

Notas de
Elementos de Astrofísica Teórica
Versión revisada

Pablo M. Cincotta

23 de noviembre de 2022

Índice general

Prefacio	7
Astrofísica Estelar	9
1. Revisión de la termodinámica	11
1.1. Principios de la termodinámica	12
1.2. Gases ideales	15
1.2.1. Distribución de Maxwell-Boltzmann	16
1.2.2. Derivación de las ecuaciones de estado	21
1.2.3. Calores específicos para un gas ideal	24
1.2.4. Proceso politrópico	25
1.2.5. Mezcla de gases ideales	28
1.3. Radiación y materia	31
1.4. Materia degenerada	35
1.4.1. Ecuaciones de estado en degeneración completa	41
1.5. Regiones de dominio	44
1.6. Apéndice Capítulo 1	47
1.6.1. Sistemas de partículas	47
1.6.2. Diferentes estadísticas y el límite clásico	48
2. Teoría del potencial	51
2.1. Ley de gravitación universal	51
2.2. Campo y potencial gravitatorio	52
2.2.1. Potencial y campo gravitatorio de una masa puntual	58
2.3. Energía potencial gravitatoria	61
2.4. Sistemas con simetría esférica	63
2.4.1. Ejemplo	70

3. Hidrodinámica	73
3.1. Ecuación de continuidad	74
3.2. Ecuación de movimiento	78
3.3. Perturbaciones a fluidos homogéneos	81
4. Estructura estelar	89
4.1. Equilibrio hidrostático	89
4.2. Cota para la presión central	95
4.3. Teorema del virial	96
4.4. Equilibrio hidrostático en una atmósfera	100
4.5. Modelos estelares simples	102
4.5.1. Modelos politrópicos	103
4.5.2. Esfera isoterma	109
4.6. Apéndice Capítulo 4	113
4.6.1. Gas Estelar	113
5. Transporte radiativo	115
5.1. Descripción de campo radiativo	115
5.2. Momentos de la intensidad específica	118
5.2.1. Intensidad media	119
5.2.2. Flujo del campo de radiación	121
5.2.3. Presión de Radiación	124
5.3. Interacción radiación y materia	126
5.3.1. Opacidad del gas	127
5.3.2. Emisividad del gas	132
5.4. Ecuación de transporte radiativo	136
5.4.1. Ecuación de transporte radiativo en geometría plana	140
5.4.2. Ecuación de transporte en geometría esférica	143
5.4.3. Momentos de la ecuación de transporte	145
5.5. Equilibrio termodinámico	147
5.5.1. Equilibrio termodinámico local	150
5.5.2. Aproximación de difusión	153
5.5.3. Luminosidad de Eddington	155
5.6. Ecuación de liberación de energía	156
5.6.1. Equilibrio radiativo	157
5.7. Modelo de atmósfera gris	159
5.7.1. Aproximación de Eddington	161
5.7.2. Ley de oscurecimiento al limbo	164

5.8.	Aproximación de equilibrio termodinámico local	166
5.9.	Apéndice Capítulo 5	168
5.9.1.	Dispersión Thompson o scattering electrónico	168
5.9.2.	Absorción libre-libre	169
5.9.3.	Absorción ligado-libre	170
5.9.4.	Absorción ligado-ligado	171
5.9.5.	El ion negativo del hidrógeno	171
6.	Transporte convectivo	173
6.1.	Criterio de estabilidad de Schwarzschild	173
6.2.	Energía transportada por convección	179
7.	Reacciones Nucleares	187
7.1.	Definiciones y consideraciones básicas	187
7.2.	La sección eficaz	190
7.3.	Rate de la reacción	194
7.4.	Apéndice Capítulo 7	201
7.4.1.	Ecuaciones para el interior y la atmósfera	201
	Dinámica de Sistemas Estelares	203
8.	Cosmología Newtoniana	205
8.1.	Corrimiento al rojo de las galaxias	205
8.2.	Cinemática del Universo	208
8.2.1.	Corrimiento al rojo cosmológico	210
8.3.	Dinámica del Universo	211
8.4.	Apéndice Capítulo 8	220
8.4.1.	Soluciones a la ecuación de Friedmann	220
8.4.2.	Soluciones con $a(t_0) = 1$	223
9.	Órbitas estelares	227
9.1.	Órbitas en sistemas esféricos estacionarios	227
9.1.1.	Importancia de las integrales de movimiento en la dinámica	235
9.2.	Órbitas en potenciales sin simetría esférica	237
10.	Equilibrio de sistemas sin colisiones	247
10.1.	Tiempo de relajación	248
10.2.	Ecuación de Boltzmann sin colisiones	253

Lecturas complementarias

261

Prefacio

Estas notas incluyen los contenidos del curso Elementos de Astrofísica Teórica correspondiente al tercer año de la Licenciatura en Astronomía de la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas de la Universidad Nacional de La Plata.

Esta asignatura comenzó a dictarse en el año 1990, siendo su primer profesor la Dra. Nidia Morrell, y tiene por objeto brindar una introducción a tres áreas que, en aquellos años, eran las de mayor desarrollo en la institución; atmósferas e interiores estelares y dinámica de sistemas estelares.

Durante más de treinta años he dictado esta materia en forma casi ininterrumpida, algunos años en conjunto con la Dra. Morrell, y en estas páginas se incluyen todos los temas que abarca actualmente este curso. Lamentablemente muchos otros tópicos de suma relevancia en la astrofísica teórica no pueden ser abordados en esta asignatura, pues de otra forma no podría limitarse estrictamente a un cuatrimestre.

Las notas no siguen ningún texto en particular, todo lo contrario, y son en definitiva el producto final de tantos años de docencia en este curso y otros, de interacción con centenares de alumnos y de la búsqueda permanente para identificar aquellos temas en los que era o es necesario revisar su formulación. Por ello, estas notas son revisadas muy frecuentemente dando lugar a nuevas versiones. En este curso se procura presentar cada tema con la mayor fundamentación teórica posible, teniendo muy presente que estudiantes del tercer año de la carrera no poseen aún los conocimientos previos suficientes de mecánica cuántica, electromagnetismo o relatividad para abordar temas como un gas de electrones a altas densidades, la interacción entre la materia y la radiación, las reacciones nucleares por citar algunos ejemplos. Por tal motivo el curso inicia con capítulos que incluyen aspectos básicos de termodinámica, de teoría del potencial y de hidrodinámica, con el objeto de proporcionar las herramientas físicas y matemáticas necesarias para estudiar las ecuaciones de estado del gas estelar y de la radiación, las escalas de tiempo dinámicas, el equilibrio hidrostático o el colapso gravitatorio.

Especial énfasis se hace en el tratamiento del transporte radiativo, introduciendo naturalmente los parámetros que lo caracterizan, y que son utilizados en práctica-

mente todos los cursos con contenido astrofísico, como la intensidad específica, la intensidad media, el flujo, la presión de radiación; y se discute su vinculación con otras distribuciones como la densidad de fotones en el espacio de fases o la densidad espectral de energía. Se estudia la ecuación de transporte radiativo para la atmósfera y su aproximación de difusión para el interior. Asimismo, se analizan en detalle las hipótesis y aproximaciones que permiten utilizar la función de Planck para describir localmente el campo de radiación y se discute un modelo sencillo de atmósfera como es el de atmósfera gris, entre otros aspectos. Con las herramientas físicas y matemáticas que posee un alumno de tercer año, se puede presentar la teoría macroscópica de la radiación sin avanzar en la derivación de expresiones explícitas, por ejemplo, para los coeficientes de opacidad.

Mucho más acotadamente se presenta el transporte convectivo, para el que aún no existe una teoría satisfactoria debido a la complejidad del problema. El abordaje de las reacciones nucleares también se presenta en un modo simplificado, pues un estudio detallado de estos procesos está completamente fuera de los objetivos y alcances de esta asignatura. En cursos superiores de atmósferas e interiores estelares se estudia con detenimiento los problemas que aquí se formulan más superficialmente.

El tratamiento de los sistemas estelares incluye un capítulo relativamente breve sobre cosmología newtoniana; luego se pasa al estudio de las órbitas estelares tanto en sistemas esféricos como en aquellos que no presentan simetría central, en este último caso limitando el estudio a trayectorias en dos dimensiones. En los trabajos prácticos se complementa el estudio de las órbitas estelares con la aproximación epicíclica. En el último capítulo se presenta en forma muy abreviada la descripción estadística de los sistemas estelares, en particular el equilibrio de sistemas sin colisiones. En un curso de dinámica estelar se profundiza el estudio teórico de estos sistemas.

Agradezco a todos los alumnos que han pasado por este curso, por sus preguntas y discusiones que han sido y siguen siendo enriquecedoras; y muy especialmente a Héctor Vucetich, quien ha realizado una revisión conceptual de la presentación de todos los temas que aquí se exponen, siendo los errores que seguramente aún persisten de mi absoluta responsabilidad. Asimismo, hasta la fecha, otros profesores y ex profesores de la Casa me han hecho valiosos aportes en aspectos más puntuales; Omar Benvenuto, Daniel Carpintero, Juan Carlos Muzzio, Nidia Morrell, Gustavo Romero y Fausto Brédice. A ellos también mi agradecimiento. Confío en que próximamente otros profesores de asignaturas afines a los temas tratados en este curso me hagan llegar sus sugerencias y aportes que permitan mejorar estas notas.

Astrofísica Estelar

Capítulo 1

Revisión de la termodinámica

Los sistemas astrofísicos, en general, no están en equilibrio térmico o termodinámico. Por ejemplo en una estrella como el Sol, la temperatura varía desde $\sim 10^7 K$ en su centro a $\sim 10^4 K$ en su superficie. Este escenario ocurre en la mayoría de los sistemas astrofísicos, el cambio en la temperatura sobre grandes elementos de volumen es pequeño. Para el Sol, el gradiente medio de temperatura, en valor absoluto resulta

$$\left\langle \left| \frac{dT}{dr} \right| \right\rangle \sim \frac{T_{\text{cent}} - T_{\text{sup}}}{R_{\odot}} \sim \frac{10^7 K - 10^4 K}{7 \times 10^{10} \text{cm}} \sim 10^{-4} \text{ K cm}^{-1}.$$

Las propiedades locales de la materia también varían con el tiempo. Por ejemplo, cuando la estrella se expande o se contrae la composición química o el grado de ionización puede variar en un elemento de volumen del gas estelar. Las escalas de tiempo que gobiernan estas variaciones temporales son en general muy grandes en comparación con las escalas de tiempo que rigen estos procesos microscópicos, estos últimos son los que determinan el estado del gas. La rapidez en que ocurren estos cambios microscópicos es del orden de las escalas de tiempo de los procesos atómicos, $\sim 10^{-8} \text{ s}$, que resultan muy pequeñas frente a las escalas de tiempo en la que una estrella experimenta cambios estructurales, los más rápidos son del orden de 10^5 a o menores, pero en todos los casos mucho mayores que 10^{-8} s . Por ello, los cambios de estado los consideramos instantáneos y un elemento volumen del gas lo supondremos en equilibrio térmico y por tanto podrá ser descrito por las variables usuales de la termodinámica de equilibrio, como la energía interna, la presión, la densidad y la temperatura.

Es importante precisar el concepto de elemento de volumen en el gas, más precisamente el de *elemento macroscópico de volumen*, que es un elemento de volumen

espacial (o del espacio de las fases) d^3x centrado en \mathbf{x} , que contiene un número suficiente de partículas de manera tal que puedan definirse parámetros macroscópicos (o medios) como la temperatura, la presión, la densidad, por ejemplo; y que es lo suficientemente pequeño como para suponer que en dicho elemento estos parámetros no varían.

Este concepto será de suma utilidad en todo el curso e implica poder aproximar un sistema que contiene $N \gg 1$ partículas por medio de una distribución continua, represente este sistema el gas en una estrella, estrellas en una galaxia o un cúmulo globular e incluso el universo (aquí las partículas serían galaxias). En efecto, sea R el tamaño lineal de un dado sistema, por tanto el volumen del mismo será $V \sim R^3$. El número de partículas por unidad de volumen será $n \sim N/R^3$, por lo que R^3/N será el volumen asociado a cada partícula. El elemento de volumen macroscópico, δV , debe satisfacer entonces la condición

$$\frac{1}{n} \sim \frac{R^3}{N} \ll \delta V \ll R^3.$$

En cualquiera de los sistemas que consideraremos, $N \gg 1$ o $n \gg 1$; por ejemplo, el valor medio de la densidad del Sol es $\rho \approx 1,4 \text{ g cm}^{-3}$, por tanto $n \approx \rho/m_H$, donde $m_H \approx 1,67 \times 10^{-24} \text{ g}$ es la masa del átomo de Hidrógeno, por lo que la densidad numérica solar media será, $n \sim 10^{24} \text{ cm}^{-3}$. En cambio, en una galaxia $N \gtrsim 10^{11}$. Por tanto estos sistemas se pueden aproximar mediante una distribución continua de masa y el elemento de volumen macroscópico δV lo denotaremos cuando corresponda con dV o d^3x .

1.1. Principios de la termodinámica

En un gas (y en todo sistema termodinámico) es posible postular que toda la información termodinámica del sistema está contenida en una función S que llamaremos *entropía* y que será función de la energía interna U , el volumen V y el número de partículas, N ; $S = S(U, V, N)$, o en caso de existir N_1, N_2, \dots, N_l especies diferentes de partículas, será $S = S(U, V, N_1, N_2, \dots, N_l)$, no obstante para esta presentación consideraremos solo una única especie de partículas. Esta relación, que llamaremos fundamental, nos dice que si conocemos la entropía como función de las *variables extensivas* del sistema,¹ de ella podremos derivar toda la termodinámica del mismo.

¹Estas son variables aditivas, por ejemplo, si el sistema está compuesto por dos subsistemas de volumen V_1 y V_2 respectivamente, el volumen total del sistema será $V_1 + V_2$. Lo mismo ocurre con la energía y el número de partículas.

A la función S le exigimos que sea continua, diferenciable y monótonamente creciente con U ; que implica

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{V,N} > 0,$$

donde los subíndices, como es habitual en la termodinámica, indican las variables que permanecen constantes.

Postulado de máxima entropía: El valor de equilibrio de cualquier parámetro interno de un sistema sin ligaduras es tal que hace máxima la entropía para el valor dado de la energía.

Este postulado establece, por ejemplo, que si en un sistema existe una ligadura o restricción, al eliminarla los parámetros termodinámicos evolucionarán y alcanzarán sus valores de equilibrio cuando éstos maximicen la entropía.

Como $S = S(U, V, N)$ es diferenciable y monótona creciente con U , se puede invertir la relación fundamental y escribir $U = U(S, V, N)$, y es posible demostrar que el postulado de máxima entropía conduce al

Principio de mínima energía: El valor de equilibrio de cualquier parámetro interno de un sistema sin ligaduras es tal que hace mínima la energía para el valor dado de la entropía.

La relación $U = U(S, V, N)$ contiene la misma información termodinámica que $S = S(U, V, N)$, por lo que ambas formulaciones son equivalentes. La representación a través de esta última relación se la denomina formulación entrópica, mientras que la primera, que es la que adoptaremos aquí, se la denomina representación energética.

Siendo S una función diferenciable, U también lo será, y

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V,N} dS + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{S,N} dV + \left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{S,V} dN, \quad (1.1)$$

será el diferencial exacto de U , esto es, (1.1) es el diferencial de una función y al ser integrado entre dos puntos q y p conectados por cualquier trayectoria arbitraria del espacio termodinámico, $\Delta U = U(p) - U(q)$, independiente del camino.

Las derivadas parciales en (1.1) también serán funciones de S, V y N , por lo que las denominaremos

$$\begin{aligned}
T(S, V, N) &\equiv \left. \frac{\partial U}{\partial S} \right)_{V, N} && \text{Temperatura,} \\
P(S, V, N) &\equiv - \left. \frac{\partial U}{\partial V} \right)_{S, N} && \text{Presión,} \\
\mu(S, V, N) &\equiv \left. \frac{\partial U}{\partial N} \right)_{S, V} && \text{Potencial químico.}
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Es relativamente fácil mostrar que estas definiciones, como por ejemplo la de temperatura, son totalmente consistentes con el concepto intuitivo de ellas. Estas variables, que claramente no son extensivas, se denominan *variables intensivas*.

Las relaciones individuales definidas en (1.2) se denominan *ecuaciones de estado*, conocer una de ellas no es suficiente para tener toda la información termodinámica que contiene $U(S, V, N)$. En cambio, si se conocen las tres ecuaciones de estado, puede integrarse (1.1) y obtener U . Por ejemplo, de las expresiones de $T = T(S, V, N)$ y $P = P(S, V, N)$, puede eliminarse S y escribir una ecuación de estado de la forma $P = P(V, T, N)$, relación que expresa relaciones entre variables extensivas e intensivas.

Con las definiciones (1.2), el diferencial de U dado en (1.1) lo escribimos como

$$dU = TdS - PdV + \mu dN, \tag{1.3}$$

que en el caso de $N = \text{cte}$ se reduce a

$$dU = TdS - PdV,$$

donde las expresiones diferenciales TdS y $-PdV$, que no son diferenciales exactos, las denotamos como

$$dQ = TdS, \quad dW = -PdV,$$

donde dQ y dW se denominan cantidad de calor y trabajo mecánico respectivamente, por lo que (1.3) se escribe como

$$dU = dQ + dW. \tag{1.4}$$

La notación d indica que los diferenciales de Q y de W no son diferenciales exactos, esto es ni Q ni W son funciones potenciales y, en un proceso termodinámico de $q \rightarrow p$, estas cantidades dependen del camino en el espacio termodinámico que

conecte a estos dos puntos. Recordando cursos de análisis de varias variables, una expresión diferencial de la forma

$$u(x, y)dx + v(x, y)dy$$

será el diferencial de una función potencial, $\phi(x, y)$, si se cumple que

$$u(x, y) = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v(x, y) = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

por lo que

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Es claro entonces que no toda expresión diferencial será un diferencial exacto.

Por tanto si C y C' son dos caminos diferentes que conectan los puntos q y p , en general será

$$\int_C \ddot{d}Q \neq \int_{C'} \ddot{d}Q, \quad \int_C \ddot{d}W \neq \int_{C'} \ddot{d}W.$$

Es posible transformar estas expresiones diferenciales en diferenciales exactos mediante un factor integrante. En el caso de $\ddot{d}Q$, T^{-1} es el correspondiente factor integrante, mientras que para $\ddot{d}W$, $-P^{-1}$ lo es. La relación (1.4) no es otra cosa que el conocido primer principio de la termodinámica que nos dice que la variación de la energía interna de un sistema es producto del intercambio de calor del mismo más el trabajo mecánico realizado sobre el sistema; es una ley de conservación. El segundo principio de la termodinámica, en esta formulación, está incluido en el postulado de máxima entropía.

1.2. Gases ideales

Un gas ideal es un gas a altas temperaturas y densidades lo suficientemente bajas de manera que las partículas constituyentes del mismo prácticamente no interactúan, excepto por las colisiones que son interacciones de muy corto alcance y breves. No obstante, estas interacciones son esenciales para que el gas llegue al estado de equilibrio. En este caso, las partículas del gas se mueven durante la mayor parte del tiempo a velocidades constantes $v \ll c$. En este caso particular, las variables termodinámicas tienen un valor de equilibrio que siguen muy bien la siguiente relación (ecuación de estado entre variables extensivas e intensivas)

$$P = \frac{NkT}{V} = nkT = \frac{\rho kT}{m}, \quad (1.5)$$

donde k es la constante de Boltzmann (a veces denotada como k_B), $n = N/V$ y $\rho = mN/V$, esto es, dentro de un elemento de volumen macroscópico la densidad y el volumen son variables inversas, con m la masa de una partícula del gas. Esta ecuación de estado puede derivarse empíricamente a partir de la experimentación o teóricamente de consideraciones mecánico-estadísticas. En este curso optaremos por esta segunda opción.

1.2.1. Distribución de Maxwell-Boltzmann

En un gas a bajas densidades (y altas temperaturas) la distancia inter-partícula d es grande pues $d \sim 1/n^{1/3}$. Recordando la formulación de de Broglie de la mecánica cuántica u ondulatoria, toda partícula material lleva asociada una onda cuya longitud de onda, λ_B , queda definida por

$$\lambda_B = \frac{h}{p}, \quad (1.6)$$

donde h es la constante de Planck y p es el módulo del impulso de la partícula del gas. En un gas ideal $d \gg \lambda_B$, por lo que podemos despreciar todo efecto cuántico y considerar a dicho sistema de partículas como un gas puramente clásico (ver la discusión al comienzo de la Sección 1.4).

En un curso de “física moderna” se demuestra que en un gas clásico todo elemento de volumen obedece la estadística de Maxwell-Boltzmann (se derivará en los trabajos prácticos, no obstante más adelante retomaremos esta discusión) que da cuenta de la distribución de velocidades de las partículas (la distribución espacial se asume uniforme) y tiene la forma

$$F(\mathbf{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-m|\mathbf{v}|^2/2kT\right), \quad (1.7)$$

con T la temperatura del gas en el elemento de volumen. Así definida la función de distribución $F(\mathbf{v})$,

$$d^3P(\mathbf{v}) = F(\mathbf{v})d^3v,$$

es la probabilidad de que las partículas constituyentes posean una velocidad $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ dentro del elemento de volumen del espacio de velocidades $d^3v = dv_x dv_y dv_z$, como se ilustra en la Fig. 1.1.

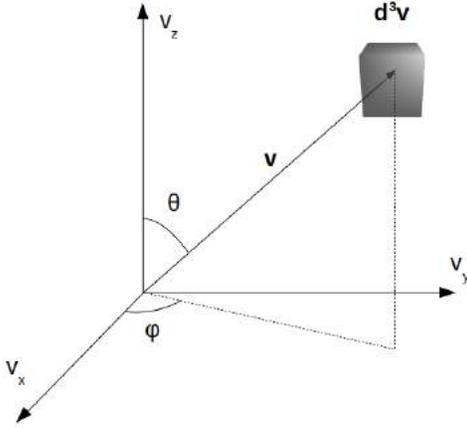


Figura 1.1: Espacio de velocidades y elemento de volumen d^3v centrado en \mathbf{v} .

Es simple corroborar que

$$\int F(\mathbf{v})d^3v \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(v_x, v_y, v_z)dv_x dv_y dv_z = 1,$$

ya que $F(v_x, v_y, v_z) = F(v_x)F(v_y)F(v_z)$ con

$$F(v_k) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \exp\left(-mv_k^2/2kT\right),$$

siendo $F(v_k)$ una distribución normal de valor medio 0 y varianza kT/m . En otras palabras, $F(\mathbf{v})$ es la distribución de probabilidad de las componentes cartesianas de la velocidad. Nótese que F tiene dimensiones inversas de velocidad al cubo.

Es más relevante expresar la distribución de Maxwell-Boltzmann en términos del módulo de la velocidad $v = |\mathbf{v}|$, ya que nos permitirá derivar indistintamente la probabilidad de que las partículas tengan velocidades entre $(v, v + dv)$ o entre $(E, E + dE)$, siendo $E = mv^2/2$ la energía correspondiente.² Para hallar la distribución de módulos de velocidades, recordemos que la probabilidad es un invariante frente a un cambio de variables, por tanto si hacemos un cambio, de coordenadas cartesianas en el espacio de velocidades a coordenadas esféricas en este mismo espacio, $(v_x, v_y, v_z) \rightarrow (v, \theta, \varphi)$ donde, de acuerdo a la Fig. 1.1 es

$$v_x = v \sin \theta \cos \varphi, \quad v_y = v \sin \theta \sin \varphi, \quad v_z = v \cos \theta,$$

escribimos

²Al despreocupar las interacciones entre las partículas, la energía total es puramente energía cinética.

$$d^3P(\mathbf{v}) = F(v_x, v_y, v_z) \underbrace{dv_x dv_y dv_z}_{d^3v} = F(v, \theta, \phi) \underbrace{v^2 \sin \theta d\theta d\phi}_{d^3v} dv,$$

donde hemos señalado el elemento de volumen del espacio de velocidades tanto en coordenadas cartesianas como en esféricas, y

$$F(v, \theta, \phi) = F(v \sin \theta \cos \phi, v \sin \theta \sin \phi, v \cos \theta).$$

Es claro que F no dependerá ni de θ ni de ϕ ya que F , de acuerdo a (1.7) solo depende de $|\mathbf{v}| = v$. Recordando que $\sin \theta d\theta d\phi = d^2\Omega$, el elemento de ángulo sólido, podemos escribir

$$d^3P(\mathbf{v}) = F(v)v^2 dv d^2\Omega,$$

si integramos esta última a todo el ángulo sólido, a los 4π ster,

$$\int_{4\pi} d^3P(\mathbf{v}) = dP(v) = 4\pi F(v)v^2 dv,$$

denominando $f(v) = 4\pi F(v)v^2$, de (1.7) la distribución de módulos de velocidad resulta

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 \exp(-mv^2/2kT). \quad (1.8)$$

Esta es la forma habitual de la distribución de Maxwell-Boltzmann para las velocidades, que se ilustra en la Fig. 1.2 para dos temperaturas diferentes y considerando un gas de hidrógeno.

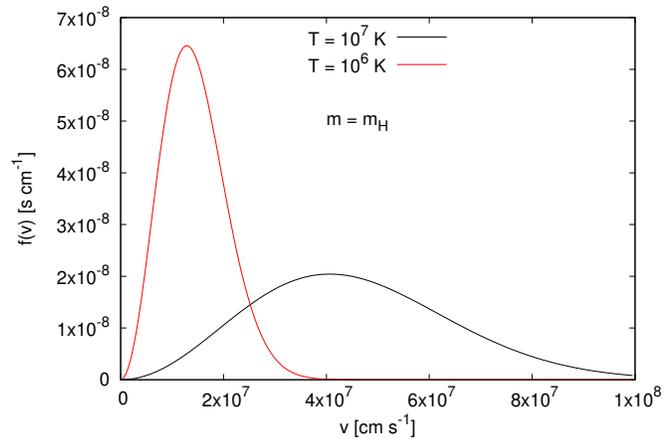


Figura 1.2: Función de distribución de Boltzmann de las velocidades para átomos de hidrógeno con $T = 10^7\text{K}$ y $T = 10^6\text{K}$.

El máximo de la distribución corresponde a $v = v_p$ que satisface la condición $f'(v_p) = 0$, donde f' denota df/dv . Por tanto

$$f'(v_p) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \left(2v_p - \frac{mv_p^3}{kT} \right) \exp(-mv_p^2/2kT) = 0,$$

por lo que $2 - mv_p^2/(kT) = 0$ resultando

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}}.$$

Por ejemplo, para temperaturas típicas en el interior del Sol, $T \approx 10^7 \text{K}$ y considerando $m = m_H$, surge $v_p \approx 4 \times 10^7 \text{cm s}^{-1} \ll c$, lo que justifica el tratamiento no relativista.

Alternativamente, puede expresarse una distribución en términos del número de partículas dN con módulo de velocidades en el intervalo $(v, v + dv)$ como

$$dN(v) = Nf(v)dv, \quad \text{donde} \quad \int dN(v) = \int_0^\infty Nf(v)dv = N \int_0^\infty f(v)dv = N,$$

o en términos de $n = N/V$,

$$dn(v) = nf(v)dv, \quad \int dn(v) = \int_0^\infty nf(v)dv = n,$$

donde $nf(v)$ lo denotamos con $\bar{n}(v)$, y $dn(v) = \bar{n}(v)dv$ es el número de partículas por unidad de volumen con velocidades en $(v, v + dv)$. Son representaciones equivalentes, solo se modifica la condición de normalización de la distribución.

Se utilizan en forma alternativa la distribución de probabilidad f , número de partículas Nf y número de partículas por unidad de volumen \bar{n} , en términos del módulo del impulso, $p = mv$, en lugar del módulo de la velocidad. Para expresar la distribución de Maxwell-Boltzmann en términos del impulso, $f(p)$, basta considerar la invarianza de la probabilidad, $f(p)dp = f(v)dv$ y por tanto $f(p) = f(v(p))|dv/dp| = f(v(p))/m$.

La distribución de Boltzmann suele expresarse también en términos de la energía $E = mv^2/2$. Denominando $\Phi(E)$ a esta función de distribución, debe satisfacer $\Phi(E)dE = f(v)dv$ y por tanto

$$\Phi(E) = f(v(E)) \left| \frac{dv}{dE}(E) \right|, \quad \frac{dv}{dE} = \frac{1}{mv} = \frac{1}{\sqrt{2mE}},$$

usando (1.8) para f que expresamos en términos de E ,

$$\Phi(E) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \frac{2E}{m} \frac{1}{\sqrt{2mE}} \exp(-E/kT),$$

que se reduce a

$$\Phi(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{kT} \right)^{3/2} E^{1/2} \exp(-E/kT), \quad (1.9)$$

la cual se representa en la Fig. 1.3 para dos temperaturas distintas, expresando la energía en Kev.

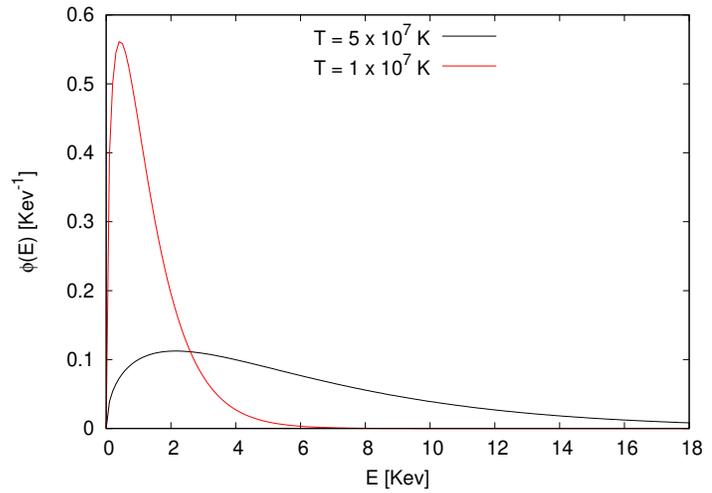


Figura 1.3: Función de distribución de Boltzmann en términos de la energía con $T = 5 \times 10^7 \text{ K}$ y $T = 1 \times 10^7 \text{ K}$.

El máximo de la distribución ocurre en $E_p = kT/2$, que surge simplemente de la condición $d\Phi(E)/dE|_{E=E_p} = 0$,

$$\frac{d\Phi}{dE} \Big|_{E=E_p} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{kT} \right)^{3/2} \left(\frac{kT - 2E_p}{2kTE_p^{1/2}} \right) \exp(-E_p/kT) = 0.$$

El valor medio de la distribución de energía es³

$$\langle E \rangle = \int_0^\infty E\Phi(E)dE = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty E^{3/2} \exp(-E/kT)dE,$$

y haciendo el cambio de variables $x = E/kT$, $dx = dE/kT$ resulta

$$\langle E \rangle = \frac{2kT}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty x^{3/2} \exp(-x)dx,$$

³Ver inicio de la siguiente sección.

la integral

$$\int_0^{\infty} x^{3/2} \exp(-x) dx = \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi},$$

por lo que el valor medio de la energía es

$$\langle E \rangle = \frac{3}{2}kT. \quad (1.10)$$

Recordando el valor de $k \approx 1,38 \times 10^{-16}$ erg K⁻¹, si la expresamos en Kev siendo 1 erg $\approx 6,242 \times 10^8$ Kev, la constante de Boltzmann resulta $k \approx 8,61 \times 10^{-8}$ Kev K⁻¹. Así, para temperaturas típicas en el interior del Sol, $T \approx 10^7$ K, $\langle E \rangle \approx 1$ Kev, como se observa en la Fig. 1.3 para esta temperatura e indica claramente que la mayoría de las partículas en el interior del Sol poseen energías del orden del Kev. Este resultado será de suma importancia cuando discutamos las reacciones nucleares que ocurren en el interior estelar.

1.2.2. Derivación de las ecuaciones de estado

Recordemos que dada una distribución de probabilidad, $f(x)$ con $0 < x < \infty$, normalizada a 1, $\int_0^{\infty} f(x) dx = 1$, el valor medio de la distribución es

$$\langle x \rangle = \int_0^{\infty} x f(x) dx,$$

y similarmente el valor medio cuadrático,

$$\langle x^2 \rangle = \int_0^{\infty} x^2 f(x) dx.$$

En general, dada una función $g(x)$ el valor medio de esta función será

$$\langle g \rangle = \int_0^{\infty} g(x) f(x) dx.$$

Si la distribución no está normalizada a 1, estas definiciones deben modificarse dividiendo el segundo miembro por la condición de normalización, $\int_0^{\infty} f(x) dx$.

Presión

Para determinar la presión a partir de una descripción microscópica, consideremos el escenario de la Fig. 1.4, en el cual una partícula del gas (átomo, molécula, electrón, etc.) con impulso \mathbf{p} incide sobre un elemento de superficie orientado d^2S cuya normal es \mathbf{n} , siendo ϑ el ángulo entre \mathbf{p} y \mathbf{n} ; y supondremos que la colisión es elástica. La

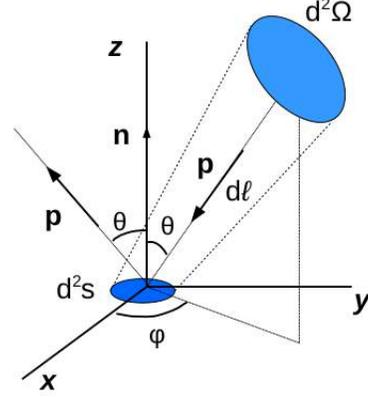


Figura 1.4: Representación esquemática de la colisión elástica de una partícula del gas con un elemento de superficie orientado d^2S .

componente normal del impulso de la partícula que colisiona con d^2S es $p_n \equiv \mathbf{p} \cdot \mathbf{n} = -p \cos \vartheta$, mientras que esta misma componente después de la colisión es $p \cos \vartheta$. Por tanto la variación de la componente normal del impulso es

$$\Delta p_n = 2p \cos \vartheta,$$

este será el impulso transferido al elemento de superficie.

Esta transferencia de impulso corresponde a una única partícula del gas. Consideremos las partículas que inciden sobre d^2S contenidas en el elemento de volumen representado en la Fig. 1.4, $d^3x = dl d^2S \cos \vartheta$, con $d^2S \cos \vartheta$ el elemento de superficie normal a \mathbf{p} . Si n denota la densidad numérica del gas y $v = p/m$ el módulo de la velocidad de las partículas (que tiene la dirección de $d\ell$), el número de partículas incidentes en el intervalo de tiempo dt , siendo $dl = v dt$, es $d^3N = n d^3x = nv \cos \vartheta d^2S dt$. Por tanto la variación de la componente normal del impulso de las partículas que poseen un impulso p (o velocidad v) y dirección $\mathbf{\Omega} = (\vartheta, \varphi)$ será $d^3p_n = d^3N \Delta p_n$,

$$d^3p_n = 2p \cos \vartheta \times nv \cos \vartheta d^2S dt = 2npv \cos^2 \vartheta d^2S dt. \quad (1.11)$$

Si $g(\mathbf{\Omega}) d^2\Omega$ denota la probabilidad de que las partículas que inciden sobre d^2S tengan dirección $\mathbf{\Omega}$ dentro del elemento de ángulo sólido $d^2\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$, la expresión (1.11) deberá incluir esta probabilidad. Asimismo, si $f(v) dv$ (o $f(p) dp$) es la probabilidad de que la velocidad de las partículas esté en el intervalo $(v, v + dv)$, también debemos introducir esta probabilidad en el cómputo del impulso transferido. Así

$$d^6p_n = 2npv \cos^2 \vartheta \times g(\mathbf{\Omega}) d^2\Omega \times f(v) dv d^2S dt. \quad (1.12)$$

Si suponemos isotropía, esto es, las partículas tienen la misma probabilidad de incidir desde cualquier dirección, entonces $g(\mathbf{\Omega}) = 1/(4\pi)$ y considerando sólo las que

proviene de $z > 0$, integramos (1.12) sobre $0 < \vartheta < \pi/2, 0 < \varphi < 2\pi$. Asimismo, integramos sobre todos los posibles módulos de velocidades, $0 < v < \infty$, resultando

$$\int_{\Omega} \int_v d^6 p_n = d^3 p_n = 2n \int_0^{\infty} pv f(v) dv \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \vartheta d\vartheta \cos^2 \vartheta d^2 S dt.$$

Haciendo el cambio de variables $u = \cos \vartheta$, $du = -\sin \vartheta d\vartheta$ con límites de integración $u = 1$ ($\vartheta = 0$) y $u = 0$ ($\vartheta = \pi/2$), calculamos las integrales sobre u y φ ,

$$d^3 p_n = 2n \int_0^{\infty} pv f(v) dv \frac{1}{4\pi} \underbrace{2\pi \int_0^1 u^2 du}_{1/3} d^2 S dt = \frac{n}{3} \int_0^{\infty} pv f(v) dv d^2 S dt.$$

Siendo la presión la variación de la componente normal del impulso por unidad de tiempo y superficie, resulta finalmente

$$P = \frac{n}{3} \int_0^{\infty} f(v) v p dv = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} \bar{n}(v) v p dv = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} \bar{n}(p) v p dp. \quad (1.13)$$

Si reemplazamos la distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann (1.8) en (1.13) resulta la ecuación de estado (1.5). En efecto, siendo $p = mv$,

$$P = \frac{nm}{3} \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv = \frac{nm}{3} \langle v^2 \rangle,$$

donde $\langle v^2 \rangle$ denota el valor medio cuadrático de las velocidades,

$$\langle v^2 \rangle = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} v^4 \exp(-mv^2/2kT) dv,$$

llamando $a = m/2kT$, podemos escribir

$$\langle v^2 \rangle = 4\pi \left(\frac{a}{\pi} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} v^4 \exp(-av^2) dv,$$

y siendo

$$\int_0^{\infty} v^4 \exp(-av^2) dv = \frac{3\sqrt{\pi}}{8a^{5/2}}, \quad \rightarrow \quad \langle v^2 \rangle = 4\pi \left(\frac{a}{\pi} \right)^{3/2} \frac{3\sqrt{\pi}}{8a^{5/2}} = \frac{3}{2a},$$

con $a = m/2kT$ resulta

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3kT}{m}, \quad (1.14)$$

que reemplazado en la expresión para la presión obtenemos $P = nkT$.

Esta ecuación de estado es de amplia aplicación en la mayoría de sistemas astrofísicos que presenten muy bajas densidades y temperaturas relativamente altas. Posteriormente discutiremos esto con más precisión.

Energía interna

La energía interna de un gas mono-atómico, U , es la energía cinética media de las partículas por tanto si el gas contiene N partículas y $E(v) = mv^2/2$,

$$U = N \int_0^\infty f(v)E(v)dv = N \int_0^\infty f(v)\frac{mv^2}{2}dv = \frac{Nm}{2} \int_0^\infty f(v)v^2dv = \frac{Nm}{2}\langle v^2 \rangle,$$

utilizando (1.14), resulta inmediato que

$$U = \frac{3}{2}NkT, \quad (1.15)$$

que coincide con (1.10) para una única partícula, por lo que $U/N = \langle E \rangle$. Por lo tanto, para un gas ideal,

$$P = \frac{2U}{3V} = \frac{2}{3}u \quad (1.16)$$

donde $u = U/V$ es la densidad de energía. Nótese que esta relación es independiente de la distribución $f(v)$ que obedezcan las partículas del gas, pues

$$P = \frac{nm}{3}\langle v^2 \rangle = \frac{mN}{3V}\langle v^2 \rangle, \quad y \quad U = \frac{mN}{2}\langle v^2 \rangle.$$

En cambio si depende del estado cinético de ellas, pues si $v \lesssim c$, las expresiones que hemos utilizado de p y E en términos de v dejan de ser válidas como veremos en las próximas secciones.

1.2.3. Calores específicos para un gas ideal

Habiendo justificado la validez de la ecuación de estado (1.5) para gases clásicos y derivado una segunda ecuación de estado (1.15) que relaciona la energía con la temperatura, a partir del primer principio de la termodinámica (1.4),

$$dU = \delta Q + \delta W,$$

podemos derivar el calor específico a volumen constante para un gas mono-atómico y no relativista, definido como

$$C_V = \left. \frac{\partial Q}{\partial T} \right)_V.$$

Siendo $\dot{d}W = -PdV = 0$ por ser un proceso a volumen constante, es

$$dU = \dot{d}Q = C_V dT,$$

y de (1.15), $U = 3NkT/2$, resulta

$$dU = \frac{3}{2}NkdT = C_V dT \quad \rightarrow \quad C_V = \frac{3}{2}Nk.$$

Asimismo, definimos el calor específico a presión constante como

$$C_P = \left. \frac{\partial Q}{\partial T} \right)_P,$$

que podemos relacionarlo con C_V utilizando el primer principio de la termodinámica

$$dU = \dot{d}Q - PdV \quad \rightarrow \quad C_V dT = C_P dT - d(PV),$$

donde hemos usado que $dU = C_V dT$, $\dot{d}Q = C_P dT$ y, siendo un proceso a presión constante $PdV = d(PV)$. De la ecuación de estado (1.5), $d(PV) = NkdT$ y así

$$(C_P - C_V - Nk)dT = 0,$$

por lo tanto

$$C_P - C_V = Nk, \quad C_P = \frac{5}{2}Nk, \quad \gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{5}{3}. \quad (1.17)$$

1.2.4. Proceso politrópico

En la sección anterior definimos calores específicos para dos procesos particulares en el espacio termodinámico, uno a volumen constante y otro a presión constante, no siendo $\dot{d}Q$ un diferencial exacto, obtuvimos resultados diferentes en cada caso. Ahora nos ocuparemos de los procesos que den lugar a

$$\frac{\dot{d}Q}{dT} = C,$$

con C constante. De hecho, esta expresión es la definición general de calor específico (sin particularizar ningún proceso específico) y exigiremos que este sea constante.

Busquemos entonces las relaciones entre las variables termodinámicas (o trayectorias en el espacio termodinámico) que dan lugar a un proceso como este, denominado *politrópico*. Nuevamente, del primer principio de la termodinámica

$$dU = \delta Q - PdV, \quad \rightarrow \quad C_V dT = C dT - \frac{NkT}{V} dV,$$

donde hemos utilizado la ecuación de estado (1.5) para reemplazar P . Por (1.17), $Nk = C_P - C_V$, así

$$(C_V - C) \frac{dT}{T} = -(C_P - C_V) \frac{dV}{V}, \quad \rightarrow \quad \frac{dT}{T} + \frac{C_P - C_V}{C_V - C} \frac{dV}{V} = 0.$$

El factor que multiplica a dV/V lo reescribimos de la siguiente manera

$$\frac{C_P - C_V}{C_V - C} = \frac{C_P + C - C - C_V}{C_V - C} = \frac{C_P - C}{C_V - C} - 1,$$

introduciendo el *índice politrópico*

$$\Gamma = \frac{C_P - C}{C_V - C},$$

la relación entre T y V , siendo Γ constante, resulta

$$\frac{dT}{T} + (\Gamma - 1) \frac{dV}{V} = 0, \quad \rightarrow \quad d \ln T + (\Gamma - 1) d \ln V = 0 \quad \rightarrow \quad d \ln (TV^{\Gamma-1}) = 0;$$

por lo que finalmente obtenemos

$$TV^{\Gamma-1} = \text{cte.} \tag{1.18}$$

Utilizado la ecuación de estado (1.5), reemplazamos $T = PV/Nk$, y siendo Nk constante, resulta

$$PV^\Gamma = \text{cte} \quad \text{o} \quad P \propto \rho^\Gamma, \tag{1.19}$$

donde hemos hecho uso de que el volumen y la densidad son variables inversas. Y si en (1.19) reemplazamos $V = NkT/P$,

$$P \left(\frac{T}{P} \right)^\Gamma = \text{cte},$$

que reescribimos como

$$P^{1-\Gamma}T^\Gamma = \text{cte.} \quad (1.20)$$

Las relaciones (1.18 - 1.20) son las ecuaciones que satisfacen las variables termodinámicas para un proceso politrópico.

Consideremos ahora casos particulares de un proceso politrópico

- *Proceso adiabático*: proceso a entropía constante, $dS = 0 \rightarrow \delta Q = 0$ por lo que $C = 0$ y

$$\Gamma = \frac{C_P - C}{C_V - C} = \frac{C_P}{C_V} = \gamma.$$

- *Proceso isotérmico*: proceso a temperatura constante, $dT = 0$ por lo que $C \rightarrow \infty$ y

$$\Gamma = \lim_{C \rightarrow \infty} \frac{C_P - C}{C_V - C} = 1.$$

También puede verificarse que los procesos a volumen y presión constantes son casos particulares de un proceso politrópico.

Las ecuaciones (1.18 - 1.20) son válidas para un gas ideal (pues hemos hecho uso de las ecuaciones de estado de un gas ideal) y, en particular para un proceso adiabático, obtuvimos que $\Gamma = \gamma = 5/3$ para un gas mono-atómico y no relativista. Estas relaciones pueden no resultar aplicables en un gas genérico, por lo que las generalizaremos para un *gas arbitrario adiabático*, de la siguiente manera

$$PV^{\Gamma_1} = \text{cte}, \quad P^{1-\Gamma_2}T^{\Gamma_2} = \text{cte}, \quad TV^{\Gamma_3-1} = \text{cte}, \quad (1.21)$$

donde, en general, los exponentes Γ_i serán distintos como discutiremos más adelante; para un gas ideal mono-atómico o que se comporte como tal, se cumple $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = \gamma = 5/3$.

Como hemos encontrado dos ecuaciones de estado para un gas ideal (1.5) y (1.15), siendo N constante, podemos entonces calcular la entropía de un gas ideal. Del primer principio de la termodinámica

$$dU = TdS - PdV \quad \rightarrow \quad C_V dT = TdS - \frac{NkT}{V}dV,$$

donde reemplazamos nuevamente $P = NkT/V$, dividiendo por T y reemplazando $Nk = C_P - C_V$

$$dS = C_V \frac{dT}{T} + (C_P - C_V) \frac{dV}{V}, \quad \rightarrow \quad \frac{dS}{C_P - C_V} = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{dT}{T} + \frac{dV}{V},$$

habiendo utilizado que $C_P/C_V = \gamma$; integrando esta última entre el estado inicial donde $T = T_0, V = V_0$ hasta otro donde las variables toman los valores T, V

$$S - S_0 = Nk \ln \left(VT^{1/(\gamma-1)} \right) - Nk \ln \left(V_0 T_0^{1/(\gamma-1)} \right), \quad (1.22)$$

donde S_0 es la entropía en el estado inicial. De esta expresión para la entropía recuperamos la relación entre V y T para un proceso adiabático, pues $dS = 0$ implica que

$$VT^{1/(\gamma-1)} = \text{cte} \quad \rightarrow \quad TV^{\gamma-1} = \text{cte}.$$

1.2.5. Mezcla de gases ideales

En un sistema astrofísico como una estrella o medio interestelar no habrá un único tipo de partículas constituyentes del gas, sino que existirá una mezcla de átomos, iones, electrones que integran el gas estelar.

Si existen r especies diferentes de partículas en un elemento de volumen macroscópico V , con densidad numérica $n_i = N_i/V$, cada una de ellas contribuirá a una presión parcial

$$P_i = n_i kT, \quad i = 1, \dots, r,$$

y de acuerdo a la ley de Dalton, la presión total será la suma de cada contribución individual

$$P = \sum_{i=1}^r P_i = \sum_{i=1}^r n_i kT = kT \sum_{i=1}^r n_i = nkT = \frac{NKT}{V},$$

donde la suma se hace sobre todas las especies presentes en el gas y $n = \sum_{i=1}^r n_i$, $N = \sum_{i=1}^r N_i$.

Una expresión más conveniente para la presión total se obtiene a partir de considerar que la mezcla contiene partículas de masa m_i y que presentan un abundancia, \bar{n}_i

$$\rho_i = m_i n_i = \bar{n}_i \rho, \quad (1.23)$$

donde ρ es la densidad total de la mezcla de gases. En otras palabras, \bar{n}_i es la fracción de la densidad total que corresponde a la especie i . Reemplazando en $\sum_{i=1}^r n_i$, n_i por $\bar{n}_i \rho / m_i$ resulta

$$P = \rho kT \sum_{i=1}^r \frac{\bar{n}_i}{m_i} = \frac{\rho kT}{m_H} \sum_{i=1}^r \bar{n}_i \frac{m_H}{m_i},$$

donde m_H es la masa del átomo de hidrógeno. Si introducimos el *peso molecular medio*, μ , tal que

$$\frac{1}{\mu} = \sum_{i=1}^r \bar{n}_i \frac{m_H}{m_i},$$

la ecuación de estado para una mezcla de gases ideales resulta

$$P = \frac{\rho kT}{\mu m_H}. \quad (1.24)$$

El peso molecular medio μ dependerá de la posición en una estrella a través de las variables termodinámicas, como la temperatura, la presión y la composición química (C), que son las que en definitiva determinarán, entre otros, el grado de ionización, por tanto $\mu = \mu(T, P, C)$.

Una expresión astrofísica muy simple de μ se obtiene a partir de considerar que, en una estrella, los principales constituyentes del gas son

- Hidrógeno (H) completamente ionizado;
- Helio (He) completamente ionizado;
- Elementos más pesados (Z) que el Helio completamente ionizados.

Si denotamos con \mathcal{Z} el número atómico y \mathcal{A} el peso atómico, y con $x = \bar{n}_H$, $y = \bar{n}_{He}$, $z = \bar{n}_Z$, las abundancias relativas de cada uno de los elementos mencionados respectivamente, podemos establecer fácilmente las siguientes densidades numéricas de cada especie de acuerdo a (1.23), $n_i = \bar{n}_i \rho / m_i$

- $n_H = N^\circ$ de núcleos de H por unidad de volumen: $x\rho/m_H$;
- $n_{He} = N^\circ$ de núcleos de He por unidad de volumen: $y\rho/4m_H$;
- $n_Z = N^\circ$ de núcleos de Z por unidad de volumen: $z\rho/\mathcal{A}m_H$.

Asimismo debemos contemplar los electrones liberados por cada átomo de H, He y Z ,

- $n_{eH} = N^\circ$ de electrones de H por unidad de volumen: $x\rho/m_H$;

- $n_{eHe} = N^\circ$ de electrones de He por unidad de volumen: $2y\rho/4m_H$;
- $n_{eZ} = N^\circ$ de electrones de Z por unidad de volumen: $Zz\rho/\mathcal{A}m_H$.

Suponiendo $Z \approx \mathcal{A}/2$ y $z \ll 1$ para $\mathcal{A} > 4$, la densidad numérica total, n , será la suma de las densidades numéricas parciales

$$n = \left(x + \frac{y}{4} + \frac{z}{\mathcal{A}} + x + \frac{y}{2} + \frac{Zz}{\mathcal{A}} \right) \frac{\rho}{m_H} \approx \left(2x + \frac{3}{4}y + \frac{z}{2} \right) \frac{\rho}{m_H}.$$

Con la condición de normalización $x + y + z = 1$ esta última puede escribirse como

$$n = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}y \right) \frac{\rho}{m_H}.$$

Siendo que $P = nkT = \rho kT/\mu m_H$ resulta

$$n = \frac{\rho}{\mu m_H}, \quad (1.25)$$

y obtenemos de la relación anterior

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}y.$$

Por ejemplo, para una estrella de hidrógeno puro ionizado es $x = 1, y = 0$ y resulta $\mu = 1/2$, mientras que para una estrella de helio puro ionizado es $x = 0, y = 1$ y por tanto $\mu = 4/3$. A medida que una estrella va transformando elementos livianos en más pesados el peso molecular medio aumenta. Esta expresión para μ , que es una aproximación habitual para las estrellas, no depende ni de T ni P cuando existe ionización completa.

De (1.25), si consideramos un elemento de volumen macroscópico V de masa m que contiene N partículas, siendo $n = N/V$ y $\rho = m/V$, resulta naturalmente

$$N = \frac{m}{\mu m_H} \quad (1.26)$$

relación que utilizaremos más adelante. En particular si, en lugar de los calores específicos discutidos anteriormente, utilizamos los calores específicos por unidad de masa, $c_v = C_v/m$, $c_p = C_p/m$, y siendo por (1.17), $C_p - C_v = Nk$, de (1.26) obtenemos

$$c_p - c_v = \frac{k}{\mu m_H}, \quad c_v = \frac{3}{2} \frac{k}{\mu m_H}, \quad c_p = \frac{5}{2} \frac{k}{\mu m_H}. \quad (1.27)$$

1.3. Radiación y materia

Hasta el momento solo hemos considerado la termodinámica del gas estelar o del medio interestelar. En los sistemas astrofísicos, además de gas, existe un campo de radiación o gas de fotones que contribuyen a la presión y a la energía. Más adelante en este curso (Sección 5.5) justificaremos las ecuaciones de estado que consideraremos en esta sección.

Para un gas de fotones contenido en un elemento de volumen macroscópico V a una temperatura uniforme T la presión y la energía satisfacen

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{3}aT^4, \quad u_{\text{rad}} = \frac{U_{\text{rad}}}{V} = aT^4, \quad (1.28)$$

donde $a = 4\sigma/c$ es la constante de radiación y σ la constante de Boltzmann, y observamos que la relación entre la presión y la densidad de energía, $P_{\text{rad}} = u_{\text{rad}}/3$, difiere de la de un gas ideal no relativista, precisamente porque los fotones son partículas relativistas.

Con estas dos ecuaciones de estado podemos calcular la entropía de un gas de fotones en equilibrio. Del primer principio de la termodinámica

$$\begin{aligned} dU_{\text{rad}} &= TdS_{\text{rad}} - P_{\text{rad}}dV, \quad \rightarrow \quad TdS_{\text{rad}} = d(u_{\text{rad}}V) + P_{\text{rad}}dV, \\ dS_{\text{rad}} &= \frac{1}{T} (du_{\text{rad}}V + u_{\text{rad}}dV + P_{\text{rad}}dV) = \frac{1}{T}Vdu_{\text{rad}} + \frac{1}{T}(u_{\text{rad}} + P_{\text{rad}})dV, \end{aligned}$$

y utilizando (1.28) resulta

$$dS_{\text{rad}} = 4aT^2VdT + \frac{4}{3}aT^3dV.$$

Siendo dS_{rad} un diferencial exacto, debe satisfacerse

$$\left. \frac{\partial S_{\text{rad}}}{\partial T} \right)_V = 4aT^2V, \quad \left. \frac{\partial S_{\text{rad}}}{\partial V} \right)_T = \frac{4}{3}aT^3, \quad (1.29)$$

de la segunda de estas relaciones podemos integrar respecto de V con T constante, y

$$S_{\text{rad}} = \frac{4}{3}aT^3V + C(T),$$

donde $C(T)$ es una constante de integración que puede depender de T . Derivando esta última expresión respecto de T , el resultado debe coincidir con la primera en (1.29)

$$\left. \frac{\partial S_{\text{rad}}}{\partial T} \right)_V = 4aT^2V + \frac{dC}{dT}$$

por lo que $dC/dT = 0$ y resulta una constante independiente de T . Finalmente, la entropía de un gas de fotones es

$$S_{\text{rad}} = \frac{4}{3}aT^3V + C. \quad (1.30)$$

Recordando las relaciones entre las variables termodinámicas para un gas arbitrario sometido a un proceso adiabático (1.21), en particular $TV^{\Gamma_3-1} = \text{cte}$, de (1.30) observamos que para un gas adiabático de fotones $dS_{\text{rad}} = 0$ implica

$$T^3V = \text{cte} \quad \rightarrow \quad TV^{1/3} = \text{cte}, \quad \Gamma_3 = \frac{4}{3}.$$

Se deja como ejercicio mostrar que para la radiación $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 4/3$.⁴

Como señalamos al comienzo de esta sección, tanto el gas como la radiación contribuyen tanto a la presión como a la energía, siendo

$$P = P_g + P_{\text{rad}} = \frac{NKT}{V} + \frac{1}{3}aT^4, \quad (1.31)$$

$$U = U_g + U_{\text{rad}} = \frac{3}{2}NKT + aT^4V,$$

donde el subíndice g denota la presión y energía del gas, e introducimos el parámetro

$$\beta = \frac{P_g}{P}, \quad 1 - \beta = \frac{P_{\text{rad}}}{P},$$

que representa la contribución relativa del gas a la presión total. De esta forma, $P = P_g/\beta$ y podemos escribir la ecuación de estado

$$P = \frac{NkT}{\beta V} = \frac{\rho kT}{\beta \mu m_H}, \quad (1.32)$$

que formalmente equivale a considerar la ecuación de estado de una mezcla de gases ideales con un peso molecular medio $\beta\mu \leq \mu$, donde β variará con la posición en la estrella a través de las variables termodinámicas.

⁴En $TV^{1/3} = \text{cte}$ utilizar la ecuación de estado para P_{rad} (1.28) y relacionar P_{rad} con V y luego P_{rad} con T .

A partir de (1.31), la definición de β y (1.32) podemos expresar la ecuación de estado para una mezcla de gas ideal y radiación en términos de la presión total y la densidad. De $P_{\text{rad}} = (1 - \beta)P$, escribimos

$$\frac{1}{3}aT^4 = (1 - \beta)P, \quad \rightarrow \quad T^4 = \frac{3(1 - \beta)}{a}P,$$

utilizando esta expresión para T en la relación para la presión del gas $P_g = \beta P$,

$$\left(\frac{\rho k T}{\mu m_H}\right)^4 = \beta^4 P^4 \quad \rightarrow \quad P^4 = \left(\frac{\rho k}{\mu m_H \beta}\right)^4 \frac{3(1 - \beta)}{a} P,$$

que nos conduce a la relación

$$P = \left(\frac{k}{\mu m_H \beta}\right)^{4/3} \left(\frac{3(1 - \beta)}{a}\right)^{1/3} \rho^{4/3}, \quad (1.33)$$

Si β es constante, el factor delante de $\rho^{4/3}$ es una constante, κ , y obtenemos la relación $P = \kappa \rho^{4/3}$, que se conoce como *modelo de Eddington*.

Consideremos ahora una mezcla adiabática de gas y radiación y determinemos los correspondientes índices adiabáticos definidos en (1.21). Para esta mezcla debe satisfacerse que

$$TdS = dU + PdV = 0 \quad (1.34)$$

por ser adiabática. De la segunda en (1.31)

$$dU = dU_g + d(u_{\text{rad}}V) = C_V dT + 4aT^3 V dT + aT^4 dV,$$

el primer término, con ayuda de (1.32) lo reescribimos como

$$C_V dT = C_V \underbrace{\frac{PV\beta}{NkT}}_1 dT = \frac{C_V}{C_P - C_V} \beta PV \frac{dT}{T} = \frac{1}{\gamma - 1} \beta PV \frac{dT}{T},$$

donde hemos usado que $C_P - C_V = Nk$ y $C_P/C_V = \gamma$; el segundo término de dU también lo reescribimos como

$$4aT^3 V dT = 12 \underbrace{\left(\frac{1}{3}aT^4\right)}_{P_{\text{rad}}} V \frac{dT}{T} = 12(1 - \beta)PV \frac{dT}{T},$$

donde reemplazamos P_{rad} por $(1 - \beta)P$; similarmente, el último término en dU resulta

$$aT^4 dV = 3 \left(\frac{1}{3} aT^4 \right) dV = 3(1 - \beta) P dV.$$

Por tanto

$$dU = \frac{1}{\gamma - 1} \beta P V \frac{dT}{T} + 12(1 - \beta) P V \frac{dT}{T} + 3(1 - \beta) P dV,$$

reemplazando en (1.34)

$$\frac{1}{\gamma - 1} \beta P V \frac{dT}{T} + 12(1 - \beta) P V \frac{dT}{T} + 3(1 - \beta) P dV + P dV = 0,$$

dividiendo toda esta expresión por el producto PV y multiplicando por $\gamma - 1$, escribimos

$$[\beta + 12(1 - \beta)(\gamma - 1)] d \ln T + [(4 - 3\beta)(\gamma - 1)] d \ln V = 0. \quad (1.35)$$

Esta relación puede reescribirse como

$$\left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln V} \right)_S = - \frac{(4 - 3\beta)(\gamma - 1)}{\beta + 12(1 - \beta)(\gamma - 1)},$$

donde S es constante por ser una mezcla adiabática. Recordando de (1.21) la relación entre T y V para un proceso adiabático en un gas arbitrario

$$TV^{\Gamma_3 - 1} = \text{cte} \quad \rightarrow \quad \ln T + (\Gamma_3 - 1) \ln V = \text{cte} \quad \rightarrow \quad \Gamma_3 - 1 = - \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln V} \right)_S.$$

Por lo tanto

$$\Gamma_3 = 1 + \frac{(4 - 3\beta)(\gamma - 1)}{\beta + 12(1 - \beta)(\gamma - 1)}.$$

Es inmediato verificar que en los límites $\Gamma_3 = \gamma = 5/3$ para $\beta = 1$ (solo gas) y $\Gamma_3 = 4/3$ para $\beta = 0$ (solo radiación).

De (1.32) resulta $d \ln P + d \ln V = d \ln T$ por lo que podríamos reemplazar en (1.35) $d \ln T$ y hallar Γ_1 y similarmente Γ_2 .

La Fig. 1.5 muestra el comportamiento de los tres índices en función de β donde observamos que para los valores límites, los tres coinciden, en todo el dominio se cumple que $\Gamma_1 \geq \Gamma_3 \geq \Gamma_2$ pero siempre $4/3 \leq \Gamma_i \leq 5/3$. Estos índices juegan un rol muy relevante tanto en el estudio de la estabilidad estructural de una estrella así como también en el transporte convectivo. En un curso de Interiores Estelares se profundizará sobre estos aspectos.

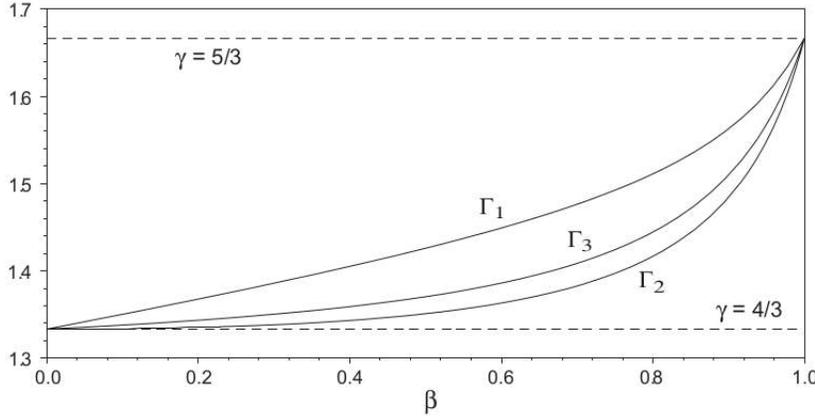


Figura 1.5: Índices adiabáticos en función del parámetro β , tomada del libro *Theoretical Astrophysics* de M. Guidry.

1.4. Materia degenerada

Al introducir el concepto de gas ideal, exigimos que las densidades sean bajas y las temperaturas altas de manera que la distancia inter-partícula sea mucho mayor que la longitud de onda de de Broglie asociada a cada partícula del gas. En efecto, si n es la densidad numérica del gas, la distancia inter-partícula $d \approx n^{-1/3}$. Por otra parte $\lambda_B = h/p$ definida en (1.6), puede reescribirse en término de la energía de las partículas, $E = p^2/(2m)$ ⁵, como

$$\lambda_B = \frac{h}{\sqrt{2mE}},$$

donde m es la masa de las partículas del gas. Si el gas se encuentra a una temperatura T , la energía cinética media (clásica) por partícula, de acuerdo a (1.10) es $\langle E \rangle = U/N = 3kT/2$, por tanto si adoptamos $E = \langle E \rangle$, la longitud de onda de de Broglie (térmica) resulta

$$\lambda_B = \frac{h}{\sqrt{3mkT}}. \quad (1.36)$$

Para un gas ideal, la condición $d \gg \lambda_B$, implica $n^{-1} \gg \lambda_B^3$;

$$n \ll \frac{1}{h^3} (3mkT)^{3/2}. \quad (1.37)$$

Esta desigualdad establece condiciones para la densidad y la temperatura, esta última debe ser lo suficientemente alta para que (1.37) se verifique y así se justifique el tratamiento clásico del gas.

⁵Recordar que la energía es solamente cinética.

Siendo el gas estelar esencialmente iones y electrones, notemos que λ_B depende de la masa de las partículas y siendo $m_H \approx 1800m_e$, resulta entonces que $\lambda_B(\text{H}) \lesssim 0,02\lambda_B(\text{e})$ por lo que $0,02\lambda_B(\text{e})$ es una cota superior para la longitud de onda de de Broglie para los iones. Alternativamente, para un n dado vemos que (1.37) puede no satisfacerse para $m = m_e$ pero si para $m = m_H$, pues difieren en un factor $\sim 8 \times 10^4$. Ahora bien, si esta condición no se cumple, debemos hacer un tratamiento cuántico, en principio para los electrones. En efecto, para densidades típicas de estrellas del tipo solar, (1.37) se satisface claramente, sin embargo para enanas blancas con densidades medias $\gtrsim 10^6 \text{ g cm}^{-3}$, deja de valer para los electrones pero se mantiene para los iones.

Por los argumentos señalados en el último párrafo, nos ocuparemos exclusivamente de los electrones. Para ello consideremos nuevamente la distribución clásica de Maxwell-Boltzmann $f(v)$ definida en (1.8 -1.9), más precisamente en la distribución de impulsos, $p = m_e v$, con $f(p) = m_e^{-1} f(p/m_e)$, que de ahora en más la denotaremos $f(p)$. Suponiendo que fuese una descripción válida, observamos que al decrecer la temperatura (manteniendo constante la densidad numérica), los electrones decrecen sus impulsos o energías, y cuando $T \rightarrow 0$, la distribución de impulsos $f(p) \propto T^{-3/2} \exp(-p^2/2m_e kT) \rightarrow 0$ y por tanto la presión $P \rightarrow 0$. En otras palabras, los electrones tienden a concentrarse alrededor del origen del espacio de impulsos e intentarán ocupar los mínimos niveles de impulsos o energías posibles.

Clásicamente no existe restricción alguna al tamaño mínimo de un elemento de volumen en el espacio de fases que puede ser ocupado por las partículas de un sistema. En cambio, en mecánica cuántica el principio de incerteza de Heisenberg impone una limitación a la celda mínima de este espacio, pues al ser $\Delta x_i \Delta p_i \geq h$, para $i = 1, 2, 3$, donde h es la constante de Planck, el producto de estas tres condiciones establece que

$$d^3x d^3p \geq h^3,$$

por lo que h^3 es la celda mínima de volumen en el espacio de fases.

En mecánica cuántica, a diferencia de la mecánica clásica, las partículas son indistinguibles. Al tratar una colección de partículas, es posible demostrar que la función de onda correspondiente a esta colección debe ser simétrica o antisimétrica (respecto al spin) frente al intercambio de pares de partículas ⁶.

Además puede establecerse una relación (esencialmente empírica) entre la simetría de la función de onda y el spin de las partículas. Los electrones son partículas con spin semi-entero (1/2), la función de onda correspondiente a una colección de ellos debe ser antisimétrica, lo que conduce directamente al principio de exclusión de Pauli: dos electrones no pueden estar en un mismo estado cuántico. Expresado en otros

⁶Ver apéndice.

términos, dos electrones no pueden tener el mismo spin y la misma localización en el espacio de fases. Resulta evidente entonces que si la desigualdad (1.37) no se satisface por ser la densidad lo suficientemente grande y la temperatura baja, se podría violar este principio. Si se tratase de partículas con spin entero (que son las partículas portadoras de las interacciones fundamentales como por ej. el fotón, el gluón; y las compuestas como la partícula α) la función de onda de una colección de ellas resulta simétrica, no aplica el principio de exclusión de Pauli y pueden ubicarse en un mismo elemento de volumen del espacio de fases ⁷.

Concluimos entonces que en una celda elemental del espacio de fases a lo sumo pueden existir g_s electrones, donde g_s denota el número de electrones con estados cuánticos diferentes en una celda de tamaño h^3 . En este caso, $g_s = 2$, un electrón spin up y otro spin down, por lo que si d^6N denota el número de electrones en un elemento de volumen del espacio de fases $d^3x d^3p$, centrado en (\mathbf{x}, \mathbf{p}) debe satisfacerse

$$d^6N(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{2}{h^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) d^3x d^3p, \quad (1.38)$$

donde $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) d^3x d^3p$ da cuenta de la probabilidad de que los electrones se encuentren en el punto (\mathbf{x}, \mathbf{p}) dentro del elemento de volumen $d^3x d^3p$; $f(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ debe necesariamente incluir la restricción que impone el principio de exclusión de Pauli, por lo que $f \leq 1$. En caso contrario, si se tratase de partículas con spin entero, $f(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ no tiene esta restricción. Por tanto la distribución $f(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ es la que determina el número de partículas dentro de un elemento de volumen del espacio de fases. En otro sistema aplicará también (1.38) para el número total de partículas en un elemento de volumen $d^3x d^3p$, su densidad será $(g_s/h^3)f$, donde g_s es el número de estados cuánticos diferentes para la celda unidad y f la distribución correspondiente a la naturaleza de las partículas involucradas. Esta distribución dependerá en general de dos parámetros α y β , que surgen de buscar la configuración más probable sujeta a las restricciones de conservación del número de partículas y de la energía mediante el método de multiplicadores de Lagrange. Estos parámetros pueden expresarse en términos del potencial químico y la temperatura; $\alpha = -\mu/kT$, $\beta = 1/kT$.

Concluimos así que (1.38) es una relación absolutamente general que utilizaremos en lo que sigue y en en Capítulo 5 para derivar la densidad de energía de un gas de fotones (ver discusión en el apéndice).

En un elemento de volumen macroscópico del espacio de configuraciones, V , f no dependerá de \mathbf{x} , solo de $|\mathbf{p}| = p$ a través de la energía, tal como ocurre en Maxwell-Boltzmann⁸. Por lo tanto integramos (1.38) sobre el espacio de configuraciones a V

⁷Ver apéndice.

⁸Siempre que no existan agentes físicos que determinen una dirección privilegiada como campos

resulta

$$d^3N(\mathbf{p}) = \frac{2}{h^3} f(p) V d^3p, \quad (1.39)$$

y si consideramos el número de electrones por unidad de volumen (del espacio de configuraciones) $n = N/V$, (1.39) se reduce a

$$d^3n(\mathbf{p}) = \frac{2}{h^3} f(p) d^3p, \quad (1.40)$$

donde $d^3n(\mathbf{p})$ es el número de electrones por unidad de volumen con impulso \mathbf{p} dentro del elemento de volumen del espacio de impulsos d^3p .

