}{2} \frac{h^2}{L^2} + \frac{1}{8} \frac{h^4}{L^4} + \frac{1}{16} \frac{h^6}{L^6} + \dots \right]$$

Dentro do último parêntesis recto temos uma série convergente, pois é majorada pela série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{h^2}{L^2}\right)^n$, que é convergente.

Na prática, verifica-se que o termo à sexta é sempre desprezável e assim considera-se:

$$C_i = C_1 + C_2$$

sendo

$$\boxed{C_1 = \frac{h^2}{2L}} \quad \text{e} \quad \boxed{C_2 = \frac{h^4}{8L^3} = \frac{C_1^2}{2L}}$$

Normalmente utiliza-se apenas a primeira parcela da correcção (C_1).

Correcção de curvatura

Quando a fita usada para a medição da distância for apoiada em estacas, ficando portanto suspensa, é necessário aplicar ao valor medido uma correcção, sempre negativa, devido à curvatura da fita. Seja AB a distância a medir e suponha-se que a fita

é suspensa em dois suportes situados ao mesmo nível e submetida a uma tensão T . Ela toma, por estar sujeita ao seu próprio peso, a forma de uma curva, chamada catenária.

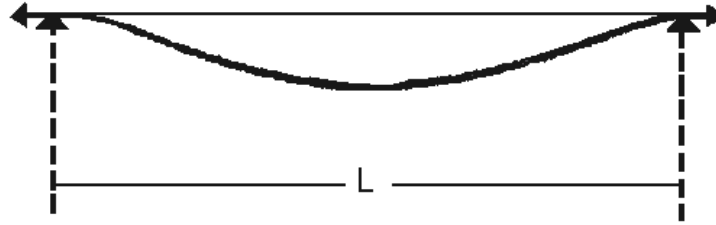


Figura 47 - Medição do comprimento L com uma fita apoiada nos pontos A e B, que definem os extremos do comprimento.

A correcção C a subtrair ao valor medido L é dada por:

$$C_c = \frac{L}{24} \left(\frac{pL}{T} \right)^2$$

sendo L o comprimento medido e p o peso da fita por metro. Esta expressão foi deduzida para o caso em que os pontos A e B, onde é apoiada a fita, estão ao mesmo nível. Normalmente, desde que a diferença de nível não seja muito grande, utiliza-se sempre esta expressão. No entanto, em medições de alta precisão, a correcção deve ser calculada com rigor, existindo tabelas para esse fim em que o valor da correcção é dado em função do desnível entre os pontos.

Correcção de temperatura

Como a temperatura a que se efectua a medição é normalmente diferente da temperatura de aferição da fita, à medida obtida é necessário aplicar uma correcção que é dada pela fórmula:

$$C_t = KL (t - t_0)$$

sendo: $t_0 \rightarrow$ Temperatura de aferição

$t \rightarrow$ Temperatura da fita no momento da medição

$K \rightarrow$ Coeficiente de dilatação do metal de que é feita a fita

$L \rightarrow$ Comprimento medido

Nas medições de baixa precisão não é necessário ter em consideração a correcção de temperatura.

Existem ainda outras correcções a utilizar quando se fazem medições de alta precisão, sendo o valor dessas correcções calculadas através de tabelas fornecidas pelas casas construtoras.

2.4.2 MEDIÇÃO INDIRECTA DE DISTÂNCIAS

2.4.2.1 Medição de distâncias por via trigonométrica

POR TRIANGULAÇÃO

A distância que se pretende é o lado de um triângulo, conhecendo-se os elementos necessários para calcular o comprimento desse lado.

POR ESTADIMETRIA

Este tipo de medição é realizado com o auxílio de uma estadia. Chama-se estadia a qualquer dispositivo óptico que permita definir duas linhas de visada concorrentes num ponto conhecido, chamado centro da estadia ou centro de analatismo e formando um ângulo conhecido, chamado ângulo de analatismo ou ângulo paralático.

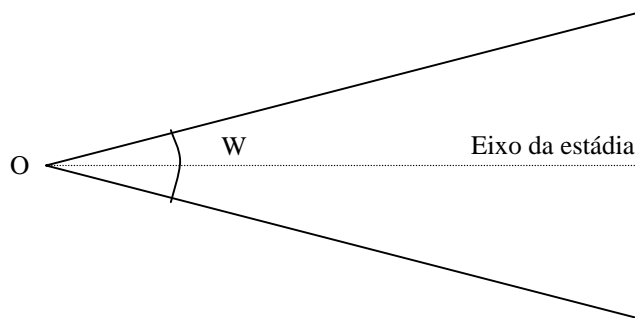


Figura 48 - O ponto O é o centro da estadia representada na figura e o ângulo w o ângulo de analatismo ou ângulo paralático.

Pode-se definir uma estadia com a luneta de um teodolito, desde que o seu retículo disponha de referências simétricas relativamente ao seu centro, como por exemplo os traços (1) e (2) ou (3) e (4) representados na Figura 49. Um teodolito com uma luneta que permita definir uma estadia (luneta estadiada) chama-se um taqueómetro.

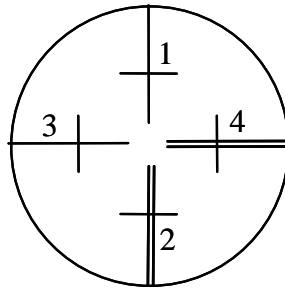


Figura 49 - Luneta estadiada. Os traços (1) e (2) são utilizados para miras verticais e os traços (3) e (4) para miras horizontais.

Princípio da estadia: a distância do centro de analatismo a uma mira colocada perpendicularmente ao eixo da estadia é directamente proporcional ao comprimento do segmento determinado na mira pelas linhas estadimétricas (Figura 50).

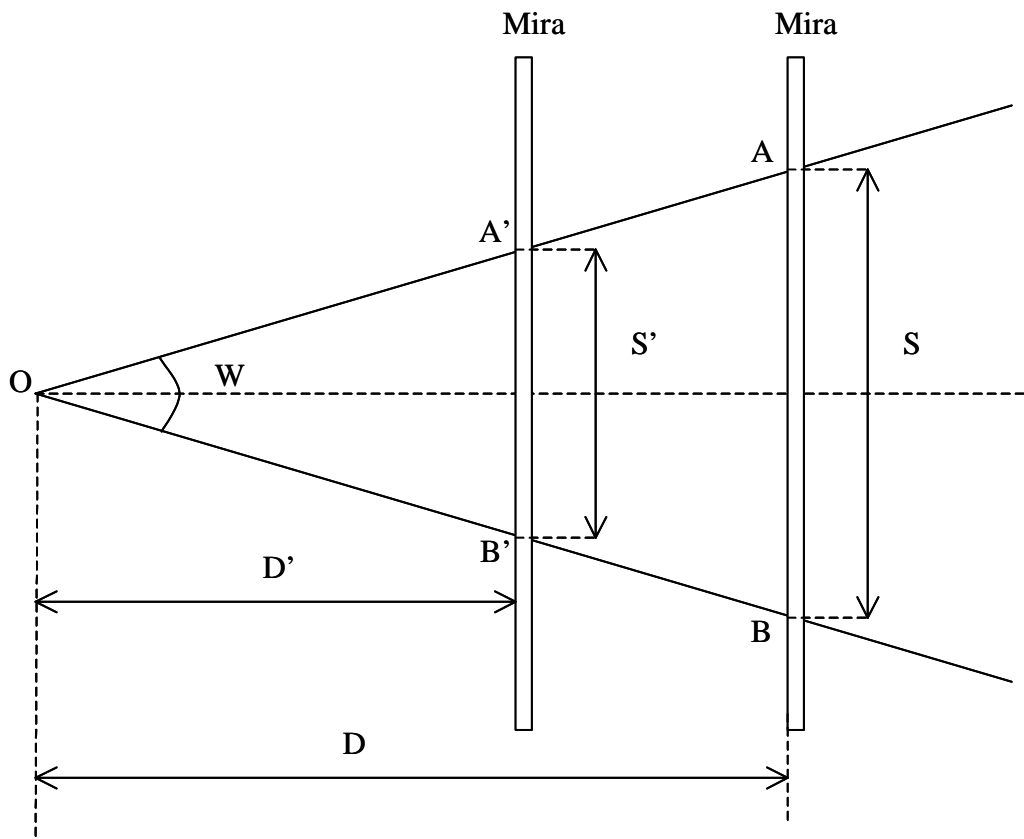


Figura 50 - Representação de uma mira colocada perpendicularmente a uma estadia em duas posições a distâncias diferentes D e D'.

Como o triângulo $[AOB]$ é semelhante ao triângulo $[A'OB']$

$$\frac{D}{S} = \frac{D'}{S'} = k$$

sendo k a constante estadimétrica, tem-se então que:

$$D = KS$$

Observando a Figura 50 pode-se concluir que:

$$\frac{D}{S/2} = \cot \frac{w}{2} \Rightarrow D = \frac{1}{2} \cot \left(\frac{w}{2} \right) S$$

logo:

$$K = \frac{1}{2} \cot \left(\frac{w}{2} \right)$$

Normalmente os teodolitos são construídos de modo que $K = 100$ o que implica que $w = 0,6366$ g.

FÓRMULAS TAQUEOMÉTRICAS PARA MIRA VERTICAL

O modo como foi enunciado o princípio da estadia implicava a perpendicularidade entre o eixo da estadia e a mira. No entanto não é cómodo cumprir esta condição, sendo mais fácil colocar a mira vertical, para o que se pode utilizar uma nivela esférica adaptada à mira e que deve ser mantida calada enquanto o observador visa a mira.

É então necessário deduzir fórmulas que se possam aplicar a este caso, pois normalmente o eixo da estadia não fica perpendicular à mira.

Vamos supor que se pretende determinar a distância horizontal D entre os pontos A e B do terreno. Estaciona-se um taqueómetro em A e coloca-se uma mira em B, segura por um ajudante, que deve ter o cuidado de manter a nivela calada durante a medição, e portanto a mira vertical.

Apona-se a luneta do taqueómetro para a mira e a estadia determina nela o segmento \overline{MN} (ver Figura 51). Para ser possível aplicar o princípio da estadia vamos considerar uma mira fictícia perpendicular em O ao eixo da estadia e seja $\overline{M'N'}$ o segmento que seria determinado pela estadia nessa mira fictícia.

Ter-se-ia então:

$$D' = K \overline{M'N'}$$

No entanto, sendo as leituras feitas na mira verdadeira, o segmento que se obtém é \overline{MN} e não $\overline{M'N'}$, contudo pode-se determinar $\overline{M'N'}$ em função de \overline{MN} e do ângulo zenital z.

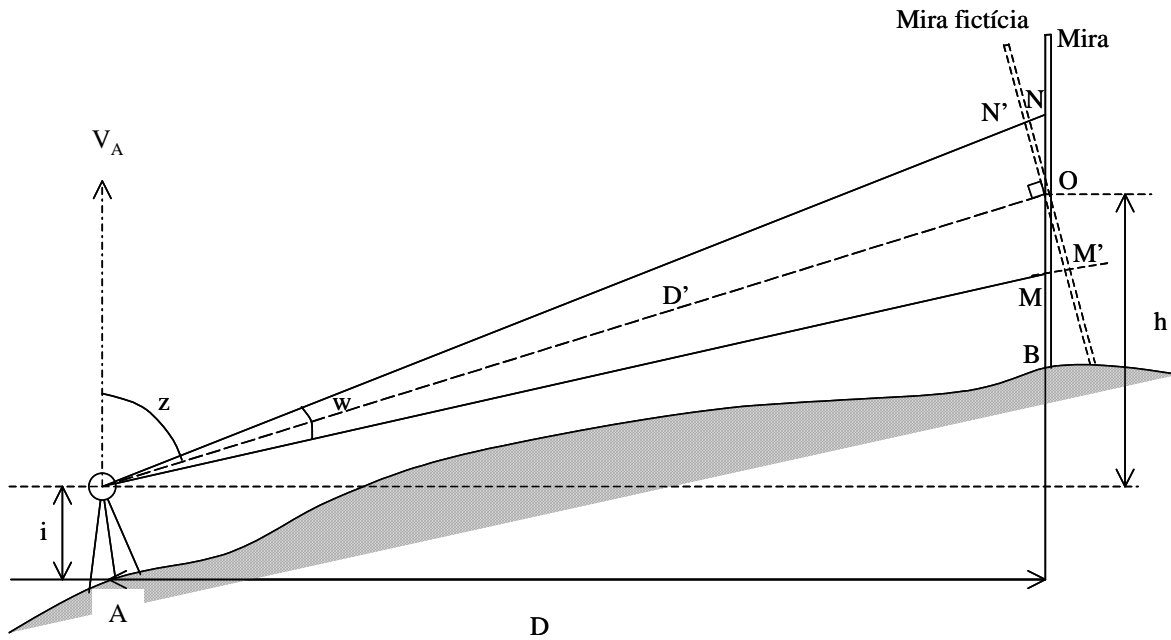


Figura 51 - Taqueómetro estacionado em A e uma mira colocada verticalmente no ponto B.

