

Apuntes de la teórica de Astrofísica

6 de diciembre de 2018



Sobre estos apuntes Estos apuntes/resueltos que usted está viendo fueron creados por un alumno mientras cursaba la materia. Es por ello que podrían haber errores de tipeo, errores conceptuales, de interpretación en los resultados, etc. Use estos apuntes con precaución. Estos apuntes no son oficiales de ninguna cátedra. Lea atentamente el prospecto. En caso de notar algún efecto adverso suspenda inmediatamente su uso y consulte con su profesor de cabecera.

- El alumno autor de estos apuntes cursó la materia durante el segundo cuatrimestre de 2018, [este link](#) conduce a la página oficial del curso.
- Encontrá más resueltos de Alf en [este link](#).

Box 1 - ¿Cómo se hacen estos apuntes?

Estos apuntes están hechos usando un programa llamado [Lyx](#)^a. Para hacer los dibujos se usó [Inkscape](#) y después se insertó las imágenes en formato [svg](#)^b directamente en Lyx.

En [este repositorio de GitHub](#) se encuentra la plantilla (*template*) que Alf usa actualmente, con todo lo necesario para compilarla y empezar a divertirse.

^aLyx es una interfaz gráfica para Latex que hace que la escritura se vuelva extremadamente fluida y veloz (al punto de poderse tomar apuntes en vivo durante una clase).

^b[svg](#) es el formato nativo de Inkscape.

Índice

1. Introducción a la astronomía	4
1.1. El sol	4
1.2. Medición de distancias hacia estrellas	5
1.2.1. Método de paralaje	5
1.3. El sistema solar	6
1.3.1. Leyes de Kepler	7
1.4. Las estrellas	7
1.4.1. Intensidad y brillo	7
1.4.2. Color (espectro)	8
1.4.3. Clasificación de las estrellas	8
1.5. Grupos de estrellas	9
1.6. Materia oscura	9
2. Descripción cinética	10
2.1. Ecuación de Boltzmann	11
2.1.1. Sin colisiones	11
2.1.2. Con colisiones binarias (ecuación de Boltzmann)	11
3. Atmósferas y exósferas planetarias	12
4. Relatividad especial	13
4.1. Transformación de Lorentz	14
4.2. Efecto doppler relativista	14
4.3. Dinámica relativista	15
5. Atmósferas estelares (transporte de radiación)	15
5.1. Intensidad de radiación y notación típica de la astronomía	15
5.2. Ecuación de transporte	16
5.3. Atmósferas unidimensionales	18
5.3.1. Atmósfera plano-paralela	20
5.4. Aproximación de difusión	22
5.5. Aproximación de atmósfera gris	24
5.6. Formación de líneas espectrales	25
6. Medio interestelar	27
6.1. Regiones H II	27
6.1.1. Modelo básico de orden 0	28
6.1.2. Modelo con recombinación	30
6.1.3. Frente de choque y ionización	31
6.2. Supernovas	36
6.2.1. Estudio con análisis dimensional	36
6.2.2. Estudio con ecuaciones de fluidos	37
7. Interiores estelares	38
7.1. Enanas blancas	40
7.1.1. Gas de fermiones	40
7.2. Luminosidad de Eddington	45
7.3. Evolución estelar	46
7.3.1. Colapso gravitatorio: criterio de Jeans	47
8. Campos electromagnéticos (MHD)	49
8.1. Número de Reynolds magnético	52
8.1.1. Régimen convectivo (congelamiento)	52
8.1.2. Régimen de difusión	53
8.2. Reconexión magnética	54
8.2.1. Modelo de Sweet-Parker (1958)	55
8.3. Ondas de Alfvén	57
8.4. Dínamos: generación de campos magnéticos	58
8.4.1. Manchas solares	58
8.4.2. Modelo de campo medio (efecto α)	59

9. Galaxias	61
9.1. Gradiente de velocidades	65
9.2. Dinámica de galaxias: ondas espirales	67
10. Nociones de cosmología	69
10.1. La constante de Hubble	69
10.2. Evolución del universo	70
10.3. Termodinámica	73
10.4. Épocas del universo	74
11. Tema extra: acreción	76
11.1. Acreción esférica	76
11.2. Sistemas binarios	79

Índice de *boxes*

1. Box 1 - ¿Cómo se hacen estos apuntes?	1
2. Box 2 - La definición del parsec	6
3. Box 3 - Los momentos	10
4. Box 4 - Sobre el término de colisiones de la ecuación de Boltzmann	11
5. Box 5 - Sobre la aproximación de equilibrio termodinámico local y su validez	22
6. Box 6 - Sabías que...	55

Bibliografía

No hay ningún libro de texto que se ajuste a la perfección al curso. Vamos a usar varios. Los siguientes son los “principales”:

- Battaner.
- Choudhuri.
- Harwit.

Los libros anteriores “se complementan bastante bien” y son los principales que vamos a usar. Además tenemos algunos otros libros que nos pueden llegar a servir:

- Feynman. En particular hay dos capítulos de fluidos que son los capítulos 41 y 42, los de “agua seca” y “agua mojada”. Son para lectura rápida.
- Un libro de Ferraro viene bien para Relatividad Especial.
- Shu. Es un libro de introducción a la astronomía.

1. Introducción a la astronomía

Los canales de “comunicación” que tenemos con los distintos fenómenos astronómicos son los siguientes:

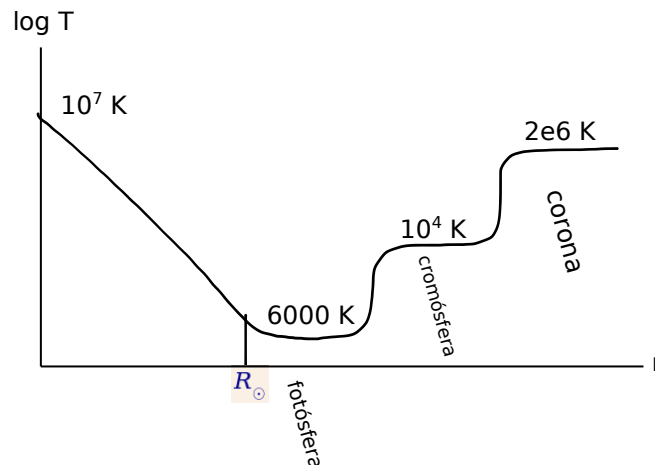
- Radiación electromagnética. Abarca todo el espectro, rayos γ , rayos X, ultravioleta, etc.
- Rayos cósmicos. Partículas relativistas. El observatorio más grande es el Pierre Auger en Argentina.
- Neutrinos. Hay un observatorio muy importante en Gran Sasso y se prevé la construcción de uno en el paso de Aguas Negras en Argentina.
- Ondas gravitacionales. LIGO, es lo más nuevo.

1.1. El sol

Algunos datos del sol son

$$\text{Datos del sol} \rightarrow \begin{cases} R_{\odot} = 7 \times 10^{10} \text{ cm} \\ L_{\odot} = 3,8 \times 10^{33} \text{ erg s}^{-1} \leftarrow \text{Luminosidad} \\ M_{\odot} = 2 \times 10^{33} \text{ g} \\ T_{\text{efectiva}} = 6000 \text{ K} \end{cases}$$

La temperatura efectiva es la temperatura que tendría que tener un cuerpo negro (ideal) para emitir la misma radiación que el sol. La temperatura del sol no es homogénea y en algunas capas alcanza valores mucho más elevados como un par de millones de grados. El perfil de temperaturas del sol es el siguiente:



La sonda que acaba de lanzar la NASA va a meterse en la corona. Si bien parece que a esa temperatura cualquier cosa se derrite, en verdad la presión es tan baja que no hay problema. Es un gas a mucha temperatura y una presión extremadamente baja.

Lo anterior es para el sol. ¿Pero qué ocurre con estos parámetros (radio, masa, potencia, temperatura, etc) en general en todas las estrellas? Lo que se observa es que no son independientes, están correlacionados. Los rangos que se observan son

$$\text{Valores en que oscilan las estrellas} \rightarrow \begin{cases} M \sim 10^{32} \text{ hasta } 10^{35} \text{ g} \\ L \sim 10^{-4} \text{ hasta } 10^6 L_{\odot} \\ T \sim 10^3 \text{ hasta } 50 \times 10^4 \text{ K} \end{cases}$$

Unidades astronómicas de longitud La *unidad astronómica* es “el metro” de la astronomía y vale

$$1 \text{ AU} = 1,5 \times 10^{13} \text{ cm} \rightarrow \text{Distancias planetarias}$$

Para longitudes más grandes se utilizan los “parsec”

$$1 \text{ pc} = 3 \times 10^{18} \text{ cm} \rightarrow \text{Distancias interestelares}$$

Para galaxias se usa el kilo y el mega parsec. El diámetro de La Vía Láctea es de aproximadamente 10 kpc

También se suele utilizar el año luz

$$1 \text{ año luz} \sim 10^{18} \text{ cm} \approx \frac{1}{3} \text{ pc}$$

La estrella más cercana es Alfa Centauri y está a 4 años luz.

Tiempo del universo Las estimaciones más modernas sobre el tiempo de existencia del universo son de

$$T_{\text{universo}} \approx 13,7 \text{ Gyr}$$

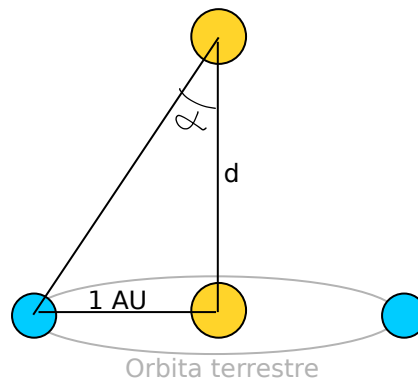
donde Gyr son “giga años”.

1.2. Medición de distancias hacia estrellas

1.2.1. Método de paralaje

Sirve para medir distancias a objetos “cercaos”. Lo vimos en la práctica la semana pasada. Se basa en observar cómo se modifica la posición de un objeto celeste a medida que la tierra realiza su órbita alrededor del sol.

Supongamos que la órbita de la tierra alrededor del sol es circular:



Haciendo trigonometría es trivial despejar la distancia. Se obtiene

$$\tan \alpha \approx \alpha = \frac{1 \text{ AU}}{d}$$

Lo anterior se puede generalizar fácilmente a estrellas que no estén necesariamente sobre la línea perpendicular al sol. Es trigonometría, lo importante es la idea del método de paralaje.

Box 2 - La definición del parsec

Un parsec es la distancia a la que debería estar un objeto para que el ángulo α sea de un segundo cuando se utiliza el método de paralaje:

$$1 \text{ pc} = \frac{1 \text{ AU}}{1''}$$

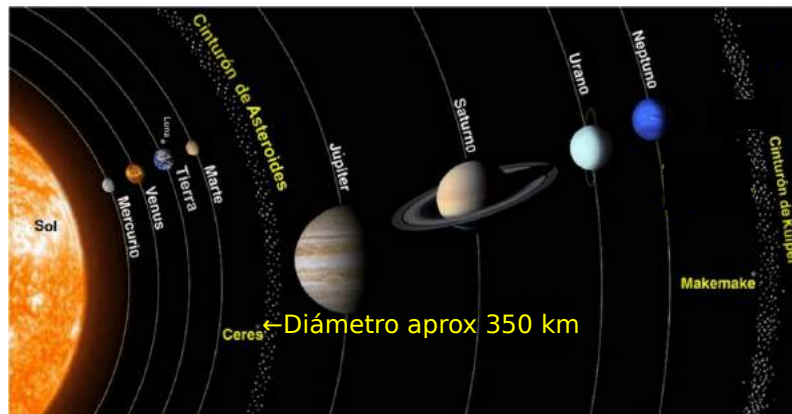
1.3. El sistema solar

Se compone de todos los objetos que están en órbita alrededor del sol. Los objetos más importantes son los planetas:

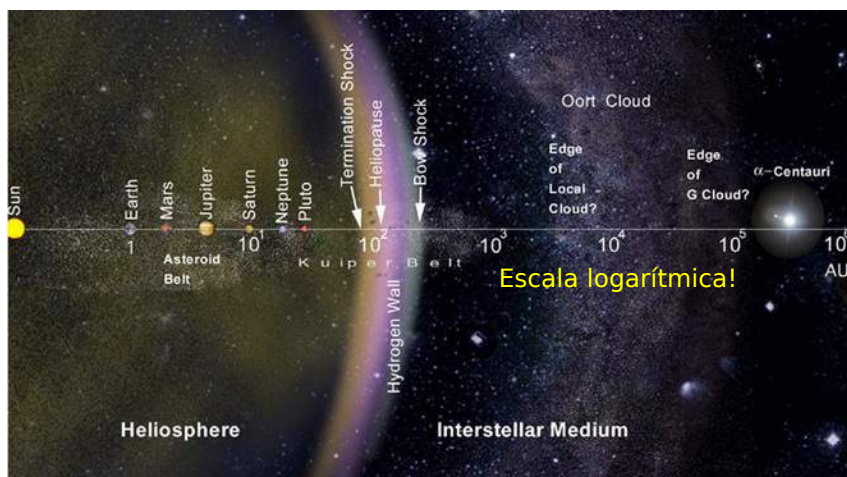
1. Mercurio.
2. Venus.
3. Tierra.
4. Marte.
5. Júpiter.
6. Saturno.
7. Urano.
8. Neptuno.

Plutón ya no es un planeta, pobrecito. El motivo de esto parece que es porque su órbita es muy excéntrica y fuera del plano de las demás órbitas, según [este link](#).

El sistema solar tiene, además, dos cinturones de asteroides. Los objetos principales del sistema solar son los siguientes:



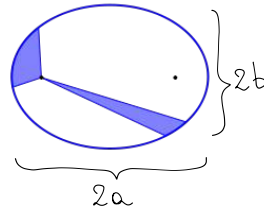
Además de todos estos objetos está la **nube de Oort**. En escala logarítmica tenemos lo siguiente:



1.3.1. Leyes de Kepler

Las leyes de Kepler son las siguientes:

1. Las órbitas de los planetas son elipses con el sol en uno de los focos.
2. El radio vector que une a un planeta con el sol recorre áreas iguales en tiempos iguales, como en el siguiente dibujito:



3. Para cualquier planeta, el cuadrado de su período orbital es directamente proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de su órbita elíptica

$$T^2 = Ca^3$$

Luego Newton mostró que $C = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)}$.

Históricamente primero vino **Tycho Brahe** que registró el movimiento de todos los planetas. Luego **Johannes Kepler** analizó estos datos y enunció las leyes de Kepler. Finalmente el crack de Newton explicó todo.

1.4. Las estrellas

Las estrellas se pueden clasificar de diversas formas. Una de estas clasificaciones tiene que ver con el brillo o luminosidad, y el color.

1.4.1. Intensidad y brillo

Magnitud visual aparente Originalmente el brillo se medía en **magnitud visual aparente**. Se toma un patrón tal que su magnitud aparente es

$$m_v = 1 \rightarrow \text{El patrón}$$

y a medida que disminuye el brillo de la estrella aumenta la magnitud visual aparente. Además la relación con el brillo aumenta de a 2,5 unidades. Esto quiere decir que:

$$m_v = 2 \text{ corresponde a una } 2,5 \text{ veces menos brillante que una } m_v = 1$$

y

$$m_v = 3 \text{ corresponde a una estrella } 2,5 \text{ veces menos brillante que una } m_v = 2$$

con lo cual $m_v = 3$ es $(2,5)^2 = 6,25$ veces menos brillante que el patrón $m_v = 1$.

Esta magnitud es visual por el hecho de que sólo tiene en cuenta el espectro visible y es aparente porque no tiene en cuenta la distancia a la cual se encuentra la estrella.

Magnitud bolométrica aparente La **magnitud bolométrica aparente** tiene en cuenta todo el espectro, no sólo el visible. El hecho de que sea aparente significa, nuevamente, que no se tiene en cuenta la distancia a la estrella. La magnitud bolométrica aparente se indica generalmente con una m minúscula.

Magnitud bolométrica absoluta Esta es la posta: tiene en cuenta todo el espectro de radiación y además considera la atenuación que se produce producto de la distancia de la estrella al observador. Se denota con una letra M mayúscula y se la puede traducir en forma directa con la luminosidad de la estrella (potencia que emite) de la siguiente manera

$$M_{\text{bolométrica absoluta de la estrella que estoy estudiando}} - M_{\text{bolométrica absoluta } \odot} = -2,5 \log \left(\frac{L_{\text{de la estrella}}}{L_{\odot}} \right)$$

donde L_{\odot} es la luminosidad del sol.

En forma estandarizada se tiene la siguiente expresión

$$M - m = -2,5 \log \left(\frac{r^2}{r_0^2} \right) - A$$

donde $r_0 = 1 \text{ pc}$ es un patrón, M y m corresponden a la magnitud absoluta y aparente de la estrella que estamos estudiando, r es la distancia hasta la estrella y A es la "extinción" que tiene en cuenta la absorción de luz por polvo interestelar y/u otros objetos que estén en el medio molestando.

1.4.2. Color (espectro)

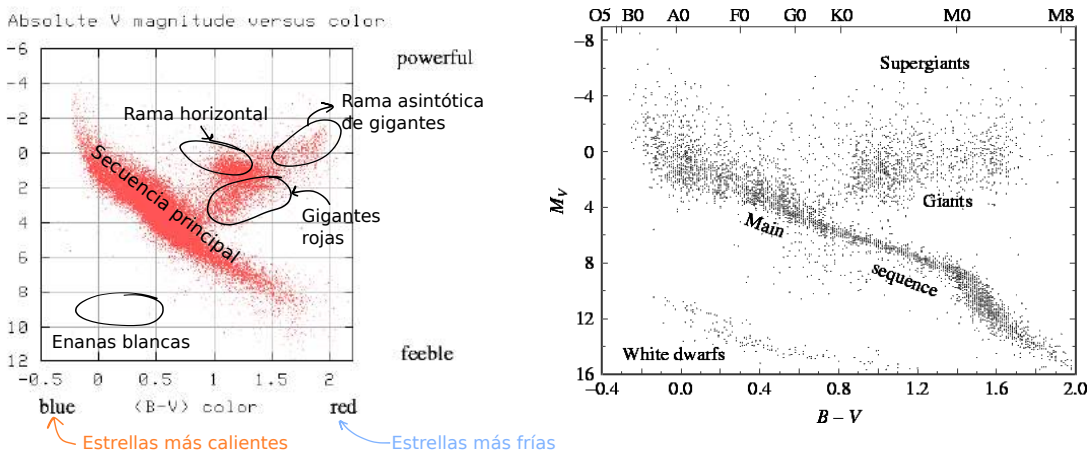
Históricamente se estandarizaron algunos filtros que utilizaban los astrónomos para medir el color de las estrellas e intercambiar la información. Estos filtros dieron origen al sistema fotométrico y son los siguientes:

Nombre	Espectro	Longitud de onda
U	Ultra violeta	360 nm
B	Blue	440 nm
V	Visible	550 nm
R	Red	700 nm
I	Infrared	900 nm

Utilizando estos filtros se generan los índices de color, por ejemplo el B-V o U-V.

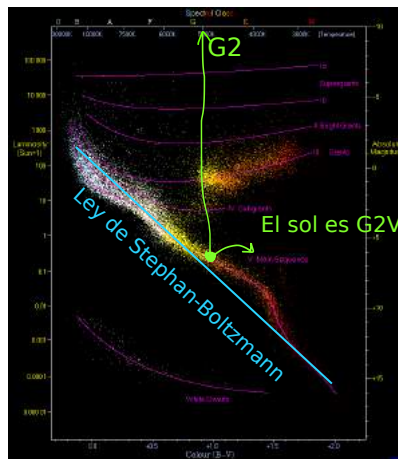
1.4.3. Clasificación de las estrellas

Usando los parámetros que definimos anteriormente podemos tomar todos los datos de las estrellas y hacer el siguiente gráfico:



Como se puede ver existe una correlación importante entre las cantidades M (magnitud absoluta) y $B - V$.

Realizando una traducción entre M y la luminosidad L y $B - V$ y la temperatura T se obtiene un diagrama de Hertzsprung-Russell que se ve así:



En este diagrama tenemos la clasificación de "clase espectral" que son las letras O, B, A, ... y también la clasificación según la intensidad de la estrella en I supergigantes, II gigantes brillantes, etc. El sol es una estrella de tipo G2V.

Modelo de cuerpo negro Las estrellas no son cuerpos negros. Pero se las puede modelar así en primera aproximación. La ley de Stephan-Boltzmann dice que

$$\frac{L}{4\pi R^2} = \sigma T^4 \rightarrow \text{Stephan-Boltzmann}$$

con lo cual vemos que $L \propto T^4$ y esto le pega muy bien a la secuencia principal, como dibujé en el grafiquito anterior.

1.5. Grupos de estrellas

Las estrellas pueden estar solitarias, como el sol, o pueden formar sistemas de dos o más estrellas que evolucionan en conjunto. Estos grupos pueden ser los siguientes:

- Sistemas binarios. Son dos estrellas en órbita mutua. Aproximadamente el 30 %¹ de las estrellas forman sistemas binarios, es decir que son en realidad dos estrellas.
- Cúmulos galácticos. Son grupos de entre 50 y 500 estrellas.
- Cúmulos globulares. Contienen aproximadamente 10^5 estrellas.
- Galaxias. Contienen entre 10^8 y 10^{12} estrellas.
- Grupos de galaxias. La Vía Láctea pertenece al *grupo local*.

Técnicas para detectar si una estrella es un sistema binario Las formas para darse cuenta si una estrella en verdad son dos estrellas formando un sistema binario son las siguientes:

- Visuales. Cuando la separación de las estrellas es mayor a $3''$ los telescopios logran resolver el sistema.
- Espectroscópicas. Cuando las dos estrellas están en órbita, habrá corrimientos doppler periódicos que podremos detectar. Para poder utilizar esta técnica es necesario que la línea de visión² no coincida con la normal al plano que contiene la órbita ya que en este caso no hay componente de velocidad en esta dirección y no habrá corrimiento doppler en dirección a la tierra.
- Eclipsantes. Se utilizan técnicas de fotometría y se estudia su dependencia temporal. Si se ve una oscilación de la luminosidad en el tiempo, entonces hay algo en órbita que produce estos cambios. Podrían ser planetas o bien un sistema binario.

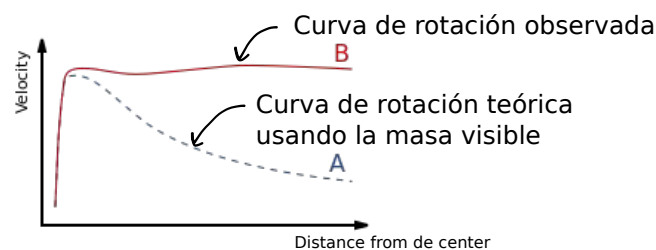
Tamaños típicos de los grupos estelares Los siguientes son ordenes de magnitud que está bueno conocer

Objeto	Tamaño (centímetros)
Unidad astronómica	10^{13}
Cúmulo globular	10^{20}
Galaxia	10^{23}
Cúmulos de galaxias	10^{25}
Gran escala (paredes y huecos)	10^{26}
Radio del universo	10^{28}

Me da la impresión de que cada vez estamos más cerca de la fe y más lejos de la ciencia.

1.6. Materia oscura

La **materia oscura** es un *engendro* que se utiliza para explicar las curvas de rotación de las galaxias y otros fenómenos que de lo contrario no tienen explicación. En el caso de las galaxias lo que ocurre es que si se calcula el movimiento de rotación usando las leyes conocidas de la física y la gravitación, lo que se obtiene NO es lo que se observa:



¹“Yo no sé la rigurosidad de este número... En astronomía hay que poner voluntad porque es todo muy con los dedos.”

²Es decir la línea que une a la estrella con la tierra.

2. Descripción cinética

Vamos a hacer una descripción estadística de los distintos objetos que hay en el universo. Tenemos muchas *especies* distintas que son los distintos objetos (por ejemplo los electrones, los protones, etc). Para hacer la descripción estadística vamos a usar *funciones de distribución*

$$f^s(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \rightarrow \text{Función de distribución de la especie } s$$

de modo tal que

$$f^s(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3r d^3p \rightarrow \text{Número de partículas con } \mathbf{r}, \text{ y } \mathbf{p}$$

es el número de partículas de la especie s con posición \mathbf{r} y momento \mathbf{p} al tiempo t .

La densidad de partículas por unidad de volumen es sencillamente

$$n^s(\mathbf{r}, t) = \int d^3p f^s(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \rightarrow \text{Densidad de partículas (momento 0)}$$

Por otro lado la densidad de masa por unidad de volumen será

$$\rho^s(\mathbf{r}, t) = m_s n^s(\mathbf{r}, t) \rightarrow \text{Densidad de carga}$$

y la densidad de carga

$$\rho_c^s(\mathbf{r}, t) = q_s n^s(\mathbf{r}, t) \rightarrow \text{Densidad de carga}$$

Podemos definir también el *campo de velocidades hidrodinámicas* como

$$\mathbf{u}^s(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{n^s} \int d^3p \mathbf{v} f^s \rightarrow \text{Momento 1}$$

donde $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{m_s}$ es la velocidad. El tensor de presión es

$$p_{ij}^s(\mathbf{r}, t) = m_s \int d^3p (v_i - u_i^s)(v_j - u_j^s) f^s \rightarrow \text{Tensor de presión (momento 2)}$$

Box 3 - Los momentos

Habiendo definido la densidad $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ definimos los momentos de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \text{Momento de orden 0} &\rightarrow \int d^3p f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) && \leftarrow \text{Es un escalar} \\ \text{Momento de orden 1} &\rightarrow \int d^3p p_i f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) && \leftarrow \text{Es un vector} \\ \text{Momento de orden 2} &\rightarrow \int d^3p p_i p_j f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) && \leftarrow \text{Es un tensor de orden 2} \\ &&& \vdots \end{aligned}$$

Así se puede seguir hasta el infinito. En el caso de la presión le restamos la velocidad media, pero es el tensor de orden 2.

Cuando estamos en equilibrio termodinámico vamos a tener que

$$\text{En el equilibrio termodinámico} \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial p_{ij}}{\partial t} = 0 & \text{Es estacionario} \\ \nabla p_{ij} = 0 & \text{Es homogéneo} \\ p_{ij} = p \delta_{ij} & \text{Es isótropo} \end{cases}$$

Equilibrio termodinámico local Podemos relajar un poco y pedir sólo un equilibrio termodinámico local que consiste en suponer que cada elemento del fluido está aproximadamente en equilibrio termodinámico y se puede definir bien una temperatura, una presión, etc. En este caso tenemos que

$$p^s = n^s k T^s \rightarrow \text{Para equilibrio termodinámico local}$$

y la temperatura la definimos como

$$\frac{3}{2} k T^s(\mathbf{r}, t) = \frac{m_s}{2n_s} \int d^3p |\mathbf{v} - \mathbf{u}^s|^2 f^s \rightarrow \text{Definición de } T \text{ en eq. termodinámico local}$$

La pregunta ahora es: ¿cómo definimos si estamos en un equilibrio termodinámico local? Para entender esto vamos a usar la ecuación de Boltzmann.

2.1. Ecuación de Boltzmann

Se puede trabajar sin colisiones, con colisiones entre dos partículas (Boltzmann), con colisiones entre tres partículas, etc.

2.1.1. Sin colisiones

Suponemos un gas tan diluido que no hay colisiones. En este caso el número de partículas que estarán contenidas en un determinado volumen diferencial satisfarán

$$d^3r d^3p f(\mathbf{r} + d\mathbf{r}, \mathbf{p} + d\mathbf{p}, t + dt) = d^3r d^3p f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$$

donde

$$\begin{cases} d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt \\ d\mathbf{p} = \mathbf{F} dt \end{cases}$$

con $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{m}$ y \mathbf{F} la fuerza. También vamos a usar que

$$d^3r d^3p = \text{constante} \rightarrow \text{Invariante de Poincaré}$$

es un invariante de Poincaré. Si ahora hacemos un Taylor en no sé qué variable(s) encontramos que

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0 \rightarrow \text{Eq. de Vlasov}$$

que se conoce como la ecuación de Vlasov.

2.1.2. Con colisiones binarias (ecuación de Boltzmann)

Ahora lo que hacemos es añadir el término de colisiones entre dos partículas (tal como se ve en Teórica 3) y lo que se obtiene es la ecuación de Boltzmann

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = \underbrace{\int d^3p_1 \int d\Omega \sigma(\Omega) |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1| (f' f'_1 - f f_1)}_{\text{Término de colisiones binarias}} \rightarrow \text{Eq. de Boltzmann}$$

donde Ω es el ángulo sólido y σ es la sección eficaz y las cantidades primadas y sin primar son las correspondientes a antes y después de la colisión respectivamente. Esta ecuación no tiene en cuenta la colisión entre tres o más partículas. Para ello habría que ir a mayores órdenes de colisión.

Box 4 - Sobre el término de colisiones de la ecuación de Boltzmann

El término de colisiones es muy complicado y uno nunca termina usándolo para hacer cuentas. Sin embargo es muy importante ya que es el que garantiza que un gas que no está en equilibrio termodinámico evolucionará hasta el equilibrio a medida que pasa el tiempo, gracias a las colisiones entre partículas.

Se encuentra que la [distribución de Maxwell-Boltzmann](#) es la solución de equilibrio de la ecuación de Boltzmann, que es justamente lo que se esperaría para un gas ideal. La distribución de Maxwell-Boltzmann es justamente aquella distribución que hace que el término de colisiones se anula. Esto es consistente con una distribución f que satisface que $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, $\nabla f = 0$ y $\nabla_{\mathbf{v}} f = 0$, es decir el equilibrio.