De la misma forma en que procedimos con anterioridad con la distribución de Maxwell-Boltzmann, utilizamos coordenadas esféricas en el espacio de los impulsos y $d^3p = p^2 dp d^2\Omega$, donde p es el módulo de \mathbf{p} y $d^2\Omega$ es el elemento de ángulo sólido correspondiente. Si integramos (1.40) sobre todos los ángulos obtenemos

$$dn(p) = \frac{2}{h^3} 4\pi p^2 f(p) dp \equiv \bar{n}(p) dp, \quad (1.41)$$

donde $dn(p) = \bar{n}(p) dp$ es el número de electrones por unidad de volumen con módulo del impulso entre p y $p + dp$ y $\bar{n}(p)$ su distribución,

$$\bar{n}(p) = \frac{8\pi}{h^3} p^2 f(p). \quad (1.42)$$

Los electrones (que son fermiones, como los protones y neutrones) obedecen la *estadística de Fermi-Dirac* que contempla el principio de exclusión de Pauli, siendo su distribución

$$f(E(p)) = \frac{1}{\exp[(E(p) - \mu)/kT] + 1} \leq 1, \quad (1.43)$$

donde $f(p) \equiv f(E(p))$, con $E = p^2/2m_e$ y $-\infty < \mu < \infty$ es el potencial químico, que en esta formulación lo consideramos como un parámetro de *degeneración*. En efecto, si $\mu/kT \gg 1$,

$$\exp[(E(p) - \mu)/kT] = \exp(E(p)/kT) \exp(-\mu/kT) \ll 1,$$

y $f(E) \approx 1$ para todas las energías físicamente razonables; este límite corresponde a una degeneración fuerte, todos los estados cuánticos están ocupados. Por otra parte, si $\mu/kT \ll -1$,

$$\exp[(E(p) - \mu)/kT] = \exp(E(p)/kT) \exp(-\mu/kT) \gg 1,$$

eléctricos o magnéticos

el +1 en el denominador en (1.43) puede ignorarse y en este caso la función de distribución, puramente exponencial, coincide con la de Maxwell-Boltzmann (se justifica en el apéndice a este capítulo).

De (1.41) y (1.43) puede establecerse una relación directa entre μ y la densidad numérica de electrones n , integrando sobre todos los impulsos

$$n = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{\exp[(E(p) - \mu)/kT] + 1}. \quad (1.44)$$

Para evitar violar el principio de exclusión, los electrones en un gas denso y frío deben poseer mayores impulsos que los que tendrían clásicamente de acuerdo a Maxwell-Boltzmann. Como la presión, dada en (1.13) es

$$P = \frac{n}{3} \int_0^\infty f(v) p v dv = \frac{1}{3} \int_0^\infty \bar{n}(p) v p dp, \quad (1.45)$$

mayores impulsos implican mayores presiones. Esta fuente de presión puramente cuántica es lo que se denomina *presión de degeneración*.

Desafortunadamente ninguna de las dos integrales (1.44), (1.45) admite solución analítica, por lo que consideraremos una aproximación extrema, de máxima degeneración que tal como discutimos más arriba se presenta a temperaturas muy bajas y si consideramos el límite cuando $T \rightarrow 0$, definimos la *energía de Fermi*, $E_f = \mu(T = 0)$ ⁹ y la distribución de Fermi-Dirac (1.43) toma la forma

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{\exp[(E(p) - E_f)/kT] + 1} = H(E(p) - E_f) \quad (1.46)$$

donde $H(E(p) - E_f)$ es la función de Heaviside (1 si $E(p) < E_f$, 0 si $E(p) > E_f$) que se representa en el panel izquierdo de la Fig. 1.6 en color azul. Las otras dos curvas corresponden a la distribución de Fermi-Dirac f , dada por (1.43), para dos temperaturas $T_2 > T_1 > 0$, siendo la curva roja la correspondiente a T_2 y la magenta a T_1 .

En este límite, todos los estados con $E(p) < E_f$ se encuentran completamente ocupados, justamente E_f se define habitualmente de esta manera, como el nivel más alto ocupado por un sistema de fermiones a $T = 0$ K. En esta situación se dice que el gas de electrones se encuentra *completamente degenerado*.

⁹El potencial químico está relacionado con la energía de Fermi y la temperatura por la relación

$$\frac{\mu}{E_f} = 1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{E_f}\right)^2 + \frac{\pi^4}{80} \left(\frac{kT}{E_f}\right)^4 - \dots$$

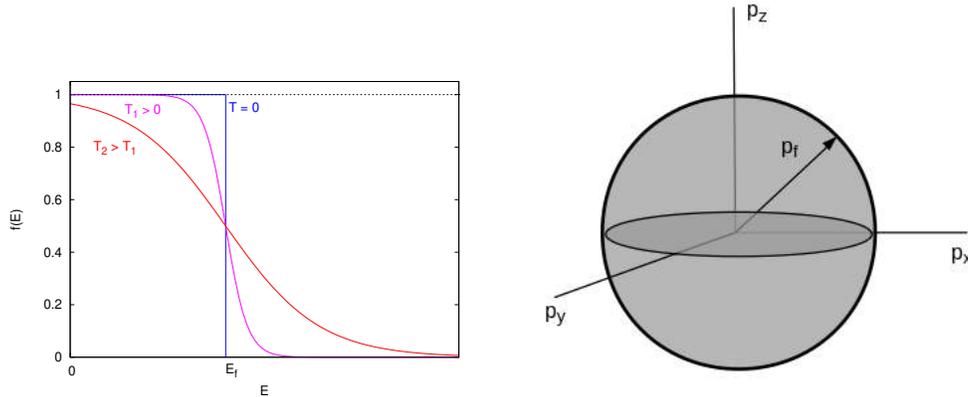
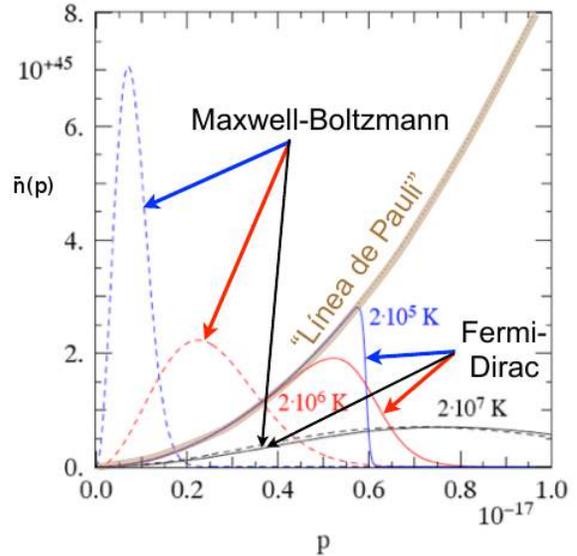


Figura 1.6: Izquierda: Distribución de Fermi-Dirac para tres temperaturas diferentes, $T = 0, T_1 > 0, T_2 > T_1$. Derecha: Representación en el espacio de impulsos de la esfera de Fermi.

Con la energía de Fermi (cuya expresión derivaremos más abajo) es útil definir la *temperatura de Fermi*, tal que $E_f = kT_f$ y el *impulso de Fermi*, $E_f = p_f^2/2m_e$ (clásicamente). Este último impulso define la esfera de Fermi, el límite por debajo del cual todos los estados en el espacio de impulsos están ocupados, $p < p_f$ como se ilustra en el panel derecho de la Fig. 1.6.

La Fig. 1.7 muestra en forma comparativa, para una densidad electrónica de $\rho = 2 \times 10^4 \text{ g cm}^{-3}$ la distribución $\bar{n}(p)$ definida en (1.42), correspondiente a la distribución

Figura 1.7: (De notas de D. Page, UNAM): Distribución de Fermi-Dirac, $\bar{n}(p)$, en líneas continuas y Maxwell-Boltzmann, $\bar{n}(p) = nm_e^{-1} f(p/m_e)$, la distribución de Maxwell-Boltzmann para los impulsos normalizada a la densidad numérica de electrones n , en líneas a trazos, para $n = 5 \times 10^{27} \text{ cm}^{-3}$ ($\rho = 2 \times 10^4 \text{ g cm}^{-3}$) para tres temperaturas, $T = 2 \times 10^7, 2 \times 10^6, 2 \times 10^5$ en negro, rojo y azul respectivamente. La “línea de Pauli” corresponde a degeneración completa ($\bar{n}(p) = 8\pi p^2/h^3$).



de Fermi-Dirac (en líneas continuas) y la de Maxwell-Boltzmann (en líneas a trazos) para tres temperaturas diferentes, $T = 2 \times 10^7, 2 \times 10^6, 2 \times 10^5$ K, donde observamos que para la temperatura más alta, ambas distribuciones prácticamente coinciden, mientras que para las otras dos temperaturas, las diferencias son apreciables. La curva “línea de Pauli”, que corresponde al caso de degeneración completa con $f(p) = 1$ en (1.42) para $\bar{n}(p)$, se aproxima muy bien con la distribución de Fermi-Dirac para $T = 2 \times 10^5$ hasta $p \approx 0,6 \times 10^{-17} \text{g cm s}^{-1}$, que para la densidad considerada, el impulso de Fermi resulta $p_f \sim 10^{-17} \text{g cm s}^{-1}$.

1.4.1. Ecuaciones de estado en degeneración completa

En un gas de electrones completamente degenerado es simple derivar una ecuación de estado para la presión, pues si la distribución de Fermi-Dirac es una función de Heaviside $H(E(p) - E_f)$, entonces $f(p)$ vale 1 si $p < p_f$ y 0 si $p > p_f$ (ver Fig. 1.6 panel derecho) y se simplifica el cómputo de las integrales (1.44), (1.45), pues (1.42),

$$\bar{n}(p) = \frac{8\pi}{h^3} p^2 f(p)$$

se reduce a

$$\bar{n}(p) = \begin{cases} \frac{8\pi}{h^3} p^2 & p < p_f \\ 0 & p > p_f. \end{cases} \quad (1.47)$$

Así la densidad numérica de electrones (1.44) resulta

$$n = \int_0^\infty \bar{n}(p) dp = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{p_f} p^2 dp = \frac{8\pi}{h^3} \frac{p_f^3}{3},$$

y por tanto

$$p_f = \frac{h}{2} \left(\frac{3n}{\pi} \right)^{1/3}. \quad (1.48)$$

Siendo $E_f = p_f^2/2m_e$ surge inmediatamente que

$$E_f = \frac{h^2}{8m_e} \left(\frac{3n}{\pi} \right)^{2/3}. \quad (1.49)$$

Tanto el impulso como la energía de Fermi crecen con la densidad de electrones, consecuencia directa del principio de exclusión de Pauli. Para un elemento de

volumen macroscópico del gas de electrones, si el número de electrones aumenta, necesariamente las partículas deberán ocupar mayores niveles de energía o impulso.

Finalmente, usando (1.45) y (1.47) podemos hallar la presión de un gas degenerado

$$P_d = \frac{1}{3} \int_0^\infty \bar{n}(p) p v dp = \frac{1}{3} \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{p_f} p^3 \underbrace{\frac{p}{m_e}}_v dp = \frac{8\pi}{15h^3 m_e} p_f^5, \quad (1.50)$$

y utilizando la expresión para p_f (1.48) encontramos

$$P_d = \frac{h^2}{20m_e} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} n^{5/3}, \quad P \propto \rho^{5/3}, \quad (1.51)$$

donde $\rho = \mu_e m_H n$ con μ_e el peso molecular medio de los electrones. En efecto, haciendo un análisis similar al que nos condujo a (1.24), considerando exclusivamente electrones y con una composición química equivalente, $\mu_e = 2/(1+x) \approx 1$. Notemos que en un gas de electrones con $T \rightarrow 0$ existe una presión finita, mientras que en un gas clásico $P \rightarrow 0$.

Asimismo, se puede derivar la ecuación de estado para la densidad de energía del gas de la misma forma que lo hicimos con la distribución de Maxwell-Boltzmann, calculando la energía cinética media de los electrones por unidad de volumen, siendo la energía de un electrón $E(p) = p^2/2m_e$, por lo tanto, de (1.47)

$$u = \int_0^\infty E(p) \bar{n}(p) dp = \int_0^\infty \frac{p^2}{2m_e} \bar{n}(p) dp = \frac{4\pi}{m_e h^3} \int_0^{p_f} p^4 dp = \frac{4\pi}{5m_e h^3} p_f^5,$$

que comparando con (1.50) resulta

$$P = \frac{2}{3} u,$$

igual que en un gas ideal.

La expresión para la presión derivada en (1.51) corresponde a una aproximación no relativista, pues hemos reemplazado v por p/m_e en (1.50). De acuerdo a (1.48), si la densidad es lo suficientemente elevada, p_f puede hacerse muy grande. En esta situación, debemos considerar las expresiones relativistas que relacionan la energía (cinética) y la velocidad con el impulso,

$$E = c\sqrt{p^2 + m^2 c^2} - mc^2, \quad v = \frac{\partial E}{\partial p}.$$

Cuando el impulso es grande en comparación con mc , podemos aproximar

$$\begin{aligned} E &= pc\sqrt{1 + (mc/p)^2} - mc^2 \\ &\approx pc\left(1 + \frac{1}{2}(mc/p)^2 - \frac{1}{8}(mc/p)^4 + \dots\right) - mc^2, \end{aligned} \quad (1.52)$$

usando que $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2 - x^2/8 + \dots$

A los efectos de derivar una expresión simple para la presión, consideramos el caso ultra relativista que implica $p \gg mc$, por lo que despreciamos todos los términos en la suma que involucran potencias en (mc/p) y la energía se reduce a $E \approx c(p-mc) \approx cp$, por tanto la velocidad, en esta aproximación es simplemente $v = \partial E/\partial p \approx c$.

Así en el cómputo de P en (1.50) reemplazamos $v \approx c$ y esta resulta

$$P_{\text{d-rel}} = \frac{1}{3} \int_0^\infty vp\bar{n}(p)dp = \frac{1}{3} \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{p_f} \underbrace{v}_c p^3 dp = \frac{1}{3} \frac{8\pi}{h^3} c \int_0^{p_f} p^3 dp = \frac{2\pi c}{3h^3} p_f^4,$$

y reemplazando p_f obtenemos

$$P_{\text{d-rel}} = \frac{hc}{8} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} n^{4/3}, \quad P \propto \rho^{4/3}, \quad (1.53)$$

ecuación que aplica a muy altas densidades y que resulta más suave que (1.51) ya que en este caso, la presión varía más suavemente con la densidad que en el caso no relativista.

De la misma manera que en el escenario no relativista, derivamos la densidad de energía aproximando $E \approx pc$ y obtenemos

$$u = \int_0^\infty E(p)\bar{n}(p)dp = \int_0^{p_f} pc\bar{n}(p)dp = \frac{8\pi c}{h^3} \int_0^{p_f} p^3 dp = \frac{2\pi c}{h^3} p_f^4,$$

que comparando con $P_{\text{d-rel}}$ en la forma dada en la ecuación anterior a (1.53), resulta

$$P = \frac{1}{3}u,$$

exactamente igual que para la radiación.

Estas ecuaciones de estado son de aplicación frecuente, como primera aproximación, en estrellas enanas blancas. Si bien es evidente que no están a $T = 0$ K, una temperatura central característica es $T \sim 10^7$ K que es muy inferior a la correspondiente temperatura de Fermi. Ciertamente, $T_f = E_f/k$ donde E_f está dada por

(1.49), resulta $T_f \sim 10^{11}$ K para $\rho \lesssim 10^7$ g cm $^{-3}$. En otros términos, las energías o impulsos de los electrones a las temperaturas típicas en una enana blanca resultan mucho menores que la energía o impulso de Fermi respectivamente, por lo que la aproximación de la distribución de Fermi-Dirac con la función de Heaviside es plausible.

1.5. Regiones de dominio

En un plano $\log \rho - \log T$ se pueden definir aproximadamente las regiones de dominio de cada ecuación de estado. Para ello definimos los límites donde las contribuciones de cada una son equiparables, a medida que aumentamos la densidad.

La presión total, de acuerdo a las discusiones previas, la escribimos como

$$P = P_{\text{rad}} + P_i + P_e,$$

donde P_i denota la presión de los iones y para los cuales la degeneración puede ignorarse; P_e es la presión de los electrones, cuya expresión depende del grado de degeneración. Para bajas densidades $P_i + P_e = P_g$, siendo P_g la presión de un gas ideal definida en (1.24), donde ambos iones y electrones contribuyen de manera similar. En cambio para altas densidades, $P_g \approx P_e \approx P_d$, dada en (1.51), ya que la presión de los iones puede despreciarse frente a la correspondiente a los electrones.

Comenzando con bajas densidades, tendremos contribuciones del gas ideal y de la radiación, por lo que igualando ambas contribuciones

$$P_g = P_{\text{rad}} \rightarrow \frac{\rho k T}{\mu m_H} = \frac{1}{3} a T^4 \rightarrow \log T = \frac{1}{3} \log \rho + \frac{1}{3} \log \left(\frac{3ka}{\mu m_H} \right), \quad (1.54)$$

donde el segundo término es una constante. Este límite, que en el plano $\log \rho - \log T$ es una recta de pendiente 1/3, delimitará regiones donde dominará la presión de radiación o la presión de gas ideal. Y es un límite preciso, pues tanto las partículas del gas como los fotones contribuyen en forma aditiva a la presión total, como hemos discutido previamente, por lo que la igualdad (1.54) es correcta.

Al aumentar la densidad, el gas de electrones puede volverse degenerado y, como la presión de radiación no depende de la densidad, existirá un límite entre la presión de un gas clásico y la de un gas de electrones degenerados no relativista (pues el límite relativista ocurre para densidades más elevadas), por lo que igualamos

$$P_g = P_d \rightarrow \frac{\rho k T}{\mu m_H} = \frac{h^2}{20 m_e (\mu_e m_H)^{5/3}} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \rho^{5/3}, \quad (1.55)$$

$$\log T \approx \frac{2}{3} \log \rho + \log \left(\frac{\mu h^2}{20 k m_e m_H^{2/3}} \right),$$

donde hemos tomado $\mu_e \approx 1$, despreciamos el factor numérico $3/\pi$ y el segundo término resulta nuevamente una constante. Debemos señalar aquí que la igualdad (1.55) es una muy grosera aproximación, pues estamos igualando la presión correspondiente a un gas ideal con la de un gas de electrones completamente degenerado, por lo que la recta de pendiente $2/3$ en el plano $\log \rho - \log T$ que delimita la región donde domina un gas clásico o un gas de Fermi es solo una estimación.

Finalmente, a densidades aún más altas, corresponde considerar cuando un gas completamente degenerado se vuelve relativista. Por ello equiparamos (1.51) con (1.53), ambas independientes de T y resulta

$$P_d = P_{d\text{-rel}} \rightarrow n \approx \left(\frac{5m_e c}{2h}\right)^3 \rightarrow \rho \sim m_H \left(\frac{5cm_e}{2h}\right)^3, \quad (1.56)$$

utilizando que $\rho = \mu_e m_H n$ y donde esta también es una cruda aproximación, pues derivamos $P_{d\text{-rel}}$ reemplazando $v \approx c$. Esta estimación para la densidad electrónica puede obtenerse también a partir de imponer que $p_f \approx m_e c$ de acuerdo a la discusión dada en torno a (1.52). En efecto, de (1.48) para el impulso de Fermi, cuando $p_f \approx m_e c$, debemos considerar la aproximación relativista y ello implica que

$$p_f = \frac{h}{2} \left(\frac{3n}{\pi}\right)^{1/3} \approx m_e c \rightarrow n \approx \left(\frac{2m_e c}{h}\right)^3,$$

donde en estas estimaciones hemos aproximado nuevamente $3/\pi \approx 1$, y observamos que este valor de n es muy similar a (1.56).

En la Fig. 1.8 (panel izquierdo) se representan estas curvas en el plano $\log T - \log \rho$, donde se observa que a bajas densidades y altas temperaturas domina la radiación, mientras que a temperaturas entre 10^6 y 10^8 K, al aumentar la densidad comienza a dominar el gas ideal, luego la ecuación de estado correspondiente a un gas degenerado no relativista y finalmente, para densidades extremas, domina el límite relativista (ER en la figura). Estas dos últimas rectas se cruzan en $\rho \approx 2 \times 10^6 \text{ g cm}^{-3}$, $T \approx 10^8$ K por lo que el ligero cambio en la curva intermedia en torno a dicho valor resulta al considerar la equiparación entre la presión del gas P_g y la de degeneración relativista $P_{d\text{-rel}}$, que también arroja una recta de pendiente $1/3$ en dicho plano.

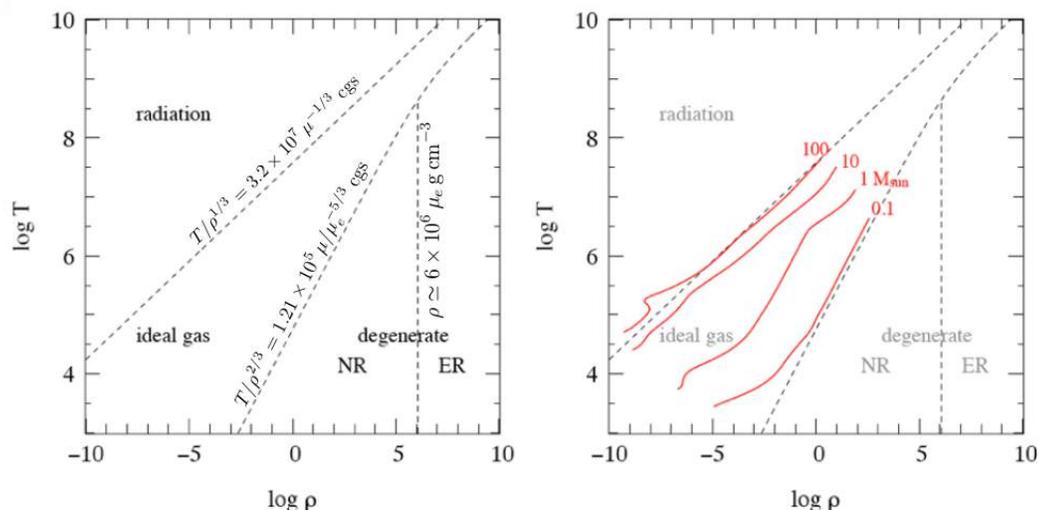


Figura 1.8: Las diferentes ecuaciones de estado en el plano $\log T - \log \rho$ para un composición química $x = 0,70, y = 0,28, z = 0,02$, $[T] = \text{K}$, $[\rho] = \text{g cm}^{-3}$. En el panel derecho se superponen en este plano cuatro modelos de estrellas de diferentes masas con la variación de la densidad y la temperatura desde la superficie hasta el centro (de D. Page, UNAM).

En el panel derecho se representa la marcha de la densidad y temperatura, desde la superficie hasta el interior, en diferentes modelos estelares simples de 0,1, 1, 10 y $100M_{\odot}$. Nótese que para $1 \leq M < 10$ los modelos muestran que en toda la estrella puede utilizarse la ecuación de estado de un gas ideal, mientras que para las estrellas de menor masa, debe considerarse la degeneración, excepto en las capas más externas donde la densidad es menor. Por otro lado, para las estrellas más masivas la radiación es la que domina mayoritariamente, salvo en las regiones más internas donde tanto el gas como la radiación contribuyen de manera similar.

Cabe señalar que para $T = 2 \times 10^7 \text{ K}$ y densidad $\rho = 2 \times 10^4 \text{ g cm}^{-3}$ puede utilizarse la aproximación de gas ideal para los electrones, lo cual está en completo acuerdo con lo que refleja la Fig. 1.6 (panel derecho), donde la distribución de Maxwell-Boltzmann y la de Fermi-Dirac son muy similares.

1.6. Apéndice Capítulo 1

Aquí discutiremos, en forma simplificada, ciertas características de los sistemas de partículas cuánticas y, por otra parte, el límite clásico de las estadísticas cuánticas.

1.6.1. Sistemas de partículas

Consideremos un sistema de partículas, que para simplificar la notación y presentación, supondremos que solo consta de dos partículas. Sea $\psi(1, 2)$ la función de onda que describe el estado estacionario del sistema, donde 1, 2 denotan posiciones y spin de las partículas: $1 = (\mathbf{x}_1, m_{s1})$, $2 = (\mathbf{x}_2, m_{s2})$.

Una permutación en la función de onda entre las partículas 1 y 2 no puede cambiar el estado físico del sistema, pues se trata de partículas indistinguibles, por lo tanto $\psi(1, 2)^* \psi(1, 2) = \psi(2, 1)^* \psi(2, 1)$, o equivalentemente,

$$|\psi(1, 2)|^2 = |\psi(2, 1)|^2. \quad (1.57)$$

Si \hat{P}_{12} denota el operador permutación entre las partículas 1 y 2, este deberá actuar sobre la función de onda en la forma

$$\hat{P}_{12}\psi(1, 2) = \exp(i\alpha)\psi(2, 1),$$

donde α es una fase, de manera que (1.57) se satisfaga. Es claro que si volvemos a permutar, el sistema debe volver a su estado inicial, por ello $\hat{P}_{12}\psi(2, 1) = \psi(1, 2)$ y resulta

$$\hat{P}_{12}(\hat{P}_{12}\psi(1, 2)) = \psi(1, 2), \quad \rightarrow \quad \exp(i\alpha)\exp(i\alpha)\psi(1, 2) = \psi(1, 2),$$

por lo tanto $\exp(2i\alpha) = 1$, siendo entonces $\exp(i\alpha) = \pm 1$. Así concluimos que una permutación solo puede dar lugar a una función de onda simétrica, $\hat{P}_{12}\psi(1, 2) = \psi(2, 1)$ o antisimétrica, $\hat{P}_{12}\psi(1, 2) = -\psi(2, 1)$

Exploremos entonces estas consideraciones sobre la simetría de la función de onda de una colección de partículas. Supongamos que las dos partículas, 1 y 2, pueden ocupar los estados a y b . Si las partículas son distinguibles, dos funciones de onda diferentes describirán los dos posibles estados del sistema,

$$\psi_{1,2} = \psi_a(1)\psi_b(2), \quad \psi_{2,1} = \psi_a(2)\psi_b(1).$$

Si las partículas son indistinguibles, no podremos especificar en que estado está el sistema, 1, 2 o 2, 1, debido a que ambos son igualmente probables. Entonces escribimos la función de onda como una combinación lineal de ambos estados (normalizada

a $|\psi|^2 = 1$). Si las partículas tienen spin entero, la función de onda debe ser simétrica (respecto a la variable de spin),

$$\psi_S = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_a(1)\psi_b(2) + \psi_a(2)\psi_b(1)).$$

Por el contrario, si las partículas tienen spin semi-entero, la misma resulta antisimétrica y escribimos

$$\psi_A = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_a(1)\psi_b(2) - \psi_a(2)\psi_b(1)).$$

Colocamos ahora ambas partículas, 1 y 2, en un mismo estado, a por ejemplo. Si son distinguibles, $\psi_{1,2}$ se reduce a $\psi_M = \psi_a(1)\psi_a(2)$ y la densidad de probabilidad será

$$|\psi_M|^2 = \psi_M^* \psi_M = \psi_a^*(1)\psi_a^*(2)\psi_a(1)\psi_a(2) = |\psi_a(1)|^2 |\psi_a(2)|^2,$$

que aplica en el caso de partículas clásicas que obedecen la distribución de Maxwell-Boltzmann. Si las partículas son indistinguibles y con spin entero, ψ_S es $\psi_B = \sqrt{2}\psi_a(1)\psi_a(2)$ resultando una densidad de probabilidad

$$|\psi_B|^2 = 2|\psi_a(1)|^2 |\psi_a(2)|^2 = 2|\psi_M|^2.$$

En cambio, si las partículas tienen spin semi-entero, de ψ_A obtenemos $\psi_F = (\psi_a(1)\psi_a(2) - \psi_a(2)\psi_a(1))/\sqrt{2} = 0$ y por tanto la densidad de probabilidad se anula. Resulta evidente entonces que es imposible encontrar dos partículas con spin semi-entero en un mismo estado.

1.6.2. Diferentes estadísticas y el límite clásico

Como hemos discutido previamente, la relación (1.41), que reescribimos

$$dn(p) = \frac{g_s}{h^3} 4\pi p^2 f(p) dp \equiv \bar{n}(p) dp, \quad (1.58)$$

brinda el número de partículas por unidad de volumen con impulso entre $(p, p + dp)$, donde en caso de tratarse de electrones $g_s = 2$.

La distribución $f(p) = f(E(p))$ depende de si se trata de un gas clásico o cuántico, y en este último caso, del spin de las partículas involucradas. Hemos señalado que esta función dependerá de dos parámetros que relacionamos con la temperatura y el potencial químico. La función $f(E(p))$ puede escribirse en general en la forma

$$f(E(p)) = \frac{1}{\exp[(E(p) - \mu)/kT] + \delta},$$

donde $\delta = 1$ para la estadística de Fermi-Dirac; $\delta = -1$ para la de Einstein-Bose y $\delta = 0$ para la de Maxwell-Boltzmann.

Mostremos que efectivamente la distribución de Fermi-Dirac (al igual de que de Einstein-Bose para partículas masivas) converge a la de Maxwell-Boltzmann en el límite cuando $\mu/kT \ll -1$.

De la relación (1.44) para la densidad numérica de partículas para la distribución de Fermi-Dirac

$$n = \frac{g_s 4\pi}{h^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{\exp[(E(p) - \mu)/kT] + 1}$$

si despreciamos en el denominador el 1 frente a la exponencial si $\mu/kT \ll -1$ de acuerdo a la discusión dada cuando introducimos esta distribución, teniendo en cuenta que el grado de degeneración de las partículas clásicas es $g_s = 1$ en lugar de $g_s = 2$ que corresponde a los electrones con las dos orientaciones del spin y siendo $E(p) = p^2/2m$, resulta

$$n = \frac{4\pi}{h^3} \exp(\mu/kT) \int_0^\infty p^2 \exp(-p^2/2mkT) dp.$$

Introduciendo el cambio de variables

$$x = \frac{p}{\sqrt{2mkT}}, \quad dx = \frac{dp}{\sqrt{2mkT}},$$

obtenemos

$$n = \frac{4\pi}{h^3} \exp(\mu/kT) (2mkT)^{3/2} \underbrace{\int_0^\infty x^2 \exp(-x^2) dx}_{\sqrt{\pi}/4},$$

que nos permite derivar explícitamente una expresión para el potencial químico en función de la densidad y la temperatura,

$$\exp(\mu/kT) = \frac{nh^3}{(2\pi mkT)^{3/2}}, \quad \text{o} \quad \frac{\mu}{kT} = \ln \left(\frac{nh^3}{(2\pi mkT)^{3/2}} \right).$$

De (1.58) para $dn(p)$ con $g_s = 1$, en esta aproximación escribimos

$$dn(p) = \frac{4\pi}{h^3} \exp(\mu/kT) p^2 \exp(-p^2/2mkT) dp,$$

y reemplazando la expresión para $\exp(\mu/kT)$ surge naturalmente

$$dn(p) = 4\pi n \left(\frac{1}{2\pi mkT} \right)^{3/2} p^2 \exp(-p^2/2mkT) dp,$$

que es la distribución de Maxwell-Boltzmann en términos del impulso.

Notemos que la condición impuesta para arribar a esta expresión, $\mu/kT \ll -1$, implica

$$\frac{nh^3}{(2\pi mkT)^{3/2}} \ll 1, \quad n \ll \frac{(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3},$$

que, a menos de un factor numérico del orden de uno, coincide con (1.37), que obtuvimos a partir de imponer la restricción que la distancia inter-partícula debe ser mucho mayor que la longitud de onda de de Broglie térmica de las partículas clásicas.

Capítulo 2

Teoría del potencial

En una estrella o en el medio interestelar además de gas y radiación, la gravedad juega un rol preponderante tanto en el proceso de formación estelar como durante la mayor parte de la vida de una estrella, equiparando las fuerzas de presión del gas y la radiación. En este capítulo describiremos entonces, con cierto rigor matemático, la interacción gravitatoria.

2.1. Ley de gravitación universal

De acuerdo a Newton, la interacción gravitatoria se rige por una ley natural, la ley de gravitación universal.

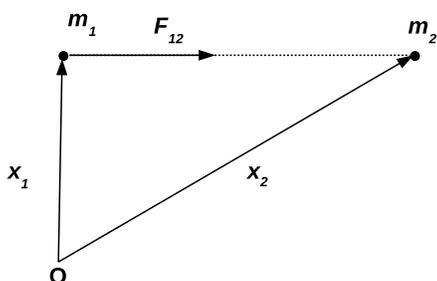


Figura 2.1: Dos masas puntuales m_1, m_2 , localizadas en $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ respectivamente respecto a un sistema inercial O en interacción gravitatoria.

Esta ley nos dice que dos masas puntuales m_1 y m_2 localizadas en los puntos \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 respecto a un origen O de un sistema inercial (ver Fig. 2.1) experimentan una fuerza atractiva $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$, donde \mathbf{F}_{ij} es la fuerza sobre m_i y está dada por

$$\mathbf{F}_{12} = -Gm_1m_2 \frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3}, \quad (2.1)$$

donde G es la constante de gravitación universal. La fuerza gravitatoria que experimentan m_1 y m_2 tiene la dirección del vector que las une y es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.

2.2. Campo y potencial gravitatorio

En lugar de considerar la fuerza que experimenta una masa puntual por la presencia de otra, introducimos el concepto de *campo gravitatorio*. En un punto \mathbf{x} del espacio, definimos el campo gravitatorio generado por una masa m' localizada en el punto \mathbf{x}' , como la fuerza atractiva \mathbf{F} a la cual se ve afectada una masa de prueba m ubicada en el punto \mathbf{x} por unidad de masa de prueba,

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{m} = -Gm' \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}, \quad (2.2)$$

donde utilizamos (2.1) para la fuerza \mathbf{F} y el límite lo tomamos para que este campo solo sea generado por m' . En otros términos, la masa m' modifica el espacio de forma tal que si en un punto \mathbf{x} se coloca una masa puntual, esta se verá afectada por una fuerza, la que solo dejará de existir si $m' \rightarrow 0$.

Si el campo gravitatorio en un punto es generado por una distribución extendida de masa en el espacio, este lo podemos calcular de la siguiente forma. Supongamos que cada punto de la distribución de masa está localizado respecto a un origen O por medio del vector \mathbf{x}' , siendo su densidad $\rho(\mathbf{x}')$ tal como muestra la Fig. 2.2.

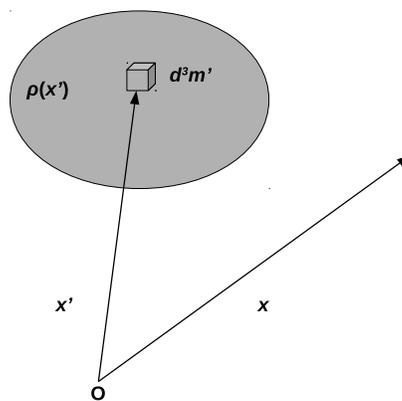


Figura 2.2: Campo gravitatorio generado por la distribución de masa $\rho(\mathbf{x}')$ en el punto \mathbf{x} del espacio.

Subdividimos la distribución en elementos de masa d^3m' y calculamos el campo gravitatorio generado por este elemento de masa en el punto \mathbf{x} , que puede ser exterior

o interior a la distribución, por ello utilizamos vectores independientes para distinguir la posición de la fuente de campo y el punto donde se evalúa el campo gravitatorio, que suelen llamarse *punto fuente* (\mathbf{x}') y *punto campo* (\mathbf{x}). De (2.2) escribimos

$$d^3 \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -G d^3 m' \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3},$$

ahora $d^3 m' = \rho(\mathbf{x}') d^3 x'$, donde $d^3 x'$ es el elemento de volumen correspondiente a $d^3 m'$, así

$$d^3 \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -G \rho(\mathbf{x}') \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3 x'.$$

Si sumamos todas las contribuciones de cada elemento de volumen de la distribución de masa, esto es sobre todo \mathbf{x}' , resulta

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = -G \int \rho(\mathbf{x}') \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3 x', \quad (2.3)$$

donde la integral se extiende a todo el espacio. Así, dada una distribución de masa arbitraria, esta expresión permite calcular las tres componentes del campo gravitatorio, no obstante, excepto para leyes de densidad muy sencillas, las integrales que surgen de (2.3) son en general muy complejas de evaluar.

Para hallar otra forma de calcular el campo gravitatorio, hacemos uso de un teorema fundamental de los campos vectoriales, que lo enunciaremos pero no lo demostraremos.¹

Teorema

Todo campo vectorial $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ queda unívocamente determinado si se especifican su rotor y su divergencia para todo \mathbf{x} y ambos se anulan en el infinito como $1/r^3$.

Más precisamente, si

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x}), \quad \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}(\mathbf{x}),$$

siendo $s(\mathbf{x})$ y $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ continuos, acotados y con derivadas parciales primeras continuas, y

$$s(\mathbf{x}) \rightarrow 0, \quad \mathbf{c}(\mathbf{x}) \rightarrow 0, \quad \text{como } r^{-3} \quad \text{cuando } r \rightarrow \infty,$$

entonces

¹Ver L. A. Santaló, *Vectores y Tensores con sus aplicaciones*, pag. 179.

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\nabla\phi(\mathbf{x}) + \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}), \quad (2.4)$$

donde

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{s(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x', \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{c}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \quad (2.5)$$

Este teorema, constructivo, nos dice como hallar un campo vectorial a partir del conocimiento de su divergencia y su rotor mediante operaciones de derivación sobre dos *potenciales*, uno escalar ϕ , y otro vectorial \mathbf{A} .²

Siguiendo lo que establece este teorema, calculamos primero la divergencia de \mathbf{g} definido en (2.3),

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -G \nabla \cdot \int \rho(\mathbf{x}') \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x',$$

donde el operador ∇ implica derivación respecto de las variables sin primar.

Para intercambiar operadores ∇ y \int debemos asegurar que la integral impropia (pues se hace a todo el espacio) y que posee una singularidad en $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$, es uniformemente convergente. Es simple mostrar que

$$\int \rho(\mathbf{x}') \frac{(x_k - x'_k)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x' \leq \int \rho(\mathbf{x}') \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} d^3x', \quad k = 1, \dots, 3;$$

si la densidad está acotada y tiende a 0 en el infinito la última integral es uniformemente convergente, por tanto la primera también lo es. Por ello

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -G \int \rho(\mathbf{x}') \nabla \cdot \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x',$$

donde ∇ no actúa sobre las variables primadas. Evaluamos para $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}$

$$\nabla \cdot \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = \frac{\nabla \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3 - (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \nabla |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^6}.$$

Cada término en el numerador resulta,

$$\nabla \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3 = \nabla \cdot \mathbf{x} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3 = 3 |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3,$$

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \nabla |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3 = (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot 3 |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2 \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = 3 |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3.$$

²Este teorema es de suma importancia en la electrodinámica.

Por lo tanto

$$\nabla \cdot \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = 0,$$

que como señalamos es válido $\forall \mathbf{x}' \neq \mathbf{x}$. Este resultado nos dice que no hay fuente de campo gravitatorio cuando $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}$.

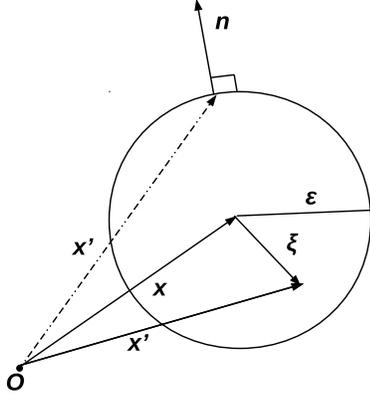


Figura 2.3: Entorno de radio $\varepsilon \ll 1$ alrededor de $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$ para evaluar $\nabla \cdot \mathbf{g}$ (ver texto).

En $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$ el campo dado por (2.3) presenta una singularidad. Tomamos entonces un entorno de $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$ de radio $\varepsilon \ll 1$ tal como indica la Fig. 2.3, esto es, evaluaremos $\nabla \cdot \mathbf{g}$ en $|\mathbf{x}' - \mathbf{x}| \leq \varepsilon$. En este dominio calculamos

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -G \int_{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}| \leq \varepsilon} \rho(\mathbf{x}') \nabla \cdot \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3 x'.$$

Siendo $\varepsilon \ll 1$, definimos $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}$, con $|\boldsymbol{\xi}| \leq \varepsilon$ y

$$\rho(\mathbf{x}') = \rho(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}) = \rho(\mathbf{x}) + \nabla \rho(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\xi} + \dots = \rho(\mathbf{x}) + R(\varepsilon),$$

donde $R(\varepsilon) \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Entonces ³

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -G\rho(\mathbf{x}) \int_{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}| \leq \varepsilon} \nabla \cdot \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3 x' - GR(\varepsilon) \int_{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}| \leq \varepsilon} \nabla \cdot \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3 x'.$$

Vista la función sobre la que actúa el operador ∇ se cumple que

³Estrictamente, R dependerá también de $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}$, no obstante al considerar que $\nabla \rho \cdot \int_{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}| \leq \varepsilon} \boldsymbol{\xi} \nabla \cdot \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3 x'$ está acotado por $\varepsilon |\nabla \rho| \int_{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}| \leq \varepsilon} \nabla \cdot \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3 x'$, que como veremos en seguida es un término de $\mathcal{O}(\varepsilon)$ por lo que es legítimo introducir $R(\varepsilon)$.

$$\nabla \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_k} \equiv -\nabla' \rightarrow -\frac{\partial}{\partial x'_k},$$

por lo tanto

$$\mathcal{I} \equiv \int_{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|\leq\varepsilon} \nabla \cdot \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} d^3x' = - \int_{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|\leq\varepsilon} \nabla' \cdot \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} d^3x'.$$

Haciendo uso del teorema de la divergencia,

$$- \int_{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|\leq\varepsilon} \nabla' \cdot \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} d^3x' = - \int_{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|=\varepsilon} \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} \cdot \mathbf{n} d^2S',$$

donde \mathbf{n} es la normal exterior a la superficie de la esfera $|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|=\varepsilon$,

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}'-\mathbf{x}}{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|} = -\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|},$$

tal como se indica en la Fig. 2.3 en línea a trazos para \mathbf{x}' . Reemplazando \mathbf{n} ,

$$\mathcal{I} = \int_{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|=\varepsilon} \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} \cdot \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|} d^2S' = \int_{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|=\varepsilon} \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2} d^2S' = \frac{1}{\varepsilon^2} 4\pi\varepsilon^2 = 4\pi.$$

Reemplazando en la expresión para $\nabla \cdot \mathbf{g}$ de más arriba resulta

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G\rho(\mathbf{x}) - 4\pi GR(\varepsilon).$$

En el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, $R(\varepsilon) \rightarrow 0$ y

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G\rho(\mathbf{x}). \quad (2.6)$$

Este resultado nos muestra que la fuente de campo gravitatorio solo proviene de $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$. De acuerdo a (2.5), siendo $s(\mathbf{x}) = -4\pi G\rho(\mathbf{x})$ resulta

$$\phi(\mathbf{x}) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d^3x',$$

y encontramos el potencial escalar de \mathbf{g} o *potencial gravitatorio*. Notemos que para justificar que la integral (2.3) resulte uniformemente convergente, requerimos que ρ no diverja, condición menos restrictiva que la que fue establecida en el teorema para $s(\mathbf{x}) = -4\pi G\rho(\mathbf{x})$. No obstante la demostración de teorema requiere de las hipótesis enunciadas.

Nos restaría encontrar el potencial vector $\mathbf{A}(\mathbf{x})$. Es simple mostrar que $\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{g} = 0$. En efecto, de (2.3) podemos escribir, independientemente de la singularidad en $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ la cual hemos demostrado que es evitable, que

$$\mathbf{g} \propto \int \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x' = -\nabla \int \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x',$$

siendo⁴

$$\nabla \times \nabla \int \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' = 0.$$

Por lo tanto

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = -\nabla\phi, \quad \phi(\mathbf{x}) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x', \quad (2.7)$$

donde $\phi \rightarrow 0$ cuando $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ por las hipótesis del teorema.

De (2.6) y (2.7), siendo $\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G\rho$ y $\mathbf{g} = -\nabla\phi$ y recordando que $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$, resulta

$$\nabla^2\phi(\mathbf{x}) = 4\pi G\rho(\mathbf{x}), \quad (2.8)$$

conocida como *ecuación de Poisson*. En los puntos \mathbf{x} del espacio donde no exista distribución de masa, como en el caso de la Fig. 2.2, la ecuación de Poisson se reduce a

$$\nabla^2\phi(\mathbf{x}) = 0, \quad (2.9)$$

denominada *ecuación de Laplace*.

La interpretación física de ϕ es inmediata. Supongamos que en un dominio arbitrario del espacio existe un campo gravitatorio $\mathbf{g} = -\nabla\phi$ y consideremos una masa puntual m . Para desplazar esta masa puntual de un punto A a otro punto B contra el campo gravitatorio se deberá realizar una fuerza mínima $\mathbf{F} = -m\mathbf{g}$, por lo que el trabajo realizado al desplazar esta masa puntual una distancia $d\mathbf{l} = (dx, dy, dz)$ será

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -m\mathbf{g} \cdot d\mathbf{l} = m\nabla\phi \cdot d\mathbf{l} = m d\phi,$$

por lo que el trabajo total para ir de A a B será

⁴De esta simple relación podríamos haber derivado el potencial escalar ϕ para \mathbf{g} ignorando la singularidad en $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$, lo cual no es completamente correcto.

$$W_{AB} = m \int_A^B d\phi = m(\phi(B) - \phi(A)).$$

Por lo tanto $m\phi$ es la energía potencial de la masa puntual y $\phi(B) - \phi(A)$ es la diferencia de potencial entre los puntos A y B .

Finalmente, si consideramos un volumen V encerrado por una superficie S con normal exterior \mathbf{n} y que contiene una masa total M , integramos (2.6) a este volumen

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{g} d^3x = -4\pi G \underbrace{\int_V \rho d^3x}_M,$$

utilizando nuevamente el teorema de la divergencia en el primer término resulta

$$\int_S \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} d^2S = -4\pi GM, \quad (2.10)$$

que es la denominada *Ley de Gauss*.⁵

2.2.1. Potencial y campo gravitatorio de una masa puntual

En esta sección discutiremos primero una función de distribución muy útil en la física, la *delta de Dirac*.

Para ello recordemos que una distribución normal o gaussiana, con valor medio x_0 y varianza q^2 tiene la forma

$$f(x; x_0, q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}q} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{2q^2}\right),$$

que está normalizada de forma tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x; x_0, q) dx = 1.$$

Ya hemos visto esta distribución al considerar la distribución de Maxwell-Boltzmann de las velocidades; $f(x; x_0, q)dx = dP(x; x_0, q)$ es la probabilidad de encontrar un valor de x en el intervalo $(x, x+dx)$. Si x es una longitud $f(x; x_0, q)$ tiene dimensiones inversas de longitud, pues $dP(x; x_0, q)$ es por definición adimensional.

⁵Toda esta formulación aplica idénticamente para la electrostática por ello, si en esta ley reemplazamos $\mathbf{g} \rightarrow \mathbf{E}$, $M \rightarrow q$ y $-4\pi G \rightarrow 1/4\pi\epsilon_0$ o 1, dependiendo el sistema de unidades considerado, surge la Ley de Gauss de la electrostática.

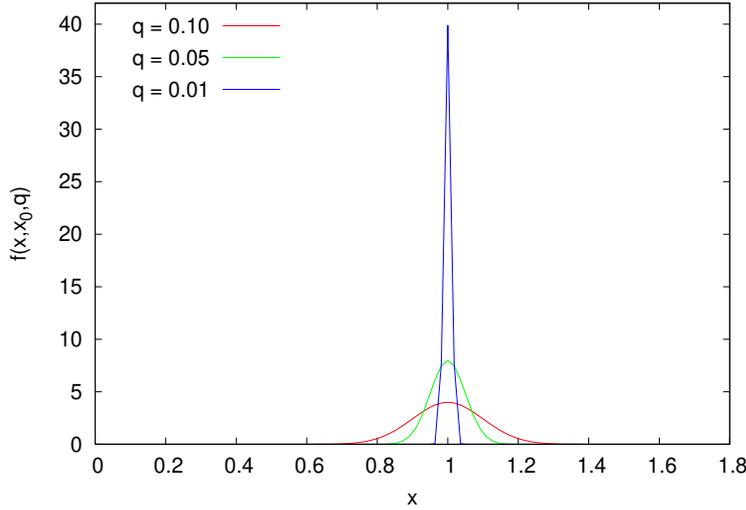


Figura 2.4: Representación de la aproximación a la $\delta(x - x_0)$ mediante la función $f(x; x_0, q)$ para $x_0 = 1$ y tres valores diferentes de $q \rightarrow 0$.

La delta de Dirac puede ser definida como

$$\delta(x - x_0) = \lim_{q \rightarrow 0} f(x; x_0, q),$$

que solo depende de x_0 y tendrá las mismas dimensiones que $f(x; x_0, q)$.

La Fig. 2.4 muestra la distribución $f(x; x_0, q)$ para $x_0 = 1$ y tres valores distintos de $q = 0,10, 0,05, 0,01$. Observamos que a medida que q disminuye, la distribución se hace cada vez más angosta y toma mayores valores en torno de x_0 . De hecho, para $q = 0,1$, $f(x; x_0, q)$ se aprecia como una curva suave, característica de una distribución normal, pero para $q = 0,01$, se observa un pico muy pronunciado, siendo $f(x; x_0, q)$ esencialmente diferente de 0 en $(0,95, 1,05)$. Si tomásemos un valor de q aún más pequeño, este intervalo donde $f(x; x_0, q)$ es apreciable se estrecharía aún más en torno a $x_0 = 1$ y el máximo crecería significativamente, ya que el valor f en el máximo es siempre $f_{\max} = q^{-1}/\sqrt{2\pi}$.

Este comportamiento de $f(x; x_0, q)$ a medida que q decrece se debe simplemente a que el área total debajo de ella debe ser siempre igual a 1. Por tanto la distribución delta de Dirac, siendo el límite para $q \rightarrow 0$ de $f(x; x_0, q)$ debe satisfacer,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = 1, \quad \delta(x - x_0) = 0, \quad \forall x \neq x_0.$$

Por otra parte, para cualquier función suave $g(x)$, se cumple

$$\int_a^b g(x)\delta(x - x_0)dx = \begin{cases} g(x_0) & x_0 \in (a, b) \\ 0 & x_0 \notin (a, b). \end{cases}$$

Si $g(x) = 1$, observamos que la condición de normalización de la δ definida arriba, se satisface con tomar un intervalo (a, b) en torno a x_0 , por ejemplo $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ con $\epsilon \ll 1$.

Intuitivamente, podemos pensar a la δ como una distribución completamente localizada en un punto (x_0 en este caso), por lo tanto es muy útil para representar, por ejemplo, la densidad de una masa o carga puntual ubicada en un punto (x_0); la densidad solo será diferente de cero en dicho punto.

Es inmediato generalizar esta distribución a más dimensiones, por ejemplo, si hay una masa puntual m en el punto $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, podemos escribir la densidad del “sistema” como

$$\rho(\mathbf{x}) = m\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0),$$

que posee efectivamente dimensiones de densidad. Es habitual denotar con $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)$, por lo que en general se escribe

$$\rho(\mathbf{x}) = m\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (2.11)$$

Consideremos ahora un conjunto de N masas puntuales, m_i , localizadas en los puntos \mathbf{x}_i , $i = 1, \dots, N$. La densidad de este conjunto, de acuerdo a (2.11), será

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N m_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i), \quad (2.12)$$

Reemplazando esta densidad en la expresión del potencial gravitatorio dado en (2.7) resulta para ϕ

$$\phi(\mathbf{x}) = -G \int \sum_{i=1}^N m_i \frac{\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x',$$

donde la integral se extiende a todo el espacio y siendo una suma finita, podemos intercambiar operadores de suma e integración sin restricciones y escribimos

$$\phi(\mathbf{x}) = -G \sum_{i=1}^N \int m_i \frac{\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'.$$

Al extenderse la integral a todo el espacio y estando las masas localizadas en puntos distintos, siempre existirá un intervalo de integración donde en solo uno de ellos estará contenido \mathbf{x}_i por lo que

$$\phi(\mathbf{x}) = -G \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|}. \quad (2.13)$$

Para $N = 1$ y $m_i = m$ resulta

$$\phi(\mathbf{x}) = -G \frac{m}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|};$$

de esta última, (2.8) y (2.11) podemos escribir esta importante relación en la teoría del potencial (haciendo $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}'$)

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

El campo gravitatorio para un sistema de N masas puntuales se obtiene simplemente usando la primera de (2.7) y (2.13), $\mathbf{g} = -\nabla\phi$ y obtenemos

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = -G \sum_{i=1}^N m_i \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3},$$

que para $N = 1$ coincide con (2.2), con $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}'$ y obviamente \mathbf{g} depende tanto del punto campo como del punto fuente.

2.3. Energía potencial gravitatoria

Consideremos primero un sistema de N masas puntuales idéntico al considerado en la sección anterior; masas m_k localizadas en los puntos \mathbf{x}_k . De acuerdo a la discusión previa, la energía potencial gravitatoria de la masa m_j en el potencial generado por el sistema es

$$W_j = m_j\phi(\mathbf{x}_j) \quad j = 1, \dots, N,$$

y por (2.13) el potencial en \mathbf{x}_j resulta

$$\phi(\mathbf{x}_j) = -G \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \frac{m_i}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|},$$

por lo tanto

$$W_j = -G \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \frac{m_i m_j}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|}.$$

La energía potencial gravitatoria total resulta de sumar sobre todos los pares distintos de masas m_i y m_j ,

$$W = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N W_j = -\frac{G}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \frac{m_i m_j}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|}.$$

Si $N \rightarrow \infty$ de manera que N/V resulte finito, siendo V el volumen del sistema, podemos pasar al límite continuo:

$$\sum_j m_j \rightarrow \int \rho(\mathbf{x}) d^3x; \quad \sum_i m_i \rightarrow \int \rho(\mathbf{x}') d^3x',$$

y obtenemos

$$W = -\frac{G}{2} \int \int \frac{\rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' d^3x.$$

Siendo

$$-G \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' = \phi(\mathbf{x}),$$

finalmente resulta

$$W = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) d^3x. \quad (2.14)$$

Esta es la expresión final para la energía potencial gravitatoria de un sistema arbitrario; en la sección siguiente derivaremos una expresión más simple para un sistema con simetría esférica.

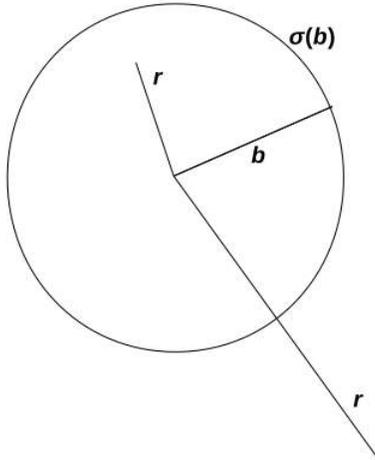


Figura 2.5: Geometría para una cáscara esférica de radio b y densidad superficial $\sigma(b)$.

2.4. Sistemas con simetría esférica

En cursos muy anteriores se derivaba el potencial para sistemas sin ninguna simetría particular, pero con el propósito de que este curso se ajuste estrictamente a un semestre, se ha limitado esta sección a sistemas con simetría central, esto es, para densidades que solo dependen de la distancia al centro, $\rho = \rho(r)$. En un curso de Electromagnetismo o Dinámica Estelar se avanzará sobre otras geometrías.⁶

Consideremos, en primera instancia, una cáscara esférica de radio b el cual luego lo haremos variar, con densidad superficial $\sigma(b)$, tal como muestra la Fig. 2.5. Fuera de $r = b$ no existe distribución de masa y por lo tanto el potencial generado por esta cáscara esférica satisface la ecuación de Laplace (2.9),

$$\nabla^2 \phi = 0,$$

que en coordenadas esféricas (r, ϑ, φ) , el laplaciano tiene la expresión

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Como nos limitaremos a sistemas con simetría esférica, el potencial será independiente de (ϑ, φ) por lo tanto $\nabla^2 \phi$ se reduce a

⁶Tanto en el libro de Jackson, *Classical Electrodynamics* o Binney & Tremaine, *Galactic Dynamics* puede encontrarse una discusión mucho más amplia sobre el problema del potencial en sistemas sin simetrías particulares.

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = 0, \quad (2.15)$$

donde hemos reemplazado las derivadas parciales por totales, pues ϕ solo depende de r . De (2.15)

$$r^2 \frac{d\phi}{dr} = c_1(b); \quad \phi(r; b) = -\frac{c_1(b)}{r} + c_2(b),$$

donde $c_1(b), c_2(b)$ son dos constantes a determinar y que dependerán del radio b .

Es claro que esta misma forma funcional de ϕ vale tanto para $r < b$ como para $r > b$, ya que en ambas regiones la densidad es nula y el potencial debe satisfacer la ecuación de Laplace, como ya se mencionó. Por lo tanto, las soluciones para el interior de la esfera ($r < b$) y para el exterior ($r > b$) diferirán en las constantes. Escribimos entonces

$$\phi_i(r; b) = -\frac{c_1(b)}{r} + c_2(b) \quad r < b, \quad (2.16)$$

$$\phi_e(r; b) = -\frac{c_3(b)}{r} + c_4(b) \quad r > b.$$

Para determinar estas cuatro constantes, utilizemos primero las condiciones de contorno que debe satisfacer el potencial:

1. Que el potencial se anule en el infinito;⁷
2. Que sea acotado para todo r ;
3. Que sea continuo.

La condición (1) aplica sobre ϕ_e pues implica $r \rightarrow \infty$, por lo tanto de (2.16) debe ser $c_4(b) = 0$. La condición (2) se debe aplicar a ϕ_i , pues la única posible singularidad esta en $r = 0$, por ello fijamos $c_1(b) = 0$. De (2.16) observamos que el único punto de posible discontinuidad podría ocurrir en $r = b$, por tanto la condición (3) exige

$$c_2(b) = -\frac{c_3(b)}{b}. \quad (2.17)$$

Con estas constantes determinadas, el potencial tiene la forma

⁷Podría elegirse cualquier otro origen arbitrario.

$$\begin{aligned}\phi_i(r; b) &= c_2(b) & r < b, \\ \phi_e(r; b) &= -\frac{c_3(b)}{r} & r > b.\end{aligned}\tag{2.18}$$

Aún sin haber completado la resolución del problema, observamos que el potencial en el interior es constante, independiente de r , y que en el exterior cae como r^{-1} , por lo que el campo gravitatorio lo hará como r^{-2} , resultado bien conocido de la electrostática.

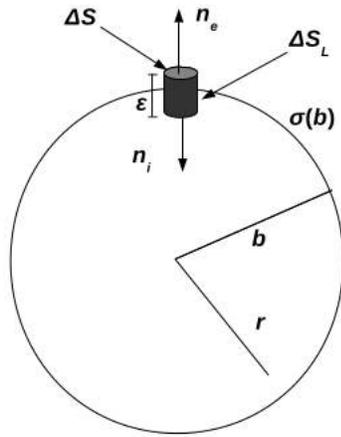


Figura 2.6: Superficie de Gauss para la componente normal del campo.

Debemos incluir una condición adicional para poder determinar, junto con (2.17) $c_2(b)$ y $c_3(b)$. Dicha condición la provee la Ley de Gauss (2.10). Consideremos un cilindro en la dirección radial centrado en $r = b$ de volumen $\Delta V = \epsilon \Delta S$, como se muestra en la Fig. 2.6; con una superficie total $\Sigma = 2\Delta S + \Delta S_L$, siendo $\Delta S_L = 2\pi\epsilon\sqrt{\Delta S/\pi}$ la superficie lateral, $\Delta S_L \rightarrow 0$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$. La densidad de la cáscara esférica de radio b la podemos expresar en términos la delta de Dirac como $\rho(r; b) = \sigma(b)\delta(r - b)$. Sobre este elemento de volumen aplicamos la Ley de Gauss

$$\int_{\Sigma} \mathbf{g} \cdot n d^2S = -4\pi G \int_{\Delta V} \rho(r; b) d^3x.\tag{2.19}$$

Para esta geometría $d^3x = dr d^2S$ por lo que la integral de volumen en el segundo miembro de (2.19) resulta

$$\int_{\Delta V} \rho(r; b) d^3x = \sigma(b) \int_{b-\epsilon/2}^{b+\epsilon/2} \delta(r - b) dr \int_{\Delta S} d^2S = \sigma(b) \Delta S,$$

que es justamente la masa del cilindro.

Para evaluar el primer miembro de (2.19), observemos que las normales exteriores al cilindro son $\mathbf{n}_i = -\mathbf{e}_r$, $\mathbf{n}_e = \mathbf{e}_r$, con \mathbf{e}_r el versor radial y denotemos con \mathbf{t} la normal a la superficie lateral, que cumple $\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_r = 0$. Así,

$$\int_{\Sigma} \mathbf{g} \cdot n d^2S = \int_{\Delta S} \mathbf{g}_i \cdot (-\mathbf{e}_r) d^2S + \int_{\Delta S} \mathbf{g}_e \cdot \mathbf{e}_r d^2S + \int_{\Delta S_L} \mathbf{g} \cdot \mathbf{t} d^2S.$$

Siendo un campo central, \mathbf{g} tiene la dirección \mathbf{e}_r , por lo que el último término se anulará. No obstante, este se anulará siempre pues hacemos $\varepsilon \rightarrow 0$ y $\Delta S_L \rightarrow 0$. Como

$$\mathbf{g} = -\nabla\phi, \quad \rightarrow \quad \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_r = -\frac{d\phi}{dr},$$

y en este límite, cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, el primer término de (2.19) se reduce a

$$\left. \frac{d\phi_i}{dr} \right|_{r=b} \Delta S - \left. \frac{d\phi_e}{dr} \right|_{r=b} \Delta S.$$

Reemplazando entonces lo que obtuvimos para cada miembro en (2.19) resulta

$$\left. \frac{d\phi_e}{dr} \right|_{r=b} - \left. \frac{d\phi_i}{dr} \right|_{r=b} = 4\pi G\sigma(b).$$

Esta relación no es otra cosa que la conocida discontinuidad de la componente normal del campo (eléctrico o gravitatorio) sobre la superficie.

Utilizando las expresiones de ϕ_i y ϕ_e en (2.18), evaluamos sus derivadas, $d\phi_i/dr = 0, \forall r$, mientras que $d\phi_e/dr|_{r=b} = c_3(b)/b^2$ y obtenemos $c_3(b)$

$$c_3(b) = 4\pi Gb^2\sigma(b),$$

y reemplazando en (2.17), $c_2(b) = -c_3(b)/b$, surge

$$c_2(b) = -4\pi Gb\sigma(b).$$

Incorporando los valores de las constantes en (2.18) obtenemos finalmente para el potencial de una cáscara esférica de radio b y densidad superficial $\sigma(b)$

$$\begin{aligned} \phi_i(r; b) &= -4\pi Gb\sigma(b) & r < b, \\ \phi_e(r; b) &= -\frac{4\pi Gb^2\sigma(b)}{r} & r > b. \end{aligned} \tag{2.20}$$

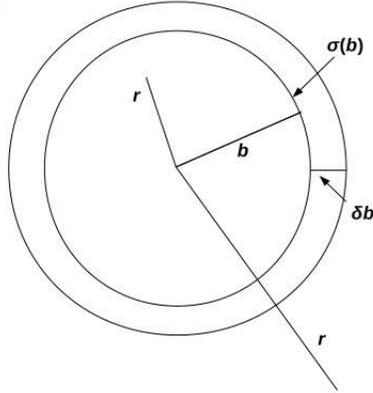


Figura 2.7: Sistema esférico compuesto por cáscaras esféricas de radio b , espesor δb , densidad superficial $\sigma(b)$.

Consideremos ahora una distribución esférica continua de masa, y la subdividimos en cáscaras esféricas de radio b y espesor δb , tal como muestra la Fig. 2.7. Si $\rho(b)$ denota la densidad de esta cáscara de espesor finito, la masa encerrada en un elemento de volumen $\delta b d^2 S$ será $d^3 m = \rho(b) \delta b d^2 S$, por lo que $\rho(b) \delta b = \delta \sigma(b)$ será la densidad superficial de este elemento diferencial, y por (2.20) la contribución al potencial también será diferencial,

$$\begin{aligned} \delta \phi_i(r; b) &= -4\pi G \rho(b) b \delta b & r < b, \\ \delta \phi_e(r; b) &= -4\pi G \rho(b) \frac{b^2}{r} \delta b & r > b. \end{aligned} \tag{2.21}$$

El potencial total generado por la distribución esférica de masa en un punto r lo calculamos sumando todas las contribuciones de las cáscaras esféricas de radio b y espesor finito δb , haciendo variar $0 < b < \infty$, separando cada contribución de acuerdo a $b < r$ y $b > r$, por lo tanto

$$\phi(r) = \int_{b < r} \delta \phi_e(r; b) + \int_{b > r} \delta \phi_i(r; b),$$

usando (2.21), resulta

$$\phi(r) = -4\pi G \left\{ \frac{1}{r} \int_0^r \rho(b) b^2 db + \int_r^\infty \rho(b) b db \right\},$$

renombrando $b \rightarrow r'$, obtenemos finalmente una expresión integral para el potencial de una distribución esférica de masa en cualquier punto r del espacio

$$\phi(r) = -4\pi G \left\{ \frac{1}{r} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' + \int_r^\infty \rho(r') r' dr' \right\}. \quad (2.22)$$

Es inmediato obtener el campo gravitatorio generado por este potencial pues

$$\mathbf{g}(r) = -\nabla\phi(r) = -\frac{d\phi}{dr} \mathbf{e}_r. \quad (2.23)$$

Derivando (2.22)

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dr} &= -4\pi G \left\{ -\frac{1}{r^2} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' + \frac{1}{r} \rho(r) r^2 - \rho(r) r \right\} \\ &= \frac{4\pi G}{r^2} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr', \end{aligned}$$

donde

$$4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' = M(r),$$

es la masa contenida dentro de una esfera de radio r , por lo que de (2.23) escribimos para el campo gravitatorio

$$\mathbf{g}(r) = -\frac{GM(r)}{r^2} \mathbf{e}_r, \quad M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'. \quad (2.24)$$

Finalmente, derivaremos una expresión para la energía potencial gravitatoria de un sistema esférico a partir de (2.14)

$$W = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) d^3x.$$

Utilizando coordenadas esféricas (r, ϑ, φ) , siendo $\rho = \rho(r)$, $\phi = \phi(r)$,

$$d^3x = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi = r^2 dr d^2\Omega$$

y como no hay dependencia angular alguna, integramos sobre todo el ángulo sólido

$$W = \frac{1}{2} 4\pi \int_0^\infty \rho(r) \phi(r) r^2 dr = \frac{1}{2} \int_0^\infty \phi(r) \frac{dM(r)}{dr} dr,$$

donde hemos usado (2.24) para $M(r)$. Esta expresión resulta de muy simple aplicación, no obstante la reescribiremos de una forma alternativa al efecto de discutir

diferentes expresiones de W para sistemas de extensión finita e infinita. Integremos por partes la última haciendo

$$u = \phi(r), \quad dv = \frac{dM(r)}{dr} dr; \quad \rightarrow \quad du = \frac{d\phi}{dr} dr, \quad v = M(r),$$

por lo tanto

$$W = \frac{1}{2} \left[\phi(r)M(r) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty M(r) \frac{GM(r)}{r^2} dr \right],$$

donde hemos reemplazado $d\phi/dr$ por su expresión. El primer término del segundo miembro, si el sistema tiene extensión infinita, se anula pues $M(0) = 0$ y $\phi(0)$ es finito siempre, mientras que en ∞ el potencial se anula y la masa total del sistema la suponemos finita. Por lo que resulta

$$W = -\frac{G}{2} \int_0^\infty \frac{M^2(r)}{r^2} dr. \quad (2.25)$$

Esta expresión debe ser modificada si el sistema tiene extensión finita, pues al hacer la integración por partes, el término $\phi(r)M(r) \Big|_0^R = \phi(R)M(R) \neq 0$, y donde R es el radio del sistema y $M(R) = M$ la masa total. Esta constante debe ser incluida en la expresión de W (2.25), así

$$W = -\frac{G}{2} \int_0^R \frac{M^2(r)}{r^2} dr + \frac{1}{2} M\phi(R). \quad (2.26)$$

Es conveniente reescribir esta última para obtener una expresión de W que no dependa de constantes aditivas; por ello integramos nuevamente por partes en (2.26)

$$u = M^2(r), \quad dv = -\frac{1}{r^2} dr; \quad \rightarrow \quad du = 2M(r)dM(r), \quad v = \frac{1}{r},$$

así en (2.26)

$$W = \frac{G}{2} \left[\frac{M^2(r)}{r} \Big|_0^R - 2 \int_0^R \frac{M(r)}{r} dM(r) \right] + \frac{1}{2} M\phi(R),$$

donde el término

$$\frac{M^2(r)}{r} \Big|_0^R = \frac{M^2}{R} - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{M^2(r)}{r} = \frac{M^2}{R},$$

pues para $r < \delta \ll 1$, $M(r) \sim r^3$. Así

$$\begin{aligned}
 W &= -G \int_0^R \frac{M(r)}{r} dM(r) + \frac{1}{2} M \phi(R) + \frac{GM^2}{2R} \\
 &= -G \int_0^R \frac{M(r)}{r} dM(r) + \frac{M}{2} \left(\frac{GM}{R} + \phi(R) \right).
 \end{aligned}$$

Ahora de (2.22)

$$\phi(R) = -4\pi G \frac{1}{R} \int_0^R \rho(r') r'^2 dr' = -\frac{GM}{R},$$

por lo que la constante aditiva se anula, y para un sistema finito o infinito la energía potencial gravitatoria resulta

$$W = -G \int_0^\infty \frac{M(r)}{r} dM(r). \quad (2.27)$$

2.4.1. Ejemplo

Consideremos el siguiente sistema

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & r < R \\ 0 & r > R, \end{cases}$$

esto es, una esfera homogénea de densidad constante ρ_0 y radio R , tal como se ilustra en la Fig. 2.8.

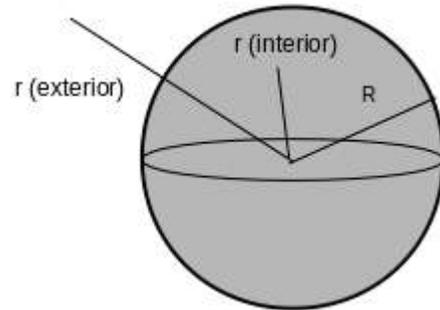


Figura 2.8: Esfera homogénea de radio R donde se indican los puntos campo r donde se calcula el potencial y el campo.