Note-se que o triângulo [NON'] é aproximadamente rectangular em N' ($\hat{N}' = 100^g + \frac{w}{2}$, sendo habitualmente $\frac{w}{2} = 0.3183^g$) podemos então escrever:

$$\overline{M'N'} \cong \overline{MN} \sin z$$

donde:

$$D' \cong k \overline{MN} \sin z$$

e como $D = D' \sin z$ pode-se escrever

$$D = k \overline{MN} \sin^2 z$$

Na prática designa-se usualmente o segmento \overline{MN} por S e o produto KS por G (número gerador). Deste modo, sendo $G=KS$ e $K=100$ tem-se:

$$\boxed{D = G \sin^2 z}$$

Fórmula taqueométrica da distância para mira vertical

O comprimento S é obtido através das leituras na mira correspondentes aos traços superior (ℓ_s) e inferior (ℓ_i) do retículo, que definem a estadia. Então:

$$S = \ell_s - \ell_i$$

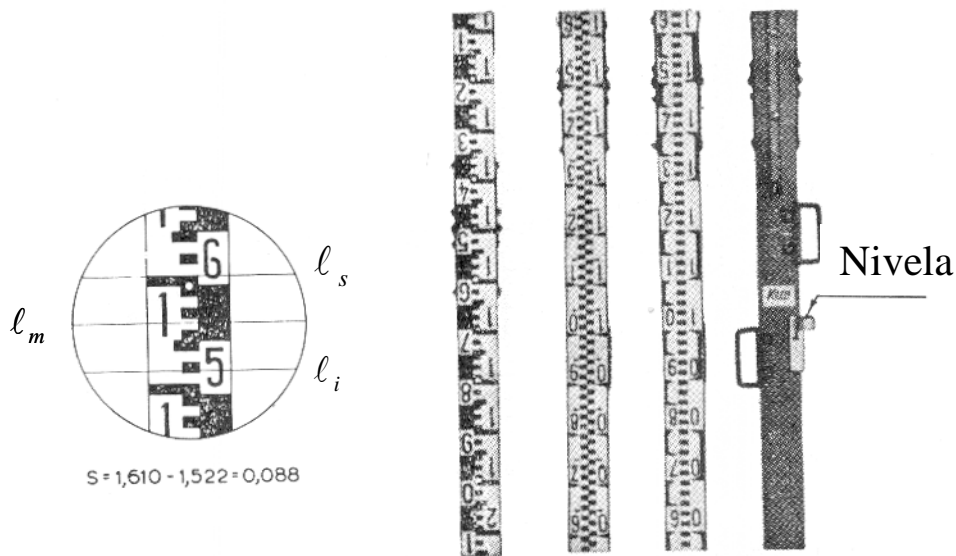


Figura 52 - Miras verticais e imagem de uma mira vista através da luneta de um taqueómetro.

Pode ainda fazer-se uma leitura na mira correspondente ao traço médio do retículo, normalmente designada por leitura média (l_m). Em rigor $\overline{OM} \neq \overline{ON}$, no entanto o erro daí resultante é desprezável. Sendo assim, podemos ainda calcular S através de:

$$S = 2(l_s - l_m) \quad \text{ou} \quad S = 2(l_m - l_i)$$

$$\text{com: } l_m = \frac{l_s + l_i}{2}$$

Nota: O erro resultante de considerar recto o ângulo em N' é muito menor do que o que resulta dos erros que se cometem na medição de z e na leitura de \overline{MN} , não só porque a mira oscila durante a medição, mas também porque normalmente a graduação da mira não tem divisões inferiores ao centímetro.

Pode ainda deduzir-se a fórmula taqueométrica do desnível para mira vertical, o que será feito dentro do capítulo do nivelamento.

ERROS NA MEDIÇÃO ESTADIMÉTRICA

Analisemos as possíveis causas de erro para o cálculo da distância através de estadimetria. Podemos ter:

- Erro em K

Com o uso, pode acontecer que a constante estadimétrica passe a não ter o valor dado pelo construtor, se bem que esta possibilidade seja reduzida na maior parte dos

instrumentos modernos. Quando o operador suspeite de um erro em K deve enviar o instrumento à casa construtora para rectificação.

- Erro na medição do ângulo zenital z (já estudado).

- Erros em S: {
 Erro de paralaxe da imagem
 Erro de refração atmosférica
 Erro de ondulação da imagem
 Erro de mobilidade da mira
 Erro de falta de verticalidade da mira.

As precauções a tomar para obter maior precisão no processo estadimétrico incidem essencialmente na medição de S. Deste modo, deve ter-se o cuidado de verificar se não existe paralaxe da imagem, pelo processo já conhecido.

Quanto à influência da refração atmosférica, devido às diferenças de temperatura entre as camadas de ar mais próximas do solo e as camadas mais altas, um raio visual rasante e outro mais elevado têm curvaturas diferentes, o que introduz um erro na leitura de S. Por este motivo deve evitar-se fazer leituras na mira junto ao solo.

A ondulação da imagem resulta da subida de ar quente, que origina variações de densidade e provoca uma ondulação da imagem da mira, não permitindo fazer leituras com precisão.

As miras vulgares são normalmente seguras por um operador (porta - miras) que as não consegue manter rigorosamente fixas, especialmente em dias de vento. Deste modo, como as leituras na mira não são efectuadas simultaneamente, (nada garante que, por exemplo, quando se faz a leitura do fio inferior a leitura correspondente ao fio superior seja a mesma que foi feita) pode resultar um erro para o valor de S.

A verticalidade da mira consegue-se com o auxílio de uma nivela esférica que lhe é solidária, no entanto, pode acontecer que esta não esteja calada quando são feitas as leituras e consequentemente a mira não esteja vertical.

2.4.2.2 Medição electrónica de distâncias (MED)

Com a utilização de distanciómetros consegue-se, rápida e comodamente, obter alta e muito alta precisão na medição de distâncias curtas ou longas. O seu grande

automatismo reduz a importância do observador; este limita-se praticamente a orientar a direcção do feixe emitido pelo instrumento e a disposição dos reflectores.

A MEDIÇÃO COM SISTEMAS ELECTRO-ÓPTICOS

A maior parte dos instrumentos electro-ópticos modernos utilizam luz visível de lasers Hélio-Néon com $\lambda = 0.63 \mu\text{m}$, ou luz infravermelha não visível de díodos de Arsenieto de Gálio com $\lambda = 0.9 \mu\text{m}$.

Nos sistemas electro-ópticos, é emitida pelo instrumento um feixe luminoso, cuja intensidade é modulada electronicamente antes de ser transmitida para a outra extremidade do comprimento a medir, onde é colocado um reflector. Esta modulação sinusoidal da intensidade da luz é equivalente a apagar e ligar uma luz com um interruptor, e é feita de modo a variar de zero (correspondente aos 0°) até um máximo de luz aos 90° , voltando novamente a zero aos 180° , a um segundo máximo aos 270° e a zero aos 360° . A medição da distância é feita colocando o transmissor numa extremidade da distância a medir e um reflector (ou mais) na outra extremidade.

O distanciómetro transmite o feixe de luz modulado para o reflector, que o reflecte de volta ao emissor, onde é convertido num sinal eléctrico, permitindo fazer uma comparação de fase entre o sinal emitido e recebido.

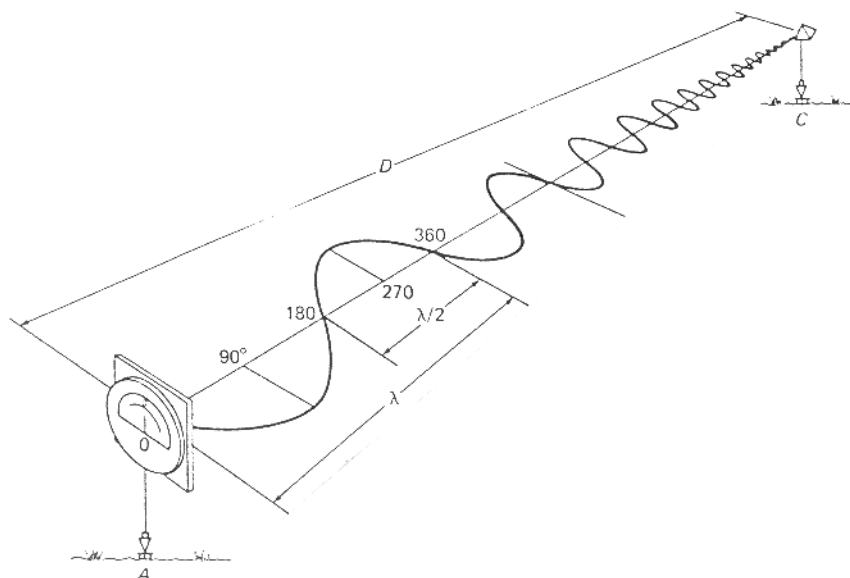


Figura 53 - Modulação do sinal emitido pelo distanciómetro.

Em todos os sistemas de MED verifica-se a importante interacção entre o tempo (t), a distância (D) e a velocidade (v)

$$D = t \times v$$

No entanto, nos instrumentos modernos, o tempo não é medido directamente, sendo a distância medida com base no comprimento de onda λ da modulação do feixe emitido.

A distância é obtida determinando o número inteiro m de vezes que o comprimento de onda da modulação cabe na distância percorrida pelo feixe, mais a parte fraccionária p , que é medida através da diferença de fase entre o sinal modulado transmitido e o sinal recebido. Deste modo, como a distância a medir é percorrida duas vezes, temos:

$$D = \frac{1}{2}(m\lambda + p\lambda) \quad (1)$$

Sendo c a velocidade da luz durante a medição e T o período da modulação temos então:

$$\lambda = cT$$

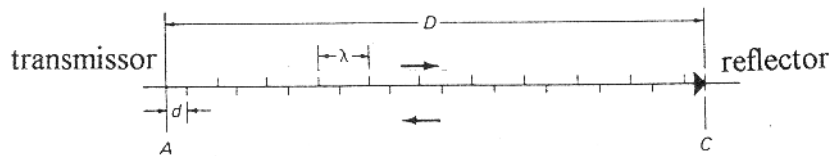


Figura 54 - Princípio de medição de distâncias com distanciômetros ($d = p\lambda$).

Como $T = \frac{1}{f}$, sendo f a frequência da modulação, temos:

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad (2)$$

A velocidade de propagação da luz é obtida utilizando o índice de refração n da atmosfera no instante da medição, através de:

$$n = \frac{c_0}{c}$$

sendo $c_0 = 299792.5$ Km/s a velocidade da luz no vazio. O índice de refração é determinado em função dos seguintes parâmetros atmosféricos: temperatura, pressão, humidade e do comprimento de onda da portadora. Desta forma a equação (2) pode ser reescrita da forma:

$$\lambda = \frac{c_o}{fn}$$

Substituindo em (1) λ pelo valor encontrado, obtemos para a distância D a medir, a expressão:

$$D = m \frac{c_o}{2fn} + p \frac{c_o}{2fn}$$

Representando o valor da diferença de fase por $\Delta\Phi$ e sabendo que uma revolução é equivalente a 2π rad., podemos escrever:

$$D = m \frac{c_o}{2fn} + \frac{\Delta\Phi}{2\pi} \frac{c_o}{2fn}$$

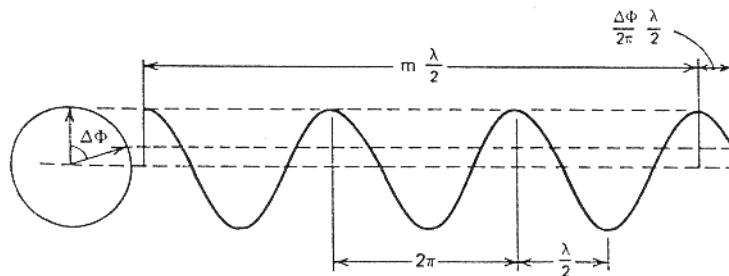


Figura 55 - $\Delta\Phi$ representa a diferença de fase entre o sinal emitido e o sinal recebido.

Para obter a distância final medida é necessário adicionar a esta expressão mais três parcelas, que são:

- 1) A constante k do instrumento - Existem alguns atrasos e excentricidades nas componentes electrónicas do instrumento e do reflector. Os construtores dos instrumentos chamam à soma destes atrasos a constante k do instrumento e indicam-na nos manuais deste.
- 2) A correcção combinada z do zero e de não linearidade - Esta correcção é o resultado do fenómeno de a constante k flutuar ciclicamente com a variação da distância a medir. Existem métodos para determinar estas correcções, que não serão estudados.
- 3) A correcção e - Correcção de centragem do instrumento em relação ao ponto estacionado, pode ser omitida nalgumas aplicações.

Deste modo a distância total medida é:

$$D = m \frac{c_o}{2fn} + \frac{\Delta\Phi}{2\pi} \frac{c_o}{2fn} + k + z + e$$

Cálculo de distâncias horizontais e verticais

As distâncias medidas com os distanciômetros são distâncias inclinadas, sendo necessário entrar com a inclinação da visada para se obterem distâncias horizontais e verticais.

Se se utilizar uma estação total (distanciômetro incorporado num teodolito) podem-se obter imediatamente a distância inclinada ($D_{incl.}$), horizontal ($D_{hor.}$) e vertical ($D_{ver.}$) do distanciômetro ao reflector:

$$D_{hor.} = D_{incl.} \sin z$$

$$D_{ver.} = D_{incl.} \cos z$$

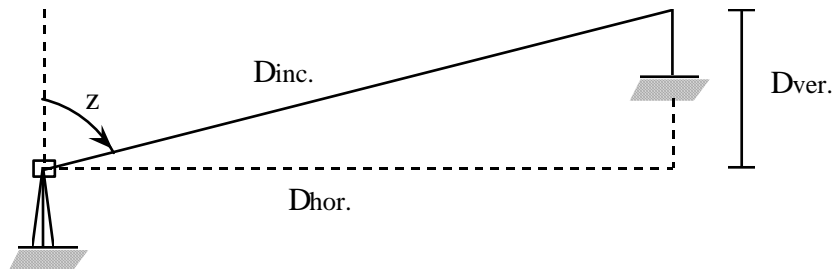


Figura 56 - Distâncias que se podem obter directamente numa estação total.

Nota: As distâncias $D_{hor.}$, $D_{ver.}$ e $D_{incl.}$ indicadas são definidas pelo centro do distanciômetro e pelo reflector, e não as distâncias entre os pontos onde estes são colocados. Para a obtenção destas últimas é necessário ter em consideração as alturas do distanciômetro e do reflector.

2.5 Nivelamento

2.5.1 NOÇÕES DE ALTIMETRIA

Consideram-se pertencentes à altimetria todas operações que permitam obter as cotas dos pontos do terreno.

Cota de um ponto é a distância desse ponto a uma determinada superfície de referência. Em topografia esta distância é sempre medida segundo a vertical do lugar e como superfície de referência utiliza-se normalmente o Geóide, sendo neste caso as cotas também designadas por altitudes.

Para a determinação das altitudes é necessário conhecer pontos do Geóide, e portanto, definir o nível médio das águas do mar, o que se consegue através de instrumentos registadores de marés, os marégrafos.