Busquemos la distribución de equilibrio (i.e. la de Maxwell-Boltzmann). Proponemos una solución tal que

$$\log f = C_0 + \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{v} + C_2 v^2 \rightarrow \text{Proponemos esto}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \log(f f_1) &= \log f + \log f_1 \\ &= c_0 + \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{v} + c_2 v^2 + c_{01} + \mathbf{c}_{11} \cdot \mathbf{v}_1 + c_{21} v_1^2 \end{aligned}$$

(acá hay un tema con los subíndices, no es la elección más feliz). Si las colisiones son elásticas entonces se conserva la energía y el momento con lo cual (?)

$$f' f'_1 = f f_1 \rightarrow \text{Por conservación (?)}$$

“Ordenando los términos” encontramos la distribución de Maxwell-Boltzmann para la “especie s ” de partículas:

$$f^s(\mathbf{p}) = n^s \left(\frac{m_s}{2\pi k T^s} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m_s |\mathbf{v} - \mathbf{u}^s|^2}{2k T^s} \right) \rightarrow \text{Distribución de Maxwell-Boltzmann}$$

Cuando estamos en el equilibrio termodinámico “perfecto” todas las cosas son constantes, es decir n^s , T^s y \mathbf{u}^s . En cambio, cuando estemos en un equilibrio termodinámico local (pero no riguroso) vamos a tener que estas cantidades son campos, es decir que $n^s = n^s(\mathbf{r}, t)$ y lo mismo para T^s y \mathbf{u}^s .

3. Atmósferas y exósferas planetarias

La clase pasada (27 o 28 de agosto) falté y hoy 30 de agosto llegué tarde. Estamos viendo algo de atmósferas planetarias. Copio textual lo que hay:

$$0 = -\nabla p - \frac{GMm}{r^2} \hat{r}$$

Ideal e isotérmico

$$p = nkT_0$$

$$n(r) = n_0 \exp\left(-\frac{GMm}{kT_0} \left(1 - \frac{R_0}{r}\right)\right)$$

(2) cerca de la superficie $r = R_0$ $\begin{cases} r = R_0 + h \\ h \ll R_0 \end{cases}$ entonces

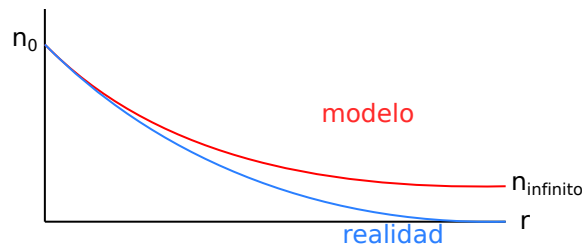
$$n(r = R_0 + h) \sim n_0 e^{-\frac{h}{H_0}}$$

$$H_0 = \frac{kT_0}{mg}$$

$$g = \frac{GM_0}{R_0^2}$$

(b) muy lejos ($r \rightarrow \infty$) $r \gg R_0$

$$\begin{aligned} n_\infty &= n(r \rightarrow \infty) \\ &= n_0 \exp\left(-\frac{GM_0 m}{kT_0 R_0}\right) \\ &= n_0 e^{-\frac{R_0}{H_0}} \end{aligned}$$



Vemos que nuestro modelo simplificado es bueno cerca de la superficie terrestre pero es malo a medida que nos alejamos ya que la densidad debería tender a cero pero el modelo predice otra cosa.

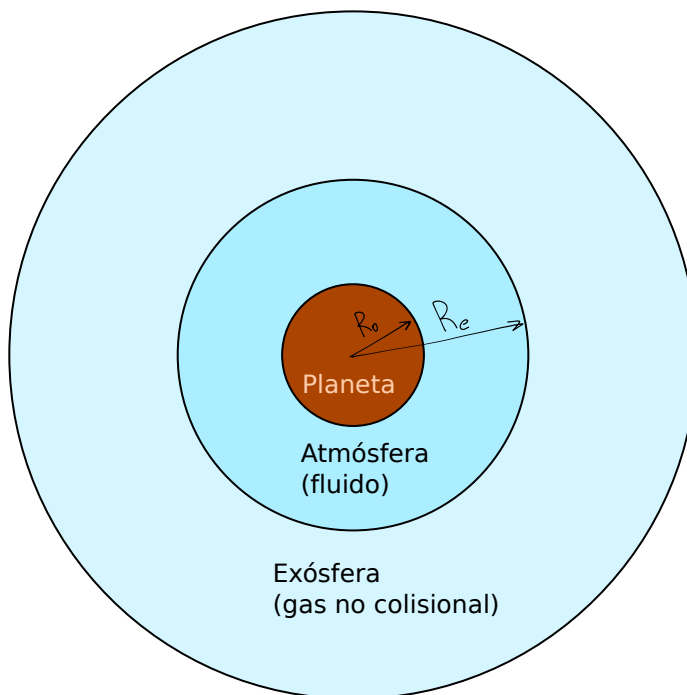
La velocidad de escape para una partícula de masa m viene dada por

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r}$$

Si $E < 0$ la partícula está ligada, en cambio si $E > 0$ la partícula se puede escapar. El límite es justo cuando $E = 0$ de donde se obtiene la velocidad de escape

$$v_{\text{escape}} = \sqrt{\frac{2GM_0}{R_0}}$$

Exósfera Supongamos un planeta de radio R_0 . Entonces tenemos lo siguiente



En la exósfera tenemos que

$$n(r) = n_e e^{-\frac{h}{H_e}}$$

donde $n_e = n_0 e^{-\frac{GMm}{kTR_0}(1-\frac{R_0}{R_e})}$ y $H_e = \frac{kT_0}{mg_e}$ y $g_e = \frac{GM_0}{R_e^2}$. “Estoy entrando en la exósfera si $H_e \sim \lambda$ ” (creo que λ es el camino libre medio).

Escape de Jeans Ahora veamos cuánta masa se pierde producto de la agitación térmica. Nos preguntamos ¿cuántas partículas de la exósfera superan la velocidad de escape? Resulta que la cantidad de partículas que se van del planeta por unidad de tiempo es

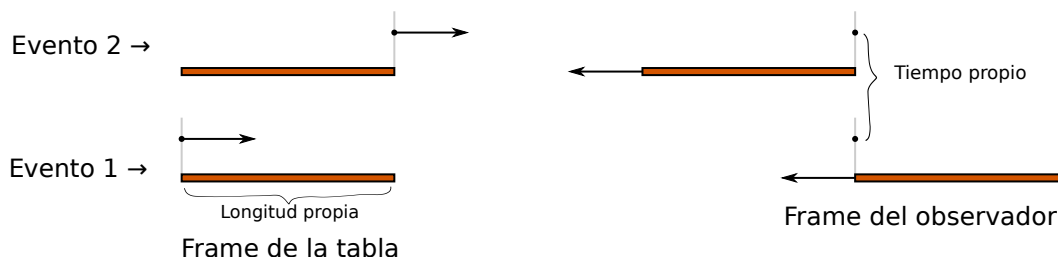
$$\begin{aligned} \dot{N} &= 4\pi R_e^2 \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{v_{\text{escape}}}^{\infty} dv_z v_z f(\mathbf{v}) \\ &= 4\pi R_e^2 n_e \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} e^{-\frac{GMm}{kTR_e}} \end{aligned}$$

donde f es la distribución de Maxwell-Boltzmann. Usando esto y conociendo cuántas partículas hay en la atmósfera de Marte uno podría estimar cuánto tiempo le llevaría a Marte quedarse sin atmósfera.

4. Relatividad especial

Vamos a ver una breve introducción a modo de repaso para luego desarrollar una ecuación de Boltzmann relativista y aplicarla a fotones.

Supongamos una tabla de madera de longitud (en reposo) L_0 . Supongamos además un observador que se mueve a una velocidad v y consideremos los dos eventos siguientes



Vamos a llamar T_0 al tiempo propio entre ambos eventos, es decir el tiempo que transcurre entre los eventos en el frame del observador (el frame en que los dos eventos ocurren en el mismo punto del espacio). Entonces tenemos que

$$v = \begin{cases} \frac{L_0}{T} & \rightarrow \text{En el frame de la tabla} \\ \frac{L}{T_0} & \rightarrow \text{En el frame del observador} \end{cases}$$

y como $v_{\text{en el frame del observador}} = v_{\text{en el frame de la tabla}}$ entonces tenemos que

$$\frac{T}{T_0} = \frac{L_0}{L}$$

Si uno hace todo lo que hizo Einstein en 1905 termina concluyendo que

$$\frac{T}{T_0} = \frac{L_0}{L} = \gamma(v)$$

con $\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ (esto hay que verlo en los libros, no lo vamos a deducir acá). Deducimos entonces que

$$\begin{cases} T_0 = \gamma T & \rightarrow \text{Dilatación temporal} \\ L_0 = \frac{L}{\gamma} & \rightarrow \text{Contracción temporal} \end{cases}$$

4.1. Transformación de Lorentz

Las transformaciones de Lorentz permiten relacionar las coordenadas espaciotemporales de un evento visto desde dos frames distintos. Dado un evento con coordenadas espaciotemporales $\begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ entonces las coordenadas vistas por un observador que se mueve con velocidad v a lo largo del eje x se obtienen según

$$\begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

donde $\beta = \frac{v}{c}$ y $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Utilizando la notación de Einstein lo anterior se puede expresar según

$$x^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

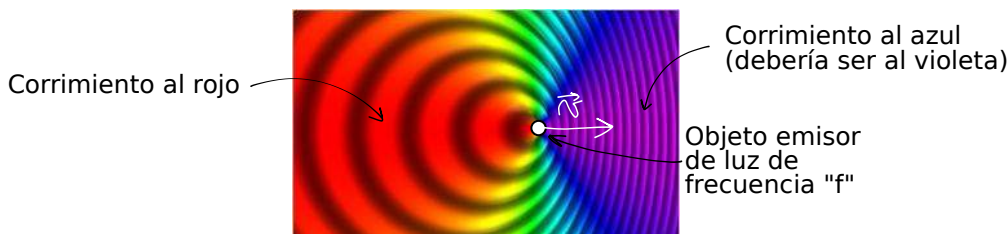
y ahora se interpreta que x^μ son las coordenadas de un cuadrivector en un espacio de Minkowsky.

4.2. Efecto doppler relativista

El efecto doppler (relativista) es muy utilizado en astrofísica. Consideremos un objeto que emite una luz de frecuencia f . Si un observador mide la frecuencia de esta luz éste observará

$$\nu_{\text{observada}} = \frac{1 - \beta \cdot \hat{r}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \nu_{\text{de la fuente}} \rightarrow \text{Relativistic doppler effect}$$

donde \hat{r} es el versor radial que apunta desde la fuente de luz hasta el observador.



4.3. Dinámica relativista

La generalización de la ley de conservación de impulso en relatividad especial es la conservación del cuádrimomento. Las componentes de este cuádrivector son

$$p^\mu = \begin{bmatrix} m_0 \gamma c^2 \\ m_0 \gamma \mathbf{v} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Cuádrimomento, se conserva}$$

donde \mathbf{v} es la velocidad “tridimensional” de siempre. Obsérvese que la componente temporal de p^μ es la energía cinética de la partícula, y cuando la velocidad es nula (i.e. cuando $\gamma = 1$) vale que $E = m_0 c^2$. Por otro lado se puede hacer una aproximación de Taylor para velocidades bajas y la energía queda

$$p^0 = E = m_0 c^2 + \frac{m_0}{2} v^2 + \dots$$

y como se puede ver el primer término (no constante) en v es la energía cinética clásica.

Por otro lado se tiene la siguiente relación entre la la energía y el momento

$$E^2 = c^2 \mathbf{p}^2 + m_0^2 c^4$$

Se define a la *masa relativista* como

$$m = m_0 \gamma \rightarrow \text{Masa relativista}$$

donde m_0 es la masa en reposo.

5. Atmósferas estelares (transporte de radiación)

Estamos interesados en conocer en detalle qué le pasa a la luz cuando viaja desde un objeto celeste hasta nuestros telescopios. De esta forma podemos aplicar correcciones y tener una mejor caracterización del objeto en estudio. En particular vamos a ver qué le ocurre en las atmósferas estelares.

Vamos a hacer una descripción estadística de la luz como un gas de fotones. Vamos a definir entonces la función de distribución de fotones en forma análoga a la función de distribución de Boltzmann. El número de fotones en un entorno de la posición \mathbf{r} con momento en un entorno de \mathbf{p} será

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3 r d^3 p$$

donde f es la función de distribución de fotones. Si expresamos a \mathbf{p} en esféricas entonces tenemos que $d^3 p = p^2 dp d\Omega$ donde $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ es el diferencial de ángulo sólido.

El tema con los fotones es que son partículas relativistas ya que se mueven a la velocidad de la luz. La masa de los fotones es nula con lo cual la relación entre su energía y el impulso es

$$E^2 = c^2 \mathbf{p}^2 \rightarrow \text{Relatividad}$$

Además son objetos cuánticos lo cual implica que

$$E = h\nu \rightarrow \text{Cuántica}$$

Juntando estas dos relaciones se encuentra que

$$p = \frac{h\nu}{c}$$

Entonces podemos hacer un cambio de variable en la función de distribución y en lugar de trabajar con \mathbf{p} usar la frecuencia ν , que es mucho más fácil de medir. En este caso tenemos que

$$d^3 p = \frac{h^3 \nu^2}{c^3} d\nu d\Omega \rightarrow \text{Cambiamos de variable}$$

5.1. Intensidad de radiación y notación típica de la astronomía

Por otro lado vamos a definir a una cantidad muy usada en astronomía que es la *intensidad de radiación* I_ν tal que

$$d\text{energía} = I_\nu d\Omega d\nu dS dt$$

es la energía que atraviesa la superficie S en un tiempo t con una frecuencia ν y el ángulo sólido no sé... La relación entre esta intensidad de radiación y la función de distribución de fotones es

$$\frac{I_\nu}{h\nu} d\Omega d\nu dS dt = f_\nu \underbrace{\frac{h^3}{\nu^3} \nu^2 d\Omega d\nu}_{d^3 p} \underbrace{c dt dS}_{d^3 r}$$

Podemos ahora cancelar todos los diferenciales que sobran tal que

$$I_\nu = f_\nu \nu^3 \frac{h^4}{c^2}$$

Lo anterior es la relación entre la descripción típica de la astronomía usando la intensidad de radiación I_ν y la descripción como un gas de fotones usando f_ν . Usando esta relación encontramos que

$$I = \frac{h^4}{c^2} \int_0^\infty \nu^3 f_\nu d\nu \rightarrow \text{Intensidad de radiación}$$

es la intensidad de radiación.

Los momentos de la distribución Al igual que hicimos antes para las atmósferas y exósferas planetarias, podemos ahora calcular los momentos de la distribución f_ν . Se define el *flujo* como

$$F^\mu = \int \frac{d^3p}{h\nu} p^\mu f_\nu \rightarrow \text{Flujo}$$

A las componentes de F^μ se las denota de la siguiente manera

$$F^\mu = \frac{1}{h\nu} \begin{bmatrix} \varepsilon_\nu \\ \mathbf{q}_\nu \end{bmatrix}$$

donde ε_ν es la densidad de energía y \mathbf{q}_ν es el “flujo 3D”. Cada uno de estos elementos es

$$\begin{cases} \varepsilon_\nu = h\nu n_\nu = \frac{1}{2} \oint I_\nu d\Omega & \rightarrow \text{Momento de orden cero} \\ \mathbf{q}_\nu = \frac{1}{c} \oint I_\nu \mathbf{u} d\Omega & \rightarrow \text{Momento de primer orden} \end{cases}$$

Por otro lado tenemos el siguiente tensor

$$(T_\nu)^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \varepsilon_\nu & \mathbf{q}_\nu^T \\ \mathbf{q}_\nu & (p_\nu)^{ij} \end{bmatrix}$$

donde $(p_\nu)^{ij}$ es el tensor de presión de radiación (y \mathbf{q}_ν^T es el transpuesto). El tensor de presión tiene componentes

$$(p_\nu)^{ij} = \oint I_\nu u_i u_j d\Omega \rightarrow \text{Momento de segundo orden}$$

Definimos además a la presión radiativa como

$$p_\nu = \frac{1}{3} (p_\nu)^{ii} = \frac{\varepsilon_\nu}{3} \rightarrow \text{Presión radiativa}$$

5.2. Ecuación de transporte

Ahora que ya tenemos la traducción entre las cantidades típicas de la astronomía (intensidad de radiación, etc) y la función de distribución, veamos cómo es la física de todo esto. Para ello vamos a utilizar la ecuación de Boltzmann para fotones que es

$$v^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + F^\alpha \frac{\partial f}{\partial p^\alpha} = C(f)$$

donde C es el término de colisiones, F^α es la cuadrifuerza externa (no es el flujo que vimos hace un ratito) y v^α es la cuadrivelocidad. Batimóvil, baticueva, batifuerza... Vamos a considerar que el espacio es suficientemente plano como para considerar que los fotones viajan en línea recta. Esto implica que

$$F^\mu = 0$$

Entonces la ecuación de Boltzmann se convierte en

$$\partial_t I_\nu + \mathbf{u} \cdot \nabla I_\nu = \underbrace{\Gamma_\nu^+ - \Gamma_\nu^-}_{\text{Colisiones}}$$

donde Γ_{ν}^{+} tiene en cuenta los procesos que emiten fotones y Γ_{ν}^{-} los procesos que absorben fotones. Vamos a tener varios procesos colisionales de cada tipo. Entre los procesos absorbentes tenemos

$$\begin{aligned}\Gamma_{\nu}^{-} &= \Gamma_{\nu, \text{absorción}}^{-} + \Gamma_{\nu, \text{scattering}}^{-} \\ &= (k_{\nu} + \sigma_{\nu}) \rho I_{\nu} \\ &= \kappa_{\nu} \rho I_{\nu}\end{aligned}$$

donde k_{ν} es el coeficiente de absorción, σ_{ν} el de scattering, κ_{ν} es la opacidad y ρ es la densidad de absorbentes (por ejemplo átomos de hidrógeno). Para los procesos que emiten fotones

$$\begin{aligned}\Gamma_{\nu}^{+} &= \Gamma_{\nu, \text{emisión}}^{+} + \Gamma_{\nu, \text{scattering}}^{+} \\ &= \rho e_{\nu} + \oint \sigma_{\nu} \rho I_{\nu} \mathcal{P}(\Omega) d\Omega\end{aligned}$$

donde e_{ν} es el coeficiente de emisión y $\mathcal{P}(\Omega)$ es una función que tiene en cuenta la anisotropía de los fenómenos de scattering, o algo así. Obsérvese que $\Gamma_{\nu, \text{emisión}}^{+} \propto I_{\nu}$ (no es proporcional), esto es porque puede haber emisión producto de otros fenómenos. Aún así podría ocurrir que e_{ν} sea función de I_{ν} lo cual complica mucho más las cosas. En aquellas situaciones en las que haya “redistribución completa” valdrá que

$$\mathcal{P}(\Omega) = \frac{1}{4\pi} \rightarrow \text{Cuando hay redistribución completa}$$

con lo cual

$$\begin{aligned}\Gamma_{\nu, \text{scattering}}^{+} &= \frac{1}{4\pi} \oint \sigma_{\nu} \rho I_{\nu} d\Omega \\ &= \sigma_{\nu} \rho J_{\nu}\end{aligned}$$

donde

$$J_{\nu} \equiv \frac{\rho}{r\pi} \oint I_{\nu} d\Omega$$

Cuando estamos en equilibrio termodinámico a una temperatura T tenemos que

$$\text{Emisividad} \rightarrow e_{\nu} = k_{\nu} \underbrace{B_{\nu}(T)}_{I_{\nu} \text{ en eq.}}$$

donde

$$B_{\nu}(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \rightarrow \text{Bose-Einstein}$$

Metiendo todo lo anterior en la ecuación de transporte se obtiene

$$\partial_t I_{\nu} + \mathbf{u} \cdot \nabla I_{\nu} = \rho [e_{\nu} + \sigma_{\nu} J_{\nu} - k_{\nu} I_{\nu} - \sigma_{\nu} I_{\nu}] \rightarrow \text{Eq. de transporte}$$

Aquí hemos considerado una única especie, e.g. hidrógeno. En caso de tener más especies que puedan interactuar con la luz vamos a tener que añadir un término de colisiones para cada especie, e.g. $\rho^{H_2} [e_{\nu}^{H_2} + \sigma_{\nu}^{H_2} J_{\nu} - k_{\nu}^{H_2} I_{\nu} - \sigma_{\nu}^{H_2} I_{\nu}] + \rho^{He} [e_{\nu}^{He} + \sigma_{\nu}^{He} J_{\nu} - k_{\nu}^{He} I_{\nu} - \sigma_{\nu}^{He} I_{\nu}] + \dots$

El objetivo ahora es resolver esta ecuación de transporte, que es ultra complicada. Es una ecuación integra-diferencial ya que $J_{\nu} = \frac{1}{4\pi} \oint \sigma_{\nu} \rho I_{\nu} d\Omega$ y además es no lineal.

IMPORTANTE: En toda esta sección pueden haber cosas mal copiadas, puntualmente la diferencia entre J_{ν} e I_{ν} en el pizarrón es casi nula.

Función fuente Vamos a definir a la función fuente como

$$S_{\nu} = \frac{e_{\nu} + \sigma_{\nu} J_{\nu}}{k_{\nu} + \sigma_{\nu}} \rightarrow \text{Función fuente}$$

de modo tal que la ecuación de transporte es

$$\partial_t I_{\nu} + \mathbf{u} \cdot \nabla I_{\nu} = (S_{\nu} - I_{\nu}) \rho \kappa_{\nu} \rightarrow \text{Ecuación de transporte}$$

donde

$$\kappa_{\nu} = k_{\nu} + \sigma_{\nu} \rightarrow \text{Opacidad}$$

es la opacidad. Esto nos muestra que en el equilibrio termodinámico $S_{\nu} = I_{\nu}$. Aquí la velocidad es

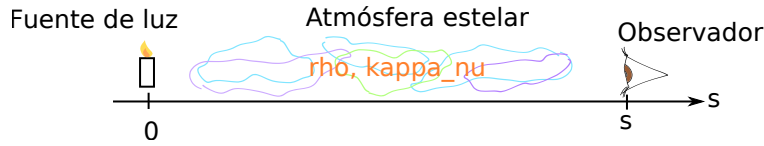
$$\mathbf{u} = c\hat{\mathbf{u}} \rightarrow \text{Para fotones}$$

pues viajan a la velocidad de la luz. Por otro lado la función S_{ν} tiene en cuenta todos los procesos de emisión mientras que el término $-\rho \kappa_{\nu} I_{\nu}$ tiene en cuenta la absorción de fotones. O algo así.

IMPORTANTE: Lo mismo que antes pero ahora con κ_{ν} y k_{ν} . En el pizarrón son iguales.

5.3. Atmósferas unidimensionales

Ejemplo académico 1, con $S_\nu = 0$ Consideremos el caso en el que tenemos una fuente de luz que atraviesa una atmósfera y luego llegan a un observador



Vamos a hacer las siguientes suposiciones:

- Situación estacionaria $\partial_t = 0$. A menos que estemos observando un cuasar y/o algún fenómeno muy rápido, en general las escalas de tiempo son muy grandes con lo cual tiene sentido.
- Vamos a considerar un problema unidimensional: $\mathbf{u} \cdot \nabla = c \frac{\partial}{\partial s}$.
- Consideramos $S_\nu = 0$.

Entonces la ecuación tan complicada que habíamos encontrado se reduce a

$$\frac{\partial I_\nu}{\partial s} = -\frac{\rho \kappa_\nu}{c} I_\nu$$

por lo tanto la solución es la de todo sistema físico

$$I_\nu(s) = I_\nu(0) e^{-\frac{\rho \kappa_\nu}{c} s}$$

donde $I_\nu(0)$ es la intensidad luminosa en la fuente y ρ y κ_ν podrían ser funciones de s en el caso de atmósferas no homogéneas. Esta solución nos permite definir el camino libre medio de un fotón como

$$\lambda_\nu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c}{\rho \kappa_\nu} \rightarrow \text{Camino libre medio de fotones}$$

que representa el camino que recorre un fotón entre dos interacciones con la materia (absorción y emisión, ionización, etc.). Definimos también a la profundidad óptica como

$$d\tau_\nu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\rho \kappa_\nu}{c} ds \rightarrow \text{Profundidad óptica}$$

o bien

$$\tau_\nu = \int_0^s \frac{\rho \kappa_\nu}{c} ds$$

$$\text{Atmósfera homogénea} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \text{cte} \\ \kappa_\nu = \text{cte} \end{cases} \rightarrow = \frac{\rho \kappa_\nu}{c} s$$

lo cual nos permite escribir

$$I_\nu(s) = I_\nu(0) = e^{-\tau_\nu}$$

Ejemplo académico 2, con $S_\nu \neq 0$ pero conocida Consideremos todo igual que antes (estacionario, unidimensional, etc.) pero ahora con $S_\nu(\tau_\nu)$ una función de τ_ν conocida. La ecuación de transporte de radiación es, ahora,

$$c \frac{\partial I_\nu}{\partial s} = \rho \kappa_\nu (S_\nu - I_\nu)$$

Vamos a hacer un cambio de variable de $s \rightarrow \tau_\nu$ (profundidad óptica)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} &= \frac{d\tau_\nu}{ds} \frac{\partial}{\partial \tau_\nu} \\ &= \frac{\rho \kappa_\nu}{c} \frac{\partial}{\partial \tau_\nu} \end{aligned}$$

con lo cual la ecuación queda

$$\frac{\partial I_\nu}{\partial \tau_\nu} = S_\nu - I_\nu$$

Esto no es más que una ecuación no homogénea. Ahora hacemos ese trquito de Mate 3 de proponer la solución

$$I = I_{\text{homogénea}} + I_{\text{particular}}$$

con lo cual

$$\frac{dI_H}{d\tau} = -I_H \Rightarrow I_{\text{Homogénea}} = Ae^{-\tau}$$

Ahora proponemos para la particular una solución de la forma

$$I_P = F(\tau) e^{-\tau} \rightarrow \text{proponemos}$$

con lo cual encontramos que

$$F(\tau) = \int S(\tau) e^{\tau} d\tau$$

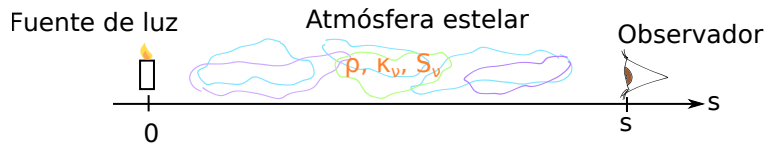
La solución general de la ecuación es entonces

$$I = Ae^{-\tau} + e^{-\tau} \int S(t) e^t dt \rightarrow \text{Solución general}$$

o bien

$$I_{\nu}(\tau_{\nu}) = I_{\nu}(0) e^{-\tau_{\nu}} + \int_0^{\tau_{\nu}} S_{\nu}(t) e^{-(\tau_{\nu}-t)} dt$$

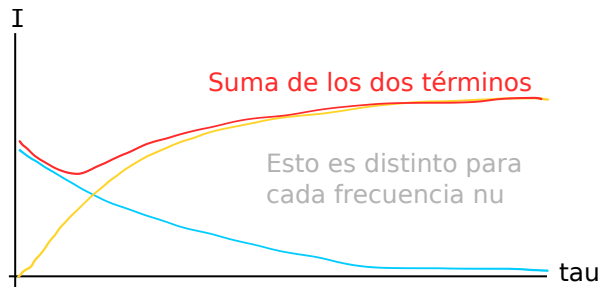
Lo anterior es la solución cuando permitimos que la atmósfera interestelar emita, es decir



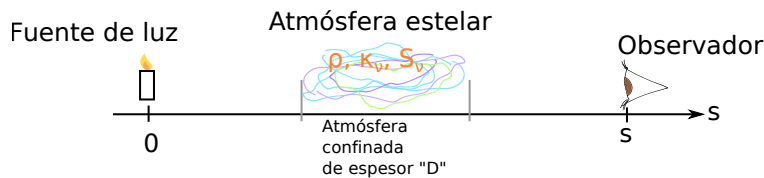
Si ahora asumimos que $S_{\nu}(\tau_{\nu}) = \text{cte}$ obtenemos

$$I_{\nu}(\tau_{\nu}) = I_{\nu}(0) e^{-\tau_{\nu}} + (1 - e^{-\tau_{\nu}}) S_{\nu} \rightarrow \text{Cuando } S_{\nu} = \text{cte}$$

que es de la forma



Atmósferas ópticamente gruesas y delgadas Consideremos ahora el siguiente caso



Vamos a decir que la atmósfera es ópticamente gruesa o delgada cuando

$$\tau_{\nu}(D) = \int_0^D \frac{\rho \kappa_{\nu}}{c} ds \rightarrow \begin{cases} \gg 1 & \Rightarrow \text{Ópticamente gruesa} \\ \ll 1 & \Rightarrow \text{Ópticamente delgada} \end{cases}$$

es decir que

$$\begin{cases} \lambda_{\nu} \ll D & \Rightarrow \text{Ópticamente gruesa} \\ \lambda_{\nu} \gg D & \Rightarrow \text{Ópticamente delgada} \end{cases}$$

donde λ_ν recordemos que era el camino libre medio de los fotones.