Calculemos primero el potencial en el interior de esta esfera utilizando (2.22)

$$\phi_i(r) = -4\pi G \left\{ \frac{1}{r} \int_0^r \rho_0 r'^2 dr' + \int_r^R \rho_0 r' dr' + \int_R^\infty 0 r' dr' \right\},$$

$$\phi_i(r) = -4\pi G \left\{ \frac{1}{r} \rho_0 \frac{r^3}{3} + \rho_0 \frac{R^2 - r^2}{2} \right\} = -4\pi G \rho_0 \left(\frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{6} \right),$$

siendo

$$M = \frac{4}{3}\pi\rho_0 R^3, \quad \rightarrow \quad \rho_0 = \frac{3M}{4\pi R^3},$$

y podemos escribir

$$\phi_i(r) = \frac{GM}{2R^3} r^2 - \frac{3}{2} \frac{GM}{R}, \quad r < R,$$

y observamos que en el interior de una esfera homogénea

$$\phi_i(r) = \frac{\Omega^2}{2} r^2 + \text{cte}; \quad \Omega^2 = \frac{GM}{R^3} > 0,$$

expresión que corresponde al potencial de un oscilador armónico en r .

En el exterior a la esfera homogénea, también haciendo uso de (2.22) resulta

$$\phi_e(r) = -4\pi G \left\{ \frac{1}{r} \int_0^R \rho_0 r'^2 dr' + \frac{1}{r} \int_R^r 0 r'^2 dr' + \int_r^\infty 0 r' dr' \right\},$$

por lo que $\phi_e(r) = -4\pi G \rho_0 R^3 / (3r)$, que en términos de la masa total resulta

$$\phi_e(r) = -\frac{GM}{r}, \quad r > R.$$

Resulta claro que en $r = R$ hay continuidad en el potencial pues

$$\phi_i(R) = \frac{GM}{2R^3} R^2 - \frac{3}{2} \frac{GM}{R} = -\frac{GM}{R} = \phi_e(R).$$

En lo que respecta al campo gravitatorio, resulta inmediatamente

$$\mathbf{g}_i = -\frac{GM}{R^3} r \mathbf{e}_r = -\Omega^2 r \mathbf{e}_r; \quad r < R; \quad \mathbf{g}_e = -\frac{GM}{r^2} \mathbf{e}_r; \quad r > R.$$

También observamos la continuidad del campo en $r = R$, como debe ocurrir.

Para terminar este ejemplo, calculemos la energía potencial gravitatoria de una esfera homogénea. Calculamos primero la masa total de la esfera, que por ser ρ constante, es simplemente

$$M = \frac{4}{3}\pi\rho_0 R^3,$$

y por tanto $M(r)$ resulta

$$M(r) = \frac{4}{3}\pi\rho_0 r^3 = M \left(\frac{r}{R}\right)^3, \quad r \leq R; \quad M(r) = M, \quad r > R,$$

y

$$\frac{dM(r)}{dr} = \frac{3M}{R^3}r^2, \quad r \leq R; \quad \frac{dM(r)}{dr} = 0, \quad r > R.$$

Por (2.27) la energía potencial gravitatoria será

$$W = -G \int_0^\infty \frac{M(r)}{r} dM(r) = -\frac{3GM^2}{R^6} \int_0^R r^4 dr = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}.$$

Cabe señalar que para cualquier sistema esférico finito, de masa M y radio R la energía potencial gravitatoria siempre puede escribirse como (se demuestra en los trabajos prácticos)

$$W = -\alpha \frac{GM^2}{R},$$

con $\alpha > 0$ una constante del orden de 1 que depende de M , R y de la ley de densidad $\rho(r)$.

Capítulo 3

Hidrodinámica

La hidrodinámica es fundamental para comprender muchos procesos astrofísicos, entre otros la formación estelar. En este capítulo derivaremos las principales ecuaciones de la hidrodinámica y mostraremos algunas aplicaciones.

El estado de un fluido queda especificado por su densidad $\rho(\mathbf{x}, t)$, su presión $P(\mathbf{x}, t)$, el campo de velocidades $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ y, puede también requerir de otras variables termodinámicas como la temperatura y la entropía. Estas últimas variables resultan necesarias en caso de contemplar intercambio de energía entre elementos de volumen de un fluido, aspecto que en esta formulación no consideraremos, y por tanto el fluido que describiremos estará a una temperatura uniforme T .

Al discutir la termodinámica, mostramos que tanto la energía interna como la presión son variables macroscópicas que están relacionadas, en el régimen no relativista, con el valor medio cuadrático de las velocidades de las partículas del gas. Ahora mostraremos que otras variables fundamentales para la descripción de un fluido, como el campo de velocidades, también es una variable que surge de una formulación microscópica.

Consideremos un elemento macroscópico de volumen del espacio de fases de un fluido y sea $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ la función de distribución de las partículas definida de manera que

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)d^3x d^3v = d^6 N(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \quad (3.1)$$

es el número de partículas del fluido con posiciones y velocidades dentro del elemento de volumen $d^3x d^3v$ centrado en (\mathbf{x}, \mathbf{v}) en el instante t . Si integramos (3.1) a todo el espacio de velocidades

$$d^3 N(\mathbf{x}, t) = \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)d^3v d^3x,$$

observamos que

$$\int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v = n(\mathbf{x}, t)$$

es el número de partículas por unidad de volumen del fluido en el punto \mathbf{x} al tiempo t . Si m denota la masa de una partícula del fluido, $mn(\mathbf{x}, t)$ será la densidad en dicho punto

$$\rho(\mathbf{x}, t) = m \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v. \quad (3.2)$$

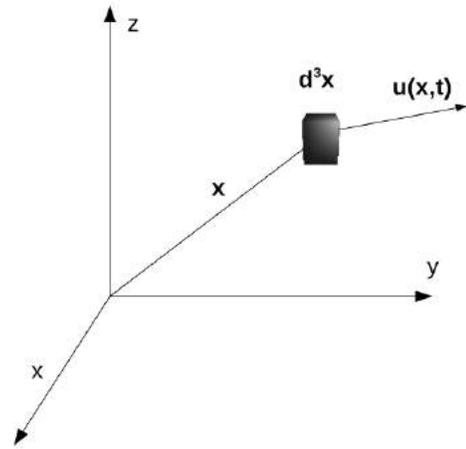


Figura 3.1: Campo de velocidades de un elemento macroscópico de volumen del espacio de configuraciones.

Por otro lado, definimos en el punto \mathbf{x} la velocidad media de las partículas en el elemento de volumen d^3x , como se ilustra en la Fig. 3.1,

$$\langle \mathbf{v} \rangle(\mathbf{x}, t) = \frac{\int \mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v}{\int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v} = \frac{1}{n(\mathbf{x}, t)} \int \mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v,$$

donde, nuevamente, la integral se extiende a todo el espacio de velocidades.

Este valor medio de las velocidades de las partículas del fluido en el punto \mathbf{x} y en el instante t es lo que denominamos campo de velocidades, $\langle \mathbf{v} \rangle(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$.

3.1. Ecuación de continuidad

Consideremos un volumen arbitrario de fluido ΔV , encerrado por una superficie Σ en una posición fija en el espacio y cuya densidad es $\rho(\mathbf{x}, t)$, tal como muestra la Fig. 3.2.

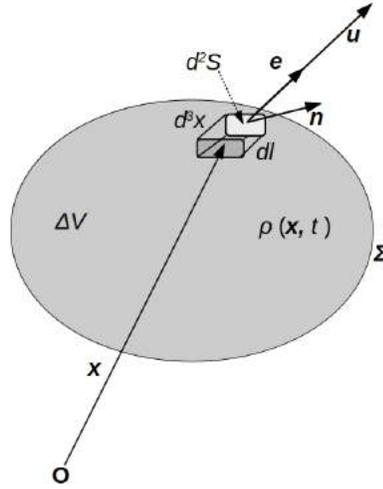


Figura 3.2: Fluido que emerge en la dirección \mathbf{e} a través del elemento de superficie d^2S de normal exterior \mathbf{n} . El vector \mathbf{e} es unitario y tiene la dirección de la velocidad \mathbf{u} . El elemento de volumen d^3x se construye partiendo de extender hacia el interior de ΔV el elemento de superficie en d^2S en la dirección del movimiento del fluido \mathbf{e} , siendo su longitud en esta dirección dl .

La masa contenida en este volumen en el instante t es

$$M(t) = \int_{\Delta V} \rho(\mathbf{x}, t) d^3x,$$

y la variación de la misma debido a cambios de la densidad con el tiempo resulta

$$\frac{dM}{dt} = \int_{\Delta V} \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} d^3x. \quad (3.3)$$

Por otro lado, la masa contenida en el elemento de volumen diferencial d^3x que fluye hacia el exterior de ΔV en la dirección del campo de velocidades $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ (que caracterizamos con el vector unitario \mathbf{e}) a través del elemento de superficie d^2S cuya normal exterior es \mathbf{n} es (ver Fig. 3.2)

$$d^3M = -\rho(\mathbf{x}, t) d^3x = -\rho(\mathbf{x}, t) dl \mathbf{e} \cdot \mathbf{n} d^2S,$$

pues por construcción $d^3x = \mathbf{e} \cdot \mathbf{n} dl d^2S$ y donde el signo $-$ indica que el volumen ΔV pierde masa hacia el exterior si el producto $\mathbf{e} \cdot \mathbf{n} > 0$. En el intervalo $(t, t + dt)$, por construcción del elemento de volumen d^3x , $dl \mathbf{e} = \mathbf{u} dt$, y

$$d^3M = -\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}d^2Sdt.$$

La masa total que fluye a través de toda la superficie Σ que encierra a ΔV resulta de sumar sobre todos los elementos de superficie,

$$dM = - \int_{\Sigma} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d^2S dt = - \int_{\Delta V} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) d^3x dt,$$

donde hemos hecho uso del teorema de la divergencia. Finalmente, la masa que fluye hacia el exterior de ΔV por unidad de tiempo es

$$\frac{dM}{dt} = - \int_{\Delta V} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) d^3x. \quad (3.4)$$

El vector $\rho \mathbf{u}$ es el *flujo de masa*, que da cuenta de la masa que fluye del volumen ΔV por unidad de superficie y tiempo. Si no existen fuentes ni sumideros de fluido, por conservación de la masa, la variación dada en (3.3) y en (3.4) deben ser iguales, por tanto

$$\int_{\Delta V} \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3x = - \int_{\Delta V} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) d^3x \rightarrow \int_{\Delta V} \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right\} d^3x = 0,$$

como el volumen ΔV es arbitrario, la integral será nula siempre que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (3.5)$$

Esta ecuación de la hidrodinámica se denomina *ecuación de continuidad*; conservación de la masa. En caso de existir fuentes o sumideros de fluido, en lugar de estar igualada a 0, lo estará a una función $\psi(\mathbf{x}, t)$ que dará cuenta de la velocidad del cambio de la densidad en un elemento de volumen por efecto de la masa que ingrese o egrese del elemento por otros mecanismos alternativos al flujo $\rho \mathbf{u}$.

En esta descripción, el movimiento del fluido está referido a un observador externo O y suele denominarse *formulación de Euler*. Si consideramos una línea de corriente del fluido o una trayectoria del elemento de volumen, $\mathbf{x}(t)$ y nos movemos con dicha línea de corriente, $\rho(\mathbf{x}(t), t)$, $\mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t)$. La ecuación de continuidad (3.5), podemos reescribirla como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot \mathbf{u} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Notemos que los primeros dos términos se corresponden con

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{d\rho}{dt},$$

por lo que la ecuación de continuidad en la *formulación de Lagrange* tiene la forma

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3.6)$$

Una solución muy simple a la ecuación de continuidad corresponde a un fluido incompresible¹ que fluye por un tubo de secciones normales A_1 y A_2 en dos puntos diferentes como muestra la Fig. 3.3.

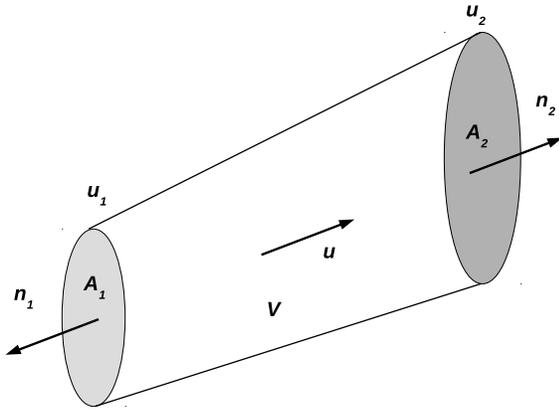


Figura 3.3: Fluido moviéndose en un tubo de secciones transversales A_1 y A_2 .

Siendo la densidad constante, en cualquier caso la ecuación de continuidad se reduce a

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

y si la integramos sobre todo el volumen V donde está contenido el fluido resulta

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{u} d^3x = \int_{\Sigma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d^2S = 0,$$

donde Σ es la superficie total que encierra a V y \mathbf{n} es la normal exterior a Σ en cada punto. En esta geometría, $\mathbf{u} = u\mathbf{n}_2 = -u\mathbf{n}_1$, y sobre toda la superficie lateral del tubo es $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$, por lo que la integral sobre Σ se reduce a

$$u_2 A_2 - u_1 A_1 = 0 \quad \rightarrow \quad u_2 A_2 = u_1 A_1,$$

¹Un fluido en el cual ρ se mantiene constante.

y expresa que el producto de la velocidad por la sección transversal del tubo es constante.

3.2. Ecuación de movimiento

Consideremos un elemento de volumen ΔV , densidad $\rho(\mathbf{x}, t)$, presión $P(\mathbf{x}, t)$ y masa total Δm como el de la Fig. 3.4. Tomamos en ΔV un elemento de volumen infinitesimal d^3x , con masa $d^3m = \rho d^3x$ con una superficie d^2S sobre Σ con \mathbf{n} la normal exterior a este elemento de superficie. Suponemos la existencia de un campo gravitatorio \mathbf{g} en cada punto \mathbf{x} y en cada instante t , que deriva de un potencial $\phi(\mathbf{x}, t)$.

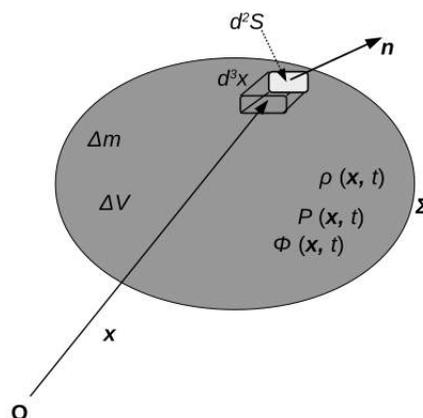


Figura 3.4: Fuerzas que actúan sobre el elemento de volumen ΔV , de presión y de gravedad.

En un fluido no viscoso, las fuerzas que actúan sobre un elemento de volumen son:

Fuerza de presión,

$$d^2 \mathbf{F}_p = -P \mathbf{n} d^2 S,$$

el signo $-$ es debido a que consideramos la fuerza debida a la presión que se ejerce sobre el elemento de volumen y que tiene dirección opuesta a \mathbf{n} . La fuerza neta sobre ΔV resulta de sumar sobre todos los elementos de superficie $d^2 S$,

$$\mathbf{F}_p = - \int_{\Sigma} P \mathbf{n} d^2 S = - \int_{\Delta V} \nabla P d^3 x,$$

donde hemos hecho uso del teorema de la divergencia para un campo escalar.²

Fuerza de gravedad,

$$d^3 \mathbf{F}_g = d^3 m \mathbf{g} = -\rho d^3 x \nabla \phi,$$

donde utilizamos que $\mathbf{g} = -\nabla \phi$. Por lo tanto, la fuerza gravitatoria total sobre ΔV resultará de sumar sobre todos los elementos de volumen $d^3 x$,

$$\mathbf{F}_g = - \int_{\Delta V} \rho \nabla \phi d^3 x.$$

Siendo estas dos las únicas interacciones que consideramos para el elemento de fluido, la ecuación de movimiento para ΔV resulta, de la segunda ley de Newton

$$\Delta m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = - \int_{\Delta V} \nabla P d^3 x - \int_{\Delta V} \rho \nabla \phi d^3 x.$$

Como ΔV es arbitrario, podemos hacer $\Delta V \rightarrow 0$ por lo que $\Delta m = \rho \Delta V$, y

$$\rho \Delta V \frac{d\mathbf{u}}{dt} = - \int_{\Delta V} \{ \nabla P + \rho \nabla \phi \} d^3 x = - \{ \nabla P + \rho \nabla \phi \} \Delta V,$$

y obtenemos finalmente

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = - \nabla P - \rho \nabla \phi. \quad (3.7)$$

Esta es la ecuación de movimiento en la formulación de Lagrange, pues estamos utilizando la derivada total respecto al tiempo del campo de velocidades, por lo tanto $\mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t)$. Para expresarla en la formulación de Euler, observemos que para la componente k de la velocidad, $u_k(\mathbf{x}(t), t)$ es

$$\frac{du_k}{dt} = \frac{\partial u_k}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \underbrace{\frac{dx_j}{dt}}_{u_j} = \frac{\partial u_k}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_k}{\partial x_j} = \frac{\partial u_k}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_k,$$

relación que es válida para cada componente de \mathbf{u} , por lo que podemos escribir

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}.$$

²Es inmediato demostrar este resultado a partir del teorema de la divergencia para un campo vectorial de la forma $\mathbf{F} = F \mathbf{k}$ donde \mathbf{k} es un vector unitario constante.

Reemplazando esta relación en (3.7), resulta la ecuación de movimiento en la formulación de Euler o *ecuación de Euler*

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \phi. \quad (3.8)$$

Esta ecuación (o ecuaciones pues hay una para cada componente de la velocidad) coincide con las ecuaciones de Navier-Stokes en ausencia de viscosidad.

La ecuación de continuidad (3.6) y la ecuación de Euler (3.8) involucran cinco incógnitas ρ, P, \mathbf{u} , suponiendo conocido ϕ .³ Por lo tanto tenemos cuatro ecuaciones para estas cinco incógnitas, se requiere de una ecuación adicional para poder resolver el sistema. En general, esta relación adicional es una ecuación de estado para el fluido que relacione las variables termodinámicas. Por otra parte, si el potencial gravitatorio es generado por la misma distribución de masa ρ , esto es cuando el fluido es *autogravitante*, se debe incluir además la ecuación de Poisson $\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho$.

De (3.7) o (3.8) para un fluido en estado estacionario, donde ninguna de las variables depende explícitamente del tiempo, se puede obtener una muy conocida relación. En efecto, multiplicamos escalarmente (3.7) por \mathbf{u} ,

$$\rho \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla P \cdot \mathbf{u} - \rho \nabla \phi \cdot \mathbf{u},$$

siendo $P, \phi, \rho, \mathbf{u}$ independientes de t ($\partial P/\partial t = 0, \partial \phi/\partial t = 0, \partial \rho/\partial t = 0, \partial \mathbf{u}/\partial t = 0$), recordando que

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla f \cdot \mathbf{u} = \frac{df}{dt}, \quad \rightarrow \quad \nabla f \cdot \mathbf{u} = \frac{df}{dt}, \quad \text{si} \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

y observando que el primer miembro puede expresarse en términos de una derivada total respecto del tiempo, esta última resulta

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 \right) = -\frac{dP}{dt} - \frac{d}{dt}(\rho \phi) \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 + P + \rho \phi \right) = 0;$$

y arribamos al denominado teorema de Bernoulli (conservación de la energía a lo largo de una línea de corriente),

$$\frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 + P + \rho \phi = \text{cte},$$

donde $\rho \phi$ es la energía potencial gravitatoria del elemento de fluido por unidad de volumen.

³Si no consideremos intercambio de calor y transporte de energía, de otra manera deberíamos incluir más variables como la temperatura y por tanto más ecuaciones.

Cabe señalar que la hipótesis de fluido incompresible es una buena primera aproximación para un líquido, pero no lo es para un gas. Por lo tanto, las expresiones simplificadas que hemos derivado a partir de las ecuaciones de continuidad y de Euler para fluidos incompresibles y estacionarios no son en general de relevancia en sistemas astrofísicos.

3.3. Perturbaciones a fluidos homogéneos: la inestabilidad de Jeans

Consideremos un fluido que, a los efectos prácticos, los podemos suponer de extensión infinita, estacionario y homogéneo. Esta aproximación de extensión infinita permite desentendernos de las condiciones de borde para las ecuaciones de continuidad, Euler y demás ecuaciones necesarias para resolver el problema.

En este escenario, si incluimos una ecuación de estado $P = P(\rho)$, al ser la densidad constante la presión también lo será. Siendo un fluido homogéneo e infinito, es claro que no puede existir un campo gravitatorio generado por la misma distribución de masa, pues todos los puntos \mathbf{x} serán el centro de esta y por tanto el campo será nulo para cualquier punto del espacio y para cualquier instante. De la ecuación de Euler (3.8) la velocidad también resulta constante por lo que las variables entonces toman los valores

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{x}, t) &= \rho_0, \\ P(\mathbf{x}, t) &= P_0, \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{u}_0.\end{aligned}$$

Así estos valores constantes para la densidad, la presión, el campo de velocidades y el campo gravitatorio ($\mathbf{g} = -\nabla\phi = 0$) satisfacen idénticamente tanto la ecuación de continuidad como la ecuación de Euler. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\mathbf{u}_0 = 0$.

Supongamos ahora que existe una pequeña perturbación a la densidad, una ligera inhomogeneidad en la distribución de masa y denotemos con $\epsilon\rho_1(\mathbf{x}, t)$ a dicho apartamiento de la homogeneidad siendo $\epsilon \ll 1$ el parámetro perturbativo y con valor inicial $\epsilon\rho_1(\mathbf{x}, 0)$.

Esta pequeña fluctuación en la densidad inducirá también pequeños cambios en la presión y en el campo de velocidades, como se desprende de la ecuación de continuidad (3.5), la ecuación de Euler (3.8) y la ecuación de estado. Asimismo, por la ecuación de Poisson, $\epsilon\rho_1(\mathbf{x}, t)$ será fuente de un pequeño potencial gravitatorio.

Denotemos con $\epsilon P_1(\mathbf{x}, t)$, $\epsilon \mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t)$ y $\epsilon \phi_1(\mathbf{x}, t)$ dichos cambios en la presión, en el campo de velocidades y en el potencial gravitatorio respectivamente en punto \mathbf{x} y en el instante t ; las variables resultan ahora

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{x}, t) &= \rho_0 + \epsilon \rho_1(\mathbf{x}, t), \\ P(\mathbf{x}, t) &= P_0 + \epsilon P_1(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \epsilon \mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t), \\ \phi(\mathbf{x}, t) &= \epsilon \phi_1(\mathbf{x}, t).\end{aligned}\tag{3.9}$$

El objetivo es encontrar soluciones para las perturbaciones a primer orden en ϵ ⁴ y para ello reemplazaremos las expresiones (3.9) en las ecuaciones de continuidad, Euler y Poisson que reescribimos a continuación

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad \text{ec. de continuidad}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \phi, \quad \text{ec. de Euler}$$

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho, \quad \text{ec. de Poisson}$$

$$P = P(\rho). \quad \text{ec. de estado}$$

Comenzamos con la ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \epsilon \rho_1) + \nabla \cdot ((\rho_0 + \epsilon \rho_1)(\epsilon \mathbf{u}_1)) = 0,$$

siendo ρ_0 constante, esta se reduce a

$$\epsilon \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \epsilon \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0,$$

donde \mathcal{O} denota orden, por lo que descartando órdenes superiores a ϵ , resulta la siguiente ecuación linealizada

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0.\tag{3.10}$$

Ahora hacemos un procedimiento similar con la ecuación de Euler,

⁴Ello implica descartar órdenes superiores en ϵ .

$$\frac{\partial(\epsilon \mathbf{u}_1)}{\partial t} + (\epsilon \mathbf{u}_1 \cdot \nabla)(\epsilon \mathbf{u}_1) = -\frac{1}{\rho_0 + \epsilon \rho_1} \nabla(P_0 + \epsilon P_1) - \nabla(\epsilon \phi_1),$$

el denominador en el primer término del segundo miembro, haciendo un desarrollo de Taylor a primer orden en ϵ puede escribirse como

$$\frac{1}{\rho_0 + \epsilon \rho_1} = \frac{1}{\rho_0} \frac{1}{1 + \epsilon \frac{\rho_1}{\rho_0}} = \frac{1}{\rho_0} \left(1 - \epsilon \frac{\rho_1}{\rho_0} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

separando órdenes en ϵ y recordando que P_0 es constante, la ecuación de Euler resulta

$$\epsilon \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + \mathcal{O}(\epsilon^2) = -\epsilon \frac{1}{\rho_0} \nabla P_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2) - \epsilon \nabla \phi_1,$$

y nuevamente descartando términos superiores que orden ϵ obtenemos

$$\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P_1 - \nabla \phi_1. \quad (3.11)$$

Ahora en la ecuación de Poisson, el análisis es muy simple

$$\nabla^2(\epsilon \phi_1) = 4\pi G(\epsilon \rho_1),$$

siendo lineal en ϵ resulta

$$\nabla^2 \phi_1 = 4\pi G \rho_1. \quad (3.12)$$

Finalmente, en la ecuación de estado, haciendo también un desarrollo de Taylor a primer orden en ϵ se obtiene

$$P = P(\rho_0 + \epsilon \rho_1) = P(\rho_0) + \left. \frac{dP}{d\rho} \right|_{\rho_0} (\epsilon \rho_1) + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

que linealizada en ϵ se escribe

$$P = P_0 + \left. \frac{dP}{d\rho} \right|_{\rho_0} (\epsilon \rho_1);$$

siendo $P - P_0 = \epsilon P_1$ por la segunda ecuación en (3.9), obtenemos

$$P_1 = \left. \frac{dP}{d\rho} \right|_{\rho_0} \rho_1 = c_s^2 \rho_1, \quad (3.13)$$

donde hemos denotado con $c_s^2 = (dP/d\rho)_{\rho_0}$, asumiendo que $(dP/d\rho) > 0$, lo cual es inmediato mostrar por ejemplo, para un gas ideal, $P = \rho kT/(\mu m_H)$ y

$$c_s^2 = \left. \frac{dP}{d\rho} \right|_{\rho_0} = \frac{kT}{\mu m_H}. \quad (3.14)$$

En (3.11) podemos reemplazar en ∇P_1 la expresión para P_1 obtenida en (3.13) y resulta

$$\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -\frac{c_s^2}{\rho_0} \nabla \rho_1 - \nabla \phi_1;$$

tomando la divergencia de esta última ecuación obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = -\frac{c_s^2}{\rho_0} \nabla^2 \rho_1 - \nabla^2 \phi_1,$$

y utilizando la ecuación de Poisson linealizada (3.12)

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = -\frac{c_s^2}{\rho_0} \nabla^2 \rho_1 - 4\pi G \rho_1. \quad (3.15)$$

Ahora de (3.10)

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0,$$

derivando respecto de t surge

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0, \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2}.$$

Reemplazando en (3.15) el término

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{u}_1$$

obtenemos una ecuación para ρ_1 ,

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - c_s^2 \nabla^2 \rho_1 - 4\pi G \rho_1 \rho_0 = 0. \quad (3.16)$$

Esta es una ecuación diferencial para ρ_1 , que involucra a la misma función, a sus derivadas segundas espaciales y temporales y coeficientes constantes, por tanto buscamos una solución particular de la forma

$$\rho_1 = A \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)), \quad (3.17)$$

con A constante y teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} = (-i\omega)(-i\omega)A \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)) = -\omega^2 \rho_1,$$

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x_j^2} = (ik_j)(ik_j)A \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)) = -k_j^2 \rho_1 \quad \rightarrow \quad \nabla^2 \rho_1 = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \rho_1,$$

al reemplazar en (3.16) resulta

$$-\omega^2 \rho_1 + c_s^2 |\mathbf{k}|^2 \rho_1 - 4\pi G \rho_0 \rho_1 = 0,$$

y obtenemos una relación de dispersión no lineal

$$\omega^2 = c_s^2 |\mathbf{k}|^2 - 4\pi G \rho_0. \quad (3.18)$$

Para comprender la física detrás de esta relación de dispersión, consideremos primero un escenario más sencillo y conocido.

El término $4\pi G \rho_0$ proviene de haber incluido en la ecuación de Euler (3.11) el campo gravitatorio inducido por la perturbación en la densidad. Si suponemos que $\rho_0 |\nabla \phi_1| \ll |\nabla P_1|$ e ignoramos la autogravedad generada por la perturbación (que equivaldría a hacer 0 la constante gravitatoria en la ecuación diferencial (3.16) para ρ_1), esta se reduce a⁵

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - c_s^2 \nabla^2 \rho_1 = 0,$$

que es una ecuación de ondas para ρ_1 con una relación de dispersión lineal,

$$\omega = c_s |\mathbf{k}|.$$

Por lo tanto, en ausencia de gravedad, la solución (3.17) es una onda sonora (onda de densidad o presión), siendo justamente c_s la velocidad del sonido.

Con autogravedad y de la relación de dispersión (3.18), $\omega^2 = c_s^2 |\mathbf{k}|^2 - 4\pi G \rho_0$, si

$$|\mathbf{k}|^2 > \frac{4\pi G \rho_0}{c_s^2}$$

que implica $\omega^2 > 0$, la solución (3.17) de la ecuación (3.16) sigue siendo una onda sonora pero distorsionada por efectos de la gravedad. Por el contrario, si

⁵Esta suposición es una muy buena aproximación en numerosas situaciones donde efectivamente los efectos de la autogravedad pueden ser despreciados.

$$|\mathbf{k}|^2 < \frac{4\pi G\rho_0}{c_s^2},$$

observamos que $\omega^2 < 0$, por lo que ω es imaginario puro, $\omega = \pm i\sigma$ con $\sigma \in \mathbb{R}$. En este caso la solución (3.17) es de la forma

$$\rho_1 = A \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \exp(\pm\sigma t) = A(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \exp(\pm\sigma t),$$

que claramente no es una onda, sino que existe un modo creciente y otro decreciente independientemente del signo de σ . Supongamos $\sigma > 0$, para $t \gg t_0$ solo sobrevivirá el modo creciente

$$\rho_1 \sim \rho_1(\mathbf{x}, 0) \exp(\sigma t) \gg \rho_1(\mathbf{x}, 0)$$

una solución inestable; la pequeña perturbación en la densidad crece significativamente, en otras palabras se produce un colapso gravitatorio. Esta inestabilidad es conocida como *inestabilidad de Jeans*. Cabe señalar que esta solución no es válida para tiempos arbitrariamente grandes pues la misma satisface el sistema de ecuaciones linealizado, mientras $\epsilon\rho_1$ por ejemplo, es pequeño. En otros términos, esta solución da cuenta del crecimiento inicial de la perturbación y para tiempos mayores se debe realizar un tratamiento no lineal, a mayores órdenes en ϵ .

El límite entre el comportamiento estable e inestable de las soluciones de (3.16) surge de la relación de dispersión (3.18), cuando $\omega^2 = 0$, esto es cuando $|\mathbf{k}|$ toma el valor particular

$$|\mathbf{k}_J| = \frac{2}{c_s} \sqrt{\pi G\rho_0},$$

que se denomina *número de onda de Jeans*. Si definimos la *longitud de onda de Jeans* $\lambda_J = 2\pi/|\mathbf{k}_J|$, esta resulta

$$\lambda_J = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G\rho_0}}. \quad (3.19)$$

Nótese que $(G\rho_0)^{-1/2}$ tiene dimensiones de tiempo y, como veremos en el próximo capítulo, este es una escala de tiempo dinámico, característica en un proceso gravitatorio.

Con estas definiciones, introduciendo también $\lambda = 2\pi/|\mathbf{k}|$ para la solución (3.17), la inestabilidad ocurre cuando $\lambda > \lambda_J$: cuando la escala de distancia o tamaño de la

perturbación supera la longitud de onda de Jeans.⁶

Asimismo, se define la *masa de Jeans* como una esfera de densidad ρ_0 y radio λ_J (o $\lambda_J/2$),

$$M_J = \frac{4\pi}{3}\rho_0\lambda_J^3 = \frac{4\pi^2}{3}c_s^3\sqrt{\frac{\pi}{G^3\rho_0}}, \quad (3.20)$$

por lo que el colapso ocurrirá siempre que la masa de la inhomogeneidad, M , es tal que $M > M_J$. En otros términos, si la masa involucrada en la perturbación es lo suficientemente grande, la gravedad dominará frente a las fuerzas de presión y el colapso ocurre. En cambio, si $M < M_J$, la presión superará a la gravedad y la perturbación será estable, se propagará y no existirá colapso gravitatorio.

De la expresión para la velocidad del sonido isotérmica, $c_s^2 = kT/(\mu m_H)$, dada en (3.14), la masa de Jeans puede expresarse en términos de la densidad y temperatura como

$$M_J \approx 4\pi^{3/2}\rho_0^{-1/2}T^{3/2}\left(\frac{k}{G\mu m_H}\right)^{3/2},$$

donde hemos aproximado $\pi/3 \approx 1$.

Podemos aplicar este criterio de Jeans a estructuras interestelares, como por ejemplo nubes moleculares, donde la masa de la inhomogeneidad es la masa de la nube.

Tomando valores $\rho \sim 10^{-24}\text{g cm}^{-3}$ y $T \sim 100\text{ K}$ para nubes de hidrógeno neutro difusas ($\mu = 1$), la masa crítica de Jeans resulta extremadamente grande, $M_J \sim 10^5 M_\odot$. Este valor de la masa de Jeans es dos ordenes de magnitud más grande que las masa típicas de las nubes difusas, por lo que estas últimas resultan muy estables frente al colapso gravitatorio.

En cambio para los núcleos densos de nubes moleculares gigantes, que poseen tamaños característicos de 0,1 pc, masas $M \sim 10M_\odot$, temperaturas $T \sim 10\text{ K}$ y densidades $\rho \sim 10^{-20}\text{g cm}^{-3}$, ($\mu = 2$) obtenemos $M_J \lesssim 10M_\odot$. Vemos entonces que, con masas $\sim 10M_\odot$, los núcleos densos de las nubes moleculares gigantes serán inestables ante el colapso gravitatorio, lo cual es consistente con los lugares de formación estelar.

Si bien estas nubes deberían estar presumiblemente en equilibrio con su entrono interestelar, una pequeña perturbación puede iniciar su contracción dando lugar al

⁶Cuando la inestabilidad ocurre, λ deja de ser una longitud de onda, pues la solución ya no es una onda plana.

colapso gravitacional. Esta perturbación puede ser debida, por ejemplo, a colisiones entre nubes.

De esta discusión podríamos eventualmente concluir que la masa entera de una nube gigante que exceda el límite de Jeans colapsará en una única estrella. Evidentemente ello no es así, prácticamente todas las estrellas jóvenes se encuentran en cúmulos y del orden de las tres cuartas partes de todas las estrellas están en sistemas binarios o múltiples. Por lo tanto, la formación estelar no puede explicarse sin la subsiguiente fragmentación de la masa crítica de Jeans. Ello podría ocurrir gracias a que $M_J \propto \rho^{-1/2}$ por lo que a medida que la nube se contrae, aumenta su densidad y la masa crítica decrece, lo que permitiría el colapso de nubes cada vez más pequeñas. La discusión de este mecanismo, si bien no es compleja, excede los alcances de este curso.

Cabe señalar que aún cuando las nubes moleculares gigante son inestables en el sentido de Jeans, no presentan una alta tasa de formación estelar y el proceso es poco eficiente. Por tanto la formación estelar requiere un tratamiento mucho más complejo (que está fuera del alcance de este curso) e involucra, entre otros, el rol que juegan los campos magnéticos de las nubes moleculares y la turbulencia del gas.

Capítulo 4

Estructura estelar

Durante la mayor parte de su vida, las estrellas se encuentran en un delicado equilibrio tanto local como global. Pequeños apartamientos de este equilibrio pueden dar lugar a estados estables, como es el caso de estrellas variables, o a estados dinámicamente inestables, como en los fenómenos de pérdida de masa en gigantes rojas, las novas o las supernovas.

Aún cuando una estrella tiene parámetros macroscópicos aproximadamente constantes, como el radio, la masa y la temperatura efectiva, está sujeta a cambios irreversibles que son los responsables en última instancia de la evolución estelar. Muchas veces es posible separar los aspectos estructurales de los evolutivos, pero en otros casos ambos están íntimamente ligados.

En este capítulo nos ocuparemos de los aspectos estructurales y supondremos que una estrella se encuentra en equilibrio hidrostático y térmico.

4.1. Equilibrio hidrostático

El comportamiento general de un elemento de fluido en una estrella estará descrito en general por las ecuación de continuidad y la ecuación de Euler discutidas en el capítulo anterior,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \phi. \quad (4.2)$$

La aproximación de equilibrio hidrostático implica, en términos “matemáticos”, estado estacionario y $\mathbf{u} = 0$, por lo que la ecuación de continuidad se satisface

idénticamente y la ecuación de Euler se reduce a

$$\nabla P = -\rho \nabla \phi, \quad (4.3)$$

y expresa que el equilibrio en la estrella es producto de un balance exacto entre la presión interna y la gravedad.

Discutamos en términos físicos cuando es válida la aproximación de equilibrio hidrostático. Suponiendo simetría esférica resulta

$$\nabla P = \frac{dP}{dr} \mathbf{e}_r,$$

donde \mathbf{e}_r es el versor radial, y de acuerdo a (2.24)

$$-\nabla \phi = -\frac{d\phi}{dr} \mathbf{e}_r = -\frac{GM(r)}{r^2} \mathbf{e}_r, \quad M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'.$$

No existiendo fuerzas en la dirección transversal, la ecuación de Euler (4.2) en la formulación de Lagrange se reduce a

$$\begin{aligned} \frac{du_r}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} - \frac{GM(r)}{r^2}, \\ \frac{du_T}{dt} &= 0, \end{aligned}$$

donde u_T refiere a la velocidad transversal a r . De la segunda de estas ecuaciones es claro que $u_T = \text{cte}$ y sin pérdida de generalidad la podemos hacer nula. La primer ecuación la reescribimos como

$$\rho \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{dP}{dr} - \frac{GM(r)}{r^2} \rho. \quad (4.4)$$

Supongamos que súbitamente desaparece la presión, por lo que esta última solo incluye la atracción gravitatoria

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{GM(r)}{r^2},$$

y nos preguntamos, cuánto tiempo puede estar ausente la presión antes de que la estrella colapse por efectos de la gravedad.

Introduciendo una densidad media $\rho_0 \equiv \langle \rho(r) \rangle$, la masa dentro de una esfera de radio r es $M(r) = 4\pi \rho_0 r^3 / 3$, por lo que la ecuación anterior se reduce a

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{4\pi}{3} G \rho_0 r = 0. \quad (4.5)$$

Esta ecuación es de la forma

$$\frac{d^2r}{dt^2} + \Omega^2 r = 0, \quad \text{donde} \quad \Omega^2 = \frac{4\pi}{3} G\rho_0.$$

que corresponde a la ecuación de movimiento de un oscilador armónico con frecuencia Ω y período T ,

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho_0}}.$$

Definido así, este tiempo que le insumiría a una partícula ubicada a una distancia arbitraria r cruzar el centro de la estrella, llegar al punto opuesto y regresar a su posición inicial, por lo que el tiempo que le demanda llegar al centro será $\tau_{\text{ff}} = T/4$, donde τ_{ff} se denomina *tiempo de caída libre* (el subíndice es por su nombre en inglés, free fall)¹,

$$\tau_{\text{ff}} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho_0}} \approx \frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{G\rho_0}}. \quad (4.6)$$

Para el Sol, por ejemplo, $\tau_{\text{ff}} \approx 30$ min, mientras que para una gigante roja, con masa similar a la masa solar y radio dos ordenes de magnitud mayor que el solar, este tiempo es de unas tres semanas, y para una enana blanca de unos pocos segundos.

El significado de estos valores de τ_{ff} es claro, si la gravedad y la presión no estuviesen balanceadas en absoluto, siendo mucho mayor la gravedad, la fuerza gravitacional del Sol le induciría un colapso en alrededor de media hora. Si las fuerzas de gravedad y de presión difirieran en un 1% en favor de la gravedad, de (4.4) la fuerza neta resultaría $-0,01GM(r)\rho/r^2$ y en (4.5) corresponde reemplazar $G\rho_0$ por $0,01G\rho_0$ por lo que de acuerdo a (4.6) (con $0,01G\rho$ en lugar de $G\rho_0$) el colapso ocurriría en aproximadamente 300 min., unas cinco horas.

Como el radio solar es el mismo en una escala de tiempo del orden $4,5 \times 10^9$ años, resulta evidente que las fuerzas de presión y de gravedad deben estar balanceadas con una precisión mayor que el 1%, por lo que el equilibrio hidrostático es claramente una muy buena aproximación.

Podríamos hacer este mismo análisis suponiendo ahora que la gravedad desaparece súbitamente. En tal caso la ecuación de Euler (4.2) solo incluirá términos de presión. En el capítulo anterior discutimos este problema y encontramos que la velocidad característica de propagación de cualquier perturbación es la velocidad del

¹Nótar que τ_{ff} es independiente de r .

sonido c_s . Por lo tanto, se podría definir un tiempo de explosión

$$\tau_{\text{exp}} = \frac{R}{c_s}, \quad (4.7)$$

donde R es un radio característico estelar.

Ya hemos encontrado que el colapso gravitatorio ocurre si la escala de distancia de la perturbación λ supera un valor crítico, la longitud de onda de Jeans, λ_J definida en (3.19), esto es, si

$$\lambda > \lambda_J = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G\rho_0}},$$

que puede reescribirse en términos del tiempo de caída libre (4.6) como

$$\lambda > \lambda_J \approx c_s \tau_{\text{ff}}.$$

Si adoptamos para la escala de la perturbación un radio característico estelar, $\lambda \sim R$, $\lambda/c_s \approx \tau_{\text{exp}}$ y la condición de colapso puede expresarse en términos de los tiempos de caída libre y de explosión como

$$\tau_{\text{exp}} > \tau_{\text{ff}}.$$

Por el contrario, si $\tau_{\text{exp}} < \tau_{\text{ff}}$ la presión domina sobre la gravedad y cualquier perturbación se propaga como una onda sonora. De acuerdo a esta discusión, en equilibrio hidrostático debe cumplirse

$$\tau_{\text{ff}} \approx \tau_{\text{exp}},$$

para que las fuerzas de gravedad y de presión estén balanceadas.

Utilizando las estimaciones (4.6) y (4.7) para ambas escalas de tiempo, la equivalencia entre ellas implica que

$$\frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{G\rho_0}} \approx \frac{R}{c_s},$$

siendo

$$\rho_0 \approx \frac{3M}{4\pi R^3}, \quad c_s^2 = \frac{kT}{\mu m_H}$$

de acuerdo a (3.14) para la velocidad del sonido isotérmica, la aproximación anterior toma la forma

$$\frac{3}{4} \sqrt{\frac{4\pi R^3}{3GM}} \approx \frac{R}{c_s} \rightarrow \frac{\sqrt{3\pi}}{2} \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \approx \frac{R}{c_s} \rightarrow \frac{4}{3\pi} \frac{GM}{R} \approx c_s^2 = \frac{kT}{\mu m_H},$$

De (1.26), $\mu m_H = M/N$ donde N es el número total de partículas en la estrella y resulta

$$\frac{4}{\pi} \frac{GM^2}{R} \approx 3NkT.$$

El primer miembro, a menos de un factor numérico próximo a 1 es $|W|$, el valor absoluto de la energía potencial gravitatoria de la estrella (para una esfera homogénea el factor sería 3/5) y el segundo miembro es $2U$, el doble de la la energía cinética media de las partículas de la estrella. Por lo tanto, el equilibrio hidrostático implica que $|W| \approx 2U$. En una próxima sección encontraremos con más precisión esta relación.

Veamos ahora que τ_H determina, ante un desbalance entre la presión y la gravedad, la escala de tiempo en la cual el equilibrio hidrostático se restablece. En efecto, supongamos un elemento de volumen estelar centrado en \mathbf{x} que a $t = 0$ se encuentra en equilibrio hidrostático, lo que implica que

$$-\frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \nabla P(\mathbf{x}) - \nabla \phi(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0.$$

Consideremos que a un cierto $t > 0$ se produce un pequeño apartamiento del equilibrio, donde el desbalance lo escribimos como

$$-\frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \nabla P(\mathbf{x}) - \nabla \phi(\mathbf{x}) = -\epsilon \nabla \phi(\mathbf{x}),$$

con ϵ positivo o negativo pero pequeño. Si $\epsilon > 0$ la gravedad supera ligeramente a la presión, mientras que la situación opuesta ocurrirá si $\epsilon < 0$.

Las ecuaciones (4.1-4.2) en la formulación de Lagrange toman la forma

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \phi.$$

y de acuerdo al desbalance de fuerzas estas ecuaciones resultan

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\epsilon \nabla \phi.$$

Como inicialmente tanto la densidad como la presión y el potencial dependen de la posición, el sistema se torna mucho más complejo de resolver que en el escenario del capítulo anterior, por lo tanto haremos estimaciones. Tomamos en primer término la divergencia de la ecuación de Euler

$$\frac{d}{dt} (\nabla \cdot \mathbf{u}) = -\epsilon \nabla^2 \phi = -4\pi G \rho \epsilon,$$

donde hemos hecho uso de la ecuación de Poisson. Si consideramos un intervalo de tiempo Δt finito suficientemente pequeño, y siendo a $t = 0$, $\mathbf{u}(\mathbf{x}(0)) = 0$, tendremos

$$\nabla \cdot \mathbf{u} \approx -4\pi G\rho\epsilon \Delta t.$$

Similarmente, de la ecuación de continuidad para el intervalo Δt resulta

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} \approx -\nabla \cdot \mathbf{u} \Delta t \approx 4\pi G\rho\epsilon (\Delta t)^2,$$

donde hemos utilizado la aproximación hallada para $\nabla \cdot \mathbf{u}$. Esta última expresión nos permite estimar la fluctuación (positiva o negativa) en la densidad y, definiendo el *tiempo hidrostático*, τ_{hid} , como el intervalo de tiempo $\Delta t \equiv \tau_{hid}$ para el cual esta fluctuación es del mismo orden que el apartamiento del equilibrio hidrostático, esto es $\Delta\rho/\rho \approx \epsilon$ resulta

$$\epsilon \approx 4\pi G\rho\epsilon \tau_{hid}^2$$

y obtenemos para τ_{hid}

$$\tau_{hid} \approx \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{\sqrt{G\rho}} \sim \tau_{ff}.$$

La fluctuación en la presión luego de un tiempo τ_{hid} es $\Delta P = c_s^2 \Delta\rho \sim \epsilon c_s^2 \rho$. Un aumento (disminución) de la densidad producto de una contracción (expansión) del elemento de volumen durante el intervalo τ_{hid} , da lugar a un incremento (decremento) de la presión que resulta del mismo orden que el desbalance de fuerzas, por lo tanto el equilibrio hidrostático se restituirá.

La expresión de τ_{ff} dada en (4.6), fue hallada con anterioridad cuando derivamos la longitud de onda de Jeans, por lo que $\tau_{ff} \equiv \tau_{din}$ es en realidad una escala de tiempo dinámica general para un sistema en que interviene la gravitación. Un proceso gravitacional siempre ocurre en escalas de tiempo $t \gg \tau_{din}$, la contracción gravitatoria, el equilibrio hidrostático y muchos otros procesos de relevancia astrofísica.

Por lo tanto la aproximación de equilibrio hidrostático (4.3) es válida para escalas de tiempo $\tau_{din} \ll t \ll t_{evol}$, donde t_{evol} es la escala de tiempo de evolución estelar siendo las más rápidas $t_{evol} \sim 10^5$ años o menores, pero mucho mayores que τ_{din} .

Bajo estas consideraciones físicas la ecuación (4.3), considerando simetría esférica, se reduce al siguiente par de ecuaciones para el equilibrio hidrostático

$$\begin{aligned} \frac{dP(r)}{dr} &= -\frac{GM(r)}{r^2} \rho(r), \\ \frac{dM(r)}{dr} &= 4\pi r^2 \rho(r); \end{aligned} \tag{4.8}$$

donde $dM(r)$ es la masa contenida dentro de una cáscara esférica de radio r y de espesor dr , tal como mostramos al discutir el campo gravitatorio de un sistema esférico. De la primera en (4.8) observamos que $dP/dr < 0$.

4.2. Cota para la presión central

En la sección anterior establecimos las condiciones físicas para las cuales la aproximación de equilibrio hidrostático es válida, y derivamos la ecuación correspondiente a dicha situación de balance entre las fuerzas de gravedad y de presión. La primera ecuación en (4.8) es una ecuación diferencial de primer orden para P , por lo que para resolverla es necesario establecer condiciones de contorno, por ejemplo la presión en $r = 0$. Si bien de esta ecuación no podemos determinar su valor en el centro estelar, si podemos derivar una cota para ella.

De la primera y segunda ecuación en (4.8) eliminamos ρ y escribimos

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2} - \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dM(r)}{dr} \rightarrow \frac{dP}{dr} + \frac{G}{4\pi} \frac{M(r)}{r^4} \frac{dM(r)}{dr} = 0;$$

en el primer miembro aparecen dos derivadas respecto a r , por lo que reescribimos estos dos términos como la derivada de la suma de dos términos más uno adicional para mantener la igualdad,

$$\frac{d}{dr} \left(P(r) + \frac{G}{8\pi} \frac{M^2(r)}{r^4} \right) + \frac{G}{2\pi} \frac{M^2(r)}{r^5} = 0,$$

o equivalentemente,

$$\frac{d}{dr} \left(P(r) + \frac{G}{8\pi} \frac{M^2(r)}{r^4} \right) = -\frac{G}{2\pi} \frac{M^2(r)}{r^5} < 0.$$

Por lo tanto $\psi(r)$ definida como

$$\psi(r) = P(r) + \frac{G}{8\pi} \frac{M^2(r)}{r^4}$$

es una función decreciente de r , por lo tanto $\psi(0) > \psi(R)$, siendo R el radio estelar. Así

$$\psi(0) = P(0) + \lim_{r \rightarrow 0} \frac{G}{8\pi} \frac{M^2(r)}{r^4} > P(R) + \frac{G}{8\pi} \frac{M^2(R)}{R^4} = \psi(R),$$

donde $M(R) = M$ y

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{M^2(r)}{r^4} \rightarrow 0$$

pues como ya lo hemos considerado previamente, $M(r) \propto r^3$ para $r \rightarrow 0$. Siendo $P(0) = P_c$, la presión central y $P(R) = 0$ por definición, resulta

$$P_c > \frac{G M^2}{8\pi R^4}. \quad (4.9)$$

En general la presión central de una estrella siempre se puede escribir de la forma

$$P_c = \beta \frac{GM^2}{R^4},$$

donde $\beta \sim 1 > 1/(8\pi)$.

Teniendo una estimación de la presión central, asumiendo que el gas estelar es ideal, podemos derivar también una estimación para la temperatura central T_c , siendo $P = \rho kT/(\mu m_H)$, haciendo $\rho \approx 3M/(4\pi R^3)$ resulta

$$\beta \frac{GM^2}{R^4} \approx \frac{3M}{4\pi R^3} \frac{kT}{\mu m_H},$$

y obviando factores numéricos del orden de 1 resulta para T_c ,

$$T_c \sim \frac{GM}{R} \frac{\mu m_H}{k}.$$

Para el Sol, por ejemplo, estas dos estimaciones arrojan $P_c \approx 10^{16} \text{ erg cm}^{-3}$, $T_c \approx 2 \times 10^7 \text{ K}$. En estrellas evolucionadas, la presión central en general es mucho mayor que la estimación dada por (4.9).

4.3. Teorema del virial

Consideremos las ecuaciones de equilibrio hidrostático (4.8) y nuevamente eliminamos ρ ,

$$\frac{dP}{dr} + \frac{G}{4\pi} \frac{M(r)}{r^4} \frac{dM(r)}{dr} = 0,$$

que reescribimos como

$$4\pi r^3 dP = -\frac{GM(r)}{r} dM(r).$$

El segundo miembro, de acuerdo a (2.27) es dW , siendo W la energía potencial gravitatoria de la estrella, por lo tanto

$$dW = 4\pi r^3 dP = d(4\pi r^3 P(r)) - 12\pi r^2 P(r) dr, \quad (4.10)$$

y si consideramos un gas no relativista, por (1.16), $P = 2u/3$, donde u es la densidad de energía, entonces

$$12\pi r^2 P(r) dr = 8\pi r^2 u dr = 2 \times 4\pi r^2 u dr = 2udV,$$

donde hemos reemplazado $4\pi r^2 dr$ por el diferencial de volumen de una cáscara esférica de radio r y espesor dr , dV , así (4.10) resulta

$$dW = d(4\pi r^3 P(r)) - 2udV = d(4\pi r^3 P(r)) - 2dU,$$

pues u es la densidad de energía. Por tanto, integrando entre $0 < r < R$, siendo R el radio estelar resulta

$$W = 4\pi r^3 P(r) \Big|_0^R - 2U,$$

como $P(R) = 0$, el primer término del segundo miembro se anula y obtenemos

$$2U + W = 0, \quad (4.11)$$

resultado que se conoce como *teorema del virial*. Siendo la energía total de la estrella $E = U + W$, esta misma relación se puede reescribir como $E = -U$. Cabe señalar que a un resultado muy similar arribamos al establecer la condición de equilibrio hidrostático, $\tau_{\text{ff}} \approx \tau_{\text{exp}}$.

El teorema del virial también se deriva en una formulación puramente dinámica, imponiendo la condición que la derivada temporal segunda del valor medio del momento de inercia del sistema se anule, dando así la misma relación (4.11) para la energía cinética y potencial media del sistema. Aquí lo hemos deducido para un gas no relativista en equilibrio hidrostático. Este teorema juega un rol central tanto en el proceso de formación como de evolución estelar.

Supongamos una nube molecular de gas ideal, uniforme, con densidad ρ_0 , masa total M_c , radio R_c y en equilibrio hidrostático, por lo que se satisface el teorema del virial y $2U_c + W_c = 0$, donde

$$U_c = \frac{3}{2}NkT, \quad W_c = -\frac{3}{5}\frac{GM_c^2}{R_c},$$

y de acuerdo a (1.26), $N = M_c/(\mu m_H)$ es el número total de partículas del gas.²

Consideremos que se produce un ligero apartamiento de equilibrio tal que $2U_c < |W_c|$, la gravedad supera ligeramente a la presión. Por lo tanto se producirá una contracción gravitatoria y

$$3\frac{M_c}{\mu m_H}kT < \frac{3GM_c^2}{5R_c}, \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\mu m_H}kT < \frac{GM_c}{5R_c},$$

siendo $\rho_0 = 3M_c/(4\pi R_c^3)$ la densidad inicial antes de la contracción, podemos reemplazar R_c en la ecuación anterior por $R_c = (3M_c/4\rho_0\pi)^{1/3} \approx (M_c/4\rho_0)^{1/3}$

$$\frac{1}{\mu m_H}kT < \frac{4^{1/3}G}{5}\rho_0^{1/3}M_c^{2/3},$$

y obtenemos una cota para el valor de M_c por encima del cual la nube colapsará,

$$M_c > \frac{5^{3/2}}{2}\rho_0^{-1/2}T^{3/2}\left(\frac{k}{G\mu m_H}\right)^{3/2} \approx M_J$$

donde hemos usado (3.20) para la masa de Jeans expresada en términos de la temperatura y la densidad.

Solo utilizando el teorema del virial y argumentos termodinámicos derivamos una muy buena estimación de la masa de Jeans y, de la misma manera se obtiene el radio o longitud de onda de Jeans.

En caso de equilibrio hidrostático, se cumple exactamente el teorema del virial y podemos estimar la temperatura media estelar a partir de expresiones muy similares para la energía térmica y potencial; $U = 3MkT/(2\mu m_H)$ y $W \approx -GM^2/R$, aplicando el teorema del virial

$$\frac{3MkT}{\mu m_H} \approx \frac{GM^2}{R}, \quad \rightarrow \quad T \approx \frac{\mu m_H}{3k}gR, \quad \text{con} \quad g = \frac{GM}{R^2}, \quad (4.12)$$

que resulta muy próxima a la estimación dada anteriormente para la temperatura central.

Supongamos ahora una estrella que se encuentra en equilibrio hidrostático y que sufre una contracción gravitatoria debida a una disminución de la presión. Esta

²Para la segunda relación, recordar que al concluir el capítulo de teoría de potencial se calculó la energía potencial gravitatoria de una esfera homogénea de radio R .

contracción implica una disminución de la energía potencial gravitatoria (aumento en valor absoluto) pues, como hemos mostrado con anterioridad

$$W = -\alpha \frac{GM^2}{R},$$

con α una constante positiva del orden de 1. Por lo tanto una contracción implica una disminución de R , haciendo W más negativa, por lo tanto, si denotamos con ΔW a esta variación de la energía potencial, $\Delta W < 0$.

Sean U_1 y W_1 la energía cinética o térmica y potencial gravitatoria de la estrella previas a la contracción. Al estar en equilibrio hidrostático, se satisface el teorema del virial y

$$2U_1 + W_1 = 0; \quad E_1 = U_1 + W_1 = -U_1,$$

donde E_1 es la energía total de la estrella.

Supongamos que luego de la contracción la estrella alcanza nuevamente el equilibrio hidrostático, siendo U_2 y $W_2 = W_1 + \Delta W$, la respectivas energías internas y potencial, que satisfacen

$$2U_2 + W_2 = 0; \quad E_2 = U_2 + W_2 = -U_2,$$

donde ahora E_2 es la energía total luego de la contracción.

Denotando con $\Delta E = E_2 - E_1$ y $\Delta U = U_2 - U_1$, resulta inmediatamente que

$$\Delta U = -\frac{\Delta W}{2} > 0, \quad \Delta E = \frac{\Delta W}{2} < 0.$$

En consecuencia el efecto de una contracción gravitatoria produce un aumento de la temperatura y una disminución de la energía dando lugar a un sistema más ligado. La energía que pierde la estrella se irradia al exterior.³ Es de destacar este comportamiento termodinámico “extraño” de una estrella al sufrir una contracción, aumenta su temperatura y cede energía, su calor específico es negativo.

Una contracción gravitatoria puede originarse a partir de un decrecimiento de la presión al aumentar el peso molecular medio μ , producto de la transformación por reacciones nucleares de, por ejemplo hidrógeno en helio. En una escala de tiempo τ_{din} , la estrella recuperará el equilibrio y habrá aumentado su temperatura lo suficiente como para quemar helio en elementos más pesados.

Para concluir con esta sección repitamos las mismas consideraciones que hicimos para derivar el teorema del virial, pero ahora para un gas relativista. Al discutir por

³En el capítulo siguiente consideraremos esta fuente adicional de energía que emite una estrella.

ejemplo un gas de electrones completamente degenerado y relativista, encontramos que $P = u/3$, igual que para la radiación, por lo que en la ecuación (4.10) se modifica el último término del segundo miembro al reemplazar P por u y resulta

$$dW = d(4\pi r^3 P(r)) - udV,$$

y al integrar sobre r , procediendo de la misma manera que en el caso no relativista, obtenemos

$$U + W = 0, \quad E = 0.$$

Este resultado muestra que un sistema en extremo relativista es marginalmente estable. Puede expandirse o contraerse indefinidamente sin variar su energía. No obstante un pequeño cambio en el sistema puede resultar suficiente para tornarlo inestable. Un ejemplo importante de sistemas ultra relativistas son las estrellas dominadas por la presión de radiación, estos objetos están al borde de la inestabilidad. Este simple resultado brinda una explicación natural al hecho fáctico de porque no se han encontrado estrellas con masas que excedan las $100M_{\odot}$; en estrellas muy masivas la presión de radiación domina completamente y por tanto son inestables ⁴.

4.4. Equilibrio hidrostático en una atmósfera

En las capas más externas de una estrella, la ecuación de equilibrio hidrostático (4.8) toma una forma más simple, reflejando el hecho de que la atmósfera es en general muy delgada comparada con el radio estelar, como se muestra esquemáticamente en la Fig. 4.1.

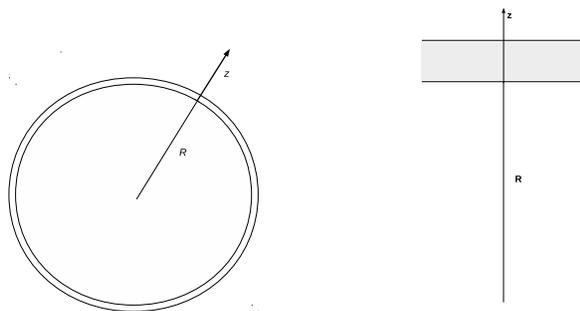


Figura 4.1: Geometría de capas plano paralelas para una atmósfera.

⁴Estas consideraciones son claves también para que exista una masa máxima (masa de Chandrasekhar) en las enanas blancas.

De (4.8) si expresamos $r = R + z$, donde z se mide desde la fotosfera estelar donde queda definido el radio estelar, suponiendo que $z \ll R$ y siendo $dr = dz$ resulta

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}\rho(r) \quad \rightarrow \quad \frac{dP}{dz} = -\frac{GM(R+z)}{(R+z)^2}\rho(R+z),$$

donde hacemos

$$M(R+z) = 4\pi \int_0^{R+z} \rho(r')r'^2 dr' \approx 4\pi \int_0^R \rho(r')r'^2 dr' = M,$$

la masa total de la estrella; $\rho(R+z) \rightarrow \rho(z)$ pues solo implica un cambio del origen de coordenadas y

$$\frac{1}{(R+z)^2} = \frac{1}{R^2} \frac{1}{(1+z/R)^2} = \frac{1}{R^2} \left(1 - 2\frac{z}{R} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{z}{R}\right)^2\right) \right),$$

donde hemos hecho un desarrollo de Taylor en z/R . Siendo $z \ll R$ podemos también ignorar el término lineal en z y aproximamos

$$\frac{1}{(R+z)^2} \approx \frac{1}{R^2},$$

por lo que la ecuación de equilibrio hidrostático para la atmósfera se reduce a

$$\frac{dP}{dz} = -g\rho(z), \quad g \equiv \frac{GM}{R^2}, \quad (4.13)$$

donde g se denomina *gravedad superficial* que es un parámetro muy importante de la atmósfera. Esta aproximación para la atmósfera se denomina, *aproximación de capas plano-paralelas* pues la densidad y la presión solo dependen de la coordenada cartesiana z . En el próximo capítulo discutiremos con más detalle esta aproximación en términos más generales para las propiedades de una atmósfera estelar.

Consideremos una atmósfera isoterma de gas ideal,

$$P = \frac{\rho kT}{\mu m_H},$$

que reemplazada en (4.13) nos da una ecuación diferencial para la densidad

$$\frac{kT}{\mu m_H} \frac{d\rho}{dz} = -g\rho(z), \quad \rightarrow \quad \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{\mu m_H g}{kT} dz,$$

integrando para z desde $z = 0$, y definiendo

$$H = \frac{kT}{\mu m_H g},$$

obtenemos la conocida ley para la densidad

$$\rho(z) = \rho(0) \exp(-z/H).$$

Es inmediato hallar la ley para la presión, basta reemplazar $\rho(z)$ en la ecuación de estado y

$$P(z) = P(0) \exp(-z/H), \quad P(0) = \frac{\rho(0)kT}{\mu m_H}.$$

El parámetro H se lo denomina *escala de altura en la atmósfera* y, en modelos no isotérmicos, se generaliza definiéndolo como

$$H = -\frac{dz}{d \ln P} = -\frac{dz}{dP/P} = -P \frac{dz}{dP} = \frac{P}{g\rho(z)}, \quad (4.14)$$

donde hemos hecho uso de (4.13) para dP/dz .

4.5. Modelos estelares simples

En general las ecuaciones de equilibrio hidrostático (4.8) no pueden ser resueltas, tal como ocurre con las ecuaciones hidrodinámicas requerimos de una ecuación adicional pues éstas involucran tres funciones a determinar $\rho(r)$, $P(r)$ y $M(r)$. Existen dos excepciones en las que si pueden ser resueltas: cuando ρ es una función conocida de r ; y cuando se conoce $P(\rho)$.

Si $\rho(r)$ es conocida, las ecuaciones (4.8) pueden ser integradas, comenzando con $M(0) = 0$ y se obtiene $M(r)$. Con $M(r)$ puede integrarse la ecuación para la presión, a partir de $r = R$ con la condición de contorno $P(R) = 0$. Si bien este es un escenario poco realista para construir un modelo estelar, resulta interesante observar que el conocimiento de $\rho(r)$ determina completamente la estructura hidrostática de una estrella. Un modelo muy sencillo donde la densidad es una función lineal de r se deja como ejercicio, cuando $\rho(r) = \rho_c(1 - r/R)$ si $r \leq R$ y $\rho(r) = 0$ si $r > R$, siendo ρ_c la densidad central y R el radio estelar.

En el caso de conocer $P(\rho)$, implica asumir una forma específica de ecuación de estado, tal como lo hemos hecho en la sección anterior para una atmósfera de gas ideal isotérmica.

4.5.1. Modelos politrópicos

Un ejemplo particular donde la dependencia de la presión con la densidad es conocida tiene la forma

$$P = K\rho^\gamma, \quad (4.15)$$

donde K y $\gamma > 1$ son constantes positivas. Esta relación se denomina politrópica, y los modelos resultantes se llaman modelos politrópicos. Históricamente este nombre deriva de la relación entre las variables termodinámicas en un proceso politrópico y para los cuales encontramos que $PV^{\Gamma_1} = \text{cte}$, lo que implica $P \propto \rho^{\Gamma_1}$, y que formalmente coincide con (4.15). En esta discusión, no asumimos ningún valor particular para γ .

Modelos con esta ley para la presión han sido muy relevantes desde principios del siglo XX o antes en la construcción de modelos estelares, aún hoy son útiles como ejemplos simples que no difieren demasiado de modelos realistas. De hecho, como ya hemos visto, los modelos politrópicos son una aproximación a situaciones que se ajustan muy bien a problemas reales, como por ejemplo, el modelo de Eddington, donde tanto el gas como la radiación contribuyen a la presión total, o en un gas donde domina la presión de los electrones completamente degenerados, tanto en el escenario no relativista como relativista.

De las ecuaciones de equilibrio hidrostático (4.8) que reescribimos

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}\rho, \quad \frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2\rho,$$

si utilizamos la primera para expresar $M(r)$ en términos del gradiente de presión y se reemplaza en la segunda, resulta

$$M(r) = -\frac{r^2}{G\rho(r)}\frac{dP}{dr}, \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dr}\left(-\frac{r^2}{G\rho(r)}\frac{dP}{dr}\right) = 4\pi r^2\rho,$$

que puede expresarse como

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr}\right) = -4\pi G\rho.$$

De (4.15), $P = K\rho^\gamma$,

$$\frac{dP}{dr} = K\gamma\rho^{\gamma-1}\frac{d\rho}{dr},$$

que reemplazada en la última relación arroja

$$\frac{K\gamma}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dr} \right) = -4\pi G\rho. \quad (4.16)$$

Esta es una ecuación diferencial de segundo orden, por lo que necesitamos dos condiciones de contorno para resolverla, por ejemplo $\rho(0)$ y $d\rho/dr|_{r=0}$.

Procuremos hacer esta ecuación diferencial mas sencilla, para lo cual introducimos una nueva función adimensional θ , definida positiva tal que

$$\rho = \lambda\theta^n, \quad n \in \mathbb{R}^+, \quad (4.17)$$

donde $\lambda > 0$ es, por ahora, una constante arbitraria con dimensiones de densidad y n lo vamos a elegir de forma tal que simplifique la ecuación diferencial (4.16). Reemplazando en esta última ecuación el cambio $\rho \rightarrow \theta$ dado por (4.17) resulta

$$\frac{K\gamma}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 (\lambda\theta^n)^{\gamma-2} \lambda n \theta^{n-1} \frac{d\theta}{dr} \right) = -4\pi G\lambda\theta^n,$$

acomodando términos, esta última puede escribirse como

$$\frac{nK\gamma\lambda^{\gamma-2}}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \theta^{(n\gamma-n-1)} \frac{d\theta}{dr} \right) = -4\pi G\theta^n,$$

elegimos n de tal forma que $n\gamma - n - 1 = 0$ y obtenemos la siguiente relación entre el *índice politrópico* y γ

$$n = \frac{1}{\gamma - 1} > 0, \quad \text{o} \quad \gamma = \frac{n + 1}{n}. \quad (4.18)$$

Por tanto la ecuación para θ queda

$$\frac{nK(n+1)\lambda^{\gamma-2}}{nr^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\theta}{dr} \right) = -4\pi G\theta^n.$$

El factor $\lambda^{\gamma-2}$ en términos de n es $\lambda^{(1-n)/n}$, y la última ecuación la reescribimos como

$$\left[\frac{K(n+1)\lambda^{(1-n)/n}}{4\pi G} \right] \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\theta}{dr} \right) = -\theta^n. \quad (4.19)$$

Denominamos

$$\alpha^2 = \frac{K(n+1)\lambda^{(1-n)/n}}{4\pi G} > 0,$$

pues todos los factores que intervienen en su definición son positivos. Siendo θ adimensional, α^2 debe tener las mismas dimensiones que r^2 . Por otra parte, teniendo λ dimensiones de densidad, la elegimos como $\lambda = \rho_c = \rho(0)$; por lo que ya especificamos una condición de contorno para (4.19), $\theta(0) = 1$.

Teniendo α dimensiones de distancia, definimos una coordenada radial adimensional ξ tal que

$$r = \alpha\xi, \quad \frac{d}{dr} = \frac{1}{\alpha} \frac{d}{d\xi}, \quad (4.20)$$

y en términos de esta variable adimensional en (4.19)

$$\frac{\alpha^2}{\alpha^2 \xi^2} \frac{1}{\alpha} \frac{d}{d\xi} \left(\alpha^2 \xi^2 \frac{d\theta}{\alpha d\xi} \right) = -\theta^n,$$

resulta independiente de α y toma la forma

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n. \quad (4.21)$$

Esta ecuación se conoce como ecuación de *Lane-Emdem* de índice n y sus soluciones $\theta_n(\xi)$ como funciones de Lane-Emdem. Las condiciones de contorno que debe satisfacer esta ecuación son, como ya hemos señalado $\theta(0) = 1$ y otra que debemos determinar, $d\theta/d\xi|_{\xi=0}$.