Os marégrafos são colocados nas costas marítimas, usualmente nos estuários dos rios, devido ao facto do mar ser aí mais calmo. Em virtude das discordâncias que se notam entre os valores do nível médio das águas do mar em diversos pontos, discordâncias essas devidas principalmente às correntes marítimas e às irregularidades das marés (geralmente causadas pelo vento), utiliza-se em cada país um único marégrafo. Em Portugal o marégrafo de referência encontra-se em Cascais.

A diferença de nível entre dois pontos A e B é dada por:

$$dN_{AB} = N_B - N_A$$

Sendo N_A a cota do ponto A e N_B a cota do ponto B.

A determinação das diferenças de nível faz-se por intermédio de uma operação topográfica a que se dá o nome de nivelamento.

2.5.2 MÉTODOS DE NIVELAMENTO

A determinação das diferenças de nível pode ser feita por três métodos diferentes, dando origem respectivamente a três tipos de nivelamento.

- 1) Método trigonométrico ou indirecto → Nivelamento trigonométrico
- 2) Método geométrico ou directo → Nivelamento geométrico
- 3) Método barométrico → Nivelamento barométrico

Quanto à precisão, os métodos apresentados têm as seguintes tolerâncias:

$$\text{Nivelamento geométrico} \begin{cases} \text{Alta precisão - erro tolerável} \leq 1\text{mm/Km} \\ \text{Ordinario - erro tolerável} \leq 1\text{cm/Km} \end{cases}$$

$$\text{Nivelamento trigonométrico - erro tolerável} \leq 1\text{dm/Km}$$

$$\text{Nivelamento barométrico - erro tolerável} \leq 1\text{m/Km}$$

2.5.2.1 Nivelamento trigonométrico

Com este método podemos determinar o desnível entre dois pontos A e B do terreno, conhecendo a distância horizontal D entre eles e o ângulo zenital z da linha de visada.

Da Figura 57 conclui-se que a distância vertical h, conhecida como altura trigonométrica é dada por:

$$\boxed{h = D \cot z}$$

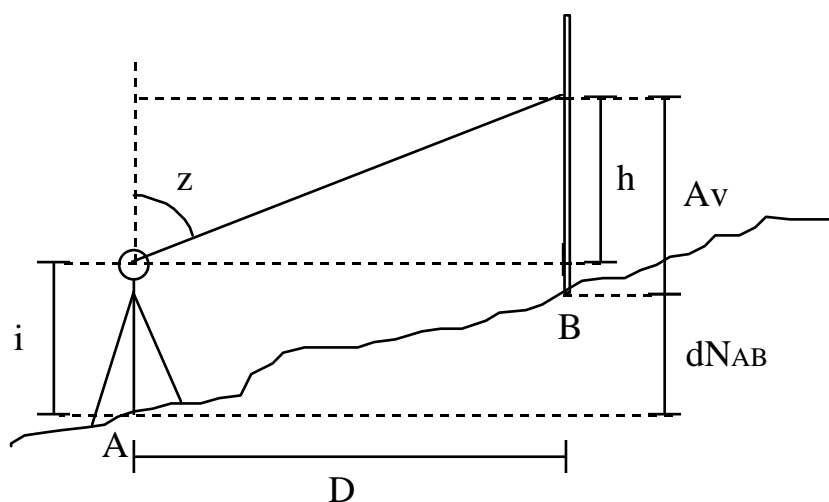


Figura 57 - Para a determinação da diferença de nível entre A e B (dN_{AB}) com nivelamento trigonométrico, estacionou-se um teodolito no ponto A e visou-se um ponto na vertical do ponto B.

e portanto a diferença de nível entre A e B é dada por:

$$dN_{AB} = h + i - A_v$$

Note-se que quando é visada uma mira vertical colocada em B, $A_v = \ell_m$ e portanto:

$$dN_{AB} = h + i - \ell_m \quad \text{Fórmula taqueométrica do desnível para mira vertical}$$

Quando a distância D for superior a 500 m tem que se ter em conta a refração atmosférica e o efeito da curvatura terrestre, determinando-se h a partir da seguinte expressão, chamada *fórmula topográfica*:

$$h = D \cot z + qD^2$$

Chamando-se à parcela qD^2 *depressão do horizonte*. Nesta parcela D representa a distância horizontal entre A e B e

$$q = \frac{0,5 - n}{R}$$

sendo R o raio da Terra e n o coeficiente de refração da atmosfera, valor que varia entre 0.06 e 0.08.

O termo qD^2 pode escrever-se

$$qD^2 = \frac{0.5}{R} D^2 - \frac{n}{R} D^2 \quad (1)$$

e vemos então que a primeira parcela apenas depende de R e D, sendo portanto relativa à esfericidade da Terra. A segunda parcela, que depende também do valor do coeficiente de refração n, traduz a influência da refração atmosférica.

Como n varia entre 0.06 e 0.08, observando a fórmula (1) facilmente se vê que o efeito da curvatura da Terra é 6 a 8 vezes maior que o efeito da refração atmosférica e portanto a parcela qD^2 é sempre positiva.

Na prática usa-se um valor aproximado para a depressão do horizonte. Efectivamente, se considerarmos $n = 0.07$ e $R = 6400000$ m tem-se:

$$qD^2 = \frac{0.43}{6400000} D^2 \quad (\text{com } D \text{ expresso em metros})$$

ou, se utilizarmos o valor de D expresso em Km, teremos

$$qD^2 = \frac{0.43}{6400000} (D \times 1000)^2 = \frac{0.43}{6400000} D^2 \times 1000000 \approx \frac{D^2}{15}$$

utilizando-se normalmente esta expressão aproximada para obter o valor de qD^2 . Assim,

$$qD^2 = \frac{D^2}{15} \text{ metros}$$

onde o valor de D é introduzido em Km.

Através da fórmula anterior se vê que a depressão do horizonte cresce com o quadrado da distância. Para uma distância horizontal de 15 Km a depressão do horizonte é já de 15 m e para uma distância de 150 Km, a depressão do horizonte será de 1500 m.

2.5.2.2 *Nivelamento Geométrico*

Este tipo de nivelamento utiliza instrumentos chamados *níveis*, cuja principal característica é a de definirem com grande precisão linhas de visada horizontais. A diferença de nível entre os pontos A e B obtém-se através da diferença das leituras feitas numa mira vertical colocada sucessivamente nos pontos A e B, com um nível estacionado em qualquer ponto do terreno. Desta forma, de acordo com a Figura 58, tem-se:

$$dN_{AB} = l_A - l_B$$

sendo l_A a leitura feita na mira colocada em A e l_B a leitura feita na mira colocada em B.

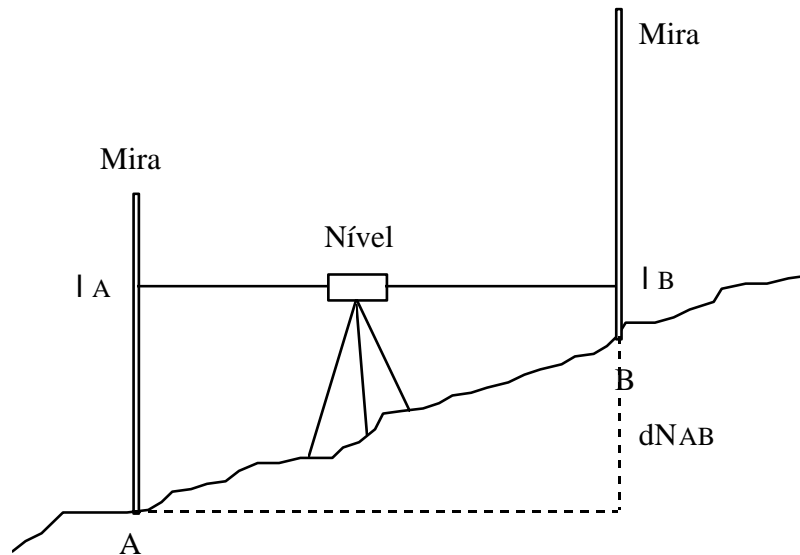
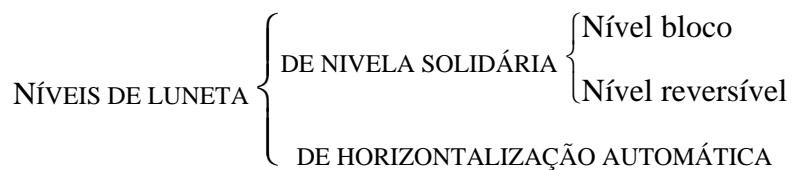


Figura 58 - Nivelamento geométrico para a determinação da diferença de nível entre os pontos A e B (dN_{AB}).

Estudo dos níveis

Os níveis de luneta podem classificar-se da seguinte forma:



Nível bloco

As principais componentes de um nível bloco são a luneta e a nivela, que podem rodar conjuntamente em torno de um eixo chamado eixo principal.

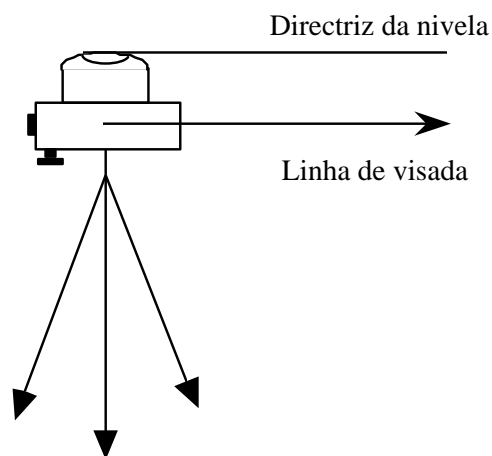


Figura 59 - Representação esquemática de um nível bloco.

O nível bloco monta-se sobre um tripé e na sua base existem três parafusos nivelantes, ou um dispositivo de rótula, que permitem verticalizar aproximadamente o eixo principal, verticalização essa feita com o auxílio de uma nivela esférica existente na base do nível e solidária com o eixo principal. Para a horizontalização rigorosa da linha de pontaria é necessário calar, com o auxílio de um parafuso chamado parafuso de inclinação, uma nivela de grande sensibilidade, cuja directriz deve ser paralela à linha de visada.

Um nível-bloco está construído de acordo com a sua idealização teórica quando, estando a nivela calada, a linha de pontaria fica horizontal e o fio nivelador (traço horizontal do retículo) fica também horizontal. Desta forma temos as seguintes condições de construção e de estação:

CONDIÇÃO DE ESTAÇÃO:

- Eixo principal vertical

Um nível bloco está em estação quando o eixo principal estiver vertical. Esta condição não é em geral rigorosamente cumprida, pois a horizontalização do eixo óptico, que é o objectivo a cumprir, é conseguida com o auxílio do parafuso de inclinação.

CONDIÇÃO DE CONSTRUÇÃO:

- Paralelismo entre a directriz da nivela e o eixo óptico da luneta.

De facto sendo a directriz da nivela paralela à linha de visada, quando a nivela estiver calada a linha de visada fica horizontal.

Não se verificando a condição de construção temos o chamado erro de inclinação, que será estudado mais à frente. Nos níveis bloco o erro de inclinação pode ser rectificadado, através de procedimentos que não serão estudados neste curso, quando a sua influência sobre a diferença de nível for superior a 2 ou 3 mm.

Nível de horizontalização automática

Os níveis deste tipo não têm qualquer nivela associada à luneta nem parafuso de inclinação. Um dispositivo óptico pesado, intercalado no campo óptico da luneta permite, pela acção da gravidade, compensar qualquer inclinação residual do eixo da luneta após a verticalização do eixo principal, dando origem à horizontalização do eixo óptico. Este dispositivo, que tem o nome de compensador, é essencialmente constituído por um conjunto de 3 prismas, um dos quais de reflexão total, ou por um conjunto de 2

prismas e um espelho plano, suspensos do corpo da luneta de modo que a sua posição relativa varie com a inclinação da luneta (ver Figura 60).

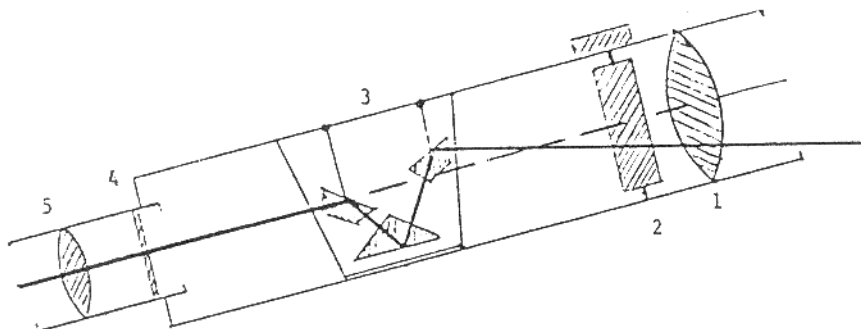


Figura 60 Representação esquemática de um nível de horizontalização automática. 1 - objectiva; 2 - lente de focagem interna; 3 - compensador; 4- retículo; 5 - ocular.

CONDIÇÃO DE ESTAÇÃO:

Tal como para o nível-bloco, a condição de estação de um nível de horizontalização automática é que o eixo principal esteja vertical.

Realizada esta condição, o que se consegue com três parafusos nivelantes existentes na base do nível e com uma nivela esférica solidária com o eixo principal, o compensador entra em funcionamento, colocando a linha de visada horizontal.

Enquanto o eixo principal não estiver sensivelmente vertical, o compensador fica encostado ao corpo da luneta e fica bloqueado. Sendo assim, a nivela esférica solidária com o eixo principal deve ter sensibilidade suficiente para que o sistema compensador possa actuar. Depois de calada a nivela deve esperar-se alguns segundos antes de fazer as leituras nas miras, para que o compensador deixe de oscilar.

Os níveis de horizontalização automática têm a vantagem de permitirem uma considerável economia de tempo em relação aos outros tipos de níveis. No entanto, têm a desvantagem de serem mais caros e permitirem atingir uma precisão inferior, excepto no caso em que o terreno seja pouco firme, tornando-se muito difícil calar a nivela de um nível bloco.

Estudo do erro de inclinação de um nível

Como já foi dito, o erro de inclinação surge do facto de a visada feita com o nível não ser rigorosamente horizontal, existindo uma pequena inclinação em relação à horizontal que vamos designar por β (ver Figura 61).

Se a linha de pontaria estiver para cima da horizontal, o erro de inclinação β é positivo, se a linha de pontaria descer em relação à horizontal β é negativo.