Vamos a tomar ahora el límite de $I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + (1 - e^{-\tau_\nu})S_\nu$ para atmósferas ópticamente gruesas y delgadas. En el límite para una atmósfera ópticamente gruesa tenemos que $\tau_\nu \gg 1$ con lo cual $e^{-\tau_\nu} \approx 0$ y entonces

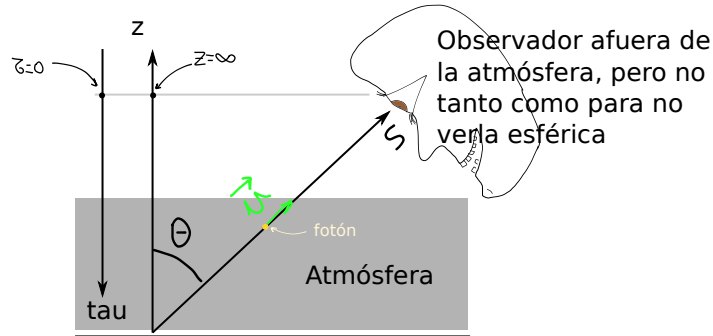
$$I_\nu \approx S_\nu \rightarrow \text{Atmósferas ópticamente gruesas}$$

En cambio, en el límite de atmósfera ópticamente delgada tenemos lo opuesto: $\tau_\nu \ll 1 \Rightarrow e^{-\tau_\nu} \approx 1 - \tau_\nu$ y

$$I_\nu \approx I_\nu(0) + (S_\nu - I_\nu(0))\tau_\nu \rightarrow \text{Atmósferas ópticamente delgadas}$$

5.3.1. Atmósfera plano-paralela

Vamos a resolver la ecuación de transporte para la siguiente situación



Obsérvese que hemos definido de una forma un poco diferente al τ_ν . Ahora tenemos que

$$\tau_\nu(z) = \int_z^\infty \frac{\rho\kappa_\nu}{c} dz \quad \Rightarrow \quad d\tau_\nu = -\frac{\rho\kappa_\nu}{c} dz$$

Vamos a asumir las mismas hipótesis que antes:

- Estacionario $\frac{\partial}{\partial t} = 0$.
- Usando $\mu \stackrel{\text{def}}{=} \cos \theta$ vamos a considerar que

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \nabla &= c \frac{\partial}{\partial s} \\ &= c\mu \frac{\partial}{\partial z} \\ &= \mu \cancel{\epsilon} \left(-\frac{\rho\kappa_\nu}{\cancel{\epsilon}} \right) \frac{\partial}{\partial \tau_\nu} \end{aligned}$$

Introduciendo todo esto en la ecuación de transporte $\partial_t I_\nu + \mathbf{u} \cdot \nabla I_\nu = (S_\nu - I_\nu)\rho\kappa_\nu$ obtenemos

$$-\cancel{\rho\kappa_\nu}\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial \tau_\nu} = \cancel{\rho\kappa_\nu}(S_\nu - I_\nu)$$

o bien

$$\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial \tau_\nu} = I_\nu - S_\nu$$

Usando el método de “comparación con el caso similar de hace un rato” vemos que la solución de esto es

$$I_\nu(\tau_\nu, \mu) = \int_{\tau_\nu}^\infty \frac{dt}{\mu} S_\nu(t) e^{-\frac{t-\tau_\nu}{\mu}} \rightarrow \text{Atmósfera plano-paralela}$$

El término de la solución homogénea no está pues estamos considerando el hecho de que $I_\nu(\tau_\nu \rightarrow \infty) = 0$ (recordar que la solución homogénea era $\sim e^{-\tau_\nu}$).

Aproximación de Eddington-Barbier Consideremos la solución de la atmósfera plano-paralela. Si la atmósfera es mucho más gruesa que el camino libre medio, entonces el aporte de $S_\nu(\tau_\nu)$ para τ_ν mucho mayor que el camino libre medio de los fotones no me va a interesar pues los fotones emitidos van a colisionar en la atmósfera antes de llegarme. Entonces vamos a considerar que sólo nos interesa S_ν para valores de τ_ν “pequeños” (del orden del camino libre medio). Para ello vamos a aproximar S_ν con un Taylor lineal

$$S_\nu(\tau_\nu) \approx a_0 + a_1\tau_\nu + \dots$$

y reemplazando en $I_\nu(\tau_\nu, \mu) = \int_{\tau_\nu}^{\infty} \frac{dt}{\mu} S_\nu(t) e^{-\frac{t-\tau_\nu}{\mu}}$ nos queda

$$I_\nu(\tau_\nu, \mu) = \int_{\tau_\nu}^{\infty} \frac{dt}{\mu} (a_0 + a_1 t) e^{-\frac{t-\tau_\nu}{\mu}}$$

Ahora no lo pude seguir bien en lo que está haciendo. Supuestamente está resolviendo la integral y haciendo uso de la identidad $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$. Mandamos el cambio de variable $x = \frac{t-\tau_\nu}{\mu}$ con lo cual

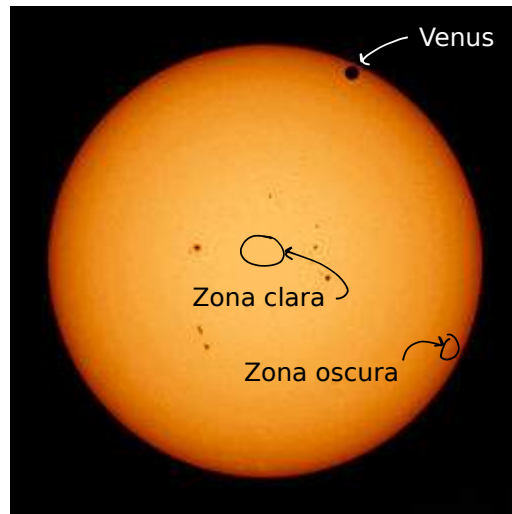
$$I(\tau, \mu) = \int_0^\infty (a_0 + a_1(\mu x + \tau)) e^{-x} dx$$

y se obtiene

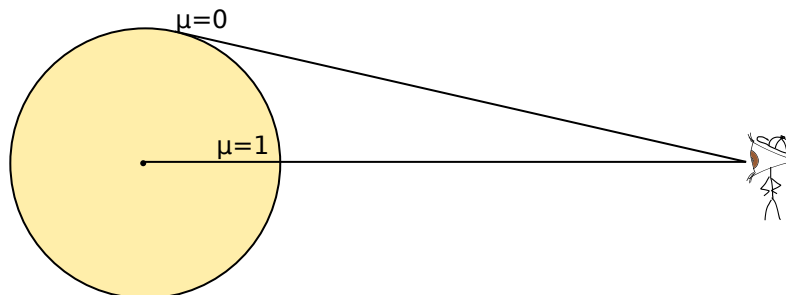
$$I_\nu(\tau_\nu = 0, \mu) \approx S_\nu(\tau_\nu = \mu) \rightarrow \text{Eddington-Barbier approximation}$$

donde $S_\nu = a_0 + a_1\mu$.

Aplicación de Eddington-Barbier: limb darkening en el sol Se conoce como *limb darkening* al hecho de que cuando uno mira al sol en el espectro visible, éste aparece más luminoso en el centro y menos en las periferias (en el limbo). Estéticamente es algo así



Recordando que $\mu = \cos \theta$ entonces tenemos que en las zonas claras vale $\mu = 1$ y en las zonas oscuras tenemos que $\mu = 0$, del siguiente modo



Por otro lado, estamos interesados en la intensidad que recibe el observador, es decir que $\tau = 0$ (ver la definición de τ más arriba). Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \frac{I(\tau = 0, \mu = 0)}{I(\tau = 0, \mu = 1)} &\approx \frac{S(\tau = \mu = 0)}{S(\tau = \mu = 1)} \leftarrow \text{Por Eddington-Barbier} \\ &= \frac{a}{a+b} \end{aligned}$$

donde $a = S(0)$ y $b = \left[\frac{dS}{d\tau} \right]_0$. Para encontrar cuánto valen a y b vamos a considerar el equilibrio termodinámico local. Esto quiere decir que cada elemento del fluido de fotones está en equilibrio termodinámico, es decir que su distribución es la de Plank, pero será un equilibrio termodinámico local en el sentido de que las variables termodinámicas irán variando con la posición. Esto quiere decir que

$$\begin{cases} B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} & \rightarrow \text{Equilibrio termodinámico} \\ B_\nu(T(z)) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT(z)}\right) - 1} & \rightarrow \text{Equilibrio termodinámico local} \end{cases}$$

Obsérvese que en el equilibrio térmico global la temperatura es una constante para todo el fluido (que no es el caso acá) mientras que en el equilibrio local la temperatura depende de z (en el caso de la atmósfera plano-paralela).

En este caso tenemos que

$$S \approx B \rightarrow \text{Por qué?}$$

por lo tanto ahora sí podemos calcular

$$\begin{aligned} \frac{I(0,0)}{I(0,1)} &= \frac{I_{\text{limbo}}}{I_{\text{centro}}} \\ &= \frac{B(0)}{B(0) + \left[\frac{dB}{d\tau} \right]_0} \end{aligned}$$

La cuenta es

$$\frac{dz}{d\tau} = -\frac{c}{\rho\kappa_\nu} \rightarrow \frac{dB}{d\tau} = \frac{dz}{d\tau} \frac{dB}{dz} = -\frac{c}{\rho\kappa_\nu} \frac{dB}{dz} \underbrace{> 0}_{>0}$$

Es de esperar que si z es la altura, es decir la distancia al centro de la estrella, entonces $\frac{dT}{dz} < 0$. Considerando además que $\frac{dB}{dT} > 0$ (se puede hacer la cuenta) entonces tenemos que $\frac{dB}{d\tau} > 0$ y esto implica que $\frac{I_{\text{limbo}}}{I_{\text{centro}}} < 1$, es decir que la intensidad del limbo es menor que la del centro.

Box 5 - Sobre la aproximación de equilibrio termodinámico local y su validez

La aproximación de equilibrio termodinámico local la vamos a poder aplicar cuando el camino libre medio de los fotones λ_ν sea mucho mayor que las inhomogeneidades térmicas, es decir

$$\left| \frac{T}{\nabla T} \right| \gg \lambda_\nu = \frac{c}{\rho\kappa_\nu}$$

El motivo por el cual pedimos esto es que cuando el camino libre medio de los fotones es muy pequeño en comparación con los gradientes térmicos entonces éstos son absorbidos “mucho antes de salir del elemento de fluido”. Esto hace que prácticamente no haya transporte de calor entre los elementos de fluido.

5.4. Aproximación de difusión

La intensidad de radiación $I_\nu(\mathbf{r}, \Omega, t)$ satisface, en el equilibrio termodinámico, las siguientes simetrías

$$\text{En equilibrio termodinámico} \rightarrow \begin{cases} \partial_t = 0 & \text{Estacionario} \\ \nabla = 0 & \text{Homogéneo} \\ \frac{dI}{d\Omega} = 0 & \text{Isótropo} \end{cases}$$

Pedir siempre que valga el equilibrio termodinámico es un poco mucho. Entonces vamos a relajar nuestras hipótesis y ver qué podemos hacer.

Sin embargo, debido a que los fotones se mueven muy rápido con respecto a las demás cosas, entonces podemos suponer que la condición de estacionariedad es una buena aproximación en la mayoría de los casos. Entonces vamos a considerar la ecuación de transporte en el caso estacionario

$$\cancel{\partial_t I_\nu} + \mathbf{u} \cdot \nabla I_\nu = \rho \kappa_\nu (S_\nu - I_\nu)$$

con lo cual

$$I_\nu = S_\nu - \frac{\mathbf{u} \cdot \nabla I_\nu}{\rho \kappa_\nu} \rightarrow \text{Caso estacionario}$$

Estoy un poco perdido... Anotó lo siguiente: en equilibrio termodinámico vale que

$$I_\nu = B_\nu = S_\nu \rightarrow \text{En equilibrio termodinámico}$$

En equilibrio termodinámico local

$$B_\nu(T(\mathbf{r})) \rightarrow \text{Equilibrio termodinámico local}$$

donde $B_\nu(T)$ es la ley de Planck. Entonces la ecuación de transporte queda

$$I_\nu \approx B_\nu - \frac{\mathbf{u} \cdot \nabla B_\nu}{\rho \kappa_\nu} \rightarrow \text{Transporte en eq. term. local}$$

Haciendo la cuenta tenemos que

$$\nabla B = \frac{\partial B_\nu}{\partial T} \nabla T$$

No sé bien qué cuenta hizo pero anotó lo siguiente

$$\frac{\mathbf{u} \cdot \nabla B}{\rho \kappa_\nu B} \sim \frac{c}{\rho \kappa_\nu} \nabla - \lambda \nabla \ll 1$$

lo cual implica que $I_\nu \approx B_\nu - \frac{\mathbf{u} \cdot \nabla B_\nu}{\rho \kappa_\nu} \approx B_\nu$ con lo cual el segundo término será sólo una corrección. Vemos que

$$I_\nu \approx \left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \nabla}{\rho \kappa_\nu}\right) B_\nu$$

lo cual nos sugiere un procedimiento iterativo para resolverlo del siguiente modo

$$\begin{aligned} I_\nu^{(0)} &= B_\nu \\ I_\nu^{(1)} &= \left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \nabla}{\rho \kappa_\nu}\right) I_\nu^{(0)} \end{aligned}$$

y así en general

$$I_\nu^{(n)} = \left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \nabla}{\rho \kappa_\nu}\right)^n B_\nu$$

Esto puede tener problemas de convergencia, pero bueno... Algo es algo.

Por otro lado, dado $I_\nu \approx B_\nu - \frac{\mathbf{u} \cdot \nabla B_\nu}{\rho \kappa_\nu}$ podemos calcular los momentos de la distribución. El momento de orden cero es

$$\begin{aligned} J_\nu &= \frac{1}{4\pi} \oint I_\nu d\Omega \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\oint B_\nu d\Omega - \frac{1}{\rho \kappa_\nu} \oint \mathbf{u} \cdot \nabla B_\nu d\Omega \right) \end{aligned}$$

La primera de las integrales aparentemente da $B_\nu 4\pi$ pues la temperatura es isótropa (o algo así entiendo). Por otro lado la segunda integral mágicamente se cancela (da cero) si uno hace toda la cuenta. Entonces el resultado es

$$J_\nu = B_\nu$$

El momento de segundo orden (tensor de presiones, presión de radiación) es

$$p_\nu^{ij} = \frac{1}{c^3} \oint d\Omega u_i u_j I_\nu \rightarrow \text{Momento de segundo orden}$$

Ahora no me avivo sobre si es obvio o no el hecho de que es isótropo, es decir que

$$p_\nu^{ij} = p_\nu \delta_{ij} \rightarrow \text{Isótropo}$$

y para hacer la cuenta simplemente se hace

$$\begin{aligned} p_\nu &= \frac{1}{3} p_\nu^{ii} \rightarrow \frac{1}{3} \text{Tr} (p_\nu^{ij}) \\ &\vdots \text{ Galerazo} \\ &= \frac{4\pi}{3c} B_\nu \end{aligned}$$

El momento de primer orden es

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_\nu &= \frac{1}{c} \oint \mathbf{u} I_\nu d\Omega \rightarrow \text{Momento de primer orden} \\ &\vdots \text{ Galerazo} \\ &= \frac{1}{c} \oint B_\nu \mathbf{u} d\Omega - \frac{1}{c\rho\kappa_\nu} \oint \underbrace{\mathbf{u}\mathbf{u} \cdot \nabla B_\nu}_{\frac{\partial p^{ij}}{\partial r_j}} d\Omega \\ &\vdots \text{ Ultra galerazo} \\ &= -\frac{4\pi c}{3\rho\kappa_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} \nabla T \end{aligned}$$

Este \mathbf{q}_ν es análogo al flujo de calor de termodinámica: $\mathbf{q} \propto -\nabla T$.

5.5. Aproximación de atmósfera gris

La atmósfera es como un polvo que lo único que hace es difundir la radiación, pero no tiene líneas espectrales propias



Como se puede la aproximación de atmósfera gris nos va a dar el comportamiento grueso, sin detalle en los picos espectrales. Para ello lo que hace la aproximación es despreciar la dependencia de los distintos coeficientes con la frecuencia

$$\text{Despreciaremos dependencia con } \nu \rightarrow \begin{cases} e_\nu & \text{Emisividad} \\ k_\nu & \text{Absorción} \\ \sigma_\nu & \\ \kappa_\nu & \text{Opacidad} \end{cases}$$

La ecuación de transporte nos queda entonces

$$\partial_t I + \mathbf{u} \cdot \nabla I = \rho\kappa (S - I) \rightarrow \text{Nada depende de } \nu$$

Esta aproximación será razonable si el único mecanismo de scattering fuera el de **scattering de Thomson**. Esto ocurre para

$$\lambda \gg \frac{h}{m_e c} \rightarrow \text{Condición para scattering de Thomson}$$

Para obtener la ecuación en la que nada depende de ν lo que hacemos es integrar la ecuación de transporte en ν

$$\int_0^\infty (\text{eq. de transporte}) d\nu$$

con lo cual obtenemos

$$\partial_t I + \mathbf{u} \cdot \nabla I_\nu = \rho \left(e + \int_0^\infty \sigma_\nu J_\nu d\nu - \int_0^\infty \kappa_\nu I_\nu d\nu \right)$$

donde $\begin{cases} I = \int I_\nu d\nu \\ e = \int e_\nu d\nu \end{cases}$. Definiendo la opacidad media según

$$\int_0^\infty \kappa_\nu I_\nu d\nu = \kappa \int_0^\infty I_\nu d\nu \rightarrow \text{Definimos } \kappa$$

Para poder calcular κ lo que vamos a hacer es $I_\nu \approx B_\nu$ siendo B la distribución de Planck. Entonces vamos a tener que

$$\kappa \approx \frac{\int \kappa_\nu B_\nu d\nu}{\int B_\nu d\nu} \equiv \kappa_{\text{Planck}} \rightarrow \text{Opacidad media de Planck}$$

La ecuación de transporte nos termina quedando así

$$\partial_t I + \mathbf{u} \cdot \nabla I = \rho (e + \sigma_{\text{Planck}} J - \kappa_{\text{Planck}} I)$$

Existe otra forma de definir la opacidad media que es la de Rosseland, que es

$$\frac{1}{\kappa_{\text{Rosseland}}} \int_0^\infty \nabla B_\nu d\nu = \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \nabla B_\nu d\nu$$

con lo cual

$$\kappa_{\text{Rosseland}} = \frac{\int \nabla B_\nu d\nu}{\int \frac{1}{\kappa_\nu} \nabla B_\nu d\nu} \rightarrow \text{Opacidad media de Rossland}$$

No tengo idea por qué pero mandó de una lo siguiente

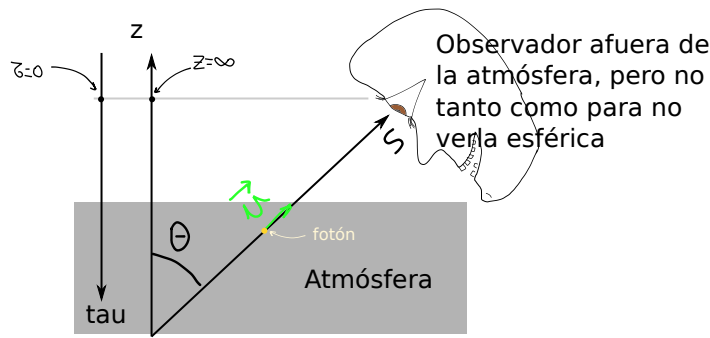
$$\mathbf{q} = -\frac{4\pi c}{3\rho} \int_0^\infty \frac{d\nu}{\kappa_\nu} B_\nu \rightarrow \mathbf{q} = -\frac{4\sigma}{4\rho} \frac{c}{\kappa_{\text{Rosseland}}} T^3 \nabla T$$

donde σ es la constante de Stephan-Boltzmann tal que

$$\sigma T^4 = \int_0^\infty d\nu \int d\Omega B_\nu(T)$$

5.6. Formación de líneas espectrales

Hoy vamos a suponer lo opuesto a la vez pasada: vamos a considerar que las cosas tienen una fuerte dependencia con la frecuencia. Consideremos una atmósfera plano-paralela con el siguiente esquema



donde τ es la profundidad óptica que en realidad es

$$\tau_\nu(z) = \int_z^\infty \frac{\rho \kappa_\nu}{c} dz \rightarrow \text{Profundidad óptica}$$

La intensidad de radiación, como lo vimos hace algunas clases, es

$$I_\nu(\tau_\nu, \mu) = \int_{\tau_\nu}^\infty \frac{dt}{\mu} S_\nu(t) e^{-\frac{t-\tau_\nu}{\mu}}$$

donde $\mu = \cos \theta$. Para una determinada posición de la atmósfera, $S_\nu(\tau)$ representa la fuente de fotones mientras que la exponencial negativa representa la atenuación que esta luz sufre en el camino hasta la tierra. La atmósfera está estratificada con lo cual la temperatura será

$$T = T(z) \rightarrow \text{Atmósfera estratificada}$$

La función S_ν en una determinada posición satisface

$$S_\nu(z) \approx B_\nu(T(z)) \rightarrow \text{Eq. termodinámico local}$$

producto del equilibrio termodinámico local. Puntualmente lo que vamos a proponer es que

$$S(t \approx \tau) = B_\nu(\tau) + (t - \tau) \left[\frac{dB_\nu}{dt} \right]_\tau \rightarrow \text{Nuestra aproximación}$$

donde t es τ , o algo así. Introduciendo esta S en $I_\nu(\tau_\nu, \mu) = \int_{\tau_\nu}^{\infty} \frac{dt}{\mu} S_\nu(t) e^{-\frac{t-\tau_\nu}{\mu}}$ se termina encontrando que

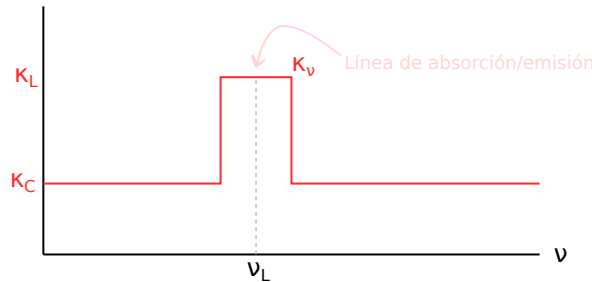
$$I_\nu(t_\nu, \mu) \approx B_\nu(\tau_\nu) + \mu \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu}$$

Caso de intensidad en posición perpendicular y vista desde el infinito Ahora vamos a considerar el caso particular $\mu = 1$, que es equivalente a $\theta = 0$, y además vamos a asumir que estamos observando a la estrella desde la tierra lo cual implica que $z = \infty$ o bien $\tau_\nu = 0$. En este caso tenemos que

$$I_\nu = B_\nu(\tau = 0) + \left[\frac{dB_\nu}{d\tau} \right]_{\tau=0}$$

$$f(x=1) \approx f(0) + f'(0) \times 1 \rightarrow \approx B_\nu(\tau = 1)$$

Esto quiere decir que los fotones que vemos en la tierra son los que provienen del sol con una profundidad óptica $\tau_\nu \approx 1$, que en metros coincide con el camino libre medio. Consideremos ahora que el coeficiente de opacidad κ_ν tiene la siguiente expresión:



Usando

$$\tau_\nu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\rho \kappa_\nu}{c} \Delta z$$

podemos encontrar la posición en la que son emitidos los fotones, Δz . Para las frecuencias del continuo, i.e. las frecuencias con $\kappa_\nu = \kappa_C$, tenemos que

$$\tau = 1 = \frac{\rho \kappa_C}{c} \Delta z_C \Rightarrow \Delta z_C = \frac{c}{\rho \kappa_C}$$

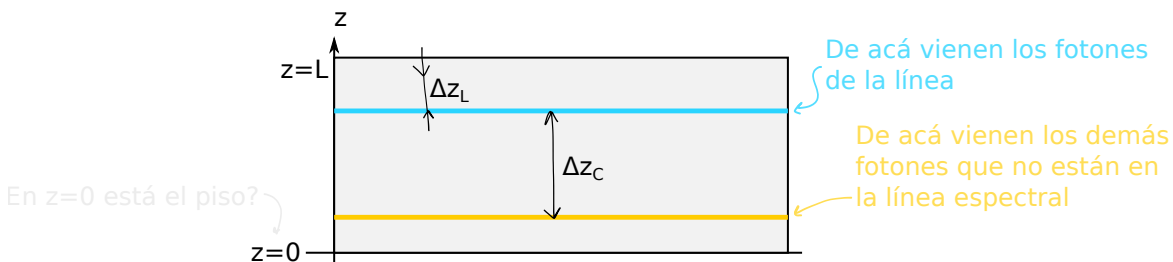
mientras que para los otros tenemos que

$$\tau = 1 = \frac{\rho \kappa_L}{c} \Delta z_L \Rightarrow \Delta z_L = \frac{c}{\rho \kappa_L}$$

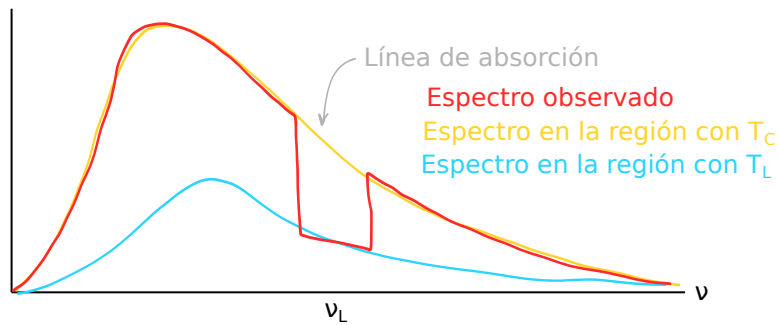
y entonces

$$\Delta z_L \ll \Delta z_C$$

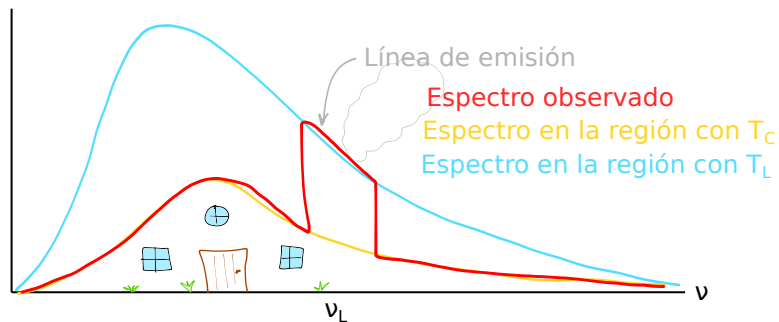
con lo cual lo que esto nos dice es lo siguiente



En cada una de las dos regiones visibles de la atmósfera vamos a tener un $B_\nu(T(z))$ distinto. Si asumimos que $T(z_C) > T(z_L)$ entonces obtenemos lo siguiente:



mientras que para $T(z_C) < T(z_L)$ (no es tan común pero puede ocurrir) lo que vamos a tener es lo opuesto:



6. Medio interestelar

El **medio interestelar** es el medio que se encuentra entre estrellas en una galaxia. Un porcentaje no despreciable de la materia de galaxias (se cree que un 10 %) está disperso en el medio interestelar. Cuando observamos una estrella o cualquier otro objeto lejano, la luz que nos llega atraviesa primero el medio interestelar.

6.1. Regiones H II

En astronomía se habla de H I y H II para hacer referencia a

$$\begin{cases} \text{H I} & \rightarrow \text{Hidrógeno neutro} \\ \text{H II} & \rightarrow \text{Hidrógeno ionizado} \end{cases}$$

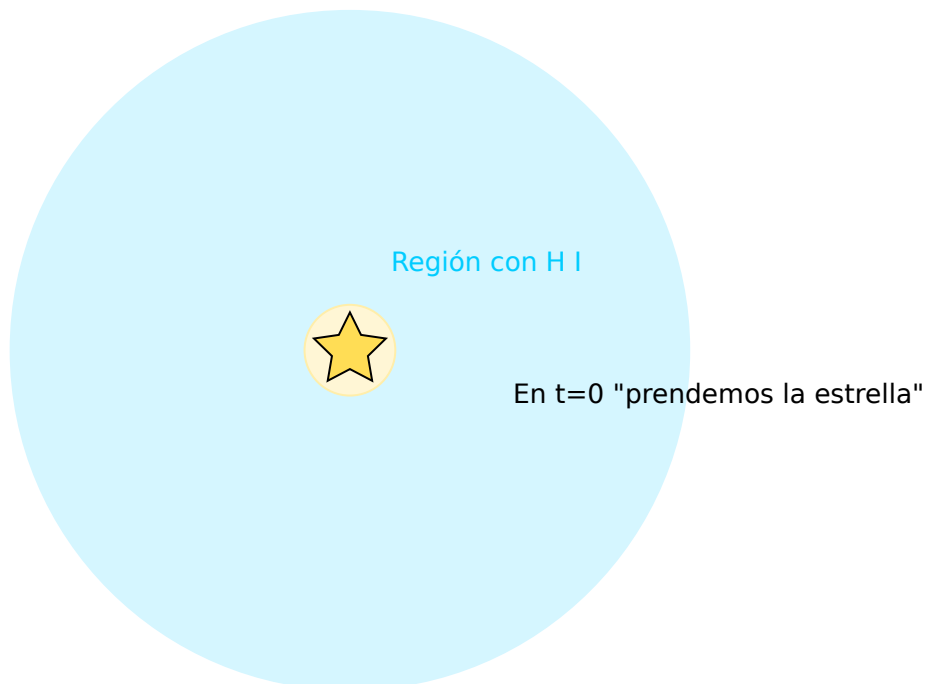
En general lo que tenemos en las estrellas es algo así:



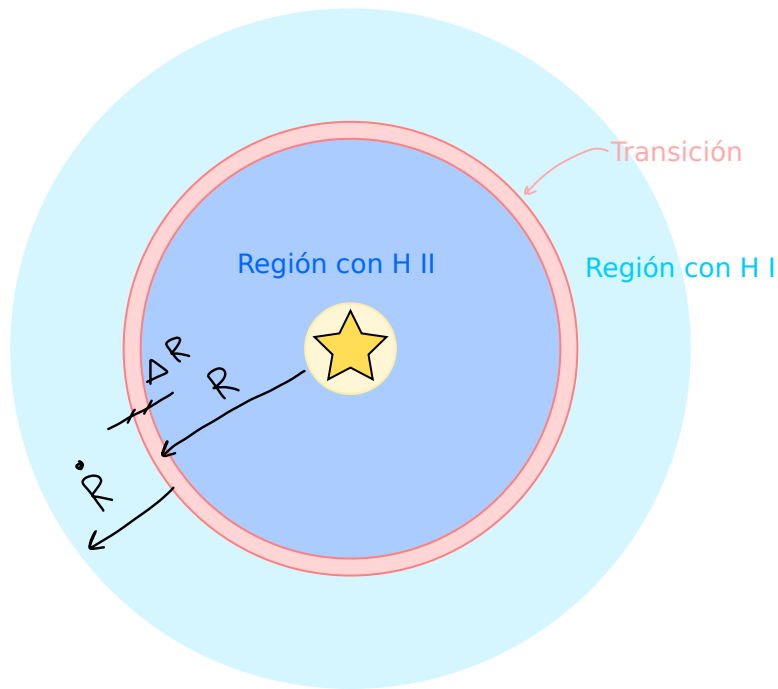
Es decir que la estrella está rodeada por una región con H II (lo cual tiene sentido ya que la radiación de la estrella lo ioniza), luego hay una región de transición entre H I y H II bien marcada y a continuación hay H I. Obsérvese que la región con H II es mucho más grande que la corona solar. Las estrellas tipo O y B son las que más fotones ionizantes producen.