De la condición de equilibrio hidrostático (4.8)

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } r \rightarrow 0$$

pues, como ya señalamos $M(r) \propto r^3$ para $r \rightarrow 0$. En términos de θ , utilizando que $P \propto \rho^\gamma$ y $\rho \propto \theta^n$, esta condición resulta

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} \propto \frac{1}{\rho} \rho^{\gamma-1} \frac{d\rho}{dr} = \frac{1}{\rho} \rho^{1/n} \frac{d\rho}{dr} \propto \rho^{1/n-1} \frac{d\rho}{dr} \propto (\theta^n)^{1/n-1} \theta^{n-1} \frac{d\theta}{dr} = \frac{d\theta}{dr} \propto \frac{d\theta}{d\xi},$$

por lo tanto, $d\theta/d\xi|_{\xi=0} = 0$.

La ecuación de Lane-Emdem (4.21) sujeta a estas dos condiciones de contorno puede ser integrada y para un n arbitrario, en general debe hacerse numéricamente.

La superficie del modelo se define de manera que $\theta_n(\xi_1) = 0$, siendo $\xi = \xi_1$ el primer valor del radio adimensional para el cual se anula $\theta_n(\xi)$.

Dadas las soluciones $\theta_n(\xi)$, podemos obtener relaciones para los parámetros que caracterizan el modelo. De (4.20), la definición de α y recordando que $\lambda = \rho_c$, resulta inmediato que el radio del modelo estelar es

$$R = \left(\frac{K(n+1)\rho_c^{(1-n)/n}}{4\pi G} \right)^{1/2} \xi_1.$$

La masa contenida dentro de una esfera de radio $\xi = r/\alpha$, $M(\xi)$, la calculamos a partir de la definición de $M(r)$ y usando (4.17), $\rho(r) = \rho_c \theta^n$,

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr',$$

haciendo $r = \alpha\xi$; $r' = \alpha\xi'$

$$M(\xi) = 4\pi\rho_c \int_0^\xi \theta^n(\xi') \alpha^2 \xi'^2 d(\alpha\xi') = 4\pi\alpha^3 \rho_c \int_0^\xi \theta^n(\xi') \xi'^2 d\xi',$$

de la ecuación de Lane-Emdem (4.21) observamos que

$$\theta^n(\xi) \xi^2 = -\frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right),$$

por lo tanto

$$M(\xi) = -4\pi\alpha^3 \rho_c \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -4\pi \left(\frac{K(n+1)}{4\pi G} \right)^{3/2} \rho_c^{(3-n)/2n} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right),$$

donde hemos reemplazado α por su definición. La masa total M resulta de esta última expresión evaluada en $\xi = \xi_1$,

$$M = -4\pi \left(\frac{K(n+1)}{4\pi G} \right)^{3/2} \rho_c^{(3-n)/2n} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right)_{\xi=\xi_1}. \quad (4.22)$$

De forma similar se pueden derivar otros parámetros, como la presión central, la densidad media, etc. Aquí solo incluiremos la expresión para la energía potencial gravitatoria para una polítropa de radio R finito,⁵

$$W = -\frac{3}{5-n} \frac{GM^2}{R}. \quad (4.23)$$

⁵La derivación de todas estas expresiones pueden encontrarse en Chandrasekhar, *An Introduction to the Study of Stellar Structure*.

Para tres valores particulares de n la ecuación de Lane-Emdem (4.21) tiene solución analítica, $n = 0, 1, 5$ la solución es (se deja como ejercicio)

$$\begin{aligned}\theta_0(\xi) &= 1 - \frac{\xi^2}{6}, & \xi_1 &= \sqrt{6}, \\ \theta_1(\xi) &= \frac{\text{sen } \xi}{\xi}, & \xi_1 &= \pi, \\ \theta_5(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2/3}}, & \xi_1 &= \infty,\end{aligned}$$

que se muestran en la Fig. 4.2 para $\rho_n = \lambda\theta_n^n$.

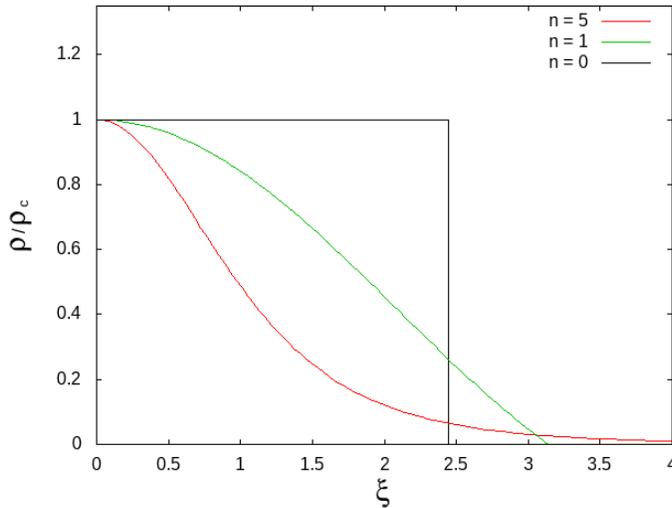


Figura 4.2: Soluciones a la ecuación de Lane-Emdem para la densidad $\rho = \lambda\theta^n$ normalizadas a la densidad central ρ_c , en función del radio adimensional $\xi = r/\alpha$. Para $n = 0$, la solución corresponde a una esfera homogénea, mientras que para $n = 1$ el perfil de densidad es demasiado duro en comparación con el correspondiente a $n = 5$.

La solución $\theta_0(\xi)$ correspondiente a $n = 0$ que tiene extensión finita, es de escaso interés astrofísico, ya que por (4.17), corresponde a una esfera homogénea de densidad $\rho = \rho_c$. De hecho la derivación que hemos hecho para la ecuación de Lane-Emdem es válida para $n \neq 0$, como por ejemplo lo muestra (4.18).

De las soluciones analíticas, la correspondiente a $n = 5$ es relevante. Si bien tiene extensión infinita, su masa total es finita. En efecto, de la expresión para la masa total de una polítropa (4.22), que por simplicidad la escribimos en términos de α , resulta

$$M = -4\pi\alpha^3\rho_c \left(\xi^2 \frac{d\theta_5}{d\xi} \right)_{\xi=\infty} = -4\pi\alpha^3\rho_c \lim_{\xi \rightarrow \infty} \xi^2 \frac{d\theta_5}{d\xi},$$

con

$$\frac{d\theta_5}{d\xi} = -\frac{1}{3} \frac{\xi}{(1 + \xi^2/3)^{3/2}},$$

y evaluando el límite

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \xi^2 \frac{d\theta_5}{d\xi} = -\frac{1}{3} \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\xi^3}{(1 + \xi^2/3)^{3/2}} = -\sqrt{3}.$$

Así la masa total es

$$M = 4\pi\sqrt{3}\alpha^3\rho_c. \quad (4.24)$$

La densidad correspondiente a esta solución, $\rho = \rho_c\theta_5^5$, siendo $r = \alpha\xi$ resulta

$$\rho = \rho_c \frac{1}{(1 + \xi^2/3)^{5/2}} = \rho_c \frac{3^{5/2}\alpha^5}{(3\alpha^2 + r^2)^{5/2}},$$

usando (4.24), expresamos ρ_c en términos de la masa total M y definiendo un parámetro de escala de distancia $b = \sqrt{3}\alpha = (3M/4\pi\rho_c)^{1/3}$, de simple álgebra la densidad se reduce a

$$\rho(r) = \frac{3Mb^2}{4\pi} \frac{1}{(b^2 + r^2)^{5/2}}.$$

De (2.22),

$$\phi(r) = -4\pi G \left\{ \frac{1}{r} \int_0^r \rho(r')r'^2 dr' + \int_r^\infty \rho(r')r' dr' \right\}$$

para el potencial generado por una distribución esférica de masa, introducimos en esta última la expresión de $\rho(r)$,

$$\phi(r) = -3GMb^2 \left\{ \frac{1}{r} \int_0^r \frac{r'^2 dr'}{(b^2 + r'^2)^{5/2}} + \int_r^\infty \frac{r' dr'}{(b^2 + r'^2)^{5/2}} \right\},$$

y siendo⁶

$$\int_0^r \frac{r'^2 dr'}{(b^2 + r'^2)^{5/2}} = \frac{1}{3} \frac{r^3}{b^2(b^2 + r^2)^{3/2}}, \quad \int_r^\infty \frac{r' dr'}{(b^2 + r'^2)^{5/2}} = \frac{1}{3} \frac{1}{(b^2 + r^2)^{3/2}}$$

surge

$$\phi(r) = -GM \left(\frac{r^2}{(r^2 + b^2)^{3/2}} + \frac{b^2}{(r^2 + b^2)^{3/2}} \right) = -\frac{GM}{\sqrt{b^2 + r^2}},$$

⁶Ver I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*.

que se denomina *esfera de Plummer* o *esfera de Schuster*, que modela en forma simplificada sistemas estelares esféricos. Este modelo fue originalmente propuesto por Plummer para representar cúmulos globulares, no obstante en la actualidad ya no es un modelo satisfactorio. De todas formas sigue siendo de gran aplicación pues tiene muchas propiedades analíticas convenientes.

Para derivar la energía potencial gravitatoria de la esfera de Plummer notemos que no podemos hacer uso de (4.23) ya que no está definida para $n = 5$, pues para este caso particular $R \rightarrow \infty$. A partir de la expresión para W obtenida en (2.27),

$$W = -G \int_0^\infty \frac{M(r)}{r} dM(r),$$

con

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr', \quad dM(r) = 4\pi \rho(r) r^2 dr, \quad \rho(r) = \frac{3Mb^2}{4\pi} \frac{1}{(b^2 + r^2)^{5/2}},$$

un cálculo muy similar al realizado para derivar el potencial de la esfera de Plummer resulta para W ⁷

$$W = -\frac{3\pi}{32} \frac{GM^2}{b}.$$

De este último resultado, y de (4.23) para $n \neq 5$, concluimos que las funciones de Lane-Emden para $n \leq 5$ representan sistemas ligados, mientras que para $n > 5$ dan lugar a sistemas de extensión infinita, masa infinita y no ligados gravitacionalmente.

Otro modelo politrópico de sumo interés astrofísico corresponde a $n = 3$ pues conduce a una relación $P \propto \rho^{4/3}$. Esta expresión tiene exactamente la forma de la ecuación de estado hallada para un gas de electrones completamente degenerado y ultra relativista que modela enanas blancas de muy altas densidades. Asimismo, esta misma relación aplica en el modelo de Eddington para una estrella (1.33), donde el equilibrio hidrostático se debe al balance entre la gravedad y la presión total (gas y radiación).

4.5.2. Esfera isoterma

En el caso de una esfera de gas ideal isoterma, la presión y la densidad satisfacen la relación

⁷En numerosos textos se afirma que la energía potencial gravitatoria de una politropa de índice $n = 5$ es infinita, lo cual obviamente no es correcto.

$$P = K\rho, \quad K = \frac{kT}{\mu m_H} \equiv c_s^2, \quad (4.25)$$

que equivale a una polítropa con $\gamma = 1$ que de acuerdo a (4.19) corresponde a $n = \infty$. Por ello no podemos hacer uso de la ecuación de Lane-Emdem para tratar este modelo. De la discusión anterior es claro que una esfera isoterma tendrá extensión y masa infinita, pues $n > 5$.

Utilizando nuevamente las ecuaciones de equilibrio hidrostático (4.8) y la ecuación de estado (4.25) escribimos

$$\frac{dP}{dr} = K \frac{d\rho}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2} \rho \quad \rightarrow \quad M(r) = -\frac{K}{G} \frac{r^2}{\rho} \frac{d\rho}{dr},$$

reemplazando en $dM(r)/dr = 4\pi r^2 \rho$ resulta

$$\left[\frac{K}{4\pi G} \right] \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right) = -\rho. \quad (4.26)$$

Si procuramos soluciones que resulten finitas en $r = 0$, hacemos el cambio de variables

$$\rho(r) = \rho_0 \exp(-\psi(r)), \quad (4.27)$$

con $\psi(0) = 0$.

Reemplazando en (4.26) obtenemos para $\psi(r)$

$$\left[\frac{K}{4\pi G \rho_0} \right] \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) = \exp(-\psi(r)),$$

y haciendo nuevamente

$$\alpha^2 = \left[\frac{K}{4\pi G \rho_0} \right], \quad r = \alpha \xi,$$

obtenemos

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\psi}{d\xi} \right) = \exp(-\psi). \quad (4.28)$$

Repitiendo el mismo análisis hecho para la ecuación de Lane-Emdem, es inmediato mostrar que la otra condición de contorno es $d\psi/d\xi|_{\xi=0} = 0$.

Esta ecuación, con las condiciones de contorno señaladas, solo puede ser resuelta numéricamente y en la Fig. 4.3 se muestra la solución para la densidad (4.27) en

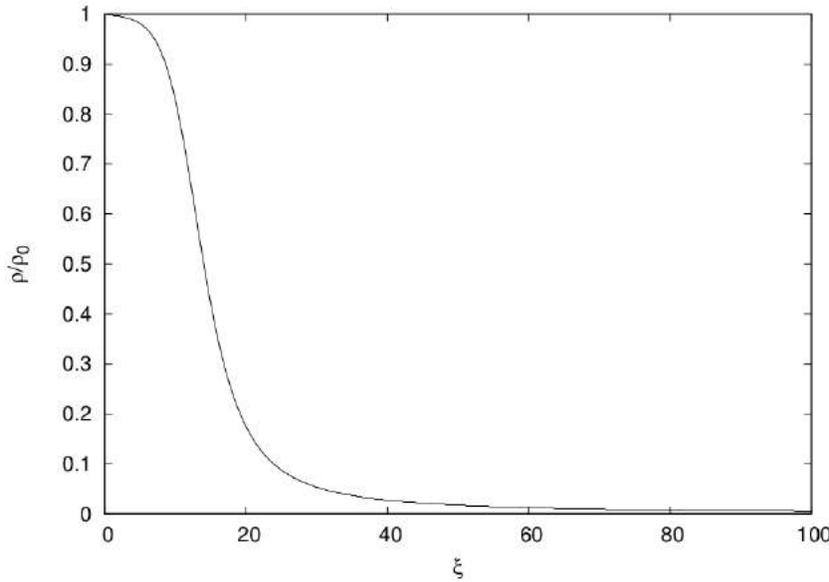


Figura 4.3: Solución numérica para la ecuación correspondiente a la esfera isoterma.

función del radio adimensional ξ . Si bien, como mencionamos, la esfera isoterma implica extensión y masa infinita, su perfil de densidad para $r < r_0$, con r_0 cierto radio, esto es una esfera truncada, modelan bastante bien, por ejemplo, los núcleos galácticos.

Señalemos finalmente que la ecuación (4.26) admite una solución particular, que no satisface la condición de densidad finita en el origen. Busquemos esta solución y para ello procuremos una de ley de potencias

$$\rho(r) = Cr^a,$$

que reemplazada en (4.26) resulta

$$\left[\frac{K}{4\pi G} \right] \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{Cr^a} \frac{Cdr^a}{dr} \right) = -Cr^a \quad \rightarrow \quad \left[\frac{aK}{4\pi G} \right] \frac{d}{dr}(r) = -Cr^{a+2},$$

esta última igualdad solo se satisface para $a = -2$, lo que nos permite además determinar la constante C , $C = K/(2\pi G)$, y la densidad resulta

$$\rho(r) = \frac{K}{2\pi G} \frac{1}{r^2},$$

que se denomina *esfera isoterma singular*, debido a su singularidad en el origen. Claramente

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \propto r,$$

por tanto, solo un modelo restringido a $0 < r < r_0$ contendrá masa finita y, por tanto, energía potencial también finita y negativa. La esfera isoterma se utiliza en muchas aplicaciones, por ejemplo para modelar el efecto de lente gravitacional de galaxias y cúmulos de galaxias.

Asimismo, el potencial generado por esta distribución de masa lo calculamos a partir de la ecuación de Poisson

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = 4\pi G \rho(r) \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = 2K.$$

Vista la singularidad en $r = 0$, es conveniente introducir un radio adimensional ξ , tal que $r = r_d \xi$, con r_d una cierta constante. La ecuación anterior es invariante frente a este cambio de variables, similar a lo que ocurre en la ecuación de Lane-Emdem, por tanto solo debemos cambiar $r \rightarrow \xi$, e integrando

$$\xi^2 \frac{d\phi}{d\xi} = 2K\xi + C_1, \quad \rightarrow \quad \frac{d\phi}{d\xi} = \frac{2K}{\xi} + \frac{C_1}{\xi^2},$$

donde C_1 es una constante a determinar. Integrando nuevamente resulta,

$$\phi(\xi) = 2K \ln \xi - \frac{C_1}{\xi}.$$

Si elegimos, por ejemplo, el origen del potencial en $\xi = 1$ ($r = r_d$), $C_1 = 0$, obtenemos finalmente

$$\phi(r) = 2K \ln \left(\frac{r}{r_d} \right).$$

Esta forma del potencial es de interés, pues siendo la velocidad circular $v_c^2 = r|d\phi/dr|$, este da lugar a curvas planas de rotación, $v_c = \text{cte}$.

4.6. Apéndice Capítulo 4

Los resultados obtenidos en este capítulo junto a los obtenidos en la discusión de la Termodinámica, contamos con las herramientas necesaria para verificar que, por ejemplo, una estrella puede aproximarse muy bien como una configuración esférica gaseosa.

4.6.1. Gas Estelar

Es pertinente justificar que efectivamente podemos considerar a las estrellas como esferas gaseosas y que en general, salvo en regiones de muy alta densidad como ya hemos discutido, el gas estelar puede considerarse un gas ideal. Al introducir el concepto de gas ideal, mencionamos que las interacciones entre las partículas es despreciable y por tanto, la energía es puramente energía cinética o térmica. Veamos bajo que condiciones este es un escenario plausible en una estrella.

Consideremos, para simplificar, una estrella constituida por una única especie de partículas con peso atómico \mathcal{A} , número atómico \mathcal{Z} y a temperatura T . El número de partículas por unidad de volumen, como hemos visto es $n = \rho/(\mu m_H)$, siendo una única especie la constituyente de la estrella, $\mu = \mathcal{A}$, por tanto $n = \rho/(\mathcal{A}m_H)$. La distancia interpartícula, como ya hemos discutido es $d \approx n^{-1/3} = (\mathcal{A}m_H/\rho)^{1/3}$.

La interacción electromagnética típica corresponde a una energía potencial característica

$$V \approx \frac{\mathcal{Z}^2 e^2}{d} \approx \mathcal{Z}^2 e^2 \left(\frac{\rho}{\mathcal{A}m_H} \right)^{1/3} \sim \mathcal{Z}^2 e^2 \left(\frac{M}{\mathcal{A}m_H R^3} \right)^{1/3} = \frac{\mathcal{Z}^2 e^2}{R} \left(\frac{M}{\mathcal{A}m_H} \right)^{1/3},$$

donde aproximamos ρ por una densidad media M/R^3 .

Por otra parte la energía cinética térmica media de una partícula, como hemos visto, es $\langle E \rangle = 3kT/2$. y utilizando (4.12) para la temperatura media que derivamos utilizando el teorema del virial, $kT \approx \mu m_H g R/3$,

$$\langle E \rangle \approx kT \sim \frac{\mu m_H GM}{3 R} = \frac{\mathcal{A}m_H GM}{3 R},$$

pues $\mu = \mathcal{A}$ y por tanto la relación $V/\langle E \rangle$ es

$$\frac{V}{\langle E \rangle} \sim \frac{R}{GM\mathcal{A}m_H} \frac{\mathcal{Z}^2 e^2}{R} \left(\frac{M}{\mathcal{A}m_H} \right)^{1/3} = \left(\frac{e^2}{Gm_H^{4/3}} \right) \frac{\mathcal{Z}^2}{\mathcal{A}^{4/3} M^{2/3}},$$

donde hemos despreciado el factor 3 dado que se trata de estimaciones crudas, y si expresamos la masa en masas solares, $M_{\odot} \approx 2 \times 10^{33}$ g, resulta

$$\frac{V}{\langle E \rangle} \sim \left(\frac{e^2}{GM_{\odot}^{2/3} m_H^{4/3}} \right) \frac{\mathcal{Z}^2}{\mathcal{A}^{4/3}} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-2/3} \approx 0,01 \frac{\mathcal{Z}^2}{\mathcal{A}^{4/3}} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-2/3} .$$

Por ejemplo, para una estrella de tipo solar compuesta por hidrógeno puro, $\mathcal{A} = \mathcal{Z} = 1$, resultando que $V/\langle E \rangle \sim 0,01$; en cambio para una estrella similar pero de hierro puro, $\mathcal{A} = 56$, $\mathcal{Z} = 26$ y el cociente resulta 0.03. Por lo tanto resulta evidente que en general para masas estelares domina claramente la energía térmica sobre cualquier interacción entre las partículas y el material estelar puede ser aproximado muy bien por un gas.

Por el contrario, si consideramos un planeta como La Tierra y tomamos $M = M_{\oplus} = 6 \times 10^{27}$ g, y nuevamente adoptamos el escenario extremo de puro hierro, este cociente resulta ~ 170 , por lo que el centro de la tierra claramente no puede ser considerado un gas.

Capítulo 5

Transporte radiativo

La radiación electromagnética juega un rol central en las estrellas, así como en el medio interestelar y en muchos otros sistemas astrofísicos. En este capítulo haremos una descripción macroscópica del campo de radiación y mostraremos en algunos casos la vinculación entre esta descripción y la microscópica, esta última se encuentra fuera del alcance de este curso. En cursos superiores de Atmósferas e Interiores Estelares se profundizará el tratamiento que aquí se brinda.

5.1. Descripción de campo radiativo

En cualquier punto en el interior o en el exterior de una estrella existirán fotones de diversas energías viajando en diferentes direcciones. Estos fotones constituyen el campo de radiación en el punto \mathbf{r} al instante t . Supongamos un elemento de superficie arbitrario d^2S , localizado en la posición \mathbf{r} , respecto de un sistema de referencia O . Sea \mathbf{n} el vector unitario normal a dicha superficie y $\mathbf{\Omega}$ otro vector unitario que define la dirección del campo de radiación respecto de \mathbf{n} , siendo ϑ el ángulo entre ellos, tal como se representa en la Figura 5.1.

Imaginemos que a una distancia (arbitraria) $d\ell$ de d^2S existe otro elemento de superficie d^2S' que subtiende un ángulo sólido $d^2\Omega$ (visto desde d^2S) y cuya normal es precisamente el vector $\mathbf{\Omega}$. Existiendo un campo de radiación en \mathbf{r} al instante t , cierta energía fluirá desde d^2S a d^2S' en un intervalo dt . Es claro que si \mathbf{n} y $\mathbf{\Omega}$ fuesen ortogonales no habría contribución alguna del elemento d^2S al campo de radiación en la dirección $\mathbf{\Omega}$, por lo que el área efectiva o normal, $d^2S_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{\Omega} d^2S = \cos \vartheta d^2S$, es la que debemos considerar en esta formulación. Por tanto, la energía d^6E que parte del elemento de superficie d^2S posicionado en el punto \mathbf{r} al instante t , en el rango de frecuencias $(\nu, \nu + d\nu)$, en la dirección $\mathbf{\Omega}$ dentro del ángulo sólido $d^2\Omega$ y que

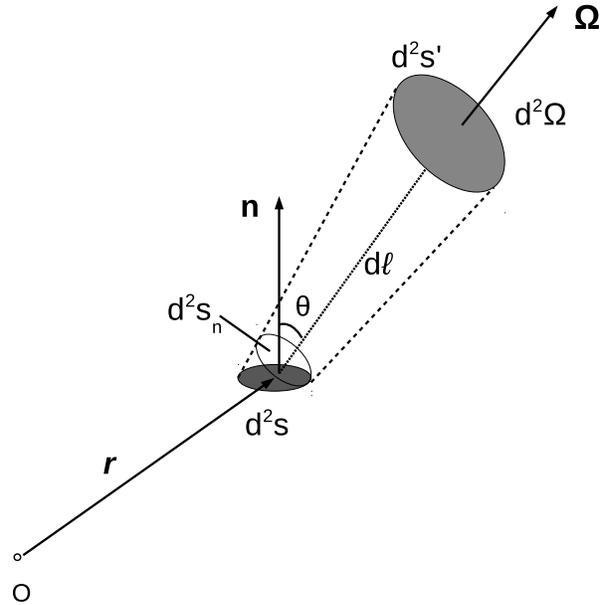


Figura 5.1: Representación esquemática de los elementos geométricos requeridos para la definición de la intensidad específica.

arriba al elemento de superficie d^2S' en $t + dt$ la caracterizaremos a través de una función de distribución, que denominamos *intensidad específica*, I , que dependerá de la posición, la dirección, la frecuencia y el tiempo, de manera que

$$d^6 E(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, \nu, t) = I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, \nu, t) d^2\Omega d\nu \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega} d^2S dt. \quad (5.1)$$

Tal como está definida, la intensidad específica (o intensidad monocromática) provee una descripción completa del campo de radiación (sin polarización) y tendrá dimensiones de

$$\text{erg Hz}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ ster}^{-1},$$

donde $\text{ster} = \text{rad} \times \text{rad}$ no es en realidad una unidad física.

En la literatura es habitual indicar la dependencia con la frecuencia por medio de un subíndice, de manera que de ahora en adelante denotaremos

$$d^6 E_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, t) \equiv d^6 E(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, \nu, t), \quad I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, t) \equiv I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, \nu, t).$$

Un campo de radiación se dice

- estacionario: cuando no hay dependencia explícita con el tiempo,

- homogéneo: cuando es independiente de la posición,
- isotrópico: cuando no existe dependencia con la dirección.

Relacionemos la intensidad específica con una distribución más familiar en términos físicos. Consideremos la densidad de fotones en el espacio de fases $n(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, definida de manera tal que

$$d^6 N(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = n(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3 r d^3 p$$

es el número de fotones dentro de un elemento de volumen del espacio de fases $d^3 r d^3 p$ centrado en \mathbf{r} , \mathbf{p} en el instante t . Un haz de radiación de frecuencia ν en la dirección $\mathbf{\Omega}$ equivale a considerar fotones con impulso $\mathbf{p} = (h\nu/c)\mathbf{\Omega}$ ¹. Por tanto la energía transportada por los fotones con frecuencia en el intervalo $(\nu, \nu + d\nu)$ la podemos expresar como

$$d^6 E_\nu = \overbrace{h\nu}^{\text{energía de un fotón}} \underbrace{n(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3 r d^3 p}_{\text{nro. de fotones}}. \quad (5.2)$$

Si introducimos coordenadas esféricas en el espacio de impulsos (p, ϑ, φ) , el elemento de volumen es $d^3 p = p^2 dp d^2 \Omega$ donde p es el módulo del impulso y $d^2 \Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ es el elemento de ángulo sólido centrado en $\mathbf{\Omega}$, utilizando la relación entre el impulso y la frecuencia resulta

$$d^3 p = p^2 dp d^2 \Omega = \left(\frac{h^2 \nu^2}{c^2} \right) \left(\frac{h}{c} d\nu \right) d^2 \Omega = \frac{h^3 \nu^2}{c^3} d\nu d^2 \Omega. \quad (5.3)$$

El elemento de volumen en el espacio de configuraciones, con ayuda de la Figura 5.1, podemos escribirlo como

$$d^3 r = dl d^2 S_n = c dt \mathbf{n} \cdot \mathbf{\Omega} d^2 S, \quad (5.4)$$

pues la diferencia entre $d^2 S_n$ y $d^2 S'$ es de orden $dl \rightarrow 0$ cuando $dt \rightarrow 0$. Por tanto, introduciendo (5.3) y (5.4) en (5.2) obtenemos

$$d^6 E_\nu = \frac{h^4 \nu^3}{c^2} n(\mathbf{r}, (h\nu/c)\mathbf{\Omega}, t) d^2 \Omega d\nu \mathbf{n} \cdot \mathbf{\Omega} d^2 S dt. \quad (5.5)$$

Comparando (5.5) con (5.1) resulta

¹Esta relación surge de $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, $E = mc^2$, por lo que $\mathbf{p} = (E/c^2)\mathbf{v}$, con $\mathbf{v} = c\mathbf{\Omega}$ y $E = h\nu$.

$$I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, t) = \frac{h^4 \nu^3}{c^2} n(\mathbf{r}, (h\nu/c)\boldsymbol{\Omega}, t), \quad (5.6)$$

relación que nos muestra que la intensidad específica es proporcional a la densidad de fotones en el espacio de fases. Más precisamente, I_ν está íntimamente relacionada con la densidad de energía en el espacio de fases, puesto que la relación (5.6) se obtiene a partir de (5.2). Nótese que la dependencia del campo de radiación con la frecuencia y la dirección proviene del espacio de los impulsos.

De (5.5), si integramos a todo el ángulo sólido y reescribimos $cdt \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega} d^2S = d^3r$

$$d^4E_\nu = \frac{h^4 \nu^3}{c^3} \int n(\mathbf{r}, (h\nu/c)\boldsymbol{\Omega}, t) d^2\Omega d\nu d^3r, \quad (5.7)$$

obtenemos la densidad de energía espectral, esto es la energía por unidad de volumen en el intervalo $(\nu, \nu + d\nu)$, u_ν . Comparando con (5.6) obtenemos la siguiente relación entre la densidad espectral de energía y la intensidad específica

$$u_\nu(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, t) d^2\Omega. \quad (5.8)$$

Una propiedad importante de la intensidad específica (demostrada en otros cursos) es su invarianza entre dos puntos arbitrarios, si no existen fuentes o sumideros de radiación a lo largo de la línea que une ambos puntos. Es una consecuencia inmediata de la conservación de la energía del campo de radiación en ausencia de procesos de creación o aniquilación de fotones.

5.2. Momentos de la intensidad específica

Siendo la intensidad específica una función de distribución, resulta útil considerar los momentos de I_ν respecto a una de sus variables, en particular, $\boldsymbol{\Omega}$.

Recordemos que dada una función de distribución $f(x_1, x_2, x_3)$ con, por ejemplo, las x_i definidas en \mathbb{R} , y asumiendo que f está normalizada a 1, esto es

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = 1,$$

puede definir el momento de orden k de f respecto a x_j , como

$$M_j^{(k)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_j^k f(x_1, x_2, x_3) dx_j, \quad (5.9)$$

donde M_k , que también es una distribución, depende las x_i pero no de x_j . En el caso de una función de distribución de una única variable, x , el momento de orden 0 es

justamente la condición de normalización de f , el de orden 1 es el valor medio, $\langle x \rangle$, y el de orden 2 corresponde al valor medio cuadrático, $\langle x^2 \rangle$.

5.2.1. Intensidad media

Definimos el momento de orden 0 de la intensidad específica respecto a Ω (o valor medio respecto a todas las direcciones) como

$$J_\nu(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int I_\nu(\mathbf{r}, \Omega, t) d^2\Omega \quad (5.10)$$

que se denomina, *intensidad media*. La integral en (5.10) se extiende sobre todo el ángulo sólido (4π ster). Suele encontrarse en la literatura que las unidades de J_ν son $\text{erg Hz}^{-1} \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$, esto es difiere de las unidades de I_ν en el ster. Esta afirmación no es correcta, y proviene justamente de que ster no es una dimensión física. En efecto, es claro que J_ν no es una distribución en direcciones, ya que resulta de integrar a todo el ángulo sólido, mientras que I_ν si lo es; la inclusión del ster entre las dimensiones de I_ν tiene por objeto enfatizar este hecho. Las unidades de ambas intensidades coinciden, ya que en (5.10) el denominador 4π son justamente ster. Por ello no hay incongruencia alguna en la relación entre ambas distribuciones cuando el campo de radiación es isotrópico, pues siendo I_ν independiente de Ω resulta

$$J_\nu(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int I_\nu(\mathbf{r}, t) d^2\Omega = \frac{1}{4\pi} I_\nu(\mathbf{r}, t) \underbrace{\int d^2\Omega}_{4\pi} = I_\nu(\mathbf{r}, t). \quad (5.11)$$

Comparando la definición de J_ν (5.10), con la expresión para la densidad espectral de energía, (5.8),

$$u_\nu(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int I_\nu(\mathbf{r}, \Omega, t) d^2\Omega.$$

inmediatamente encontramos una muy estrecha vinculación entre ambas

$$u_\nu = \frac{4\pi}{c} J_\nu. \quad (5.12)$$

En todos los casos que abordaremos en este curso, consideraremos geometría plana o esférica. En el caso de atmósferas, utilizaremos la aproximación de capas plano-paralelas ya definida con anterioridad. En cambio para el interior de una estrella utilizaremos la aproximación de simetría esférica.

Para la aproximación de geometría plana utilizaremos coordenadas cartesianas, $\mathbf{r} = (x, y, z)$, siendo los planos a z constante los que definen cada capa homogénea

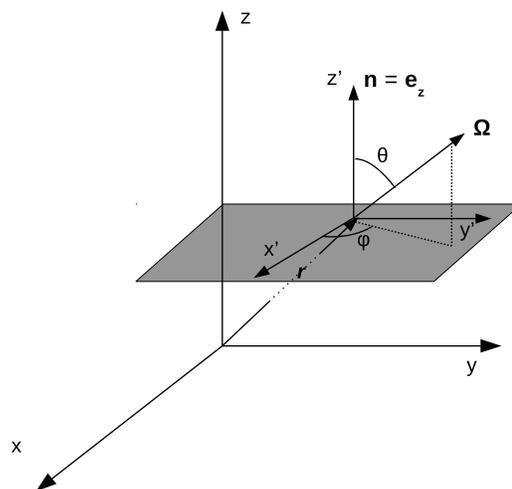


Figura 5.2: Esquema correspondiente a la aproximación de geometría plana.

en una atmósfera, ignorando así toda dependencia con x e y . En la Figura 5.2 se representa esquemáticamente esta geometría. La dirección Ω queda completamente especificada con los ángulos (ϑ, φ) , no obstante, la suposición de independencia de la intensidad específica respecto de (x, y) implica simetría azimutal del campo de radiación, esto es independencia respecto de φ , por lo que resulta $I_\nu(\mathbf{r}, \Omega, t) \rightarrow I_\nu(z, \vartheta, t)$, donde en la atmósfera z se mide hacia el exterior (opuesto a la dirección de la gravedad)². Nótese que el vector normal a cualquier elemento de superficie sobre el plano $z = \text{cte}$ coincide con el versor \mathbf{e}_z , esto es, con uno de los versores de la base canónica global para esta geometría. Por ello, al realizar cualquier traslación $(x, y, z) \rightarrow (x', y', z')$, la base se mantiene invariante, y en particular \mathbf{n} es el mismo $\forall z$.

En la geometría esférica, utilizamos coordenadas esféricas (r, Θ, Φ) para definir el vector posición, pero asumiremos independencia del campo de radiación respecto de los ángulos Θ y Φ . La Figura 5.3 ejemplifica este escenario, donde ahora el vector normal a cualquier elemento de superficie sobre la esfera de radio r es el versor \mathbf{e}_r , que depende de la posición sobre la esfera (la base es local). Tomando el plano tangente a la esfera en el punto \mathbf{r} , que denotamos con Π , y donde $\mathbf{n} \perp \Pi$, fijamos una dirección (o un eje) denotado con ξ para definir el ángulo azimutal φ correspondiente a la proyección de la dirección del haz Ω sobre Π y el eje ξ . A diferencia de la geometría

²La suposición de invarianza respecto de (x, y) implica la no existencia de dirección privilegiada alguna sobre el plano $z = \text{cte}$, por lo que el campo de radiación debe ser independiente de φ .

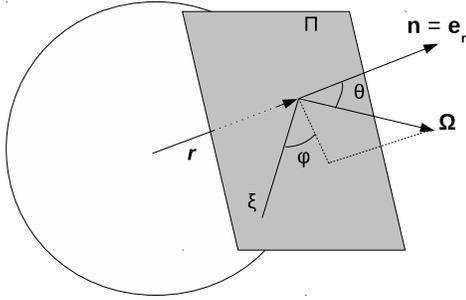


Figura 5.3: Esquema correspondiente a la aproximación de geometría esférica. El plano Π es tangente a la esfera en el punto \mathbf{r} .

plana, es claro que \mathbf{n} varía con \mathbf{r} . Nuevamente la simetría esférica asumida implica que no existe ninguna dirección privilegiada sobre Π y por tanto isotropía azimutal del campo, por lo que resulta $I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t) \rightarrow I_\nu(r, \vartheta, t)$.

Como en ambas geometrías la intensidad específica depende de una única coordenada espacial z o r (modelo unidimensional), el ángulo entre los versores $\mathbf{\Omega}$ y \mathbf{n} (ϑ) y, eventualmente el tiempo, escribimos por simplicidad, $I_\nu(\eta, \vartheta, t)$, donde $\eta = z$ para la geometría plana y $\eta = r$ para la geometría esférica. Es evidente que la intensidad no puede tener cualquier dependencia con ϑ pues toda función (bien comportada) del ángulo polar, admite un desarrollo en polinomios de Legendre de $\cos \vartheta$, por lo que en vez de la variable ϑ utilizaremos una nueva variable, $\mu \equiv \cos \vartheta$ y escribiremos entonces $I_\nu(\eta, \mu, t)$.

Bajo estas aproximaciones y notación, para la intensidad media tendremos de (5.10), que reescribimos

$$J_\nu(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t) d^2\Omega,$$

siendo $d^2\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ y $d\mu = -\sin \vartheta d\vartheta$,

$$J_\nu(\eta, t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi I_\nu(\eta, \vartheta, t) \sin \vartheta d\vartheta = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu(\eta, \mu, t) d\mu, \quad (5.13)$$

donde hemos utilizado que para $\vartheta = 0, \mu = 1$, mientras que para $\vartheta = \pi, \mu = -1$.

5.2.2. Flujo del campo de radiación

Considerando nuevamente la Figura 5.1, definimos el *flujo del campo de radiación* como el vector \mathcal{F}_ν tal que el producto escalar

$$\mathcal{F}_\nu \cdot \mathbf{n} d^2S$$

corresponde a la energía en rango de frecuencias $(\nu, \nu + d\nu)$ que atraviesa la superficie orientada d^2S en el intervalo $(t, t + dt)$. Tomemos la relación (5.1) y la reescribimos como³

$$d^6 E_\nu = I_\nu \Omega d^2 \Omega \cdot \mathbf{n} d^2 S dt d\nu,$$

y si integramos a todo el ángulo sólido resulta,

$$d^4 E_\nu = \int I_\nu \Omega d^2 \Omega \cdot \mathbf{n} d^2 S dt d\nu,$$

por lo que, de su definición,

$$\mathcal{F}_\nu = \int I_\nu \Omega d^2 \Omega$$

es el flujo del campo de radiación. En componentes, resulta

$$\mathcal{F}_{\nu_i} = \int I_\nu \Omega_i d^2 \Omega, \quad (5.14)$$

y para ambas geometrías (ver Figs. 5.2 y 5.3)

$$\Omega_1 = \sin \vartheta \cos \varphi, \quad \Omega_2 = \sin \vartheta \sin \varphi, \quad \Omega_3 = \cos \vartheta,$$

y siendo $d^2 \Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$, de (5.14)

$$\mathcal{F}_{\nu_1} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi I_\nu \sin^2 \vartheta \cos \varphi d\vartheta d\varphi$$

$$\mathcal{F}_{\nu_2} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi I_\nu \sin^2 \vartheta \sin \varphi d\vartheta d\varphi$$

por lo que para cualquiera de estas dos geometrías, por ser I_ν independiente de φ resulta $\mathcal{F}_{\nu_1} = \mathcal{F}_{\nu_2} = 0$. Por tanto, en estas dos aproximaciones, el flujo es un escalar que coincide con la componente del vector \mathcal{F}_ν en la dirección de \mathbf{n} , por lo que en (5.14) omitimos el subíndice 3 y obtenemos

$$\mathcal{F}_\nu = \int I_\nu \cos \vartheta d^2 \Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi I_\nu \underbrace{\cos \vartheta}_\mu \underbrace{\sin \vartheta d\vartheta}_{-d\mu} d\varphi,$$

y, nuevamente haciendo uso de la isotropía azimutal del campo, resulta

$$\mathcal{F}_\nu(\eta, t) = 2\pi \int_{-1}^1 I_\nu(\eta, \mu, t) \mu d\mu. \quad (5.15)$$

³Cuando no resulte indispensable, omitiremos la dependencia funcional de la energía, la intensidad específica y demás distribuciones con las variables naturales.

En el caso particular de un campo de radiación completamente isotrópico, esto es, también independiente de ϑ (o μ), (5.15) muestra que el flujo se anula; no existe un flujo neto de energía a través de la superficie d^2S . Por ello, resulta útil separar entre el flujo que atraviesa el elemento de superficie tanto en la dirección de \mathbf{n} como en la dirección opuesta. Definimos entonces el flujo saliente \mathcal{F}_ν^+ , $\mu > 0$ ($0 \leq \vartheta < \pi/2$) y el flujo entrante \mathcal{F}_ν^- , $\mu < 0$ ($\pi/2 \leq \vartheta < \pi$), por lo que

$$\mathcal{F}_\nu^+ = 2\pi \int_0^1 I_\nu \mu d\mu > 0,$$

$$\mathcal{F}_\nu^- = -2\pi \int_{-1}^0 I_\nu \mu d\mu > 0,$$

siendo

$$\mathcal{F}_\nu = \mathcal{F}_\nu^+ - \mathcal{F}_\nu^-.$$

Nuevamente, para isotropía completa resulta

$$\mathcal{F}_\nu^+ = \pi I_\nu, \quad \mathcal{F}_\nu^- = \pi I_\nu, \quad \mathcal{F}_\nu = 0.$$

Es frecuente en aplicaciones astrofísicas definir el flujo astrofísico F_ν tal que

$$\mathcal{F}_\nu = \pi F_\nu, \quad \mathcal{F}_\nu^\pm = \pi F_\nu^\pm,$$

y comparando con (5.15) resulta

$$F_\nu(\eta, t) = 2 \int_{-1}^1 I_\nu(\eta, \mu, t) \mu d\mu. \quad (5.16)$$

Notemos que en el caso particular de un campo isotrópico obtendríamos la “confusa” relación $F_\nu^\pm = I_\nu$. Esta expresión nos muestra además que las dimensiones del flujo son las mismas que las de la intensidad específica y la intensidad media si no consideramos al ster como unidad física, en caso contrario $[F_\nu] = [I_\nu] \times \text{ster}$.

Volviendo a los momentos de la intensidad específica, consideremos el momento de orden 1 respecto a μ , que llamaremos H_ν . Para la componente normal este se define

$$\begin{aligned} H_\nu(\eta, t) &= \frac{1}{4\pi} \int I_\nu(\eta, \mu, t) \cos \vartheta d^2\Omega = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi I_\nu(\eta, \mu, t) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu(\eta, \mu, t) \mu d\mu, \end{aligned}$$

y comparando con (5.15) obtenemos

$$\mathcal{F}_\nu = 4\pi H_\nu. \quad (5.17)$$

Al momento de orden 1, H_ν se lo suele denominar en la literatura, flujo de Eddington.

5.2.3. Presión de Radiación

Como hemos visto, la radiación transporta impulso por tanto una transferencia de impulso del campo de radiación al atravesar una superficie dará lugar a una presión sobre la misma. Hemos señalado ya que el impulso que transporta un fotón está dado por

$$\mathbf{p} = \frac{E_\nu}{c} \boldsymbol{\Omega}.$$

Si consideramos ahora la energía que transporta el campo de radiación (o el número de fotones en un elemento de volumen en el espacio de fases) dentro del ángulo sólido $d^2\Omega$ en el intervalo de frecuencias $(\nu, \nu + d\nu)$ entre t y $t + dt$ que atraviesa d^2S , E_ν debe reemplazarse por d^6E_ν definido en (5.1), por lo que el impulso de un haz de radiación será también un diferencial de sexto orden

$$d^6\mathbf{p} = \frac{d^6E_\nu}{c} \boldsymbol{\Omega}.$$

Valiéndonos de la Fig. 5.1, la componente normal del impulso al elemento de superficie orientado d^2S , $d^6p_n = d^6\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}$, es

$$d^6p_n = \frac{d^6E_\nu}{c} \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n}.$$

Por tanto los fotones al atravesar un elemento de superficie transfieren impulso. Reemplazando d^6E_ν por su expresión en términos de la intensidad específica, resulta

$$d^6p_n = \frac{1}{c} I_\nu d^2\Omega d\nu (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega})^2 d^2S dt$$

e integrando sobre todo el ángulo sólido y utilizando que $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \cos \vartheta$ obtenemos

$$d^4p_n = \frac{1}{c} \underbrace{\int I_\nu \cos^2 \vartheta d^2\Omega}_{P_\nu} d\nu dt d^2S,$$

donde P_ν es justamente la *presión del campo de radiación* en el intervalo $(\nu, \nu + d\nu)$ ⁴. Definimos entonces la presión de radiación como

$$P_\nu(\eta, t) = \frac{1}{c} \int I_\nu(\eta, \mu, t) \overbrace{\mu^2}^{\cos^2 \vartheta} d^2\Omega,$$

⁴La variación de la componente normal del impulso por unidad de tiempo y superficie es la definición usual de presión.

y considerando la simetría azimutal del campo, recordando que en este caso

$$\int d^2\Omega \rightarrow 2\pi \int_{-1}^1 d\mu$$

finalmente obtenemos

$$P_\nu(\eta, t) = \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^1 I_\nu(\eta, \mu, t) \mu^2 d\mu. \quad (5.18)$$

Relacionemos ahora la presión de radiación con el momento de segundo orden de la intensidad específica. Nuevamente, por definición, este momento K_ν es

$$K_\nu(\eta, t) = \frac{1}{4\pi} \int I_\nu(\eta, \mu, t) \mu^2 d^2\Omega,$$

que por la simetría azimutal de I_ν resulta

$$K_\nu(\eta, t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu(\eta, \mu, t) \mu^2 d\mu,$$

y comparando con (5.18) obtenemos

$$P_\nu = \frac{4\pi}{c} K_\nu. \quad (5.19)$$

Considerando una vez más isotropía completa del campo de radiación, resulta

$$K_\nu = \frac{1}{2} I_\nu \int_{-1}^1 \mu^2 d\mu = \frac{1}{3} I_\nu,$$

y

$$P_\nu = \frac{4\pi}{3c} I_\nu = \frac{4\pi}{3c} J_\nu,$$

donde hemos hecho uso de (5.11). Utilizando la relación (5.12), $u_\nu = (4\pi/c)J_\nu$, encontramos una relación sencilla entre la densidad espectral de energía y la presión de radiación

$$P_\nu = \frac{1}{3} u_\nu.$$

Si integramos esta última expresión a todas las frecuencias, siendo

$$u = \int_0^\infty u_\nu d\nu, \quad P_{\text{rad}} = \int_0^\infty P_\nu d\nu,$$

obtenemos que la presión y la densidad de energía de la radiación satisfacen la relación

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{3}u,$$

que es la que hemos utilizado previamente al abordar la termodinámica de la radiación. Nótese que hemos derivado la misma asumiendo solamente isotropía del campo de radiación. En una próxima sección discutiremos la hipótesis adicional que se requiere para obtener la ecuación de estado $u = aT^4$, ya que hasta el momento no ha sido necesario introducir la temperatura para caracterizar el campo de radiación a través de I_ν , J_ν , \mathcal{F}_ν y P_ν .

5.3. Interacción radiación y materia

La interacción materia-radiación, es un proceso físico muy complejo. En general tienen lugar, entre otros, intercambios de energía entre el gas estelar (o interestelar) y el campo de radiación que se describen mediante secciones eficaces atómicas y números de ocupación de los diferentes niveles de energía de las partículas constituyentes del gas. Esta formulación microscópica está fuera del alcance de este curso, por lo que haremos una descripción macroscópica de los procesos que dan lugar a remoción o incremento de la energía del campo de radiación.

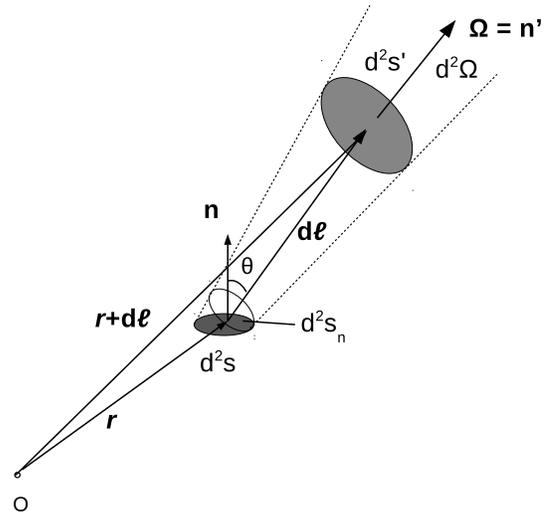


Figura 5.4: Elemento de volumen de gas y campo de radiación.

5.3.1. Opacidad del gas

Para caracterizar la energía removida del campo de radiación, utilizamos un coeficiente macroscópico $k_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, t)$, denominado coeficiente de opacidad o extinción del gas. Consideremos un elemento de volumen del gas de sección transversal d^2S_n y longitud $d\ell = |\mathbf{d}\ell|$, tal como se ilustra en la Fig. 5.4. Supondremos que en dicho elemento de volumen existe un campo de radiación en la dirección $\boldsymbol{\Omega}$. La interacción del gas con el campo de radiación entre $\mathbf{r} = (x, y, z)$ y $\mathbf{r} + \mathbf{d}\ell = (x + dx, y + dy, z + dz)$, como se dijo, entre otros procesos remueve energía de un haz incidente de intensidad específica $I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, t)$.

La energía del campo de radiación en \mathbf{r} , que atraviesa el elemento de superficie d^2S en la dirección $\boldsymbol{\Omega}$, dentro del ángulo sólido $d^2\Omega$, en el intervalo de frecuencias $(\nu, \nu + d\nu)$ y entre $(t, t + dt)$ es

$$d^6 E_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, t) = I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, t) d^2\Omega d\nu \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega} d^2S dt. \quad (5.20)$$

Por otra parte, la energía que atraviesa d^2S' en $\mathbf{r} + \mathbf{d}\ell$ en el intervalo $(t', t' + dt')$ con $t' = t + dt$, y $dt' = dt$,⁵ en la dirección $\boldsymbol{\Omega}$ dentro del mismo ángulo sólido e intervalo de frecuencias y que fluirá hacia otro elemento de volumen, será⁶

$$d^6 E_\nu(\mathbf{r} + \mathbf{d}\ell, \boldsymbol{\Omega}, t + dt) = I_\nu(\mathbf{r} + \mathbf{d}\ell, \boldsymbol{\Omega}, t + dt) d^2\Omega d\nu d^2S' dt, \quad (5.21)$$

aquí incluimos el elemento de superficie d^2S' pues tomamos la sección normal al haz en $\mathbf{r} + \mathbf{d}\ell$, por tanto $\boldsymbol{\Omega} \equiv \mathbf{n}'$, y recordando que $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega} d^2S = d^2S_n = d^2S' + \mathcal{O}(d\ell)$, la diferencia de energía entre $\mathbf{r} + \mathbf{d}\ell$ y \mathbf{r} o, equivalentemente, entre $(x + dx, y + dy, z + dz)$ y (x, y, z) será

$$[I_\nu(\mathbf{r} + \mathbf{d}\ell, \boldsymbol{\Omega}, t + dt) - I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, t)] d^2\Omega d\nu \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega} d^2S dt,$$

el término entre corchetes, para una variación infinitesimal, resulta

$$\frac{\partial I_\nu}{\partial x} dx + \frac{\partial I_\nu}{\partial y} dy + \frac{\partial I_\nu}{\partial z} dz + \frac{\partial I_\nu}{\partial t} dt = \boldsymbol{\nabla} I_\nu \cdot \mathbf{d}\ell + \frac{\partial I_\nu}{\partial t} dt = dI_\nu,$$

por lo que la diferencia de energía es

$$d^7 E_\nu = dI_\nu d^2\Omega d\nu \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega} d^2S dt. \quad (5.22)$$

⁵Es claro que el intervalo infinitesimal de tiempo en el que la energía cruza el elemento de superficie d^2S no tiene porqué ser diferente al intervalo en el que cruza el elemento de superficie d^2S' .

⁶Nótese que aquí consideramos la variación espacial y temporal de la energía en cada punto, lo que no fue necesario considerar para definir la intensidad específica, pues la misma está definida en un punto del espacio y en un instante dado.

Definimos entonces el coeficiente de opacidad del gas, $k_\nu > 0$, de manera tal que la disminución de la energía del campo entre \mathbf{r} y $\mathbf{r} + d\boldsymbol{\ell}$ resulte proporcional a la energía incidente en \mathbf{r} y a la longitud del elemento de volumen de gas $d\ell$ en la dirección $\boldsymbol{\Omega}$, por tanto:

$$d^7 E_\nu = -k_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, t) \overbrace{I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, t) d^2 \Omega d\nu \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega} d^2 S dt}^{d^6 E_\nu} d\ell, \quad (5.23)$$

donde hemos utilizado (5.20) para la energía incidente y el signo negativo es debido a que el cambio de energía es negativo. No considerando otros procesos que den lugar a variaciones de energía del campo de radiación es claro que de (5.22) y (5.23) obtenemos

$$dI_\nu = -k_\nu I_\nu d\ell. \quad (5.24)$$

De esta última ecuación vemos que las dimensiones de k_ν son inversas de distancia, por ej., $\text{cm}^{-1} = \text{cm}^2/\text{cm}^3$, por lo que este coeficiente suele denominarse *opacidad volumétrica*. Alternativamente, se define la *opacidad específica*, κ_ν , tal que $k_\nu = \rho \kappa_\nu$, donde ρ es la densidad del gas y $[\kappa_\nu] = \text{cm}^2 \text{g}^{-1}$. Por otra parte, si n denota la densidad numérica del gas, se define la *sección eficaz*, σ_ν , de manera que $k_\nu = n \sigma_\nu$, siendo $[\sigma_\nu] = \text{cm}^2$.

Para medios estáticos y en ausencia de direcciones privilegiadas a escala atómica (que las produciría por ejemplo un campo magnético), el coeficiente resulta isotrópico, por lo que $k_\nu(\mathbf{r}, t)$.

Los procesos de absorción (y de emisión como veremos) se describen mediante un tratamiento cuántico de las partículas materiales presentes en el gas estelar. Existen muchas formas en las que las partículas pueden interactuar con un fotón. En términos amplios, la opacidad puede dividirse en opacidad de la *línea* y la opacidad del *continuo*. La opacidad de la línea tiene su origen por la absorción de fotones por un átomo de manera que un electrón pasa de un nivel de energía a otro superior y por lo tanto sólo ocurre para frecuencias específicas. En la atmósfera de una estrella este proceso da lugar a las líneas espectrales. Por otro lado, la opacidad del continuo es la que tiene relevancia en el interior estelar. Los formulación física que describe estos procesos de interacción entre fotones y partículas muestra que ellos ocurren sobre un extenso rango de frecuencias y no a una frecuencia específica; y este el el origen del término *continuo*.

En general la opacidad tiene dos componentes físicamente diferentes, una debida a los procesos de *absorción real* o *absorción verdadera*, esto es, a los procesos en los cuales la energía de los fotones incidentes es transferida al gas en forma de energía cinética. En este caso la energía del campo de radiación (en un intervalo de frecuencias

y direcciones) pasa íntegramente al gas aumentando su temperatura, los fotones se han “termalizado” es el término usual para referirse a este mecanismo de absorción, y el coeficiente de opacidad correspondiente lo denotamos k_ν^a . Mecanismos típicos que dan lugar a absorción verdadera y que dependen de la frecuencia son

- transiciones libre–libre,
- transiciones ligado–libre,
- transiciones ligado–ligado.

Por otra parte, existen procesos en los que prácticamente no existe intercambio de energía entre el campo de radiación y el gas, sino que producto de la interacción de las partículas del gas con los fotones, éstos resultan dispersados en una dirección diferente a la incidente y por tanto existe una reducción de la energía del campo de radiación en dicha dirección. A este mecanismo se lo conoce habitualmente como *scattering* o *dispersión* y su correspondiente coeficiente lo denominamos k_ν^s . Ejemplos de procesos de scattering son

- dispersión Thompson o electrónica: interacción fotón–electrón libre, es independiente de la frecuencia,
- dispersión Compton: similar a la dispersión Thompson pero para electrones relativistas, que depende de la frecuencia
- dispersión Rayleigh: interacción fotón–átomo/molécula, típica en las atmósferas planetarias.

El coeficiente de opacidad total resulta entonces $k_\nu = k_\nu^a + k_\nu^s$. De la discusión anterior, resulta claro que el coeficiente macroscópico k_ν^a dependerá fuertemente, entre otros, de las propiedades termodinámicas locales del gas, pues éstas determinarán en última instancia los niveles de ocupación atómica, grado de ionización, etc., por lo que dependerá de la posición a través de las variables termodinámicas, $k_\nu^a(\rho, T, C)$, siendo C la composición química. En cambio, k_ν^s dependerá mucho más fuertemente del campo de radiación que del estado termodinámico del gas, como veremos más adelante.

La correcta derivación de una expresión aproximada para el coeficiente de opacidad en los ejemplos mencionados es sumamente compleja, y debe hacerse en el marco de la mecánica cuántica, que excede los alcances de este curso. De hecho, en general se utilizan tablas de opacidades obtenidas numéricamente en lugar de las aproximaciones analíticas más rigurosas.

No obstante, mencionemos que el coeficiente de opacidad total incluye todos los procesos de absorción habituales en una estrella: libre-libre, ligado-libre, ligado-ligado, dispersión Thompson (además de otros procesos como por ejemplo el ion negativo del hidrógeno). Existen expresiones muy aproximadas derivadas clásicamente, para los procesos de absorción ligado-libre, libre-libre que están dados por lo que se denomina Ley de Kramers donde $k \equiv \langle k_\nu \rangle \sim T^{-7/2}$ donde $\langle k_\nu \rangle$ denota el coeficiente de opacidad promediado sobre todas las frecuencias (se discutirá más adelante). En cambio en el caso de la dispersión Thompson, el coeficiente de opacidad es independiente de la temperatura y la frecuencia. En el Apéndice a este capítulo se brinda una discusión muy acotada de estos procesos de absorción.

La ecuación (5.24), $dI_\nu = -k_\nu I_\nu d\ell$, nos dice que la variación de energía del haz de radiación a lo largo de una distancia $d\ell$ en la dirección Ω a través de un gas se traduce en una reducción de la intensidad específica. El coeficiente de opacidad puede relacionarse fácilmente con el camino libre medio de los fotones de una determinada frecuencia. En efecto, supongamos que existe un campo de radiación estacionario propagándose en la dirección x , de intensidad incidente $I_\nu(0)$ en $x = 0$, de (5.24) tendremos que la variación de la intensidad específica (variación de energía) entre x y $x + dx$ es

$$dI_\nu(x) = -k_\nu I_\nu(x) dx,$$

asumiendo que k_ν es independiente de x , resulta

$$\frac{dI_\nu(x)}{I_\nu(x)} = -k_\nu dx \quad \rightarrow \quad I_\nu(x) = I_\nu(0) \exp(-k_\nu x),$$

por lo que en el intervalo $(x, x + dx)$ la intensidad se reduce en

$$\left| \frac{dI_\nu(x)}{I_\nu(0)} \right| = k_\nu \exp(-k_\nu x) dx.$$

Es inmediato verificar que

$$k_\nu \int_0^\infty \exp(-k_\nu x) dx = k_\nu \left[\frac{\exp(-k_\nu x)}{-k_\nu} \right]_0^\infty = 1,$$

por lo que

$$k_\nu \exp(-k_\nu x) dx = dP(x)$$

es la probabilidad de que los fotones se encuentren en el intervalo $(x, x + dx)$, cuanto mayor sea x (para un k_ν dado) menor será la probabilidad de que los fotones alcancen

esa distancia en el gas debido a la opacidad del mismo⁷. El camino libre medio de los fotones es por definición el valor medio de la distancia que recorren los fotones a lo largo de toda la dirección en la que viajan

$$\lambda_\nu = \int_0^\infty x \overbrace{k_\nu \exp(-k_\nu x) dx}^{dP(x)},$$

integrando por partes, haciendo $u = x$, $dv = \exp(-k_\nu x) dx$, por lo que $du = dx$, $v = -\exp(-k_\nu x)/k_\nu$ la integral será

$$\lambda_\nu = k_\nu \underbrace{\left[-x \frac{\exp(-k_\nu x)}{k_\nu} \right]_0^\infty}_{=0} + k_\nu \int_0^\infty \frac{\exp(-k_\nu x)}{k_\nu} dx,$$

que se reduce a

$$\lambda_\nu = \int_0^\infty \exp(-k_\nu x) dx = -\frac{1}{k_\nu} [\exp(-k_\nu x)]_0^\infty,$$

por lo que se obtiene

$$\lambda_\nu = \frac{1}{k_\nu}.$$

Esta relación nos muestra que el coeficiente de opacidad volumétrico resulta ser el inverso del camino libre medio de los fotones en el gas, para un intervalo de frecuencia $(\nu, \nu + d\nu)$. A mayor camino libre medio, más transparente es el gas a dichos fotones, ya que pueden recorrer una distancia considerable antes de ser absorbidos por el gas. Por el contrario, un camino libre muy pequeño, implica que los fotones son destruidos luego de viajar un trayecto muy reducido en el medio, el gas es opaco en esta frecuencia. Para el Sol, considerando como fuente de opacidad la dispersión electrónica (ver apéndice a este capítulo), $\lambda \sim 2$ cm, lo que implica que el gas en el interior estelar es realmente muy opaco.

Similarmente puede definirse un tiempo libre medio $\bar{t}_\nu = \lambda_\nu/c = (ck_\nu)^{-1}$, que provee una escala de tiempo para que los fotones con frecuencia $(\nu, \nu + d\nu)$ sean destruidos al interactuar con el gas. En general, esta escala de tiempo es mucho más pequeña que cualquier otra escala de tiempo de evolución o cambio de la estructura estelar.

⁷Asumir k_ν constante (respecto de x), implica que la absorción es uniforme a lo largo de toda la dirección, por lo que naturalmente se obtiene una distribución tipo Poisson, mas precisamente, una exponencial, cuyo valor medio es k_ν^{-1} .

En función de esta discusión, resulta conveniente introducir la variable adimensional τ_ν ,

$$d\tau_\nu = k_\nu dl \quad (5.25)$$

que llamamos *profundidad óptica* y (5.24), $dI_\nu = -k_\nu I_\nu dl$, se reescribe como

$$dI_\nu = -I_\nu d\tau_\nu. \quad (5.26)$$

Así definida, la profundidad óptica proporciona una medida de la transparencia u opacidad del medio a los fotones con frecuencia $(\nu, \nu + d\nu)$. En efecto, si en una dirección preestablecida la profundidad óptica entre ℓ_0 y $\ell_1 > \ell_0$ es

$$\tau_\nu(\ell_0, \ell_1) = \int_{\ell_0}^{\ell_1} k_\nu dl = \int_{\ell_0}^{\ell_1} \frac{d\ell}{\lambda_\nu},$$

y si denotamos con $\Delta\ell = \ell_1 - \ell_0$, podemos aproximar

$$\tau_\nu \approx \frac{\Delta\ell}{\lambda_\nu}.$$

Para un medio opaco (u ópticamente grueso) a este intervalo de frecuencias, será $\tau_\nu \gg 1$ pues $\lambda_\nu \ll \Delta\ell$, el camino libre medio es muy pequeño frente a la distancia considerada. Por el contrario, para un medio transparente (ópticamente delgado) para estas frecuencias, será $\tau_\nu \ll 1$, pues $\lambda_\nu \gg \Delta\ell$, el camino libre medio es grande y prácticamente no ocurrirán procesos de destrucción de fotones.

Por tanto, si entre el gas y la radiación solo existen procesos de absorción, el cambio en la intensidad específica resulta de integrar (5.26) entre 0 y ℓ ,

$$\frac{dI_\nu}{I_\nu} = -d\tau_\nu, \quad \rightarrow \quad \ln \left(\frac{I_\nu(\ell)}{I_\nu(0)} \right) = -\tau_\nu(\ell),$$

obteniendo

$$I_\nu(\ell) = I_\nu(0) \exp(-\tau_\nu(\ell)), \quad \tau_\nu(\ell) = \int_0^\ell k_\nu(s) ds.$$

Como ya hemos mencionado, la dependencia del coeficiente de opacidad verdadera con la posición, es a través de las variables termodinámicas del gas.

5.3.2. Emisividad del gas

Además de absorber energía, para llegar a un estado de equilibrio, el gas debe ser también una fuente de radiación. Los átomos pueden convertir su energía térmica en radiación, por una excitación colisional y desexcitación radiativa o también habiendo

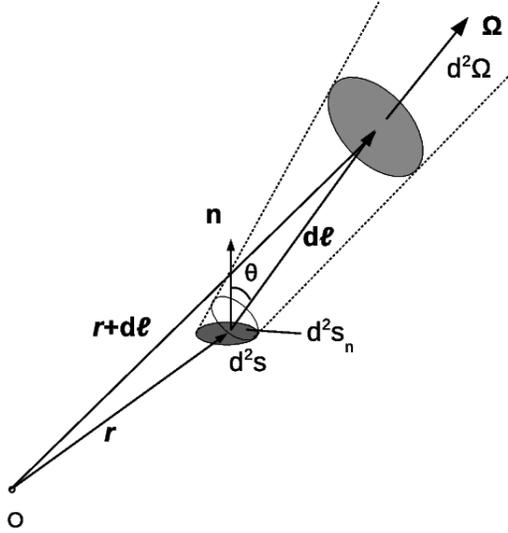


Figura 5.5: Elemento de volumen de gas y campo de radiación.

sido excitados radiativamente, se produzca una desexcitación radiativa. Macroscópicamente, imaginemos un elemento de volumen del gas d^3r , tal como muestra la Fig. 5.5. Definimos el coeficiente de *emisividad volumétrica*, χ_ν , de forma tal que la energía por unidad de volumen que emite el gas en el punto \mathbf{r} , en la dirección $\mathbf{\Omega}$ dentro del ángulo sólido $d^2\Omega$, en el intervalo de frecuencias $(\nu, \nu + d\nu)$ y entre $(t, t + dt)$ resulta

$$d^7 E_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t) = \chi_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t) d^3r d\nu d^2\Omega dt. \quad (5.27)$$

De su definición, resulta claro que χ_ν es una distribución de la emisión de energía en el espacio, en direcciones y frecuencias. Las dimensiones de este coeficiente serán entonces $[\chi_\nu] = [\text{erg cm}^{-3} \text{ster}^{-1} \text{s}^{-1} \text{Hz}^{-1}]$.

De la Fig. 5.5 y discusión anterior, $d^3r = \mathbf{n} \cdot \mathbf{\Omega} d^2S d\ell$, por tanto

$$d^7 E_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t) = \chi_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t) d^2\Omega d\nu \mathbf{n} \cdot \mathbf{\Omega} d^2S dt d\ell, \quad (5.28)$$

y, siguiendo los mismos argumentos y derivaciones realizadas al tratar la opacidad, ecuaciones (5.20–5.22), obtenemos que la variación de energía del campo de radiación entre los puntos \mathbf{r} y $\mathbf{r} + d\ell$ es

$$d^7 E_\nu = dI_\nu d^2\Omega d\nu \mathbf{n} \cdot \mathbf{\Omega} d^2S dt. \quad (5.29)$$

Nuevamente, no existiendo otros procesos adicionales de creación o destrucción de fotones que emisión, de (5.29) y (5.28) obtenemos

$$dI_\nu = \chi_\nu d\ell. \quad (5.30)$$

En la descripción macroscópica de la absorción, distinguimos entre los procesos donde los fotones son absorbidos por el gas, termalizándose y es lo que denominamos absorción verdadera. Similarmente, denominamos *emisión verdadera* a aquellos procesos en los que parte de la energía térmica del gas crea fotones que pasan a incrementar el campo de radiación en una determinada dirección e intervalo de frecuencias. Un mecanismo, ya mencionado, es la excitación colisional de los átomos (a partir de la energía cinética del gas) y luego se produce una desexcitación radiativa. En el caso de scattering, ambos procesos los de absorción y emisión, están relacionados. Por tanto el coeficiente de emisividad tendrá dos componentes, una debida a la emisión verdadera, χ_ν^e , y otra debida al scattering, χ_ν^s y $\chi_\nu = \chi_\nu^e + \chi_\nu^s$.

Para la descripción del scattering es conveniente introducir dos funciones de distribución, por un lado $g(\mathbf{\Omega}', \mathbf{\Omega})$, tal que

$$g(\mathbf{\Omega}', \mathbf{\Omega}) d^2\Omega'$$

es la probabilidad de que fotones incidentes desde la dirección $\mathbf{\Omega}'$, dentro del ángulo sólido $d^2\Omega'$, resulten dispersados en la dirección $\mathbf{\Omega}$. Asimismo, definimos $\Psi(\nu', \nu)$ tal que

$$\Psi(\nu', \nu) d\nu'$$

es la probabilidad de que los fotones incidentes de frecuencia ν' , dentro del intervalo $(\nu', \nu' + d\nu')$ resulten reemitidos en la frecuencia ν .