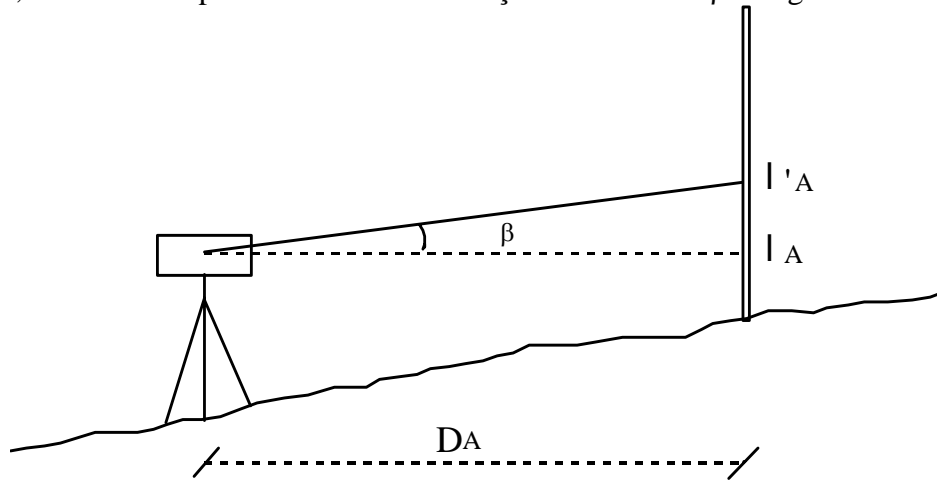


Figura 61 - O erro de inclinação do nível representado é β , fazendo-se devido a esse erro a leitura l'_A na mira, em vez da leitura l_A .

$$\text{Como } \tan \beta = \frac{l'_A - l_A}{D_A} \Rightarrow l'_A - l_A = D_A \tan \beta$$

tem-se que:

$$l_A = l'_A - D_A \tan \beta$$

Existem métodos para determinar a diferença de nível correcta entre dois pontos, independentemente da existência ou não de erro de inclinação.

Método das visadas iguais:

Este método consiste em estacionar o nível a igual distância dos dois pontos onde são colocadas as miras. No caso da Figura 62 as miras são colocadas nos pontos A e B, sendo $D_A = D_B$.

Se não houvesse erro de inclinação teríamos as leituras na mira l_A e l_B , sendo

$$dN_{AB} = l_A - l_B$$

Existindo erro de inclinação teremos as leituras l'_A e l'_B , no entanto,

$$dN'_{AB} = l'_A - l'_B = (l_A + D_A \tan \beta) - (l_B + D_B \tan \beta)$$

$$= l_A - l_B + (D_A \tan \beta - D_B \tan \beta) = \quad (\text{em virtude de } D_A = D_B)$$

$$= l_A - l_B = dN_{AB}$$

Poder-se-ia ter imediatamente verificado que, como os triângulos são semelhantes, temos:

$$l'A - l_A = l'B - l_B \Rightarrow l'A - l'B = l_A - l_B = dN_{AB}$$

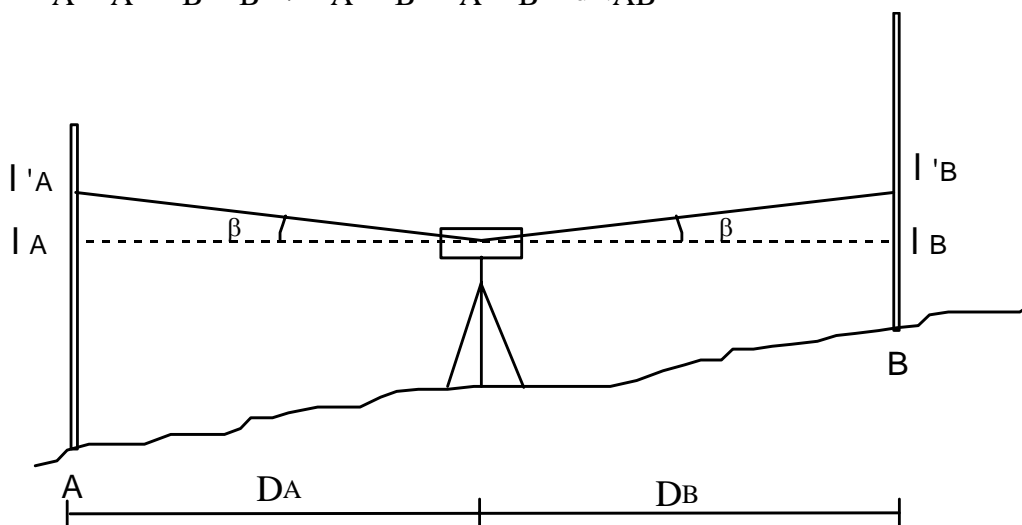


Figura 62 - Estacionamento de um nível a igual distância de A e B ($D_A = D_B$).

Método das visadas recíprocas

Neste método fazem-se dois estacionamentos com o nível, de forma a que a distancia aos pontos A e B seja sensivelmente a mesma e nas mesmas condições. Ver exemplo na Figura 63

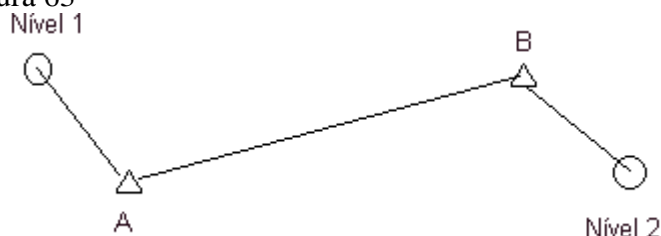


Figura 63 – Posição dos níveis relativamente aos pontos A e B quando da utilização do método das visadas recíprocas.

Ao estacionar em (1), junto ao ponto A, cala-se a nivela e, se esta estiver rectificadada, a linha de visada fica horizontal, obtendo-se nas miras as leituras l_{a_1} e l_{f_1} , sendo a diferença de nível correcta dada por

$$dN_{AB} = l_{a_1} - l_{f_1}.$$

Estando a nivela desrectificada, e sendo i o erro de inclinação, obtém-se na mira as leituras l'_{a_1} e l'_{f_1} , que conduzem a um valor incorrecto da diferença de nível

$$dN'_{AB} = l'_{a_1} - l'_{f_1}$$

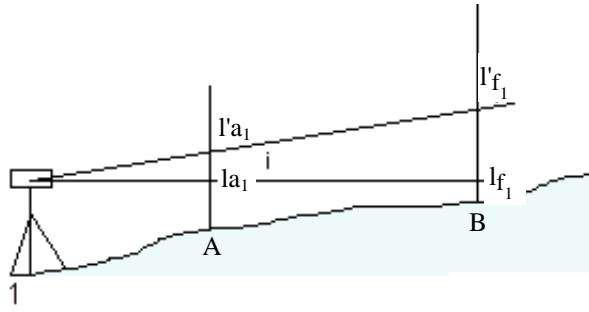


Figura 64 – Visadas feitas do nível estacionado em 1 para os pontos A e B.

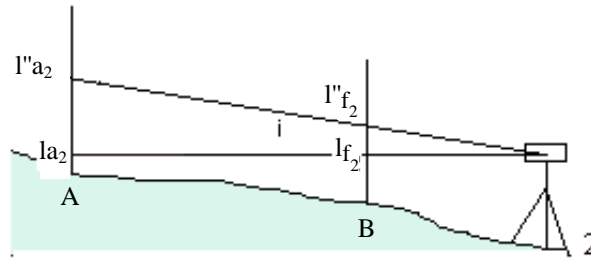


Figura 65 - Visadas feitas do nível estacionado em 2 para os pontos A e B.

Estacionando de seguida em (2), junto de B e a uma distância deste ponto sensivelmente igual à de (1) a A e nas mesmas condições, obtém-se as leituras na mira l''_{a_2} e l''_{f_2} . A diferença de nível correcta será então

$$dN_{AB} = l'_{a_1} - l'_{f_1}$$

e a diferença de nível afectada do erro de inclinação

$$dN''_{AB} = l''_{a_2} - l''_{f_2}.$$

Como o ângulo i se mantém invariável e como $\overline{A1} \cong \overline{B2}$ temos

$$\begin{aligned} l'_{f_1} - l_{f_1} &= l''_{a_2} - l_{a_2}, \\ l'_{a_1} - l_{a_1} &= l''_{f_2} - l_{f_2} \end{aligned},$$

Subtraindo membro a membro estas igualdades obtém-se

$$dN_{AB} = \frac{dN'_{AB} + dN''_{AB}}{2},$$

Pode então concluir-se que a diferença de nível correcta é igual à média dos desníveis calculados pelo método das visadas recíprocas mesmo que o nível esteja desrectificado.

Determinação do erro de inclinação do nível, conhecendo a diferença de nível correcta entre dois pontos:

Conhecendo-se a diferença de nível correcta entre dois pontos e fazendo leituras em miras colocadas respectivamente nos pontos A e B, leituras estas influenciadas pelo erro de inclinação, é possível calcular o erro de inclinação da seguinte forma (Figura 66):

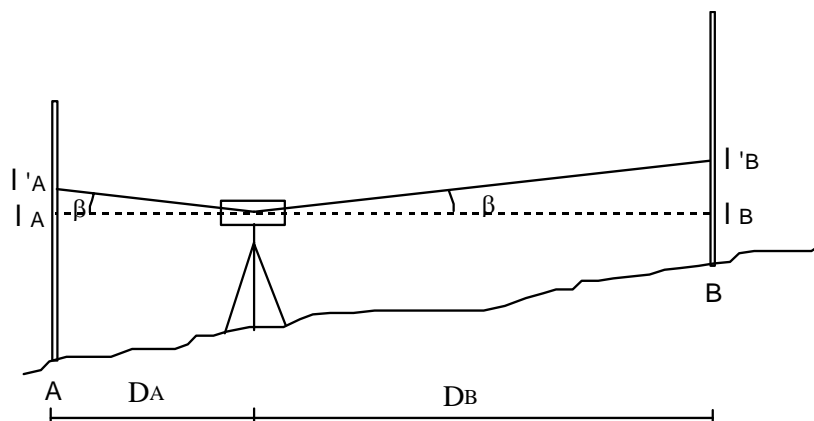


Figura 66 - Determinação da diferença de nível entre A e B com nivelamento geométrico.

$$dN_{AB} = l_A - l_B = (l'_A - D_A \tan \beta) - (l'_B - D_B \tan \beta)$$

$$dN_{AB} = l'_A - l'_B - D_A \tan \beta + D_B \tan \beta$$

$$\tan \beta = \frac{dN_{AB} - l'_A + l'_B}{D_B - D_A}$$

2.5.2.3 Execução de um nivelamento geométrico

A operação de nivelamento geométrico é normalmente feita ao longo de linhas, chamadas *linhas de nivelamento*, sendo feitas várias estações do nível e observações sucessivas de cada estação para o ponto anterior e seguinte.

Um nivelamento deve, por princípio, ser fechado. Isto é, a diferença entre as cotas do ponto inicial e final deve ser conhecida.

Muitas vezes utiliza-se igualmente um nivelamento fechado sobre si mesmo, que corresponde ao caso em que o ponto final do nivelamento coincide com o ponto inicial.

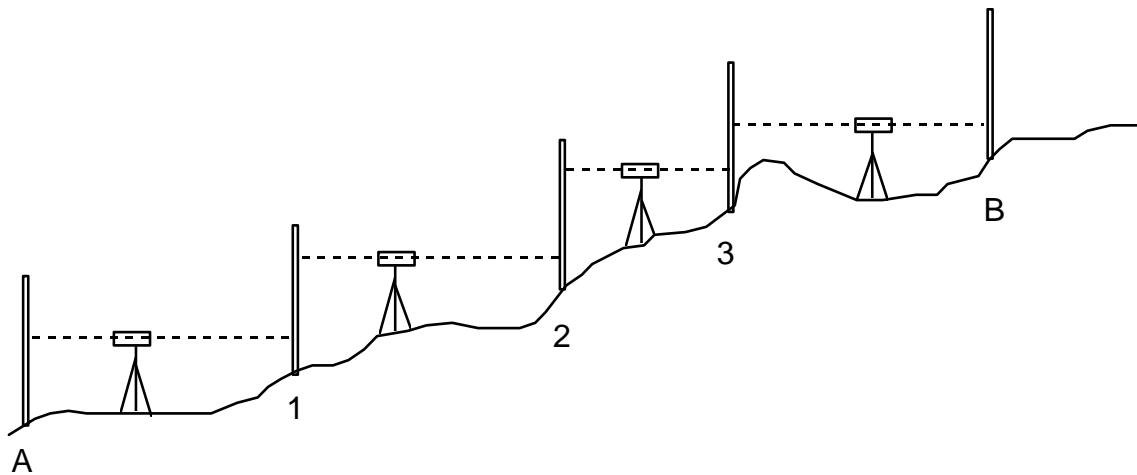


Figura 67 - Execução de uma linha de nivelamento entre os pontos A e B.

No caso de não ser possível fazer um nivelamento fechado, depois de se ter feito o nivelamento entre os pontos A e B, no sentido de A para B, deve fazer-se um contra-nivelamento agora no sentido de B para A. Os valores de dN_{AB} no nivelamento e no contra-nivelamento devem coincidir, se tal não acontecer, e a diferença for aceitável, a média dos dois valores obtidos será um valor mais preciso. Pode ainda fazer-se um nivelamento paralelo, que consiste em fazer em cada estação do nível duas niveladas atrás e duas niveladas à frente, como indica a Figura 68. Obtêm-se deste modo duas medidas para dN_{14} , uma através do nivelamento (1, 2, 3, 4) e outra através do nivelamento paralelo (1, 2', 3', 4), podendo então fazer-se um ajustamento.