6.1.1. Modelo básico de orden 0

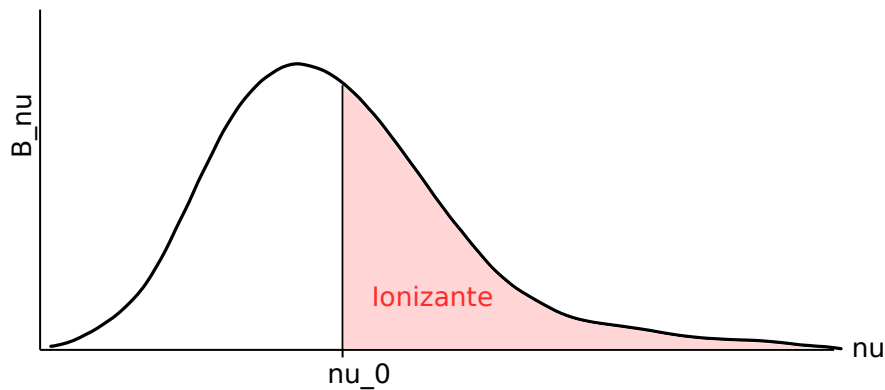
Consideremos la siguiente situación: una región H I toda homogénea en la cual, mágicamente, en $t = 0$ prendemos una estrella:



Luego de que prendemos la estrella ésta comienza a emitir radiación y comienza a ionizar hidrógeno, generando la región H II. Vamos a tener la siguiente configuración



Supongamos que la estrella es un cuerpo negro a temperatura T (para las estrellas tipo O-B las temperaturas van entre 30 kK y 40 kK). Entonces vamos a tener



y lo que queremos encontrar es el número de fotones ionizantes por unidad de tiempo que la estrella produce. Esto es

$$\dot{N} = 4\pi^2 R_\star^2 \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{B_\nu}{h\nu} d\nu \rightarrow \text{Fotones ionizantes}$$

donde R_\star es el radio de la estrella, $h\nu$ la energía de un único fotón, 4π la integral del ángulo sólido y el π restante viene de calcular $\int \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \cos\theta = \pi$ con $\hat{\mathbf{u}}$ la velocidad de los fotones. Para hacer llegar a esta expresión hemos usado que

$$\int_{\nu_0}^{\infty} B_\nu d\nu \sim \frac{\text{energía}}{\text{área} \times \text{tiempo}}$$

Es de esperar que ΔR sea aproximadamente el camino libre medio de los fotones ionizantes, es decir

$$\Delta R \sim \lambda$$

En general el camino libre medio para cualquier partícula en un determinado medio es

$$\lambda \sim \frac{1}{n\sigma} \rightarrow \text{Camino libre medio}$$

siendo n la densidad de blancos en el medio y σ la sección eficaz del proceso. En el caso del proceso de ionización de hidrógeno neutro se tiene que

$$\sigma_{\text{H} \rightarrow e^- + \text{H}^+} \approx 10^{-17} \text{ cm}^2 \rightarrow \text{Sección eficaz}$$

y parece que la densidad de hidrógeno no ionizado en el medio interestelar es

$$n_{\text{H I}} \sim 10^3 \text{ cm}^{-3} \rightarrow \text{Densidad}$$

por lo tanto

$$\Delta R \sim 10^{14} \text{ cm}$$

A partir de observaciones astronómicas se sabe que

$$R \in (10^{16}, 10^{20}) \text{ cm} \rightarrow \text{Sale de observaciones}$$

Entonces vemos que

$$\Delta R \ll R$$

Para encontrar el equilibrio para R lo que vamos a hacer es igualar el número de fotones ionizantes que produce la estrella con el número de átomos que hay que mantener ionizados, es decir el número de átomos que se encuentran dentro de la cáscara ΔR . Esto es

$$\dot{N} dt = n_{\text{H I}} 4\pi R^2 dR \rightarrow \text{En el equilibrio}$$

donde hemos considerado que $\Delta R \sim dR$. Integrando a ambos lados obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^t \dot{N} dt &= 4\pi n_{\text{H I}} \int_{R_*}^R R^2 dR \\ &\approx 4\pi n_{\text{H I}} \int_0^R R^2 dR \end{aligned}$$

y entonces obtenemos

$$R(t) = \left(\frac{3}{4\pi} \frac{\dot{N}}{n_{\text{H I}}} t \right)^{1/3} \rightarrow \text{Resultado con modelo aproximado al máximo}$$

6.1.2. Modelo con recombinación

Dentro de la región H II ocurre el proceso inverso a la ionización: la recombinación



En lo anterior no lo tuvimos en cuenta para nada, pero debemos. Los fotones ionizantes emitidos por la estrella deben ionizar a los átomos de la región H I que consideramos antes pero también a los átomos de la región H II que se hayan recombinado. Ahora vamos a que hay recombinación y vamos a ver qué cambia.

Vamos a usar el factor de recombinación

$$\alpha_{\text{eff}} \approx 3 \times 10^{-13} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1} \rightarrow \text{Factor de recombinación}$$

tal que

$$n_e n_p \alpha_{\text{eff}} = \frac{\# \text{ de recombinaciones}}{\text{volumen} \times \text{tiempo}}$$

siendo n_e y n_p las densidades de electrones y protones respectivamente.

En la situación de equilibrio lo que vamos a tener es que

$$\dot{N} dt = n_{\text{H}} 4\pi R^2 dR + n_e n_p \alpha_{\text{eff}} \frac{4\pi}{3} R^3 dt \rightarrow \text{En el equilibrio}$$

Además tenemos que

$$n_{\text{H}} = n_e = n_p$$

por el hecho de que cada hidrógeno genera un protón y un electrón. Para integrar la ecuación diferencial vamos a cambiar de variable al volumen

$$\begin{cases} V = \frac{4\pi}{3} R^3 \\ dV = 4\pi R^2 dR \end{cases}$$

de modo tal que la ecuación se convierte en

$$\dot{N} = n_{\text{H}} \dot{V} + n_{\text{H}}^2 \alpha_{\text{eff}} V$$

Al tratarse de una ecuación diferencial lineal inhomogénea hacemos todos los truquitos que aprendimos en Mate 3.

$$V(t) = V_{\text{homogénea}}(t) + V_{\text{particular}}(t)$$

La homogénea es la de siempre

$$V_{\text{homogénea}}(t) = Ae^{-n_{\text{H}}\alpha_{\text{eff}}t}$$

En cuanto a la particular sale “a ojo” o con algún truco que no recuerdo. Proponemos

$$V_{\text{particular}} = \text{una constante}$$

y terminamos encontrando que

$$V(t) = Ae^{-n_{\text{H}}\alpha_{\text{eff}}t} + \frac{\dot{N}}{n_{\text{H}}^2\alpha_{\text{eff}}}$$

Para encontrar el valor de A vamos a imponer la condición inicial de que en $t = 0$ vale que el radio es nulo o bien

$$V(t = 0) = 0 \rightarrow \text{Condición inicial}$$

Encontramos entonces que

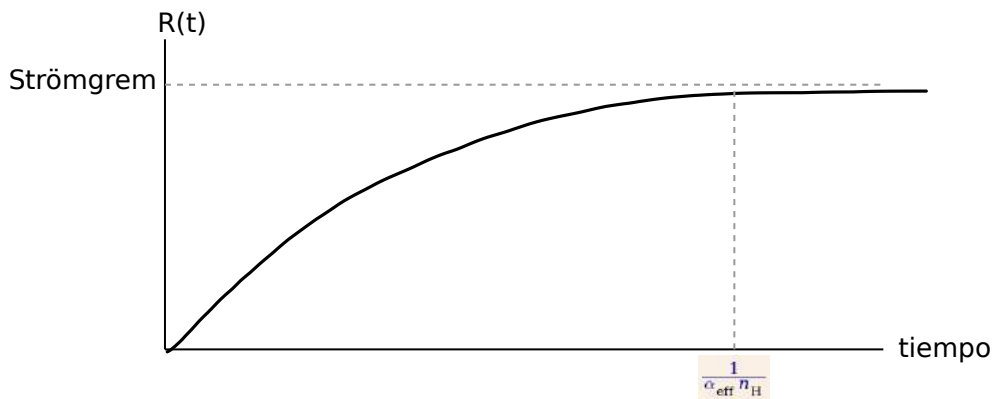
$$V(t) = \frac{\dot{N}}{n_{\text{H}}^2\alpha_{\text{eff}}} (1 - e^{-n_{\text{H}}\alpha_{\text{eff}}t})$$

Por último, volviendo a $R = \frac{3}{4\pi}V$, tenemos que

$$R(t) = \left[\frac{3}{4\pi} \frac{\dot{N}}{n_{\text{H}}^2\alpha_{\text{eff}}} (1 - e^{-n_{\text{H}}\alpha_{\text{eff}}t}) \right]^{1/3} \rightarrow \text{Teniendo en cuenta la recombinación}$$

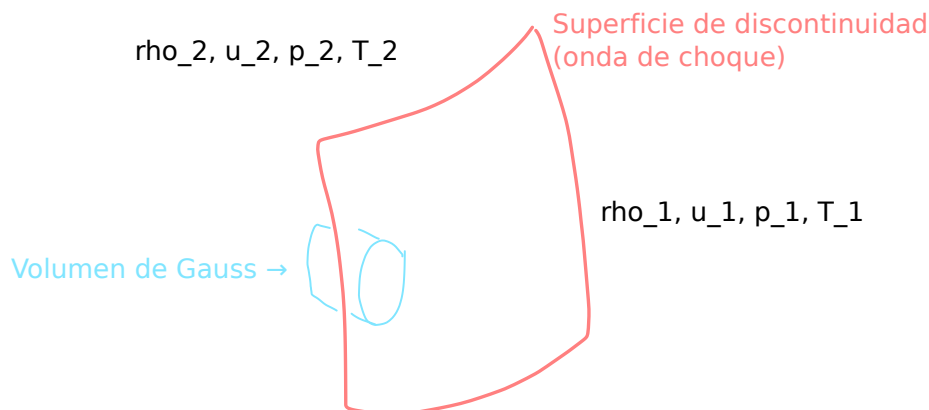
El valor de $R(\infty)$ se conoce como el **radio de Strömgen**

$$R_S = \left(\frac{3\dot{N}}{4\pi n_{\text{H}}^2\alpha_{\text{eff}}} \right)^{1/3}$$

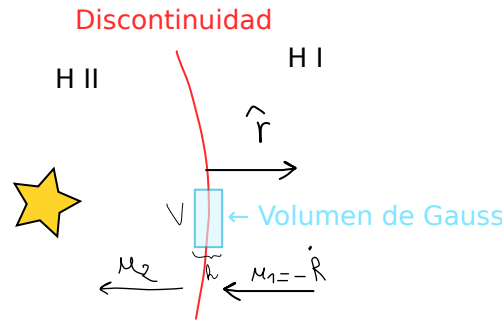


6.1.3. Frente de choque y ionización

Consideremos una onda de choque: es decir una discontinuidad en las variables que describen al fluido. Podemos dibujar lo siguiente



Si integramos las ecuaciones de fluidos en el volumen gaussiano vamos a obtener las relaciones de Rankine-Hugoniot. En el caso de la estrella lo que vamos a tener es lo siguiente



donde hemos dibujado las cosas como vistas desde el referencial de la discontinuidad (por eso el fluido se mueve con $\mathbf{u}_1 = -\dot{R}\hat{r}$ y lo mismo para \mathbf{u}_2). Si integramos la ecuación de continuidad de masa del fluido en el volumen de Gauss obtenemos

$$\int_V \partial_t \rho d^3r = \oint_S \rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} \rightarrow \text{Ecuación de continuidad}$$

$$\underbrace{\partial_t \int_V \rho d^3r}_{=0} = -[(-\rho_1 u_1) S + (\rho_2 u_2) S]$$

con lo cual lo que nos queda es que

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \rightarrow \text{Condición RH1}$$

Esto nos dice que tanto ρ como \mathbf{u} pueden ser discontinuas, pero deben satisfacer esta condición. Vamos a definir

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \rightarrow \text{Flujo de masa}$$

Existen otras dos condiciones de Rankine-Hugoniot que vamos a ver la próxima clase. Ya llegó la próxima clase. Vamos a integrar las ecuaciones de movimiento del fluido en el mismo recinto que antes (volumen de Gauss). Entonces vamos a tener (galerazo) que las tres condiciones de Rankine-Hugoniot son

$$\text{Rankine-Hugoniot} \rightarrow \begin{cases} \rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \\ p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2 \\ \frac{u_1^2}{2} + \frac{5}{3} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{u_2^2}{2} + \frac{5}{3} \frac{p_2}{\rho_2} + Q \end{cases}$$

donde

$$Q \stackrel{\text{def}}{=} \frac{h(\bar{\nu} - \nu_0)}{m_H} \rightarrow \text{Energía de fotones ionizantes}$$

con

$$\bar{\nu} = \frac{\int_{\nu_0}^{\infty} \nu B_\nu d\nu}{\int_{\nu_0}^{\infty} B_\nu d\nu}$$

y ν_0 tal que

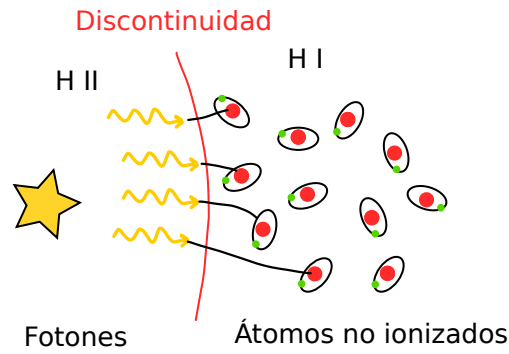
$$h\nu_0 = 13,6 \text{ eV}$$

la energía del nivel fundamental del hidrógeno. Son prácticamente las mismas ecuaciones que se ven en un curso típico de fluidos con excepción de la cantidad Q que nos interesa a nosotros.

Recordemos ahora el flujo de radiación

$$J = \frac{\dot{N}}{4\pi R^2} \equiv J_\star \frac{R_\star^2}{R^2}$$

Debido a que en la interfaz de la onda de choque está ocurriendo una ionización, podemos decir que el flujo de masa hacia adentro de la onda es igual al flujo de fotones hacia afuera de la onda de choque. Esto es porque la ionización se da uno a uno: un fotón ioniza un átomo con eficiencia 1



Entonces, como cada fotón ioniza a un átomo, vamos a tener

$$J = \frac{I}{m_H}$$

Ahora, si conocemos las condiciones a un lado de la interfaz, digamos ρ_1, p_1, u_1 podemos encontrar las del otro lado usando Rankine-Hugoniot. Es decir

$$\rho_1, p_1, u_1 \xrightarrow{\text{R-H}} \rho_2, p_2, u_2$$

Para despejar esto vamos a definir

$$\psi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

Usando Rankine-Hugoniot 1 encontramos que

$$\begin{cases} \rho_2 = \psi \rho_1 \\ u_2 = \frac{u_1}{\psi} \end{cases}$$

Reemplazando en Rankine-Hugoniot 2 tenemos

$$p_2 = p_1 + \rho_1 u_1^2 \left(1 - \frac{1}{\psi}\right)$$

Por último, reemplazando todo en Rankine-Hugoniot 3 lo que nos queda es que ψ estará determinado por

$$(2Q + u_1^2 + 3c^2) \psi^2 - (5u_1^2 + 3c^2) \psi + 4u_1^2 = 0 \rightarrow \text{Ecuación para } \psi$$

donde c es la velocidad del sonido tal que

$$c^2 = \frac{\gamma p}{\rho}$$

$$\gamma = \frac{5}{3} \text{ para gas monoatómico} \rightarrow = \frac{5p}{3\rho}$$

Choque sin ionización Consideremos primero que nada un caso sencillo en el que no hay ionización, es decir que

$$Q = 0 \rightarrow \text{No hay ionización}$$

Vamos a suponer un “choque fuerte”, lo cual quiere decir que la onda de choque se propaga de manera supersónica, es decir

$$u \gg c \rightarrow \text{Choque fuerte}$$

La ecuación para ψ queda

$$\psi^2 - 5\psi + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \psi = 1 \\ \psi = 4 \end{cases}$$

La solución $\psi = 1$ es la solución trivial ya que quiere decir que no hay interfase pues $\rho_2 = \psi \rho_1$ y así con todas las variables. La solución $\psi = 4$ es un “choque tradicional” (sin ionización) como los que se ven en Estructura 1.

Como habíamos considerado un choque fuerte (con $u \gg c$) entonces a partir de $\begin{cases} p_2 = p + \rho u^2 \left(1 - \frac{1}{\psi}\right) \\ c^2 = \frac{5p}{3\rho} \end{cases}$ vamos a encontrar que

$$p_2 \gg p_1$$

y también que

$$u_2 < c_2 = \frac{5}{3} \frac{p_2}{\rho_2}$$

Choque con ionización Vamos a considerar ahora el caso general con $Q \neq 0$. En este caso deberemos ser cuidadosos con los valores de los parámetros ya que ψ se obtiene de la “ecuación para ψ ” (ver más arriba) que es una cuadrática que podría tener soluciones complejas. En particular nosotros precisamos que ψ , por definición, sea $\psi \in \mathbb{R} > 0$. Si queremos que $\psi \in \mathbb{R}$ entonces vamos a precisar que

$$(5u^2 + 3c^2)^2 \geq (2Q + u^2 + 3c^2) 16u^2 \rightarrow \text{Para que } \psi \in \mathbb{R}$$

o bien en forma más prolija

$$(c^2 - u^2)^2 \geq \frac{32Q}{9} u^2 \rightarrow \text{Para que } \psi \in \mathbb{R}$$

Ahora podemos distinguir dos casos

1. Supersónico (o tenue) (tenue porque, como veremos, la densidad n debe ser menor a un determinado valor). En este caso tenemos que

$$u > c \rightarrow \text{Supersónico}$$

Entonces la desigualdad de antes $|c^2 - u^2| \geq \frac{4\sqrt{Q}}{3} u$ nos queda que la velocidad del fluido tiene que ser mayor que un valor umbral

$$u \geq \frac{2\sqrt{2Q}}{3} + \sqrt{\frac{8Q}{9} + c^2} \equiv U_T \leftarrow \text{Velocidad 'tenue'}$$

El caso más impactante posible para esta situación será una estrella con una luminosidad muy alta y una atmósfera con hidrógeno H I muy frío tal que

$$\begin{cases} Q \text{ grande para estrella muy luminosa} \\ c \text{ chica para H I muy frío} \end{cases}$$

En este caso vamos a tener que $\sqrt{\frac{8Q}{9} + c^2} \approx \frac{\sqrt{8}}{3} \sqrt{Q}$ y entonces

$$u \geq \frac{4\sqrt{2Q}}{3}$$

Usemos ahora el flujo de fotones

$$\begin{aligned} J &= \frac{I}{m_H} \rightarrow \text{Flujo de fotones} \\ &= \frac{\rho u}{m_H} \\ &= nu \end{aligned}$$

Juntando esto con la desigualdad previa encontramos que

$$J \geq J_T = \frac{4\sqrt{2Q}}{3} n$$

Debido a que $J = J_* \left(\frac{R_*}{R}\right)^2$ entonces lo que encontramos finalmente es que la densidad del medio tiene una cota máxima para que todo esto pueda ocurrir

$$n \leq \frac{J_* R_*^2}{R^2} \frac{3}{4\sqrt{2Q}} \equiv n_T \rightarrow \text{Cota máxima, densidad tenue}$$

2. Caso subsónico (o denso). Es lo mismo que el caso supersónico sólo que con todas las desigualdades al revés. Para imponer sbusonía vamos a pedir

$$u < c \rightarrow \text{Subsónico}$$

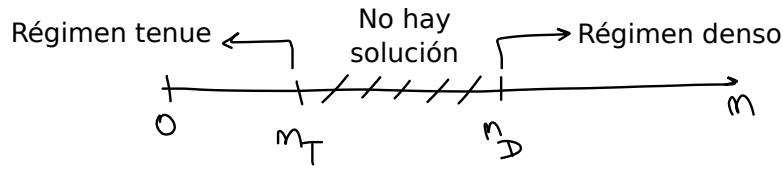
con lo cual (bla bla bla)

$$n > \frac{J_*}{\frac{3}{8}\sqrt{\frac{2}{Q}}c^2} \left(\frac{R_*}{R}\right)^2 \equiv n_D \rightarrow \text{Caso subsónico, densidad densa}$$

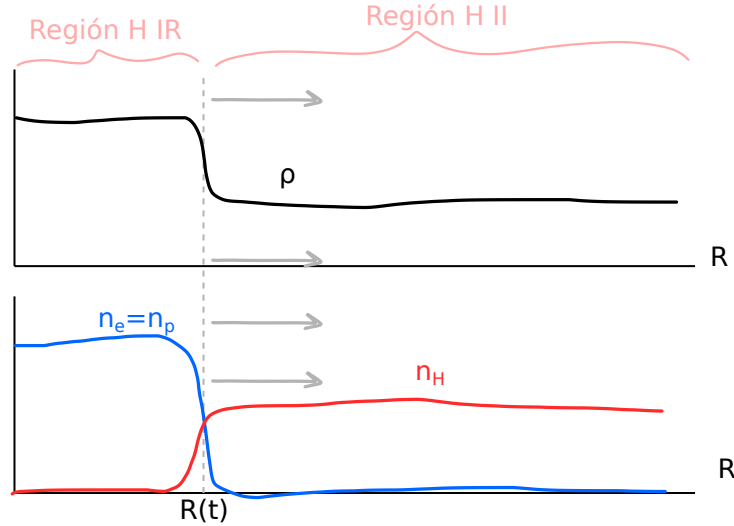
La relación entre las dos densidades encontradas es

$$\frac{n_T}{n_D} = \frac{9c^2}{32Q} \ll 1$$

donde esto es $\ll 1$ pues hemos asumido $\begin{cases} Q \text{ grande para estrella muy luminosa} \\ c \text{ chica para H I muy frío} \end{cases}$. Entonces lo que tenemos es que



A tiempos cortos, cuando la estrella recién empezó, probablemente estemos en la condición tenue pues R será pequeño. Entonces inicialmente tendremos



A medida que pasa el tiempo lo que ocurrirá es que $R(t)$ comenzará a aumentar hasta llegar a un valor en el que la densidad n ya no satisfará $n < \frac{J_* R_*^2}{R(t)^2} \frac{3}{4\sqrt{2Q}} = n_T$. Entonces cuando

$$n = n_T \quad \Rightarrow \quad u = u_T \quad \Rightarrow \quad \psi - \frac{8}{5} = 1,6$$

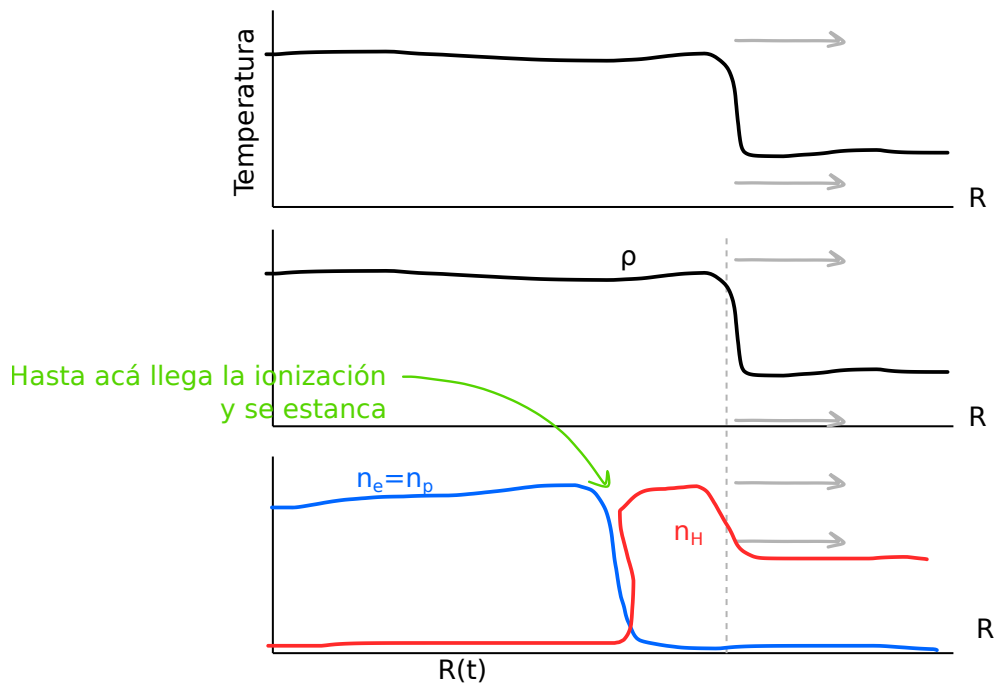
y entonces

$$u = \dot{R} = \frac{J}{n} = \frac{\dot{N}}{4\pi R^2 n}$$

De aquí podemos despejar

$$\dot{N} dt = 4\pi R^2 n dR$$

lo cual nos dice que cuando $n = n_T$ tenemos que $R = R_{\text{crítico}}$ y entonces los fotones ya no alcanzan para ionizar todo lo que hay que ionizar. Ahora vamos a tener tres regiones

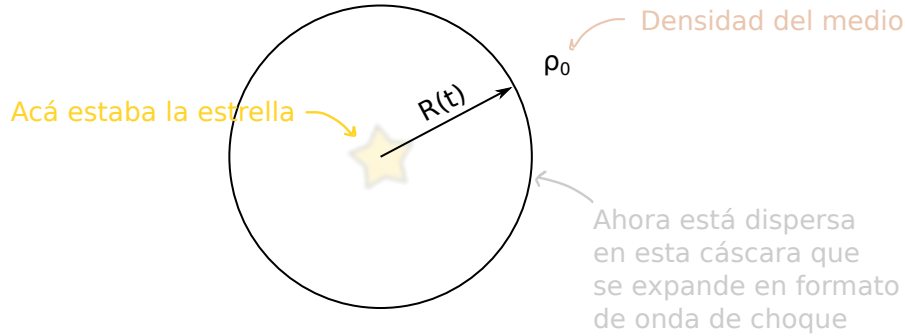


6.2. Supernovas

Una supernova es una explosión de una estrella muy violenta que libera aproximadamente 10^{50} erg de energía en pocos minutos.

6.2.1. Estudio con análisis dimensional

Analicemos la explosión de una supernova utilizando el teorema pi, es decir el análisis dimensional. Consideremos que la estrella explotó y ahora toda su masa se encuentra en una cáscara de radio $R(t)$ que se expande



Este estudio lo realizaron Sedov (1949) y Taylor (1950). Estamos interesados en encontrar cómo es la expansión $R(t)$. Vamos a suponer que

$$R = R(t, E_*, M_*, \rho_0)$$

donde E_* y M_* son la energía que liberó la estrella en la explosión y su masa. Las unidades de cada variable son

	E_*	M_*	ρ_0	t	R
Masa	1	1	1		
Tiempo	-2			1	
Distancia	2		-3		1

Ahora podemos formar dos números pi tales que

$$\pi = F(\pi_1)$$

Vamos a considerar dos regímenes

1. Tiempos cortos, régimen ultra violento. En este caso la densidad ρ_0 la despreciamos. Si explota una bomba atómica, la densidad del aire a tiempos cortos no nos interesa, es lo mismo el vacío que el aire. En este caso vamos a tener que la única posibilidad de que den las unidades para R usando E_* , M_* y t es que

$$R \sim \sqrt{\frac{E_*}{M_*}} t$$

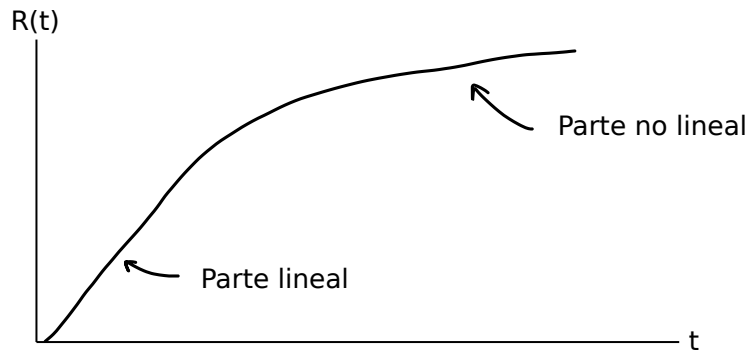
2. Tiempos largos. Llegará un momento en el que sí nos va a importar la influencia del medio interestelar. En particular nos va a importar después de un $t_{\text{crítico}}$ que será aquel en el que la masa barrida por la supernova será igual a la masa de la estrella. Esto es

$$M_* = \frac{4}{3}\pi \overbrace{\left(\sqrt{\frac{E_*}{M_*}} t_{\text{crítico}} \right)^3}^{R^3} \rho_0$$

de donde podemos despejar $t_{\text{crítico}} = \dots$ Ahora vamos a proponer que $R = R(t, E_*, \rho_0)$ con lo cual la única opción es que

$$R \sim \left(\frac{E_* t^2}{\rho_0} \right)^{1/5}$$

Entonces la evolución del R en función del tiempo vamos a tener que



6.2.2. Estudio con ecuaciones de fluidos

Vamos a utilizar las ecuaciones de fluidos de Euler (o sea, las de Navier-Stokes cuando la viscosidad es nula). Vamos a asumir que hay simetría esférica. Entonces

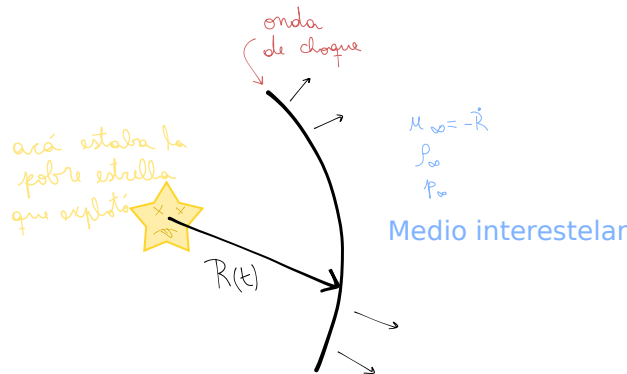
$$\text{Navier-Stokes} \rightarrow \begin{cases} \partial_t \rho + \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \rho u) = 0 \\ \partial_t u + u \partial_r u = -\frac{1}{\rho} \partial_r p \end{cases}$$

Vamos a añadir, además, una ecuación que tiene en cuenta que la expansión es adiabática. Esto es porque “se expande tan rápido que es adiabática”. Esta ecuación es

$$(\partial_t + u \partial_r) \frac{p}{\rho^\gamma} = 0 \rightarrow \text{Adiabática}$$

con γ un parámetro que nos dice si la evolución es adiabática, isotérmica, etc.