Consideremos un haz de radiación que incide sobre un elemento de volumen del gas, desde la dirección $\mathbf{\Omega}'$, con frecuencia ν' e intensidad específica $I_{\nu'}(\mathbf{\Omega}')$. Sea $k_{\nu'}^s$ el coeficiente de absorción del gas, por lo que este elemento de volumen producirá cierta absorción que da lugar a una reducción de la intensidad correspondiente a la frecuencia ν' y dirección $\mathbf{\Omega}'$, y viene dado por (5.24)⁸,

$$dI_{\nu'}(\mathbf{\Omega}') = -I_{\nu'}(\mathbf{\Omega}') k_{\nu'}^s d\ell.$$

Esta energía removida del campo de radiación será reemitida en la dirección $\mathbf{\Omega}$ y en la frecuencia ν , y estará dada por

⁸Por simplicidad de notación, solo se incluye la dependencia con la dirección y la frecuencia.

$$d^4 I_\nu(\Omega) = -dI_{\nu'}(\Omega') \underbrace{g(\Omega', \Omega) d^2 \Omega'}_{\text{Prob. } \Omega' \rightarrow \Omega} \underbrace{\Psi(\nu', \nu) d\nu'}_{\text{Prob. } \nu' \rightarrow \nu},$$

por tanto

$$d^4 I_\nu(\Omega) = I_{\nu'}(\Omega') k_\nu^s g(\Omega', \Omega) d^2 \Omega' \Psi(\nu', \nu) d\nu' d\ell.$$

Si sumamos las contribuciones de todas las direcciones Ω' y todas las frecuencias ν' que aportan al campo de radiación en la dirección Ω y con frecuencia ν , tendremos

$$dI_\nu(\Omega) = \int_{\nu'} \int_{\Omega'} I_{\nu'}(\Omega') k_\nu^s g(\Omega', \Omega) d^2 \Omega' \Psi(\nu', \nu) d\nu' d\ell,$$

donde la integral sobre las direcciones se extiende a los 4π ster y sobre las frecuencias a $0 < \nu' < \infty$. Comparando esta última expresión con (5.30), obtenemos el coeficiente de emisión por scattering

$$\chi_\nu^s(\Omega) = \int_0^\infty \int_{4\pi} I_{\nu'}(\Omega') k_\nu^s g(\Omega', \Omega) d^2 \Omega' \Psi(\nu', \nu) d\nu'. \quad (5.31)$$

En el caso particular de scattering coherente e isotrópico, que es una buena aproximación (dispersión electrónica por ejemplo), tendremos que

$$g(\Omega', \Omega) = \frac{1}{4\pi}, \quad \Psi(\nu', \nu) = \delta(\nu' - \nu),$$

donde $\delta(x)$ es la δ de Dirac, y la expresión para el coeficiente de emisión por scattering se reduce a

$$\chi_\nu^s(\Omega) = k_\nu^s \underbrace{\frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} I_\nu(\Omega') d^2 \Omega'}_{J_\nu},$$

donde hemos señalado la definición de la intensidad media dada en (5.11). Finalmente obtenemos que los coeficientes de emisión y absorción por scattering están relacionados por

$$\chi_\nu^s = k_\nu^s J_\nu. \quad (5.32)$$

Esta expresión muestra claramente que el scattering depende del campo de radiación y no de la termodinámica del gas.

5.4. Ecuación de transporte radiativo

Como hemos visto, los cambios en la intensidad específica son debidos al acoplamiento entre la materia y la radiación que dan lugar a intercambios de energía que se expresan en términos de variaciones de la intensidad. El cambio en la intensidad específica producto de la interacción materia-radiación, cuando los fotones atraviesan un elemento de volumen del gas de longitud $d\ell$ en una determinada dirección resulta

$$\frac{dI_\nu}{d\ell} = \left(\frac{dI_\nu}{d\ell}\right)_{\text{abs}} + \left(\frac{dI_\nu}{d\ell}\right)_{\text{em}},$$

donde

$$\left(\frac{dI_\nu}{d\ell}\right)_{\text{abs}} = -k_\nu I_\nu, \quad k_\nu = k_\nu^a + k_\nu^s$$

y

$$\left(\frac{dI_\nu}{d\ell}\right)_{\text{em}} = \chi_\nu, \quad \chi_\nu = \chi_\nu^e + \chi_\nu^s,$$

Así escrita, esta expresión para la variación de la intensidad específica, vale para cualquier dirección, pues está formulada justamente en la dirección de propagación de la radiación. Parametrizando entonces la trayectoria de los fotones con el elemento de arco $d\ell = cdt$, la ecuación de transporte queda

$$\frac{dI_\nu}{d\ell} = -k_\nu I_\nu + \chi_\nu,$$

y utilizando la profundidad óptica (5.25), toma la forma

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + \frac{\chi_\nu}{k_\nu}.$$

El cociente

$$S_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, t) = \frac{\chi_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, t)}{k_\nu(\mathbf{r}, t)} \quad (5.33)$$

se denomina *función fuente*, por lo que finalmente la ecuación de transporte en la dirección del haz toma la forma

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu. \quad (5.34)$$

Toda la información relativa al transporte radiativo en un medio, cuando se utiliza la profundidad óptica como variable independiente, está incluida en la función fuente,

por ello lleva este nombre, y sus dimensiones coinciden con las de I_ν . La interpretación física de la función fuente es simple. De la definición (5.27) para el coeficiente de emisión χ_ν —que da cuenta de la energía emitida por unidad de volumen con frecuencia $(\nu, \nu + d\nu)$ en la dirección Ω dentro del ángulo sólido $d^2\Omega$ y en el intervalo $(t, t + dt)$ —surge naturalmente que el número de fotones emitidos en el rango de frecuencias $(\nu, \nu + d\nu)$ por un elemento de volumen en la dirección Ω , dentro del ángulo sólido $d^2\Omega$, en el intervalo dt es (siguiendo la geometría de la Fig. 5.5)

$$d^7 N_{\text{em}} = \frac{\chi_\nu}{h\nu} d^2\Omega \overbrace{d^3r} d^2 S_n d\ell d\nu dt,$$

donde $h\nu$ corresponde a la energía de un fotón en el intervalo de frecuencias definido y, si consideramos los fotones emitidos en todas las direcciones posibles,

$$d^5 N_{\text{em}} = \int_{4\pi} \frac{\chi_\nu}{h\nu} d^2\Omega d^2 S_n d\ell d\nu dt,$$

por simplicidad, suponemos χ_ν isotrópico, por tanto

$$d^5 N_{\text{em}} = \frac{4\pi}{h\nu} \chi_\nu d^2 S_n d\ell d\nu dt,$$

y, si en vez de $d\ell$ utilizamos la profundidad óptica como variable, $d\tau_\nu = k_\nu d\ell$, resulta

$$d^5 N_{\text{em}} = \frac{4\pi}{h\nu} \frac{\chi_\nu}{k_\nu} d\tau_\nu d^2 S_n d\nu dt = \frac{4\pi}{h\nu} S_\nu(\tau_\nu) d\tau_\nu d^2 S_n d\nu dt.$$

Vemos así que la función fuente es proporcional a la función de distribución del número de fotones emitidos con frecuencia $(\nu, \nu + d\nu)$ por unidad de tiempo y superficie normal en el intervalo $(\tau_\nu, \tau_\nu + d\tau_\nu)$. Similarmente puede encontrarse una relación explícita entre el número de fotones absorbidos con la intensidad específica (J_ν en caso de isotropía) y la profundidad óptica.

La ecuación de transporte (5.34), luce como una ecuación diferencial ordinaria de primer orden en la variable τ_ν , una vez especificada la función fuente. No obstante, en general, resulta una ecuación mucho más complicada, pues la expresión general de S_ν es

$$S_\nu = \frac{\chi_\nu^e + \chi_\nu^s}{k_\nu^a + k_\nu^s},$$

y teniendo en cuenta la expresión para el coeficiente de emisión por scattering (5.31) esta última resulta

$$S_\nu = \frac{1}{k_\nu^a + k_\nu^s} \left\{ \chi_\nu^e + \int_0^\infty \int_{4\pi} I_{\nu'}(\Omega') k_{\nu'}^s g(\Omega', \Omega) d^2\Omega' \Psi(\nu', \nu) d\nu' \right\},$$

por lo que es claro que la ecuación de transporte dada por (5.34) es una ecuación integro-diferencial de muy compleja solución.

No obstante busquemos una solución formal a la ecuación de transporte, tratándola como una ecuación diferencial de primer orden. Multiplicando ambos miembros de (5.34) por $\exp(\tau_\nu)$ podemos escribir

$$\exp(\tau_\nu) \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} + I_\nu \exp(\tau_\nu) = S_\nu \exp(\tau_\nu),$$

que se reduce a

$$\frac{d}{d\tau_\nu} (I_\nu \exp(\tau_\nu)) = S_\nu \exp(\tau_\nu),$$

si tomamos como origen de la profundidad óptica $\tau_\nu = 0$, integramos entre $(0, \tau_\nu)$,

$$I_\nu(\tau_\nu) \exp(\tau_\nu) - I_\nu(0) = \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t_\nu) \exp(t_\nu) dt_\nu,$$

que finalmente resulta

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0) \exp(-\tau_\nu) + \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t_\nu) \exp(t_\nu - \tau_\nu) dt_\nu. \quad (5.35)$$

Es claro, como se ha señalado, que esta expresión no resuelve la ecuación de transporte, porque S_ν en general dependerá de I_ν . En caso que se pueda despreciar el scattering frente a los procesos de absorción verdadera, para conocer $I_\nu(\tau_\nu)$ debemos especificar la función fuente, que dependerá de la termodinámica del gas. La solución formal (5.35) tiene una interpretación física simple; la intensidad específica en el punto de observación τ_ν es el resultado de:

- i) la intensidad incidente atenuada por el factor $\exp(-\tau_\nu)$, debido a la absorción en el intervalo $(0, \tau_\nu)$,
- ii) la integral de la función fuente atenuada por el factor $\exp(t_\nu - \tau_\nu)$, siendo $t_\nu - \tau_\nu$ la profundidad óptica entre los puntos de emisión y observación.

Ejemplo

Consideremos un ejemplo sencillo, suponiendo que la función fuente es aproximadamente constante $S_\nu(t_\nu) \approx S_\nu$ y que en $\tau_\nu = 0$ la intensidad incidente es $I_\nu(0)$.

La solución de (5.35) es,

$$I_\nu(\tau_\nu) \approx I_\nu(0) \exp(-\tau_\nu) + S_\nu \exp(-\tau_\nu) \int_0^{\tau_\nu} \exp(t_\nu) dt_\nu.$$

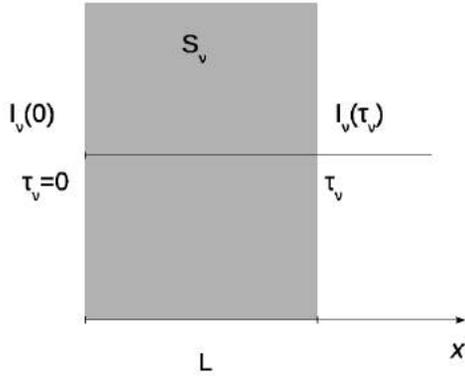


Figura 5.6: Escenario simple para la resolución de la ecuación (5.35).

La intensidad que emerge en el borde en τ_ν , finito, es

$$I_\nu(\tau_\nu) \approx I_\nu(0) \exp(-\tau_\nu) + S_\nu \exp(-\tau_\nu)(\exp(\tau_\nu) - 1) \approx I_\nu(0) \exp(-\tau_\nu) + S_\nu(1 - \exp(-\tau_\nu)).$$

Supongamos una situación como la que se muestra en la Fig. 5.6, donde la radiación atraviesa un elemento elemento de volumen de gas de espesor L en la dirección x y que el coeficiente de absorción k_ν es independiente de x .

Consideremos dos casos asintóticos, $\tau_\nu \gg 1$ y $\tau_\nu \ll 1$ de manera que

$$\exp(-\tau_\nu) \rightarrow 0, \quad \tau_\nu \gg 1; \quad \exp(-\tau_\nu) \approx 1 - \tau_\nu, \quad \tau_\nu \ll 1.$$

En estos dos límites, la intensidad emergente resulta

$$I_\nu(\tau_\nu) \approx S_\nu, \quad \tau_\nu \gg 1; \quad I_\nu(\tau_\nu) \approx I_\nu(0)(1 - \tau_\nu) + S_\nu \tau_\nu \approx I_\nu(0) + S_\nu \tau_\nu \quad \tau_\nu \ll 1.$$

Como hemos discutido, la función fuente da cuenta de los fotones emitidos por intervalo de profundidad óptica. En el caso de un medio ópticamente delgado ($\tau_\nu \ll 1$), existe una escasa absorción, el camino libre medio es muy grande por lo que prácticamente todos los fotones creados en el intervalo $(0, \tau_\nu)$ así como los incidentes contribuyen a la intensidad emergente en el punto τ_ν ; el valor que esta toma puede reescribirse en términos del espesor de la capa L ya que $\tau_\nu = k_\nu L$,

$$I_\nu(L) \approx I_\nu(0) + \frac{\chi_\nu}{k_\nu} \underbrace{k_\nu L}_{\tau_\nu} = I_\nu(0) + \chi_\nu L.$$

Para un medio ópticamente grueso ($\tau_\nu \gg 1$), por el contrario, el camino libre medio es muy pequeño la mayoría de los fotones son destruidos, por tanto la intensidad emergente en τ_ν tomará el valor local de la función fuente en dicho punto.

5.4.1. Ecuación de transporte radiativo en geometría plana

Reduzcamos ahora la ecuación de transporte

$$\frac{dI_\nu}{d\ell} = -k_\nu I_\nu + \chi_\nu$$

a la geometría plana. Para ello utilizamos coordenadas cartesianas relativas a un origen arbitrario O, tal como las Figs. 5.1 o 5.5 muestran, y siendo $d\ell = cdt$, la derivada respecto de la profundidad geométrica en el medio, se puede reescribir como

$$\frac{dI_\nu}{d\ell} = \frac{\partial I_\nu}{\partial t} \underbrace{\frac{dt}{d\ell}}_{\frac{1}{c}} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial I_\nu}{\partial x_k} \underbrace{\frac{dx_k}{dt}}_{c\Omega_k} \underbrace{\frac{dt}{d\ell}}_{\frac{1}{c}},$$

por lo que la ecuación de transporte radiativo en coordenadas cartesianas respecto a un origen arbitrario tiene la forma

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\nabla} I_\nu = -k_\nu I_\nu + \chi_\nu, \quad (5.36)$$

y queda expresada como una ecuación cinética de conservación de energía del campo de radiación, aspecto que retomaremos más adelante.

Previamente introdujimos el tiempo libre medio para los fotones, $\bar{t}_\nu = (ck_\nu)^{-1}$, y señalamos que esta escala de tiempo es mucho menor que cualquier tiempo característico de cambios de la estructura estelar. Esto implica que podemos asumir la hipótesis de estado estacionario, pues el transporte de fotones es mucho más rápido frente a cambios evolutivos estelares. Así, en la ecuación de transporte (5.36) asumiremos que

$$\frac{\partial I_\nu}{\partial t} = 0.$$

De (5.36), suponiendo entonces estado estacionario e independencia del campo de radiación respecto de x e y , el primer miembro queda

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\nabla} I_\nu = \Omega_z \frac{dI_\nu}{dz} = \cos \vartheta \frac{dI_\nu}{dz} = \mu \frac{dI_\nu}{dz},$$

por lo que la ecuación de transporte en geometría plana adopta la forma⁹

$$\mu \frac{dI_\nu}{dz} = -k_\nu I_\nu + \chi_\nu,$$

⁹Escribimos d/dz en vez de $\partial/\partial z$ pues en esta geometría no aparecen variaciones de I_ν respecto a la dirección.

y utilizando la profundidad óptica en lugar de la geométrica medida en sentido inverso a z

$$d\tau_\nu = -k_\nu dz,$$

obtenemos

$$\mu \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - S_\nu. \quad (5.37)$$

Resulta claro que en geometría plana, I_ν depende de la dirección μ en forma paramétrica, al igual que en el caso general dado por (5.36). Al definir la profundidad óptica en sentido inverso a z , implica que τ_ν crece hacia el interior; en una atmósfera, $\tau_\nu = 0$ en el borde exterior y para una atmósfera semi-infinita, $0 \leq \tau_\nu < \infty$.

La solución para I_ν de (5.37) requiere del conocimiento de la función fuente y como ya ha sido señalado, en su forma general S_ν depende del campo de radiación. No obstante, procedamos como en el caso general (5.34), y busquemos una solución formal. Siguiendo el mismo esquema que en el caso anterior, multiplicamos ambos miembros de (5.37) por $\exp(-\tau_\nu/\mu)$ y escribimos

$$\left(\mu \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} - I_\nu \right) \exp(-\tau_\nu/\mu) = -S_\nu \exp(-\tau_\nu/\mu),$$

que puede reescribirse de la forma

$$\frac{d}{d\tau_\nu} (\mu I_\nu \exp(-\tau_\nu/\mu)) = -S_\nu \exp(-\tau_\nu/\mu),$$

por lo que integrando entre τ_{ν_1} y τ_{ν_2} resulta

$$\begin{aligned} I_\nu(\tau_{\nu_2}, \mu) \exp(-\tau_{\nu_2}/\mu) - I_\nu(\tau_{\nu_1}, \mu) \exp(-\tau_{\nu_1}/\mu) = \\ - \int_{\tau_{\nu_1}}^{\tau_{\nu_2}} S(t_\nu) \exp(-t_\nu/\mu) \frac{dt_\nu}{\mu}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

En la Fig. 5.7 representamos este escenario para un punto arbitrario τ_ν .

La intensidad que es emitida hacia el exterior de la estrella, I_ν^+ , corresponde a todas direcciones Ω tal que $\mu = \cos \vartheta > 0$, y será consecuencia de todos los procesos que ocurren en la región inferior de la atmósfera, esto es en (τ_ν, ∞) ; mientras que para la intensidad hacia el interior estelar, I_ν^- , donde $\mu = \cos \vartheta < 0$, y es debida a todos los procesos en la región externa de la atmósfera, $(0, \tau_\nu)$, siendo $I_\nu = I_\nu^+ + I_\nu^-$. En base a esta discusión, tendremos las siguientes condiciones de borde, para I_ν^+ :

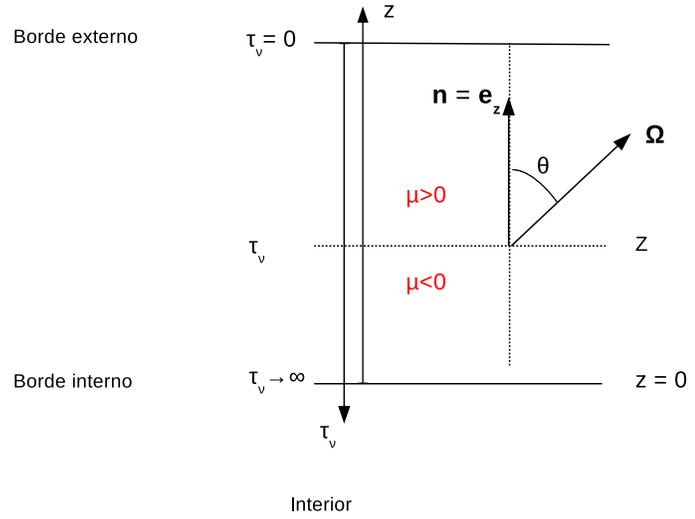


Figura 5.7: Esquema geométrico para la solución de la ecuación de transporte en geometría plana.

$$I_\nu(\tau_{\nu_1}, \mu) = I_1 \text{ finita}, \quad \tau_{\nu_1} \rightarrow \infty,$$

$$I_\nu(\tau_{\nu_2}, \mu) = I_\nu^+ \quad \tau_{\nu_2} = \tau_\nu,$$

por tanto de (5.38) obtenemos

$$I_\nu^+(\tau_\nu, \mu > 0) \exp(-\tau_\nu/\mu) = - \int_\infty^{\tau_\nu} S(t_\nu) \exp(-t_\nu/\mu) \frac{dt_\nu}{\mu},$$

que reescribimos como

$$I_\nu^+(\tau_\nu, \mu > 0) = \int_{\tau_\nu}^\infty S(t_\nu) \exp(-(t_\nu - \tau_\nu)/\mu) \frac{dt_\nu}{\mu}.$$

Para I_ν^- , las condiciones de borde serán

$$I_\nu(\tau_{\nu_1}, \mu) = 0, \quad \tau_{\nu_1} = 0,$$

$$I_\nu(\tau_{\nu_2}, \mu) = I_\nu^- \quad \tau_{\nu_2} = \tau_\nu,$$

y de (5.38) resulta

$$I_\nu^-(\tau_\nu, \mu < 0) \exp(-\tau_\nu/\mu) = - \int_0^{\tau_\nu} S(t_\nu) \exp(-t_\nu/\mu) \frac{dt_\nu}{\mu},$$

que puede expresarse

$$I_{\nu}^{-}(\tau_{\nu}, \mu < 0) = - \int_0^{\tau_{\nu}} S(t_{\nu}) \exp((\tau_{\nu} - t_{\nu})/\mu) \frac{dt}{\mu},$$

por lo tanto la intensidad total en el punto τ_{ν} será:

$$\begin{aligned} I_{\nu}(\tau_{\nu}, \mu) &= \int_0^{\tau_{\nu}} S(t_{\nu}) \exp(-(\tau_{\nu} - t_{\nu})/(-\mu)) \frac{dt_{\nu}}{-\mu} \\ &+ \int_{\tau_{\nu}}^{\infty} S(t_{\nu}) \exp(-(t_{\nu} - \tau_{\nu})/\mu) \frac{dt_{\nu}}{\mu}. \end{aligned} \quad (5.39)$$

5.4.2. Ecuación de transporte en geometría esférica

Para expresar la ecuación de transporte en geometría esférica, debemos evaluar

$$\frac{dI_{\nu}}{d\ell}$$

en términos de las variables r y ϑ o μ pues I_{ν} depende de ambas. En la Fig. 5.8 se representa un haz de radiación que cruza r en la dirección Ω formando un ángulo ϑ con la normal, esta última coincide con el versor \mathbf{e}_r . En $r + dr$, el ángulo entre Ω y \mathbf{e}_r es $\vartheta + d\vartheta$, con $d\vartheta < 0$.

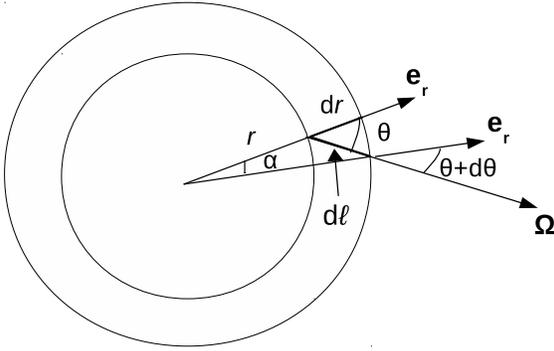


Figura 5.8: Esquema geométrico para derivar la ecuación de transporte radiativo en geometría esférica.

De geometría elemental resulta $\alpha = -d\vartheta$ y de la figura observamos que

$$dr = d\ell \cos \vartheta, \quad -rd\vartheta = d\ell \sin \vartheta,$$

así, en estado estacionario

$$\frac{dI_\nu}{d\ell} = \frac{\partial I_\nu}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \ell} + \frac{\partial I_\nu}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial \ell} = \cos \vartheta \frac{\partial I_\nu}{\partial r} - \frac{\sin \vartheta}{r} \frac{\partial I_\nu}{\partial \vartheta},$$

y utilizando $\mu = \cos \vartheta$ nuevamente como variable,

$$\frac{dI_\nu}{d\ell} = \mu \frac{\partial I_\nu}{\partial r} - \frac{\sin \vartheta}{r} \underbrace{\frac{d\mu}{d\vartheta}}_{-\sin \vartheta} \frac{\partial I_\nu}{\partial \mu} = \mu \frac{\partial I_\nu}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial I_\nu}{\partial \mu},$$

por lo que la ecuación de transporte en geometría esférica resulta

$$\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial I_\nu}{\partial \mu} = -k_\nu I_\nu + \chi_\nu. \quad (5.40)$$

Resulta claro que para la atmósfera estelar, si $r = R + z$ donde R es el radio estelar y z es la altura en la atmósfera medida desde la fotosfera, si $|z| \ll R$, de (5.40) podemos escribir

$$\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial z} + \frac{1 - \mu^2}{R + z} \frac{\partial I_\nu}{\partial \mu} = -k_\nu I_\nu + \chi_\nu,$$

y como

$$\frac{1}{R + z} = \frac{1}{R} \frac{1}{1 + \frac{z}{R}} = \frac{1}{R} \left\{ 1 - \frac{z}{R} + \mathcal{O}\left(\frac{|z|^2}{R^2}\right) \right\},$$

si $|z|/R \ll 1$, a orden $|z|/R$, esta última puede aproximarse por

$$\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial z} + \frac{1 - \mu^2}{R} \left(1 - \frac{z}{R} \right) \frac{\partial I_\nu}{\partial \mu} = -k_\nu I_\nu + \chi_\nu,$$

asumiendo que I_ν presenta una anisotropía pequeña (que es una suposición realista en general, excepto en el borde exterior de la atmósfera), podemos desarrollar I_ν en potencias de μ ,¹⁰

$$I_\nu(z, \mu) = I_\nu^{(0)}(z) + I_\nu^{(1)}(z)\mu + \mathcal{O}(\mu^2), \quad |I_\nu^{(1)}| \ll |I_\nu^{(0)}|,$$

por lo que a primer orden en μ resulta

$$\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial z} + \frac{1 - \mu^2}{R} \left(1 - \frac{z}{R} \right) I_\nu^{(1)} = -k_\nu I_\nu + \chi_\nu,$$

¹⁰Como I_ν admite un desarrollo en polinomios de Legendre de μ , reordenado los diferentes términos, resulta un desarrollo en potencias de μ , no obstante ver Sección 5.5.1.

donde todos los coeficientes del desarrollo en potencias de μ dependen de z . El término dominante en μ es justamente $I_\nu^{(1)}(z)$; y siendo el segundo término en el primer miembro de orden $I_\nu^{(1)}/R \rightarrow 0$ en la aproximación de capas plano-paralelas, resulta

$$\mu \frac{dI_\nu}{dz} = -k_\nu I_\nu + \chi_\nu,$$

donde hemos reemplazado la derivada parcial por una total pues se elimina la dependencia explícita de I_ν respecto de μ , y así y reobtenemos la ecuación de transporte radiativo en geometría plana.

5.4.3. Momentos de la ecuación de transporte

Habiendo derivado la ecuación de transporte en geometría plana, dada por (5.37), consideremos los momentos de esta ecuación. Señalemos que las ecuaciones que derivaremos también serán válidas en la geometría esférica, bajo la suposición de una anisotropía pequeña del campo de radiación, en el sentido discutido más arriba. Tomemos entonces (5.37) e integrémosla a todo el ángulo sólido,

$$\int \mu \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} d^2\Omega = \int I_\nu d^2\Omega - \int S_\nu d^2\Omega,$$

al existir simetría axial del campo de radiación, nuevamente aplica la relación

$$\int d^2\Omega \rightarrow 2\pi \int_{-1}^1 d\mu,$$

y como podemos intercambiar operadores de derivación e integración pues son independientes, resulta

$$\frac{d}{d\tau_\nu} \int_{-1}^1 \mu I_\nu d\mu = \int_{-1}^1 I_\nu d\mu - \int_{-1}^1 S_\nu d\mu,$$

el primer término del primer miembro de esta ecuación, en particular la integral sobre μ , por (5.15) es

$$\frac{\mathcal{F}_\nu}{2\pi} = \frac{F_\nu}{2},$$

mientras que el primero del segundo miembro, por (5.13) resulta

$$2J_\nu,$$

por lo que la integración de la ecuación de transporte en geometría plana a todo el ángulo sólido resulta

$$\frac{1}{2} \frac{dF_\nu}{d\tau_\nu} = 2J_\nu - \int_{-1}^1 S_\nu d\mu.$$

Introduciendo la suposición de *isotropía de la función fuente*, la ecuación anterior se reduce a

$$\frac{1}{4} \frac{dF_\nu}{d\tau_\nu} = J_\nu - S_\nu, \quad (5.41)$$

donde es claro que, bajo esta aproximación, S_ν no depende de la dirección.

Siguiendo un procedimiento similar, tomemos momentos de orden 1 de la ecuación de transporte en geometría plana. De (5.37), multiplicando por μ e integrando a todo el ángulo sólido resulta

$$\int \mu^2 \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} d^2\Omega = \int \mu I_\nu d^2\Omega - \int \mu S_\nu d^2\Omega,$$

nuevamente, en caso de simetría azimutal

$$\int d^2\Omega \rightarrow 2\pi \int_{-1}^1 d\mu,$$

e intercambiando operadores de derivación e integración, resulta

$$\frac{d}{d\tau_\nu} \underbrace{\int_{-1}^1 \mu^2 I_\nu d\mu}_{2K_\nu} = \underbrace{\int_{-1}^1 \mu I_\nu d\mu}_{F_\nu/2} - \int_{-1}^1 \mu S_\nu d\mu,$$

y nuevamente suponiendo isotropía de la función fuente, el segundo término del segundo miembro se anula y resulta

$$\frac{dK_\nu}{d\tau_\nu} = \frac{1}{4} F_\nu.$$

Usando la relación entre la presión de radiación y el momento de segundo orden dada por (5.19) y, entre el flujo y flujo astrofísico,

$$P_\nu = \frac{4\pi}{c} K_\nu \quad \mathcal{F}_\nu = \pi F_\nu,$$

esta ecuación se reduce a

$$\pi F_\nu = \mathcal{F}_\nu = c \frac{dP_\nu}{d\tau_\nu}. \quad (5.42)$$

Las ecuaciones (5.41) y (5.42) relacionan los momentos de la intensidad específica y son de suma utilidad para tratar el transporte radiativo tanto en el interior como en la atmósfera estelar como veremos en las próximas secciones.

5.5. Equilibrio termodinámico

Supongamos un campo de radiación, o gas de fotones contenido en un elemento de volumen macroscópico del espacio de configuraciones a una temperatura uniforme T . Un tratamiento mecánico-estadístico de los fotones claramente requiere de la mecánica cuántica, ninguna aproximación clásica aplica en este caso.

Utilizando los mismos argumentos dados en la discusión en el Capítulo 1 para los electrones sujetos a altas densidades, si $d^6 N(\mathbf{p})$ representa el número (medio) de fotones en el espacio de fases con impulso \mathbf{p} dentro del elemento de volumen $d^3 p$, y posición \mathbf{r} dentro de $d^3 r$ y considerando que existen dos orientaciones independientes de la polarización, en una celda h^3 del espacio de las fases el número de estados cuánticos diferentes es $g_s = 2$, por lo que resulta una ecuación formalmente idéntica a (1.39),

$$d^6 N(\mathbf{p}) = \frac{2}{h^3} f(\mathbf{p}) d^3 p d^3 r \quad (5.43)$$

donde ahora, siendo los fotones partículas con spin entero y en equilibrio, deben obedecer la estadística de Einstein-Bose $f(\mathbf{p})$.

Como los bosones no tienen la restricción del principio de exclusión de Pauli, la distribución $f(\mathbf{p})$ puede tomar cualquier valor. Siendo $d^3 p = p^2 dp d^2 \Omega$ y como en el caso de Maxwell-Boltzmann y Fermi-Dirac $f(\mathbf{p}) = f(p)$ es independiente de la dirección,¹¹ integramos (5.43) a todo el ángulo sólido

$$d^4 N(p) = \frac{8\pi}{h^3} f(p) p^2 dp d^3 r. \quad (5.44)$$

La distribución de Einstein-Bose está dada por (ver Sección 1.6.2)

$$f(p) = \frac{1}{\exp[(E(p) - \mu)/kT] - 1}, \quad (5.45)$$

donde para los fotones $\mu = 0$, pues no necesariamente debe conservarse su número exacto. Utilizando las relaciones entre la energía, el impulso y la frecuencia

$$E(p) = cp \quad p = \frac{h\nu}{c},$$

con $dp = (h/c)d\nu$, de (5.44) y (5.45) derivamos el número de fotones dentro del elemento de volumen $d^3 r$ y con frecuencias en el intervalo $(\nu, \nu + d\nu)$

¹¹Las estadísticas solo dependen de la energía y siendo clásicas o cuánticas, la energía depende solo del módulo del impulso.

$$d^4 N(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1} d\nu d^3 r.$$

Por lo tanto la energía que transportan estos fotones será

$$d^4 E_\nu = h\nu d^4 N(\nu),$$

con $h\nu$ la energía de un fotón y obtenemos

$$d^4 E_\nu = \underbrace{\frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1}}_{u_\nu} d\nu d^3 r,$$

por lo que la densidad espectral de energía, esto es la energía por unidad de volumen e intervalo de frecuencia resulta

$$u_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1}.$$

A partir de la relación entre la intensidad media y la densidad espectral del campo de radiación (5.12),

$$u_\nu = \frac{4\pi}{c} J_\nu$$

obtenemos para la intensidad media

$$J_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1}.$$

No habiendo interacción alguna entre el campo de radiación y la materia, no existirá ninguna dirección privilegiada de propagación de un haz, por lo que éste será isotrópico, y la intensidad específica será

$$I_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1} \equiv B_\nu(T), \quad (5.46)$$

donde $B_\nu(T)$ denota la función de Planck a la temperatura uniforme T , y al no existir procesos de absorción y emisión, vemos que la ecuación de transporte se satisface idénticamente pues $dI_\nu/dz = (dB_\nu/dT)(dT/dz) = 0$. Derivemos expresiones para el resto de los momentos del campo de radiación en esta aproximación de equilibrio termodinámico. El flujo, definido en (5.15)

$$\mathcal{F}_\nu = 2\pi \int_{-1}^1 I_\nu \mu d\mu = 2\pi B_\nu(T) \int_{-1}^1 \mu d\mu = 0,$$

pues el campo es isotrópico. En cambio los flujos salientes y entrantes resultan

$$\mathcal{F}_\nu^+ = 2\pi \int_0^1 I_\nu \mu d\mu = \pi B_\nu(T), \quad \mathcal{F}_\nu^- = -2\pi \int_{-1}^0 I_\nu \mu d\mu = \pi B_\nu(T),$$

mientras que las correspondientes a los flujos astrofísicos son

$$F_\nu^\pm = B_\nu(T).$$

Para la presión de radiación resulta

$$P_\nu = \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^1 I_\nu \mu^2 d\mu = \frac{4\pi}{3c} B_\nu(T).$$

Procuremos ahora expresiones integradas a todas las frecuencias. Recordando que

$$\int_0^\infty B_\nu(T) d\nu = \frac{2k^4\pi^4}{15h^3c^2} T^4 = \frac{\sigma}{\pi} T^4,$$

donde σ es la constante de Stefan–Boltzmann, tendremos

$$\mathcal{F}^\pm = \int_0^\infty \mathcal{F}_\nu^\pm d\nu = \sigma T^4, \quad P_{\text{rad}} = \frac{4\pi}{3c} \frac{\sigma}{\pi} T^4 = \frac{4\sigma}{3c} T^4,$$

e introduciendo la constante de radiación $a = 4\sigma/c$, obtenemos una de las ecuaciones de estado del campo de radiación en equilibrio termodinámico

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{3} a T^4,$$

mientras que otra ecuación de estado surge de integrar a todas las frecuencias u_ν , aunque ya hemos demostrado que para un campo isotrópico, $P_{\text{rad}} = u_{\text{rad}}/3$, por lo tanto la densidad de energía es

$$u_{\text{rad}} = a T^4.$$

Si este campo de radiación en equilibrio a la temperatura uniforme T es originado por un gas a la misma temperatura T , existirá un acoplamiento entre la materia y la radiación.¹²

La aproximación de equilibrio termodinámico requiere que el gas (las partículas masivas) satisfaga ciertas condiciones de equilibrio:

- la estadística de Maxwell–Boltzmann para las velocidades o energías;

¹²En general se pueden definir diversas temperaturas, para el gas, para el campo de radiación, etc., en equilibrio termodinámico todas son idénticas.

- la ley de Boltzmann respecto al grado de excitación de los átomos del gas;
- la ley de Saha respecto al grado de ionización de los átomos del gas.

Bajo estas condiciones, en un elemento de volumen del gas en equilibrio termodinámico, existe un balance entre la energía que absorbe y que emite en un intervalo de frecuencia $(\nu, \nu + d\nu)$ y se cumple

$$k_\nu^a I_\nu = \chi_\nu^e, \quad \rightarrow \quad I_\nu = \frac{\chi_\nu^e}{k_\nu^a} = S_\nu,$$

y bajo estas hipótesis es válida la ley de Kirchoff ¹³

$$\frac{\chi_\nu^e}{k_\nu^a} = B_\nu(T),$$

y recuperamos (5.46), esto es, la intensidad específica coincide exactamente con la función fuente. Aquí solo consideremos los coeficientes de absorción y emisión verdadera pues involucra puramente el estado termodinámico del gas.

Por tanto, la hipótesis de equilibrio termodinámico implica que la función fuente es la función de Planck a la temperatura uniforme del gas, y de no existir variaciones espaciales ni temporales en el campo de radiación, de la ecuación de transporte radiativo general (5.36), resulta $I_\nu = S_\nu = B_\nu(T)$. Nótese que la aproximación $I_\nu = B_\nu(T)$, solo es válida para la denominada radiación de cuerpo negro, en el vacío.

En cambio para la denominada radiación térmica, donde $S_\nu = B_\nu(T)$, si existiesen gradientes espaciales, $dI_\nu/d\ell \neq 0$, y $I_\nu \neq B_\nu(T)$. Por lo tanto es conveniente remarcar que I_ν será la solución de la ecuación de transporte radiativo (5.36), o sus versiones simplificadas (5.37) o (5.40), para una función fuente (u opacidad y emisividad) conocidos.

5.5.1. Equilibrio termodinámico local

Es claro que una estrella no está en equilibrio termodinámico; sabemos que ni la temperatura, ni la densidad, ni la presión son uniformes, existe un gradiente negativo de las mismas. No obstante, teniendo en cuenta que el gradiente medio de temperatura es muy pequeño ($\sim 10^{-4} \text{K cm}^{-1}$), en el mismo sentido en que justificamos la descripción termodinámica en un elemento de volumen macroscópico de gas

¹³La ley o teorema de Kirchoff requiere del principio de balance detallado; para que se establezca el equilibrio, éste debe ser frecuencia por frecuencia, dirección por dirección y polarización por polarización.

estelar, suponemos que en dicho elemento de volumen se satisfacen las estadísticas de Boltzmann-Saha. Por otra parte el camino libre medio de los fotones en gran parte de la estrella es muy pequeño frente a otras escalas de distancias involucradas, por lo tanto prácticamente no existirá escape fotones de este elemento de volumen. Bajo estas hipótesis, en una primera aproximación se puede asumir que¹⁴, en dicho elemento de volumen el gas y la radiación estarán acoplados en equilibrio a una temperatura constante, entonces la relación entre el coeficiente de absorción y emisión verdadera estará dado por la ley de Kirchoff. Esta aproximación se suele denominar *equilibrio termodinámico local* (ETL).

En otras palabras, esta suposición implica que cada elemento de volumen de una estrella centrado en \mathbf{r} , estará descrito por las variables termodinámicas usuales en dicho punto, $T(\mathbf{r})$, $\rho(\mathbf{r})$, $P(\mathbf{r})$, $C(\mathbf{r})$, y el campo de radiación estará descrito por una función fuente $S_\nu = B_\nu(T(\mathbf{r}))$. En otro punto \mathbf{r}' con $|\mathbf{r}'| > |\mathbf{r}|$, tendremos que $T' \equiv T(\mathbf{r}') < T \equiv T(\mathbf{r})$, por lo que la función fuente en \mathbf{r}' será distinta que en \mathbf{r} , aunque seguirá siendo una función de Planck. La dependencia de la función fuente con la profundidad óptica o geométrica es a través de la temperatura.

Microscópicamente, la aproximación de ETL es válida si todos los procesos atómicos en el elemento de volumen considerado están completamente balanceados, por ejemplo, si el número de procesos de $A \rightarrow B$ está exactamente balanceado por el número de procesos inversos $B \rightarrow A$. En este caso, A y B denotan estados de las partículas entre los que puede existir una transición, por ejemplo, si A es un átomo en un estado excitado i y B el mismo átomo en el estado j . Cuando este delicado balance no se satisface y las poblaciones de cierto nivel de energía de átomos/iones particulares se apartan de sus valores correspondientes a ETL, se suele definir el *no-equilibrio termodinámico local* (NETL), aún cuando las partículas obedezcan una distribución de Boltzmann para la energía o velocidades y a la misma temperatura. En este curso no abordaremos el problema de NETL ya que está fuera del alcance del mismo.

La suposición de que cada elemento de volumen se encuentra en ETL no implica isotropía del campo de radiación. Si este fuese isotrópico el flujo resultaría nulo. solo existirá un flujo neto si la intensidad específica presenta anisotropía. En efecto, para $\tau_\nu \gg 1$ la aproximación de ETL resulta válida, tanto en el interior como en la baja atmósfera por lo que $S_\nu = B_\nu(T(\tau_\nu))$. Si consideramos un valor de referencia $\tau_\nu \gg 1$, esto es, en la atmósfera profunda o en el interior y evaluamos la función fuente en $t_\nu \geq \tau_\nu$, podemos expresarla en términos de la función de Planck en τ_ν por medio de

¹⁴Válido en el interior y en la atmósfera baja, en las capas más externas de la atmósfera la densidad es lo suficientemente baja como para que el camino libre medio de los fotones sea comparable con la altura de la atmósfera y además existirá una marcada anisotropía del campo.

un desarrollo de Taylor,

$$S_\nu(t_\nu) = B_\nu(\tau_\nu) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n B_\nu}{dt_\nu^n} \right)_{t_\nu=\tau_\nu} (t_\nu - \tau_\nu)^n,$$

y reemplazando esta expresión de la función fuente en la solución formal a la ecuación de transporte radiativo (5.39), solo para el segundo término pues supusimos que $t_\nu \geq \tau_\nu$, (ver Fig 5.7), la intensidad específica resulta

$$\begin{aligned} I_\nu(\tau_\nu, \mu) &= \int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu(t_\nu) \exp(-(t_\nu - \tau_\nu)/\mu) \frac{dt_\nu}{\mu} = \\ &= \int_{\tau_\nu}^{\infty} B_\nu(\tau_\nu) \exp(-(t_\nu - \tau_\nu)/\mu) \frac{dt_\nu}{\mu} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\tau_\nu}^{\infty} \left(\frac{d^n B_\nu}{dt_\nu^n} \right)_{t_\nu=\tau_\nu} (t_\nu - \tau_\nu)^n \exp(-(t_\nu - \tau_\nu)/\mu) \frac{dt_\nu}{\mu}, \end{aligned}$$

haciendo el cambio de variables

$$x = \frac{t_\nu - \tau_\nu}{\mu}, \quad dx = \frac{dt_\nu}{\mu},$$

resulta

$$I_\nu(\tau_\nu, \mu) = B_\nu(\tau_\nu) \overbrace{\int_0^{\infty} \exp(-x) dx}^{=1} + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n B_\nu}{dt_\nu^n} \right)_{t_\nu=\tau_\nu} \overbrace{\int_0^{\infty} x^n \exp(-x) dx}^{=n!},$$

y obtenemos para la intensidad específica un desarrollo en potencias de μ

$$I_\nu(\tau_\nu, \mu) = B_\nu(\tau_\nu) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \left(\frac{d^n B_\nu}{dt_\nu^n} \right)_{t_\nu=\tau_\nu} = B_\nu(\tau_\nu) + \mu \left(\frac{dB_\nu}{dt_\nu} \right)_{t_\nu=\tau_\nu} + \dots$$

Suponiendo una ligera anisotropía, lo que implica que

$$\left| \left(\frac{d^n B_\nu}{dt_\nu^n} \right)_{t_\nu=\tau_\nu} \right| \ll B_\nu(\tau_\nu), \quad (5.47)$$

resulta

$$J_\nu = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu d\mu = B_\nu(T) + \mathcal{O}(2),$$

$$\mathcal{F}_\nu = 2\pi \int_{-1}^1 I_\nu \mu d\mu = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{dB_\nu}{dt_\nu} \right)_{t_\nu=\tau_\nu} + \mathcal{O}(3) = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{dB_\nu}{dT} \frac{dT}{dt_\nu} \right)_{t_\nu=\tau_\nu} + \mathcal{O}(3),$$

$$P_\nu = \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^1 I_\nu \mu^2 d\mu = \frac{4\pi}{3c} B_\nu(T) + \mathcal{O}(2),$$

donde $\mathcal{O}(n)$ determina el orden del coeficiente del desarrollo en serie de potencias en μ . De esta forma observamos que podemos aproximar tanto a la intensidad, intensidad media y la presión de radiación por medio de la función de Planck a la temperatura local en el punto r , y existirá un flujo de radiación no nulo, pero muy pequeño. La condición de pequeña anisotropía implica que las derivadas de la función de Planck respecto de la profundidad óptica (o la derivada de la temperatura respecto a la profundidad óptica o z) resulten pequeñas frente a $B_\nu(T)$. En la sección 5.7 profundizaremos esta discusión.

5.5.2. Aproximación de difusión

Tanto en el interior como en las capas más profundas de la atmósfera podemos utilizar la aproximación de ETL discutida en la sección anterior. En lo que sigue utilizaremos la ecuación de transporte en geometría plana, en las situaciones que correspondan, veremos que los resultados que obtengamos serán válidos también en geometría esférica.

Cuando consideramos momentos de la ecuación de transporte radiativo, derivamos la relación (5.42), válida cuando la función fuente es isotrópica¹⁵

$$\mathcal{F}_\nu = c \frac{dP_\nu}{d\tau_\nu}.$$

En el interior como en la baja atmósfera lo que interesa es la intensidad y sus momentos integrados a todas las frecuencias. Solo en la alta atmósfera, que es donde se genera el espectro con su continuo y líneas espectrales, es de relevancia el análisis espectral del campo de radiación. Por ello integremos la ecuación para el flujo a todas las frecuencias y recordando que $d\tau_\nu = -k_\nu dz$, escribimos

$$\mathcal{F} \equiv \int_0^\infty \mathcal{F}_\nu d\nu = -c \int_0^\infty \frac{1}{k_\nu} \frac{dP_\nu}{dz} d\nu.$$

¹⁵Lo que es válido en este caso pues $S_\nu = B_\nu(T)$.

Utilizando las aproximación recientemente derivada para la presión de radiación en ETL,

$$P_\nu = \frac{4\pi}{3c} B_\nu(T),$$

resulta

$$\mathcal{F} = -\frac{4\pi}{3} \int_0^\infty \frac{1}{k_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} \frac{dT}{dz} d\nu = -\frac{4\pi}{3} \frac{dT}{dz} \int_0^\infty \frac{1}{k_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu,$$

introduciendo la *opacidad media de Rosseland*, \bar{k} , definida como

$$\frac{1}{\bar{k}} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{k_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}{\int_0^\infty \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{k_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}{\frac{d}{dT} \int_0^\infty B_\nu(T) d\nu},$$

y recordando que

$$\int_0^\infty B_\nu(T) d\nu = \frac{\sigma}{\pi} T^4, \quad \frac{d}{dT} \int_0^\infty B_\nu(T) d\nu = \frac{4\sigma}{\pi} T^3.$$

para el flujo integrado obtenemos la relación

$$\mathcal{F} = -\frac{16\sigma}{3\bar{k}} T^3 \frac{dT}{dz}, \quad (5.48)$$

o utilizando que $a = 4\sigma/c$ resulta

$$\mathcal{F} = -\frac{4ac}{3\bar{k}} T^3 \frac{dT}{dz}.$$

Esta ecuación tiene la forma de una ecuación de difusión estándar, en el sentido que el flujo es proporcional al gradiente de temperatura. Como hemos señalado, el gradiente de temperatura es pequeño en general, por lo que el flujo también será pequeño.

Esta forma de la ecuación de transporte, bajo la hipótesis de ETL e integrada a todas las frecuencias, es la ecuación de transporte radiativo para el interior o la baja atmósfera, y obtendríamos el mismo resultado si en vez de geometría plana utilizáramos la geometría esférica. La derivación correspondiente es muy similar a la aproximación que realizamos para mostrar que la ecuación de transporte en geometría esférica se reduce a su forma en geometría plana cuando $R \gg z$, por lo que simplemente reemplazamos $z \rightarrow r$. Y utilizando la luminosidad en vez del flujo,

$$L(r) = 4\pi r^2 \mathcal{F},$$

la ecuación de transporte radiativo para el interior estelar resulta

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\bar{k}}{16\pi ac} \frac{L(r)}{r^2 T^3}. \quad (5.49)$$

5.5.3. Luminosidad de Eddington

Cuando el gas absorbe radiación, sobre un elemento de volumen en ETL se ejercerá una fuerza por unidad de volumen

$$\frac{dP_{\text{rad}}}{dr} = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{3} a T^4 \right) = \frac{4a}{3} T^3 \frac{dT}{dr},$$

y utilizando (5.49), obtenemos

$$\frac{dP_{\text{rad}}}{dr} = -\frac{4a}{3} T^3 \frac{3\bar{k}}{16\pi ac} \frac{L(r)}{r^2 T^3} = -\frac{\bar{k}}{4\pi c} \frac{L(r)}{r^2}.$$

En general $|dP_{\text{rad}}/dr|$ es pequeño, sin embargo cuando \bar{k} es grande en algún punto de la estrella, o si la luminosidad es muy grande, esta fuerza puede ser muy importante. Recordando la ecuación de equilibrio hidrostático,

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2} \rho,$$

donde $P = P_i + P_e + P_{\text{rad}} = P_g + P_{\text{rad}}$, suponiendo que no hay degeneración electrónica, si la presión de radiación domina frente a la presión del gas, para mantener el equilibrio hidrostático debe satisfacerse,

$$-\frac{\bar{k}}{4\pi c} \frac{L(r)}{r^2} = -\frac{GM(r)}{r^2} \rho, \quad \rightarrow \quad L(r) = \frac{4\pi Gc}{\bar{\kappa}} M(r),$$

donde hemos utilizado la relación entre la opacidad media volumétrica y específica, $\bar{k} = \bar{\kappa}\rho$. En la envoltura estelar será $M(r) = M$, $L(r) = L$, y tomando la dispersión electrónica como principal fuente de opacidad, $\bar{\kappa} \sim 0,3$ (ver Apéndice a este capítulo), encontramos una cota para la luminosidad de manera de mantener el equilibrio hidrostático

$$L_{\text{ed}} \approx \frac{4\pi GcM_{\odot}}{\bar{\kappa}} \frac{M}{M_{\odot}} \sim 10^{38} \frac{M}{M_{\odot}} \text{erg s}^{-1}.$$

Por lo tanto, suponiendo que es válida la aproximación de ETL, si la luminosidad estelar excede la *luminosidad de Eddington*, las capas externas de la atmósfera no estarán en equilibrio hidrostático y se verán aceleradas hacia el exterior. Esta situación se observa en los fenómenos de pérdida de masa en las gigantes rojas y supergigantes azules.

5.6. Ecuación de liberación de energía

Las reacciones nucleares en el interior de una estrella liberan, a una distancia r del centro, cierta energía por unidad de masa y de tiempo, ϵ . Cuando la radiación atraviesa un elemento de volumen d^3r de densidad ρ y masa $d^3m = \rho d^3r$, el cambio en la energía del campo radiativo, debido a reacciones nucleares, integrado a todas las frecuencias será

$$d^4E_n = \epsilon d^3m dt = \epsilon \rho d^3r dt = \epsilon \rho r^2 dr d^2\Omega_x dt,$$

donde $d^2\Omega_x$ es el elemento de ángulo sólido en el espacio de configuraciones y el subíndice n refiere a la contribución a la energía por reacciones nucleares. En geometría esférica, como no hay dependencia alguna con los ángulos (Θ, Φ) que definen la posición, al integrar sobre todo el ángulo sólido resulta

$$d^2E_n = 4\pi r^2 \rho \epsilon dr dt.$$

Ahora, la energía que atraviesa una cáscara esférica de radio r y espesor dr por unidad de tiempo es por definición la luminosidad, ($L = dE/dt$), por tanto,

$$dL_n(r) = 4\pi r^2 \rho \epsilon dr,$$

o

$$\frac{dL_n(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon. \quad (5.50)$$

Esta relación muestra que cuando la radiación atraviesa una región en la que se está generando energía por reacciones nucleares, aumenta la luminosidad total de la estrella en el punto r .

Ahora bien, la estrella y cada cáscara esférica, tiene otra fuente de energía, la energía potencial gravitatoria. En efecto, cuando una capa esférica se contrae, como ya hemos discutido, una parte de dicha energía se irradia al exterior mientras que la otra parte produce un aumento de la energía interna del gas en dicha capa (aumenta su temperatura). Por tanto, si dL_c denota la energía por unidad de tiempo irradiada por la capa de radio r , producto de una contracción gravitatoria y \dot{w} es el trabajo mecánico por unidad de masa que se realiza sobre el gas cuando la capa esférica se contrae y du la energía interna por unidad de masa que gana el gas por la contracción, la conservación de energía requiere que

$$\frac{dL_c}{dM(r)} = \frac{\dot{w}}{dt} - \frac{du}{dt},$$

donde $dM(r)$ es la masa de la cáscara esférica de radio r y espesor dr . Del primer principio de la termodinámica, sabemos que

$$du = \dot{d}w + \dot{d}q,$$

donde u, w, q son la energía interna, el trabajo y la cantidad de calor por unidad de masa. Como $\dot{d}q = Tds$, donde s es la entropía por unidad de masa, resulta

$$\frac{dL_c}{dM(r)} = \frac{\dot{d}w}{dt} - \frac{\dot{d}q}{dt} - \frac{\dot{d}w}{dt} = -\frac{\dot{d}q}{dt} = -T\frac{ds}{dt},$$

como $dM(r) = 4\pi r^2 \rho dr$, la ecuación anterior la reescribimos como

$$\frac{dL_c}{dr} = -4\pi r^2 \rho T \frac{ds}{dt}.$$

Por lo tanto la variación total de la luminosidad estelar debido a la liberación de energía por reacciones nucleares y contracción gravitatoria resulta de la suma de ambas contribuciones, (5.50) más la que recién obtuvimos, $L(r) = L_n(r) + L_c(r)$, por lo que

$$\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho \left(\epsilon - T \frac{ds}{dt} \right). \quad (5.51)$$

El término Tds/dt también puede escribirse como $c_v \partial T / \partial t$, donde c_v es el calor específico a volumen constante por unidad de masa, pues a partir del primer principio de la termodinámica (por unidad de masa), $du = \dot{d}q - Pdv = \dot{d}q = c_v dT = Tds$.

En aquellos estadios estelares en los que las contracciones o expansiones no son importantes, esto es mientras el equilibrio hidrostático se mantiene, el término Tds/dt puede ser ignorado en (5.51). El *rate de liberación de energía por reacciones nucleares*, como ya veremos depende de las condiciones físicas del gas, por ello dependerá de la posición a través de las variables termodinámicas, esto es $\epsilon(\rho, T, C)$.

En una estrella, la energía puede transportarse por otros mecanismos, además de la radiación, como la convección y la conducción. Por ello, en general $L = L_{\text{rad}} + L_{\text{conv}} + \dots$, en la ecuación de transporte radiativo en la aproximación de difusión, (5.49), solo interviene L_{rad} , mientras que en (5.51) es la luminosidad total.

5.6.1. Equilibrio radiativo

En aquellas regiones de una estrella donde no haya reacciones nucleares y si la energía es transportada íntegramente por radiación, al ser $\epsilon = 0$ significa que la luminosidad es constante, en el caso de geometría plana, $L = \text{cte}$ implica que el flujo

integrado es constante, por lo que de (5.41), que es válida por ejemplo en ETL pues $S_\nu = B_\nu$ y por tanto isotrópica, tendremos

$$\frac{1}{4} \frac{dF_\nu}{d(-k_\nu z)} = J_\nu - S_\nu \quad \rightarrow \quad \frac{1}{4} \frac{dF_\nu}{dz} = -k_\nu J_\nu + k_\nu S_\nu,$$

e integrando a todas las frecuencias

$$\frac{1}{4} \frac{dF}{dz} = \int_0^\infty k_\nu S_\nu d\nu - \int_0^\infty k_\nu J_\nu d\nu.$$

Siendo el flujo constante, obtenemos

$$\int_0^\infty k_\nu S_\nu d\nu = \int_0^\infty k_\nu J_\nu d\nu.$$

Como $k_\nu = k_\nu^a + k_\nu^s$, $\chi_\nu = \chi_\nu^e + \chi_\nu^s$, y $S_\nu = \chi_\nu/k_\nu$, en la anterior resulta

$$\int_0^\infty (\chi_\nu^e + \chi_\nu^s) d\nu = \int_0^\infty (k_\nu^a + k_\nu^s) J_\nu d\nu,$$

y como para scattering coherente e isotrópico obtuvimos que $\chi_\nu^s = k_\nu^s J_\nu$, los términos de scattering se cancelan y resulta finalmente

$$\int_0^\infty \chi_\nu^e d\nu = \int_0^\infty k_\nu^a J_\nu d\nu,$$

esto es, todo elemento de volumen en una región donde $\epsilon = 0$, emite tanta energía en todo el espectro de frecuencias como la que absorbe.

La constancia de F significa que la energía liberada por reacciones nucleares en las regiones más profundas del interior se transporta a través del resto de la estrella. En aquellas regiones donde ya no hay liberación de energía, la radiación se filtra a través de las capas externas de la estrella hasta que emerge, admitiendo una redistribución en frecuencias, pero con un flujo integrado que ya ha sido determinado en el interior. En lugar de utilizar el flujo saliente de la superficie estelar, se define la *temperatura efectiva* T_{eff} tal que

$$\pi F = \sigma T_{\text{eff}}^4,$$

por lo que la temperatura efectiva es un parámetro físico muy importante de la atmósfera estelar. Esta constancia del flujo integrado se denomina *equilibrio radiativo*.

5.7. Modelo de atmósfera gris

El transporte de energía en la mayoría de las estrellas es radiativo, a excepción de las enanas blancas, capas externas del Sol, envoltura de gigantes rojas e interior profundo de estrellas masivas, donde otros procesos como la convección son muy importantes.

El problema de las atmósferas se simplifica respecto al interior por la ausencia de fuentes de energía y que la estructura estelar, como la masa, el radio y la luminosidad se conocen de resolver el interior. Resolver una atmósfera implica especificar los parámetros atmosféricos en función de la profundidad, como por ejemplo la temperatura y la densidad. Una vez que todos los parámetros necesarios para resolver la ecuación de transporte son conocidos, la intensidad específica se obtiene a partir de la solución formal a esta última.

Un modelo simple de atmósfera es el de *atmósfera gris*, donde se asume que la opacidad es independiente de la frecuencia. Esta hipótesis no es necesariamente equivalente a utilizar la opacidad media de Rosseland, pues esta última implica utilizar un valor medio armónico para el coeficiente de opacidad pesado con el gradiente de la función de Planck respecto a la temperatura. Podrían definirse otras opacidades medias, como la de Planck donde se pesa k_ν directamente con B_ν .

Utilizando las ecuaciones que derivamos al tomar momentos de la ecuación de transporte en geometría plana (5.41) y (5.42), que son válidas bajo la suposición que S_ν es isotrópica, consideramos primero la relación

$$\frac{1}{4} \frac{dF_\nu}{d\tau_\nu} = J_\nu - S_\nu,$$

en este modelo en particular $k_\nu \equiv k$, independiente de la frecuencia, por lo que $d\tau_\nu \rightarrow d\tau = -k dz$. Integramos esta ecuación a todas las frecuencias y obtenemos una relación similar pero para las variables integradas,

$$\frac{1}{4} \frac{dF}{d\tau} = J - S.$$

En la atmósfera es válida la aproximación de equilibrio radiativo, por lo que el flujo integrado será constante,

$$\frac{dF}{d\tau} = -\frac{1}{k} \frac{dF}{dz} = 0,$$

por lo que, para una atmósfera gris en equilibrio radiativo se cumple que¹⁶

$$S = J,$$

¹⁶Nótese que esta relación es similar a la que obtuvimos para los procesos de scattering pero integrada a todas las frecuencias.

esto es, la función fuente integrada coincide con la intensidad media. Busquemos entonces una expresión para la intensidad media integrada. Para ello tomamos la solución formal de la ecuación de transporte para geometría plana (5.39) y la integramos a todas las frecuencias

$$I(\tau, \mu) = \int_0^\tau S(t) \exp(-(\tau - t)/(-\mu)) \frac{dt}{-\mu} \\ + \int_\tau^\infty S(t) \exp(-(t - \tau)/\mu) \frac{dt}{\mu}, \quad (5.52)$$

y la intensidad media es entonces

$$J(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 \int_0^\tau S(t) \exp(-(\tau - t)/(-\mu)) \frac{dt}{-\mu} d\mu \\ + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_\tau^\infty S(t) \exp(-(t - \tau)/\mu) \frac{dt}{\mu} d\mu, \quad (5.53)$$

donde el primer término del segundo miembro corresponde a $\mu < 0$ mientras que el segundo a $\mu > 0$. Para la primera integral en (5.53) hacemos el cambio de variables

$$w = \frac{1}{-\mu} \quad dw = w^2 d\mu \\ \mu = -1, \quad w = 1, \quad \mu = 0^-, \quad w \rightarrow \infty,$$

mientras que para la segunda,

$$w = \frac{1}{\mu} \quad dw = -w^2 d\mu \\ \mu = 0, \quad w \rightarrow \infty, \quad \mu = 1, \quad w = 1,$$

por lo que (5.53) puede escribirse como

$$J(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_1^\infty S(t) \exp(-(\tau - t)w) \frac{dw}{w} dt \\ + \frac{1}{2} \int_\tau^\infty \int_1^\infty S(t) \exp(-(t - \tau)w) \frac{dw}{w} dt.$$

Introducimos la familia de funciones *exponenciales integrales*

$$E_n(t) = \int_1^\infty \frac{\exp(-tz)}{z^n} dz, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

que satisfacen

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^k E_n(t) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \frac{dE_n(t)}{dt} = -E_{n-1}(t),$$

y nos permite escribir a la intensidad media como

$$J(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^\tau S(t) E_1(\tau - t) dt + \frac{1}{2} \int_\tau^\infty S(t) E_1(t - \tau) dt,$$

y como en el primer término del segundo miembro $\tau - t \geq 0$ y en el segundo $t - \tau \geq 0$, podemos escribir en forma más compacta la expresión anterior, de manera que

$$J(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^\infty S(t) E_1(|\tau - t|) dt.$$

Procediendo de manera similar, podemos expresar el flujo astrofísico F ($\pi F = \mathcal{F}$) en términos de las funciones exponenciales integrales, recordando que

$$F(\tau) = 2 \int_{-1}^1 \mu I(\tau, \mu) d\mu,$$

utilizando (5.52), haciendo el mismo cambio de variables $\mu \rightarrow w$ que utilizamos antes, es directo obtener (por lo que se deja como ejercicio)

$$F(\tau) = -2 \int_0^\tau S(t) E_2(\tau - t) dt + 2 \int_\tau^\infty S(t) E_2(t - \tau) dt. \quad (5.54)$$

5.7.1. Aproximación de Eddington

Como hemos mostrado, la aproximación de equilibrio radiativo implica que todo elemento de volumen del gas emite tanta energía como la que absorbe, por lo que la función fuente depende exclusivamente de las condiciones termodinámicas del gas; aquí introducimos entonces otra hipótesis debida a Eddington, ETL. Bajo esta aproximación, encontramos la relación $P_\nu \approx 4\pi J_\nu / 3c$ ¹⁷, que integrada a todas las frecuencias resulta

¹⁷Esta relación es válida para una ligera anisotropía del campo de radiación, como ya hemos discutido; no es necesario aún requerir ETL, no obstante luego si utilizaremos esta aproximación.

$$P_{\text{rad}} = \frac{4\pi}{3c} J.$$

Utilizando (5.42) integrada a todas las frecuencias,

$$\pi F = c \frac{dP_{\text{rad}}}{d\tau},$$

o en términos de la intensidad media,

$$\frac{dJ}{d\tau} = \frac{3}{4} F. \quad (5.55)$$

La hipótesis de equilibrio radiativo implica que $F = \text{cte}$, por lo que podemos integrar inmediatamente la expresión anterior para J y tendremos entonces la función fuente ($S = J$),

$$J(\tau) = \frac{3}{4} F \tau + C_1 = \frac{3}{4} F_0 \tau + C_1, \quad (5.56)$$

donde hemos tomado el valor del flujo astrofísico en $\tau = 0$ y C_1 es una constante a determinar. Para hallar C_1 evaluamos (5.54) en $\tau = 0$,

$$F_0 \equiv F(0) = 2 \int_0^\infty S(t) E_2(t) dt, \quad S(t) = J(t),$$

así,

$$F_0 = 2 \int_0^\infty \left(\frac{3}{4} F_0 t + C_1 \right) E_2(t) dt = \frac{3}{2} F_0 \int_0^\infty t E_2(t) dt + 2C_1 \int_0^\infty E_2(t) dt.$$

Para la primer integral, tomamos $u = t$; $dv = E_2(t) dt$ por lo que $du = dt$, $v = -E_3(t)$ y resulta

$$\int_0^\infty t E_2(t) dt = \underbrace{[-t E_3(t)]_0^\infty}_{=0} + \underbrace{\int_0^\infty E_3(t) dt}_{=-E_4(\infty) + E_4(0)} = E_4(0),$$

donde hemos hecho uso de las relaciones y comportamientos asintóticos que satisfacen las integrales exponenciales. La segunda integral resulta entonces

$$\int_0^\infty E_2(t) dt = E_3(0),$$

por lo que

$$F_0 = \frac{3}{2} F_0 E_4(0) + 2C_1 E_3(0).$$

De su definición

$$E_n(0) = \int_1^\infty \frac{1}{z^n} dz = \left[\frac{z^{1-n}}{1-n} \right]_1^\infty = \frac{1}{n-1}, \quad n > 1,$$

por tanto

$$F_0 = \frac{3}{2} F_0 \frac{1}{3} + 2C_1 \frac{1}{2},$$

que resolviendo para C_1 , obtenemos $C_1 = F_0/2$. Así, reemplazando en (5.56) la intensidad media resulta

$$J(\tau) = \frac{3}{4} F_0 \left(\tau + \frac{2}{3} \right).$$

Utilizando que,

$$F_0 = \frac{\sigma}{\pi} T_{\text{eff}}^4, \quad \text{y en ETL} \quad J(\tau) = B(T(\tau)) = \frac{\sigma}{\pi} T^4(\tau),$$

obtenemos finalmente una ley para la variación de la temperatura con la profundidad óptica

$$T^4(\tau) = \frac{3}{4} T_{\text{eff}}^4 \left(\tau + \frac{2}{3} \right). \quad (5.57)$$

Un aspecto a resaltar en este modelo, es que la estructura de temperaturas surge directamente de la ecuación de transporte, considerando equilibrio radiativo. La ecuación de equilibrio hidrostático no entra en esta derivación. En otras palabras, la temperatura en una atmósfera gris, como función de la profundidad óptica no depende de la gravedad superficial. Sin embargo, la ecuación de equilibrio hidrostático para la atmósfera determina la relación entre la profundidad óptica integrada y la coordenada geométrica z .

Observamos que la temperatura en este modelo crece monótonamente con la profundidad óptica. Esto es simple de entender en términos físicos. La condición de equilibrio radiativo implica que el flujo total de radiación es constante en la atmósfera. Sin embargo, el flujo neto de radiación es una medida de la anisotropía del campo (si fuese completamente isotrópico, el flujo se anularía). En efecto, la condición de pequeña anisotropía (5.47) integrada a todas las frecuencias y para $n = 1$,

$$\frac{dB}{d\tau} \ll B(T(\tau)), \quad (5.58)$$

recordando que $\pi F = (4\pi/3)(dB/d\tau)$, podemos estimar como decrece la anisotropía con la profundidad óptica calculando el cociente

$$\frac{1}{B(T(\tau))} \frac{dB}{d\tau} \approx \frac{3}{4} \frac{F_0}{B(T)} = \frac{3}{4} \left(\frac{T_{\text{eff}}}{T(\tau)} \right)^4 = \frac{1}{\tau + 2/3} \ll 1, \quad \tau \gg 1,$$

donde hemos utilizado (5.57) para $T_{\text{eff}}^4/T^4(\tau)$. Claramente, a medida que τ crece, esto es, hacia la baja atmósfera y el interior, la anisotropía decrece notoriamente. Por tanto la única forma de mantener un flujo constante con anisotropía decreciente del campo de radiación es incrementando la densidad de energía (que es proporcional a la intensidad media B), esto significa un aumento de la temperatura con τ .

Para este modelo, en ETL, $J = B$ crece con T^4 ; la hipótesis de flujo constante impone que T^4 varíe en forma lineal con τ y por tanto $dJ/d\tau = (dJ/dT)(dT/d\tau) = \text{cte}$ pues $dJ/dT \propto T^3$, $dT/d\tau \propto T^{-3}$. Esta relación surge naturalmente de la aproximación de difusión, en particular de la ecuación (5.48)

$$\mathcal{F} = -\frac{16\sigma}{3k}T^3 \frac{dT}{dz} = \frac{4}{3}\sigma \frac{dT^4}{d\tau},$$

donde $d\tau = -\bar{k}dz$. Por tanto si el flujo es constante, adoptamos $\mathcal{F} = \sigma T_{\text{eff}}^4$, por lo que resulta

$$\frac{dT^4}{d\tau} = \frac{3}{4}T_{\text{eff}}^4, \quad \rightarrow \quad T^4(\tau) = \frac{3}{4}T_{\text{eff}}^4(\tau + c),$$

donde c es una constante.

5.7.2. Ley de oscurecimiento al limbo

La intensidad emergente de una atmósfera gris la obtenemos a partir de (5.52)

$$I(\tau, \mu) = \int_0^\tau S(t) \exp(-(\tau - t)/(-\mu)) \frac{dt}{-\mu} \\ + \int_\tau^\infty S(t) \exp(-(t - \tau)/\mu) \frac{dt}{\mu},$$

evaluándola en $\tau = 0$,

$$I_0(\mu) = \int_0^\infty S(t) \exp(-t/\mu) \frac{dt}{\mu},$$

y en equilibrio radiativo,

$$S(t) = J(t) = \frac{3}{4}F_0 \left(t + \frac{2}{3} \right),$$

donde F_0 es el flujo astrofísico emergente. Por tanto reemplazando en $I_0(\mu)$ la expresión de la función fuente,

$$I_0(\mu) = \frac{3}{4}F_0 \int_0^\infty \left(t + \frac{2}{3} \right) \exp(-t/\mu) \frac{dt}{\mu}$$

o

$$\frac{3}{4}F_0 \int_0^\infty t \exp(-t/\mu) \frac{dt}{\mu} + \frac{1}{2}F_0 \int_0^\infty \exp(-t/\mu) \frac{dt}{\mu},$$

haciendo el cambio de variables

$$\xi = \frac{t}{\mu}, \quad d\xi = \frac{dt}{\mu}$$

y observando que los límites de integración no varían ante este cambio de variables,

$$I_0(\mu) = \frac{3}{4}F_0\mu \int_0^\infty \xi \exp(-\xi)d\xi + \frac{1}{2}F_0 \int_0^\infty \exp(-\xi)d\xi.$$

La primera integral la realizamos por partes haciendo

$$u = \xi; \quad dv = \exp(-\xi)d\xi; \quad du = d\xi, \quad v = -\exp(-\xi),$$

y resulta

$$\int_0^\infty \xi \exp(-\xi)d\xi = \underbrace{[-\xi \exp(-\xi)]_0^\infty}_{=0} + \underbrace{\int_0^\infty \exp(-\xi)d\xi}_{=1},$$

mientras que la segunda integral es obviamente

$$\int_0^\infty \exp(-\xi)d\xi = 1.$$

Por tanto, para la intensidad emergente obtenemos,

$$I_0(\mu) = \frac{3}{4}F_0 \left(\mu + \frac{2}{3} \right),$$

exactamente la misma relación funcional de la intensidad emergente con la dirección, como la función fuente con la profundidad óptica. Este resultado es completamente esperable; cuando consideramos que la función fuente puede desarrollarse en serie de Taylor en la profundidad óptica, obtuvimos para la intensidad específica un desarrollo en potencias de μ con exactamente los mismos coeficientes que en la expansión para la profundidad óptica hasta orden μ .