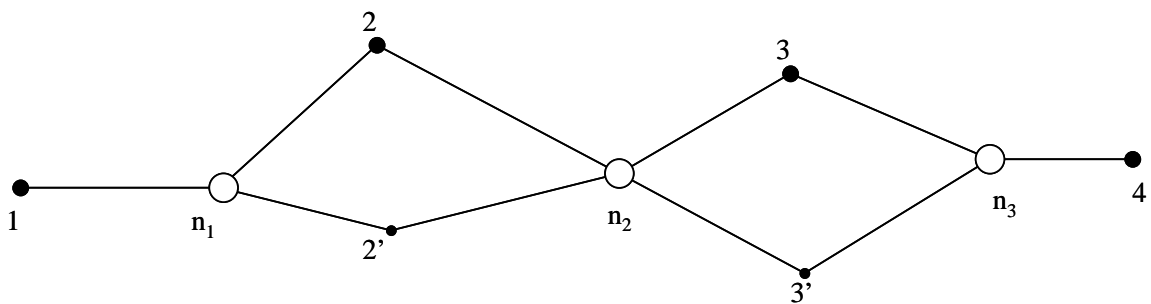


Figura 68 - Esquema de um nivelamento paralelo.

O erro de fecho de um nivelamento fechado é a diferença entre a diferença de nível correcta entre o primeiro e o último ponto do nivelamento e a diferença de nível observada. O erro de fecho obtido é normalmente distribuído uniformemente pelos desníveis calculados, obtendo-se assim os desníveis compensados. No caso de se conhecerem as distâncias do nível a cada um dos pontos visados, a distribuição do erro poderá (para maior precisão) ser feita proporcionalmente às distâncias.

Para o registo, ajustamento e cálculo de um nivelamento geométrico, com vista ao cálculo das cotas compensadas dos pontos, são normalmente executados os passos seguintes:

- 1- Cálculo dos desníveis observados;
- 2 - Determinação do erro de fecho e das correcções a aplicar aos desníveis observados;
- 3 - Cálculo dos desníveis compensados;
- 4 - Cálculo das cotas.

Exercício:

Determine as cotas ajustadas dos pontos 1, 2, 3, 4, 5 e 6 sabendo que $N_A = 428,704\text{m}$ e $N_B = 426,610\text{m}$.

Resolução:

Pontos visados	Niveladas		Desníveis observados		Correcções	Desníveis compensados		Cotas
	atrás	à frente	+	-		+	-	
A	1,027							428,704
1	0,636	2,472		1,445	+ 0,003		1,442	427,262
2	0,886	3,544		2,908	+ 0,003		2,905	424,357
3	2,984	0,952		0,066	+ 0,003		0,063	424,294
4	3,747	1,478	1,506		+ 0,003	1,509		425,803
5	1,636	0,328	3,419		+ 0,004	3,423		429,226
6	0,148	1,522	0,114		+ 0,003	0,117		429,343
B		2,884		2,736	+ 0,003		2,733	426,610
Verificações	[a] = 11,064	[f] = 13,180	[+]* = 5,039	[-]* = 7,155	$\epsilon = dN_{AB}$ - dN_{AB}^*	[+] = 5,049	[-] = 7,143	$dN_{AB} = N_B - N_A$
	[a] - [f] = -2,116		[+]* - [-]* = -2,116		= 0,022	[+] - [-] = - 2,094		= -2,094

- Desnível afectado de erro = $dN_{AB}^* = [a] - [f] = [+]* - [-]* = -2,116$

- Desnível correcto (valor conhecido) = $dN_{AB} = N_B - N_A = -2,094$

- O erro ϵ é distribuído uniformemente pelos desníveis.

2.5.2.4 Nivelamento barométrico

O nivelamento barométrico baseia-se na seguinte lei física: a pressão atmosférica é igual ao peso duma coluna cilíndrica vertical de ar atmosférico, com base unitária, e que atravessa toda a atmosfera.

Pela diferença de pressões atmosféricas entre dois pontos do terreno pode determinar-se a diferença de nível entre eles. Os instrumentos utilizados neste tipo de nivelamento são os barómetros e os altímetros.

A determinação de diferenças de altitudes por este processo é sempre pouco precisa, pois a pressão atmosférica é influenciada por vários factores não controláveis.

Capítulo 3 - Outros Processos de Recolha de Informação Geográfica

3.1 Fotogrametria

A disciplina de fotogrametria consiste na obtenção indirecta de informação acerca de um objecto através de medições feitas em fotografias desse objecto. Como em fotogrametria primeiro são feitas as fotografias e só depois, em gabinete, é que são feitas as medições, é necessário executar as seguintes operações:

1. Planeamento e tiragem das fotografias;
2. Processamento das fotografias;
3. Execução de medições sobre as fotografias e tratamento dos resultados de modo a produzir o resultado final (coordenadas de pontos ou mapas).

Existem duas grandes categorias em fotogrametria: as actividades métricas ou quantitativas e o trabalho qualitativo ou de interpretação. A fotogrametria métrica envolve todo o trabalho quantitativo, tal como a determinação da posição de pontos do terreno, determinação de distâncias, de diferenças de nível, áreas, volumes, etc. Na segunda categoria, denominada de fotointerpretação, as fotografias são analisadas qualitativamente, com vista à identificação de objectos.

A fotogrametria métrica é normalmente dividida em fotogrametria terrestre e fotogrametria aérea. Em fotogrametria terrestre as fotografias são normalmente tiradas de pontos fixos, no solo ou junto dele, e cuja posição é normalmente conhecida. Em fotogrametria aérea coloca-se uma câmara fotográfica de alta precisão num avião e, à medida que o avião sobrevoa a região, são tiradas fotografias de uma forma organizada.

Quase todos os mapas produzidos hoje em dia são obtidos a partir de fotogrametria aérea.

Note-se que uma fotografia aérea não é equivalente a um mapa, excepto em circunstâncias muito pouco vulgares. Se o terreno a fotografar fosse plano e todo ao mesmo nível, se a fotografia fosse tirada com a câmara a apontar directamente para o terreno (o seu eixo óptico seria perfeitamente vertical) e assumindo que não existia aberração na imagem, então neste caso a fotografia seria um mapa com uma escala constante. Quando alguma das restrições anteriores não é perfeitamente cumprida, a fotografia resultante é apenas aproximadamente um mapa, dependendo o grau de aproximação da quantidade de distorção existente na fotografia. Por exemplo, quando o

terreno tem relevo, a escala da fotografia nos pontos mais altos será maior do que a escala nos pontos mais baixos, pois os pontos mais altos estão mais próximos da câmara. Para se obter um verdadeiro mapa a partir das fotografias, é necessário que o terreno seja representado em pelo menos duas fotografias aéreas sucessivas. A partir das duas fotografias com sobreposição, utilizado-se técnicas fotogramétricas, pode-se reconstruir, numa determinada escala, uma réplica tridimensional do terreno. Depois de terminado este processo é possível conhecer a posição, tanto horizontal como vertical, de pontos do terreno, construir mapas planimétricos e topográficos, perfis, etc.

3.1.1 AQUISIÇÃO E PROCESSAMENTO DE FOTOGRAFIAS AÉREAS

Depois de escolhida a região a fotografar, o primeiro passo é o planeamento da aquisição das fotografias. Para a execução de mapas topográficos ou de ortofotomapas o tipo de fotografias mais vulgarmente utilizadas são as fotografias verticais. Chama-se *fotografia vertical* aquela em que o eixo da câmara é colocado vertical, embora existam sempre movimentos indesejáveis do avião que causam inclinações de alguns graus em relação à vertical (esta inclinação é normalmente de cerca de 1° e raramente excede 5°).

No caso de uma fotografia aérea vertical com formato quadrado (normalmente 22.8 x 22.8 cm) a região de terreno coberta por cada fotografia também é um quadrado. À medida que o avião vai sobrevoando o terreno são tiradas fotografias sucessivas, de tal modo que cada duas fotografias adjacentes cubram uma área comum superior a metade da área coberta por uma só fotografia. Esta área é chamada *sobreposição* e é normalmente 60% da área coberta por uma fotografia.

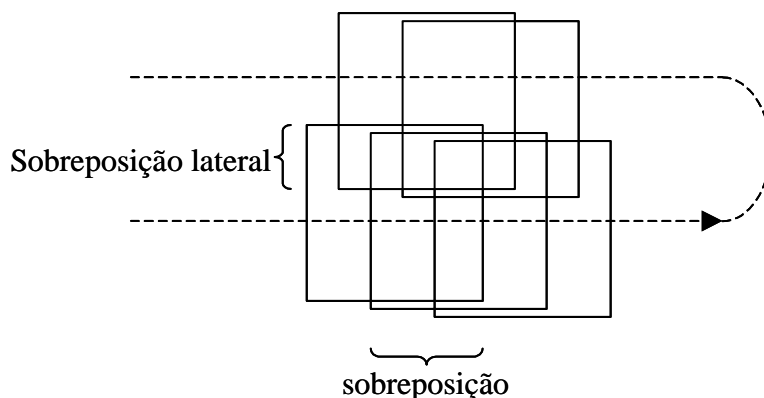


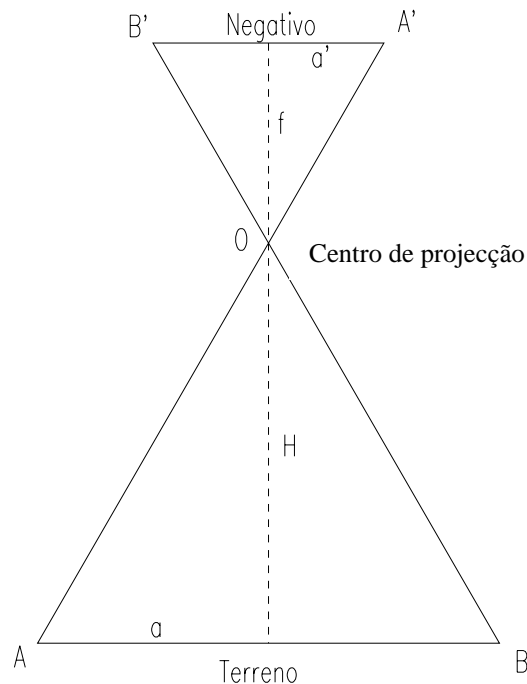
Figura 69 - Sobreposição e sobreposição lateral das fotografias aéreas pertencentes a duas fiadas contíguas.

A linha que passa através do centro das sucessivas fotografias é chamada de *linha de voo* e o conjunto de fotografias numa linha é normalmente referido como sendo uma *fiada*. Quando o avião chega ao fim de uma fiada volta para trás na direcção contrária, como se mostra na Figura 69, e tira as fotografias da fiada seguinte de modo

que exista uma sobreposição de cerca de 20% com a fiada anterior. Esta sobreposição lateral tem também como finalidade assegurar a não existência de regiões não fotografadas entre as fiadas sucessivas, de modo a ser possível obter a informação desejada sem falhas.

3.1.2 ESCALA DE UMA FOTOGRAFIA AÉREA

A escala de uma fotografia aérea é dependente da distância focal f da câmara utilizada, bem como da altura de voo H .



Como se pode observar na Figura 70, os triângulos [AOB] e [B'OA'] são semelhantes, logo:

$$\frac{a'}{f} = \frac{a}{H} \Rightarrow \frac{a'}{a} = \frac{f}{H}$$

Se representarmos a escala da fotografia como sendo $1/E$, que será a razão entre a distância entre dois pontos na fotografia e a distância entre os mesmos dois pontos no terreno (se este for horizontal), então:

$$\frac{1}{E} = \frac{a'}{a} = \frac{f}{H}$$

Desta forma podemos dizer que a escala da fotografia é a razão entre a distância focal da câmara e a altura de voo.

Apenas poderemos falar deste modo em escala de uma fotografia aérea se o terreno a sobrevoar for plano, o que numa grande parte dos casos não se verifica. Se a variação do relevo for suficientemente grande para ser tida em consideração na variação de escala da fotografia, poderemos determinar a escala média da fotografia, que se pode obter através da expressão:

$$\frac{1}{E_{med}} = \frac{f}{H_D - h_{med}}$$

sendo E_{med} o denominador da escala média da fotografia, H_D a altitude de voo relativamente a um datum e h_{med} a altitude média do terreno em relação a esse datum.

3.1.3 ESTEREOSCOPIA

A estereoscopia refere-se à capacidade dos indivíduos de, utilizando dois olhos, terem uma percepção tridimensional dos objectos. Cada olho humano representa uma câmara, e desta forma uma visão monocular resulta numa perspectiva plana, não havendo possibilidade para a pessoa ter uma noção de profundidade. A visão binocular, por outro lado, permite à pessoa ver um objecto a partir de dois pontos diferentes devido à separação entre os olhos.

A visão só com um olho fixa apenas a direcção a que está o objecto, o que é insuficiente para fixar a distância a que o objecto está do observador. Quando se utiliza também o outro olho, fixa-se uma segunda direcção e a sua intersecção com a primeira localiza o ponto. Quanto mais perto o ponto observado estiver dos olhos maior será o ângulo de convergência entre as duas direcções. Como o ângulo Φ_1 (ver Figura 71) é maior do que o ângulo Φ_2 o observador verá o ponto P_1 mais próximo de si do que o ponto P_2 .

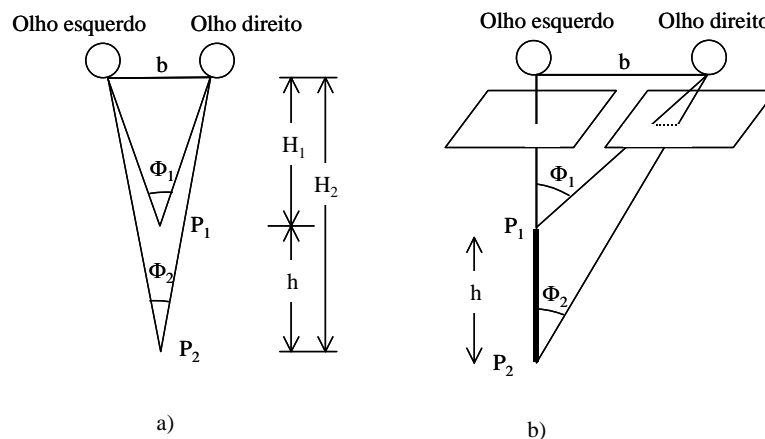


Figura 71 - a) Ângulo de convergência na visão estereoscópica. b) Visão estereoscópica com um par de fotografias com sobreposição.