Consideremos ahora las siguientes condiciones



es decir que la estrella explotó, hay una onda de choque en la que se tienen que cumplir las condiciones de Rankine-Hugoniot, y afuera está el medio interestelar en reposo. Obsérvese que pusimos que $u_\infty = -\dot{R}$. Esto es porque nos paramos en el frame de la onda de choque. Estamos interesados en encontrar a u , p y ρ del lado de adentro. Vamos a definir a la coordenada

$$\xi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{r}{R(t)} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \partial_t = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \partial_r = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \xi} \end{cases}$$

y entonces proponemos una solución autosimilar

$$\text{Proponemos autosimilar} \rightarrow \begin{cases} \rho(r, t) = \rho_0 \rho(\xi) \\ u(r, t) = \tilde{u}_0 \frac{r}{t} u(\xi) \\ c^2(r, t) = \tilde{c}_0^2 \left(\frac{r}{t}\right)^2 c^2(\xi) \rightarrow \text{Velocidad del sonido } c^2 = \frac{\gamma p}{\rho} \end{cases}$$

donde las cantidades con tilde como \tilde{u}_0 son las que tienen las dimensiones, mientras que las que dependen de ξ son adimensionales. Parece que al reemplazar esta solución autosimilar el problema se convierte de un PDE a un ODE (o sea, de “partial

differential equations” nos movemos a “ordinary differential equations”). Lo que nos queda es

$$\text{ODE} \rightarrow \begin{cases} -4\xi\rho' + 9\rho u + 3\xi(\rho u)' = 0 \\ 20u + 8\xi u' - 6u^2 - 6\xi u u' = 10c^2 + 5\xi(c^2)' \\ (6u - 10)\frac{c^2}{\rho^{\gamma-1}} + (3u - 4)\xi\left(\frac{c^2}{\rho^{\gamma-1}}\right)' = 0 \end{cases}$$

(**WARNING**: quizá en el sistema anterior haya algo inconsistente con la notación que usamos para la solución autosimilar.) La solución de esto sigue sin ser algo trivial, pero bueno. Al menos es un ODE. Parece que el crack de Landau (o Lifshitz) lo resolvió analíticamente, está en el volumen de hidrodinámica. Y sino el actual capo de entre los capos: Wolfram Alpha. Asumamos ahora que ya obtuvimos la solución

$$\text{Wolfram Alpha nos da la solución} \rightarrow \begin{cases} \rho(\xi) \\ u(\xi) \\ c(\xi) \end{cases}$$

Al aplicar Rankine-Hugoniot vamos a encontrar que $\tilde{\rho}_0$, \tilde{u}_0 y \tilde{c}_0 son tales que

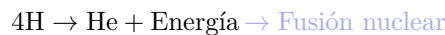
$$\text{Luego de usar Rankine-Hugoniot} \rightarrow \begin{cases} \rho = 4\rho_\infty\rho(\xi) \\ u = \frac{3}{10}\frac{r}{t}u(\xi) \\ c^2 = \frac{1}{20}\frac{r^2}{t^2}c^2(\xi) \end{cases}$$

7. Interiores estelares

Qué tienen las estrellas adentro? Cómo hacen para estar en equilibrio (duran millones de años)? Vamos a encontrar algunas relaciones que se deben cumplir entre la masa, el radio, la luminosidad, etc.

La existencia de una estrella se basa en el equilibrio entre la gravedad y la presión del gas. Para poder tener las presiones necesarias para compensar la gravedad, es necesario que el gas esté a muy alta temperatura. Esta temperatura se genera en reacciones nucleares.

La mayor parte de la materia bariónica de una estrella está en forma de hidrógeno, con lo cual nos vamos a concentrar en las reacciones nucleares del hidrógeno. La reacción más importante (o la única?) parece que es



A nosotros nos importa la energía, no el helio. Esta reacción se puede dar principalmente de dos formas

1. Ciclo protón-protón ([link](#)).
2. Ciclo CNO ([link](#)).

La eficiencia del ciclo protón-protón es tal que a lo largo de toda la vida de una estrella ocurre que

$$E_{\text{que se puede obtener en el ciclo protón-protón}} \approx 0,007M_\star c^2$$

siendo M_\star la masa de la estrella en cuestión. Si la estrella tiene una luminosidad de L_\star entonces su tiempo de vida se puede estimar según

$$0,007M_\star c^2 \lesssim L_\star t_{\text{de vida de la estrella}}$$

Para el sol tenemos que $\begin{cases} M_\odot = 2,1 \times 10^{33} \text{ g} \\ L_\odot = 3,8 \times 10^{33} \text{ erg s}^{-1} \end{cases}$ con lo cual

$$t_{\text{de vida del sol}} \lesssim 3 \times 10^{11} \text{ años}$$

Considerando que $t_{\text{del universo}} \sim 1,37 \times 10^{10}$ años entonces nuestra cota “está bien”.

Tiempo dinámico El tiempo dinámico es el tiempo que tarda una estrella (o cualquier sistema) en recuperar el equilibrio luego de una perturbación. Consideremos la ecuación de Navier-Stokes pero despreciando todo (e.g. gravedad) menos la presión y la politrópica (o como se llame). Esto es

$$\begin{cases} \rho\partial_t \mathbf{u} = -\nabla p & \rightarrow \text{Navier-Stokes} \\ p = \frac{\rho c^2}{\gamma} \end{cases}$$

Ahora podemos relacionarlo con la luminosidad de la estrella

$$L = 4\pi r^2 q(R_*) \rightarrow \text{Luminosity}$$

tal que

$$L = 4\pi \int_0^{R_*} r^2 \rho \epsilon dr$$

Si bien para la luminosidad debemos considerar el radio R_* , vamos a considerar una extensión de la luminosidad como

$$L(r) = 4\pi \int_0^r r^2 \rho \epsilon dr = 4\pi r^2 q(r)$$

Recordemos ahora del capítulo de transporte de radiación la expresión de $q(r)$ debida a fotones en la aproximación de difusión y de atmósfera gris. En este caso vamos a tener que

$$I_\nu = B_\nu - \frac{1}{\rho\kappa} \mathbf{u} \cdot \nabla B_\nu \rightarrow \text{Asumimos esto}$$

y en consecuencia

$$q(r) = -\frac{16\sigma}{3\rho c \kappa_R} T^3 \frac{dT}{dr}$$

donde κ_R es la opacidad de Rosseland (lo vimos antes, usar `ctrl+f` para encontrarlo entre los apuntes).

Por último vamos a asumir que el gas es ideal. Esto nos proveerá de la ecuación faltante para poder resolver todo. Tenemos la ecuación de estado

$$p = \frac{\rho k T}{m_p}$$

Uno podría argumentar de que esto vale para los bordes de la estrella donde el gas está muy diluido. Sin embargo, en el núcleo hay densidades $\rho_{\text{núcleo}} \sim 150 \text{ g cm}^{-3}$ que no es una densidad baja. Sin embargo parece que funciona.

7.1. Enanas blancas

¿Qué ocurre cuando se acaba el hidrógeno del núcleo? Vamos a ver cómo evolucionan las estrellas en el diagrama HR. La mayoría de las estrellas nacen, pasan casi toda su vida en la secuencia principal, y luego hacen alguna trayectoria en el diagrama HR que las lleva a algún lugar. Algunas se desintegran completamente, otras se convierten en enanas blancas, etc. Otras colapsan y producen un agujero negro.

En el caso de las enanas blancas existe una presión cuántica que las mantiene sin poder colapsar, que contrarresta la gravedad. Esta es la presión de degeneración del gas de fermiones que se menciona en algunas cursadas de Teórica 3.

7.1.1. Gas de fermiones

Vamos a hacer un breve repaso del gas de fermiones de Teórica 3. En mecánica estadística la distribución $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ es tal que

$$n = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \frac{d^3 r d^3 p}{h^3}$$

es el número de partículas con posición en \mathbf{r} y $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ y lo mismo para \mathbf{p} . Para fermiones tenemos que usar la f de Fermi-Dirac que es

$$f_{\text{FD}}(E) = \frac{g(E)}{\exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right) + 1} \rightarrow \text{Fermi-Dirac}$$

donde E_F es la energía de Fermi y $g(E)$ es la degeneración que vale

$$g(E) = 2 \text{ para espín } \frac{1}{2}$$

El límite clásico es aquel en el que

$$\frac{-E_F}{kT} \gg 1 \rightarrow \text{Límite clásico}$$

y

$$f_{\text{FD}} \xrightarrow{\text{límite clásico}} \frac{g(E)}{e^{-\frac{E - E_F}{kT}}} e^{-\frac{E}{kT}} \rightarrow \text{Maxwell-Boltzmann}$$

que es la distribución de Maxwell-Boltzmann \checkmark .

El número de partículas total es la integral sobre todo el espacio y todos los momentos, es decir

$$N = \int \frac{d^3r d^3p}{h^3} f$$

y resulta que se puede expresar en términos de una cantidad importante en la mecánica estadística que es la función de partición Z tal que

$$N = Z e^{\frac{E_F}{kT}} \rightarrow \text{Número total de partículas}$$

donde

$$Z = \frac{2}{h^3} \int d^3r d^3p e^{-\frac{p^2}{2mkT}} \rightarrow \text{Para un gas ideal}$$

La función de partición Z se puede expresar según

$$Z = \frac{V}{\Lambda^3}$$

donde V es el volumen del sistema y

$$\Lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}} \rightarrow \text{Longitud de onda térmica de De Broglie}$$

es la **longitud de onda térmica de De Broglie**.

Para un fotón sabemos que

$$E = \begin{cases} h\nu & \rightarrow \text{De la cuántica} \\ pc & \rightarrow \text{De la relatividad} \end{cases}$$

por lo tanto

$$\lambda = \frac{h}{p} \rightarrow \text{Para un fotón}$$

En el caso de una partícula en un gas con una velocidad térmica

$$v_{\text{térmica}} = \sqrt{\frac{kT}{m}}$$

vamos a tener un impulso (no relativista)

$$p_{\text{térmico}} = m\sqrt{\frac{kT}{m}}$$

Ahora reemplazamos el p del fotón por esta expresión y entonces la longitud de onda es la de De Broglie (?).

Debido a que $\Lambda \propto m^{-1/2}$ entonces es más fácil que los electrones se vean como objetos cuánticos antes que los protones o los neutrones.

Queremos encontrar una ecuación de estado para los fermiones dentro de la estrella enana blanca. La densidad de partículas es

$$\begin{aligned} \text{Densidad de electrones} \rightarrow n_e &= \frac{N}{V} \\ &= \frac{e^{\frac{E_F}{kT}}}{\Lambda^3} \end{aligned}$$

de donde podemos despejar la energía de Fermi que es

$$E_F = kT \ln(n_e \Lambda^3)$$

De acá también podemos tomar el límite clásico como lo vimos antes: dividimos todo por $-kT$ y nos queda

$$\frac{-E_F}{kT} = \ln\left(\frac{1}{n_e \Lambda^3}\right) \gg 1 \iff n_e \Lambda^3 \ll 1 \iff \Lambda \ll n_e^{-1/3} \rightarrow \text{Límite clásico}$$

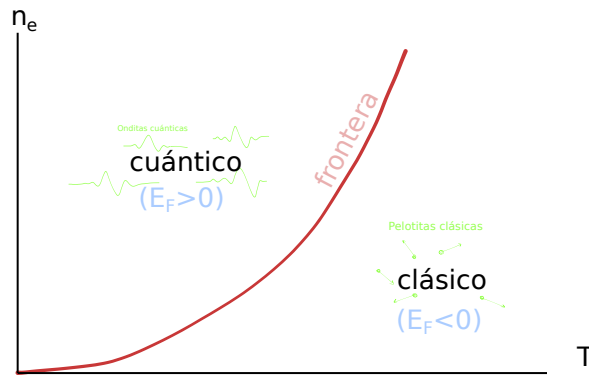
lo cual implica que el límite clásico es aquel en el que el gas está muy diluido o bien en el que la longitud de onda de De Broglie es mucho menor que la separación entre los electrones. El opuesto es el límite cuántico

$$\Lambda \gg n_e^{-1/3} \rightarrow \text{Límite cuántico}$$

En el medio $\Lambda \sim n_e^{-1/3}$ vamos a tener la separación de los dos regímenes cuántico y clásico. Usando que $\Lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}}$ podemos hacer

$$\frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}} = n_e^{-1/3} \rightarrow \text{Frontera clásico-cuántico}$$

que en un diagrama de densidad y temperatura nos da algo así:



Entonces según las condiciones de densidad y temperatura vamos a estar en un régimen o en el otro. Hasta ahora todo lo que hicimos en el curso asumían régimen clásico, sin embargo hoy vamos a usar el régimen cuántico.

Para un gas de fermiones no relativista

$$E = \frac{p^2}{2m_e} \rightarrow \text{No relativista}$$

por lo tanto

$$d^3p = 4\pi p^2 dp = 4\pi \sqrt{2m_e^3} \sqrt{E} dE \rightarrow \text{No relativista}$$

y entonces

$$n_e = \frac{4\pi}{h^3} (2m_e)^{3/2} \int_0^\infty \frac{dE \sqrt{E}}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1}$$

La energía media (termodinámica) será

$$\begin{aligned} U &= \int E f(E) \frac{d^3r d^3p}{h^3} \\ &\vdots \\ &= \frac{4\pi}{h^3} (2m_e)^{3/2} \int_0^\infty \frac{dE E^{3/2}}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1} \end{aligned}$$

y la presión (ecuación de estado super general)

$$pV = kT \ln Z \rightarrow \text{Ecuación de estado}$$

(lo anterior lo vimos en Teórica 3). Ahora usamos eso de que la función de partición era el producto de las funciones de partición monoparticulares, o algo así (reparar de Teórica 3, si mal no recuerdo es lo que en [este link](#) llamé “factorización NIIP”). Entonces

$$\text{Gran función de partición} \rightarrow Z = \prod_{i=1}^N Z_i \leftarrow \text{Pequeñas funciones de partición}$$

con

$$Z_i = 1 + e^{-\frac{E_F - E_i}{kT}}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \ln \left(\prod_{i=1}^N (\dots) \right) &= \sum_{i=1}^N \ln(\dots) \\ &= \int \frac{d^3r d^3p}{h^3} g(E) (\dots) \end{aligned}$$

y la ecuación de estado es

$$pV = kT \frac{4\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \int_0^\infty dE \sqrt{E} \ln \left(1 + e^{\frac{E_F - E}{kT}} \right)$$

Listo (ja). Consideremos algunos casos límites en los cuales es fácil hacer la cuenta:

- En el límite clásico tenemos que $e^{\frac{E_F - E}{kT}} \gg 1$ y entonces $p = nkT$ y $U = \frac{3}{2}nkT$ como ya sabíamos de termodinámica clásica.

- Ahora tomamos el límite fermiónico con $T \rightarrow 0$. Para ello usamos la expresión de la distribución de Fermi-Dirac para $T \rightarrow 0$ que es una “función cuadrada” (ver en [este link](#)). En este caso la integral se vuelve fácil y se tiene que

$$\begin{cases} n_e = \frac{8\pi}{3h^3} (2m_e)^{3/2} E_F^{3/2} \\ U = \frac{8\pi}{5h^3} (2m_e)^{3/2} E_F^{5/2} = \frac{3}{2} p_e \end{cases}$$

Ahora podemos combinar las dos ecuaciones para eliminar a la energía de Fermi y encontramos que

$$p_e = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2}{20m_e} n_e^{5/3} = \text{constante} \times n_e^{5/3}$$

Obsérvese que no aparece la temperatura (lo cual tiene sentido ya que tomamos el límite $T \rightarrow 0$). Esto nos dice que el gas de fermiones ejerce una presión independientemente de que esté a temperatura 0.

Volvemos a las estrellas

Ahora volvemos a las estrellas. Recordemos que habíamos encontrado en algún momento que

$$\frac{dp}{dr} = -\rho \frac{GM(r)}{r^2}$$

Antes habíamos considerado que la presión era la de un gas ideal, pero ahora vamos a reemplazar la expresión que encontramos para el gas de fermiones. Usamos que

$$\rho = m_p n_p + m_e n_e + \dots$$

Si imponemos neutralidad de carga tenemos que

$$n_e = n_p \rightarrow \text{Neutralidad de carga}$$

y entonces

$$\rho = (m_p + m_e) n_e \approx m_p n_e$$

Entonces tenemos las siguientes ecuaciones (?)

$$\begin{cases} M(r) = 4\pi \int_0^r r^2 \rho(r) dr \\ \frac{dp}{dr} = -\frac{\rho GM(r)}{r^2} \\ p = c\rho^{5/3} \end{cases}$$

Si integramos todo esto obtenemos las ecuaciones de [Lane-Emden](#) con $n = 3/2$ tal que

$$\left. \begin{cases} M \sim \rho R^3 \\ \frac{c\rho^{5/3}}{R} \sim \frac{\rho GM}{R^2} \end{cases} \right\} \rightarrow \begin{cases} R \sim \frac{c}{G} M^{-1/3} \\ \rho \sim \left(\frac{G}{c}\right)^3 M^2 \end{cases} \rightarrow \text{Modelo teórico de enanas blancas}$$

Si comparamos con lo que habíamos encontrado antes:

	Gas clásico (sec. principal)	Gas de fermiones no relativista (enanas blancas)
Radio	$R \sim M$	$R \sim M^{-1/3}$
Densidad	$\rho \sim \frac{1}{M^2}$	$\rho \sim M^2$

Gas de fermiones ultrarelativista En este caso lo que habría que cambiar es la expresión de la energía $E^2 = m_e^2 c^4 + p^2 c^2$. Vamos a considerar

$$\begin{aligned} d^3p &= 4\pi p^2 dp \\ &= \frac{4\pi}{c^3} \sqrt{E^2 - m_e^2 c^4} E dE \\ E^2 \gg m_e^2 c^4 \text{ ultrarel} &\rightarrow \approx \frac{4\pi}{c^3} E^2 dE \end{aligned}$$

Por otro lado, la clase pasada habíamos visto que

$$n_e = \frac{8\pi}{c^3 h^3} \int_0^\infty dE \frac{E^2}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1}$$

$$T \rightarrow 0 \approx \frac{8\pi}{c^3 h^3} \frac{E_F^3}{3}$$

y también que

$$p_e = \frac{8\pi}{c^3 h^3} kT \int_0^\infty dE E^2 \ln \left(1 + e^{\frac{E_F - E}{kT}} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Integro por partes} \\ T \rightarrow 0 \end{array} \right\} \rightarrow \approx \frac{8\pi}{3c^3 h^3} \frac{E_F^4}{4}$$

Combinando ambos resultados tenemos que

$$p_e \approx c_{\text{rel}} n_e^{4/3} \rightarrow \text{Enanas blancas relativistas}$$

donde $c_{\text{rel}} = \frac{hc}{8} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3}$. Utilizando esto se obtienen las nuevas leyes de escala para enanas blancas relativistas que son

$$\begin{cases} M \sim R^3 \rho \\ \frac{p}{R} \sim \frac{GM\rho}{R^2} \end{cases}$$

Me distraje mirando fotos de enanas blancas en Google. No sé bien qué estamos haciendo ahora...

$$\frac{c_{\text{rel}} n_e^{4/3}}{R} = \frac{GM\rho}{R^2}$$

$$\rho = n_p m_p + n_e m_e \approx n_e m_p \text{ pues } m_e \ll m_p \text{ y } n_p \approx n_e$$

$$\frac{c_{\text{rel}} \rho^{4/3}}{m_p^{4/3} R} = \frac{GM\rho}{R^2}$$

Si ahora reemplazamos

$$\frac{c_{\text{rel}}}{m_p^{4/3} G} \approx M^{2/3}$$

concluimos que

$$M_{\text{máximo para enanas blancas}} \approx \left(\frac{c_{\text{rel}}}{G} \right)^{3/2} \frac{1}{m_p^2}$$

Cálculos más finos sobre la masa de la enana blanca conducen a la masa de Chandrasekhar (ver Teórica 3) que es

$$M_{\text{máximo para enanas blancas}} = M_{\text{Chandrasekhar}} \approx 1,46 M_\odot$$

Masa de Chandrasekhar Consideremos una estrella que está compuesta únicamente por fermiones. Vamos a asumir que las partículas están altamente compactadas, esto quiere decir que su longitud de onda de De Broglie Λ es tal que

$$N\Lambda^3 \sim R_\star^3 \rightarrow \text{Objeto cuántico}$$

Por otro lado tenemos la relación cuántica $p_{\text{Fermión}} \sim \frac{h}{\Lambda}$ por lo tanto

$$p_F \approx \frac{hN^{1/3}}{R_\star} \rightarrow \text{¿} p_{\text{Fermi}} \text{ o } p_{\text{Fermión}} \text{?}$$

En el límite ultrarelativista la energía de Fermi es

$$E_F \sim p_{FC} \sim \frac{hcN^{1/3}}{R_\star}$$

por lo tanto la energía total será

$$NE_F \sim \frac{hcN^{4/3}}{R_\star}$$

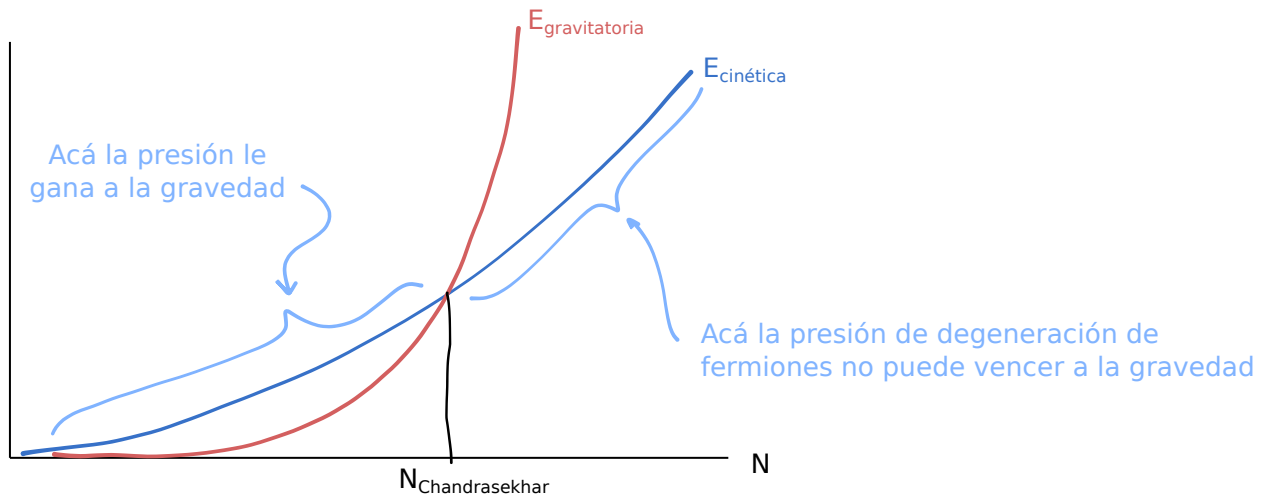
Lo anterior es la energía cinética. Y como el objeto es autogravitante entonces tiene que tener una energía gravitatoria del mismo orden. Esto quiere decir que

$$E_{\text{Gravitatoria}} \sim -\frac{G(Nm_p)^2}{R_\star}$$

donde hemos usado m_p por el hecho de que $m_p \gg m_e$. Entonces

$$\underbrace{\frac{hcN^{4/3}}{R_\star}}_{E_{\text{Cinética}}} \sim \underbrace{-\frac{G(Nm_p)^2}{R_\star}}_{E_{\text{Gravitatoria}}}$$

que en forma gráfica es



El equilibrio estará cuando ambas son iguales de donde podemos despejar un $N_{\text{Chandrasekhar}}$ (número de electrones de Chandrasekhar) que es

$$N^{2/3} \sim \frac{hc}{Gm_p^2}$$

Para convertir esto a masa simplemente lo multiplicamos por la masa del protón y entonces

$$M_{\text{Chandrasekhar}} = m_p N_{\text{Chandrasekhar}} \sim \frac{1}{m_p^2} \left(\frac{hc}{G} \right)^{3/2} \sim M_\odot$$

7.2. Luminosidad de Eddington

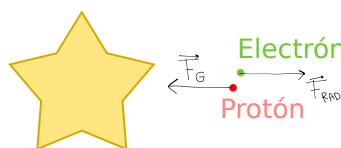
Veamos por qué existe una luminosidad máxima en el diagrama HR (o sea, por qué existe una luminosidad máxima para las estrellas).

La masa de una estrella M debe satisfacer

$$0,08M_\odot \leq M \leq 60M_\odot$$

Para $M < 0,08M_\odot$ la presión gravitatoria no alcanza para encender el ciclo protón-protón en el núcleo. Pero por qué hay una masa máxima?

Consideremos un protón y un electrón sometidos a la radiación de una estrella. Entonces sobre el protón va a predominar la fuerza gravitatoria mientras que para los electrones va a ser la colisión con los fotones. Esto es



En cuanto al electrón la fuerza tiene que ver con el escátering de Thomson que tiene una sección eficaz

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{\alpha\hbar}{m_e c} \right)^2$$

donde α es la constante de estructura fina.

La fuerza de radiación es

$$F_{\text{rad}} \sim \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

donde Δp es el cambio en el momento y Δt un intervalo de tiempo. Para un fotón tenemos que

$$\Delta E = c\Delta p \rightarrow \text{Para el fotón}$$

Si multiplicamos por la sección eficaz y no sé qué más obtenemos

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{L}{4\pi R^2} \sigma_T$$

Juntando todo lo anterior tenemos que

$$F_{\text{rad}} \sim \frac{1}{c} \frac{\Delta E}{\Delta t} \sim \frac{L\sigma_T}{4\pi R^2 c} \rightarrow \text{Para cada electrón}$$

La fuerza gravitatoria para un protón es la de siempre.

Consideremos ahora un átomo de hidrógeno. La ecuación de Newton para este átomo será

$$\frac{L\sigma_T}{4\pi R^2 c} - \frac{GMm_p}{R^2} = m_p \ddot{r} \rightarrow \text{Newton } \heartsuit$$

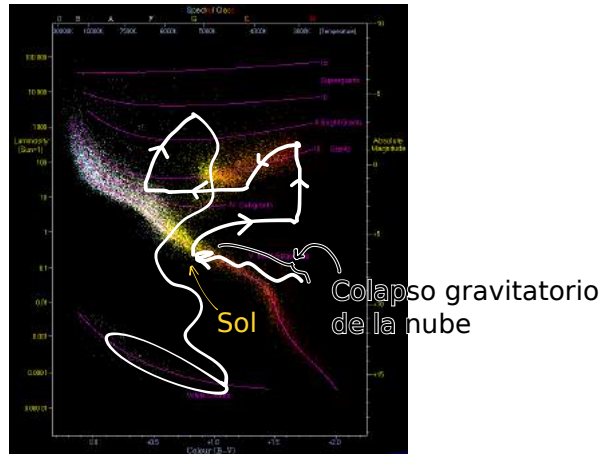
$$\left(\frac{L\sigma_T}{4\pi c} - GMm_p \right) \frac{1}{R^2} =$$

Aquí lo que vemos es que para luminosidades pequeñas la gravedad gana y todo bien, cada átomo se queda “pegado” a la estrella. En cambio si L es muy grande lo que ocurre es que el átomo es expulsado de la estrella. La luminosidad de Eddington es aquella en la que la fuerza radiativa es igual a la gravitatoria. Es decir, hay que poner $\ddot{r} = 0$ y despejar

$$L_{\text{Eddington}} = GMm_p \frac{4\pi c}{\sigma_T} = 10^{38} \text{ erg s}^{-1} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)$$

7.3. Evolución estelar

Ver [este link](#). En el pizarrón vimos lo siguiente:



En la primera etapa se da un colapso gravitatorio de la nube de material.