De la expresión para $I_0(\mu)$ observamos que cuando μ varía desde 1, en el centro del disco solar por ejemplo, al limbo $\mu = 0$, la intensidad cae

$$\frac{I_0(0)}{I_0(1)} = \frac{2}{5} = 0,4,$$

que resulta la denominada ley de oscurecimiento al limbo, donde la intensidad emergente cae un 40% respecto a la intensidad en el centro, que coincide muy bien con lo que se observa para el disco solar.

5.8. Aproximación de equilibrio termodinámico local

En la sección 5.5.1 introdujimos el concepto de ETL, considerando que si los procesos de scattering pueden ser despreciados, esta aproximación implica que la función fuente térmica, S_ν , es

$$S_\nu = B_\nu(T),$$

esto es, la función fuente coincide con la función de Planck a la temperatura local T del gas. Esta suposición corresponde exclusivamente para la relación entre los coeficientes de emisión y absorción verdaderos, en las condiciones discutidas en la sección 5.5.1.

Por otra parte, al discutir el scattering coherente e isotrópico, obtuvimos que la relación entre el coeficiente de emisión por scattering y el correspondiente coeficiente de absorción es la intensidad media del campo de radiación.

Por tanto, en un escenario mixto donde ambos mecanismos de absorción y emisión están presentes la función fuente resulta

$$S_\nu = \frac{\chi_\nu^e + \chi_\nu^s}{k_\nu^a + k_\nu^s},$$

y siendo válidas las relaciones

$$\chi_\nu^e = k_\nu^a B_\nu(T) \quad \text{por ETL,} \quad \text{y} \quad \chi_\nu^s = k_\nu^s J_\nu \quad \text{para scattering,}$$

podemos escribir para la función fuente mixta

$$S_\nu = \frac{k_\nu^a B_\nu(T) + k_\nu^s J_\nu}{k_\nu^a + k_\nu^s},$$

y definiendo

$$\lambda_\nu = \frac{k_\nu^a}{k_\nu^a + k_\nu^s}, \quad 1 - \lambda_\nu = \frac{k_\nu^s}{k_\nu^a + k_\nu^s},$$

la función fuente puede escribirse como

$$S_\nu = \lambda_\nu B_\nu(T) + (1 - \lambda_\nu) J_\nu,$$

donde λ_ν es sumamente complejo de calcular, como ya lo hemos discutido y, en general $\lambda_\nu(\rho, T, C)$ asumiendo que el gas y el campo de radiación, para un elemento de volumen del gas localizado en el punto \mathbf{r} , se encuentran en equilibrio termodinámico.

Cabe señalar que esta forma más general para la función fuente, resulta mucho más compleja. En efecto, el primer término, que involucra a la función de Planck, es estrictamente local, depende de las propiedades termodinámicas del gas en el punto \mathbf{r} , para el cual se puede definir una temperatura local T en equilibrio con el campo de radiación; mientras que el segundo término es claramente no local, pues como depende de J_ν , involucra haces o fotones provenientes de todas las direcciones posibles que contribuyen a la función fuente el punto \mathbf{r} .

5.9. Apéndice Capítulo 5

En este apéndice se discute brevemente la física y algunos cálculos básicos de los diferentes procesos de absorción mencionados en el presente capítulo. En todos los casos, deberemos tomar expresiones que se derivan utilizando herramientas físicas y matemáticas que exceden a este curso. En cursos superiores de interiores y atmósferas estelares se profundiza esta muy limitada discusión.

5.9.1. Dispersión Thompson o scattering electrónico

Cuando una onda electromagnética (fotón) incide sobre un electrón libre, ésta induce oscilaciones en el electrón y por tanto éste emite otra onda electromagnética (fotón) resultando que la onda original es dispersada un cierto ángulo. Si la frecuencia de la onda original, ν , es tal que $h\nu \ll m_e c^2$, el scattering resulta coherente, esto es, se trata de un proceso elástico; es lo que se denomina dispersión Thompson.

Utilizando electromagnetismo clásico, la sección eficaz está dada por

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2,$$

donde el término entre paréntesis es el radio clásico del electrón, $a_0 = e^2/(m_e c^2)$, que surge de relacionar la energía potencial del electrón, $\sim e^2/a_0$ con su energía en reposo, $m_e c^2$. Notar que la sección eficaz $\sigma_T \sim 8a_0^2$.

La opacidad específica se relaciona con la sección eficaz mediante la relación antes discutida, $\kappa_T = n_e \sigma_T / \rho$ donde n_e es el número de electrones libres por unidad de volumen y ρ la densidad del medio. En términos del peso molecular medio de los electrones, μ_e , utilizamos la relación (1.25) derivada en el Capítulo 1,

$$\mu_e m_H = \frac{\rho}{n_e},$$

y la opacidad específica puede escribirse como

$$\kappa_T = \frac{\sigma_T}{\mu_e m_H}.$$

Mediante un análisis idéntico al realizado para derivar el peso molecular medio de un gas completamente ionizado, pero en este caso sólo para los electrones libres, surge inmediatamente que $\mu_e = 2/(1+x)$, con x la abundancia del hidrógeno. Por tanto

$$\kappa_T = \frac{\sigma_T}{2m_H} (1+x) \approx 0,20(1+x) \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}. \quad (5.59)$$

Notar que la opacidad específica debida a la dispersión electrónica es independiente de la frecuencia y la temperatura.

Si la frecuencia de la radiación es tal que $h\nu \sim m_e c^2$, el intercambio de impulso entre el fotón y el electrón no puede despreciarse (efecto Compton). Por conservación de la energía, la frecuencia del fotón emitido es menor que la del fotón incidente por lo que el scattering ya no es coherente. La opacidad debida a la dispersión Compton depende de la frecuencia y es menor que κ_T .

5.9.2. Absorción libre-libre

La absorción libre-libre es un proceso similar al efecto fotoeléctrico, la absorción de un fotón por un electrón libre en presencia de un campo coulombiano nuclear, de un ion por ejemplo, como se ilustra en la Fig. 5.9. La existencia de este campo es importante, porque los principios de conservación de impulso y energía no permiten la absorción de fotones por un electrón libre. Este proceso, inelástico, es el inverso a la emisión Bremsstrahlung, que ocurre cuando una partícula cargada se frena por la presencia del campo generado por el ion.

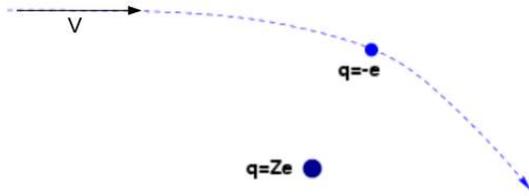


Figura 5.9: Representación esquemática de la absorción libre-libre.

El cómputo de la sección eficaz es complejo, simplemente daremos un aproximación clásica debida a Kramers para la opacidad específica,

$$\kappa_{\nu}^{ff} \sim Z^2 \rho \nu^{-3} T^{-1/2},$$

donde Z denota la carga numérica de los iones. La dependencia con la temperatura proviene de considerar, clásicamente, que la máxima interacción electrón-ion ocurre en un intervalo $\Delta t \sim 1/v$, siendo v la velocidad térmica del electrón, $m_e v^2/2 \approx kT$ y por tanto $v \sim T^{1/2}$. Cuanto mayor sea la temperatura, menos relevante es la interacción electrón-ion. Por otra parte, el factor $Z^2 \nu^{-3}$ proviene de la electrodinámica clásica, mientras que la densidad aparece pues da cuenta de la probabilidad de que dos partículas se encuentren accidentalmente próximas.

Calculamos la opacidad media de Rosseland para la absorción libre-libre

$$\frac{1}{\kappa_{ff}} = \frac{1}{4\sigma T^3/\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu^{ff}} \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} d\nu, \quad (5.60)$$

con σ la constante de Stephan-Boltzmann y $B_\nu(T)$ la función de Planck. Siendo

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial B_\nu}{\partial T} = \frac{2h^2\nu^4}{c^2kT^2} \frac{\exp(h\nu/kT)}{(\exp(h\nu/kT) - 1)^2},$$

por tanto de (5.60) con $1/\kappa_\nu^{ff} \sim \nu^3 T^{1/2}/\rho$, resulta

$$\frac{1}{\kappa_{ff}} \sim \frac{1}{T^3} \frac{T^{1/2}}{\rho} \int_0^\infty \nu^3 \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu.$$

Si reescribimos el integrando haciendo el cambio de variables $u = h\nu/kT$:

$$\nu^3 \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu = \frac{2h^2}{c^2kT^2} \left(\frac{kT}{h}\right)^8 \frac{u^7 \exp(u)}{(\exp(u) - 1)^2} du \sim T^6 \frac{u^7 \exp(u)}{(\exp(u) - 1)^2} du,$$

omitiendo las constantes físicas, numéricas y siendo que la integral también se reduce a un número real ($\approx \pi^8/2$) resulta, $1/\kappa_{ff} \sim T^{1/2}T^6/(\rho T^3)$, por lo tanto

$$\kappa_{ff} \sim \rho T^{-7/2}. \quad (5.61)$$

Notar que podría existir una dependencia adicional con la temperatura a través de ρ . La absorción libre-libre domina a altas densidades y bajas temperaturas, tal como observa de (5.61).

5.9.3. Absorción ligado-libre

La opacidad debida a la absorción ligado-libre es de hecho el efecto fotoeléctrico. En este caso el fotón entrega toda su energía al electrón, removiéndolo de su estado ligado de un átomo o ion. Este proceso ocurre cuando la frecuencia del fotón satisface $h\nu > I$, donde I es el potencial de ionización.

La sección eficaz exacta es muy difícil de calcular, no obstante para la opacidad específica se encuentra que $\kappa_\nu^{bf} \sim \rho\nu^{-3}T^{-1/2}$ siempre que $h\nu \geq I$, mientras que $\kappa_\nu^{bf} = 0$ si $h\nu < I$. Por tanto, para $h\nu \geq I$, la opacidad κ_ν^{bf} tiene un comportamiento similar a la absorción libre-libre. En la Fig. 5.10 se representa en forma esquemática, la opacidad específica para este proceso en función de la frecuencia. Siendo que κ_ν^{bf} para $\nu \geq I/h$, depende de T, ρ, ν de la misma forma que κ_ν^{ff} , la opacidad media de

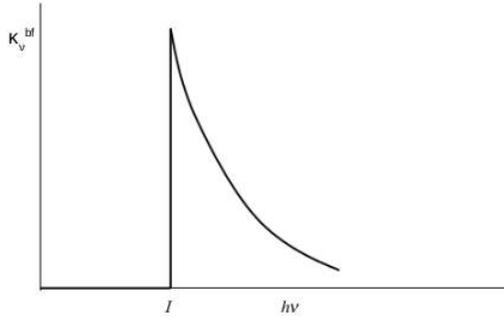


Figura 5.10: Representación esquemática de la dependencia de la opacidad específica para la absorción ligado-libre con la frecuencia.

Rosseland, κ_{bf} , tendrá una dependencia con la temperatura y la densidad igual que κ_{ff} dada por (5.61), una ley de Kramers.

Esta fuente de opacidad es relevante a temperaturas bajas, típicamente $T < 10^6$ K, pues a mayores temperaturas el gas está completamente ionizado y no habrá absorción ligado-libre.

5.9.4. Absorción ligado-ligado

Cuando un fotón no tiene suficiente energía como para ionizar un átomo, éste puede ser absorbido si su frecuencia es tal que $h\nu$ coincide con la diferencia $h\nu_0$ correspondiente a dos niveles de energía del átomo. En este caso, uno de los electrones del átomo sufre una transición del nivel inferior a uno superior, donde la energía de esta transición es provista justamente por el fotón.

Por tanto, la absorción ligado-ligado sólo es eficiente en un intervalo $\Delta\nu$ muy angosto centrado en ν_0 y es el proceso que ocurre en la formación de líneas espectrales. El ancho de la línea $\Delta\nu$ está determinado por la transición considerada, así como por la densidad y la temperatura del gas estelar que contribuyen al ensanchamiento de la línea. Si bien este mecanismo de absorción es de suma relevancia en regiones de baja temperatura, típicamente en la atmósfera, como $\Delta\nu/\nu_0$ es en general muy pequeño, no existe una contribución significativa de la absorción ligado-ligado a la opacidad media de Rosseland, en particular si $T \gtrsim 10^6$ K.

El cómputo de la opacidad κ_{ν}^{bb} es sumamente complejo debido a que se debe incluir un análisis detallado del perfil de la línea bajo una amplia variedad de condiciones.

5.9.5. El ion negativo del hidrógeno

Un caso particular de absorción ligado-libre (y libre-libre) es el que está asociado con el ion negativo del hidrógeno, H^- . Si un electrón pasa cerca de un átomo

de hidrógeno neutro, éste puede ser capturado y formar un ion H^- . La energía de ligadura de este electrón adicional es muy pequeña, por lo tanto es frágil y es fácilmente ionizado a temperaturas $T \sim 5 \times 10^3$ K. Para que se produzca H^- es necesaria la presencia de hidrógeno neutro y electrones libres que provienen de elementos pesados. Una expresión aproximada para la opacidad debida al H^- , válida en el rango $3 \times 10^6 < T < 6 \times 10^6$ K y para una abundancia de elementos pesados $0,001 < z < 0,02$ es

$$\kappa_{H^-} \sim \left(\frac{z}{0,02} \right) T^9.$$

Para muy baja abundancia de metales y/o $T \lesssim 3000$ K la opacidad del H^- no es efectiva, y para $T \gtrsim 10^4$ la abundancia de H^- es despreciable.

Resumiendo la discusión dada anteriormente para los diversos mecanismos de absorción, en la Fig. 5.11 se muestra en forma cualitativa la opacidad media de Rosseland en función de la temperatura y las regiones donde predomina cada uno de ellos. Notar que en el plano $\log T - \log \kappa$, tanto una Ley de Kramers de la forma (5.61) como la opacidad específica para ion negativo del hidrógeno, son rectas de pendientes $\sim -3,5$ y ~ 9 respectivamente. En el caso de la dispersión Thompson, la opacidad específica es independiente de la temperatura.

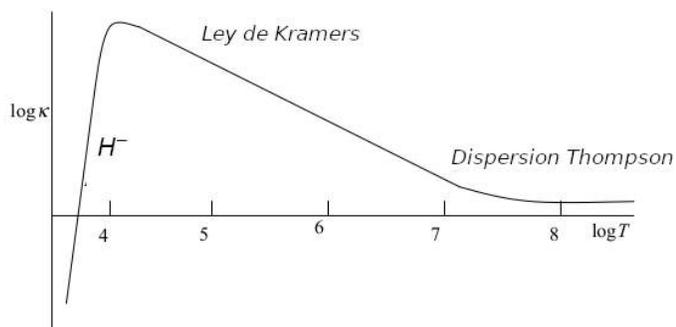


Figura 5.11: Representación esquemática de las regiones de dominio de los diferentes procesos de opacidad media de Rosseland en función de la temperatura.

Capítulo 6

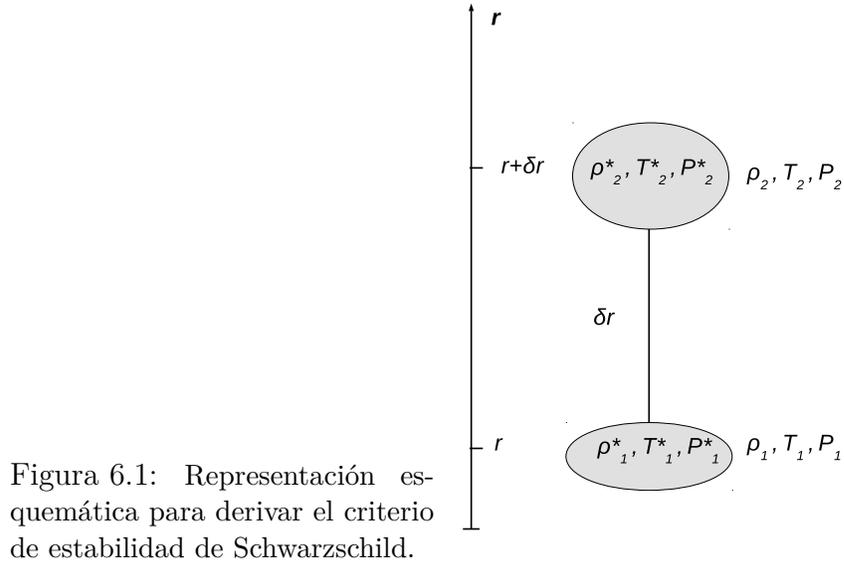
Transporte convectivo

La radiación es el mecanismo más común de transporte de energía en las estrellas, pero como ya hemos mencionado, existen otros como la convección, que en términos generales es importante en estrellas tardías. La convección es el desarrollo de una inestabilidad hidrodinámica en un fluido sujeto a un campo gravitatorio. El flujo convectivo es turbulento y consiste en una jerarquía de burbujas moviéndose e interactuando de manera extremadamente compleja. Los problemas físicos y matemáticos para tratar la convección son de una dificultad tal que aún no existe una teoría definitiva para este mecanismo de transporte. Por tanto, en este curso introductorio solo describiremos la fenomenología de la convección a través de la denominada *teoría de longitud de mezcla*,¹ que contiene los ingredientes físicos básicos y nos permitirán ilustrar muy aproximadamente el transporte convectivo; en un curso de Interiores Estelares no obstante, se lo estudia con mucho más detenimiento.

6.1. Criterio de estabilidad de Schwarzschild

Supongamos un elemento de volumen en el interior o en la atmósfera de una estrella, en equilibrio hidrodinámico con el medio que lo rodea. Nos preguntamos entonces si dicho elemento de volumen se desplazara aleatoriamente de su posición original, las fuerzas que actúan sobre él tenderán a desplazarlo aún más de su posición inicial, o lo restaurarán a su posición inicial? Si las interacciones que intervienen no resultan restitutivas, el medio en el cual se encuentra este elemento de volumen será inestable a movimientos del fluido y la convección operará. Por el contrario, si el elemento de volumen vuelve a su posición de equilibrio, no existirá convección y el

¹Traducción del inglés de “Mixing length theory”.



equilibrio impedirá que exista transporte de energía mediante un flujo de masa. Un criterio de estabilidad frente a la convección lo estableció Schwarzschild. Discutamos entonces, bajo que condiciones físicas puede darse el transporte convectivo de energía. La Fig. 6.1 representa esquemáticamente esta situación. Supongamos un elemento macroscópico de volumen localizado en un punto r en el cual la presión, densidad y temperatura toman los valores

$$P_1^*, \quad \rho_1^*, \quad T_1^*,$$

y sean P_1, ρ_1, T_1 la presión, densidad y temperatura del medio en r . Estando en equilibrio el elemento de volumen y el medio, es claro que

$$P_1^* = P_1, \quad \rho_1^* = \rho_1, \quad T_1^* = T_1.$$

Supongamos que el elemento de volumen o burbuja, se desplaza aleatoriamente una distancia δr hacia el exterior estelar, donde en $r + \delta r$ las variables termodinámicas del medio son $P_2 < P_1, \rho_2 < \rho_1, T_2 < T_1$, mientras que las del elemento de volumen las denotamos

$$P_2^*, \quad \rho_2^*, \quad T_2^*.$$

Para determinar los valores de estas últimas variables, hacemos dos suposiciones importantes:

i) El movimiento del elemento de volumen es lo suficientemente lento de manera que el desplazamiento se realiza a presión constante;

ii) El movimiento del elemento de volumen es lo suficientemente rápido de manera que no hay intercambio de calor con el medio durante el desplazamiento.

En el caso de la suposición i), recordemos que ante un apartamiento del equilibrio hidrostático (desplazamiento de un elemento de fluido de su posición de equilibrio en este caso), una escala de tiempo para recuperarlo está dada por $\tau_{\text{hid}} \approx t_{\text{ff}} \approx \tau_{\text{din}}$, que para el Sol es del orden de media hora.

Por otra parte, para la hipótesis ii), la escala característica de tiempo para la pérdida de calor está dada por el tiempo de Kelvin-Helmholtz,

$$\tau_{\text{KH}} = \frac{U}{L} \approx \frac{|W|}{L},$$

donde U, W son la energía térmica y potencial gravitatoria de una estrella respectivamente² y L la luminosidad. Este es el tiempo que podría radiar una estrella sin fuentes adicionales de energía excepto la energía potencial producto de la contracción gravitatoria. Para el Sol, τ_{KH} es del orden de los treinta millones de años.

Por tanto, ambas suposiciones resultarían plausibles de ser utilizadas en esta descripción. Hacia el final de este Capítulo, se mostrará que efectivamente la escala de tiempo del transporte convectivo, τ_{conv} satisface las hipótesis i) y ii), esto es $\tau_{\text{din}} \ll \tau_{\text{conv}} \ll \tau_{\text{KH}}$.

En este marco, de acuerdo a ii), suponemos que en su desplazamiento desde r a $r + \delta r$, donde la presión es menor, la expansión de la burbuja es adiabática y suponiendo que es un gas ideal, se satisface la relación $PV^\gamma = \text{cte}$, con $\gamma = C_p/C_v$, donde C_v, C_p son los calores específicos a volumen y presión constante, por tanto³

$$\frac{P_1^*}{\rho_1^{*\gamma}} = \frac{P_2^*}{\rho_2^{*\gamma}} \quad \rightarrow \quad \rho_2^* = \left(\frac{P_2^*}{P_1^*} \right)^{1/\gamma} \rho_1^*. \quad (6.1)$$

Si la densidad del elemento de volumen en $r + \delta r$ es mayor que la del medio, $\rho_2^* > \rho_2$, este descenderá volviendo a su posición de equilibrio y no habrá transporte convectivo. Por lo tanto, la *condición de estabilidad de Schwarzschild* frente al transporte convectivo es que ρ_2^* dada por (6.1) resulte mayor a ρ_2 , y como $P_1^* = P_1, P_2^* = P_2, \rho_1^* = \rho_1$, escribimos

$$\left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{1/\gamma} \rho_1 > \rho_2. \quad (6.2)$$

Siendo

$$P_1 = P(r), P_2 = P(r + \delta r); \quad \rho_1 = \rho(r), \rho_2 = \rho(r + \delta r),$$

²Ya hemos discutido que aplicando el teorema del virial, ambas son del mismo orden, difieren en un factor 2.

³Si no fuese un gas ideal sino un gas arbitrario, deberíamos usar el índice Γ_1 .

podemos escribir

$$P_2 = P_1 + \left(\frac{dP}{dr} \right)_1 \delta r + \mathcal{O}(\delta r^2), \quad \rho_2 = \rho_1 + \left(\frac{d\rho}{dr} \right)_1 \delta r + \mathcal{O}(\delta r^2),$$

y la condición de estabilidad (6.2) a primer orden en δr resulta

$$\left[1 + \frac{1}{P_1} \left(\frac{dP}{dr} \right)_1 \delta r \right]^{1/\gamma} \rho_1 > \rho_1 + \left(\frac{d\rho}{dr} \right)_1 \delta r,$$

eliminando los subíndices que son redundantes y linealizando el primer miembro en δr , siendo que $(1+x)^d = 1+dx + \mathcal{O}(x^2)$,

$$\left[1 + \frac{1}{\gamma P} \frac{dP}{dr} \delta r \right] \rho > \rho + \frac{d\rho}{dr} \delta r \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\gamma} \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} > \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr},$$

que puede reducirse simplemente a

$$\frac{1}{\gamma} \frac{d \ln P}{dr} > \frac{d \ln \rho}{dr},$$

y que es equivalente a esta otra desigualdad

$$-\frac{1}{\gamma} \frac{d \ln P}{dr} < -\frac{d \ln \rho}{dr}. \quad (6.3)$$

Ahora escribimos

$$\frac{d \ln \rho}{dr}$$

en términos de P y T , por ello, como hemos considerado un gas ideal,

$$P = \frac{\rho k T}{\mu m_H} \quad \rightarrow \quad \ln P = \ln \rho + \ln T + \ln c,$$

donde c es una constante que incluye k, μ, m_H , esto es, suponemos que μ no cambia entre r y $r + \delta r$. Así

$$\frac{d \ln \rho}{dr} = \frac{d \ln P}{dr} - \frac{d \ln T}{dr},$$

reemplazando en (6.3)

$$-\frac{1}{\gamma} \frac{d \ln P}{dr} + \frac{d \ln P}{dr} < \frac{d \ln T}{dr},$$

que en términos de los gradientes de P y T resulta

$$\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} < \frac{1}{T} \frac{dT}{dr},$$

como los gradientes son negativos,

$$-\frac{dT}{dr} < -\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr}. \quad (6.4)$$

El primer miembro en la desigualdad (6.4) es positivo y corresponde al valor absoluto del gradiente de temperatura en el medio, mientras que el segundo miembro, que también es positivo, corresponde al valor absoluto del gradiente adiabático de temperatura dentro del elemento de volumen. En efecto, hemos realizado este análisis asumiendo que la expansión de la burbuja o elemento de volumen es adiabática, por lo que efectivamente el segundo miembro es el gradiente adiabático. No obstante, podemos verificar esto a partir de las relación

$$P^{1-\gamma} T^\gamma = \text{cte}$$

para un proceso adiabático. De ella resulta

$$PT^{\gamma/(1-\gamma)} = \text{cte}, \quad \rightarrow \quad \frac{d \ln P}{dr} + \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{d \ln T}{dr} = 0,$$

por tanto

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{\text{ad}} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr}.$$

La desigualdad (6.4) es precisamente el criterio de estabilidad de Schwarzschild, si se satisface la misma, el medio es estable frente a la convección. En otros términos, si el valor absoluto del gradiente de temperatura en el medio no supera al valor absoluto del gradiente adiabático, el medio es estable frente a posibles inestabilidades hidrodinámicas y la convección no operará. Este criterio nos dice que la convección puede ser un mecanismo de transporte de energía si en el medio el gradiente de temperatura, en módulo, es lo suficientemente grande. Otra forma de expresar este criterio de estabilidad es

$$\left|\frac{dT}{dr}\right|_{\text{med}} < \left|\frac{dT}{dr}\right|_{\text{ad}}.$$

Señalemos que en el gradiente adiabático, siendo un gas ideal, el factor $(1 - 1/\gamma)$ puede expresarse en términos de los calores específicos por unidad de masa, c_p, c_v ,

$$\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) = 1 - \frac{C_v}{C_p} = \frac{C_p - C_v}{C_p} = \frac{c_p - c_v}{c_p} = \frac{k}{\mu m_H c_p},$$

donde hemos utilizado (1.27) para la diferencia $c_p - c_v$; y observamos que $(1 - 1/\gamma)$ depende exclusivamente de c_p .

Supongamos que la energía solo es transportada por radiación, entonces

$$\left| \frac{dT}{dr} \right|_{\text{med}} = \left| \frac{dT}{dr} \right|_{\text{rad}},$$

donde el gradiente radiativo está dado por (5.49) y

$$\left(\frac{dT}{dr} \right)_{\text{med}} = - \frac{3\bar{k}}{16\pi ac} \frac{L(r)}{r^2 T^3},$$

mientras que

$$\left(\frac{dT}{dr} \right)_{\text{ad}} = \left(\frac{k}{\mu m_H c_p} \right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr}. \quad (6.5)$$

Para un gas ideal,

$$P = \frac{\rho k T}{\mu m_H}, \quad \rightarrow \quad \frac{T}{P} = \frac{\mu m_H}{k \rho},$$

y, en equilibrio hidrostático,

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{GM(r)}{r^2} \rho = -g(r)\rho,$$

y el gradiente adiabático puede escribirse más sencillamente como

$$\left(\frac{dT}{dr} \right)_{\text{ad}} = - \frac{g}{c_p}. \quad (6.6)$$

Podemos utilizar la hipótesis de equilibrio hidrostático pues hemos supuesto que el movimiento del elemento de fluido ocurre a presión constante con el medio y por tanto en equilibrio.

El criterio de estabilidad podría no satisfacerse, esto es $|dT/dr|_{\text{med}} \geq |dT/dr|_{\text{ad}}$, y el transporte convectivo se tornaría importante cuando por ejemplo,

- la opacidad es muy alta, como ocurre en la envoltura del Sol y en la mayoría de las estrellas de baja temperatura superficial,
- la luminosidad es muy alta, o $L(r)/r^2 \gg 1$, que es el caso del interior de estrellas masivas;
- la temperatura es baja, típicamente en las estrellas frías;

- el calor específico, c_p es grande, por ejemplo en las regiones de ionización del hidrógeno donde el gas absorbe energía pero no incrementa significativamente la temperatura del medio;

tal como se ilustra en la Fig. 6.2.

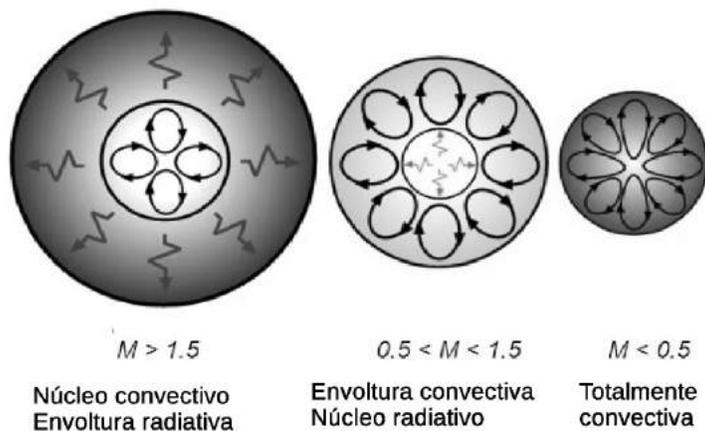


Figura 6.2: Ilustración de las regiones de ocurrencia de la convección en estrellas de diferente masa.

Debemos señalar que en esta formulación hemos supuesto que la composición química no varía, esto es μ es constante, lo que implica una gran simplificación. En caso contrario, $P = P(\rho, T, \mu)$ y al relacionar, como hemos hecho, $d\rho/dr$ con dP/dr y dT/dr habría que incluir un término adicional que involucra a $d\mu/dr$ y ello nos conduciría a lo que se denomina criterio de estabilidad de *Ledoux*. En esta aproximación al estudio del transporte convectivo, nos limitaremos exclusivamente al escenario de composición química homogénea, en un curso de Interiores Estelares se tratará este problema de forma más general.

6.2. Energía transportada por convección

Para estimar el flujo de energía convectivo escribimos en primer término la energía que transporta el elemento de volumen de fluido, δE_{conv} . Sea δm la masa de este elemento de volumen, y supongamos que al viajar desde su posición inicial r entrega al medio en $r + \delta r$ una cantidad de calor por unidad de masa δq , por tanto la energía transportada será

$$\delta E_{\text{conv}} \sim \delta q \delta m,$$

donde $\delta q = c_p \delta T$ con c_p el calor específico a presión constante por unidad de masa, $\delta T = T_2^* - T_2$ la diferencia de temperatura entre el elemento y el medio en $r + \delta r$.

Para un gas ideal monoatómico, $c_p = (5/2)(k/\mu m_H)$, no obstante mantenemos c_p pues por ejemplo, en las regiones de ionización donde la convección opera, se debe utilizar la expresión de c_p que da cuenta de la energía de ionización.

Ahora la masa involucrada en este transporte es $\delta m \approx \rho \delta r \delta S \approx \rho v \delta t \delta S$, siendo δS la superficie normal a r del elemento del fluido, v la velocidad a la que se desplaza y δt el intervalo de tiempo en el que recorre δr . Así

$$\delta E_{\text{conv}} \sim c_p \rho v \delta T \delta S \delta t.$$

Por lo tanto el flujo de energía convectivo (energía por unidad de tiempo y superficie) podemos aproximararlo como

$$F_{\text{conv}} \sim c_p \rho v \delta T. \quad (6.7)$$

Al efecto de determinar F_{conv} necesitamos estimar δT y v .

Estimación de δT

Para $\delta T = T_2^* - T_2$, hacemos nuevamente un desarrollo de Taylor a primer orden, similar al que hicimos con las presiones y escribimos

$$T_2^* = T_1^* + \left(\frac{dT^*}{dr} \right)_1 \delta r, \quad T_2 = T_1 + \left(\frac{dT}{dr} \right)_1 \delta r,$$

así

$$\delta T = \left[T_1^* + \left(\frac{dT^*}{dr} \right)_1 \delta r \right] - \left[T_1 + \left(\frac{dT}{dr} \right)_1 \delta r \right].$$

El primer término del segundo miembro corresponde al elemento de volumen y el segundo al medio. Siendo $T_1^* = T_1$ y $dT^*/dr = (dT/dr)_{\text{ad}}$, resulta

$$\delta T = \left[\left(\frac{dT}{dr} \right)_{\text{ad}} - \left(\frac{dT}{dr} \right) \right] \delta r \equiv \Delta \nabla T \delta r \geq 0, \quad (6.8)$$

donde eliminamos subíndices por ser irrelevantes e introducimos el gradiente superadiabático, $\Delta \nabla T$, que es la diferencia entre los gradientes de temperatura adiabático y del medio, y que resultará positivo si existe transporte convectivo, pues para que la convección ocurra se requiere que $(dT/dr)_{\text{ad}} \geq (dT/dr)_{\text{med}}$. ◀

Estimación de v

Para la estimación de v , necesitamos determinar las fuerzas en la dirección radial que actúan sobre el elemento de volumen en $r + \delta r$ (en r está en equilibrio con el

medio). La fuerza por unidad de volumen en $r + \delta r$ es

$$f \approx -g\rho_2^* + g\rho_2 = -g\delta\rho, \quad \delta\rho = \rho_2^* - \rho_2, \quad g = \frac{GM(r)}{r^2},$$

f será restitutiva si $\delta\rho > 0$, mientras que la convección operará si $\delta\rho < 0$, tal como discutimos previamente para derivar el criterio de estabilidad de Schwarzschild.

Para evaluar $\delta\rho$ procedemos de la misma manera, desarrollamos ρ_2^* y ρ_2 a primer orden en δr y escribimos

$$\delta\rho = \left[\rho_1^* + \left(\frac{d\rho^*}{dr} \right)_1 \delta r \right] - \left[\rho_1 + \left(\frac{d\rho}{dr} \right)_1 \delta r \right],$$

con $\rho_1^* = \rho_1$ y eliminando el subíndice innecesario,

$$\delta\rho = \left[\left(\frac{d\rho^*}{dr} \right) - \left(\frac{d\rho}{dr} \right) \right] \delta r,$$

que representa la diferencia entre el gradiente adiabático de densidad y del medio. Para evaluar $d\rho^*/dr$, utilizamos nuevamente la relación $P\rho^{-\gamma} = \text{cte}$, válida para un proceso adiabático o $\ln P - \gamma \ln \rho = \text{cte}$, por lo que

$$\frac{d \ln P}{dr} - \gamma \frac{d \ln \rho}{dr} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} = \gamma \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \quad \rightarrow \quad \frac{d\rho}{dr} = \frac{1}{\gamma} \frac{\rho}{P} \frac{dP}{dr},$$

donde el $*$ ya no es necesario, por lo que

$$\delta\rho = \left[\frac{1}{\gamma} \frac{\rho}{P} \frac{dP}{dr} - \frac{d\rho}{dr} \right] \delta r.$$

Nuevamente, a partir de la ecuación de estado para una gas ideal, escribimos $d\rho/dr$ en términos de P y T resultando⁴

$$\frac{d \ln \rho}{dr} = \frac{d \ln P}{dr} - \frac{d \ln T}{dr} \quad \text{o} \quad \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} - \frac{1}{T} \frac{dT}{dr},$$

y, reemplazando en $\delta\rho$

$$\delta\rho = \left[\frac{1}{\gamma} \frac{\rho}{P} \frac{dP}{dr} - \frac{\rho}{P} \frac{dP}{dr} + \frac{\rho}{T} \frac{dT}{dr} \right] \delta r = -\frac{\rho}{T} \left[\left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr} - \frac{dT}{dr} \right] \delta r,$$

⁴Es el mismo cálculo utilizado para derivar el criterio de estabilidad (6.4).

donde observamos que el término entre corchetes es el gradiente super-adiabático $\Delta\nabla T$ definido en (6.8), así que finalmente obtenemos para $\delta\rho$

$$\delta\rho = -\frac{\rho}{T}\Delta\nabla T\delta r < 0.$$

Teniendo entonces la expresión de la fuerza por unidad de volumen sobre el elemento de fluido ($f \approx -g\delta\rho$),

$$f \approx g\frac{\rho}{T}\Delta\nabla T\delta r > 0,$$

el trabajo (por unidad de volumen) realizado por la misma contra el campo gravitatorio para llevar la burbuja de r a $r + \delta r$ es

$$\delta w \approx f\delta r \approx g\frac{\rho}{T}\Delta\nabla T(\delta r)^2.$$

Si suponemos que todo el trabajo se transforma en energía cinética (por unidad de volumen) de la burbuja (que conduce a una velocidad máxima),

$$\frac{1}{2}\rho v^2 \sim g\frac{\rho}{T}\Delta\nabla T(\delta r)^2,$$

por lo que

$$v \sim \left(g\frac{\Delta\nabla T}{T}\right)^{1/2} \delta r,$$

donde hemos descartado el factor 2, en vista de que todas estas aproximaciones son muy crudas. ◀

Usando las estimaciones (6.8) para $\delta T = \Delta\nabla T\delta r$, y la correspondiente para v , el flujo convectivo (6.7), $F_{\text{conv}} \sim c_p\rho v\delta T$, resulta

$$F_{\text{conv}} \sim c_p\rho \left(\frac{g(\Delta\nabla T)^3}{T}\right)^{1/2} (\delta r)^2. \quad (6.9)$$

Como observamos esta estimación para el flujo depende, además de el gradiente super-adiabático que no se conoce a priori, de un parámetro libre, δr , que en general es desconocido. Esta longitud es la que recorrería un elemento de volumen hasta que se disuelve en el medio transfiriendo su energía térmica y perdiendo así su identidad. Esta distancia es lo que se denomina *longitud de mezcla* y no hay determinación teórica o experimental para ella.

Estimación de la longitud de mezcla

Una estimación grosera de la longitud de mezcla es $\delta r \sim H$, donde H es la escala de altura local en r definida en (4.14),

$$H = -\frac{dr}{d \ln P} = -P \frac{dr}{dP}.$$

En efecto, de (6.5) para el gradiente adiabático,

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{\text{ad}} = \left(\frac{k}{\mu m_H c_p}\right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr} \rightarrow \left(\frac{dT}{dr}\right)_{\text{ad}} = -\left(\frac{k}{\mu m_H c_p}\right) \frac{T}{H},$$

por lo que resulta natural la estimación $\delta r \sim H$.

En equilibrio hidrostático, $dP/dr = -g\rho$, por tanto

$$H = -\frac{P}{dP/dr} = P \frac{1}{g\rho} = \frac{\rho k T}{\mu m_H g} = \frac{kT}{\mu m_H g},$$

donde hemos hecho uso de la ecuación de estado para un gas ideal.

Una estimación de T , tal como se hizo en (4.12), surge del teorema del virial, $2U + W = 0$, con $W = -\alpha GM^2/R$ ($\alpha \lesssim 1$) y $U = 3NkT/2 = 3MkT/(2\mu m_H)$, siendo M, R la masa y el radio estelar. Por tanto,

$$\frac{3MkT}{\mu m_H} = \frac{\alpha GM^2}{R} \rightarrow kT = \frac{\alpha \mu m_H}{3} \frac{GM}{R} \sim \frac{\alpha \mu m_H}{3} gR,$$

donde hemos aproximado $g \sim GM/R^2$. Así,

$$\delta r \sim H \sim \frac{kT}{\mu m_H g} \sim \frac{\alpha}{3} R,$$

y por ejemplo, en caso de una distribución homogénea de masa, $\alpha = 3/5$ y por tanto $\delta r \sim R/5$. ◀

Estimación del gradiente super-adiabático

Aplicando las estimaciones para el flujo convectivo en $r = R$, tomando $\delta r = \beta R$, con $\beta < 1$ un factor desconocido, utilizando que $F_{\text{conv}} = L/4\pi R^2$, $\rho \approx 3M/4\pi R^3$, la expresión (6.9)

$$F_{\text{conv}} \sim c_p \rho \left(\frac{g(\Delta \nabla T)^3}{T}\right)^{1/2} (\delta r)^2,$$

la reescribimos como

$$\frac{L}{R^2} \sim c_p \beta^2 \frac{3M}{R^3} \left(\frac{g(\Delta \nabla T)^3}{T}\right)^{1/2} R^2 \rightarrow L \sim c_p \beta^2 MR \left(\frac{g}{T}\right)^{1/2} (\Delta \nabla T)^{3/2},$$

donde hemos despreciado el factor 3. De esta última podemos expresar el gradiente super-adiabático en términos de la luminosidad, masa, radio y temperatura estelar

$$\Delta \nabla T \sim \left(\frac{L}{c_p \beta^2 MR} \left(\frac{T}{g} \right)^{1/2} \right)^{2/3}.$$

Utilizando (6.6), $|dT/dr|_{\text{ad}} = g/c_p$, calculamos la diferencia relativa entre el gradiente adiabático y el del medio,

$$\frac{\Delta \nabla T}{|dT/dr|_{\text{ad}}} \sim \frac{c_p}{g} \left(\frac{L}{c_p \beta^2 MR} \right)^{2/3} \left(\frac{T}{g} \right)^{1/3} = \frac{\beta^{-4/3} c_p^{1/3}}{g} \left(\frac{L}{MR} \right)^{2/3} \left(\frac{T}{g} \right)^{1/3},$$

hemos estimado previamente que

$$\frac{T}{g} \sim \frac{\mu m_H}{k} R,$$

siendo $g \approx GM/R^2$ y para un gas ideal $c_p \sim k/(\mu m_H)$, obtenemos

$$\frac{\Delta \nabla T}{|dT/dr|_{\text{ad}}} \sim \beta^{-4/3} \frac{R^2}{GM} \left(\frac{L}{MR} \right)^{2/3} R^{1/3} = \beta^{-4/3} \left(\frac{L^2 R^5}{G^3 M^5} \right)^{1/3} \sim \left[\left(\frac{LR}{GM^2} \right)^2 \left(\frac{R^3}{GM} \right) \right]^{1/3}.$$

Aproximando la energía potencial gravitatoria con $|W| \sim GM^2/R$, el primer término entre paréntesis dentro del corchete resulta $\tau_{\text{KH}}^{-1} \approx L/|W|$, mientras que el segundo término es $\tau_{\text{din}}^2 \approx (G\rho)^{-1} \approx R^3/(GM)$ por lo que finalmente obtenemos

$$\frac{\Delta \nabla T}{|dT/dr|_{\text{ad}}} \sim \beta^{-4/3} \left(\frac{\tau_{\text{din}}}{\tau_{\text{KH}}} \right)^{2/3}, \quad (6.10)$$

reflejando que esta diferencia relativa entre el gradiente adiabático y el del medio es muy pequeña pues como ya lo mencionamos $\tau_{\text{KH}} \gg \tau_{\text{din}}$, para el Sol en particular ya hemos mencionado que $\tau_{\text{din}} \approx 30$ min y $\tau_{\text{KH}} \approx 3 \times 10^7$ años y resulta $(\tau_{\text{din}}/\tau_{\text{KH}})^{2/3} \sim 10^{-8}$, siendo el gradiente medio de temperatura en el Sol $\sim 10^{-4}$ Kcm⁻¹. ◀

Como el gradiente super-adiabático es la diferencia entre el gradiente del medio y el adiabático, vemos que aún cuando el transporte de energía sea tanto radiativo como convectivo, al ser $\Delta \nabla T = (dT/dr)_{\text{ad}} - (dT/dr) \sim 10^{-12} \ll 1$, se puede aproximar muy bien el gradiente de temperatura del medio por el gradiente adiabático. En otros términos, si existe transporte radiativo y convectivo, este último es mucho más

eficiente y, en primera aproximación, podemos ignorar la contribución de la radiación al gradiente de temperatura y utilizamos simplemente

$$\frac{dT}{dr} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr}, \quad (6.11)$$

en vez de la expresión (5.49).

Estimación de la escala de tiempo del transporte convectivo

Para concluir este capítulo, veamos la escala de tiempo en la cual el transporte convectivo ocurre. Habiendo obtenido una aproximación de la velocidad v a la que el elemento de fluido se desplaza, podemos estimar τ_{conv} como,

$$\tau_{\text{conv}} \sim \frac{\delta r}{v}, \quad v \sim \left(g \frac{\Delta \nabla T}{T}\right)^{1/2} \delta r \quad \rightarrow \quad \tau_{\text{conv}} \sim \left(\frac{T}{g \Delta \nabla T}\right)^{1/2},$$

utilizando (6.10) y (6.6) que reescribimos,

$$\Delta \nabla T \sim \beta^{-4/3} \left(\frac{\tau_{\text{din}}}{\tau_{\text{KH}}}\right)^{2/3} |(dT/dr)_{\text{ad}}|, \quad |(dT/dr)_{\text{ad}}| \sim \frac{g}{c_p},$$

la estimación

$$\frac{T}{g} \sim \frac{\mu m_H R}{k},$$

obtenemos

$$\tau_{\text{conv}} \sim \left(\frac{\mu m_H R}{k} \beta^{4/3} \frac{c_p}{g} \left(\frac{\tau_{\text{KH}}}{\tau_{\text{din}}}\right)^{2/3}\right)^{1/2},$$

siendo $c_p \sim k/(\mu m_H)$ surge

$$\tau_{\text{conv}} \sim \beta^{2/3} \left(\frac{R}{g} \left(\frac{\tau_{\text{KH}}}{\tau_{\text{din}}}\right)^{2/3}\right)^{1/2},$$

y aproximando nuevamente

$$\frac{R}{g} \sim \frac{R^3}{GM} \sim \tau_{\text{din}}^2,$$

resulta

$$\tau_{\text{conv}} \sim \beta^{2/3} \tau_{\text{KH}}^{1/3} \tau_{\text{din}}^{2/3},$$

que para valores solares con $\beta \approx 0,1$ surge que $\tau_{\text{conv}} \sim 1$ mes. Este resultado confirma la hipótesis de que el movimiento del elemento de volumen es lo suficientemente lento para que el proceso ocurra a presión constante, $\tau_{\text{conv}} \gg \tau_{\text{din}}$; y lo suficientemente rápido, $\tau_{\text{conv}} \ll \tau_{\text{KH}}$, para despreciar intercambios de calor entre este elemento y el medio mientras ocurre el desplazamiento. ◀

Capítulo 7

Reacciones Nucleares

Al estudiar el transporte de energía, derivamos la ecuación de liberación de energía (5.51), que en estado estacionario se reduce a

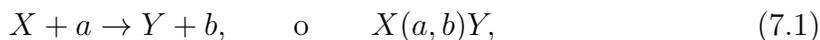
$$\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon,$$

donde $dL(r)$ denota la variación de la luminosidad en $(r, r + dr)$, ρ la densidad del medio en dicho punto e involucra el parámetro ϵ , definido como la energía liberada por reacciones nucleares por unidad de masa y tiempo en dicho intervalo.

En este capítulo brindaremos una formulación muy simplificada que nos permita estimar este parámetro en función de la temperatura y otras variables termodinámicas a partir de considerar la fusión de elementos livianos en más pesados. No abordaremos discusión alguna sobre los ciclos de reacciones nucleares que ya se han discutido en otros cursos, como protón-protón, carbono-nitrógeno-oxígeno o 3α , sino que nos concentraremos en la física básica que nos permita calcular ϵ . En un curso de Interiores Estelares se profundiza esta discusión.

7.1. Definiciones y consideraciones básicas

Consideremos un núcleo X y una partícula a que como producto de una reacción nuclear, da lugar a otro núcleo Y y otra partícula b , que denotamos indistintamente como



por ejemplo, $C^{12}(p, \gamma)N^{13}$. La energía liberada (o absorbida) por esta reacción está dada por la diferencia entre las masas iniciales y finales de las partículas,

$$\Delta E_{aX} \equiv Q_{aX} = (m_X + m_a - m_Y - m_b)c^2.$$

Si $Q_{aX} > 0$ la reacción libera energía, se la denomina exotérmica, mientras que si $Q_{aX} < 0$ esta absorbe energía y se la llama endotérmica. Ya conocemos que los ciclos protón-protón, carbono-nitrógeno-oxígeno o 3α son exotérmicos. Siendo Q_{aX} la energía liberada por la reacción, definimos ϵ_{aX} ($[\epsilon_{aX}] = \text{erg g}^{-1}\text{s}^{-1}$ o $\text{Mev g}^{-1}\text{s}^{-1}$) como

$$\epsilon_{aX} = \frac{Q_{aX}r_{aX}}{\rho}, \quad (7.2)$$

donde hemos introducido r_{aX} , el *rate de reacciones nucleares*¹ por unidad de volumen, esto es el número de reacciones nucleares (a, X) por unidad de tiempo y unidad de volumen, $[r_{aX}] = \text{cm}^{-3}\text{s}^{-1}$. Este rate da cuenta de la tasa de destrucción de partículas X al reaccionar con las partículas a . Así, para determinar ϵ_{aX} debemos especificar r_{aX} .

Señalemos que el principio de exclusión de Pauli impide que nucleones (fermiones) de un mismo sistema interactúen entre sí, por tanto las reacciones nucleares implican al menos dos sistemas de partículas, en este caso, proyectil y blanco.

Para la reacción (7.1), imaginemos núcleos X , con densidad numérica n_X , que son bombardeados por partículas a , siendo n_a el número de partículas a por unidad de volumen y v la velocidad relativa entre ellas. Esta reacción tendrá una cierta probabilidad de ocurrencia, que la caracterizaremos con una *sección eficaz*, σ , con dimensiones de área² y que dependerá exclusivamente de las propiedades de las partículas interactuantes y la energía o velocidad relativa. Podemos pensar la sección eficaz definida de forma tal que la reacción ocurre si la partícula a pasa dentro de un área $\sigma(v)$ alrededor de una partícula X .

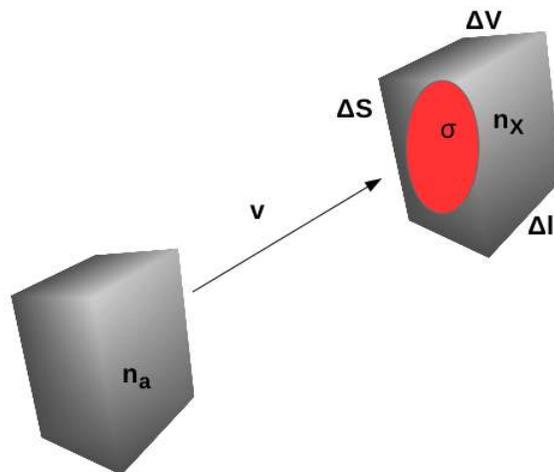


Figura 7.1: Representación ilustrativa que permite definir la sección eficaz σ .

¹Podría llamarse tasa de reacciones, no obstante el término *rate* admite múltiples traducciones.

²Las secciones eficaces de reacciones nucleares suelen expresarse en *barn* que equivale a 10^{-24}cm^2 .

Intuitivamente, consideremos un elemento de volumen ΔV , de área normal ΔS y longitud Δl con n_X núcleos X por unidad de volumen sobre el que inciden normalmente partículas a con velocidad relativa v , tal como se ilustra en la Fig. 7.1.

Siendo $\Delta N_X = n_X \Delta V = n_X \Delta S \Delta l$ el número de núcleos X en el elemento de volumen, la medida de la probabilidad de ocurrencia de la reacción para una partícula a y los ΔN_X núcleos en ΔV la definimos como el área total “cubierta” por $\sigma(v)$ en ΔV , $\sigma(v) \Delta N_X$ normalizada a ΔS ,

$$\frac{\sigma(v) \Delta N_X}{\Delta S} = \sigma n_X \Delta l,$$

notemos que $n_X \Delta l$ es la densidad superficial de núcleos X .

Por otra parte, al ser $n_a v$ el flujo de partículas a , esto es, el número de partículas a que inciden sobre la distribución de núcleos X por unidad de tiempo y superficie normal, el número de reacciones por unidad de tiempo dentro de ΔV es

$$\underbrace{\text{Prob. de reacción } a \text{ con } \Delta N_X}_{\sigma(v) n_X \Delta l} \quad \times \quad \underbrace{\text{N}^\circ \text{ de part. } a \text{ por un. de tiempo}}_{n_a v \Delta S} = \sigma(v) n_X n_a v \Delta S \Delta l = \sigma(v) n_X n_a v \Delta V,$$

por lo que el rate r_{aX} de reacciones por unidad de volumen resulta

$$r_{aX} = n_a n_X v \sigma(v), \quad (7.3)$$

cuyas dimensiones son precisamente $\text{cm}^{-3} \text{s}^{-1}$.

En esta expresión debemos considerar, en primer término, que las partículas tendrán una distribución de velocidades; si $f(v) dv$ es la probabilidad que las partículas interactuantes tengan velocidad relativa entre $(v, v + dv)$, $r_{ax} \rightarrow dr_{ax}$ y de (7.3)

$$dr_{aX} = n_a n_X v \sigma(v) f(v) dv. \quad (7.4)$$

Por otra parte, si $a = X$, el número de pares de partículas interactuantes no será n_X^2 sino $n_X(n_X - 1)/2 \approx n_X^2/2$, por lo que introducimos la delta de Kronecker, δ_{aX} , y finalmente escribimos para el rate

$$dr_{aX} = \frac{1}{1 + \delta_{aX}} n_a n_X v \sigma(v) f(v) dv. \quad (7.5)$$

Supondremos en la formulación que sigue que las partículas obedecen la estadística de Maxwell-Boltzmann, por tanto

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 \exp(-\mu v^2 / 2kT), \quad (7.6)$$

donde μ es la masa reducida del par (a, X) ³

$$\mu = \frac{m_a m_x}{m_a + m_x}.$$

Como ya hemos discutido, (7.6) también puede expresarse en términos de la energía $E = \mu v^2/2$,

$$f(v)dv = \phi(E)dE, \quad \phi(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{E^{1/2}}{(kT)^{3/2}} \exp(-E/kT). \quad (7.7)$$

Así, de (7.5) el rate resulta

$$r_{aX} = (1 + \delta_{aX})^{-1} n_a n_X \int_0^\infty \sigma(v) v f(v) dv. \quad (7.8)$$

Esta expresión involucra el cómputo de la integral

$$\int_0^\infty \sigma(v) v f(v) dv = \langle \sigma(v) v \rangle \equiv \lambda,$$

donde $\langle \rangle$ denota valor medio, en este caso sobre las velocidades, que denominamos λ y que puede expresarse también en términos de la energía,

$$\lambda = \int_0^\infty \sigma(E) v(E) \phi(E) dE. \quad (7.9)$$

7.2. La sección eficaz

El cómputo de λ requiere el conocimiento de la sección eficaz de la reacción $\sigma(E)$, y para ello debemos adentrarnos en la interacción entre núcleos.

En la Fig. 7.2 representamos esquemáticamente el potencial de interacción entre dos núcleos de carga $Z_1 e$ y $Z_2 e$ ⁴. Para $r \gtrsim r_0 \sim 10^{-13}$ cm, que es un radio típico nuclear, la interacción es repulsiva y puramente coulombiana, decae como $1/r$. En cambio, para $r \lesssim r_0$, domina la interacción fuerte que mantiene ligados a los nucleones (protones y neutrones). Por ello, la altura de la denominada *barrera coulombiana* para estos dos núcleos es $E_c = Z_1 Z_2 e^2 / r_0 \sim Z_1 Z_2 \text{Mev}$. El pozo de potencial cae unos $E_N \sim -30 \text{Mev}$.

³Si en un sistema referencia donde las partículas a y X tienen velocidades v_a y v_X respectivamente; y que satisfacen ambas la estadística de Maxwell-Boltzmann, al pasar al sistema centro de masa-movimiento relativo, es directo mostrar que la distribución de velocidades relativas será también maxwelliana con masa μ .

⁴Utilizamos subíndices 1 y 2 para denotar la cargas de las partículas X y a respectivamente.

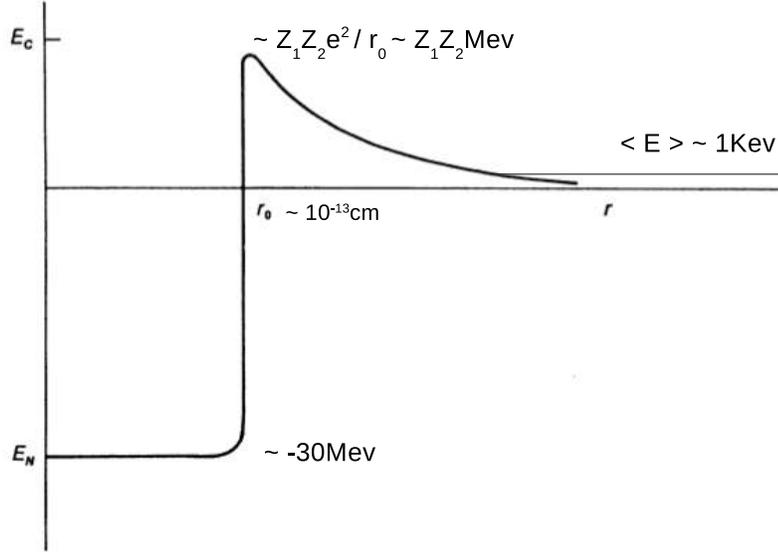


Figura 7.2: Representación de la interacción entre dos núcleos de cargas Z_1e y Z_2e .

Por otra parte, para las temperaturas típicas en el interior de Sol, $T \sim 10^7$, la energía cinética media de las partículas es $\langle E \rangle \sim kT \sim 1\text{KeV}$, tres órdenes de magnitud menor que la altura de la barrera para dos protones ($Z_1 = Z_2 = 1$).

Resulta evidente que para que la reacción tenga lugar y se forme un nuevo núcleo, las partículas proyectil deben tener una probabilidad no nula de atravesar la barrera coulombiana, algo que clásicamente sería imposible, pero estamos considerando partículas cuánticas. Por ello, debemos resolver la ecuación de Schrödinger para la función de onda, $\psi(\mathbf{r})$, correspondiente al movimiento relativo de los dos núcleos,

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + V(r)\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}),$$

donde $V(r)$ es el potencial de la Fig. 7.2 y E la energía relativa de la partícula incidente.

Resolver esta ecuación para el potencial nuclear no es matemáticamente sencillo y en este curso no vamos a derivar el factor de penetración de la barrera para este problema, que implica encontrar la solución para la función de onda.

No obstante, este problema es conceptualmente similar a otro donde en lugar del potencial de interacción nuclear, se utiliza una barrera y un pozo cuadrado de potencial, como se ilustra en la Fig. 7.3.

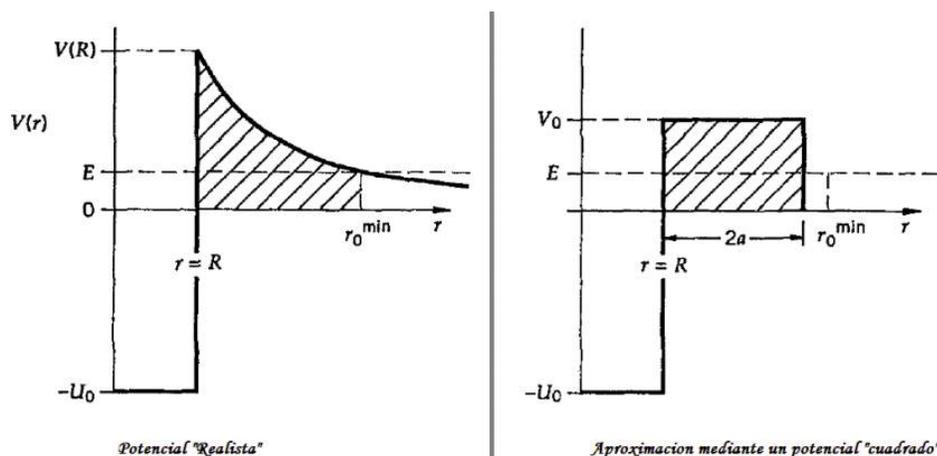


Figura 7.3: Aproximación al problema realista con una barrera cuadrada y un pozo de potencial.

En cursos introductorios de mecánica cuántica se resuelve un problema como éste, donde el factor de penetración no es otra cosa que la probabilidad de que el proyectil, con energía E , atraviese la barrera con altura $V_0 > E$.

Por lo tanto, tomaremos el resultado provisto por Gamow para el factor de penetración de la barrera coulombiana, que está dado por

$$f_g \propto \exp(-2\pi Z_1 Z_2 e^2 / \hbar v), \quad v(E) = \sqrt{\frac{2E}{\mu}}$$

donde observamos que decrece exponencialmente con $Z_1 Z_2 / v$, por lo que resulta evidente que para que este factor se mantenga al menos constante al considerar núcleos más pesados, v o E debe crecer lo que implica mayor temperatura. Es de destacar que para energías del orden de 1 Kev, $f_g \lesssim 10^{-12}$.

Asimismo, existe también una sección eficaz geométrica, que de tratarse de partículas clásicas, sería el área geométrica de ambas partículas colisionantes. Siendo partículas cuánticas, éstas tienen asociada una longitud de onda característica, que es la longitud de onda de de Broglie. Si p es el módulo del impulso relativo de ambas partículas,

$$\lambda_B = \frac{h}{p},$$

por lo que la sección eficaz geométrica será proporcional a λ_B^2 , por tanto

$$\lambda_B^2 \propto \frac{1}{p^2} \propto \frac{1}{E}.$$

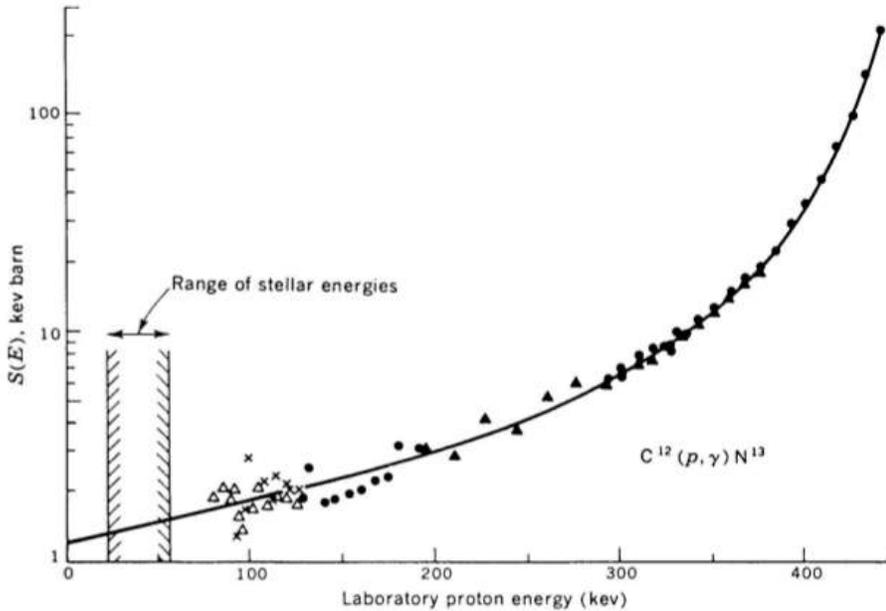


Figura 7.4: Determinación experimental en laboratorio de $S(E)$ para la reacción $C^{12}(p, \gamma)N^{13}$, tomada de Clayton (1968).

Así la sección eficaz $\sigma(E)$, que da cuenta de la probabilidad de que la reacción ocurra, debe ser proporcional a estos dos factores, el de penetración de la barrera y la sección eficaz geométrica y escribimos

$$\sigma(E) = \frac{S(E)}{E} \exp\left(-2\pi Z_1 Z_2 e^2 / \hbar v(E)\right), \quad (7.10)$$

donde $S(E)$, que suele denominarse *factor astrofísico* (con dimensiones de Kev barn), absorbe además de constantes numéricas, lo más complejo, que es la probabilidad intrínseca nuclear de que la reacción ocurra. No es sencillo en absoluto determinar teóricamente $S(E)$ por lo que nos restringiremos a extrapolaciones experimentales.

En la Fig. 7.4 se muestran los resultados experimentales a altas energías y su extrapolación a bajas energías de $S(E)$ para la reacción $C^{12}(p, \gamma)N^{13}$. Este comportamiento de S es similar en otras reacciones, y observamos que dentro del rango de interés astrofísico, $S(E)$ presenta un comportamiento muy suave. Aquí debemos señalar que este comportamiento de S solo corresponde para las denominadas reacciones nucleares no resonantes. Existen reacciones en las que, dependiendo de la energía relativa de las partículas a y X , en lugar de fusionarse en un núcleo estable Y , lo hacen

en un núcleo Y' que decae posteriormente en Y ; en tal caso la sección eficaz presenta un máximo local y $S(E)$ no es una función suave. En este curso no abordaremos este tipo de reacciones resonantes y solo consideraremos las no resonantes.

7.3. Rate de la reacción

Teniendo conocimiento del comportamiento de $S(E)$, contamos con toda la información necesaria para calcular λ , r_{aX} y en definitiva, ϵ_{aX} . Reescribimos entonces la sección eficaz (7.10) reemplazando $v(E) = \sqrt{2E/\mu}$, en el argumento de la exponencial

$$\exp\left(-2\pi Z_1 Z_2 e^2 / \hbar v(E)\right)$$

obteniendo

$$\sigma(E) = \frac{S(E)}{E} \exp\left(-\sqrt{2\mu}\pi Z_1 Z_2 e^2 / \hbar \sqrt{E}\right),$$

que puede reducirse a

$$\sigma(E) = \frac{S(E)}{E} \exp(-b/\sqrt{E}), \quad b \approx 31 Z_1 Z_2 A^{1/2} (\text{Kev})^{1/2}, \quad (7.11)$$

donde A es el peso atómico reducido. La expresión de b surge de su definición

$$b = \frac{\sqrt{2\mu}\pi e^2}{\hbar} Z_1 Z_2, \quad \text{con} \quad \mu = \frac{A_a m_H \cdot A_X m_H}{A_a m_H + A_X m_H} = \frac{A_a A_X}{A_a + A_X} m_H,$$

m_H es la masa del protón y denotando con $A = A_a A_X / (A_a + A_X)$ resulta

$$\frac{\sqrt{2m_H}\pi e^2}{\hbar} \approx 31 (\text{Kev})^{1/2}.$$

Así, a partir de (7.9) y (7.11), el cómputo de λ se reduce a evaluar la integral

$$\lambda = \int_0^\infty \sigma(E) v(E) \phi(E) dE = \int_0^\infty \frac{S(E)}{E} \exp\left(-b/\sqrt{E}\right) \sqrt{\frac{2E}{\mu}} \phi(E) dE,$$

siendo de (7.7)

$$\phi(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{E^{1/2}}{(kT)^{3/2}} \exp(-E/kT),$$

resulta

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(kT)^{3/2}} \sqrt{\frac{2}{\mu}} \int_0^\infty \frac{S(E)}{E} E^{1/2} E^{1/2} \exp\left(-\left(E/kT + b/\sqrt{E}\right)\right) dE \\ &= \sqrt{\frac{8}{\pi\mu}} \frac{1}{(kT)^{3/2}} \int_0^\infty S(E) \exp\left(-\left(E/kT + b/\sqrt{E}\right)\right) dE.\end{aligned}\quad (7.12)$$

Ya hemos discutido que $S(E)$ es una función muy suave, prácticamente constante dentro del intervalo de energías relevantes en el interior estelar, por tanto concentrémonos en la parte exponencial del integrando, $\exp(-E/kT) \exp(-b/\sqrt{E})$.

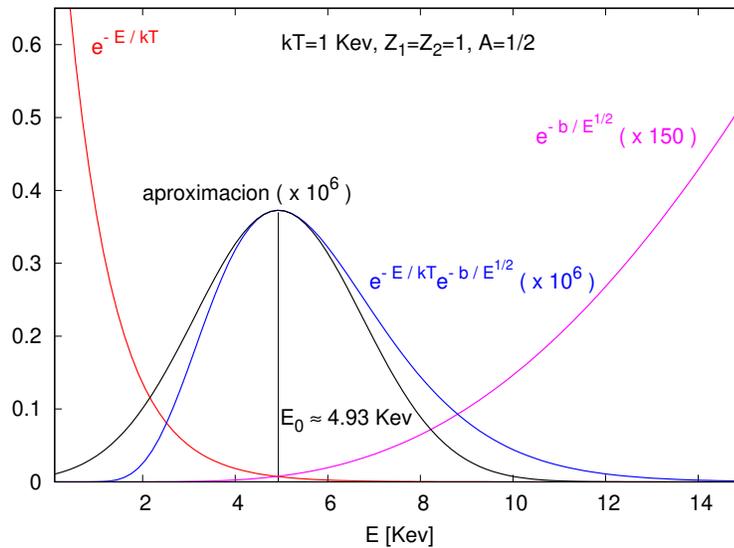


Figura 7.5: Exponenciales (en rojo y magenta), su producto (en azul) y la aproximación por una función normal (en negro) suficientemente ampliados con $b \approx 31Z_1Z_2A^{1/2}(\text{KeV})^{1/2}$ considerando $Z_1 = Z_2 = 1$; $A = 1/2$ y $kT = 1\text{KeV}$. El producto de las exponenciales se denomina pico de Gamow centrado en $E_0 = (bkT/2)^{2/3}$ que para los valores adoptados corresponde a un valor muy próximo a 4.93 KeV.