Comparando a Figura 71a) com a Figura 71b) pode-se ver a correspondência entre a visão binocular natural e a visão estereoscópica de um par de fotografias com sobreposição. Considere-se que se fotografou duas vezes uma torre, primeiro com a câmara directamente sobre esta e uma segunda vez depois de o avião se ter deslocado uma certa distância para além da torre. Se for possível ver a primeira fotografia apenas com o olho esquerdo e a segunda apenas com o olho direito, o observador terá uma percepção da torre a três dimensões. As linhas que unem os olhos com as duas imagens do topo da torre intersectam-se segundo um ângulo Φ_1 enquanto que as linhas que unem as imagens da base da torre se intersectam segundo um ângulo Φ_2 . Como $\Phi_1 > \Phi_2$ o topo da torre aparecerá mais próximo do observador do que a sua base, e o observador terá uma visão tridimensional da torre. A visão estereoscópica de imagens é muito importante tanto para a fotogrametria métrica como interpretativa.

3.1.4 PARALAXE ESTEREOSCÓPICA

O termo paralaxe é utilizado para indicar o movimento da imagem de um objecto fixo em relação a outro objecto fixo quando o ponto de observação está em movimento. Se olharmos através da janela de um comboio em movimento, vemos os objectos mais próximos a deslocarem-se a uma velocidade maior do que os mais afastados. O deslocamento relativo destes objectos chama-se paralaxe (os objectos mais próximos deslocaram-se aparentemente mais do que os mais afastados, logo têm uma paralaxe maior). Ao utilizarmos uma câmara aérea para tirar fotografias em intervalos de tempo constantes, de modo que exista sobreposição da região fotografada, ela vai registar a posição das imagens nos vários instantes de exposição. A mudança de posição dos pontos de uma fotografia para a próxima, provocada pelo deslocamento do avião, é chamada de *paralaxe estereoscópica* ou simplesmente *paralaxe*. Existe paralaxe em todas as imagens que aparecem em fotografias sucessivas sendo, de uma forma análoga ao deslocamento de um comboio, a paralaxe dos pontos mais elevados (portanto mais próximos do avião) superior à paralaxe dos pontos mais baixos. A variação da paralaxe com a altitude dos objectos pode ser medida nas fotografias, sendo a determinação da elevação dos pontos com medições fotogramétricas baseada neste efeito.

3.1.5 UTILIZAÇÃO E PRODUTOS OBTIDOS A PARTIR DE FOTOGRAFIAS AÉREAS

As fotografias aéreas têm como principal aplicação a construção de:

Mapas planimétricos - mapas que contêm apenas informação acerca da posição horizontal dos pontos do terreno.

Mapas topográficos - mapas que indicam o detalhe planimétrico bem como informação altimétrica (normalmente curvas de nível).

Ortofotomapas - representações fotográficas preparadas de forma a que não existam as distorções normalmente existentes nas fotografias, e que podem ser utilizados como mapas.

Existem ainda variadíssimas outras aplicações para as fotografias aéreas, como por exemplo desenho e construção de auto-estradas e barragens, estudos de tráfego, análise da cobertura dos solos, identificação de tipos de culturas, etc.

3.2 Sistema de Posicionamento Global (Global Positioning System - GPS)

3.2.1 PRINCÍPIO DE POSICIONAMENTO DE PONTOS UTILIZANDO SATÉLITES ARTIFICIAIS

O que se pretende com o posicionamento de pontos à superfície da Terra utilizando satélites artificiais é determinar a posição da antena i (antena que recebe os sinais emitidos pelos satélites). Conhecendo as coordenadas da posição de cada satélite num sistema de coordenadas com origem no centro da Terra, conhece-se o vector r^j do centro da Terra ao satélite j , que emite o sinal. É então necessário determinar o vector $e_i^j \rho_i^j$ formado pelo ponto i onde está colocada a antena e o satélite j . Desta forma:

$$R_i = r^j - e_i^j \rho_i^j$$

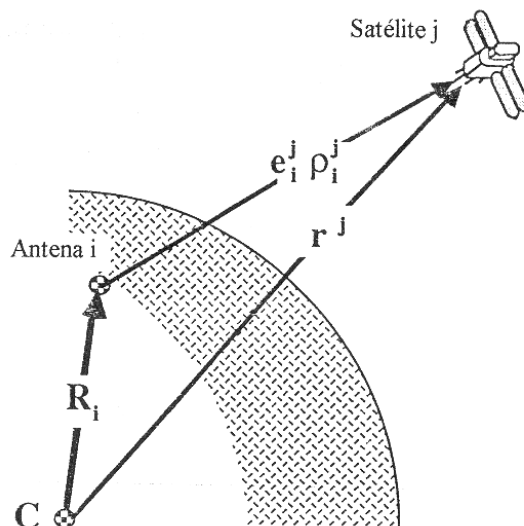


Figura 72 - Posicionamento de pontos à superfície da Terra com o auxílio de satélites artificiais.

O vector $e_i^j \rho_i^j$ pode ser medido por várias técnicas, dando origem a vários métodos de posicionamento.

Outro método de determinar o posicionamento de pontos é em vez de determinar o vector ep determinar apenas a distância da antena ao satélite, sendo no entanto neste caso necessário determinar a distância a pelo menos 3 satélites para, a partir da intersecção de três esferas de raio e centro conhecido, se poder determinar a posição da antena.

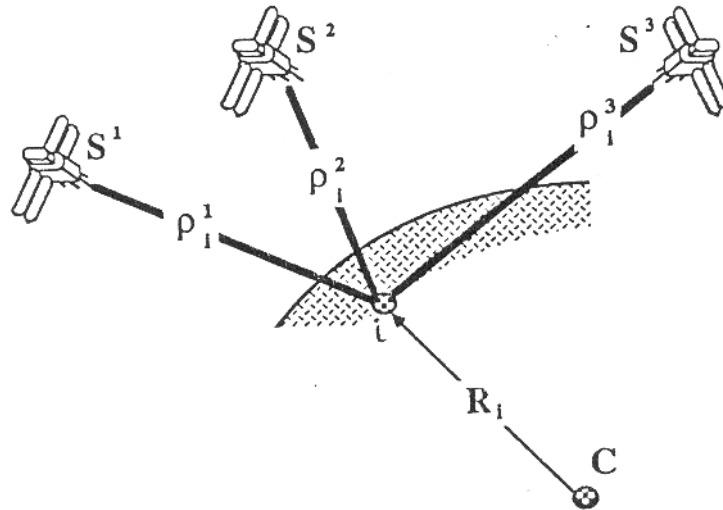


Figura 73 - Posicionamento de ponto i (cálculo das três coordenadas do vector R_i) medindo três distâncias ($\rho_i^1, \rho_i^2, \rho_i^3$) e conhecendo a posição dos três satélites r^1, r^2, r^3 .

$$\|r^j - R_i\| = \rho_i^j \quad j=1,2,3$$

O Sistema de Posicionamento Global não permite obter grande precisão no posicionamento absoluto de pontos, embora a precisão conseguida seja suficiente para muitas aplicações, como por exemplo navegação marítima e aérea, etc. A grande precisão é conseguida apenas com posicionamento relativo.

3.2.1.1 Posicionamento relativo

Sendo R_1 a posição conhecida do ponto P_1 e R_2 a posição a determinar do ponto P_2 , tem-se que:

$$R_2 = R_1 + \Delta R_{12}$$

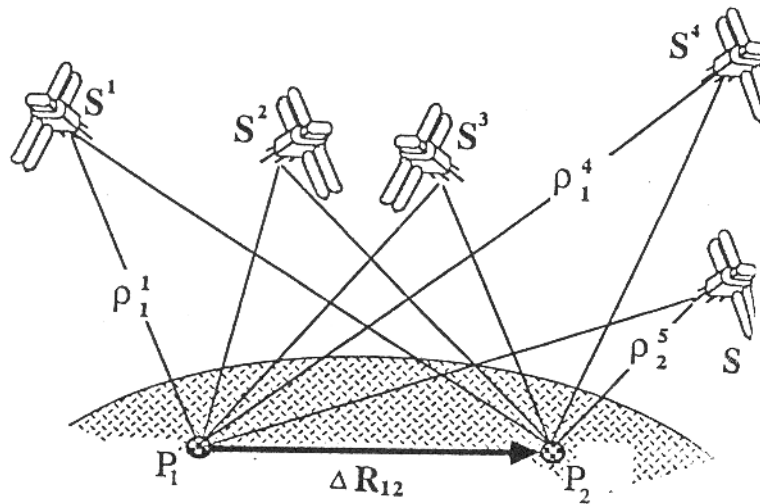


Figura 74- Esquema de um posicionamento relativo, medindo distâncias.

Sabendo que $R_1 = r^j - e_1^j \rho_1^j$ e que $R_2 = r^j - e_2^j \rho_2^j$ temos que:

$$\Delta R_{12} = R_2 - R_1 = e_1^j \rho_1^j - e_2^j \rho_2^j$$

3.2.1.2 Componentes do Sistema de Posicionamento Global

O sistema GPS (Global Positioning System) é formado por três componentes:

Componente espacial - Constituída por 24 satélites, que orbitam a Terra em 12 horas, a uma altitude de cerca de 20200 Km. Cada satélite contém vários relógios atômicos de alta precisão e transmite continuamente sinais de rádio utilizando um código que o permite identificar. No sinal transmitido são enviadas várias mensagens, entre as quais a sua posição e informação acerca da saúde do satélite, informação esta que é depois decodificada pelos receptores.

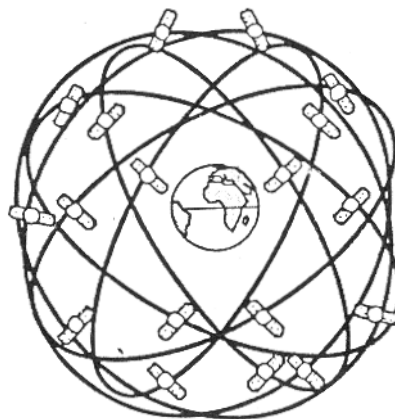


Figura 75 - Representação esquemática dos satélites GPS e suas órbitas.

Componente de controlo - É formada por estações monitoras, estações emissoras de dados para os satélites e uma estação de controlo. As estações monitoras recebem continuamente a informação enviada pelos satélites, fornecendo dados para a estação de controlo calcular as novas posições dos satélites e as correcções a fazer aos relógios de bordo. Estes dados são depois enviados para as estações emissoras, para serem emitidos para os satélites, pelo menos uma vez por dia.

Componente do utilizador - É constituída por todos os receptores, civis e militares, que utilizam os sinais emitidos pelos satélites para calcular a sua posição.

Capítulo 4 - Representação do relevo

4.1 Com pontos cotados

Neste método de representação do relevo, ele é definido por um conjunto de pontos do terreno assinalados na carta, cuja cota é indicada.

Os pontos escolhidos para representar o relevo devem defini-lo perfeitamente, isto é, a sua escolha fica condicionada a que entre cada ponto e os pontos mais próximos se possa considerar constante a inclinação do terreno, dentro da precisão exigida. Tais pontos chamam-se pontos notáveis do terreno.

Escolhendo os pontos notáveis do terreno, a inclinação do terreno entre dois pontos A e B é a inclinação da recta que por eles passa. À tangente trigonométrica da inclinação dá-se o nome de declive e o seu valor é dado por:

$$\partial_{AB} = \frac{dN_{AB}}{AB}$$

4.1.1 CASOS EM QUE SE UTILIZAM PONTOS COTADOS

Não é muito usual a representação do relevo por pontos cotados embora, em certas situações, se torne útil a sua utilização. São a seguir expostos dois casos em que isto acontece:

4.1.1.1 Representação de zonas urbanas

Nos arruamento escolhem-se para pontos cotados os pontos de mudança de declive e os pontos dos cruzamentos dos seus eixos, representação altimétrica esta que permite ao técnico efectuar o estudo do traçado das redes de saneamento básico (ver Figura 76).

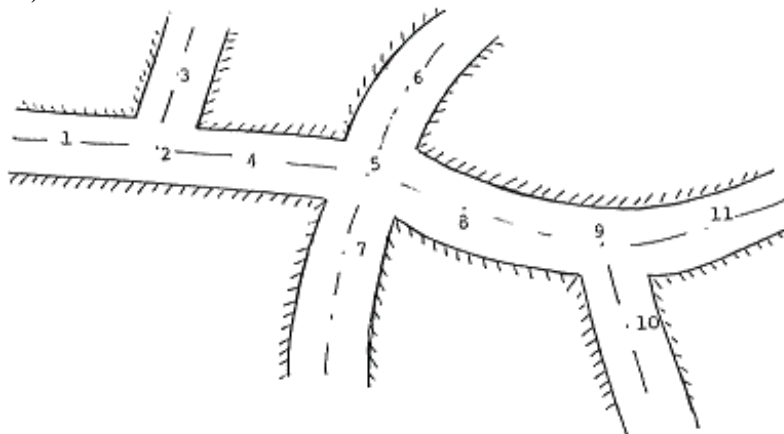


Figura 76 - Representação do relevo de uma região urbana com pontos cotados.

4.1.1.2 Representação de regiões pouco acidentadas

Neste caso a utilização de pontos cotados é feita especialmente em trabalhos de hidráulica fluvial e agrícola, quando se trata de regiões extensas. A densidade dos pontos a representar é função da precisão exigida.

4.1.1.3 Completagem do traçado das curvas de nível

Quando o relevo é definido por curvas de nível, os pontos mais altos e os mais baixos, além de outros pontos de interesse especial para o trabalho em questão, são sempre pontos notáveis do terreno e, deste modo, são sempre representados como pontos cotados.

4.2 **Com curvas de nível**

Neste tipo de representação considera-se o terreno cortado por superfícies de nível equidistantes, e projectam-se sobre a superfície de referência as linhas de intersecção das superfícies de nível com o terreno, linhas estas a que chama curvas de nível. Junto a cada curva de nível é indicada a sua cota. A representação do relevo com curvas de nível é muito sugestiva.

À distância constante entre as curvas de nível dá-se o nome de equidistância natural (E_n), que no caso da Figura 77, é de 10 m.