A continuación comienzan las reacciones nucleares que fusionan hidrógeno y lo convierten en helio. En este momento es cuando la estrella está en la secuencia principal y vale que

$$L = 4\pi R^2 \sigma_{\text{eficaz}} T^4 \rightarrow \text{Cuando en la secuencia principal}$$

Mucho más no vimos acá. Se pueden leer más detalles en el libro de Shu de 1982.

7.3.1. Colapso gravitatorio: criterio de Jeans

Consideremos una porción de gas, i.e. un fluido. Las ecuaciones de este fluido serán

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 & \rightarrow \text{Continuidad} \\ \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \phi & \rightarrow \text{Navier-Stokes} \\ \frac{p}{\rho^\gamma} = \text{constante} & \rightarrow \text{Politrópica} \\ \nabla^2 \phi = 4\pi G \rho & \rightarrow \text{Potencial gravitatorio} \end{cases}$$

donde ϕ es el potencial gravitatorio del propio fluido. La ecuación del potencial gravitatorio es análoga a la del potencial electrostático. Resolver esto es realmente complicado. Entonces lo que vamos a hacer es pararnos en un punto de equilibrio y realizar una perturbación. Así estudiaremos si la perturbación es una oscilación (estable) o si se torna en una perturbación que diverge (inestable).

Consideremos que el equilibrio viene dado por

$$\begin{cases} \rho = \rho_0 & \rightarrow \text{Uniforme} \\ \mathbf{u} = 0 & \rightarrow \text{Estático} \\ p = p_0 & \\ \phi = \phi_0 & \rightarrow \text{Constante} \end{cases}$$

de modo tal que la perturbación es sumarle un δ a cada una de estas cantidades

$$\text{Perturbamos} \rightarrow \begin{cases} \rho = \rho_0 + \delta\rho \\ \mathbf{u} = \delta\mathbf{u} \\ p = p_0 + \delta p \\ \phi = \phi_0 + \delta\phi \end{cases}$$

Si reemplazamos esto en las ecuaciones para el problema y nos quedamos a orden lineal en δ obtenemos

$$\text{Sistema linealizado} \rightarrow \begin{cases} \partial_t \delta\rho + \rho_0 \nabla \cdot \delta\mathbf{u} = 0 \\ \delta_t \delta\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \delta p - \nabla \delta\phi \\ \nabla^2 \delta\phi = 4\pi G \delta\rho \\ \delta p = c_s^2 \delta\rho \end{cases}$$

donde $c_s^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}$. Las soluciones de estos sistemas lineales a coeficientes constantes son exponenciales. Entonces proponemos que

$$\delta \sim e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t} \rightarrow \text{proponemos solución}$$

y reemplazamos en el sistema con lo cual nos queda que

$$\begin{cases} -i\omega \delta\rho + \rho_0 i\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{u} = 0 \\ -i\omega \delta\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} i\mathbf{k} \delta p - i\mathbf{k} \delta\phi \\ -\mathbf{k}^2 \delta\phi = 4\pi G \delta\rho \\ \delta p = c_s^2 \delta\rho \end{cases}$$

Esto es un sistema lineal

$$[\text{matriz}] \begin{bmatrix} \delta\rho \\ \delta\mathbf{u} \\ \delta p \\ \delta\phi \end{bmatrix} = 0$$

y para que tenga solución no trivial vamos a pedir que $\det(\text{matriz}) = 0$ de donde vamos a sacar la relación de dispersión para ω y \mathbf{k} . Esto es

$$\det(\) = 0 \quad \iff \quad \omega^2 = c_s^2 k^2 - 4\pi \rho_0 G.$$

Si reemplazamos la expresión de la velocidad del sonido obtenemos

$$\omega^2 = \left(\frac{\gamma k T}{m_p} \right)^2 k^2 - 4\pi \rho_0 G.$$

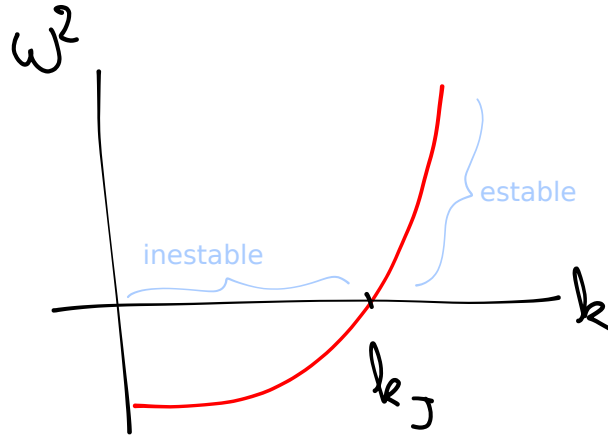
Supongamos que ρ_0 es suficientemente pequeño o T suficientemente alta tal que el segundo término puede despreciarse y $\omega^2 \approx c_s^2 k^2$. Esto son ondas de sonido y la perturbación es estable ya que $\omega \in \mathbb{R}$.

Límite muy frío Consideremos $T \rightarrow 0$. Entonces

$$\omega^2 \approx -4\pi\rho_0 G \quad \Rightarrow \quad \omega = i\Gamma$$

En este caso las perturbaciones son exponenciales reales lo cual hace que diverjan y entonces es inestable. Esto originará un colapso gravitatorio y se puede pensar como el nacimiento de una estrella a partir de una nube de gas fría.

Radio de Jeans Si graficamos la relación de dispersión obtenemos algo así:



donde hemos definido el $k_{\text{de Jeans}}$ como aquel que divide el régimen estable del inestable. Usando que $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ podemos definir la longitud de onda de Jeans que resulta ser

$$\lambda_J = \sqrt{\frac{\pi}{\rho_0 G}} c_s \rightarrow \text{Longitud de onda (o radio) de Jeans}$$

y si pensamos que las perturbaciones que se propagarán por el grumo de fluido serán aproximadamente del tamaño del fluido, es decir si

$$R \sim \lambda_J,$$

entonces podemos enunciar el criterio de Jeans para una nube de gas de radio R :

$$\text{if } R > \lambda_J \Rightarrow \text{colapsa, else } \Rightarrow \text{no colapsa.}$$

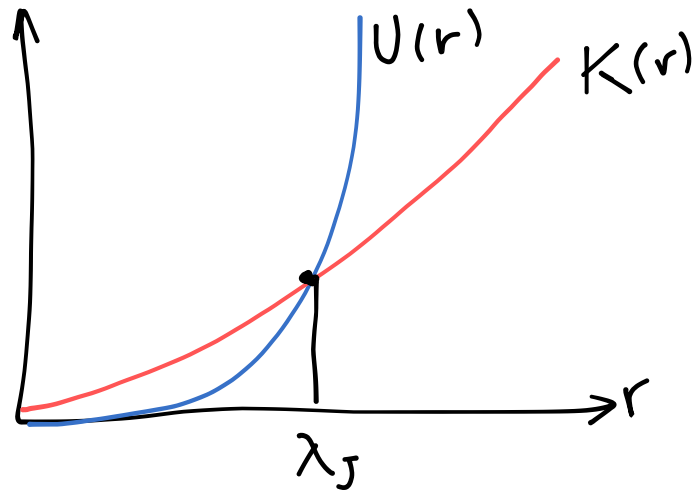
Teniendo el concepto de radio de Jeans podemos definir una masa de Jeans teniendo en cuenta la densidad del grumo. Esto es

$$\begin{aligned} M_J &= \frac{4\pi}{3} \rho_0 \lambda_J^3 \rightarrow \text{Masa de Jeans} \\ &= \frac{4\pi}{3} \rho_0 \left(\sqrt{\frac{\pi}{\rho_0 G}} c_s \right)^3. \end{aligned}$$

También podemos establecer el criterio de Jeans como una competencia entre la energía cinética (térmica) que se opone al colapso y la energía potencial gravitatoria que favorece el colapso. Para ello consideramos

$$\text{Energías} \rightarrow \begin{cases} U(r) \sim \frac{GM^2(r)}{r} & \rightarrow \text{Energía potencial gravitatoria} \\ K(r) \sim \frac{3}{2} p_0 r^3 & \rightarrow \text{Energía cinética térmica} \end{cases}$$

y usando que $M \sim r^3$ se obtiene que $U \sim r^5$. Entonces tenemos que



8. Campos electromagnéticos (MHD)

Vamos a ver algo de magneto-hidrodinámica (MHD) que básicamente es la descripción de un fluido ionizado en presencia de un campo electromagnético. Este campo puede ser producto de una fuente externa o producto del mismo fluido. Por ejemplo si el fluido ionizado se mueve, generará un campo magnético. Si se separan las cargas, se producirá un campo eléctrico.

Ecuaciones para la materia Supongamos un plasma, i.e. un gas ionizado, compuesto por electrones y protones. Esto se da cuando tenemos hidrógeno a más de 8 kK, es decir una temperatura tal que la energía media de las partículas sea mayor que los 13,6 eV que hacen falta para ionizar al hidrógeno. La densidad de cada especie es

$$\rho_{e,p} = n_{e,p} m_{e,p}$$

por lo tanto la ecuación de continuidad para cada especie será

$$\partial_t (m_{e,p} n_{e,p}) + \nabla \cdot (m_{e,p} n_{e,p} \mathbf{u}_{e,p}) = 0 \rightarrow \text{Eq. de continuidad}$$

y la ecuación de Euler para los fluidos (la que es un toque más general que la de Navier-Stokes, creo) es

$$m_{e,p} n_{e,p} (\partial_t \mathbf{u}_{e,p} + (\mathbf{u}_{e,p} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{e,p}) = q_{e,p} n_{e,p} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{u}_{e,p} \times \mathbf{B} \right) - \nabla p_{e,p} \pm \mathbf{R}_{ep} \rightarrow \text{Newton}$$

donde \mathbf{R}_{ep} es la fuerza que cada fluido le hace al otro, producto de las colisiones de electrones con protones, etc. Esto es para tener en cuenta la transferencia de impulso de un gas al otro. \mathbf{R}_{ep} es la transferencia de impulso lineal entre electrones y protones por unidad de tiempo por unidad de volumen. La expresión de este término es

$$\mathbf{R}_{ep} = \underbrace{-m_e n_e \nu_{ep} (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_p)}_{\text{Modelo simplificado}} = \underbrace{-\mathbf{R}_{pe}}_{\text{Por conservación}}$$

donde ν_{ep} es la “frecuencia de colisiones de un electrón con protones”, que se puede pensar como el número de colisiones por unidad de tiempo que tendría el electrón si lo soltamos a él solito en un gas de protones, pobrecito los protones grandotes y pesados lo van a golpear.

Vamos a tener una densidad de carga y una corriente eléctrica. Estas serán las fuentes de los campos. La densidad de carga va a ser

$$\rho_c = e (n_p - n_e) \rightarrow \text{Densidad de carga}$$

donde $e = | \text{de la carga del electrón} |$. En el límite no relativista sucede que

$$n_p - n_e = 0 \rightarrow \text{Límite no relativista}$$

y se conoce como cuasineutralidad:

$$\rho_c \approx 0. \rightarrow \text{cuasineutralidad}$$

En cuanto a la corriente, la densidad de corriente será

$$\mathbf{J} = e (n_p \mathbf{u}_p - n_e \mathbf{u}_e) \rightarrow \text{Densidad de corriente}$$

$$\text{Cuasineutralidad} \rightarrow = en (\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_e).$$

En la expresión de la \mathbf{R}_{ep} reconocemos la densidad de corriente, por lo tanto lo que tenemos es que

$$\mathbf{R}_{ep} = \frac{\nu_{ep} m_e}{e} \mathbf{J}.$$

Ahora sumamos las ecuaciones de continuidad para los electrones y los protones. Lo que obtenemos es

$$\boxed{\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0} \rightarrow \text{Eq. de cont. total}$$

donde

$$\rho = m_e n_e + m_p n_p$$

y

$$\mathbf{u} = \frac{m_e n_e \mathbf{u}_e + m_p n_p \mathbf{u}_p}{m_e n_e + m_p n_p}.$$

Si ahora consideramos la neutralidad y usamos que $m_e \ll m_p$ entonces lo anterior se reduce a

$$\left. \begin{array}{l} n_e = n_p \\ m_e \ll m_p \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho \sim n m_p \\ \mathbf{u} \sim \mathbf{u}_p + \frac{m_e}{m_p} \mathbf{u}_e \end{array} \right.$$

Si bien tenemos que $\frac{m_e}{m_p} \ll 1$, podría pasar que $\mathbf{u}_e \gg \mathbf{u}_p$ con lo cual no siempre lo podríamos tirar. Sin embargo nosotros vamos a considerar que sí, lo podemos tirar

$$\mathbf{u}_p \ll \frac{m_e}{m_p} \mathbf{u}_e. \rightarrow \text{Consideraremos esto}$$

Entonces, en conclusión, vamos a tener que

$$\text{Luego de aproximar todo} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho \approx n m_p \\ \mathbf{u} \approx \mathbf{u}_p \end{array} \right.$$

En cuanto a la ecuación para la corriente

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= en(\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_e) \\ \mathbf{u}_e \gg \mathbf{u}_p &\rightarrow \approx -en\mathbf{u}_e \end{aligned}$$

Ahora sumamos las ecuaciones de Euler para protones y electrones y usamos que $m_p \gg m_e$. Las ecuaciones de Euler para cada fluido son

$$\left\{ \begin{array}{l} m_p n (\partial_t \mathbf{u}_p + (\mathbf{u}_p \cdot \nabla) \mathbf{u}_p) = en \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{u}_p \times \mathbf{B} \right) - \nabla p_p + \mathbf{R}_{ep} \rightarrow \text{Protones} \\ 0 = -en \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{u}_e \times \mathbf{B} \right) - \nabla p_e - \mathbf{R}_{ep} \rightarrow \text{Electrones} \end{array} \right.$$

donde hemos tirado por completo el término de la izquierda para electrones, usando que $m_e \ll m_p$. Además obsérvense los signos de \mathbf{R}_{ep} en cada ecuación. Ahora sí hacemos la suma y nos queda

$$\boxed{m_p n (\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p}$$

donde $p = p_p + p_e$.

Hasta ahora ya tenemos la ecuación de continuidad para el fluido completo, la ecuación que encontramos recién que es para el fluido completo, y nos estaría faltando una ecuación ya que al principio teníamos tres. La que vamos a usar es la ecuación de los electrones pero vamos reemplazar las cantidades como \mathbf{u}_e por los parámetros del fluido completo que considera tanto protones como electrones. Lo que nos queda es

$$0 = -en \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \left(\mathbf{u} - \frac{\mathbf{J}}{en} \right) \times \mathbf{B} \right) - \nabla p_e + \frac{m_e \nu_{ep}}{e} \mathbf{J}.$$

De aquí podemos despejar el campo eléctrico que es

$$\boxed{\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \left(\mathbf{u} - \frac{\mathbf{J}}{en} \right) \times \mathbf{B} - \frac{\nabla p_e}{en} + \frac{m_e \nu_{ep}}{e^2 n} \mathbf{J}.$$

Vemos que $\mathbf{E} \propto \mathbf{J}$ por lo tanto podemos definir a la conductividad del plasma como

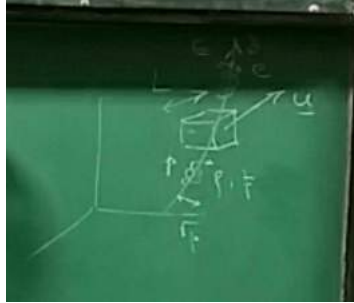
$$\frac{1}{\sigma} = \frac{m_e \nu_{ep}}{e^2 n}. \rightarrow \text{Resistividad}$$

Nueva clase, llegué tarde ☹

Estamos viendo algo de que las partículas cargadas que componen el plasma pueden hacer, producto del campo magnético, movimientos espiralados. Estos movimientos son invisibles en la descripción fluidística (creo). Ahora está lo siguiente:

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\sigma} \mathbf{J} + \frac{1}{en} \left(\frac{1}{e} \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p_e \right)$$

y el término ese que se cancela se lo puede tirar sólo cuando los movimientos espiralados de los electrones son mucho más pequeños que no sé qué. Estaba explicando eso con el siguiente dibujito



y estaba anotado que

$$\frac{r_p}{L} \ll 1$$

Ecuaciones para los campos Tenemos las ecuaciones de Maxwell

$$\text{Maxwell} \rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho_c \approx 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases} \quad u \ll c$$

donde la corriente de desplazamiento se puede tirar por el siguiente motivo:

$$\frac{\frac{1}{c} |\partial_t \mathbf{E}|}{|\nabla \times \mathbf{B}|} \sim \frac{\frac{uB}{c^2 T}}{\frac{B}{L}} \sim \frac{u^2}{c^2} \ll 1$$

Si tomamos la tercera ecuación y reemplazamos $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{B} + \frac{\mathbf{J}}{\sigma}$ obtenemos

$$-\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{B} = -\frac{1}{c} \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\sigma} \nabla \times \mathbf{J}.$$

Ahora tomamos la cuarta ecuación de Maxwell, luego de haber tirado la corriente de desplazamiento, y reemplazamos $\mathbf{J} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B}$ en lo anterior. Lo que obtenemos entonces es

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}).$$

Si ahora usamos la identidad “rotor del rotor” y $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ obtenemos finalmente

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B} \rightarrow \text{Ecuación de inducción}$$

donde η es la resistividad, o conductividad, o algo así (con unidades raras). Vemos que esta ecuación es, a menos del término $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$, una ecuación de difusión igual a la que rige el comportamiento de la temperatura en un sólido por ejemplo $\partial_t T = \eta \nabla^2 T$.

Ecuaciones MHD Finalmente tenemos que las cuatro ecuaciones para el plasma, las ecuaciones MHD, son

$$\text{Eqs. MHD} \rightarrow \begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 & \rightarrow \text{Continuidad} \\ \rho [\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] = -\nabla p + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} & \rightarrow \text{Navier-Stokes (?) } \\ \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\sigma} \mathbf{J} & \rightarrow ? \\ \partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B} & \rightarrow \text{Eq. de inducción} \end{cases}$$

8.1. Número de Reynolds magnético

Podemos definir el número de Reynolds magnético como

$$\mathcal{R}_m \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})|}{\eta |\nabla^2 \mathbf{B}|} \rightarrow \text{Raynolds}$$

en forma análoga a la que se hace en fluidos comunes. En fluidos, recordemos, nos permitía enunciar un criterio para despreciar o no a la viscosidad en función de parámetros característicos del problema. Acá haremos lo mismo. Tenemos que

$$\mathcal{R}_m \sim \frac{u \frac{B}{L}}{\eta \frac{B}{L^2}} = \frac{uL}{\eta}$$

con lo cual en función de la conductividad η , la velocidad típica del fluido u y las distancias características L tendremos que

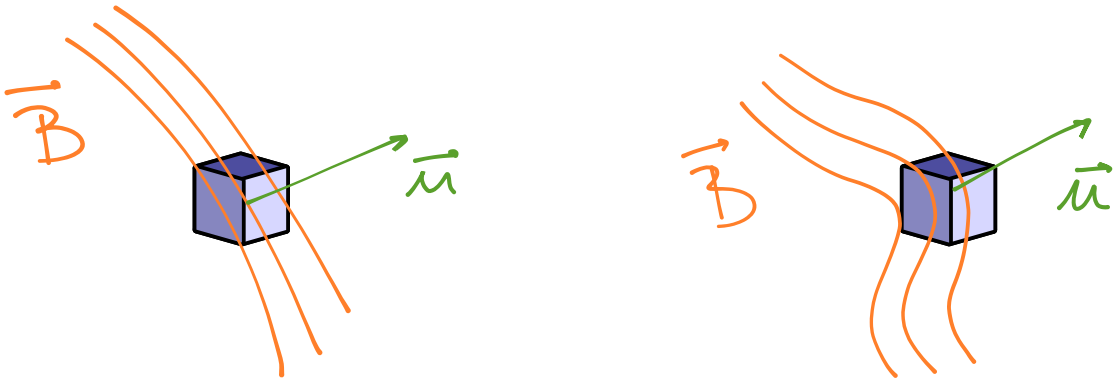
$$\begin{cases} \mathcal{R}_m \gg 1 & \Rightarrow \partial_t \mathbf{B} \approx \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \\ \mathcal{R}_m \ll 1 & \Rightarrow \partial_t \mathbf{B} = \eta \nabla^2 \mathbf{B} \end{cases}$$

8.1.1. Régimen convectivo (congelamiento)

Consideremos el caso en que $\mathcal{R}_m \gg 1$. Entonces tenemos que

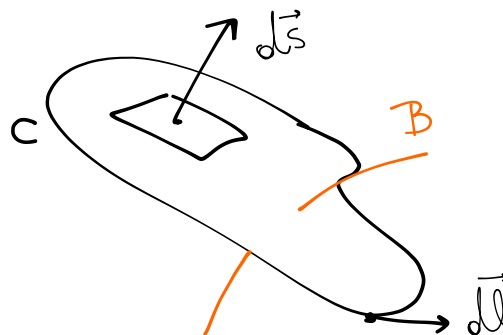
$$\partial_t \mathbf{B} \approx \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \rightarrow \text{Congelamiento}$$

Para entender por qué tiene el nombre de congelamiento, consideremos la descripción MHD dada por ρ, \mathbf{u}, p y \mathbf{B} . Pensemos en un elemento de fluido que es atravesado por líneas de campo magnético. Parece que ocurre lo siguiente:



El elemento de fluido arrastra las líneas de campo

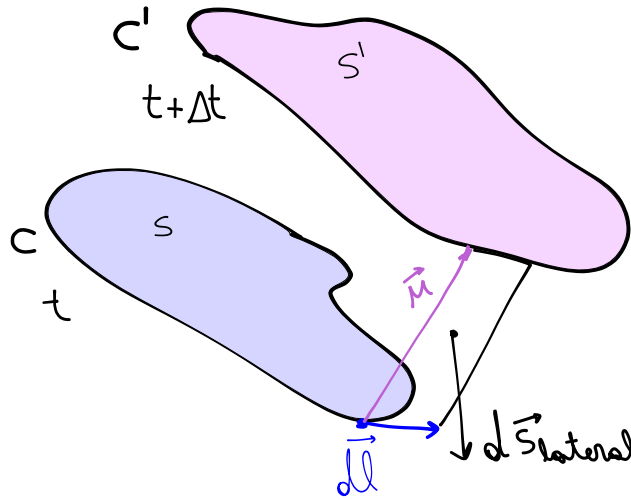
Ahora sí, para entender por qué ocurre esto, consideremos la siguiente curva cerrada C y la superficie que ésta subtiende:



Vamos a mostrar que el flujo magnético que atraviesa a la superficie es constante. Esto quiere decir que por más que cambiemos y/o movamos a la curva C , el campo viaja “atrapado”. Recordemos que el flujo magnético es

$$\Phi(S, t) = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

Vamos a comparar la situación en dos instantes de tiempo levemente distintos, separados por un Δt . Las curvas son:



Si pensamos en el volumen que se forma por este “cilindro” de volumen encerrado entre estas dos curvas entonces tenemos que

$$\oiint_{\text{cilindro}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

$$- \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} + \iint_{S'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} + \oint_C \mathbf{B} \cdot \underbrace{d\mathbf{l} \times \mathbf{u} \Delta t}_{d\mathbf{s}_{\text{lateral}}} =$$

$$\Phi(S', t + \Delta t) = \iint_{S'} d\mathbf{s} \cdot (\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) + \Delta t \partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}, t))$$

$$\text{Un poco de magia} \rightarrow = \iint_{S'} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{B} + \Delta t \iint_S d\mathbf{s} \cdot \partial_t \mathbf{B}$$

$$\Phi(S', t + \Delta t) - \Phi(S, t) = \iint_{S'} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{B} + \Delta t \iint_S d\mathbf{s} \cdot \partial_t \mathbf{B} - \iint_S d\mathbf{s} \cdot \mathbf{B}$$

$$- \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} + \iint_{S'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = - \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \times \mathbf{u} \Delta t \rightarrow = - \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \times \mathbf{u} \Delta t + \Delta t \iint_S \partial_t \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

Ahora pasamos el Δt dividiendo y tomamos el límite $\Delta t \rightarrow 0$ (o sea que nos queda la derivada de Φ) y entonces

$$\left[\frac{d\Phi}{dt} \right]_S = \iint_S \partial_t \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} - \oint_C \underbrace{\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \times \mathbf{u}}_{=\mathbf{u} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}}$$

$$\text{Teorema de Stokes} \rightarrow = \iint_S \partial_t \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} - \iint_S \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}$$

$$= \iint_S (\partial_t \mathbf{B} - \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})) \cdot d\mathbf{s}.$$

Finalmente, recordando que $\partial_t \mathbf{B} \approx \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$ por hipótesis del principio de todo, entonces

$$\left[\frac{d\Phi}{dt} \right]_S = 0$$

tal como queríamos ver.

8.1.2. Régimen de difusión

En el caso opuesto, i.e. $\mathcal{R}_m \ll 1$, se tiene que

$$\partial_t \mathbf{B} \approx \eta \nabla^2 \mathbf{B}. \rightarrow \text{Difusión}$$

Aquí el campo magnético tiene un comportamiento similar a la difusión del calor. Lo que ocurre es que las líneas de campo se homogeneizan a medida que pasa el tiempo. No vamos a resolver la ecuación sino estimar en órdenes de magnitud el tiempo de homogeneización. Esto es

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{B} \sim \frac{B}{\tau} \\ \nabla^2 \mathbf{B} \sim \frac{B}{\lambda^2} \end{cases}$$

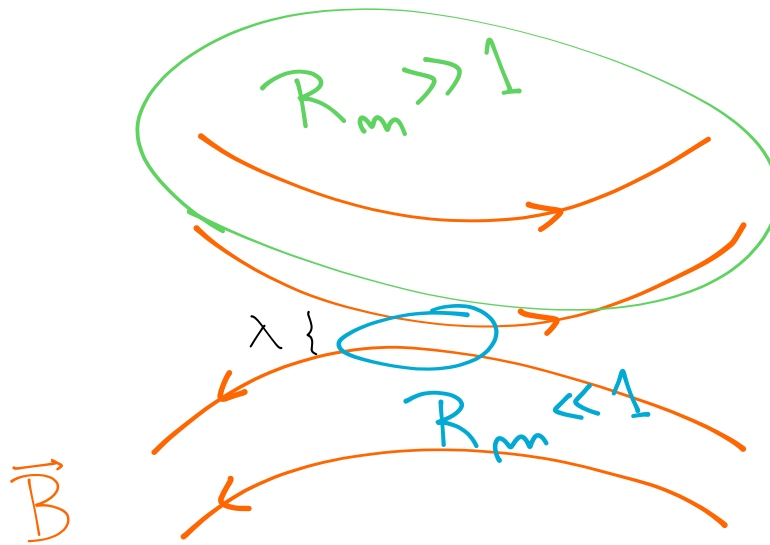
por lo tanto

$$\tau_\lambda \sim \frac{\lambda^2}{\eta} \rightarrow \text{Tiempo de difusión}$$

Vemos que $\tau_\lambda \propto \lambda^2$ lo cual nos dice que las inhomogeneidades de pequeña escala (con λ pequeño) difunden rápido y sobreviven más tiempo las inhomogeneidades grandes.

8.2. Reconexión magnética

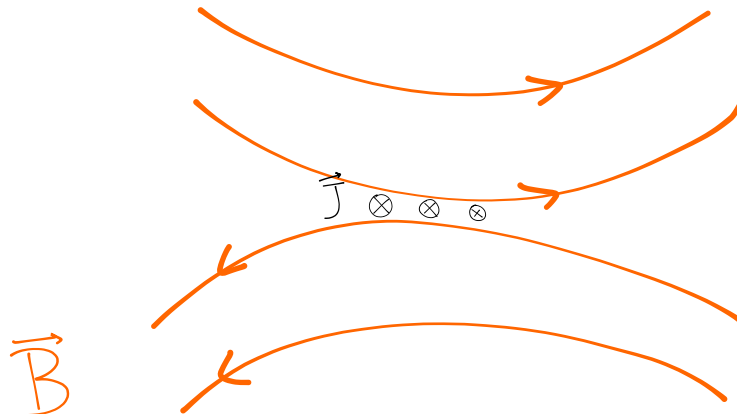
Pensemos ahora en la siguiente situación:



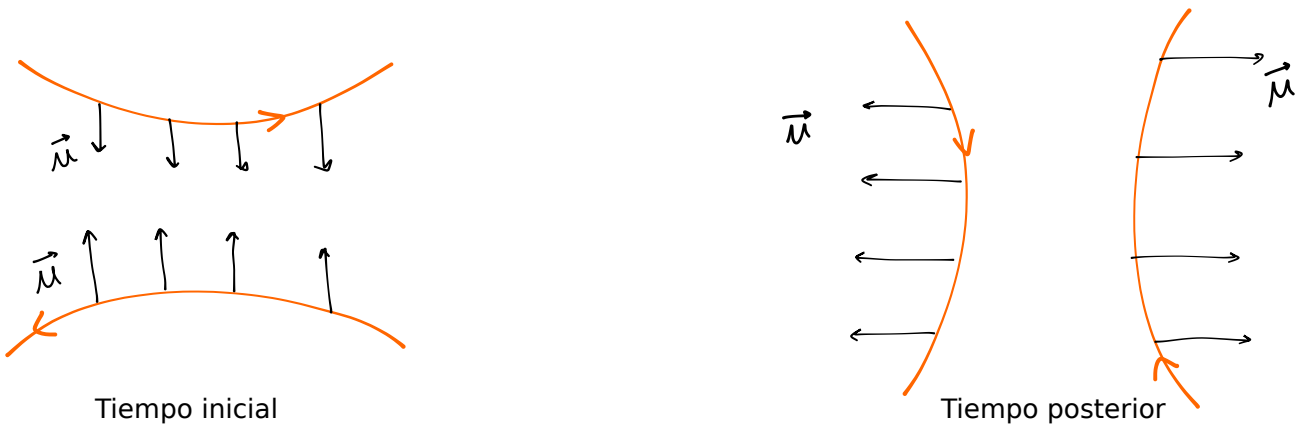
Por un lado tenemos el régimen de congelamiento en las regiones alejadas de la interfase. En la región donde está la interfase tenemos que el cambio en el \mathbf{B} es muy abrupto en una región muy chica por lo tanto el número de Reynolds magnético será $R_m \ll 1$ y estaremos en el régimen difusivo. Recordemos que

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

por lo tanto en la región de difusión vamos a tener una hoja de corriente



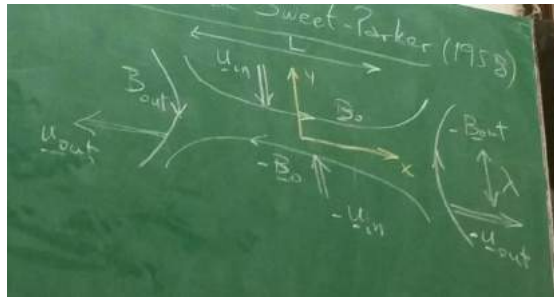
Lo que va a ocurrir a medida que transcurre el tiempo es lo siguiente:



El proceso de reconexión magnética convierte energía magnética en energía cinética, o sea que u aumentará y/o subirá la temperatura del plasma.