En la Fig. 7.5 se representan ambos factores, donde claramente se observa que para bajas energías, el factor $\exp(-b/\sqrt{E})$ anula toda contribución a la integral, mientras que a altas energías el otro factor $\exp(-E/kT)$ tiene el mismo efecto, por lo que existe un intervalo donde ambos términos son del mismo orden y que es el que contribuye a la integral en λ . Ello es lo que se representa en la Fig.7.5, que se conoce como *pico de Gamow*. Para hallar el valor de $E = E_0$ donde ocurre la mayor contribución a la integral, buscamos un extremo del argumento de la exponencial en (7.12) escribiéndolo como $\exp(-\psi(E))$,

$$\psi(E) = \frac{E}{kT} + \frac{b}{\sqrt{E}}, \quad \rightarrow \quad \frac{d\psi}{dE}(E_0) = \frac{1}{kT} - \frac{b}{2E_0^{3/2}} = 0,$$

por lo que el valor de la energía que satisface esta condición resulta

$$E_0 = \left(\frac{bkT}{2} \right)^{2/3}.$$

Como $b \approx 31Z_1Z_2A^{1/2}$ y $k \approx 8,61 \times 10^{-8} \text{ KevK}^{-1}$, es inmediato verificar que

$$E_0 \approx 1,22(Z_1^2Z_2^2AT_6^2)^{1/3}\text{Kev}, \quad E_0 \propto T^{2/3},$$

donde T_6 , adimensional, es la temperatura expresada en unidades de 10^6K , $T_6 = T/10^6$. Para temperaturas típicas en el interior del Sol, $T \sim 10^7\text{K}$, $E_0 \sim 10 - 30 \text{ Kev}$ para núcleos livianos. Este resultado refleja claramente que solo las partículas con más altas energías, las que se encuentran en la cola de la distribución de Boltzmann, son las que contribuyen a producir una reacción, ya que como dijimos la energía media de las partículas en el Sol tienen energías del orden de 1 Kev . Observar que el valor de E_0 en la Fig. 7.5 corresponde a $Z_1 = Z_2 = 1, A = 1/2, T \approx 10^7$, por tanto $E_0 \approx 1,22(0,5 \times 100)^{1/3}\text{Kev} \approx 4,94\text{Kev}$.

Siendo E_0 un extremo del exponente de la integral, desarrollamos $\psi(E)$ en serie de Taylor alrededor de E_0 ,

$$\psi(E) = \psi(E_0) + \underbrace{\psi'(E_0)}_{=0}(E - E_0) + \frac{1}{2}\psi''(E_0)(E - E_0)^2 + \dots,$$

y retenemos hasta el segundo orden. Evaluamos primero

$$\psi(E_0) = \frac{E_0}{kT} + \frac{b}{\sqrt{E_0}} = \frac{E_0^{3/2} + bkT}{kT\sqrt{E_0}} = \frac{E_0^{3/2} + 2E_0^{3/2}}{kT\sqrt{E_0}} = \frac{3E_0}{kT} \equiv \tau,$$

siendo $E_0 \propto T^{2/3}$, resulta $\tau \propto T^{-1/3}$. A partir de la expresión de $E_0 = (bkT/2)^{2/3}$ y la definición de τ , es inmediato mostrar que

$$\tau = BT^{-1/3},$$

con $B = 3(b^2/4k)^{1/3}$, expresando la temperatura en unidades de 10^6K y siendo $b \approx 31Z_1Z_2A^{1/2}$

$$\tau \approx 42,487 \left(\frac{Z_1^2Z_2^2A}{T_6} \right)^{1/3}. \quad (7.13)$$

Ahora debemos evaluar la derivada segunda; teniendo ya calculada la derivada primera

$$\psi'(E) = \frac{1}{kT} - \frac{b}{2E^{3/2}}, \quad \rightarrow \quad \psi''(E_0) = \frac{3b}{4E_0^{5/2}} \equiv \frac{1}{\Delta^2} > 0,$$

por tanto, siendo

$$\psi(E) \approx \psi(E_0) + \frac{1}{2}\psi''(E_0)(E - E_0)^2,$$

obtenemos

$$\psi(E) \approx \tau + \frac{1}{2\Delta^2}(E - E_0)^2.$$

Así en (7.12), siendo $S(E)$ una función aproximadamente constante, la extraemos de la integral evaluada en E_0

$$\lambda \approx \sqrt{\frac{8}{\pi\mu}} \frac{1}{(kT)^{3/2}} S(E_0) \int_0^\infty \exp\left(-\left(E/kT + b/\sqrt{E}\right)\right) dE,$$

reemplazamos el exponente del integrando por su desarrollo a segundo orden

$$\int_0^\infty \exp(-\psi(E)) dE \approx \exp(-\tau) \int_0^\infty \exp\left(-\frac{(E - E_0)^2}{2\Delta^2}\right) dE,$$

extendemos el intervalo de integración de $(0, \infty)$ a $(-\infty, \infty)$ ya que no habrá contribución significativa a la integral para $E < 0$, por lo que la misma resulta

$$\int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{(E - E_0)^2}{2\Delta^2}\right) dE = \sqrt{2\pi}\Delta.$$

Esto es, hemos aproximado el producto de las dos exponenciales por una distribución normal, con valor medio E_0 y varianza Δ^2 . De la Fig. 7.5, observamos que es una buena aproximación. Por tanto

$$\lambda \approx \sqrt{\frac{8}{\pi\mu}} \frac{1}{(kT)^{3/2}} S(E_0) \sqrt{2\pi}\Delta \exp(-\tau).$$

Ahora escribimos $\Delta = \sqrt{4E_0^{5/2}/3b}$ en términos de E_0 y T , eliminando b de la relación⁵ $E_0 = (bkT/2)^{2/3}$,

⁵La mayoría de todas estas derivaciones algebraicas se llevan a cabo en los trabajos prácticos.

$$\Delta = \sqrt{\frac{2}{3}}(E_0 kT)^{1/2},$$

que para $T \sim 10^7 \text{K}$, resulta $\Delta \sim 4 - 10 \text{Kev}$, que comparado con $E_0 \sim 10 - 30 \text{Kev}$, concluimos que el pico de Gamow es bastante angosto. Así reemplazando Δ en la expresión de λ ,

$$\lambda \approx \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{8}{\mu}} \sqrt{2} S(E_0) \exp(-\tau) \frac{E_0^{1/2}}{kT} = 4 \sqrt{\frac{2}{3\mu}} S(E_0) \exp(-\tau) \frac{E_0^{1/2}}{kT},$$

el factor

$$\frac{E_0^{1/2}}{kT} \propto \frac{T^{1/3}}{T} \propto T^{-2/3} \propto \tau^2, \quad \frac{E_0^{1/2}}{kT} = D\tau^2,$$

con $D = 2/9b$ y obtenemos

$$\lambda \approx \frac{8\sqrt{2}}{9\sqrt{3}} \frac{S(E_0)}{\sqrt{\mu}b} \tau^2 \exp(-\tau). \quad (7.14)$$

Finalmente, de (7.8) el rate resulta

$$r_{ax} = (1 + \delta_{ax})^{-1} \frac{8\sqrt{2}}{9\sqrt{3}} n_a n_X \frac{S(E_0)}{\sqrt{\mu}b} \tau^2 \exp(-\tau), \quad \tau = BT^{-1/3} \approx 42,487 (Z_1^2 Z_2^2 A / T_6)^{1/3}.$$

Cabe destacar la fuerte dependencia del rate de reacciones nucleares con la temperatura, de hecho varía muy rápidamente con T y decrece con la altura de la barrera coulombiana. Resulta sumamente complejo visualizar de esta expresión la dependencia de r_{ax} con T , por lo que suele aproximarse por una ley potencias. Supongamos que para T_0 , conocemos $\lambda(T_0)$. Entonces para una temperatura T próxima a T_0 , escribimos

$$\lambda = \lambda_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^\nu, \quad \nu = \frac{\partial \ln \lambda}{\partial \ln T},$$

donde ν es evaluado en T_0 . Para estimar ν , hacemos

$$\frac{\partial \ln \lambda}{\partial \ln T} = T \frac{\partial \ln \lambda}{\partial T},$$

de (7.14), resulta

$$\ln \lambda \approx 2 \ln \tau - \tau + c_0, \quad \ln \lambda \approx -\frac{2}{3} \ln T - BT^{-1/3} + c_1,$$

donde c_0 y c_1 son constantes, por tanto

$$\frac{\partial \ln \lambda}{\partial T} = -\frac{2}{3T} + \frac{1}{3}BT^{-4/3}, \quad \nu = T \frac{\partial \ln \lambda}{\partial T} = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}BT^{-1/3} = \frac{\tau - 2}{3}.$$

Para $T_0 \sim 10^7 \text{K}$, $4 \lesssim \nu \lesssim 180$, correspondiendo los menores valores para la reacción $p + p$ y los mayores para $\text{O}^{16} + \text{O}^{16}$, que surgen inmediatamente de la expresión de τ dada en (7.13) y la definición de ν .

Así se puede aproximar el rate $r_{ax} = (1 + \delta_{ax})^{-1} n_a n_x \lambda$ definido en (7.8) y (7.9) con

$$r_{aX} \approx (1 + \delta_{ax})^{-1} n_a n_x \lambda_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^\nu,$$

y utilizando las abundancias \bar{n}_a, \bar{n}_X en lugar de las densidades numéricas n_a, n_X (recordando que $\bar{n}_i = m_i n_i / \rho$, y que $m_i = A_i m_H$ con A_i el peso atómico de la especie i) resulta

$$r_{aX} \approx (1 + \delta_{aX})^{-1} \frac{1}{A_a A_X m_h^2} \bar{n}_a \bar{n}_x \rho^2 \lambda_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^\nu,$$

por lo que podemos expresar ϵ_{aX} definido en (7.2), $\epsilon_{aX} = Q_{aX} r_{aX} / \rho$, con una ley de potencias de la forma

$$\epsilon_{aX} \approx \epsilon_{0ax} \bar{n}_a \bar{n}_X \rho T^\nu,$$

donde T está expresada en unidades de T_0 y ϵ_{0ax} involucra Q_{aX} y demás constantes. De esta expresión se observa también la dependencia de ϵ_{aX} con las abundancias.

El ϵ total que aparece en la ecuación de liberación de energía (5.51) surge de sumar sobre todas las reacciones posibles de los pares a, X . Por tanto debe contemplarse el cambio en las abundancias de los elementos debido a las reacciones entre partículas X y a , con ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{d\bar{n}_X}{dt} = -\frac{m_H A_X}{\rho} r_{aX},$$

que surge naturalmente de $\bar{n}_X = m_H A_X n_X / \rho$ y de que $r_{aX} = dn_X / dt$ es la tasa por unidad de volumen de destrucción de partículas X por reacciones con las partículas a . Resulta claro que es necesario considerar tanto las reacciones que destruyen como las que crean este elemento X . Por lo tanto, el cómputo de ϵ y la evolución de la composición química requiere una detallada consideración de todas las posibles reacciones en una determinada cadena.

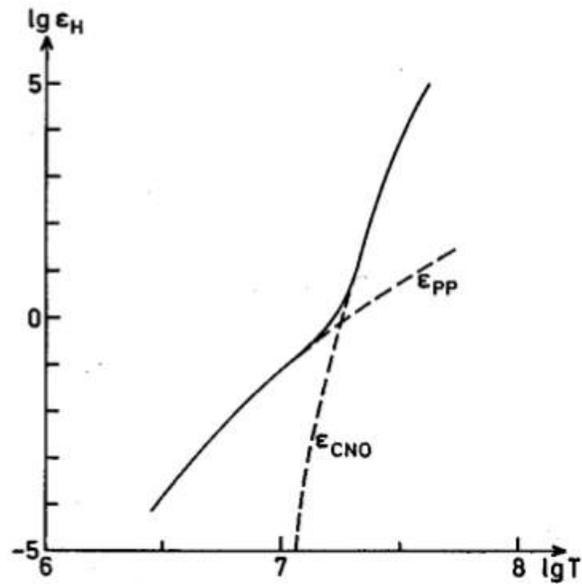


Figura 7.6: Rate de energía total liberada por la quema de hidrógeno (en $\text{erg s}^{-1}\text{g}^{-1}$) en función de la temperatura (en K), representada con la curva continua, tomando $\rho = 1 \text{ g cm}^{-3}$ y abundancias $\bar{n}_H \approx 1$ y $\bar{n}_{\text{CNO}} \approx 0,01$. La curva a trazos muestra la contribución de las cadenas p-p y el ciclo CNO, tomada de Kippenhahn y Weighert (1989).

En general, una dada reacción nuclear solo es importante en un rango limitado de temperaturas, para una temperatura típica del interior solar, $T_0 \approx 1,5 \times 10^7 \text{ K}$, surge que $\epsilon_{aX} \sim T^4$ para el ciclo p-p. Por el contrario, $\epsilon_{aX} \sim T^{20}$ para por ejemplo la reacción $\text{N}^{14}(p, \gamma)\text{O}^{15}$ en el ciclo CNO. Esta gran diferencia en la dependencia con la temperatura tiene como consecuencia que la cadena protón-protón domina a bajas temperaturas $T \lesssim 1,5 \times 10^7$ mientras que el ciclo CNO es el que domina a temperaturas mayores, $T \gtrsim 1,5 \times 10^7$, como lo muestra la Fig. 7.6.

7.4. Apéndice Capítulo 7

Para concluir estos capítulos correspondientes a la astrofísica estelar, resumiremos las principales ecuaciones que hemos derivado previamente, tanto para interior (geometría esférica) como para la atmósfera (geometría plana). Se remite a los capítulos correspondientes para las respectivas derivaciones y discusiones, que cabe mencionarlo, en general se trata de ecuaciones simplificadas.

7.4.1. Ecuaciones para el interior y la atmósfera

En la Tabla que sigue, la primera línea corresponde a las ecuaciones de equilibrio hidrostático; la segunda a la ecuación de estado, en el interior la expresión para P_e depende de si existe degeneración electrónica o no, en este último caso $P_i + P_e = P_g$; la tercera línea incluye la ecuación de liberación de energía para el interior, donde $L(r)$ corresponde a la luminosidad total independientemente del mecanismo de transporte y el equilibrio radiativo en la atmósfera; la cuarta incluye la ecuación de transporte radiativo donde, para el interior, se asume ETL y que sólo involucra a la luminosidad debida al transporte radiativo mientras que para la atmósfera, suponiendo ETL y scattering coherente e isotrópico, $S_\nu = \lambda_\nu B_\nu(T) + (1 - \lambda_\nu)J_\nu$; y la quinta línea, corresponde al gradiente de temperatura para el transporte convectivo. En caso de existir convección, $(dT/dr)_{\text{ad}} > (dT/dr)_{\text{rad}}$ y $dT/dr = (dT/dr)_{\text{ad}}$. Asimismo, para la determinación del rate de reacciones nucleares, ϵ , se deben incluir las ecuaciones correspondientes al cambio en las abundancias de los elementos debido a reacciones entre diferentes pares de partículas.

Interior	Atmósfera
1) $\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}\rho$, $\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2\rho$	$\frac{dP}{dz} = -g\rho$, $g = \frac{GM}{R^2}$
2) $P(\rho, T, C)$, $P = P_{\text{rad}} + P_i + P_e$	$P(\rho, T, C)$, $P = P_{\text{rad}} + P_g$
3) $\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2\rho\epsilon$, $\epsilon(\rho, T, C)$	$\pi\mathcal{F} = \sigma T_{\text{eff}}^4$, $\int_0^\infty \chi_\nu^e d\nu = \int_0^\infty k_\nu^a J_\nu d\nu$
4) $\frac{dT}{dr} = -\frac{3\bar{\kappa}}{16\pi ac} \frac{L_{\text{rad}}(r)}{r^2 T^3}$, $\bar{\kappa}(\rho, T, C)$	$\mu \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = S_\nu - I_\nu$, $S_\nu = \frac{\chi_\nu^e + \chi_\nu^s}{k_\nu^a + k_\nu^s}$
$\frac{dT}{dr} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr}$	

Dinámica de Sistemas Estelares

Capítulo 8

Cosmología Newtoniana

En este capítulo iniciamos el estudio de la dinámica de sistemas estelares y comenzaremos con el sistema más relevante, el Universo. Por tanto, en lo que sigue brindaremos una descripción simplificada de la Cosmología mediante un tratamiento clásico, que se conoce como Cosmología Newtoniana.

8.1. Corrimiento al rojo de las galaxias

El espectro de Andrómeda (M31) presenta un corrimiento hacia el azul $\Delta\lambda/\lambda$ que corregido por el movimiento solar, corresponde a una velocidad de aproximación de $\sim 100 \text{ Km s}^{-1}$. Esta galaxia integra el Grupo Local, al cual también pertenece la Vía Láctea y otro medio centenar de galaxias. Ciertamente Andrómeda y la Vía Láctea son las más masivas del grupo, cuyos tamaños rondan $\sim 1 \text{ Mpc}$. Sin duda la dinámica que observemos dentro de este elemento macroscópico de volumen del Universo está dominada o muy influida por la interacción entre sus principales miembros. En otros términos, estaremos observando una dinámica local.

Al observar galaxias más lejanas, los corrimientos al rojo predominan, y para distancias de varios Mpc ($\gtrsim 10 \text{ Mpc}$), todos los espectros presentan un corrimiento al rojo. Este es tal vez el resultado más importante de la “Cosmología moderna”, establecido por Hubble en 1930: el corrimiento al rojo exhibido por las galaxias es proporcional a su distancia; $z \propto r$ donde $z = \Delta\lambda/\lambda$.

En la Fig. 8.1, a la izquierda, se muestran los resultados originales de las observaciones de Hubble y Humason, publicados en 1931, donde se utilizaron variables Cefeidas como indicadores de distancia. En cambio, a la derecha se presentan resultados más recientes de esta correlación.

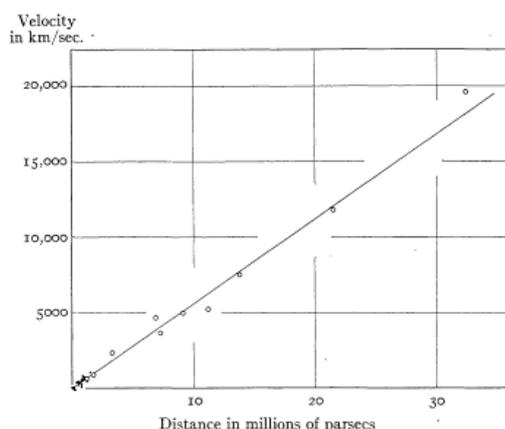


FIG. 5.—The velocity-distance relation. The circles represent mean values for clusters or groups of nebulae. The dots near the origin represent individual nebulae, which, together with the groups indicated by the lowest two circles, were used in the first formulation of the velocity-distance relation.

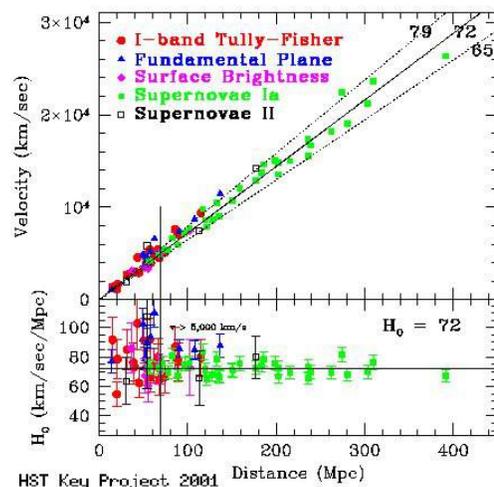


Figura 8.1: *Izquierda*: Figura extraída del artículo de Hubble & Humason de 1931. *Derecha*: Observaciones obtenidas con el Telescopio Espacial Hubble, tomada del sitio <https://lweb.cfa.harvard.edu/~dfabricant/huchra/hubble/>

Utilizando la aproximación

$$\frac{v}{c} \approx z,$$

válida para z pequeños, donde v es la velocidad radial relativa de una galaxia distante; esto es, suponiendo que el corrimiento al rojo es debido al efecto Doppler con $|z| \ll 1$, $z \propto r$ o $cz \propto r$ implica que $v \propto r$ y resulta la *Ley de Hubble*

$$v = H_0 r, \quad (8.1)$$

donde H_0 es la denominada *constante de Hubble* que tiene dimensiones inversas a las del tiempo, no obstante se la expresa en unidades más adecuadas de velocidades y distancias; $[H_0] = \text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$. Las observaciones más recientes y precisas, como se observa en el panel inferior de la Fig. 8.1 derecha, sitúan a H_0 en el intervalo

$$H_0 \approx 71 \pm 7 \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}.$$

El inverso de H_0 tiene dimensiones de tiempo, por lo que se define el *tiempo de Hubble*

$$t_H = H_0^{-1} \sim 1,2 \times 10^{10} \text{ a}$$

¹Ver la discusión correspondiente al corrimiento al rojo en la próxima Sección.

para el valor de H_0 señalado, por lo que t_H es una escala característica de tiempo en el Universo. Asimismo, podemos tener una escala de distancias del Universo, definiendo un “radio” $d_H = c/H_0 \sim 4,3 \times 10^3$ Mpc.

El desplazamiento al rojo registrado en los espectros de las galaxias distantes es ampliamente aceptado como evidencia de que la materia en el Universo se está alejando de nosotros; el Universo está en expansión y nosotros no ocupamos ninguna posición privilegiada en él. Más precisamente, el corrimiento al rojo observado es justamente debido a la expansión del Universo (o del espacio-tiempo), no se trata del clásico efecto Doppler que se aplica al desplazamiento de las líneas espectrales producto de la velocidad relativa entre el objeto emisor de la radiación y el observador. En principio, el z medido en los espectros tiene dos componentes, el dominante que es debido a la expansión y uno Doppler común, cuyo origen es el movimiento peculiar relativo de las galaxias distantes. Volveremos luego sobre este punto, una vez que hayamos establecido la cinemática del Universo.

Para hacer una formulación sencilla de la cinemática y dinámica del Universo, nos valemos del *Principio Cosmológico* en su versión más simple, que se puede resumir en

El Universo debe parecer el mismo para cualquier observador en él. Cada parte del Universo es idéntica a cualquier otra, excepto irregularidades locales que supondremos pequeñas.

Este principio implica:

1. **El principio galileano:** Las leyes de la física son (y han sido) las mismas en todo el Universo. Este principio tiene carácter metodológico: si las leyes de la física fueran diferentes en diferentes galaxias, no podríamos inferir lo que en ellas ocurre.
2. **El principio copernicano:** El Universo es homogéneo e isótropo. Este principio también tiene un origen metodológico: afirma que la estructura geométrica del Universo es la de un espacio simétrico.

Una formulación de la Cosmología debe ser realizada en el marco de la Relatividad General, con las ecuaciones de Einstein y una métrica adecuada, lo que está completamente fuera del alcance de este curso. En este capítulo consideraremos lo que se denomina *Cosmología Newtoniana*, donde utilizaremos una métrica euclídea, un tiempo único, universal y la validez de las transformaciones de Galileo.

8.2. Cinemática del Universo

A los efectos de toda la formulación que sigue, supondremos que el Universo se comporta como un fluido. Imaginemos tres observadores O, A y B. La posición de A relativa a O es \mathbf{r}_a , mientras que la de B relativa a O es \mathbf{r}_b , tal como se muestra en la Fig. 8.2.

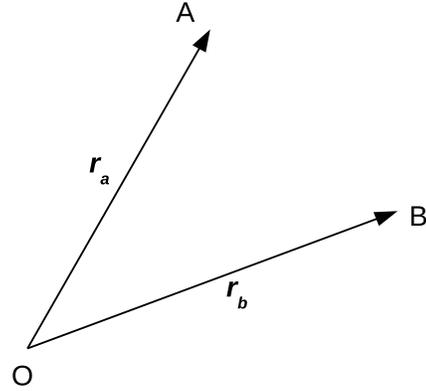


Figura 8.2: Tres observadores, O, A y B en el Universo.

Sea $\mathbf{v}_a(\mathbf{r}_a, t)$ la velocidad de A relativa a O, y $\mathbf{v}_b(\mathbf{r}_b, t)$ la correspondiente a B relativa a O en el mismo instante t . Por homogeneidad, las funciones $\mathbf{v}_a : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $\mathbf{v}_b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ deben ser idénticas; el campo de velocidades debe ser el mismo para cualquier observador, por lo tanto lo denotamos simplemente $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. Por otra parte, la velocidad de A relativa a B será $\mathbf{v}(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b, t)$. Siendo válidas las transformaciones de Galileo, debe ser²

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b, t) = \mathbf{v}(\mathbf{r}_a, t) - \mathbf{v}(\mathbf{r}_b, t).$$

Esta relación debe satisfacerse para todo \mathbf{r} , por lo que \mathbf{v} debe ser una función lineal de la posición,

$$\mathbf{v} = \mathbb{A}(t)\mathbf{r},$$

donde $\mathbb{A}(t)$ es un tensor o matriz de 3×3 . Por isotropía, debe ser

$$\mathbb{A}(t) = H(t)\mathbb{I}, \quad \text{o} \quad \mathbb{A}_{ij}(t) = H(t)\delta_{ij},$$

donde \mathbb{I} es la identidad y $H(t)$ un escalar que denominamos *parámetro de Hubble*, por lo que resulta

$$\mathbf{v} = H(t)\mathbf{r}. \tag{8.2}$$

²Alternativamente, ver ecuación (8.3) y discusión posterior.

Considerando la componente radial de esta relación, resulta $v = H(t)r$, donde r es la distancia entre dos observadores y v la velocidad relativa entre ellos.

Introducimos ahora coordenadas comóviles, $\mathbf{r}(t_0)$, que son las coordenadas referidas a un sistema no inercial de referencia que se expande al mismo ritmo que el Universo y están relacionadas con las posiciones físicas por

$$\mathbf{r}(t) = a(t)\mathbf{r}(t_0), \quad (8.3)$$

esto es, $\mathbf{r}(t_0)$ son las posiciones fijas en un determinado instante de tiempo t_0 y $a(t)$ es el factor de escala del Universo que absorbe toda la dinámica del mismo, como se ilustra esquemáticamente en la Fig. 8.3.

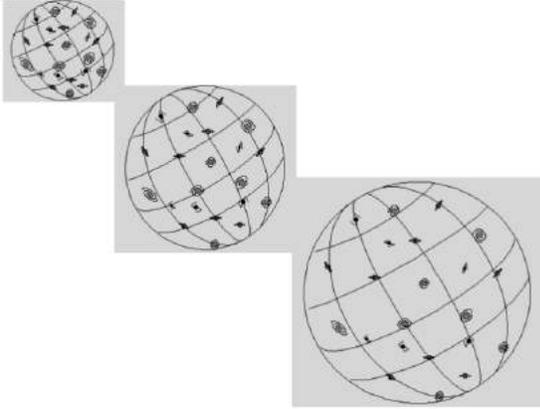


Figura 8.3: Ilustración del rol del factor de escala $a(t)$ y las coordenadas comóviles donde el tiempo es creciente de izquierda a derecha. Figura tomada de *lectures* de Licia Verde, Universidad de Barcelona.

La introducción de este sistema de coordenadas permite derivar alternativamente la relación (8.2). En efecto, de (8.3) resulta

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{a}(t)\mathbf{r}(t_0) + a(t)\underbrace{\dot{\mathbf{r}}(t_0)}_{=0} = \dot{a}(t)\mathbf{r}(t_0) = \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{r}(t) \equiv H(t)\mathbf{r}(t),$$

donde

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (8.4)$$

Así, la velocidad relativa entre dos observadores, uno en \mathbf{r} y otro en $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$, será

$$\Delta\mathbf{v} = H(t)\Delta\mathbf{r},$$

por tanto la velocidad relativa entre dos observadores es proporcional a la distancia que los separa y sólo tiene componente radial.

De (8.3) surge naturalmente que la distancia $r(t) = |\mathbf{r}(t)|$ entre dos observadores que al tiempo t_1 es $r(t_1)$ y que al tiempo t_2 es $r(t_2)$, siendo $r(t_i) = a(t_i)r(t_0)$, ellas están vinculadas por la relación

$$\frac{r(t_1)}{r(t_2)} = \frac{a(t_1)}{a(t_2)}. \quad (8.5)$$

8.2.1. Corrimiento al rojo cosmológico

Discutamos en este contexto el corrimiento al rojo observado. Si λ_{em} y $\lambda_{ob} > \lambda_{em}$ son las longitudes de onda emitida en t_{em} y observada en $t_{ob} > t_{em}$, el corrimiento al rojo, como ya lo señalamos, es

$$\frac{\lambda_{ob} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} = \frac{\lambda_{ob}}{\lambda_{em}} - 1 = z.$$

Ahora bien, en un Universo en expansión las longitudes de onda varían como todas las distancias, así de (8.5) resulta

$$\frac{\lambda_{ob}}{\lambda_{em}} = \frac{a(t_{ob})}{a(t_{em})} > 1,$$

y obtenemos para z

$$z = \frac{a(t_{ob})}{a(t_{em})} - 1 > 0. \quad (8.6)$$

El corrimiento al rojo cosmológico provee una medida de la expansión del Universo en el intervalo (t_{em}, t_{ob}) , que claramente no depende de la velocidad de recesión de las galaxias individuales, sino de la evolución del factor de escala $a(t)$.

El efecto Doppler, que es debido a la cinemática, puede arrojar valores de $z = \Delta\lambda/\lambda$ positivos o negativos (recesión o acercamiento de la galaxia emisora), mientras que el z dado por (8.6) es siempre positivo.

La relación $cz \approx v \propto r$ que utilizamos para derivar la Ley de Hubble (8.1), solo es lineal para $z \ll 1$, siendo esta una aproximación. Ciertamente, el efecto Doppler, para una fuente alejándose del observador a una velocidad relativa $v > 0$, nos dice que

$$1 + z = \frac{\lambda_{ob}}{\lambda_{em}} = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}},$$

denotando con $\xi = v/c$, tendremos

$$(1 + 2z + z^2)(1 - \xi) = 1 + \xi \quad \rightarrow \quad \xi(-z^2 - 2z - 2) + z^2 + 2z = 0,$$

y al invertir para $\xi = v/c$ resulta

$$\frac{v}{c} = \frac{2z + z^2}{2 + 2z + z^2} = \frac{2 + 2z + z^2 - 2}{2 + 2z + z^2} = 1 - \frac{2}{2 + 2z + z^2},$$

y desarrollando en serie de potencias $\eta(z) = 2/(2 + 2z + z^2)$ alrededor de $z = 0$ arroja

$$\eta(0) = 1, \quad \eta'(0) = -\frac{2(2 + 2z)}{(2 + 2z + z^2)^2} \Big|_{z=0} = -1, \quad \dots,$$

resultando

$$\frac{v}{c} = z - \frac{z^2}{2} + \dots$$

Por lo tanto, la aproximación $v/c \approx z$ es cierta para $z \ll 1$ y, en consecuencia la ley $v \propto r$ derivada a partir del efecto Doppler, solo es aplicable en cortas escalas de distancias.

Por otro lado, la expresión lineal $v = H_0 r$ es válida para cualquier distancia pues es precisamente la relación (8.2), $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = H(t)\mathbf{r}$, tomando su norma y evaluada en t_0 (ver próxima Sección) y es consecuencia natural de un efecto dinámico, la expansión de un Universo homogéneo e isotrópico.

En consecuencia, grandes valores de z no implican de ninguna manera velocidades de recesión de las galaxias mayores que c .

8.3. Dinámica del Universo

En esta descripción a gran escala, las galaxias, cúmulos de galaxias, etc. pueden considerarse, como hemos mencionado, dentro de un elemento de volumen macroscópico de densidad $\rho(t)$; por homogeneidad esta densidad no puede depender de \mathbf{r} , y como en esta teoría no existen ni fuentes ni sumideros de masa, debe satisfacerse la ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0,$$

y por (8.2), $\mathbf{v} = H(t)\mathbf{r}$ resulta

$$\dot{\rho} + \rho H(t) \nabla \cdot \mathbf{r} = 0.$$

Siendo $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$, esta última toma la forma

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} + 3H(t) = \frac{\dot{\rho}}{\rho} + 3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = 0,$$

donde hemos hecho uso de (8.4). Resulta inmediato integrar esta ecuación, resultando

$$\frac{d}{dt} (\ln(\rho(t)a^3(t))) = 0,$$

por lo que

$$\rho(t)a^3(t) = \rho(t_0)a^3(t_0).$$

Si elegimos $a(t_0) = 1$ resulta

$$\rho(t) = \frac{\rho(t_0)}{a^3(t)}. \quad (8.7)$$

Al elegir $a(t_0) = 1$ implica por (8.3), $\mathbf{r}(t) = a(t)\mathbf{r}(t_0)$, que t_0 es el presente, de manera que las posiciones físicas y las comóviles coinciden. Así, de la relación (8.4) resulta que

$$H(t_0) = \left. \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right|_{t_0} = \dot{a}(t_0),$$

por lo que el parámetro de Hubble evaluado en el presente no es otra cosa que la constante de Hubble, y así se reobtiene la relación (8.1).

Consideramos que la interacción es puramente gravitatoria pues en esta formulación clásica, por homogeneidad, no existen gradientes de presión.³ Por lo tanto las ecuaciones fundamentales se reducen a la ecuación de Euler con $\nabla P = 0$ y la ecuación de Poisson

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{g}, \quad \nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G\rho. \quad (8.8)$$

En la primera, utilizando que $\mathbf{v} = H(t)\mathbf{r}$,

$$\mathbf{g} = \frac{d}{dt} (H(t)\mathbf{r}) = \dot{H}(t)\mathbf{r} + H(t)\dot{\mathbf{r}} = \dot{H}(t)\mathbf{r} + H^2(t)\mathbf{r} = (\dot{H}(t) + H^2(t))\mathbf{r}.$$

Tomando la divergencia de esta última relación y utilizando la ecuación de Poisson obtenemos

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = (\dot{H}(t) + H^2(t)) \nabla \cdot \mathbf{r} = 3(\dot{H}(t) + H^2(t)) = -4\pi G\rho.$$

Reemplazando ρ por (8.7), obtenemos la siguiente ecuación diferencial para $H(t)$:

³En la formulación relativista, en cambio, los efectos de presión siempre están presentes, por ej. la debida a la radiación. En la aproximación no relativista, domina la materia, se desprecia la presión y suele referirse así a un Universo de polvo.

$$\dot{H}(t) + H^2(t) = -\frac{4}{3}\pi G \frac{\rho(t_0)}{a^3(t)}.$$

Denotando con $\rho_0 \equiv \rho(t_0)$ a la densidad del Universo en el presente y teniendo en cuenta (8.4), $H(t) = \dot{a}/a$, la última ecuación puede escribirse en términos de $a(t)$,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = -\frac{4}{3}\pi G \frac{\rho_0}{a^3(t)},$$

$$\frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = -\frac{4}{3}\pi G \frac{\rho_0}{a^3(t)},$$

que se reduce a

$$\ddot{a} + \frac{4}{3}\pi G \frac{\rho_0}{a^2} = 0.$$

De esta ecuación vemos claramente que $\ddot{a} \neq 0$ si $\rho_0 \neq 0$, lo que implica que no puede existir un Universo no vacío estático, sino que se desacelera por efecto de la gravedad. Cabe señalar que a esta misma ecuación arribó Einstein en 1917, pero como no se podía concebir en dicha época un Universo que no fuese estático, añadió sin justificación física alguna un término adicional en el primer miembro de la forma $-\Lambda a/3$, que corresponde a una fuerza repulsiva $\mathbf{F}_\Lambda = \Lambda \mathbf{r}/3$, de manera que en esta ecuación pueda satisfacerse que $\ddot{a} = 0$ sin requerir que $\rho_0 = 0$. La constante Λ , que tiene dimensiones de $[t^{-2}]$, es conocida como *constante cosmológica*.

Al surgir en 1930 las observaciones de Hubble, a partir de las cuales el Universo pareciera expandirse, Einstein sugirió que $\Lambda = 0$; no obstante, en los últimos años, han surgido argumentos teóricos por los cuales debería ser $\Lambda > 0$, que justificarían la inflación en el Universo, esto es, un período en cual la expansión es exponencial.⁴ Esta discusión, por cierto muy atractiva, está fuera del alcance de este curso; no obstante; al final de este capítulo dedicaremos un párrafo relativo a estas consideraciones.

La ecuación diferencial para $a(t)$ tiene una forma muy similar a la de un movimiento radial bajo efectos de un potencial inversamente proporcional a la distancia, por lo que es inmediato encontrar una integral primera, multiplicando esta última por \dot{a} ,

⁴En efecto, haciendo un análisis muy similar que nos condujo a la inestabilidad de Jeans, al considerar un Universo en expansión, una fluctuación o contraste de densidad inicial producto de fluctuaciones poissonianas en el Universo primitivo, éstas no crecen exponencialmente con el tiempo sino algebraicamente, por lo que en una escala de tiempo t_H dichas fluctuaciones en la densidad no alcanzan a crecer lo suficiente como para explicar los contrastes de densidad observados hoy entre las galaxias y su entorno.

$$\ddot{a} + \frac{4}{3}\pi G \rho_0 \frac{\dot{a}}{a^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}\dot{a}^2 - \frac{4}{3}\pi G \frac{\rho_0}{a} \right) = 0,$$

por lo que la integral de movimiento resulta

$$\dot{a}^2 - \frac{8}{3}\pi G \frac{\rho_0}{a} = -K. \quad (8.9)$$

Esta integral primera es formalmente análoga a la que se obtiene si se efectuara una formulación relativista reinterpretando $\rho_0 \rightarrow \epsilon/c^2$, siendo ϵ la densidad de energía total del Universo y K la constante de curvatura del espacio, y se conoce como *ecuación de Friedmann*. Hacia el final de esta sección, retomamos brevemente esta discusión.

Si evaluamos (8.9) en t_0 resulta

$$\dot{a}^2(t_0) - \frac{8}{3}\pi G \frac{\rho_0}{a(t_0)} = H_0^2 - \frac{8}{3}\pi G \rho_0 = -K$$

donde hemos reemplazado $\dot{a}(t_0) = H_0$ y $a(t_0) = 1$. Introduciendo este valor de K en (8.9) obtenemos

$$\dot{a}^2 - \frac{8}{3}\pi G \frac{\rho_0}{a} = H_0^2 \left(1 - \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_0 \right).$$

El factor delante de ρ_0 en el segundo miembro tiene dimensiones inversas a la de densidad, por lo que definimos

$$\rho_c \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G}, \quad (8.10)$$

y obtenemos

$$\dot{a}^2 - \frac{H_0^2}{a} \frac{\rho_0}{\rho_c} = H_0^2 \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_c} \right).$$

Finalmente, definiendo el parámetro

$$\Omega \equiv \frac{\rho_0}{\rho_c},$$

resulta

$$\dot{a}^2 - H_0^2 \frac{\Omega}{a} = H_0^2 (1 - \Omega), \quad (8.11)$$

siendo $-K = H_0^2 (1 - \Omega)$.

La solución a esta ecuación depende del valor de Ω (o K), si $\Omega < 1$; $\Omega = 1$ o $\Omega > 1$. Las soluciones correspondientes a $\Omega \neq 1$ se incluyen en el Apéndice a este Capítulo; aquí derivaremos la correspondiente a $\Omega = 1$ y daremos las expresiones de las soluciones para $\Omega \neq 1$. Así, haciendo $\Omega = 1$ en (8.11), que corresponde a $K = 0$, resulta

$$\dot{a}^2 = \frac{H_0^2}{a}, \quad \rightarrow \quad a^{1/2} da = H_0 dt, \quad \rightarrow \quad \frac{2}{3} \left(a^{3/2}(t) - a^{3/2}(t_*) \right) = H_0(t - t_*).$$

Si elegimos $t_* = 0$ tal que $a(t_*) = 0$ (big bang), obtenemos finalmente

$$a(t) = \left(\frac{3}{2} H_0 t \right)^{2/3}, \quad \Omega = 1. \quad (8.12)$$

De esta solución vemos que cuando $t \rightarrow \infty$, $a(t) \rightarrow \infty$ mientras que $\dot{a} \rightarrow 0$, resulta un Universo abierto que llega a infinito con velocidad nula, se suele referir a un Universo plano, pues $K = 0$. Este modelo, conocido como *modelo de Einstein-de Sitter*, nos permite estimar la edad del Universo, pues en el presente, $t = t_0$, debe ser $a(t_0) = 1$, lo que implica que $t_0 = 2/(3H_0) \approx 10^{10}$ a, y satisface que $\dot{a}(t) = (3H_0 t/2)^{-1/3} H_0$, evaluado en t_0 resulte $\dot{a}(t_0) = H_0$.

Las soluciones correspondientes a $\Omega \neq 1$, para constantes arbitrarias nulas, están dadas en términos de un parámetro η que parametriza a t y toman la forma (ver Apéndice),

$\Omega < 1$

$$a = \frac{\Omega}{2(1-\Omega)} (\cosh \eta - 1) \quad (8.13)$$

$$H_0 t = \frac{1}{2} \frac{\Omega}{(1-\Omega)^{3/2}} (\sinh \eta - \eta),$$

$\Omega > 1$

$$a = \frac{\Omega}{2(\Omega-1)} (1 - \cos \eta) \quad (8.14)$$

$$H_0 t = \frac{1}{2} \frac{\Omega}{(\Omega-1)^{3/2}} (\eta - \sin \eta).$$

En la Fig. 8.4 se representan estas tres soluciones que dan cuenta de modelos de Universos abiertos y cerrados. Notar que, en los tres casos, estas soluciones arrojan

para $\eta = 0$, $t = 0$, $a = 0$ y en $H_0 t_0 = 2/3$, $a(t_0)$ toma diferentes valores dependiendo de Ω o K . En el Apéndice a este capítulo se profundiza esta discusión.

En esta formulación clásica, es simple de entender físicamente estas soluciones. Si $\Omega < 1$ implica que $\rho_0 < \rho_c$; en el Universo no hay suficiente masa para que la gravedad frene la expansión y el Universo es abierto; en cambio para $\Omega > 1$, esto es, $\rho_0 > \rho_c$, la atracción gravitatoria es suficiente para frenar la expansión y producir el colapso, resultando en un Universo cerrado.

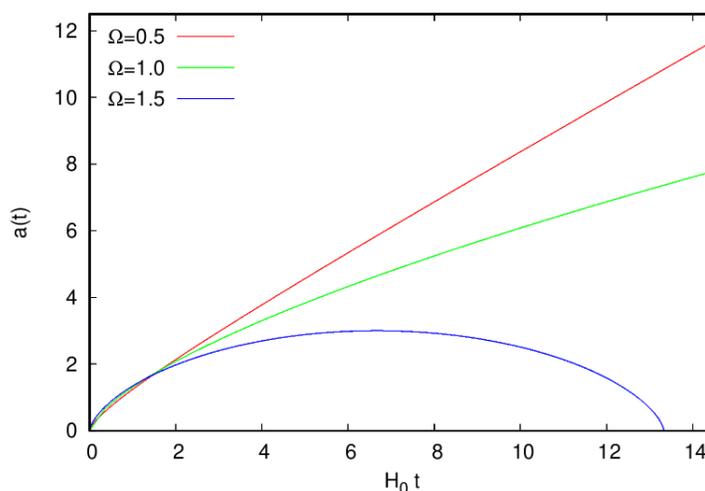


Figura 8.4: Soluciones a la ecuación de Friedmann, con constantes arbitrarias nulas, para el factor de escala en función de $H_0 t$ con $\Omega = 0,5, 1, 1,5$.

Si nos preguntamos en qué Universo estamos, la respuesta pareciera sencilla, bastaría determinar ρ_0 , la densidad del Universo en el presente y compararla con $\rho_c \sim 10^{-29} \text{ g cm}^{-3}$, siendo este valor del orden del correspondiente a seis protones por metro cúbico. Las estimaciones de la densidad correspondiente a la materia bariónica rondan $\rho_0 \sim 2 \times 10^{-31} \text{ g cm}^{-3}$, sensiblemente menor que ρ_c , como para cerrar el Universo, dando $\Omega_b \sim 0,02$. Sin embargo, habría suficiente evidencia de la existencia de materia no bariónica, materia oscura, cuya entidad no conocemos pero que sí interactúa gravitacionalmente. De consideraciones dinámicas, se estima que la contribución total de la materia (bariónica y oscura) conduce a $\Omega_m \approx 0,3$, esto es, la mayoría de la materia en el Universo sería oscura.⁵

⁵Corresponde mencionar que existe una teoría alternativa a la materia/energía oscura, que sugiere modificaciones a la ley de gravitación universal denominada *Dinámica Newtoniana Modificada (MOND)*, propuesta en 1983 por M. Milgrom que es claramente menos popular que la materia/energía oscura; y hay al menos otra teoría más que cuenta aún con menos adeptos. Es en definitiva un tema abierto, en lo personal, no soy un entusiasta de la hipótesis de materia/energía oscura.

Asimismo, en este mismo sentido, habría también evidencia clara de la existencia de energía oscura o energía de vacío, que contribuye significativamente con una componente Ω_Λ , por lo que formulaciones teóricas y resultados observacionales permitirían inferir que $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$, siendo $\Omega_\Lambda \approx 0,7$.

Considerando ambas contribuciones a Ω y recordando que la introducción de la constante cosmológica implica considerar una fuerza repulsiva, la ecuación de Euler (8.8) con $\mathbf{v} = H(t)\mathbf{r}$ resulta

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{g} + \frac{1}{3}\Lambda\mathbf{r} \quad \rightarrow \quad (\dot{H}(t) + H^2(t))\mathbf{r} = \mathbf{g} + \frac{1}{3}\Lambda\mathbf{r},$$

tomando la divergencia de esta última relación,

$$3(\dot{H}(t) + H^2(t)) = -4\pi G\rho + \Lambda, \quad \rightarrow \quad \dot{H}(t) + H^2(t) = -\frac{4}{3}\pi G\rho + \frac{\Lambda}{3},$$

donde hemos utilizado la ecuación de Poisson para $\nabla \cdot \mathbf{g}$. Siendo $\dot{H}(t) + H^2(t) = \ddot{a}/a$ y $\rho = \rho_0/a^3$ resulta

$$\ddot{a} + \frac{4\pi G\rho_0}{3a^2} - \frac{\Lambda a}{3} = 0.$$

Procediendo similarmente, buscamos una integral primera y obtenemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{a}^2}{2} - \frac{4\pi G\rho_0}{3a} - \frac{\Lambda a^2}{6} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{a}^2 - \frac{8}{3}\pi G \frac{\rho_0}{a} - \frac{1}{3}\Lambda a^2 = -K, \quad (8.15)$$

donde K da cuenta de la curvatura del Universo. Dividiendo (8.15) por a^2 resulta,

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{8}{3}\pi G \frac{\rho_0}{a^3} - \frac{1}{3}\Lambda = -\frac{K}{a^2},$$

que coincide con (8.9) cuando $\Lambda = 0$. Dividiendo esta última por H_0^2

$$\frac{\dot{a}^2}{H_0^2 a^2} - \frac{8}{3H_0^2}\pi G \frac{\rho_0}{a^3} - \frac{1}{3H_0^2}\Lambda = -\frac{K}{H_0^2 a^2}.$$

De acuerdo a (8.10) que define $\rho_c = 3H_0^2/(8\pi G)$, escribimos esta relación en términos de ρ_c

$$\frac{\dot{a}^2}{H_0^2 a^2} - \frac{\rho_0}{\rho_c} \frac{1}{a^3} + \frac{K}{H_0^2 a^2} = \frac{1}{3H_0^2}\Lambda,$$

e introduciendo los parámetros

$$\Omega_m = \frac{\rho_0}{\rho_c}, \quad \Omega_K = -\frac{K}{H_0^2}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^2},$$

la ecuación anterior puede reescribirse y arribamos a la ecuación de Friedmann adimensional

$$\frac{\dot{a}^2}{H_0^2 a^2} - \frac{\Omega_K}{a^2} = \frac{\Omega_m}{a^3} + \Omega_\Lambda. \quad (8.16)$$

Si evaluamos (8.16) en t_0 , recordando que $a(t_0) = 1, \dot{a}(t_0) = H_0$ resulta

$$1 - \Omega_K = \Omega_m + \Omega_\Lambda, \quad \rightarrow \quad \Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_K = 1.$$

Las observaciones sugieren que $\Omega_K = 0$ ($K = 0$), un Universo plano, la métrica es aproximadamente euclídea. En la Fig. 8.5 se ilustra esquemáticamente las geometrías, en el contexto de la Relatividad General, para una curvatura (constante) nula, positiva y negativa.

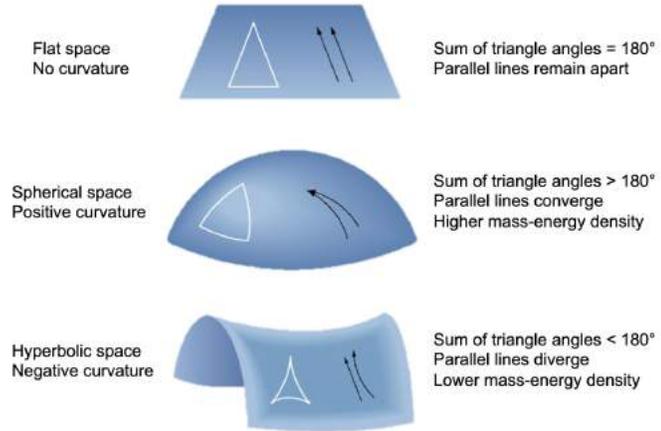


Figura 8.5: Representación esquemática en dos dimensiones de las geometrías dependiendo del valor de K .

Adoptando entonces $\Omega_K = 0$, la ecuación (8.16) se reduce a

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2 H_0^2} = \frac{\Omega_m}{a^3} + \Omega_\Lambda.$$

De manera similar a como procedimos para resolver (8.11), la solución a esta ecuación tiene la forma

$$a(t) = \left(\frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda} \right)^{1/3} \sinh^{2/3} \left(\frac{3}{2} \sqrt{\Omega_\Lambda} H_0 t \right),$$

con $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$.

Se deja como ejercicio obtener esta solución así como sus expresiones asintóticas

$$a(t) \approx \left(\frac{3}{2} \sqrt{\Omega_m} H_0 t \right)^{2/3}, \quad \frac{3}{2} H_0 t \ll 1,$$

$$a(t) \approx \left(\frac{\Omega_m}{4\Omega_\Lambda} \right)^{1/3} \exp \left(\sqrt{\Omega_\Lambda} H_0 t \right), \quad \frac{3}{2} H_0 t \gg 1,$$

esto es, una solución muy similar a (8.12) a tiempos cortos y otra exponencial a tiempos largos que da cuenta de la aceleración actual de la expansión del Universo.

8.4. Apéndice Capítulo 8

Aquí derivaremos y discutiremos las soluciones a la ecuación de Friedmann en un modelo de Universo dominado por materia.

8.4.1. Soluciones a la ecuación de Friedmann

La ecuación de Friedmann para un Universo de materia está expresada en (8.11),

$$\dot{a}^2 - H_0^2 \frac{\Omega}{a} = H_0^2(1 - \Omega),$$

y como se ha señalado, posee distintas soluciones analíticas dependiendo del valor de Ω . La solución para $\Omega = 1$ fue obtenida en (8.12),

$$a(t) = \left(\frac{3}{2}H_0 t\right)^{2/3},$$

sujeta a la condición inicial $a(0) = 0$ y que arroja $H_0 t_0 = 2/3$ para el presente, de manera que $a(t_0) = 1$, y $\dot{a}(t_0) = H_0$. Justifiquemos aquí las soluciones (8.13), (8.14).

$\Omega > 1$.

Esta elección de Ω equivale a considerar $K = -H_0^2(1 - \Omega) > 0$, que en el contexto de la Relatividad General implica curvatura positiva. La ecuación de Friedmann la reescribimos en la forma

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega}{a} - (\Omega - 1)\right), \quad (8.17)$$

que se reduce a

$$\frac{1}{H_0} \frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{\Omega - (\Omega - 1)a}{a}} \quad \rightarrow \quad H_0 dt = \frac{\sqrt{a} da}{\sqrt{\Omega - (\Omega - 1)a}},$$

integrando

$$H_0 t = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \int \frac{\sqrt{a} da}{\sqrt{1 - \frac{\Omega-1}{\Omega}a}}. \quad (8.18)$$

Introducimos el siguiente cambio de variables,

$$a = \frac{\Omega}{\Omega - 1} \sin^2 \theta, \quad da = \frac{\Omega}{\Omega - 1} 2 \sin \theta \cos \theta, \quad \sqrt{a} = \sqrt{\frac{\Omega}{\Omega - 1}} \sin \theta,$$

y (8.18) se reduce a

$$H_0 t = \frac{2}{\sqrt{\Omega}} \frac{\Omega}{\Omega - 1} \sqrt{\frac{\Omega}{\Omega - 1}} \int \frac{\sin^2 \theta \cos \theta d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} = \frac{2\Omega}{(\Omega - 1)^{3/2}} \int \sin^2 \theta d\theta.$$

Utilizando la relación

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}, \quad (8.19)$$

obtenemos

$$H_0 t = \frac{\Omega}{(\Omega - 1)^{3/2}} \left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right),$$

donde la constante arbitraria se supone nula y, definiendo $\eta =: 2\theta$, con $0 \leq \eta < 2\pi$ ⁶, obtenemos finalmente

$$H_0 t = \frac{\Omega}{2(\Omega - 1)^{3/2}} (\eta - \sin \eta) \quad (8.20)$$

que es precisamente la segunda de (8.13). Siendo

$$a = \frac{\Omega}{\Omega - 1} \sin^2 \theta,$$

y utilizando nuevamente la relación trigonométrica (8.19)

$$a = \frac{\Omega}{\Omega - 1} \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right),$$

que en términos de η resulta

$$a = \frac{\Omega}{2(\Omega - 1)} (1 - \cos \eta) \quad (8.21)$$

que es justamente la primera expresión en (8.13).

$\Omega < 1$.

Esta situación corresponde a $K < 0$ y el cómputo es análogo al caso $\Omega > 1$, simplemente reescribimos (8.17) en la forma

$$\left(\frac{da}{dt} \right)^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega}{a} + (1 - \Omega) \right),$$

⁶Alternativamente puede tomarse $\eta > 0$.

por lo que en (8.18) hacemos el reemplazo

$$-\frac{\Omega - 1}{\Omega} \rightarrow \frac{1 - \Omega}{\Omega},$$

y resulta

$$H_0 t = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \int \frac{\sqrt{a} da}{\sqrt{1 + \frac{1-\Omega}{\Omega} a}}.$$

Ahora efectuamos el siguiente cambio de variables

$$a = \frac{\Omega}{1 - \Omega} \sinh^2 \theta, \quad da = \frac{\Omega}{\Omega - 1} 2 \sinh \theta \cosh \theta, \quad \sqrt{a} = \sqrt{\frac{\Omega}{1 - \Omega}} \sinh \theta,$$

y similarmente al caso anterior obtenemos

$$H_0 t = \frac{2\Omega}{(1 - \Omega)^{3/2}} \int \sinh^2 \theta d\theta.$$

Utilizando que

$$\sinh^2 \theta = \frac{\cosh 2\theta - 1}{2} \rightarrow \int \sinh^2 \theta d\theta = \frac{\sinh 2\theta}{4} - \frac{\theta}{2},$$

en términos de $\eta = 2\theta$ finalmente resulta

$$H_0 t = \frac{\Omega}{2(1 - \Omega)^{3/2}} (\sinh \eta - \eta), \quad (8.22)$$

obteniendo así la segunda expresión de (8.14). Del cambio de variables introducido surge

$$a = \frac{\Omega}{1 - \Omega} \frac{\cosh 2\theta - 1}{2},$$

que en términos de η toma la forma

$$a = \frac{\Omega}{2(1 - \Omega)} (\cosh \eta - 1), \quad (8.23)$$

que reproduce la primera de (8.14).

Notemos que, tal como están definidas ambas soluciones, para $\eta = 0$ arrojan $t = 0, a = 0$, y estas soluciones, así como la correspondiente a $\Omega = 1$, son las que se muestran en la Fig. 8.4 para $\Omega = 0,5, 1,0, 1,5$.

8.4.2. Soluciones con $a(t_0) = 1$

Si imponemos la condición que $a(t_0) = 1$ con $t_0 = 2/(3H_0)$ para H_0t dado por las expresiones (8.20) y (8.22) que surgen de evaluar una integral indefinida, debemos adicionar una constante arbitraria que determinamos con dicha condición.

Para $\Omega > 1$ reescribimos (8.20) introduciendo una constante H_0t_* :

$$H_0(t - t_*) = \alpha(\eta - \sin \eta), \quad \alpha = \frac{\Omega}{2(\Omega - 1)^{3/2}},$$

que evaluada en $t_0 = 2/(3H_0)$ nos permite expresar esta constante en función del valor de η en t_0 , η_0 ,

$$H_0t_* = H_0t_0 - \alpha\eta_0 + \alpha \sin \eta_0 = \frac{2}{3} - \alpha\eta_0 + \alpha\sqrt{1 - \cos^2 \eta_0}.$$

A η_0 lo determinamos a partir de la expresión para a dada en (8.21) evaluada en t_0 y que debe ser $a = 1$,

$$a(\eta_0) = 1 = \beta(1 - \cos \eta_0), \quad \beta = \frac{\Omega}{2(\Omega - 1)}.$$

De esta última obtenemos

$$\cos \eta_0 = \frac{\beta - 1}{\beta} = \frac{2 - \Omega}{\Omega},$$

con $0 \leq \eta_0 < 2\pi$. Siendo

$$\alpha\sqrt{1 - \cos^2 \eta_0} = \frac{\Omega}{2(\Omega - 1)^{3/2}} \sqrt{1 - \frac{(2 - \Omega)^2}{\Omega^2}} = \frac{\Omega}{2(\Omega - 1)^{3/2}} \frac{2\sqrt{\Omega - 1}}{\Omega} = \frac{1}{\Omega - 1},$$

con

$$\tan \eta_0 = \frac{2\sqrt{\Omega - 1}}{2 - \Omega}, \quad \eta_0 > 0,$$

obtenemos finalmente para t_*

$$H_0t_* = \frac{2}{3} - \frac{\Omega}{2(\Omega - 1)^{3/2}} \arctan \left(\frac{2\sqrt{\Omega - 1}}{2 - \Omega} \right) + \frac{1}{\Omega - 1}.$$

Si consideramos $\Omega > 1$ el análisis es idéntico, reescribiendo (8.22)

$$H_0(t - t_*) = \alpha'(\sinh \eta - \eta), \quad \alpha' = \frac{\Omega}{2(1 - \Omega)^{3/2}},$$

evaluando en t_0

$$H_0 t_* = \frac{2}{3} + \alpha' \eta_0 - \alpha' \sinh \eta_0, \quad \text{donde} \quad \sinh \eta_0 = \sqrt{\cosh^2 \eta_0 - 1}.$$

Utilizando (8.23) para $a(\eta_0) = 1$

$$1 = \beta'(\cosh \eta_0 - 1), \quad \beta' = \frac{\Omega}{2(1 - \Omega)},$$

surge inmediatamente que

$$\cosh \eta_0 = \frac{\beta' + 1}{\beta'} = \frac{2 - \Omega}{\Omega},$$

y siendo que

$$\operatorname{argcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \in [1, \infty),$$

obtenemos para η_0

$$\eta_0 = \ln \left[\frac{2 - \Omega}{\Omega} + \frac{2\sqrt{1 - \Omega}}{\Omega} \right].$$

Así resulta

$$H_0 t_* = \frac{2}{3} + \frac{\Omega}{2(1 - \Omega)^{3/2}} \ln \left[\frac{2 - \Omega}{\Omega} + \frac{2\sqrt{1 - \Omega}}{\Omega} \right] - \frac{1}{\Omega - 1}.$$

La Fig. 8.6 muestra la solución a la ecuación de Friedmann con la condición inicial $a(t_0) = 1$ donde $H_0 t_0 = 2/3$ que denota el presente y para varios valores de Ω . En este caso, el instante del big bang crece con Ω como se muestra en la ampliación alrededor de $H t_0 = 2/3$.

De esta figura, se observa que todas las soluciones tienen la misma derivada en t_0 , y debe tomar el valor $\dot{a}(t_0) = H_0$, pues surge de imponer que $a(t_0) = 1$. Es simple verificar esto calculando \dot{a} y evaluarlo en t_0 , haciendo

$$\frac{da}{dt} = \frac{da}{d\eta} \frac{d\eta}{dt}.$$

Para $\Omega > 1$, de (8.20) y (8.21) resulta

$$\frac{da}{d\eta} = \frac{\Omega}{2(\Omega - 1)} \sin \eta, \quad \frac{dt}{d\eta} = \frac{1}{H_0} \frac{\Omega}{2(\Omega - 1)^{3/2}} (1 - \cos \eta),$$

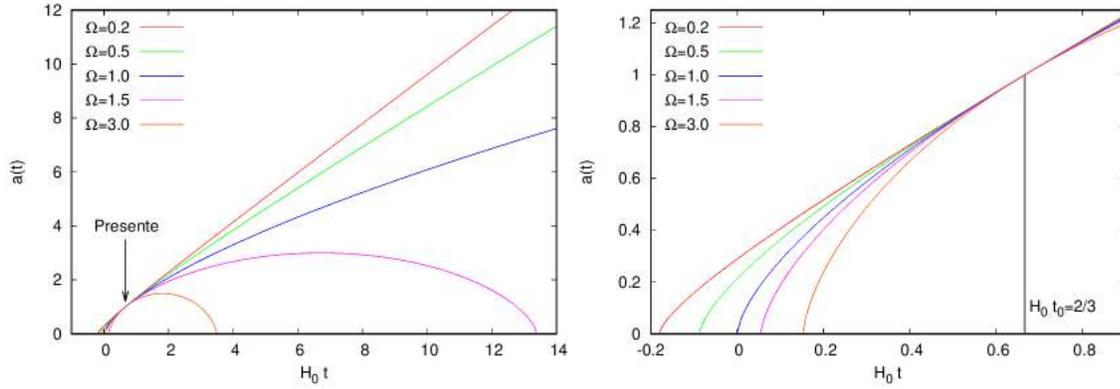


Figura 8.6: Soluciones a la ecuación de Friedmann para el factor de escala en función de $H_0 t$ con la condición $a(t_0) = 1$ tomando $\Omega = 0,2, 0,5, 1,0, 1,5, 3,0$.

por tanto

$$\frac{da}{dt} = H_0 \sqrt{\Omega - 1} \frac{\sin \eta}{1 - \cos \eta}.$$

Para $t = t_0$ ya hemos encontrado que

$$\cos \eta_0 = \frac{2 - \Omega}{\Omega}, \quad \sin \eta_0 = 2 \frac{\sqrt{\Omega - 1}}{\Omega},$$

por lo que resulta

$$\left. \frac{da}{dt} \right|_{t=t_0} = H_0 \sqrt{\Omega - 1} \left(2 \frac{\sqrt{\Omega - 1}}{\Omega} \right) \left(\frac{1}{1 - \frac{2 - \Omega}{\Omega}} \right) = 2H_0 \left(\frac{\Omega - 1}{\Omega} \right) \frac{\Omega}{2\Omega - 2} = H_0.$$

Similarmente, para $\Omega < 1$, de (8.22) y (8.23) es

$$\frac{da}{d\eta} = \frac{\Omega}{2(1 - \Omega)} \sinh \eta, \quad \frac{dt}{d\eta} = \frac{1}{H_0} \frac{\Omega}{2(1 - \Omega)^{3/2}} (\cosh \eta - 1),$$

resultando

$$\frac{da}{dt} = H_0 \sqrt{1 - \Omega} \frac{\sinh \eta}{\cosh \eta - 1}.$$

y a $t = t_0$ obtuvimos

$$\cosh \eta_0 = \frac{2 - \Omega}{\Omega}, \quad \sinh \eta_0 = 2 \frac{\sqrt{1 - \Omega}}{\Omega}.$$

Por tanto, procediendo exactamente como en el caso anterior,

$$\left. \frac{da}{dt} \right|_{t=t_0} = H_0 \sqrt{1 - \Omega} \left(2 \frac{\sqrt{1 - \Omega}}{\Omega} \right) \left(\frac{\Omega}{2 - 2\Omega} \right) = H_0.$$

Capítulo 9

Órbitas estelares

En el capítulo anterior, nos abocamos a la dinámica del Universo. En este nos centraremos en las trayectorias posibles de estrellas individuales en galaxias o cúmulos globulares. En el próximo capítulo justificaremos la importancia de estudiar trayectorias individuales en sistemas de $\sim 10^{12}$ estrellas. Sucintamente, mencionaremos que en el tratamiento estadístico de un gas supusimos que no existe interacción entre las partículas constituyentes del gas excepto las colisiones (que son fundamentales para que el gas alcance el equilibrio), de hecho consideramos que la energía es puramente energía cinética; por ello, en la distribución de Boltzmann por ejemplo, utilizamos en forma indistinta la energía o la velocidad, relacionadas por $E = mv^2/2$. En un sistema como una galaxia, es claro que existirá una interacción media muy relevante, que es el potencial generado por la propia distribución estelar, por lo que a priori, no podremos utilizar toda la maquinaria matemática de la mecánica estadística para describir un sistema de N estrellas dominadas por una interacción gravitatoria.

En este capítulo ignoraremos la interacción gravitatoria estrella-estrella y solo consideraremos el movimiento de una estrella de prueba en el campo gravitatorio medio generado por la distribución estelar. Como señalamos, en el próximo capítulo se profundizará esta discusión.

9.1. Órbitas en sistemas esféricos estacionarios

En un sistema estacionario y con simetría esférica, la densidad es independiente del tiempo y de cualquier coordenada angular, por lo que $\rho \equiv \rho(r)$. Si esta distribución de masa genera su propio potencial gravitatorio, se satisface la ecuación de Poisson, $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho(r)$, por lo que podremos derivar el potencial $\phi(r)$. Si bien $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, supondremos que la única dependencia es con r por lo que solo lo

consideraremos función de una única variable.

De cursos básicos en Mecánica conocemos que en un potencial esférico o problema de fuerzas centrales el momento angular se conserva, esto es, si $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, entonces

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0,$$

para todo punto (\mathbf{r}, \mathbf{p}) del espacio de fases. En lo que sigue, consideraremos el momento angular y demás variables por unidad de masa, esto es, por ej. $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$, lo que no implica una pérdida de generalidad en esta formulación.

La conservación del vector momento angular implica que la trayectoria yace en un plano, el plano normal al vector \mathbf{L} . En dicho plano, que contiene a la órbita, podemos introducir un sistema de coordenadas; vista la simetría central, resulta conveniente utilizar coordenadas polares (r, φ) para describirla, como se ilustra en la Fig. 9.1.¹

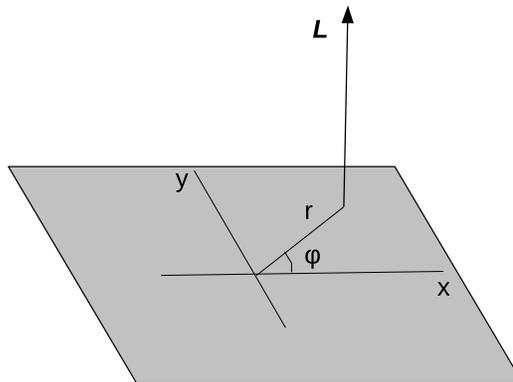


Figura 9.1: Plano de la trayectoria normal a \mathbf{L} .

Procuremos las ecuaciones de movimiento para una estrella de prueba en el potencial $\phi(r)$. Para ello utilizaremos la formulación de Lagrange. El lagrangiano por unidad de masa para las coordenadas y velocidades generalizadas adoptadas será

$$\mathcal{L}(r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi}) = T(r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi}) - \phi(r),$$

donde $\phi(r)$ es la energía potencial por unidad de masa, y T la energía cinética, también por unidad de masa. En coordenadas polares, resulta

$$T(r, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}^2,$$

¹También podríamos considerar coordenadas cartesianas (x, y) o cualquier otro conjunto de coordenadas que resulte conveniente en función de las simetrías.

y el lagrangiano es

$$\mathcal{L}(r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}^2 - \phi(r), \quad (9.1)$$

que es independiente de φ . Las ecuaciones de Lagrange se derivan de

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad q_i = r, \varphi.$$

De (9.1)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \dot{r}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = r^2 \dot{\varphi}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = r\dot{\varphi}^2 - \frac{d\phi}{dr}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0,$$

por lo que resulta inmediato obtener las siguientes ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 + \frac{d\phi}{dr} = 0, \quad (9.2)$$

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0.$$

La segunda en (9.2) da cuenta de la ley de conservación del módulo del momento angular, en particular $r^2\dot{\varphi} = L_z$, que corresponde a la componente z del momento angular. Ciertamente, habiendo elegido el plano de la trayectoria normal a \mathbf{L} , resulta claro que $L_z = \pm|\mathbf{L}| \equiv L$. Esta ley de conservación nos permitirá desacoplar los grados de libertad; en efecto de la primera en (9.2) escribimos

$$\ddot{r} - \frac{L^2}{r^3} + \frac{d\phi}{dr} = 0, \quad (9.3)$$

o alternativamente

$$\ddot{r} + \frac{d\phi_{\text{eff}}}{dr} = 0, \quad \phi_{\text{eff}}(r; L) = \phi(r) + \frac{L^2}{2r^2} \quad (9.4)$$

que se reduce a una simple ecuación de movimiento unidimensional en el potencial $\phi_{\text{eff}}(r; L)$, que solo depende de r e incluye L como parámetro, y cuya solución para trayectorias acotadas resultará periódica en t . La integración de (9.3) y $\dot{\varphi} = L/r^2$ nos permitirá conocer la solución a las ecuaciones de movimiento, $(r(t), \varphi(t))$, lo que en general no es posible hacerlo analíticamente para un potencial dado. No obstante,

podemos obtener mayor conocimiento del movimiento sin necesidad de especificar la interacción a partir de la ecuación de la trayectoria. En efecto, eliminamos el parámetro t que parametriza a la órbita y procuramos una expresión para $r(\varphi)$, la ecuación de la órbita en coordenadas polares. Para ello observamos que el operador

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{d}{d\varphi} = \frac{L}{r^2} \frac{d}{d\varphi},$$

donde hemos utilizado $\dot{\varphi} = L/r^2$ para escribir $d\varphi/dt$. Por tanto, la primera en (9.3), aplicando dos veces el operador d/dt a r y en términos de φ resulta

$$\frac{L^2}{r^2} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} \right) - \frac{L^2}{r^3} + \frac{d\phi}{dr} = 0.$$

Para simplificar esta ecuación diferencial hacemos el cambio de variables

$$u = \frac{1}{r}, \quad \frac{d}{dr} = \frac{du}{dr} \frac{d}{du} = -u^2 \frac{d}{du},$$

por lo que la ecuación de la trayectoria puede escribirse como

$$u^2 L^2 \frac{d}{d\varphi} \left(u^2 \underbrace{\left(-u^{-2} \frac{du}{d\varphi} \right)}_{dr/d\varphi} \right) - u^3 L^2 - u^2 \frac{d\phi}{du} = 0,$$

que resulta en

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u + \frac{1}{L^2} \frac{d\phi}{du} = 0. \quad (9.5)$$

Esta es la ecuación de la trayectoria, cuyas soluciones pueden ser de dos clases, como ya discutiremos: órbitas no ligadas donde $r \rightarrow \infty$ ($u \rightarrow 0$) y órbitas ligadas en las que u o r están acotados y variarán periódicamente entre dos límites finitos. Como estamos interesados en órbitas de estrellas que pertenecen a un sistema estelar, solo consideraremos en esta discusión trayectorias ligadas al sistema.