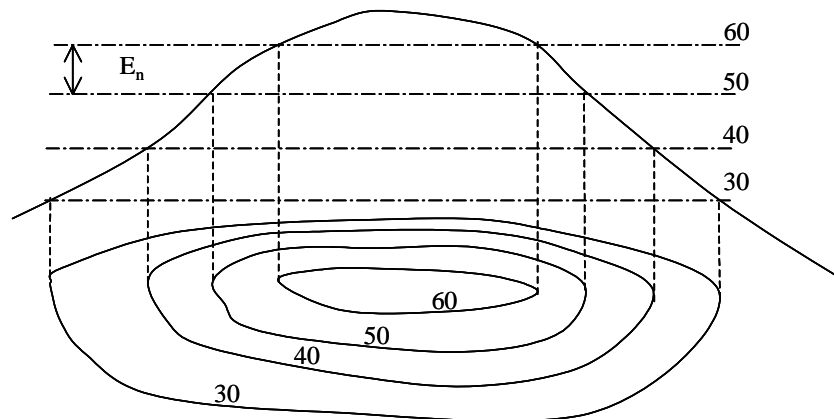


Figura 77 - Representação do relevo de uma região com curvas de nível.

Ao valor da equidistância natural reduzida à escala da carta dá-se o nome de equidistância gráfica (e), deste modo:

$$e = \frac{E_n}{L}$$

Para escolher a equidistância natural das curvas de nível a representar numa carta, é necessário ter em consideração a escala da carta, o relevo do terreno e o

objectivo do levantamento. No entanto são normalmente utilizadas as seguintes equidistâncias para as diferentes escalas:

ESCALA	E_n
1/50 000	25 m
1/25 000	10 m
1/10 000	10 m
1/5 000	5 m
1/1 000	1 m
1/500.....	0.5 m

Note-se que para as quatro últimas escalas $e = \frac{E_n}{L} = 0.001m$ o que garante uma certa uniformidade na representação do mesmo terreno em qualquer delas.

Em terrenos muito acidentados deve duplicar-se o valor da equidistância gráfica pois, caso contrário, as curvas de nível apresentam-se muito próximas, o que dificulta a leitura da carta e a consequente representação do relevo. Pelo contrário, para terrenos muito pouco acidentados deve adoptar-se uma equidistância gráfica de 0.5 mm ou mesmo 0.25 mm.

A noção de declive dada anteriormente aplica-se aqui entre pontos das curvas de nível e chama-se *linha de maior declive* à linha do terreno que forma o maior ângulo com o plano horizontal. Em face desta definição a linha de maior declive é normal às curvas de nível.

É evidente que quanto menor for a distância entre as curvas de nível tanto maior é o declive do terreno nessa zona e, por isso mesmo, a observação das curvas de nível dá uma ideia da forma do relevo.

4.2.1 FORMAS FUNDAMENTAIS DO RELEVO

Para melhor compreender a leitura de uma carta vejamos como certas formas do terreno aparecem nas cartas topográficas.

Tergo - É a forma de relevo constituída pela intersecção de duas superfícies com a concavidade voltada para baixo. Na representação dum tergo as curvas de nível aparecem com a concavidade virada para o cimo do terreno.

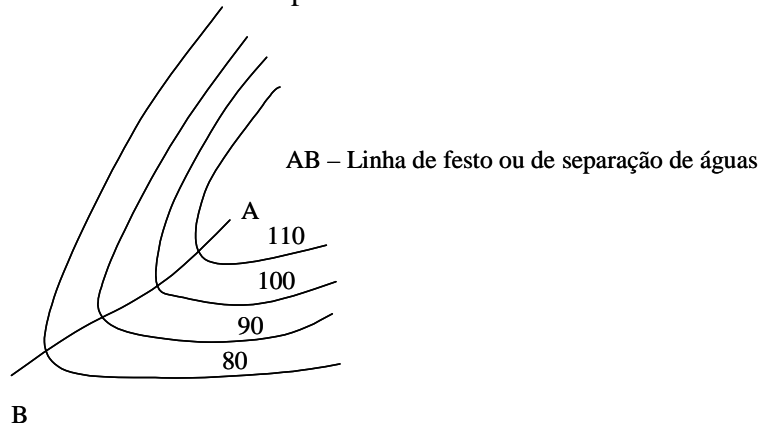


Figura 78 - Representação de um tergo com curvas de nível.

Vale - É constituída pela intersecção de duas superfícies com a concavidade voltada para cima. Na representação de um vale as curvas de nível aparecem com a concavidade voltada para a base do terreno.

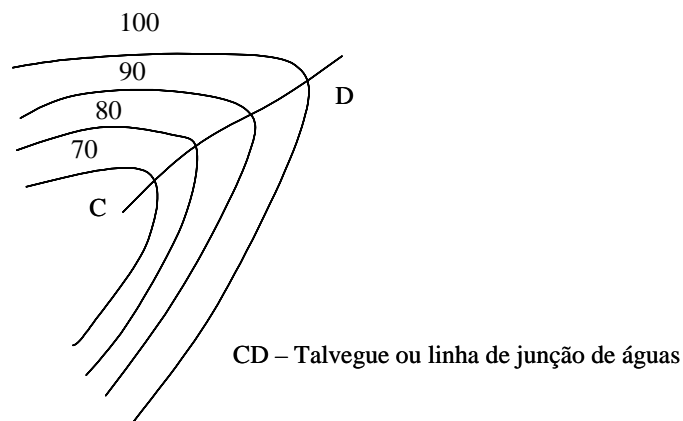


Figura 79 - Representação de um vale com curvas de nível

Todas as outras formas de relevo aparecem como uma associação conveniente de tergos e vales. Assim:

Colina, outeiro ou monte é uma associação de dois tergos.

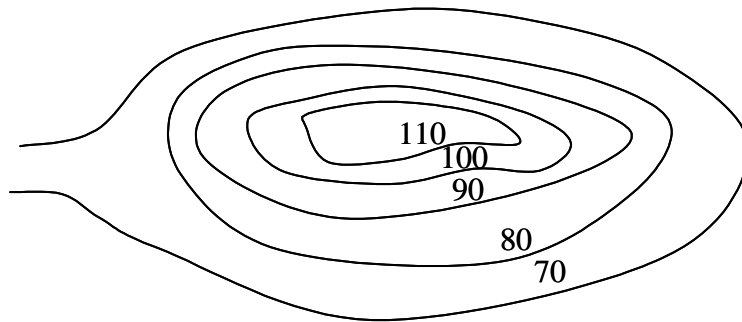


Figura 80 - Representação de uma colina com curvas de nível.

Bacia ou covão é uma associação de dois vales.

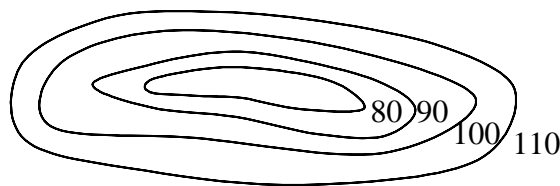


Figura 81 - Representação de uma bacia ou covão com curvas de nível.

Colo, portela ou garganta é uma combinação adequada de dois tergos e dois vales.

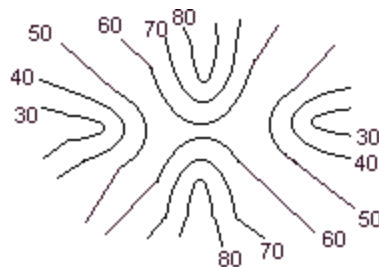


Figura 82 - Representação de um colo, portela ou garganta com curvas de nível.

4.3 Modelos digitais de terreno

Um modelo digital de terreno (MDT) é uma representação numérica e matemática duma porção de terreno, a partir de um conjunto discreto de pontos, cuja distribuição e características permitem calcular por interpolação, em todos os pontos do terreno, a cota $z = f(x, y)$ com uma determinada precisão. Isto significa que se pode atribuir apenas um valor de z a cada par (x, y) , não sendo portanto possível representar por exemplo cavernas, paredes verticais, etc.

A aquisição de informação para a construção de um MDT é usualmente feita por processos fotogramétricos, no entanto, os dados necessários para a construção do modelo podem ter como origem a digitalização de curvas de nível de mapas já existentes, trabalhos taqueométricos, detecção remota ou qualquer outro tipo de métodos ou sistemas que permitam a obtenção de coordenadas planas e altitude de pontos do terreno.

4.3.1 CONSTRUÇÃO DE UM MDT

O processo de recolha de dados gera um conjunto de pontos cujas cotas são conhecidas. Para a construção de um modelo digital de terreno coerente é necessário estabelecer relações topológicas entre os pontos de cotas conhecidas e escolher um modelo de interpolação para gerar uma superfície que se aproxime da forma do terreno.

Para a construção de superfície interpoladora é necessário ter uma rede de pontos de cota conhecida, rede esta que normalmente ou é uma rede em grelha rectangular (GRID), ver Figura 83a), ou uma rede irregular de triângulos (Triangulated Irregular Network - TIN), ver Figura 83b). As vantagens e desvantagens de um e outro tipo de redes são expostas no quadro seguinte.

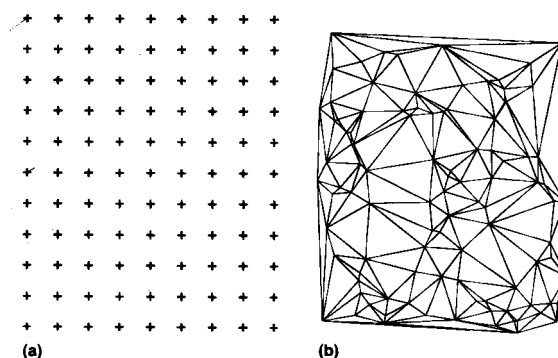


Figura 83 - a) Grelha rectangular (GRID). b) Rede irregular de triângulos (TIN).

	Vantagens	Desvantagens
Grelhas rectangular (GRID)	<ul style="list-style-type: none"> • O seu manuseamento em computador é simples; • É mais simples construir modelos de interpolação para grelhas rectangulares. 	<ul style="list-style-type: none"> • A densidade de pontos não pode ser aumentada para se adaptar à complexidade do relevo; • É necessário um grande número de pontos para ser possível fazer a representação do relevo com determinada precisão; • Não conseguem descrever características estruturais do terreno como características topográficas .
Rede Irregular de Triângulos (TIN)	<ul style="list-style-type: none"> • Permitem representar o terreno com maior fiabilidade. • São necessários menos pontos para se construir um MDT com determinada precisão. 	<ul style="list-style-type: none"> • São mais complexos e mais difíceis de manusear; • É mais difícil construir o modelo de interpolação.

4.3.2 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO DOS MDT

Os modelos digitais de terreno permitem, para além de visualizar o terreno a três dimensões, através de por exemplo diagramas de blocos, mapas de sombreados ou com as tradicionais curvas de nível, calcular por exemplo volumes de aterro e escavação, regiões de visibilidade, declives ou orientação de encostas, sendo portanto de muita utilidade na execução de projectos de Engenharia Civil, como a construção de vias de comunicação e barragens.

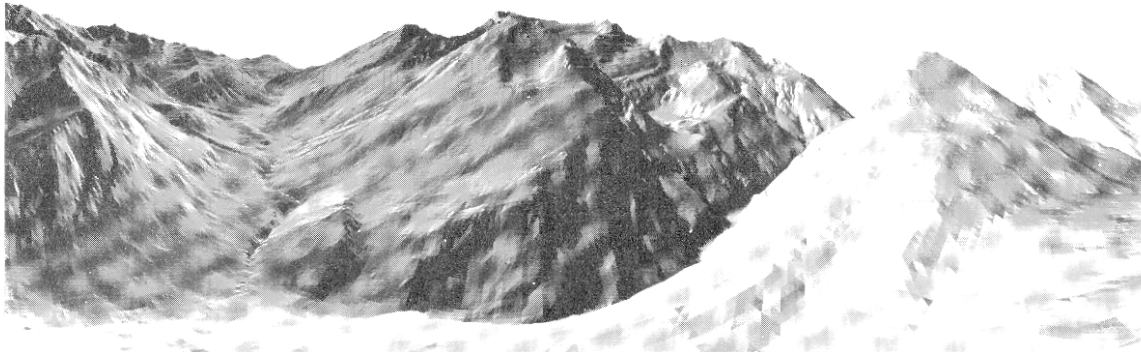


Figura 84 - a) Aspecto da paisagem vista de um determinado ponto.

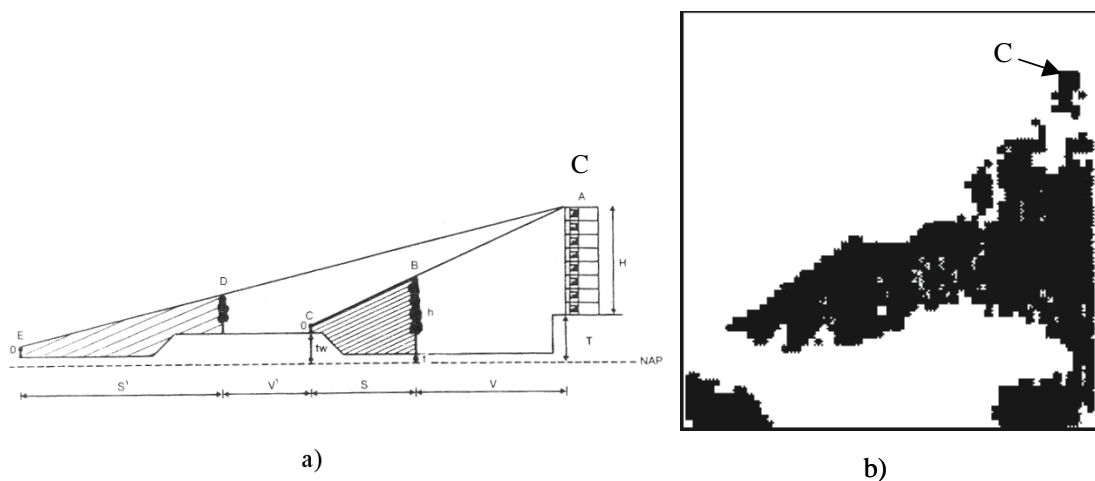


Figura 85 - a) Esquema do cálculo de regiões de visibilidade. C é o ponto de observação, S e S' as regiões não visíveis e V e V' as regiões visíveis de C. b) Representação da região visível do ponto C.