8.2.1. Modelo de Sweet-Parker (1958)

Consideremos el siguiente esquemita:



Box 6 - Sabías que...
 ... la NASA lanzó hace poco la [sonda Parker](#), llamada así en honor a este señor Parker?

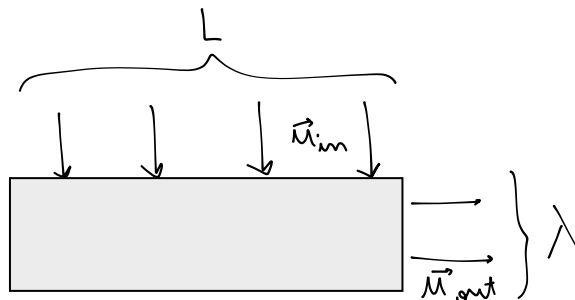
Asumamos una situación estacionaria

$$\partial_t \equiv 0 \rightarrow \text{Asumimos estacionario}$$

y entonces la ecuación de continuidad es

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0.$$

Si pensamos que el dibujo es como una especie de cosa cuadrada así:



Entonces

$$u_{in} L = u_{out} \lambda$$

y vamos a pensar que

$$\frac{L}{\lambda} \gg 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{u_{out}}{u_{in}} \gg 1.$$

Por otro lado la ecuación de “Navier-Stokes” en el caso estacionario (con $\partial_t = 0$) es

$$\rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B} \times \mathbf{B}$$

donde hemos usado que $\mathbf{J} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B}$. Usando la identidad “rotor del rotor” lo que nos queda es

$$\rho \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} + \rho \nabla \left(\frac{u^2}{2} \right) = -\nabla p + \underbrace{\frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}}_{\text{Tensión magnética}} - \underbrace{\nabla \left(\frac{B^2}{8\pi} \right)}_{\text{Presión magnética}}$$

con $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ la vorticidad. Ahora vamos a aprovechar la simetría de reflexión que tiene el problema en los planos xz e yz . Vamos a plantear la ecuación previa justo sobre estos planos y entonces se nos va a simplificar. Evaluando la componente \hat{y} en el eje $x = 0$ tenemos que

$$\text{Justo en } x = 0 \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\omega} \propto \hat{z} & \rightarrow \text{Para mí } [\boldsymbol{\omega}]_{x=0} = 0 \\ \mathbf{u} \propto \hat{y} \\ \mathbf{B} \propto \hat{x} \end{cases}$$

y entonces la componente \hat{y} de la ecuación es

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(p + \frac{\rho u^2}{2} + \frac{B^2}{8\pi} \right) = 0.$$

Esto implica que lo que está dentro del paréntesis es constante. Entonces podemos considerar

$$\left[p + \frac{\rho u^2}{2} + \frac{B^2}{8\pi} \right]_{x=y=0} = \left[p + \frac{\rho u^2}{2} + \frac{B^2}{8\pi} \right]_{x=0, y=\frac{\lambda}{2}}$$

y por la simetría $[u]_{y=x=0} = 0$ y $[B]_{x=y=0} = 0$, por lo tanto

$$[p]_{x=y=0} = p_0 + \frac{B_0^2}{8\pi} + \cancel{\rho \frac{u_{\text{in}}^2}{2}}$$

donde

$$\text{Notación} \rightarrow \begin{cases} p_0 = [p]_{x=0, y=\frac{\lambda}{2}} \\ B_0 = [B]_{x=0, y=\frac{\lambda}{2}} \end{cases}$$

y el término que cancelamos es porque tiene algo que ver con la velocidad de Alfvén:

$$\frac{\rho u_{\text{in}}^2}{2} \ll \frac{B_0^2}{8\pi} \quad \rightarrow \quad u_{\text{in}} \ll \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho}} \equiv v_A. \rightarrow \text{Velocidad de Alfvén}$$

Ahora hacemos exactamente lo mismo pero evaluamos las componentes \hat{x} en $y = 0$. Nos queda

$$[p]_{x=y=0} = p_0 + \frac{\rho u_{\text{out}}^2}{2} + \cancel{\frac{B_{\text{out}}^2}{8\pi}}$$

donde hemos tachado nuevamente por algo que aún no vimos, y hemos asumido que

$$[p]_{x=\frac{\lambda}{2}, y=0} = p_0. \rightarrow \text{Asumimos esto}$$

Ya no entiendo. Anotó lo siguiente:

$$[p]_{0,0} - p_0 = \frac{B_0^2}{8\pi} = \frac{\rho u_{\text{out}}^2}{2} \quad \rightarrow \quad u_{\text{out}} = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho}} = v_A$$

y como la velocidad de Alfvén es muy elevada entonces esto nos permite cancelar el término del campo magnético, o algo así es la idea.

Ahora usamos la ley de Faraday $-\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{E}$ y como estamos en el caso estacionario $\partial_t = 0$ y entonces

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0.$$

Esto implica que $E_z = \text{constante}$ (creo que además usamos argumentos de simetría). No entiendo.

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{B} + \frac{\mathbf{J}}{\sigma}$$

$$[E_z]_{(0,0)} = \frac{c}{4\pi} \frac{B_0}{\sigma \lambda}$$

$$\begin{aligned} [E_z]_{(0,\lambda/2)} &= \frac{1}{c} u_{\text{in}} B_0 \\ \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} &= \nabla \times \mathbf{B} \sim \frac{B_0}{\lambda} \\ \eta &= \frac{c^2}{4\pi\sigma} \\ \Rightarrow u_{\text{in}} &= \frac{\eta}{\lambda} \end{aligned}$$

Ahora vamos a ver la eficiencia del proceso, pero me tengo que ir. Igual no estoy logrando seguir la clase...

8.3. Ondas de Alfvén

Vamos a usar las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \rho (\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = -\nabla p + \frac{1}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B} \times \mathbf{B} \\ \partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \end{cases}$$

Vamos a hacer perturbaciones alrededor del equilibrio

$$\text{Equilibrio} \rightarrow \begin{cases} \rho = \rho_0 = \text{constante} \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 = 0 \\ \mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{z}} \\ p = p_0 = \text{constante} \end{cases}$$

Vamos a asumir un plasma incompresible y perturbamos

$$\text{Perturbación} \rightarrow \begin{cases} \rho = \rho_0 & \rightarrow \text{Plasma incompresible} \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} + \delta \mathbf{u} \\ \mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{z}} + \delta \mathbf{B} \\ p = p_0 + \delta p \end{cases}$$

Metiendo esto en las ecuaciones del principio y quedándonos a orden lineal en δ nos queda

$$\text{Reemplazando y a orden lineal} \rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \delta \mathbf{u} = 0 \\ \rho_0 \partial_t \delta \mathbf{u} = -\nabla \delta p + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \delta \mathbf{B}) \times B_0 \hat{\mathbf{z}} \\ \partial_t \delta \mathbf{B} = \nabla \times (\delta \mathbf{u} \times B_0 \hat{\mathbf{z}}) \end{cases}$$

Ahora proponemos una solución de la forma

$$\delta \sim e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \rightarrow \text{Proponemos solución}$$

y reemplazamos en las ecuaciones. El procedimiento es un bajón, pero no son más que cuentitas. Lo que termina quedando es

$$\begin{cases} \mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{u} = 0 = \mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{B} \rightarrow \text{ondas transversales} \\ -i\omega \delta u_i = -\frac{ik_i}{\rho_0} \delta p + \frac{B_0}{4\pi\rho_0} \varepsilon_{ij3} \varepsilon_{jhl} ik_h \delta B_\ell \\ -i\omega \delta B_i = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{khl} ik_j \delta u_h B_0 \end{cases}$$

Usando la identidad

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km} \rightarrow \text{Identidad}$$

de escribir los dobles productos vectoriales como deltas de Kronecker. Lo que nos queda es

$$\begin{cases} \mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{u} = 0 \\ -\omega \delta \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \mathbf{k} \delta p + \frac{B_0}{4\pi} k_2 \delta \mathbf{B} \\ -\omega \delta \mathbf{B} = B_0 k_2 \delta \mathbf{u} \end{cases}$$

Si ahora multiplicamos a la segunda ecuación por \mathbf{k} y usamos $\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{u} = \mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{B} = 0$ nos queda

$$0 = -\frac{1}{\rho_0} k^2 \delta p$$

por lo tanto

$$\delta p = 0. \rightarrow \text{No son ondas acústicas}$$

Ahora no sé qué hizo pero le quedó

$$\begin{cases} -\omega \delta \mathbf{u} = \frac{B_0}{4\pi\rho_0} k_z \delta \mathbf{B} \\ -\omega \delta \mathbf{B} = B_0 k_z \delta \mathbf{u} \end{cases}$$

de donde se obtiene finalmente la relación de dispersión

$$\omega^2 = \frac{B_0^2}{4\pi\rho_0} k_z^2 \rightarrow \text{Rel. de disp.}$$

y vemos que obtuvimos la velocidad de Alfvén que vimos la clase pasada

$$v_A \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{B_0^2}{4\pi\rho_0}}. \rightarrow \text{Velocidad de Alfvén}$$

En forma más general

$$\omega^2 = v_A^2 k^2 \cos^2 \theta.$$

Vemos que es necesario que $B_0 \neq 0$ ya que sino no hay propagación. Además vemos que las ondas de Alfvén no se pueden propagar en la dirección perpendicular al campo \mathbf{B}_0 .

Si ahora tomamos la ecuación $-\omega \delta \mathbf{u} = \frac{B_0}{4\pi\rho_0} k_z \delta \mathbf{B}$ y reemplazamos $\omega^2 = v_A^2 k_z^2$, o algo así, obtenemos

$$\pm v_A k_z \delta \mathbf{u} = v_A^2 k_z \frac{\delta \mathbf{B}}{B_0}$$

por lo tanto

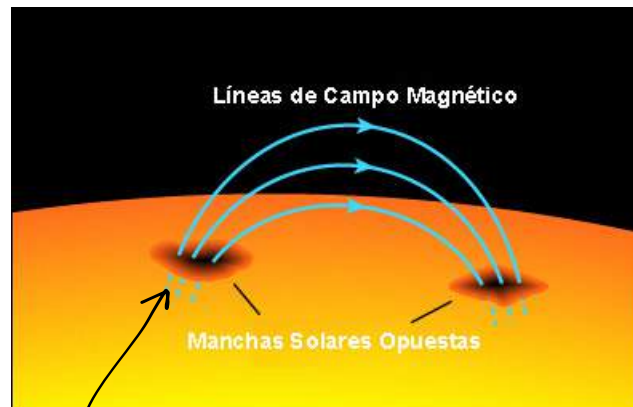
$$\pm \frac{\delta \mathbf{u}}{v_A} = \frac{\delta \mathbf{B}}{B_0}.$$

Esto nos dice cómo se relacionan $\delta \mathbf{u}$ y $\delta \mathbf{B}$. Vemos que son proporcionales.

8.4. Dínamos: generación de campos magnéticos

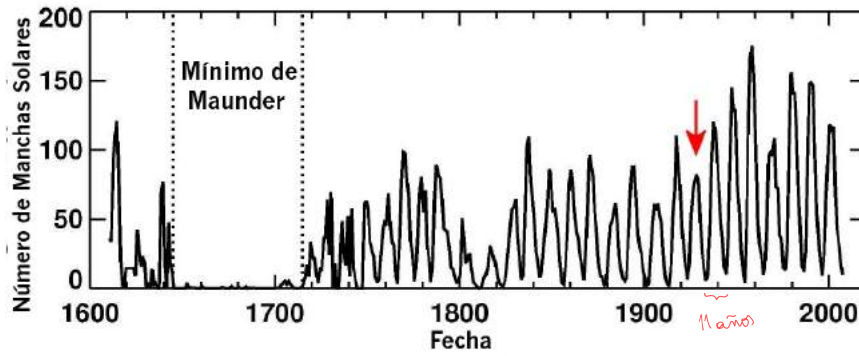
8.4.1. Manchas solares

Las manchas solares son indicadores de campo magnético. En la región de una mancha lo que ocurre es que hay un campo magnético muy intenso por lo tanto la presión magnética sube y en consecuencia baja la presión de fluido. Entonces hay menos fluido emitiendo fotones y por eso se ve más oscuro.



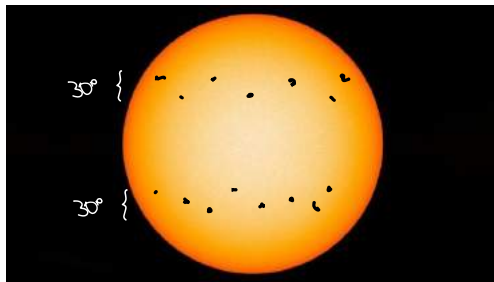
Sube la presión magnética por lo tanto se desplaza el fluido y hay menos emisión

El número de manchas solares que se ven en la superficie del sol en función del tiempo es la siguiente:

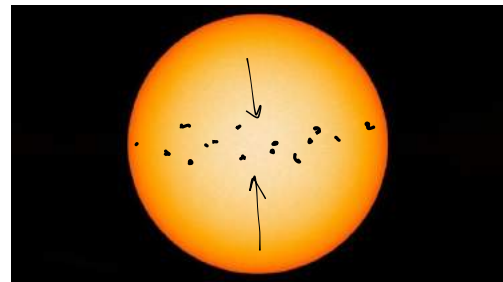


y cada ciclo dura 11 años.

Además lo que se observa es que cuando el ciclo solar comienza las manchas solares se producen aproximadamente a 30 grados del eje de rotación y luego migran hacia el ecuador



Comienza así



Termina así

Si bien uno podría pensar que es imposible modelar esto, parece que se puede y las cosas dan muy bien usando el modelo de dínamo solar.

Dínamo solar Hay dos fenómenos principales

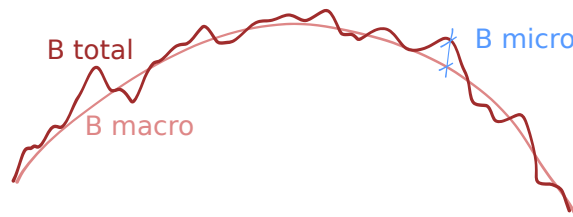
1. El sol tiene una rotación diferencial $\Omega = \Omega(r)$ por ser un fluido (efecto Ω).
2. Convección (zona convectiva, efecto α).

8.4.2. Modelo de campo medio (efecto α)

Esto se debe a unos alemanes Steenbeck, Krause y Radler (1965). Vamos a usar las ecuaciones MHD y vamos a perturbarlas, pero ahora la perturbación en el campo magnético no va a ser constante. Vamos a tener algo así

$$\mathbf{B}_{total} = \mathbf{B} + \delta\mathbf{B}$$

donde \mathbf{B} es la parte “macro” y $\delta\mathbf{B}$ es “micro”. Esquemáticamente es



y lo mismo para todas las demás variables como velocidad, etc. Metiendo esto en la ecuación de inducción obtenemos

$$\partial_t (\mathbf{B} + \delta\mathbf{B}) = \nabla \times [(\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}) \times (\mathbf{B} + \delta\mathbf{B})] + \eta_0 \nabla^2 (\mathbf{B} + \delta\mathbf{B}).$$

Ahora vamos a definir el “promedio en la microescala” que vamos a indicar como

$$\langle \mathbf{B}_{total} \rangle = \underbrace{\langle \mathbf{B} \rangle}_{\mathbf{B}} + \underbrace{\langle \delta\mathbf{B} \rangle}_0$$

que podemos pensarlo como un promedio espacial en una escala suficientemente grande para que $\delta\mathbf{B}$ integre a 0 pero suficientemente chica para que $\langle \mathbf{B} \rangle$ no. Entonces nos queda la evolución del campo magnético macro que será

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times [\mathbf{u} \times \mathbf{B} + \langle \delta\mathbf{u} \times \delta\mathbf{B} \rangle] + \eta_0 \nabla^2 \mathbf{B}.$$

Como vemos, existe una componente micro que influye en la escala macro. Ahora tenemos que encontrar una ecuación para la escala micro y así veremos cómo evoluciona. Para obtenerla lo que hacemos es restar la ecuación original con esta que obtuvimos. Lo que nos queda es

$$\partial_t \delta \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \delta \mathbf{B} + \delta \mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \nabla \times (\delta \mathbf{u} \times \delta \mathbf{B} - \langle \delta \mathbf{u} \times \delta \mathbf{B} \rangle) + \eta_0 \nabla^2 \mathbf{B}.$$

Ahora vamos a asumir algunas cosas para simplificar el problema:

$$\text{Asumimos esto} \rightarrow \begin{cases} \delta \mathbf{B} \sim 0 \\ \mathbf{u} \sim 0 \\ \mathcal{R}_m \sim 0 \end{cases} \rightarrow \text{Transf. de Galileo}$$

Metiendo todo esto lo que nos queda es

$$\partial_t \delta \mathbf{B} \approx \nabla \times (\delta \mathbf{u} \times \mathbf{B}).$$

También hemos tirado el término $\nabla \times (\delta \mathbf{u} \times \delta \mathbf{B} - \langle \delta \mathbf{u} \times \delta \mathbf{B} \rangle)$ ya que “es cuadráticamente chico”. Usando una identidad vectorial queda

$$\partial_t \delta \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \delta \mathbf{u} - (\delta \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B}.$$

Definimos ahora el “tiempo de correlación de vórtices turbulentos” τ tal que

$$\delta \mathbf{B} \approx \tau (\mathbf{B} \cdot \nabla) \delta \mathbf{u} - \tau (\delta \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B}.$$

Ahora metemos esto en la ecuación macro

$$\langle \delta \mathbf{u} \times \delta \mathbf{B} \rangle_i = \underbrace{\tau \varepsilon_{ijk} \langle \delta u_j \partial_\ell \delta u_k \rangle}_{\text{def } = \alpha_{i\ell}} B_\ell - \underbrace{\tau \varepsilon_{ijk} \langle \delta u_j \delta u_\ell \rangle}_{\text{def } = \beta_{i\ell k}} \partial_\ell B_k.$$

Ahora suponemos que la turbulencia es isotrópica. Esto implica que α y β son isotrópicos con lo cual

$$\text{Isotropía} \rightarrow \begin{cases} \alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij} \\ \beta_{ijk} = -\beta \varepsilon_{ijk} \end{cases}.$$

Esto nos simplifica bastante las cosas. Si tomamos la traza obtenemos

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{\tau}{3} \langle \delta \mathbf{u} \cdot \nabla \times \delta \mathbf{u} \rangle \\ \beta = \frac{\tau}{3} \langle |\delta \mathbf{u}|^2 \rangle \end{cases}.$$

Ahora creo que vamos a meter todo esto en la ecuación macro, o algo así. Lo que quedó es

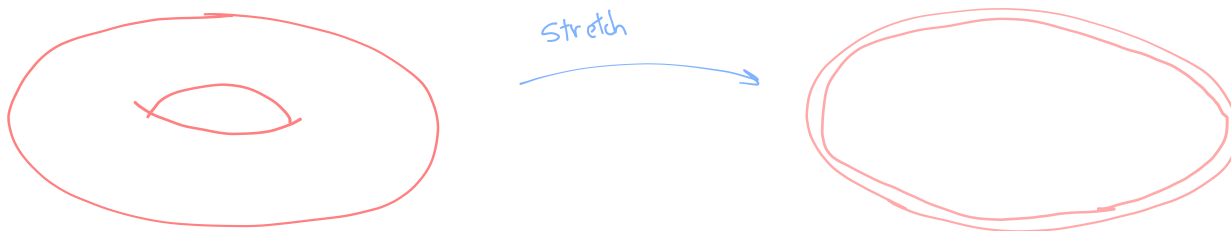
$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \nabla \times (\alpha \mathbf{B}) + (\eta_0 + \beta) \nabla^2 \mathbf{B}$$

que es la ecuación para el campo macro. Vemos que hay dos efectos de la turbulencia que vienen de α y β .

Stretch, twist and fold Consideremos un “tubo de flujo magnético” (es decir un manojo de líneas magnéticas) inmerso en un fluido incompresible. Algo así como una dona



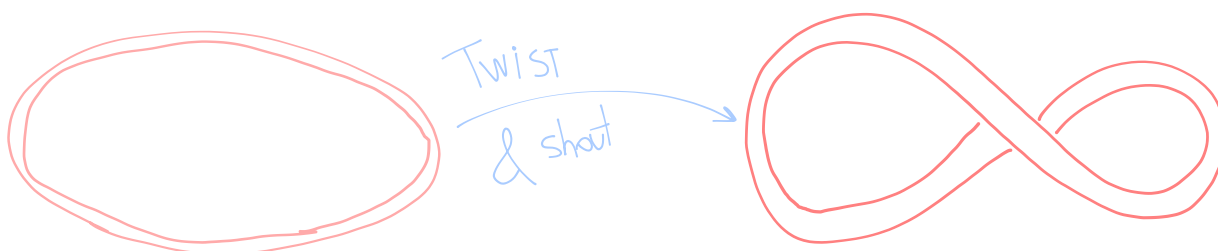
Vamos a someter a esta dona a un proceso de “stretch” del siguiente modo:



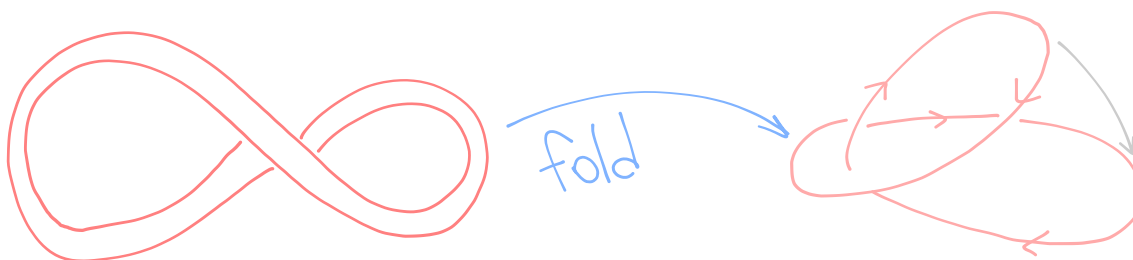
de modo tal que su longitud L se agranda al doble y su área A se achica a la mitad manteniendo su volumen constante

$$A \times L \rightarrow 2A_0 \times \frac{L_0}{2} = V_{\text{volumen}} = \text{constante.}$$

Ahora vamos a hacer un proceso de twist así:



Finalmente hacemos un fold:

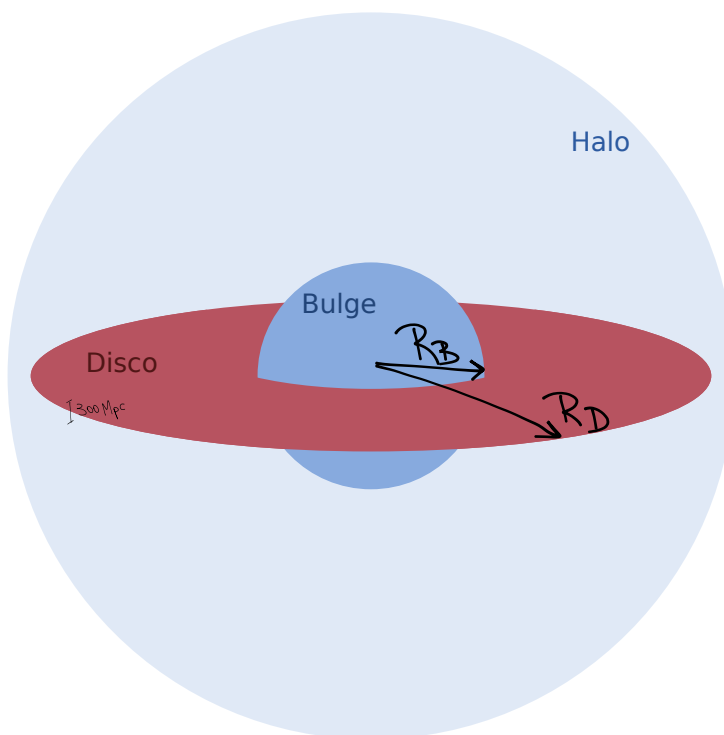


Lo que obtenemos finalmente es una nueva dona de las mismas características que la inicial pero con un campo magnético $2B_0$.

Aparentemente la energía al final es el doble que al principio pues el campo aumentó. Sin embargo como $E = \frac{(2B)^2}{8\pi} A_0 L_0$ entonces $E \rightarrow 4E_0$.

9. Galaxias

Cinemática de galaxias Las galaxias están formadas por aproximadamente 10^{10} , 10^{12} estrellas, más gas y polvo dispersos. A la hora de estudiar una galaxia, una estrella es un punto. Se puede pensar a la galaxia como un gas de estrellas. En general se puede pensar a una galaxia como un disco de aproximadamente 300 pc de espesor, más una esfera llamada “bulge”, más otra esfera mucho más difusa llamada “halo”:



La intensidad de radiación del disco y del bulge

$$\text{Intensidad de radiación} \rightarrow \begin{cases} I_D(r) = I_{D_0} e^{-\frac{r}{R_D}} \\ I_B(r) = I_{B_0} e^{-\left(\frac{r}{R_B}\right)^{1/4}} \end{cases}$$

y la densidad del halo es

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \left(\frac{r}{R_H}\right)^2} \rightarrow \text{Halo}$$

Para estudiar la cinemática de nuestra galaxia debemos especificar un sistema de referencia, lo cual en principio no es completamente trivial. El sistema que se utiliza no es el del sol sino el sistema localmente en reposo (LSR en inglés). Vamos a pensar que la velocidad de una estrella viene dada por

$$\mathbf{v}_i = \langle \mathbf{v}_i \rangle + \delta \mathbf{v}_i$$

donde \mathbf{v}_i es la velocidad que medimos, $\langle \mathbf{v}_i \rangle$ es la velocidad promedio de todas las estrellas de la región (o sea la velocidad del fluido) y $\delta \mathbf{v}_i$ es la velocidad de dicha estrella con respecto a la media (o sea con respecto al fluido) que se llama “**velocidad peculiar**”. Para el sol tenemos

$$\mathbf{v}_\odot = \langle \mathbf{v}_\odot \rangle + \delta \mathbf{v}_\odot.$$

Y esto lo podemos usar para medir la velocidad de cualquier estrella con respecto al sol

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{*\odot} &= \mathbf{v}_* - \mathbf{v}_\odot \\ &= \langle \mathbf{v}_* \rangle + \delta \mathbf{v}_* - \langle \mathbf{v}_\odot \rangle - \delta \mathbf{v}_\odot. \end{aligned}$$

Si la estrella está en el mismo vecindario que el sol, i.e. si es una estrella cercana, entonces

$$\langle \mathbf{v}_* \rangle = \langle \mathbf{v}_\odot \rangle \rightarrow \text{Si está cerca nuestro}$$

y entonces se cancelan y nos queda

$$\mathbf{v}_{*\odot} = \delta \mathbf{v}_* - \delta \mathbf{v}_\odot.$$

Si repetimos este procedimiento para una cantidad estadísticamente representativa de estrellas con respecto al sol podemos hacer un promedio de estas mediciones

$$\langle \mathbf{v}_{*\odot} \rangle = \langle \delta \mathbf{v}_* \rangle - \delta \mathbf{v}_\odot$$

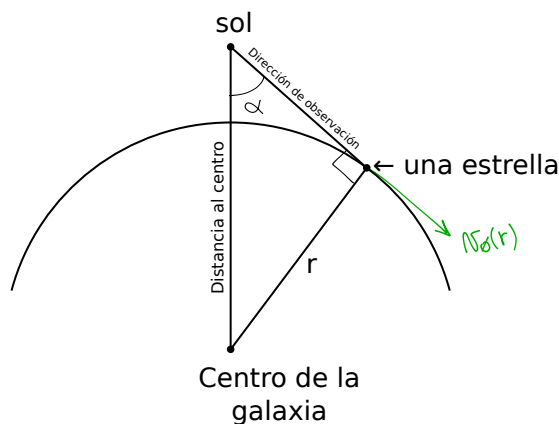
y así obtener la velocidad peculiar del sol respecto del elemento de fluido. El término que se cancela es porque asumimos que van a promediar a cero. Haciendo las mediciones se encuentra que

$$\delta \mathbf{v}_\odot = \left(-9\hat{r} + 11\hat{\phi} + 6\hat{z} \right) \text{ km s}^{-1}. \rightarrow \text{Velocidad peculiar}$$

También se puede medir $\langle v_{\odot} \rangle$ aunque no nos vamos a meter mucho con eso. Resulta que

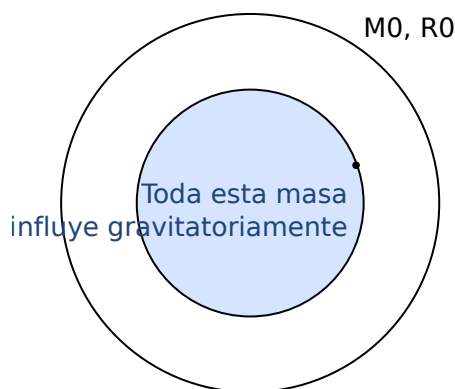
$$\langle v_{\odot} \rangle = 230 \hat{\phi} \text{ km.s.} \rightarrow \text{Velocidad del fluido}$$

También podemos estudiar la distribución de velocidades de la galaxia en función del radio. Para ello miramos una cáscara de estrellas contenidas en el disco galáctico del siguiente modo:



Midiendo el corrimiento al rojo podemos calcular luego la velocidad como función del radio r .