Consideremos (9.5) y multipliquémosla por $du/d\varphi$,

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} \frac{du}{d\varphi} + u \frac{du}{d\varphi} + \frac{1}{L^2} \frac{d\phi}{du} \frac{du}{d\varphi} = 0,$$

por lo que podemos escribir

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{L^2} \phi(u) \right) = 0.$$

Así, el término entre paréntesis resulta ser otra ley de conservación, que no es otra cosa que la conservación de la energía de la trayectoria. En efecto,

$$\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 + \frac{2}{L^2} \phi(u) = C,$$

donde resulta evidente que C tiene unidades de E/L^2 . Para hallar C , calculemos la energía para una órbita

$$E = \frac{1}{2} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2r^2} + \phi, \quad (9.6)$$

y siendo

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} = -L \frac{du}{d\varphi},$$

la energía resulta

$$E = \frac{1}{2} L^2 \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + \frac{1}{2} L^2 u^2 + \phi, \quad \rightarrow \quad \frac{2E}{L^2} = \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 + \frac{2}{L^2} \phi(u),$$

por lo que efectivamente observamos que $C = 2E/L^2$. Así la ley de conservación de la energía puede escribirse como

$$\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 - \frac{2}{L^2} (E - \phi(u)) = 0. \quad (9.7)$$

Para órbitas ligadas, existirán puntos de retorno, aquellos para los cuales

$$\frac{dr}{dt} \propto \frac{du}{d\varphi} = 0,$$

por lo que dichos puntos de retorno serán solución de la ecuación algebraica

$$u^2 - \frac{2}{L^2} (E - \phi(u)) = 0,$$

cuyas raíces dependerán solo de E y L . En los trabajos prácticos demostrarán que esta ecuación admite a lo sumo dos soluciones, $u_1 \leq u_2$ o $r_m = u_2^{-1}$ y $r_M = u_1^{-1}$,

donde $r_m(E, L) \leq r_M(E, L)$ son el radio mínimo y máximo o distancia apocentral y pericentral respectivamente. Esta ecuación algebraica, por (9.4), resulta equivalente a la condición $\phi_{\text{eff}}(r; L) = E$.

En otros términos, siendo un problema unidimensional para r , su solución será periódica, acotada al anillo o corona circular $r_m(E, L) \leq r \leq r_M(E, L)$, cuyo período lo podemos determinar a partir de la conservación de la energía (9.6),

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{2(E - \phi(r)) - L^2/r^2}, \quad \rightarrow \quad dt = \frac{dr}{\sqrt{2(E - \phi(r)) - L^2/r^2}}.$$

Como el período $T_r(E, L)$ será el doble del tiempo que le demanda a la trayectoria ir desde r_m a r_M , integramos entonces esta última entre estos límites y obtenemos

$$T_r(E, L) = 2 \int_{r_m(E, L)}^{r_M(E, L)} \frac{dr}{\sqrt{2(E - \phi(r)) - L^2/r^2}}. \quad (9.8)$$

La frecuencia del movimiento periódico en r , $\omega_r(E, L)$, estará dada por

$$\omega_r(E, L) = \frac{2\pi}{T_r(E, L)}. \quad (9.9)$$

En el tiempo T_r en el cual r varía de $r_m \rightarrow r_M \rightarrow r_m$, el ángulo φ se incrementará en $\Delta\varphi$, determinado por

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_m(E, L)}^{r_M(E, L)} d\varphi(r) = 2 \int_{r_m(E, L)}^{r_M(E, L)} \frac{d\varphi}{dr} dr = 2 \int_{r_m(E, L)}^{r_M(E, L)} \frac{d\varphi}{dt} \frac{dt}{dr} dr.$$

Reemplazando $d\varphi/dt = L/r^2$ y dt/dr por su expresión que nos condujo a (9.8) obtenemos

$$\Delta\varphi(E, L) = 2L \int_{r_m(E, L)}^{r_M(E, L)} \frac{dr/r^2}{\sqrt{2(E - \phi(r)) - L^2/r^2}}. \quad (9.10)$$

Podemos introducir una velocidad angular o frecuencia ω_φ

$$\omega_\varphi(E, L) = \frac{\Delta\varphi(E, L)}{T_r(E, L)}, \quad (9.11)$$

donde nuevamente esta frecuencia solo depende de las integrales de movimiento. De la definición de la frecuencia radial (9.9), podemos escribir

$$\frac{\omega_\varphi(E, L)}{\omega_r(E, L)} = \frac{\Delta\varphi(E, L)}{2\pi}. \quad (9.12)$$

Esta relación entre frecuencias o equivalentemente la inversa para T_r y $T_\varphi = 2\pi/\omega_\varphi$, nos dirá cómo es la trayectoria en el anillo $r_m(E, L) \leq r \leq r_M(E, L)$. Si para valores particulares de E y L el cociente

$$\frac{\Delta\varphi(E, L)}{2\pi} = \frac{m}{n}, \quad m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

es racional, las frecuencias o los períodos serán conmensurables,

$$\frac{\omega_\varphi(E, L)}{\omega_r(E, L)} = \frac{m}{n}, \quad \rightarrow \quad n\omega_\varphi(E, L) - m\omega_r(E, L) = 0,$$

y existirá entonces una *resonancia* entre las frecuencias en cada grado de libertad, por lo que la trayectoria, para los valores de E y L que satisfacen esta condición, resultará periódica, pues luego de m “oscilaciones” en φ y n en r , la órbita se cierra sobre sí misma. Por el contrario, si

$$\frac{\Delta\varphi(E, L)}{2\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},$$

esto es, el cociente es irracional, no habrá conmensurabilidad entre las frecuencias en cada grado de libertad; existirán dos frecuencias o períodos independientes y la órbita se dice *cuasiperiódica*, pues si bien el movimiento es periódico en r y en φ , sus frecuencias no son conmensurables. En este caso, cuando $t \rightarrow \infty$ la trayectoria llenará densa y uniformemente el anillo $r_m(E, L) \leq r \leq r_M(E, L)$.

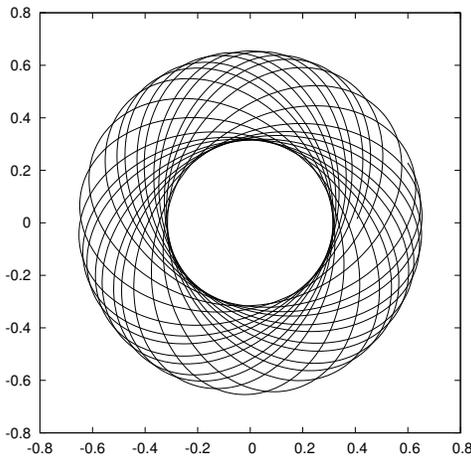


Figura 9.2: Órbita cuasiperiódica característica en un potencial central en el plano de la trayectoria. La misma corresponde a un potencial de la forma $\phi(r) = V_0 \ln(r^2 + a^2)$ con V_0 y a constantes.

En la Fig. 9.2 se representa una órbita típica en un sistema con simetría esférica, donde claramente se observa que la misma se encuentra contenida en un anillo que queda completamente determinado por los valores de E y L . Asimismo, puede verse que esta órbita cuasiperiódica, que está representada para un tiempo muy corto, cubriría densamente el anillo si la graficáramos entre $0 < t < \infty$.

En el caso del potencial de Kepler, donde $\phi(r) = -GM/r$, sabemos que las trayectorias ligadas son elipses centradas en uno de los focos; obviamente, se trata de trayectorias periódicas. Es simple determinar que $\Delta\varphi = 2\pi$ independientemente de los valores de E y L , por lo que $\omega_\varphi = \omega_r$, esto es existe una única frecuencia que como sabemos dependerá de la energía y no del momento angular (tercera Ley de Kepler, $\omega_\varphi \propto a^{-3/2}$, donde el semieje a depende solo de la energía). En otras palabras el sistema está siempre en resonancia, independientemente del valor de las integrales de movimiento.

En lugar de calcular $\Delta\varphi$, en la Fig 9.3 se representa esquemáticamente esta situación para la elipse en línea continua roja. Es simple observar que al variar r de $r_M \rightarrow r_m \rightarrow r_M$, φ se incrementa en 2π , por lo que la trayectoria se cierra luego de un período en r y uno en φ .

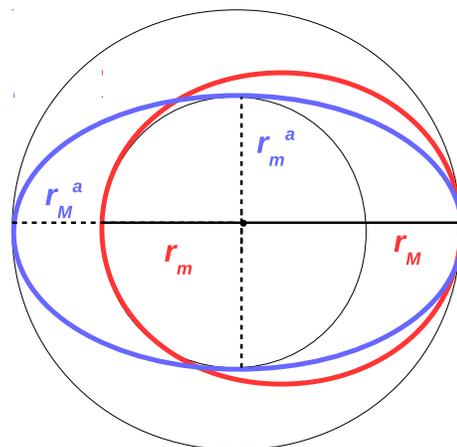


Figura 9.3: Representación muy esquemática de una elipse característica de una órbita kepleriana (en rojo) y de una órbita en el potencial correspondiente a un oscilador armónico esférico (en azul), ambas contenidas en el anillo.

Cabe destacar que este tipo de trayectorias no son las más frecuentes en sistemas de fuerzas centrales; solo ocurren en potenciales keplerianos y otros simples como el oscilador armónico esférico, esto es, con idénticas frecuencias constantes en cada grado de libertad. En este caso, para $\phi(r) = \Omega^2 r^2 / 2$, la órbita también es una elipse pero centrada en el origen como muestra la Fig 9.3 para la elipse en línea continua

azul. En este caso una variación en r entre $r_M^a \rightarrow r_m^a \rightarrow r_M^a$, $\Delta\varphi = \pi$, por lo tanto $\omega_r = 2\omega_\varphi$, relación que se satisface para todo E y L por lo que también está siempre en resonancia. Esto se observa más claramente al escribir el potencial en coordenadas cartesianas, $\phi(r) = \Omega^2(x^2 + y^2)/2$, la frecuencia en x y en y son constantes e idénticas.

9.1.1. Importancia de las integrales de movimiento en la dinámica

En un sistema dinámico de, por ejemplo, dos grados de libertad, el espacio de fases, F , tendrá dimensión 4. Denotemos con (q_1, q_2) las coordenadas y con (p_1, p_2) los impulsos canónicos conjugados. Para un potencial independiente del tiempo, resulta naturalmente la conservación de la energía, por lo que el hamiltoniano $H(q_1, q_2, p_1, p_2) = E$ define cierta superficie, M_E , de dimensión 3 en F .

En esta discusión supusimos un potencial central por lo que la conservación del momento angular $|\mathbf{L}(q_1, q_2, p_1, p_2)| = L$ determina otra superficie, Σ_L , también de dimensión 3 en F . Una trayectoria en un sistema esférico debe respetar ambas leyes de conservación, por lo que estará confinada a la intersección de ambas, esto es, si γ denota dicha órbita con energía E y momento angular L , $\gamma \in M_E \cap \Sigma_L$, donde $\dim(M_E \cap \Sigma_L) = 2$. Este subespacio (técnicamente una *variedad*) de dimensión 2 es topológicamente equivalente a un toro bidimensional, esto es $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, o el producto directo de dos círculos, como se ilustra en la Fig. 9.4 y su generalización a N dimensiones.

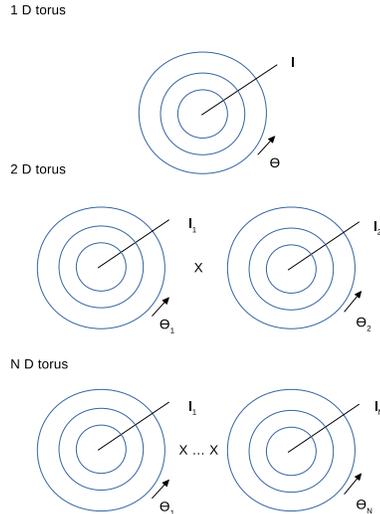


Figura 9.4: Representación de toros de dimensión 1, 2 y N donde I_i denota una ley de conservación, para dimensión 1, $I = E$, dimensión 2, $I_1 = E$ y si se conserva el momento angular, $I_2 = L$.

Se denominan *toros invariantes* pues fijadas las integrales E, L , el movimiento quedará confinado a un determinado toro y el mismo será en general cuasiperiódico, cubriendo densa y uniformemente el toro.

Si para valores particulares de las integrales de movimiento que definen el toro ocurre que $m\omega_\varphi(E, L) = n\omega_r(E, L)$, $m, n \in \mathbb{Z}$, entonces el movimiento será periódico, pues luego de n revoluciones en φ y m oscilaciones en r la trayectoria se cerrará sobre sí misma. Nótese que esta condición es local para valores particulares de E y L , no es una ley de general y da lugar a lo que se denominan *toros resonantes*.

En caso de existir alguna otra ley de conservación adicional general, existirá otra superficie que restringirá el movimiento a dimensión 1, una curva cerrada o trayectoria periódica. Para el potencial de Kepler, dicha ley adicional, propia de este potencial $1/r$, puede asimilarse a que toda trayectoria siempre está en resonancia $1 : 1$, $\omega_\varphi(E) = \omega_r(E)$, $\forall E$, situación que solo ocurre en este potencial. Por esta razón se dice que el movimiento en el potencial $1/r$ es degenerado, el movimiento siempre corresponde a una trayectoria periódica (similarmente ocurre con el potencial armónico).

Si generalizamos a N dimensiones, el espacio de fases F tendrá dimensión $2N$, y una ley de conservación general es una hipersuperficie de dimensión $2N - 1$. Sólo cuando existen N integrales de movimiento independientes el movimiento tendrá lugar en un toro invariante de dimensión N . Eso es, si el sistema tiene dimensión 1 y es conservativo, la energía se preserva y el movimiento siempre ocurre en un toro unidimensional que queda completamente especificado por el valor de la energía. Si la dimensionalidad fuese 2, además de la energía, se requiere otra ley de conservación independiente para que el movimiento tenga lugar en un toro de dimensionalidad 2 y similarmente para más dimensiones.

En efecto, supongamos que el sistema tiene dimensión N y que su dinámica está descrita por un hamiltoniano, $H(p_1, p_2, \dots, p_N, q_1, q_2, \dots, q_N)$ independiente del tiempo. Si existe una transformación canónica de $(p_i, q_i) \rightarrow (P_i, Q_i)$ tal que el hamiltoniano transformado sólo depende de los nuevos impulsos, $\bar{H}(P_1, P_2, \dots, P_N)$, todos los P_i son integrales de movimiento pues, de las ecuaciones de Hamilton,

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_i} = 0, \quad \dot{Q}_i = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_i} = \omega_i(P_1, P_2, \dots, P_N),$$

donde ω_i es constante pues sólo depende de los P_i . Por lo tanto

$$Q_i(t) = \omega_i(P_1, P_2, \dots, P_N)t + Q_i^0,$$

con Q_i^0 constante. Si efectivamente existe dicha transformación canónica, a los nuevos impulsos se los denota con I_i y a las nuevas coordenadas con θ_i , que se conocen como

variables *ángulo-acción*, pues coordenadas que varíen linealmente con el tiempo sólo pueden ser coordenadas angulares ², justamente las que describen el movimiento en el toro invariante definido por I_1, I_2, \dots, I_N .

De esta discusión queda claro la relevancia de las leyes de conservación o, dicho en otros términos, el establecer la existencia de integrales de movimiento globales en potenciales representativos de diversos sistemas astronómicos y físicos. En el caso de un campo central, si solo existiese la conservación de la energía, $H(q_1, q_2, p_1, p_2) = E$ el movimiento solo estaría confinado a la hipersuperficie M_E de dimensión 3 en F , que definitivamente no es un toro invariante, pero cuya descripción es mucho más sencilla en términos estadísticos. De hecho, esta suposición es la base de la formulación de la mecánica estadística.

En general, para un potencial galáctico, solo existirá una única ley de conservación global que es $H = E$ y otras leyes de conservación locales que hacen que la dinámica resulte sumamente compleja de describir. En la sección siguiente daremos algunos lineamientos de este problema, no obstante en un curso de Dinámica No Lineal se aborda este problema de manera general.

9.2. Órbitas en potenciales sin simetría esférica

Consideremos ahora un sistema donde la densidad $\rho \equiv \rho(r, \varphi)$, por lo que suponemos que el potencial generado por esta distribución será $\phi(r, \varphi)$. En esta sección describiremos las órbitas posibles en este tipo de potenciales. Al existir dependencia del potencial con φ ya no se conservará el momento angular (como ya lo discutiremos) por lo que no se puede garantizar que la trayectoria quede confinada a un plano, por ello, nos limitaremos a estudiar por ejemplo las órbitas estelares en un plano ecuatorial o meridional de una galaxia.³

Para esta descripción, utilizaremos la formulación hamiltoniana en vez de la lagrangiana y para ello debemos encontrar los impulsos canónicos conjugados a r y φ . De (9.1), el lagrangiano para este potencial será

$$\mathcal{L}(r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}^2 - \phi(r, \varphi),$$

por lo que los impulsos conjugados serán

²Se puede demostrar que efectivamente son coordenadas angulares.

³En un curso de Dinámica Estelar se avanzará sobre la extensión de este análisis a órbitas en el espacio tridimensional. Por ejemplo, las órbitas confinadas a un plano meridional en general resultan inestables ante perturbaciones normales a dicho plano.

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \dot{r}, \quad p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = r^2 \dot{\varphi} = L.$$

El hamiltoniano correspondiente se construye a partir de

$$H(r, \varphi, p_r, p_\varphi) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{p})),$$

donde $\mathbf{p} = (p_r, p_\varphi)$, $\mathbf{q} = (r, \varphi)$, y las velocidades generalizadas deben expresarse en términos de los impulsos canónicos. De esta última y las definiciones de p_r y p_φ , resulta

$$H(r, \varphi, p_r, p_\varphi) = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\varphi^2}{2r^2} + \phi(r, \varphi). \quad (9.13)$$

Al efecto del análisis que aquí haremos, introducimos la siguiente suposición respecto del potencial: ϕ depende de las coordenadas cartesianas (x, y) en el plano de la trayectoria, $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, a través de

$$m_q(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{q^2}, \quad q \lesssim 1,$$

esto es

$$\phi(x, y) = \Phi(m_q(x, y)),$$

donde Φ es una función suave para todo (x, y) . Esta suposición implica que las equipotenciales son elipses, así como las curvas de densidad constante para q no demasiado pequeño, pues consideraremos que el potencial y la densidad deben satisfacer la ecuación de Poisson.

Analicemos primero, en coordenadas cartesianas, ciertas órbitas periódicas que resultan relevantes. El lagrangiano en estas coordenadas es

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\dot{y}^2}{2} - \phi(x, y),$$

por lo que los impulsos conjugados son $p_x = \dot{x}$, $p_y = \dot{y}$ y el hamiltoniano puede escribirse como

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + \Phi(m_q(x, y)). \quad (9.14)$$

Las ecuaciones de Hamilton resultan

$$\begin{aligned}
 \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{d\Phi}{dm_q} \frac{\partial m_q}{\partial x} = -2\Phi'(m_q)x, \\
 \dot{p}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{d\Phi}{dm_q} \frac{\partial m_q}{\partial y} = -2\Phi'(m_q)\frac{y}{q^2}, \\
 \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = p_x, \\
 \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial p_y} = p_y,
 \end{aligned} \tag{9.15}$$

donde ' denota derivación respecto a m_q y debe satisfacerse que $\Phi'(m_q) > 0$ para que $\phi = \Phi(m_q(x, y))$ de lugar a un campo atractivo.

Analicemos el flujo hamiltoniano (9.15), en particular los espacios invariantes. Si elegimos $y = p_y = 0$, el movimiento solo tiene lugar sobre el eje x , resultando una órbita periódica a lo largo del eje mayor del potencial. Similarmente, fijando $x = p_x = 0$ no habrá dinámica en x y la trayectoria resultante estará confinada al eje y , siendo otra órbita periódica axial, en este caso de eje menor. Nótese que para $q = 1$ (simetría central) ambas trayectorias periódicas son equivalentes, lo mismo ocurriría para cualquier otra dirección.

Ahora escribamos m_q en términos de r y φ , siendo $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$, resulta

$$\begin{aligned}
 m_q &= x^2 + \frac{y^2}{q^2} = r^2 \left(\cos^2 \varphi + \frac{1}{q^2} \sin^2 \varphi \right) = r^2 \left(1 - \sin^2 \varphi + \frac{1}{q^2} \sin^2 \varphi \right) \\
 &= r^2 \left(1 + \frac{1 - q^2}{q^2} \sin^2 \varphi \right).
 \end{aligned}$$

Llamando $\varepsilon = (1 - q^2)/q^2 \geq 0$ que suponemos pequeño, pues $q \lesssim 1$, renombrando $m_q \rightarrow m_\varepsilon$ encontramos que

$$m_\varepsilon = r^2 \left(1 + \varepsilon \sin^2 \varphi \right),$$

así $\phi(r, \varphi) = \Phi(m_\varepsilon(r, \varphi))$. Como el potencial depende de φ , existirá un torque N

$$N = -\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = -\Phi' \frac{\partial m_\varepsilon}{\partial \varphi} = -2\varepsilon r^2 \Phi' \sin \varphi \cos \varphi = -\varepsilon r^2 \Phi' \sin 2\varphi, \quad \Phi' > 0.$$

El torque se anulará en

$$\varphi = n\frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

mientras que

$$N < 0 \quad \text{si} \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad \pi < \varphi < \frac{3}{2}\pi,$$

$$N > 0 \quad \text{si} \quad \frac{\pi}{2} < \varphi < \pi, \quad \frac{3}{2}\pi < \varphi < 2\pi.$$

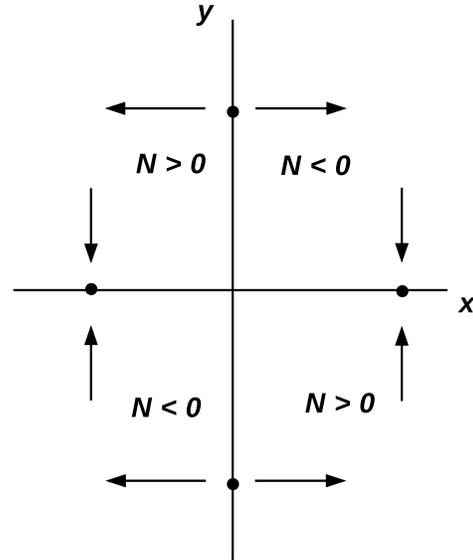


Figura 9.5: Sobre los ejes el torque se anula, como se indica con un punto. Las flechas señalan la dirección del torque, considerando positivo un torque en sentido contrario al giro de las agujas de un reloj.

En la Fig. 9.5 se representa la acción del torque sobre las órbitas periódicas de eje x e y , dependiendo del signo de N . Sobre ambos ejes el torque es nulo; no obstante, su efecto es muy distinto sobre cada órbita periódica. Ante una perturbación normal a la trayectoria periódica de eje x , el efecto del torque es restituir el movimiento hacia el eje, mientras que sobre la órbita periódica de eje y el efecto es el inverso; ante una ligera perturbación normal a esta órbita, el torque tiende a alejar la misma de su espacio invariante. Con este simple análisis, concluimos que la órbita periódica de eje x es estable, mientras que la de eje y (el eje menor) es inestable. Nótese que esta argumentación es independiente del valor de ε .

En un sistema con simetría central, las órbitas radiales o axiales son estables (siempre que el potencial sea suave en el origen); al romper la simetría, la órbita de eje mayor se mantiene estable mientras que la de eje menor se torna inestable. Este hecho tiene consecuencias dinámicas significativas, en particular dará lugar a la aparición de una nueva familia orbital que no existe en los sistemas esféricos, tal como discutiremos a continuación.

En términos de las coordenadas polares,

$$\phi(r, \varphi) = \Phi(m_\varepsilon(r, \varphi)) = \Phi(r^2 + \varepsilon r^2 \sin^2 \varphi)$$

y suponiendo $\varepsilon \ll 1$, desarrollamos ϕ en potencias de $\varepsilon r^2 \sin^2 \varphi$ teniendo en cuenta que $\Phi(m_\varepsilon(r, \varphi))|_{\varepsilon=0} = \Phi(r^2)$ y similarmente para $d\Phi/dm_\varepsilon \equiv \Phi'$ al evaluarlo en $\varepsilon = 0$,

$$\phi(r, \varphi) = \Phi(r^2) + \Phi'|_{\varepsilon=0} r^2 \varepsilon \sin^2 \varphi + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (9.16)$$

si reemplazamos $\sin^2 \varphi = (1 - \cos 2\varphi)/2$; y si retenemos solo los términos a $\mathcal{O}(\varepsilon)$, $\phi(r, \varphi)$ toma la forma

$$\phi(r, \varphi) \approx \underbrace{\Phi(r^2) + \frac{1}{2}\varepsilon r^2 \Phi'(r^2)}_{\phi_0(r)} - \frac{\varepsilon}{2} \underbrace{r^2 \Phi'(r^2)}_{\phi_1(r) > 0} \cos 2\varphi,$$

donde ϕ_0, ϕ_1 son funciones suaves de r y el potencial aproximado puede escribirse como

$$\phi(r, \varphi) \approx \phi_0(r) - \frac{\varepsilon}{2} \phi_1(r) \cos 2\varphi, \quad \varepsilon \ll 1.$$

Esta expresión del potencial nos permite tratar el problema en forma perturbativa, esto es, un movimiento en un campo central $\phi_0(r)$ del cual conocemos su solución, al que se lo perturba ligeramente quebrando la simetría esférica. Con esta aproximación, el hamiltoniano (9.13) -que reescribimos-

$$H(r, \varphi, p_r, p_\varphi) = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\varphi^2}{2r^2} + \phi(r, \varphi),$$

a orden $\mathcal{O}(\varepsilon)$ se reduce a

$$H(r, \varphi, p_r, p_\varphi) = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\varphi^2}{2r^2} + \phi_0(r) - \frac{\varepsilon}{2} \phi_1(r) \cos 2\varphi,$$

y las ecuaciones de Hamilton correspondientes resultan

$$\begin{aligned} \dot{p}_\varphi &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -\varepsilon \phi_1(r) \sin 2\varphi = N, \\ \dot{p}_r &= -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\varphi^2}{r^3} - \frac{d\phi_0}{dr} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{d\phi_1}{dr} \cos 2\varphi, \\ \dot{\varphi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{r^2}, \\ \dot{r} &= \frac{\partial H}{\partial p_r} = p_r, \end{aligned} \quad (9.17)$$

En la segunda ecuación de (9.17) es claro que el último término del segundo miembro es una pequeña perturbación al movimiento, que estará dominado por los primeros dos términos y dan cuenta de la dinámica en el campo central $\phi_0(r)$ con un momento angular p_φ que variará pero dicha variación será de $\mathcal{O}(\varepsilon)$ y por tanto no es de esperar un cambio significativo en el movimiento radial respecto del correspondiente a $\phi_0(r)$.

En cambio, en la primera ecuación en (9.17), si bien el segundo miembro es pequeño, es claro que sí modificará la dinámica tangencial, pues implica la variación del momento angular debido a la dependencia del potencial con φ . Para $\varepsilon = 0$ ($q = 1$), recuperamos la simetría central y el impulso angular se conserva, pero para $\varepsilon \neq 0$ ($q \lesssim 1$), p_φ deja de ser una integral de movimiento, por lo que el análisis realizado al final de la Sección anterior pareciera no ser aplicable; solo contaríamos con una única ley de conservación, la energía $H(r, \varphi, p_r, p_\varphi) = E$.

Concentrémonos en la dinámica en φ y para ello “congelemos” la dinámica en r . Ello implica fijar el valor de r en un $r_0 = \text{cte}$ arbitrario pero no demasiado pequeño.⁴ Con esta aproximación, de las cuatro ecuaciones en (9.17), solo nos ocupamos de las que involucran a la dinámica en φ . Para ello escribimos

$$\dot{p}_\varphi = \frac{dp_\varphi}{dt} = \frac{dp_\varphi}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt}$$

y de la primera y tercera ecuación en (9.17) resulta

$$\frac{dp_\varphi}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -\varepsilon\phi_1(r) \sin 2\varphi, \quad \rightarrow \quad \frac{p_\varphi}{r^2} \frac{dp_\varphi}{d\varphi} = -\varepsilon\phi_1(r) \sin 2\varphi.$$

Fijamos entonces $r = r_0$ obtenemos

$$p_\varphi \frac{dp_\varphi}{d\varphi} = -\varepsilon r_0^2 \phi_1(r_0) \sin 2\varphi,$$

o equivalentemente

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{2} p_\varphi^2 - \frac{\varepsilon}{2} r_0^2 \phi_1(r_0) \cos 2\varphi \right) = 0.$$

Siendo $\varepsilon r_0^2 \phi_1(r_0) > 0$ y constante, denotamos

$$\omega_0^2(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2} r_0^2 \phi_1(r_0),$$

y resulta una nueva ley de conservación que involucra al momento angular

$$K(p_\varphi, \varphi) \equiv \frac{1}{2} p_\varphi^2 - \omega_0^2(\varepsilon) \cos 2\varphi = k. \quad (9.18)$$

⁴En un curso de Dinámica se justifica esta aproximación mediante *averaging* o promediado sobre fases o ángulos rápidos.

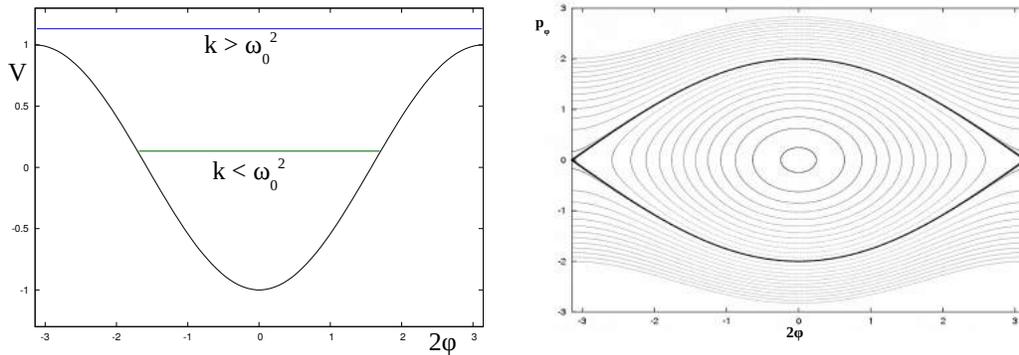


Figura 9.6: Panel derecho: Energía potencial del péndulo $V = -\omega_0^2 \cos 2\varphi$ en función de 2φ para $\omega_0 = 1$. Panel izquierdo: Espacio de fases del péndulo $(2\varphi, p_\varphi)$, restringiendo el ángulo al intervalo $-\pi \leq 2\varphi \leq \pi$. La curva en negrita corresponde a la separatriz que es una solución para $k = \omega_0^2$, además de $2\varphi = \pm\pi$.

Esta integral de movimiento no es otra cosa que el hamiltoniano de un péndulo para el movimiento en φ , donde $\omega_0(\varepsilon)$, la frecuencia de pequeñas oscilaciones tal que $k = \omega_0(\varepsilon)$ separa la región de oscilaciones con las de rotaciones. Esto es, si la energía k satisface $k < \omega_0^2$, existirán puntos de retorno (ver Fig. 9.6) y φ oscilará en torno al punto de equilibrio estable situado en $\varphi = 0$, mientras que si $k > \omega_0^2$, φ no estará acotado y rotará en una dirección u otra dependiendo del signo de p_φ .

La energía $k = \omega_0^2$ corresponde a la separatriz, la curva que separa ambos regímenes de movimiento. El punto de equilibrio estable está localizado en $\varphi = 0, p_\varphi = 0$, mientras que los puntos de equilibrio inestable en $2\varphi = \pi, -\pi, p_\varphi = 0$, esto es $\varphi = \pm\pi/2$.⁵ Siendo $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$, vemos que el movimiento en un entorno del eje x es estable, mientras que resulta inestable alrededor del eje y . Este resultado coincide con la argumentación cualitativa que dimos más arriba para concluir que ante una perturbación que rompe la simetría esférica, la órbita periódica de eje mayor es estable mientras que la de eje menor resulta inestable. En la Fig. 9.6 se representan el potencial en función de 2φ y el espacio de fases del péndulo en el plano $(p_\varphi, 2\varphi)$, donde se observan claramente los puntos de equilibrio, estable e inestable y la separatriz.

Cabe señalar que esta nueva ley de conservación no es exacta, solo es válida para perturbaciones pequeñas y para r lejos del origen. En efecto, derivamos (9.18)

⁵Estrictamente hablando, existe un único punto inestable, ya que $2\varphi = \pm\pi$ deben identificarse pues el espacio de fases corresponde a un cilindro, $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$.

a partir de una aproximación a primer orden suponiendo $\varepsilon \ll 1$ que nos condujo al sistema (9.17) del cual obtuvimos esta ley de conservación; y por otra parte, si $r_0 \rightarrow 0$, $\omega_0 \rightarrow 0$, por lo que no es válida en un entorno del origen. Por tanto $K(p_\varphi, \varphi)$ es una integral aproximada; para energías de rotación $k \gg \omega_0^2$ el movimiento tiende a ser el de un rotador libre,

$$K(p_\varphi, \varphi) \approx \frac{1}{2}p_\varphi^2,$$

y recuperamos el momento angular como integral de movimiento, como en un sistema esférico.

Por otra parte, para $k < \omega_0^2$, el movimiento en φ será de oscilación en torno a $\varphi = 0$, por lo que $\varphi(t)$ para r fuera del origen, estará acotado entre $(-\varphi_0, \varphi_0)$. Estos puntos de retorno surgen naturalmente de (9.18) para $p_\varphi = 0$ y un dado valor de $K(p_\varphi, \varphi) = k$,

$$\cos 2\varphi_0 \approx -\frac{k}{\omega_0^2(\varepsilon)}.$$

Durante el movimiento tangencial, cuando $\varphi(t)$ se aproxima a $\pm\varphi_0$, el impulso angular se anula y luego cambia de signo; la órbita gira en ambos sentidos y tiende a alinearse hacia el eje x . Esta clase de trayectorias difieren significativamente de las que existen en sistemas con simetría esférica y constituyen una nueva familia de órbitas que solo están presentes en sistemas sin simetría central.

En la Fig. 9.7 se muestran órbitas representativas de estas dos familias, correspondientes a un potencial de la forma

$$\phi_L(x, y) = V_0 \ln \left(x^2 + \frac{y^2}{q^2} + a^2 \right),$$

donde V_0 y a son constantes, esta última para evitar la singularidad en $r = 0$, y se ha tomado $q = 0,9$ de manera que $\varepsilon \approx 0,2$, que no es tan pequeño. Este potencial es muy similar al utilizado para construir la Fig. 9.2; la única diferencia radica en que en dicha figura $q = 1$ para preservar la simetría esférica; los demás parámetros toman los mismos valores. De hecho, la órbita del panel izquierdo de la Fig. 9.7 tiene las mismas condiciones iniciales que la de la Fig. 9.2. Como inferimos, la trayectoria es muy similar a la que correspondería al potencial central $\phi_0(r) \approx V_0 \ln(r^2 + a^2)$; solo se observa que en lugar de estar contenida en un anillo, lo hace entre dos elipses ligeramente elongadas en la dirección del eje y . A esta familia de trayectorias se las denomina *órbitas loop*,⁶ por su similitud con las órbitas en sistemas con simetría esférica.

⁶Una traducción al castellano suele ser órbitas lazo, en estas notas preferimos mantener el anglicismo.

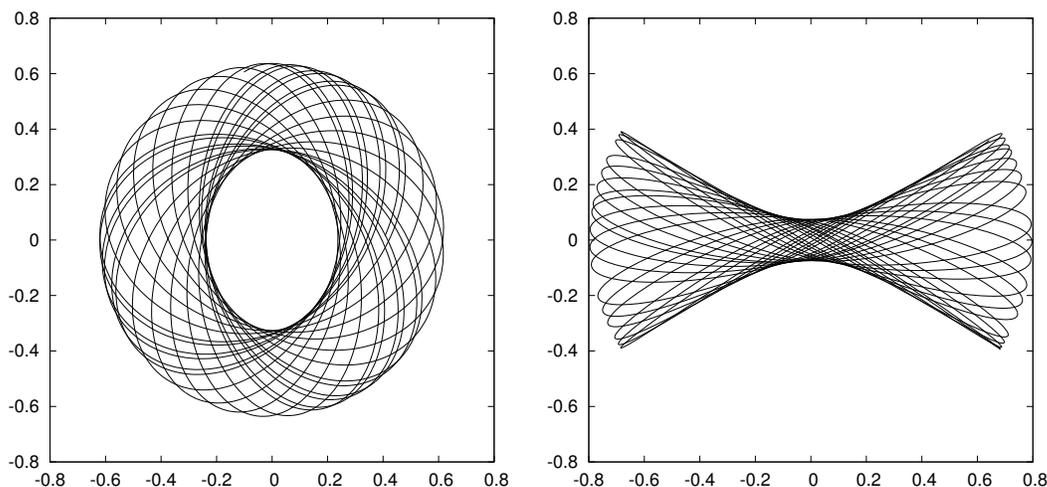


Figura 9.7: Órbitas en el potencial $\phi_L(r) = V_0 \ln(x^2 + y^2/q^2 + a^2)$ con V_0 y a constantes y $q = 0,9$. El panel izquierdo corresponde a una órbita en el plano de la trayectoria (x, y) , con un valor inicial de momento angular significativamente grande, mientras que la del panel derecho, posee un valor pequeño del momento angular inicial o de la energía cinética de rotación.

En el panel derecho de la Fig. 9.7, se muestra una trayectoria que posee condiciones iniciales diferentes: se ha reducido sensiblemente el momento angular inicial, pero manteniendo el mismo valor de E , esto es, se reduce la energía cinética de rotación pero se aumenta en la dirección radial. De ella observamos claramente que para $r \gtrsim 0,2$, la dinámica tangencial corresponde al régimen de oscilación de un péndulo, el ángulo φ está acotado, el impulso angular se anula en los puntos de retorno y luego cambia de signo. La órbita gira en ambos sentidos, y tiende a alinearse en la dirección donde yace la órbita periódica estable. Esta nueva familia se la denomina *órbitas box* (o caja en castellano), por similitud de su apariencia alrededor de $r = 0$, donde se comporta como un oscilador armónico de dos frecuencias inconmensurables.

Ambas familias de órbitas conviven en todo sistema donde el apartamiento de la simetría esférica es leve. En cambio cuando la perturbación a un campo central no es pequeña, la ley de conservación $K(p_\varphi, \varphi) = k$ dada en (9.18) deja de ser válida, resultando una dinámica mucho más compleja pues solo existirá una única ley de conservación global en el espacio de fases que es la energía y, eventualmente, integrales locales.

Capítulo 10

Equilibrio de sistemas sin colisiones

Como hemos mencionado en el capítulo anterior, existe una diferencia sustantiva entre las galaxias y los sistemas que usualmente trata la Mecánica Estadística, como moléculas en un recipiente. La diferencia fundamental radica en la naturaleza de la interacción entre las partículas. En un gas, la interacción es en general despreciable, excepto cuando existe una colisión entre moléculas o átomos. En este último caso, las partículas experimentan una interacción fuerte durante un intervalo muy corto de tiempo. A densidades normales, las moléculas o átomos se mueven a velocidad aproximadamente constante durante la mayor parte del tiempo. No obstante estas colisiones son las responsables de que el gas alcance el estado de equilibrio.

En cambio, las estrellas en una galaxia están sujetas a una interacción gravitatoria media producto de la estructura global de la galaxia, de largo alcance y en forma permanente. Dicho campo medio, global, permite calcular la órbita de una estrella como hicimos, por ejemplo, en el capítulo anterior. Adicionalmente, las estrellas pueden estar sujetas a fuerzas gravitatorias de corta duración, aleatorias, como sería el efecto de la interacción estrella-estrella o colisiones, que pueden dar lugar a modificaciones ligeras o significativas de las órbitas estelares dependiendo de qué tan cercano sea el encuentro.

Por tanto, estudiemos cuándo domina la interacción de gran escala por sobre las colisiones estelares y/o viceversa.

10.1. Tiempo de relajación

Consideremos una galaxia con $N \gg 1$ estrellas que por simplicidad supondremos idénticas, todas de masa m . Supongamos que una estrella individual tiene una aproximación o colisión con otra estrella, siendo \mathbf{v} la velocidad relativa de ambas producto de la interacción media o global. Esto es, si el potencial medio de la galaxia generado por la misma distribución de masa en ella es $\phi(\mathbf{r})$, entonces la velocidad relativa entre ambas será producto del campo gravitatorio, $\mathbf{g} = -\nabla\phi$ que actúa sobre cada una de las estrellas, siendo $\dot{\mathbf{v}} = -\nabla\phi$.

La Fig. 10.1 representa esquemáticamente esta colisión entre dos estrellas moviéndose en el campo medio de la galaxia o sistema estelar. Sea b el parámetro de impacto y r la distancia relativa entre ambas en un instante t , donde la posición de la estrella (1) es $(x, 0)$ mientras que la correspondiente a la estrella (2) es $(0, -b)$, $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$ y $-\pi/2 < \vartheta < \pi/2$.

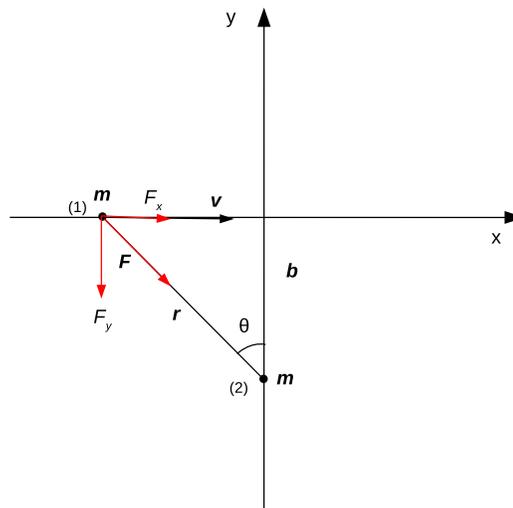


Figura 10.1: Representación esquemática de una colisión estelar.

Estimaremos sin demasiada rigurosidad, en primera instancia, el cambio en la velocidad relativa de estas dos estrellas producto de la colisión o encuentro. Un cálculo detallado implicaría resolver el problema de dos cuerpos donde la trayectoria relativa entre ambas estrellas es una hipérbola; no obstante aquí brindaremos una formulación más sencilla que permite estimar correctamente el orden de magnitud de este cambio de velocidad. Para ello haremos las siguientes suposiciones, que en su conjunto se denominan *aproximación impulsiva*.

- El cambio en la velocidad de la estrella (1), $\delta\mathbf{v}$, es pequeño frente a \mathbf{v} , esto es $|\delta\mathbf{v}|/|\mathbf{v}| \ll 1$;

- La estrella (2) no varía su posición durante todo el encuentro, lo que se justifica si este es lo suficientemente rápido;
- Siendo $|\delta\mathbf{v}|$ pequeño frente a $|\mathbf{v}| \equiv v$, suponemos que la trayectoria de la estrella (1), en lugar de una hipérbola, es una recta.

Elegiremos $t = 0$ cuando la estrella (1) cruza $x = 0$ ($\vartheta = 0$), el instante de máxima aproximación; por tanto esta estrella se moverá en línea recta a lo largo del eje x , siendo $x(t) = vt$, admitiendo que $-\infty < t < \infty$.

De la geometría de la Fig. 10.1, la fuerza sobre la estrella (1) tendrá componentes

$$F_x = \frac{Gm^2}{r^2} \sin \vartheta, \quad F_y = -\frac{Gm^2}{r^2} \cos \vartheta,$$

donde

$$r^2 = x^2 + b^2, \quad \cos \vartheta = \frac{b}{r} > 0, \quad \sin \vartheta = \frac{x}{r}.$$

Consideremos en primer término la componente en y , y reescribimos la fuerza en términos de x y b ,

$$F_y = -\frac{Gm^2}{r^3} b = -\frac{Gm^2 b}{(x^2(t) + b^2)^{3/2}} = -\frac{Gm^2}{b^2} \left(1 + \frac{v^2 t^2}{b^2}\right)^{-3/2}.$$

De la segunda ley de Newton se cumple

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{Gm}{b^2} \left(1 + \frac{v^2 t^2}{b^2}\right)^{-3/2},$$

e integrando sobre todo t

$$\delta v_y = -\frac{Gm}{b^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{v^2 t^2}{b^2}\right)^{-3/2} dt;$$

introduciendo el cambio de variables $s = vt/b$, $ds = vdt/b$ obtenemos

$$\delta v_y = -\frac{Gm}{vb} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} (1 + s^2)^{-3/2} ds}_{=2},$$

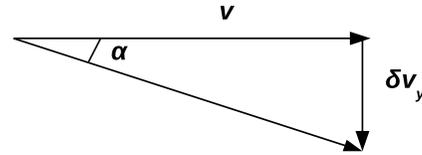
siendo entonces

$$\delta v_y = -2 \frac{Gm}{vb}. \quad (10.1)$$

Resulta claro, por simetría, que $\delta v_x = 0$ ya que no existirá fuerza neta en la dirección x a lo largo de todo el encuentro, por lo que (10.1) es el cambio neto en la velocidad de la estrella (1) producto de la colisión o encuentro binario para un parámetro de impacto b , esto es,

$$\delta \mathbf{v} = -2 \frac{Gm}{vb} \mathbf{e}_y.$$

Figura 10.2: Ángulo de deflexión de la trayectoria $x(t) = vt$ producido de un encuentro.



Podemos definir el ángulo de deflexión, α , entre $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$ y $\delta \mathbf{v} = \delta v_y \mathbf{e}_y$, siendo $|\delta v_y| \ll v$, tal como se representa en la Fig. 10.2 resultando

$$\tan \alpha \approx \alpha = \frac{|\delta v_y|}{v} = 2 \frac{Gm}{v^2 b},$$

por lo que los encuentros lentos producen una mayor deflexión que los encuentros rápidos.

Consideremos ahora el cambio total de la velocidad de la estrella (1) por las interacciones o encuentros con todas las estrellas con parámetro de impacto en el intervalo $b_1 \leq b \leq b_2$, esto es para encuentros binarios dentro de un cierto rango de parámetros de impacto. Nos interesa estimar la variación de la energía cinética de la estrella producto de las colisiones, por lo que nos concentraremos en la variación cuadrática de la velocidad.

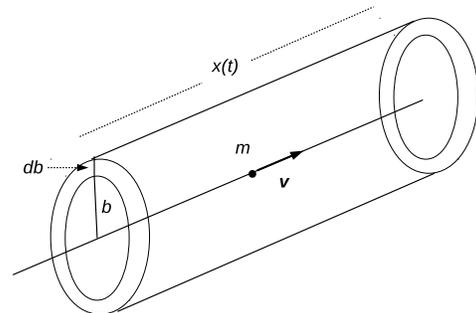


Figura 10.3: Geometría de encuentros estelares binarios con parámetros de impacto entre b y $b + db$.

Para ello supongamos que la galaxia contiene n estrellas por unidad de volumen, por lo que en el recorrido de la estrella (1) a lo largo del eje x , tal como muestra la Fig. 10.3, el número de encuentros con parámetro de impacto entre b y $b + db$ será

$$dN_e = \underbrace{2\pi b x(t) db}_d n = 2\pi b \underbrace{vt}_{x(t)} ndb.$$

Suponiendo que la densidad es constante y denotando con Δv^2 al cambio cuadrático en la velocidad de la estrella (1), aproximamos

$$d(\Delta v^2) \approx (\delta v_y)^2 dN_e = \left(-2\frac{Gm}{vb}\right)^2 2\pi bvtndb = \frac{8\pi G^2 m^2 nt}{v} \frac{db}{b},$$

donde hemos utilizado (10.1) para reemplazar δv_y . Integrando entre b_1 y b_2 resulta

$$\Delta v^2 \approx \frac{8\pi G^2 m^2 nt}{v} \ln \Lambda, \quad \Lambda = \frac{b_2}{b_1}. \quad (10.2)$$

Es claro que $\ln \Lambda$ diverge en ambos límites cuando $b_1 \rightarrow 0$ y $b_2 \rightarrow \infty$. El máximo valor de b_2 será el tamaño del sistema, por lo que tomamos $b_2 = R$, mientras que para el mínimo, b_1 , se puede estimar de diferentes formas, no siendo crítico su valor preciso pues interviene dentro de un logaritmo. Aquí, lo estimaremos muy groseramente de la siguiente manera. Cuando el cambio en la velocidad (fundamentalmente en la dirección) producto de la interacción de dos estrellas, δv , es del mismo orden que la velocidad inicial v , utilizando (10.1) e imponiendo que $|\delta v_y| \approx v$, estimamos el parámetro de impacto mínimo correspondiente a un encuentro cercano o fuerte¹

$$|\delta v_y| = 2\frac{Gm}{vb_{\min}} \approx v \quad \rightarrow \quad b_{\min} \approx \frac{2Gm}{v^2},$$

que, por ejemplo, para los alrededores del Sol, con $v \sim 30 \text{ Km s}^{-1}$ y $m \sim M_\odot$ resulta $b_{\min} \sim 1 \text{ ua}$.

Si el sistema estelar se encuentra en equilibrio, vale el teorema del virial $2\langle T \rangle + \langle W \rangle = 0$, donde T y W son las energías cinética y potencial respectivamente; si el sistema contiene N estrellas de masa m , de manera que la masa total es $M = Nm$, resulta

$$Nmv^2 \approx \frac{GN^2m^2}{R} \quad \rightarrow \quad v^2 \approx \frac{GNm}{R},$$

¹Al derivar (10.1) supusimos que los cambios en la velocidad de la estrella (1) debe ser pequeño, por tanto esta estimación nos dará una cota inferior para el parámetro de impacto mínimo.

por tanto

$$b_{\min} \approx \frac{2}{N}R,$$

y finalmente

$$\Lambda = \frac{b_2}{b_1} = \frac{R}{b_{\min}} \sim \frac{N}{2}.$$

Definimos el *tiempo de relajación*, τ_R , como el tiempo para el cual, por efecto de los encuentros débiles o colisiones, las estrellas pierden su memoria y se termalizan (o virializan), lo cual implica $\Delta v^2 \sim v^2$; es decir, los cambios en la velocidad producto de las N_e colisiones son del mismo orden que la velocidad en el campo promedio. Con esta definición, de (10.2),

$$\Delta v^2 \approx \frac{8\pi G^2 m^2 n \tau_R}{v} \ln \Lambda \sim v^2$$

resulta

$$\tau_R \approx \frac{v^3}{8\pi G^2 m^2 n \ln \Lambda}. \quad (10.3)$$

Con las estimaciones que hemos dado para Λ y para v^2 a partir del teorema del virial ($v^2 \approx GNm/R$) y estimando $n \sim 3N/(4\pi R^3)$, podemos expresar τ_R en términos del *tiempo de cruce*, $t_{\text{cros}} = R/v$, reescribiendo (10.3) de la siguiente forma

$$\tau_R \approx \frac{v^4}{8\pi G^2 m^2 n R \ln \Lambda} \frac{R}{v} \sim \frac{G^2 N^2 m^2}{R^2} \frac{4\pi R^3}{3N} \frac{t_{\text{cros}}}{8\pi G^2 m^2 \ln(N/2)} \sim \frac{N}{6 \ln N} t_{\text{cros}}. \quad (10.4)$$

Resulta claro que τ_R crece con N y en el límite cuando $N \rightarrow \infty$, $\tau_R \rightarrow \infty$, lo que significa que nos aproximamos al límite continuo en el que no existirán interacciones entre estrellas individuales.

Para valores típicos en los alrededores del Sol (10.3) arroja $\tau_R \sim 10^{13}$ a, mientras que si lo estimamos mediante (10.4), los valores medios globales para toda una galaxia rondan $\tau_R \sim 10^{18}$ a.

En un cúmulo globular, en cambio, τ_R no supera los 10^9 a. Resulta claro de (10.3) que el valor del tiempo de relajación depende de la región del sistema estelar donde se lo estime. No obstante, en general para una galaxia $\tau_R \gtrsim 10^{13}$ a.

Estos resultados reflejan una vez más las notorias diferencias entre el tratamiento estadístico de un gas y el de un sistema estelar como una galaxia. El tiempo de relajación para un gas a condiciones normales es mucho menor que 1 s, más de 20 órdenes de magnitud menor que el valor estimado para los alrededores del Sol.

Por lo tanto, en una galaxia los efectos de las colisiones solo son apreciables en escalas de tiempo superiores a $10^3 t_H$ o mayores, siendo t_H el tiempo de Hubble;

recién en estas escalas de tiempo el sistema se termaliza. Por otro lado, en un cúmulo globular, la escala de tiempo para la relajación es lo suficientemente corta respecto de t_H como para suponer que estos sistemas se encuentran próximos al equilibrio colisional.

Resulta evidente que si las colisiones binarias en galaxias son irrelevantes, las colisiones de tres o más estrellas serán mucho menos probables en escalas de tiempo físicamente realistas. Por tanto, es claro que para las galaxias es válido suponer que las colisiones binarias o de más cuerpos son irrelevantes y el estado de equilibrio no es colisional sino orbital, esto es, el mismo estará determinado por las familias orbitales soportadas por el potencial global generado por la propia distribución de masa de la galaxia.

10.2. Ecuación de Boltzmann sin colisiones

Consideremos un sistema estelar compuesto por $N \gg 1$ estrellas, todas ellas moviéndose bajo un potencial suave $\phi(\mathbf{x}, t)$, esto es, si \mathbf{v} denota la velocidad de una estrella representativa del sistema, $\dot{\mathbf{v}} = -\nabla\phi$; suponemos que no hay otra interacción adicional que la gravitatoria global.

En cualquier instante t , la descripción completa del estado de un sistema no colisional queda determinado si especificamos el número de estrellas en un elemento de volumen del espacio de fases $d^3x d^3v$ centrado en (\mathbf{x}, \mathbf{v}) ,

$$d^6N(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)d^3x d^3v,$$

donde f se denomina *función de distribución o densidad de fase* del sistema.² Tal como está definida,

$$f \geq 0, \quad \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)d^3x d^3v = N,$$

siendo la integral a todo el espacio de fases. Además, exigimos que

$$f \rightarrow 0, \quad \text{cuando} \quad |\mathbf{x}|, |\mathbf{v}| \rightarrow \infty$$

más rápidamente que cualquier potencia de $|\mathbf{x}|, |\mathbf{v}|$. Es claro que el número de estrellas por unidad de volumen será

$$n(\mathbf{x}, t) = \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)d^3v,$$

²Tal como ha sido definida, $f d^3x d^3v$ es el número de estrellas en un elemento de volumen del espacio de fases, mientras que si introducimos $f/N = f$, $f d^3x d^3v$ representará la probabilidad de que las estrellas tengan posición y velocidad (\mathbf{x}, \mathbf{v}) dentro del elemento de volumen $d^3x d^3v$.

y, si todas las estrellas tienen la misma masa m es inmediata la relación entre la función de distribución y la densidad estelar,

$$mn(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t) = m \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v \quad (10.5)$$

Notar que esta formulación es idéntica a la que hicimos al iniciar el capítulo correspondiente a Hidrodinámica para la descripción de un fluido. A no existir colisiones que modifiquen la evolución dinámica en el espacio de fases, el flujo de masa debe conservarse, por lo que f debe satisfacer una ecuación similar a la de continuidad en un fluido, en ausencia de fuentes o sumideros pero extendida al espacio de fases. Si denotamos con $\mathbf{w} = (\mathbf{x}, \mathbf{v})$, tendremos

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0}_{\text{continuidad en } \mathbf{x}} \quad \rightarrow \quad \underbrace{\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{w}} \cdot (f \dot{\mathbf{w}}) = 0}_{\text{continuidad en } (\mathbf{x}, \mathbf{v})},$$

donde $\nabla_{\mathbf{w}}$ es el operador usual pero extendido también a las velocidades, esto es

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^6 \frac{\partial}{\partial w_k} (f \dot{w}_k) = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial x_k} (f \dot{x}_k) + \frac{\partial}{\partial v_k} (f \dot{v}_k) \right) = 0.$$

Escribiendo $\dot{x}_k = v_k$, las derivadas en la sumatoria resultan

$$\sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial x_k} (f \dot{x}_k) + \frac{\partial}{\partial v_k} (f \dot{v}_k) \right) = \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} v_k + f \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \frac{\partial f}{\partial v_k} \dot{v}_k + f \frac{\partial \dot{v}_k}{\partial v_k} \right). \quad (10.6)$$

En el espacio de fases, posiciones y velocidades (o impulsos) son variables independientes, por lo que el segundo término en la suma se anula. Asimismo hemos señalado que $\dot{v}_k = -\partial\phi/\partial x_k$, siendo ϕ independiente de las velocidades, el último término de la suma también se anula y obtenemos finalmente

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} v_k - \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial v_k} \right) = 0,$$

o, escrita en forma compacta toma la forma

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla f \cdot \mathbf{v} - \nabla \phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (10.7)$$

que se conoce como *ecuación de Boltzmann sin colisiones* o también llamada ecuación de Vlasov.

Alternativamente, en la formulación hamiltoniana, será

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \phi(\mathbf{x}, t)$$

y en (10.6), que reescribimos,

$$\sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} v_k + f \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \frac{\partial f}{\partial v_k} \dot{v}_k + f \frac{\partial \dot{v}_k}{\partial v_k} \right),$$

resulta

$$\dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial v_k} = v_k, \quad \dot{v}_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k},$$

y así

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 H}{\partial x_k \partial v_k}, \quad \frac{\partial \dot{v}_k}{\partial v_k} = -\frac{\partial^2 H}{\partial v_k \partial x_k},$$

por lo que el segundo y cuarto término de (10.6) cancelan y la ecuación de Boltzmann sin colisiones puede expresarse en términos del Hamiltoniano,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = 0, \quad (10.8)$$

que en forma compacta se reduce a

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] = 0,$$

donde $[f, H]$ denota el corchete de Poisson entre f y H .

De (10.7) o (10.8) es inmediato concluir que la ecuación de Boltzmann sin colisiones puede reducirse a

$$\frac{df}{dt} = 0,$$

lo que señala que el flujo de estrellas en el espacio de fases es incompresible, o dicho de otra forma, la densidad de puntos del espacio de fases alrededor de la órbita de una estrella es constante. Este resultado es un caso particular del Teorema de Liouville aplicado a N estrellas que se mueven en forma independiente una de otra: el movimiento ocurre en un campo promedio y las correlaciones (interacciones) entre ellas son despreciables.³

³El Teorema de Liouville para un sistema de N partículas involucra a la función de distribución de todas ellas y depende de las N posiciones y los N impulsos. Cuando existe un campo medio y no hay interacción entre las partículas, se puede reducir la función de distribución de las N partículas a la función de distribución de una única partícula representativa del sistema.

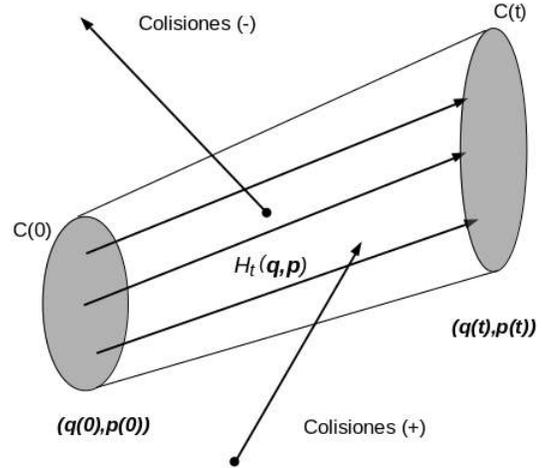


Figura 10.4: Representación esquemática del efecto de las colisiones.

Si existiesen colisiones, $\dot{\mathbf{v}} \neq -\nabla\phi$, ya que la aceleración también incluye los efectos de las interacciones estelares, por lo que el segundo y tercer términos de (10.7) ya no son correctos. En efecto, en esta formulación la evolución dinámica de las estrellas dentro de un cierto elemento de volumen del espacio de fases solo contempla la interacción media $\phi(\mathbf{x}, t)$, por lo que las posiciones y velocidades dentro de un cierto dominio inicial $C(0)$ evolucionan de acuerdo a las ecuaciones de Hamilton. Si indicamos con H_t al “operador” Hamiltoniano que evoluciona al sistema, será $H_t(\mathbf{q}(0), \mathbf{p}(0)) \rightarrow (\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$, como se representa esquemáticamente en la Fig. 10.4. En H_t no está contemplada la interacción estrella-estrella, cuyo efecto es eyectar o ingresar estrellas dentro del elemento de volumen encerrado por $C(0)$ y $C(t)$. En lugar de modificar los términos que incluyen la velocidad y la aceleración en el primer miembro de la ecuación de Boltzmann sin colisiones, resulta equivalente considerar que existen fuentes o sumideros de estrellas (que es justamente el proceso colisional) y la variación del flujo estelar en el espacio de fases no se mantendrá constante. Reescribimos entonces la ecuación de Boltzmann en la forma

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla f \cdot \mathbf{v} - \nabla\phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{col}}^+ - \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{col}}^-, \quad (10.9)$$

donde el primer término del segundo miembro representa las estrellas que ingresan al flujo y el segundo las estrellas que salen de él por efecto de las colisiones. Más adelante, en esta misma sección volveremos sobre esta ecuación.

La ecuación de Boltzmann sin colisiones (10.7), luce como una ecuación diferencial lineal para f , lo que es cierto si el potencial es conocido. No obstante, en la

formulación que estamos realizando hemos considerado que la propia distribución de estrellas es la que genera el campo gravitatorio en el que ellas se mueven, esto es, se trata de un sistema autogravitante; por tanto el potencial ϕ deriva de la distribución de densidad ρ a través de la ecuación de Poisson

$$\nabla^2\phi = -4\pi G\rho = -4\pi Gm \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)d^3v,$$

donde hemos usado la relación que vincula a ρ y f dada en (10.5). Vemos entonces que es necesario resolver (10.7) acoplada con la ecuación de Poisson, lo que en general no es posible.

Suponiendo que el sistema estelar está en estado estacionario, podemos encontrar soluciones generales a la ecuación de Boltzmann sin colisiones. Bajo esta suposición f no depende explícitamente de t por lo que (10.7) en su forma $df/dt = 0$, nos dice que $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \text{cte}$, esto es, f es una integral de movimiento para el potencial $\phi(\mathbf{x})$. Por lo tanto, toda función arbitraria de las integrales de movimiento en el potencial gravitatorio del sistema estelar será solución de (10.7) y por ello es de relevancia estudiar las órbitas estelares en el potencial del sistema. Este enunciado es lo que se denomina *Teorema de Jeans* que establece, en forma simplificada

La función de distribución de una galaxia en estado estacionario y en la cual las órbitas poseen frecuencias inconmensurables, será función de a lo sumo tres integrales de movimiento independientes en el potencial galáctico.

En otros términos, si $I_i(\mathbf{x}, \mathbf{v})$, $i = 1, \dots, 3$, son tres integrales de movimiento independientes en el potencial galáctico, f dependerá de las coordenadas del espacio de fases solo a través de estas integrales de movimiento y

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = F(I_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}), I_2(\mathbf{x}, \mathbf{v}), I_3(\mathbf{x}, \mathbf{v})),$$

donde F es una función arbitraria. En efecto

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial F}{\partial I_1} \underbrace{\frac{dI_1}{dt}}_{=0} + \frac{\partial F}{\partial I_2} \underbrace{\frac{dI_2}{dt}}_{=0} + \frac{\partial F}{\partial I_3} \underbrace{\frac{dI_3}{dt}}_{=0} = 0.$$

Nótese que esto no resuelve completamente el problema, pues deberemos conocer a priori las integrales de movimiento en $\phi(\mathbf{x})$, que en general solo admitirá a la energía como integral exacta de movimiento en todo el espacio de fases. Existiendo simetrías como esférica o axial, L o L_z serán otras integrales de movimiento, pero difícilmente pueda encontrarse una tercera integral global. De hecho, durante muchos años se ha discutido la existencia o no de una tercera integral de movimiento en el potencial

de nuestra galaxia, cuestión que aún sigue abierta (de hecho ni siquiera el momento angular es una integral exacta).

Para concluir esta discusión, que se profundiza significativamente en un curso de Dinámica Estelar, señalemos que f no es un observable como la densidad o valores medios de las velocidades radiales y sus valores medios cuadráticos. Por ello es conveniente estudiar las ecuaciones que derivan de tomar momentos de la ecuación de Boltzmann sin colisiones respecto a las velocidades. Se puede demostrar que si integramos (10.7) a todas las velocidades obtenemos la ecuación de continuidad en el espacio de configuraciones para un fluido estelar.⁴

Asimismo, tomando momentos de orden 1, surge una ecuación que puede llevarse a la forma de la ecuación de Euler. No obstante, existe una diferencia respecto a la que obtuvimos en la formulación de la hidrodinámica, en el caso estelar no existe en general isotropía en el espacio de velocidades, el término equivalente a la presión ya no es un escalar sino un tensor que puede diagonalizarse y reducirlo a tres componentes (el elipsoide de velocidades). Ambas ecuaciones resultan más relevantes que la ecuación de Boltzmann pues involucran cantidades observables y se conocen como *ecuaciones de Jeans*.

Al discutir la hidrodinámica, mostramos que para resolver el sistema formado por la ecuación de continuidad, la de Euler y la ecuación de Poisson, requeríamos de una ecuación adicional para cerrar el sistema y, mediante consideraciones termodinámicas, incluimos una ecuación de estado. En el caso de sistemas estelares no es posible establecer ecuaciones similares, por lo que las ecuaciones de Jeans (más la de Poisson de ser necesaria) conforman en general un sistema abierto; solo en situaciones particulares puede cerrarse.

Finalmente, consideremos (10.9) que, por claridad, reescribimos

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla f \cdot \mathbf{v} - \nabla \phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{col}}^+ - \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{col}}^- ,$$

para una función de distribución en el espacio de fases arbitraria, por ejemplo en lugar de representar estrellas supongamos que se trata de fotones, por lo que $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = n(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$, esto es, la densidad de fotones en el espacio de fases. Supongamos que los fotones se mueven en la dirección $\mathbf{\Omega}$, por lo que $\mathbf{v} = c\mathbf{\Omega}$. Tratándose de fotones $\dot{\mathbf{v}} = \nabla \phi = 0$ pues los mismos no sufren aceleraciones, por tanto (10.9) se reduce a

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla n \cdot c\mathbf{\Omega} = \left(\frac{\partial n}{\partial t} \right)_{\text{col}}^+ - \left(\frac{\partial n}{\partial t} \right)_{\text{col}}^- ,$$

⁴Este resultado es evidente pues la ecuación de Boltzmann sin colisiones la derivamos a partir de exigir que f satisfaga una ecuación de continuidad similar a la de un fluido pero extendida al espacio de fases.

donde los dos términos en el segundo miembro denotan respectivamente, fotones que se crean y que se destruyen en el intervalo dt mientras viajan en la dirección $\mathbf{\Omega}$. Al discutir transporte radiativo denominamos a ambos procesos emisión y absorción respectivamente. Además, como para los fotones $\mathbf{p} = (h\nu/c)\mathbf{\Omega}$, demostramos que la intensidad específica y la densidad de energía de los fotones en el espacio de fases eran proporcionales, por lo que $I_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{\Omega}, t) = (h^4\nu^2/c^2)n(\mathbf{x}, (h\nu/c)\mathbf{\Omega}, t)$. Por tanto, en términos de I_ν la ecuación anterior resulta

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \nabla I_\nu \cdot \mathbf{\Omega} = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial I_\nu}{\partial t} \right)_{\text{col}}^+ - \frac{1}{c} \left(\frac{\partial I_\nu}{\partial t} \right)_{\text{col}}^-.$$

Los procesos de emisión y absorción los hemos caracterizado mediante coeficientes macroscópicos, χ_ν, k_ν respectivamente, de manera que

$$\frac{1}{c} \left(\frac{\partial I_\nu}{\partial t} \right)_{\text{col}}^+ \equiv \chi_\nu, \quad \frac{1}{c} \left(\frac{\partial I_\nu}{\partial t} \right)_{\text{col}}^- \equiv k_\nu I_\nu$$

y la ecuación anterior, escrita en términos de la intensidad específica, se reduce a la ecuación de transporte radiativo (5.36),

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \nabla I_\nu \cdot \mathbf{\Omega} = \chi_\nu - k_\nu I_\nu.$$

Este resultado es completamente esperable, pues (10.9) es una ecuación cinética, una ley de conservación, de validez general para cualquier densidad en el espacio de fases, sean estrellas, moléculas o fotones; como ya hemos señalado, de esta misma ecuación para, átomos y/o moléculas, se derivan las ecuaciones habituales para un fluido luego de integrar a todo el espacio de velocidades.

Lecutras complementarias

Como se menciona en el prefacio, estas notas no siguen ningún texto en particular, no obstante pueden ser complementadas, largamente ampliadas y profundizadas con la siguiente lista, no exhaustiva, de bibliografía:

- Binney, J. & Tremaine, S., 1987, Galactic dynamics (Princeton U.P.)
- Bowers, R. & Deeming, T., 1984, Astrophysics Vols. I y II (Jones and Barlet)
- Callen, H. B., 1985, Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics (J. Wiley & Sons, Inc.)
- Chandrasekhar, S., 1938, An Introduction to the Study of Stellar Structure (The Univ. of Chicago Press)
- Chandrasekhar, S., 1960, Radiative Transfer (Dover)
- Clayton, D. D., 1983, Principles of Stellar Evolution and Nucleosynthesis (The Univ. of Chicago Press)
- Christensen-Dalsgaard, J., 2008, Lecture Notes on Stellar Structure and Evolution, accesible en el siguiente link: https://phys.au.dk/~jcd/evolnotes/LN_stellar_structure.pdf
- Guidry, M., 2019, Stars and Stellar Processes (Cambridge U.P.)
- Hansen, C. J. & Kawaler, S. D., 1994, Stellar Interiors: Physical principles, Structure and Evolution (Springer-Verlag)
- Huang, K., 1963 Statistical Mechanics (J. Wiley & Sons, Inc.)
- Kippenhahn, R. & Weigert, A., 1991, Stellar Structure and Evolution (Springer-Verlag)

- Mihalas, D., 1978, Stellar Atmospheres (Freeman)
- Rybicki, G., & Lightman, A., 1979, Radiative Processes in Astrophysics, (John Wiley & Sons, Inc.)
- Schwarzschild, M., 1958, The Structure and Evolution of the Stars (Princeton U.P.)