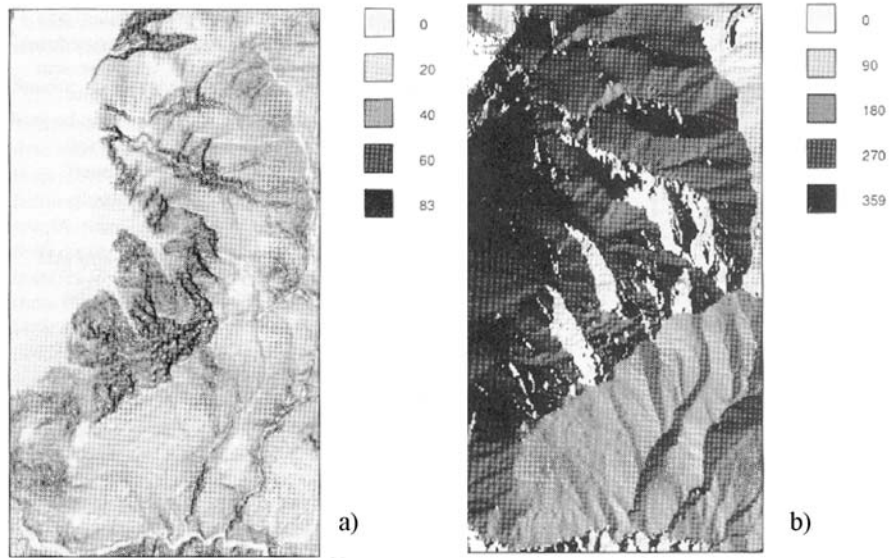


Figura 86 - - a) Mapa de declives (em graus). b) Mapa de orientação das encostas (em graus).

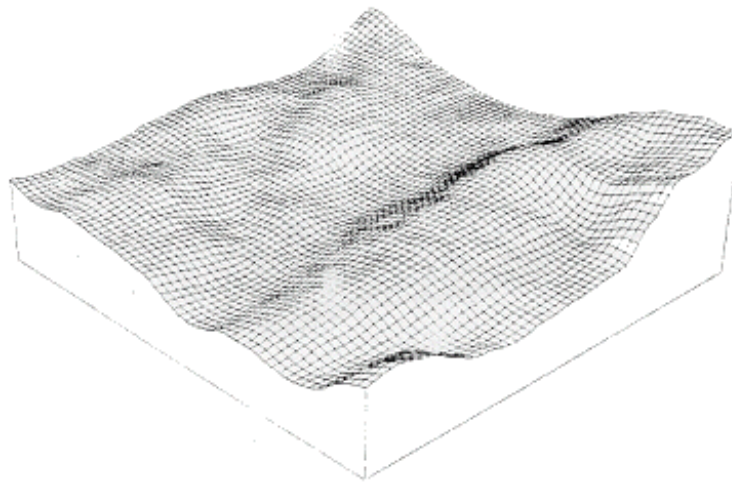


Figura 87 - Diagrama de blocos construído a partir de um MDT.

Capítulo 5 - Cartometria

5.1 Medição de áreas

As áreas que se medem numa carta são sempre áreas em projecção horizontal. Analisemos pois os principais métodos para a sua medição:

5.1.1 MÉTODO ANALÍTICO

Aplica-se a figuras com contorno poligonal, desde que se conheçam as coordenadas dos seus vértices, o que normalmente exige o levantamento da extrema da região cuja área se pretende determinar. É um método rigoroso e que se utiliza sempre que se pretende calcular uma área com bastante precisão.

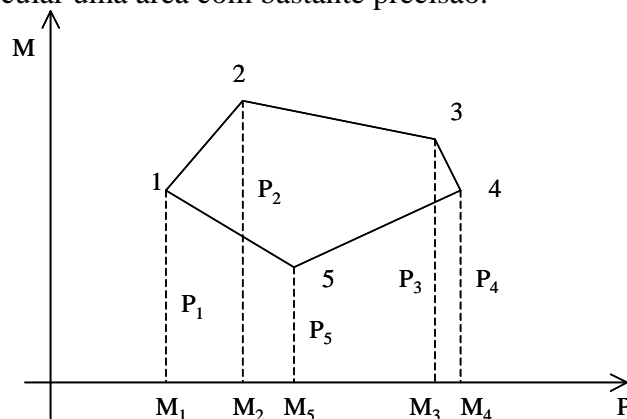


Figura 88 - Polígono fechado com vértices nos pontos 1, 2, 3, 4 e 5, com coordenadas respectivamente (M_1, P_1) , (M_2, P_2) , (M_3, P_3) , (M_4, P_4) e (M_5, P_5) .

Analisando a Figura 88 tem-se que:

$$S = \frac{1}{2} [(M_2 - M_1)(P_2 + P_1) + (M_3 - M_2)(P_3 + P_2) + (M_4 - M_3)(P_4 + P_3) - (M_4 - M_5)(P_5 + P_4) - (M_1 - M_5)(P_1 + P_5)]$$

$$S = \frac{1}{2} [P_1(M_2 - M_5) + P_2(M_3 - M_1) + P_3(M_4 - M_2) + P_4(M_5 - M_3) + P_5(M_1 - M_4)]$$

Ou, considerando $M_0 \equiv M_5$ e $M_6 \equiv M_1$, tem-se:

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^5 P_i (M_{i+1} - M_{i-1})$$

Generalizando para o caso de n vértices ter-se-á:

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i (M_{i+1} - M_{i-1})$$

5.1.2 MÉTODOS GEOMÉTRICOS

Neste tipo de método de determinação de áreas temos que separar o caso em que a figura é limitada por uma linha poligonal ou por uma linha curva.

5.1.2.1 Figuras limitadas por um contorno poligonal

Neste caso faz-se a decomposição da área do polígono em áreas mais simples, cuja área se sabe determinar. As distâncias necessárias são medidas directamente na carta.

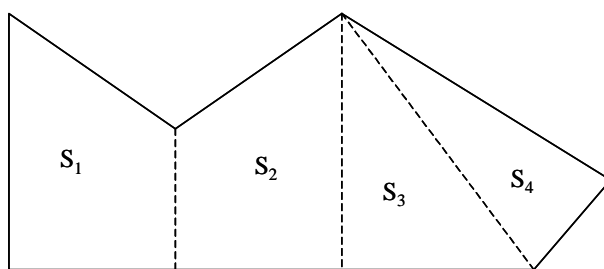


Figura 89 - A área S da figura indicada é $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$

5.1.2.2 Figuras limitadas por uma linha curva

Método dos trapézios

É um método expedito que permite calcular uma área aproximada. Substitui-se a linha curva por uma linha poligonal e transforma-se a figura cuja área se pretende determinar numa série de trapézios todos com a mesma altura d (ver Figura 90).

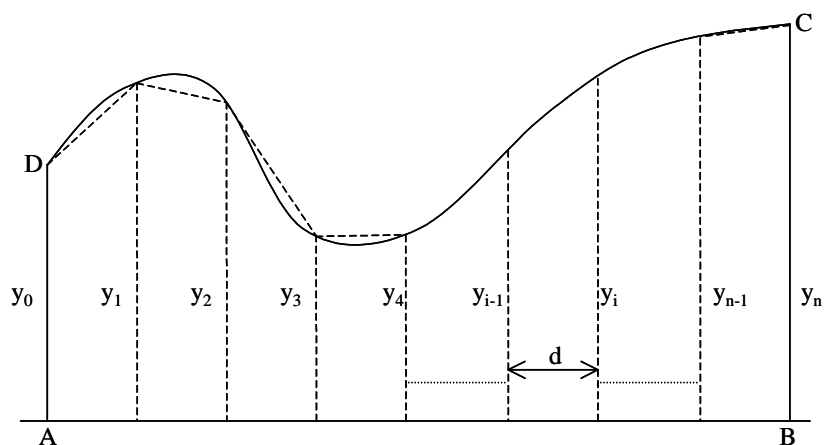


Figura 90 - Divisão de uma área em trapézios de altura d , para determinação da área utilizando o método dos trapézios.

Têm-se então que:

$$S = \frac{1}{2}d (y_0 + y_1 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + y_{n-1} + y_n)$$

$$S = d \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right)$$

Caso a área a medir seja totalmente limitada por uma linha curva, pode fazer-se uma adaptação deste método traçando um segmento de recta segundo a maior dimensão da figura.

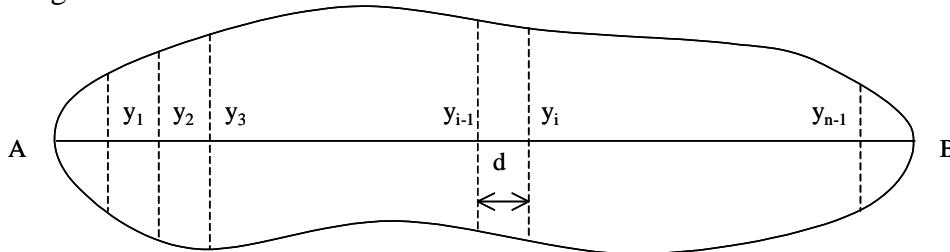


Figura 91 - Adaptação do método dos trapézios para cálculo da área da figura, sendo $S = d(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})$.

5.1.2.3 Método de Simpson ou das parábolas

Quando se pretende atingir uma precisão mais elevada do que o método anterior permite atingir, pode utilizar-se o método de Simpson, segundo o qual se divide o segmento AB num número par ($2n$) de partes iguais com dimensão d , e substituir a curva entre cada grupo de três pontos consecutivos (tais como A', C, D) por um arco de parábola que passe por esses três pontos.

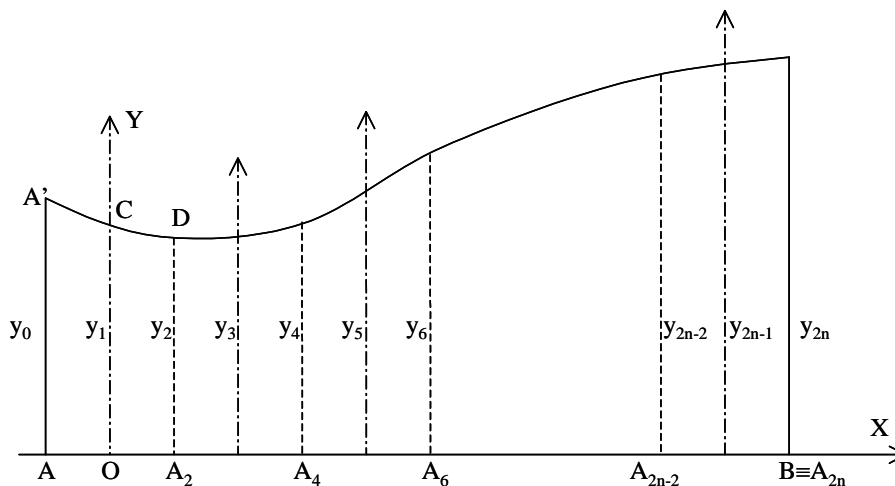


Figura 92 - Esquema da definição da posição sucessiva dos eixos coordenados para a determinação de uma área pelo método de Simpson.

Considerando um sistema de eixos como o definido na Figura 92 essas parábolas terão uma equação da forma:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

A área da figura AA'CDA₂A será então dada por:

$$S_1 = \int_{-d}^d (a_0 + a_1x + a_2x^2) dx = \left[a_0x + \frac{1}{2}a_1x^2 + \frac{1}{3}a_2x^3 \right]_{-d}^d = 2a_0d + \frac{2}{3}a_2d^3 = \frac{d}{3}(6a_0 + 2a_2d^2)$$

Como a parábola passa pelos pontos A'(-d,y₀), C(0,y₁) e D(d,y₂), tem-se:

$$y_0 = a_0 - a_1d + a_2d^2$$

$$y_1 = a_0$$

$$y_2 = a_0 + a_1d + a_2d^2$$

pelo que:

$$y_0 + y_2 = 2a_0 + 2a_2d^2$$

com $y_1 = a_0$ obtém-se que:

$$2a_2d^2 = y_0 - 2y_1 + y_2$$

Entrando com este valor na expressão de S₁, vem:

$$S_1 = \frac{d}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Deslocando agora o eixo OY da forma indicada na Figura 92 pode-se escrever:

$$S_1 = \frac{d}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

$$S_2 = \frac{d}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

$$S_3 = \frac{d}{3}(y_4 + 4y_5 + y_6)$$

$$S_n = \frac{d}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

Como $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n$, somando membro a membro estas igualdades obtém-se a chamada fórmula de Simpson:

$$S = \frac{d}{3} [y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1})]$$

Caso se trate de uma região totalmente limitada por uma linha curva, procede-se de forma análoga à descrita para o método dos trapézios.

Bibliografia

- [1] **Antunes, A. Peixoto:** *"Topografia - Curso Geral "*. Departamento de Matemática da FCTUC, 1991.
- [2] **Burrough, P.A.:** *"Principles of Geographical Information Systems for Land Resources Assessment"*, Oxford University Press, 1986.
- [3] **Casaca, João, Matos, J, Baio, M:** "Topografia Geral". Lidel, 2000.
- [4] **Davis, R.; Francis, F.; Mikhail, E.:** *"Surveying - Theory and Practice"*. Library of Congress Cataloging in Publication Data, 1981.
- [5] **Fernandes, J.C.:** *"Criação de modelos digitais de terreno"* in Revista do Instituto Geográfico Cadastral,
- [6] **Laurila, S.:** *"Electronic Surveying in Practice"*, John Wiley & Sons, 1983.
- [7] **Moffit, F.; Mikhail, E.:** "Photogrammetry". Harper & Row. Publishers, New York, 1980.
- [8] **Robinson, Arthur H.:** *"Elements of Cartography"*, John Wiley & Sons, 1985.
- [9] **Weibel, R; Heller, M.:** *"Digital Terrain Modeling"*. In: *Geographical information Systems: principals and applications*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1991.
- [10] **Wells, David:** "Guide to GPS Positioning". Canadian GPS Associates, 1987
- [11] **Xerez, A.:** *"Topografia Geral"*. Técnica - Revista de Engenharia, Associação dos estudantes do I.S.T. - Lisboa, 1978.