Dinámica de galaxias Para contrastar las mediciones de velocidad de las galaxias con una teoría, hagamos dinámica de galaxias. Supongamos que tenemos un disco de fluido de masa M_0 y R_0 .



La fuerza que siente el elemento de fluido (el puntito) es

$$\mathbf{F}_g = -\frac{GM(r)}{r^2} dm \hat{\mathbf{r}}.$$

Por otro lado la aceleración centrípeta es

$$\text{aceleración} = -\frac{v_{\phi}^2}{r} \hat{\mathbf{r}}$$

por lo tanto tenemos, por Newton, que

$$v_{\phi}^2 = \frac{GM(r)}{r}.$$

Este resultado no coincide con las mediciones. O sea, si medimos v_{ϕ} y $M(r)$ las cosas no cierran. Se observa menos cantidad de masa M que la necesaria. Entonces se postuló la existencia de materia oscura

$$M(r) = M_{\text{bariónica}}(r) + M_{\text{oscura}}(r)$$

y resulta que

$$\frac{M_{\text{oscura}}}{M_{\text{bariónica}} + M_{\text{oscura}}} \sim 85 \%.$$

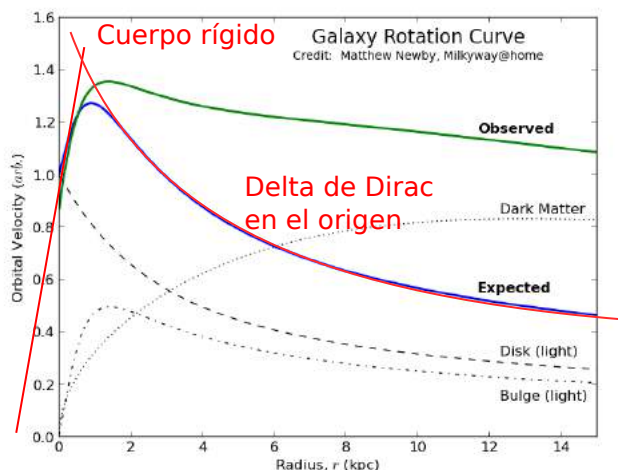
Perfiles de rotación Si la galaxia fuese un cuerpo rígido entonces $\Omega(r) = \text{constante}$ por lo tanto

$$v_\phi(r) \propto r. \rightarrow \text{Para cuerpo rígido}$$

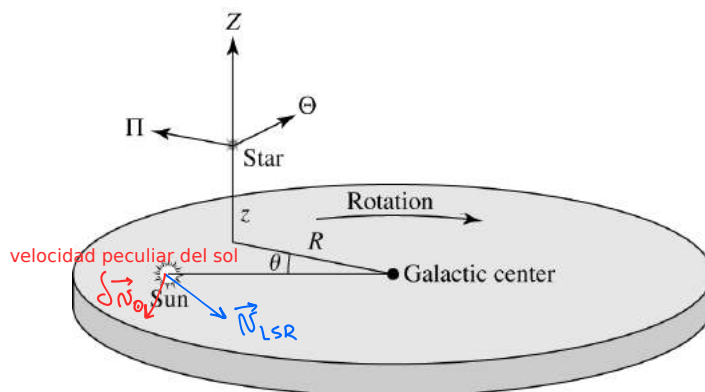
Otro límite consiste en asumir que toda la masa de la galaxia está contenida en el agujero negro supermasivo del centro. En este caso tendríamos que $M(r) \sim \delta_D(r)$ y entonces

$$v_\phi(r) = \sqrt{\frac{GM_0}{r}}. \rightarrow \text{Agujero negro}$$

El problema es el siguiente



Nueva clase Habíamos estado viendo que



y los números de mediciones son

$$\begin{cases} v_{\text{LSR}} \approx 230 \text{ km s}^{-1} \hat{\Theta} \\ \delta v_\odot \approx (-9\hat{r} + 11\hat{\Theta} + 6\hat{z}) \text{ km s}^{-1} \end{cases}$$

Debido a que la galaxia es un fluido, no rota en forma rígida sino que tiene una rotación diferencial

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}(r) \times \mathbf{r} \rightarrow \text{Rotación diferencial}$$

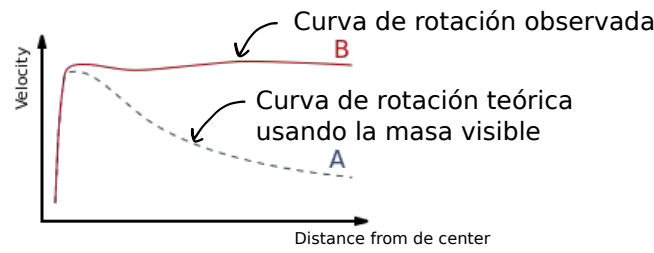
La distribución de masa en función del radio es

$$M(r) = 2\pi H \int_0^r r \rho(r) dr.$$

Haciendo no sé qué se obtiene que

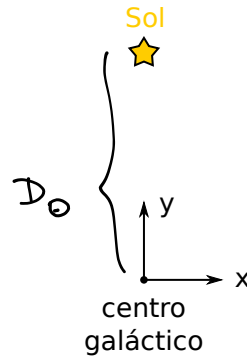
$$-\frac{GM(r)}{r^2} d\mathbf{m}\hat{r} = -dm \frac{v_\theta^2(r)}{r} \hat{r}$$

donde $M(r)$ es la materia necesaria. El problema es que si medimos la velocidad de rotación y ajustamos esto, nos da un valor de M que es mayor que el valor de M que se mide de acuerdo a la radiación que hay. O sea:



9.1. Gradiente de velocidades

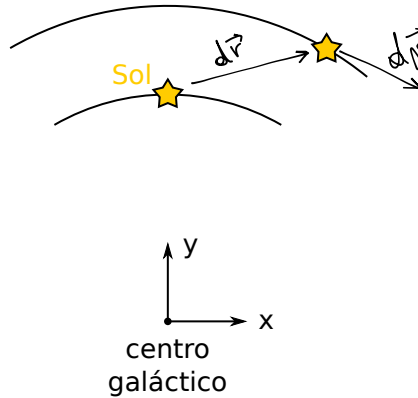
Todo lo anterior está buenísimo. Pero, ¿cómo medimos las velocidades? Consideremos un entorno del sol y pensemos que hay rotación diferencial pura. Consideremos un sistema cartesiano



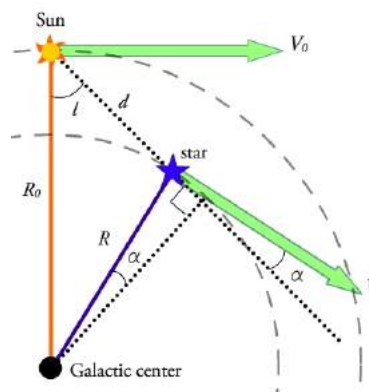
Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} &= \boldsymbol{\omega}(r) \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{r} \\
 &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 0 & 0 & \omega(y) \\ x & y & 0 \end{vmatrix} \\
 &= -\omega(y) y \hat{\mathbf{x}} + \omega(y) x \hat{\mathbf{y}}.
 \end{aligned}$$

Consideremos ahora otra estrella:



EL SIGUIENTE DIAGRAMITA (tomado de [este link](#)) ES MEJOR:



No entiendo bien qué estamos haciendo, no sé si $d\mathbf{r}$ es un diferencial o qué es...

$$\begin{aligned} d\mathbf{v} &= (d\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{v} \\ &= d\mathbf{r} (\nabla \mathbf{v}) \end{aligned}$$

(Me parece que $\nabla \mathbf{v}$ es un tensor, no la divergencia... Es decir $\nabla \mathbf{v} \sim \nabla^i v_j$, es el gradiente del vector velocidad que es un tensor.)

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\frac{d}{dy}(y\omega) & \cancel{\frac{d\omega}{dy}x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Gradiente}$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{v} &= d\mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{v} \\ &= [dx \quad dy] \cdot \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\frac{d(y\omega)}{dy} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -dy \frac{d}{dy}(y\omega) \\ dx \omega \end{bmatrix} \rightarrow \text{Esto es en cartesianas} \end{aligned}$$

Ahora “volvemos” a polares $\begin{cases} y \rightarrow r \\ v_\theta \rightarrow \omega(r)r \\ dx \rightarrow dr \sin \ell \\ dy \rightarrow -dr \cos \ell \end{cases}$. Entonces

$$d\mathbf{v} = dr \begin{bmatrix} \frac{dv_\theta}{dr} \cos \ell \\ \frac{v_\theta}{r} \sin \ell \end{bmatrix}.$$

Lo anterior es la velocidad completa, la posta. Sin embargo la única componente que vamos a poder medir mediante efecto Doppler es la componente radial v_R . Ésta es

$$\begin{aligned} dv_R &= \frac{d\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}}{dr} \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{dv_\theta}{dr} + \frac{v_\theta}{r} \right) \sin 2\ell dr. \end{aligned}$$

En cuanto a la componente tangencial ésta se obtiene simplemente por observar la posición de la estrella en el cielo en función del tiempo. Luego de hacer la cuentita nos queda

$$\begin{aligned} dv_T &= \sqrt{|d\mathbf{v}|^2 - dv_R^2} \rightarrow \text{Pitágoras} \\ &= \pm dr \left[\left(\frac{dv_\theta}{dr} - \frac{v_\theta}{r} \right) \cos^2 \ell + \frac{v_\theta}{r} \right] \\ \cos^2 \ell &= \frac{1 + \cos 2\ell}{2} \rightarrow = \dots \end{aligned}$$

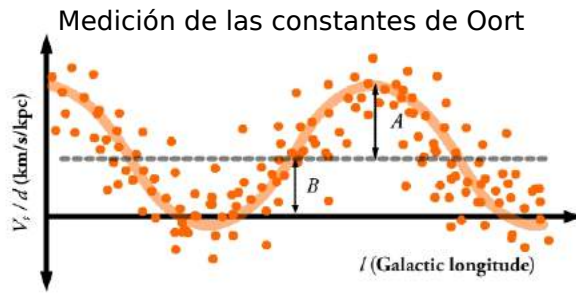
Entonces

$$\begin{cases} dv_T = \pm dr (B + A \cos(2\ell)) \\ dv_R = A \sin(2\ell) dr \end{cases}$$

donde

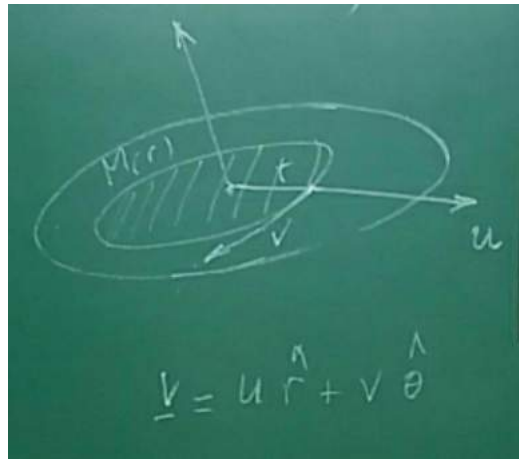
$$\text{Constantes de Oort} \rightarrow \begin{cases} A(r) = \frac{1}{2} \left(-\frac{dv_\theta}{dr} + \frac{v_\theta}{r} \right) \\ B(r) = -\frac{1}{2} \left(\frac{dv_\theta}{dr} + \frac{v_\theta}{r} \right) \end{cases}.$$

A A y B se las conoce como **constantes de Oort** porque siempre estaremos interesados en evaluarlas en r_\odot , con lo cual terminan siendo constantes. Para conocer el valor de las constantes de Oort se pueden medir tal como lo explica [este link](#):



9.2. Dinámica de galaxias: ondas espirales

Salió un paper hace varios años sobre esto. Ver en [este link](#).
 Consideremos el siguiente sistema:



Las ecuaciones de fluidos son las siguientes:

$$\text{Están en el paper} \rightarrow \begin{cases} \partial_t \rho + \frac{1}{r} (\partial_r (r \rho u) + \partial_\theta (\rho v)) = 0 & \rightarrow \text{Continuidad} \\ \partial_t u + u \partial_r u + \frac{v}{r} \partial_\theta u - \frac{v^2}{r} = \partial_r \Phi & \rightarrow \text{Navier-Stokes } \hat{r} \\ \partial_t v + u \partial_r v + \frac{v}{r} \partial_\theta v + \frac{uv}{r} = \frac{1}{r} \partial_\theta \Phi & \rightarrow \text{Navier-Stokes } \hat{\theta} \\ \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r \Phi) + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta} \Phi = -4\pi G \rho & \rightarrow \text{Poisson} \end{cases}$$

donde $\Phi = -$ potencial gravitatorio (menos el potencial gravitatorio, es decir $\mathbf{F}_{\text{gravitatoria}} = \nabla \Phi$). Tenemos un sistema acoplado no lineal horrible imposible de resolver así como está. Vamos a hacer lo que siempre hace un físico cuando se topa con algo así: pequeños apartamientos alrededor del equilibrio y linealizar todo.

Para encontrar el equilibrio vamos a asumir que

$$\partial_t \equiv 0 \rightarrow \text{Pues estamos en equilibrio}$$

y también vamos a buscar soluciones axisimétricas

$$\partial_\theta \equiv 0. \rightarrow \text{Simetría en el equilibrio}$$

Vamos a proponer que en el equilibrio tenemos lo siguiente:

$$\text{Equilibrio} \rightarrow \begin{cases} \rho = \rho_0(r) \\ u = 0 \\ v = r \Omega_0(r) \\ \Phi = \Phi_0(r) \end{cases}$$

y entonces reemplazando en las ecuaciones obtenemos

$$\begin{cases} r \Omega_0^2 = -\partial_r \Phi_0 \\ \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r \Phi_0) = -4\pi G \rho_0 \end{cases}$$

Combinando no sé de qué forma las dos ecuaciones encontramos

$$\frac{1}{r} \partial_r (r^2 \Omega_0^2) = 4\pi G \rho_0.$$

Ahora vamos a añadir una nueva hipótesis para el equilibrio:

$$\Omega_0(r) = \Omega_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-a} \rightarrow \text{Asumimos esto}$$

y reemplazamos en la ecuación. Lo que nos queda es

$$2(1-a)\Omega_0^2(r) = 4\pi G \rho_0(r).$$

Obsérvese que es necesario que $0 < a < 1$ para que todo sea positivo.

Ahora introducimos una perturbación, es decir que la solución es de la forma

$$f = f_0 + \delta f \rightarrow \text{Perturbación}$$

con f cualquiera de las cantidades ρ, u, v y Φ . Es decir

$$\text{Perturbaciones} \rightarrow \begin{cases} \rho(r, \theta, t) = \rho_0(r) + \delta\rho(r) e^{i(kr+n\theta-\omega t)} \\ \dots \end{cases}$$

Nótese que la solución previa será válida sólo en el **régimen WKB**, es decir cuando $kr \gg 1$ (o sea, longitud de onda mucho más pequeña que inhomogeneidades del medio). Aparentemente el problema linealizado queda así

$$\begin{bmatrix} \omega - n\Omega_0 & -\frac{2(1-a)\Omega_0^2}{4\pi G} & -\frac{n}{r} \frac{2(1-a)\Omega_0^2}{4\pi G} \\ \frac{4\pi G}{k} & \omega - n\Omega_0 & -2i\Omega_0 \\ \frac{n}{r} \frac{4\pi G}{k^2} & i(2-a)\Omega_0 & \omega - n\Omega_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\rho \\ \delta u \\ \delta v \end{bmatrix} = 0.$$

La ecuación para $\delta\Phi$ parece que se cancela en algún momento del desarrollo, dijo que lo miremos en el paper. Para que hayan soluciones no triviales pedimos que el determinante de lo anterior sea nulo

$$\det(\text{esa matriz}) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\omega - n\Omega_0)^3 - 2\Omega_0^2(\omega - n\Omega_0) + ia(1-a)\frac{2n\Omega_0^3}{kr} = 0.$$

Ahora vamos a expresar

$$\omega - n\Omega_0 = \omega_R + i\gamma \rightarrow \text{Cambio de variables}$$

y vamos a asumir que

$$\gamma \ll \omega_R. \rightarrow \text{Asumimos}$$

Entonces vamos a quedarnos a primer orden en γ . Reemplazando queda

$$\omega_R^3 + i3\omega_R^2\gamma - 2\Omega_0^2(\omega_R + i\gamma) + ia(1-a)\frac{2n\Omega_0^3}{kr} = 0.$$

Ahora separamos parte real e imaginaria que deben anularse en forma independiente. Para ω_R tenemos que

$$\omega_R^2 = \begin{cases} 2\Omega_0^2 \\ 0 \end{cases}.$$

Reemplazando en $\omega - n\Omega_0 = \omega_R + i\gamma$, creo, obtenemos

$$\text{Cuando } \omega_R^2 = 2\Omega_0^2 \rightarrow \begin{cases} \omega = (n \pm \sqrt{2})\Omega_0 \\ \gamma = -\frac{a(1-a)n\Omega_0}{2kr} \end{cases}.$$

Como habíamos asumido que $a \in (0, 1)$ entonces $\gamma < 0$ lo cual implica que el equilibrio es estable. Esto no nos interesa pues no podemos obtener los espirales. Si nos quedamos con la rama $\omega_R = 0$ entonces obtenemos

$$\text{Cuando } \omega_R = 0 \rightarrow \begin{cases} \omega = n\Omega_0 \\ \gamma = \frac{a(1-a)n\Omega_0}{kr} \end{cases} \rightarrow \text{Es el inestable}$$

En este caso tenemos que $\gamma > 0$ por lo tanto el equilibrio ahora es inestable. Veamos qué ocurre en este caso inestable. Tenemos que

$$\rho(r, \theta, t) = \rho_0(r) + \delta\rho(r) e^{i(kr+n\theta)} e^{-in\Omega_0 t} e^{\gamma t} \rightarrow \text{Solución inestable}$$

y lo que vemos es que como $\gamma > 0$ entonces llegará un momento en que $\delta\rho \sim \rho_0$ y la perturbación se hará importante. Y parece que $e^{i(kr+n\theta)}$ son espirales.

10. Nociones de cosmología

La cosmología intenta responder esas preguntas que te hiciste la primera vez que viste un astronauta: cuál es la forma del universo? es infinito? de qué tamaño es? cuál es su edad?

Principio cosmológico Establece que la estructura del universo tiene dos simetrías: es homogéneo y es isótropo. El principio cosmológico se aplica a las escalas más grandes posibles. Una galaxia claramente no es homogénea ni isótropa, pero una galaxia es muy chiquita comparada con las escalas cosmológicas.

Principio cosmológico perfecto Es una ampliación del principio cosmológico que añade a las propiedades de simetría espaciales, una simetría de homogeneidad temporal. Esto implica que el universo es estacionario.

Obsérvese que el principio cosmológico perfecto es incompatible con un principio y/o final del universo. De hecho, es incompatible con el big bang. Las observaciones y creencias actuales de la humanidad descartan la homogeneidad temporal. Actualmente la ciencia cree en el big bang.

10.1. La constante de Hubble

Antes de hablar de la constante de Hubble recordemos cómo se define el redshift

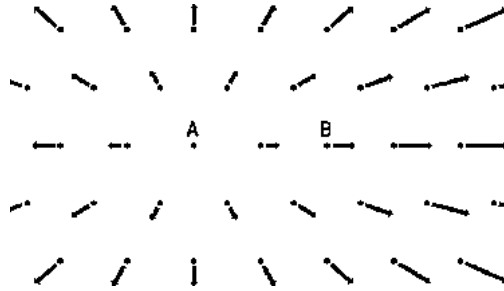
$$\text{Redshift} \rightarrow z \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \\ \frac{\nu_0 - \nu}{\nu_0} \end{cases} = \frac{v}{c} \rightarrow \text{No relativista}$$

donde v es la velocidad no relativista a la que se está alejando el objeto.

Si el universo está estático uno pensaría que encontraría igual cantidad de objetos que se alejan que objetos que se acercan. Sin embargo observacionalmente se encuentra que son más los objetos que se alejan que los que se acercan. Además se observa que cuanto más lejos está un objeto, más rápido se aleja. Esto es consistente con una explosión en la que todos nos alejamos. Hace casi 100 años Hubble se dio cuenta de esto y propuso que

$$\mathbf{v} = H_0 \mathbf{r} \rightarrow \text{Ley de Hubble-Lemaître}$$

donde H_0 es la constante de Hubble en el presente, \mathbf{v} es la velocidad de un objeto respecto a la Tierra y \mathbf{r} es la distancia hasta la Tierra. La siguiente imagen puede ayudar a entender esta ley:



Obsérvese que la ley es válida para cualesquiera par de puntos. Es decir, el universo no pierde la isotropía ni homogeneidad. No hay un punto privilegiado, por más que el punto “A” parezca el centro del universo.

Si ρ es la densidad del universo, entonces

$$\nabla \rho = 0 \rightarrow \text{A escalas de Mpc}$$

a escalas de megaparsec. A escalas más chicas sí hay fluctuaciones (al igual que la densidad del agua: en forma macroscópica $\nabla \rho_{\text{agua}} = 0$ pero a nivel microscópico tiene picos en la posición de cada molécula). Por otro lado tenemos la ecuación de continuidad

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0 \rightarrow \text{Continuidad} \\ \partial_t \rho + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} &= \leftarrow \text{Expandimos} \\ \partial_t \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} &= \leftarrow \nabla \rho = 0 \text{ a escalas de Mpc} \end{aligned}$$

por lo tanto tenemos que

$$\partial_t \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}.$$

Sabiendo además que $\mathbf{v} = H_0 \mathbf{r}$ por la ley de Hubble entonces $\nabla \cdot \mathbf{v} = H_0 \nabla \cdot \mathbf{r} = 3H_0$ por lo que

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -3H_0.$$

Obsérvese que

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho.$$

Si asumimos que $H_0 = \text{constante}$ entonces

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-3H_0 t}. \rightarrow \text{Si } H_0 = \text{cte}$$

En 1948, cuando todo esto se estaba cocinando, la gente no soportaba que la densidad del universo cayera exponencialmente. Entonces hubo tres señores, Bondi, Gold y Houle, que propusieron que existían fuentes de materia tales que la densidad del universo era constante pese a su expansión. Para ello modificaron la ecuación de continuidad

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} + S = 0$$

donde S es la fuente de masa. Resolviendo esto podemos calcular cuánto debería valer S :

$$S = \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 3\rho_0 H_0.$$

Sabiendo que $\rho_0 \sim 10^{-30} \text{ g cm}^{-3}$ y que $H_0 \sim 75 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, se obtiene que

$$\begin{aligned} S &\sim 10^{-47} \text{ g cm}^{-3} \text{ s}^{-1} \\ &\sim 10^{-6} m_e \text{ m}^{-3} \text{ año}^{-1} \end{aligned}$$

donde m_e es la masa del electrón. Esto significa que la fuente de masa debería generar 10^{-6} electrones por metro cúbico por año. Es inmedible.

10.2. Evolución del universo

En lo anterior dijimos que la constante de Hubble H_0 es constante. Sin embargo podría ser función del tiempo. Vamos a proponer que

$$H = H(t)$$

y que

$$H_0 = H(t_{\text{hoy}}).$$

Vamos a definir $H(t)$ de modo tal que

$$\nabla \cdot \mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} 3H(t).$$

En secuencia la ley de Hubble debería ser

$$\mathbf{v} = H(t) \mathbf{r} + \nabla \times \Phi \rightarrow \text{Ley de Hubble generalizada}$$

donde $\nabla \times \Phi$ es un rotor arbitrario cualquiera. Si el universo es isótropo es necesario que

$$\Phi = \Phi(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{r}} \rightarrow \text{Universo isótropo}$$

pero

$$\nabla \times (\Phi(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{r}}) \equiv 0$$

por lo tanto alcanza con decir que

$$\mathbf{v} = H(t) \mathbf{r}.$$

Vamos a definir al factor de escala R tal que

$$H(t) = \frac{\dot{R}}{R}. \rightarrow \text{Factor de escala}$$

Se puede pensar a R como el radio de una esfera de control que se expande con el universo, pero no es necesario. Se puede pensar como un simple cambio de variable matemático.

Recordemos que $\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -3H_0$. Reemplazando $H_0 \rightarrow H = \frac{\dot{R}}{R}$ obtenemos

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\frac{3}{R} \frac{dR}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} (\rho R^3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho R^3 = \text{constante}.$$

Entonces vemos que la cantidad de masa que hay en una esfera de radio $R(t)$, i.e. $M(R)$, es constante. Entonces esto tiene que implicar que

$$\rho(t) = \rho_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^3.$$

Ahora vamos a usar la ecuación de Euler para fluidos

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \phi \rightarrow \text{Navier-Stokes}$$

donde ϕ es el potencial gravitatorio y además hemos tirado la viscosidad. Vamos a suponer que el gas es frío para poder despreciar los efectos de la presión

$$\nabla p = 0. \rightarrow \text{Gas frío}$$

Para la velocidad \mathbf{v} vamos a suponer que está dada por la ley de Hubble $\mathbf{v} = H(t) \mathbf{r}$. Entonces

$$\mathbf{r} \frac{dH}{dt} + H^2 (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{r} = -\nabla \phi.$$

Sabiendo que $(\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{r} = \mathbf{r}$ tenemos que

$$\mathbf{r} \left(\frac{dH}{dt} + H^2 \right) = -\nabla \phi.$$

Ahora multiplicamos por $\nabla \cdot$ de ambos lados y obtenemos

$$\begin{aligned} 3 \left(\frac{dH}{dt} + H^2 \right) &= -\nabla^2 \phi \\ &= -4\pi G \rho. \end{aligned}$$

Si ahora reemplazamos $\begin{cases} H = \frac{\dot{R}}{R} \\ \rho = \rho_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 \end{cases}$ con lo cual

$$3 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{R} \frac{dR}{dt} \right) + \frac{3}{R^2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = -\frac{4\pi G \rho_0 R_0^3}{R^3}.$$

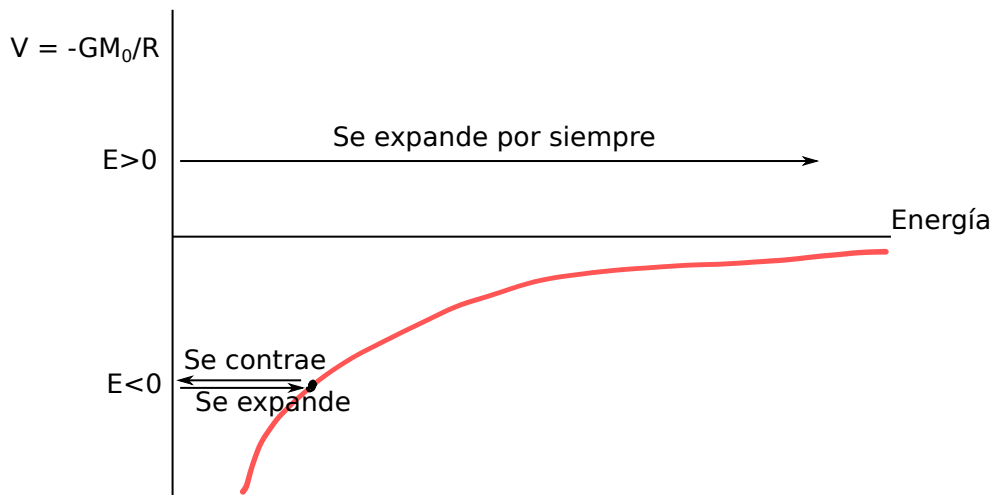
Desarrollando las cuentitas parece que da

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{GM_0}{R^2}$$

donde $M = \frac{4}{3} \pi \rho_0 R_0^3$. (Obsérvese que esto es la ecuación de Newton.) Usando

$$\frac{dR}{dt^2} = \frac{dR}{dt} \frac{dv}{dR} = v \frac{dv}{dR} = \frac{d}{dR} \left(\frac{v^2}{2} \right)$$

donde v es la velocidad, tenemos que con E la energía. Acá vamos a tener distintos regímenes en función del valor de E . Según el signo de E el universo se expande por siempre o llega un momento que colapsa:



Caso $E = 0$ En el caso especial con $E = 0$ (modelo de Einstein-de Sitter) proponemos

$$\text{Proponemos} \rightarrow \begin{cases} R(t=0) = 0 \\ R(t) = R_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^a \end{cases}$$

y entonces $\dot{R} = \frac{aR_0}{t_0} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{a-1}$. Reemplazando en $\frac{\dot{R}^2}{2} + \frac{GM_0}{R} = E$ (y poniendo $E = 0$) obtenemos que

$$\text{Obtenemos} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ t_0 = \frac{1}{\sqrt{6\pi G\rho_0}} \end{cases}.$$

Reemplazando $\rho_0 \sim 10^{-30} \text{ g cm}^{-3}$ y $G \sim 10^{-8} \text{ cm}^2 \text{ kg}^{-2} \text{ s}^{-1}$ se obtiene

$$t_0 \sim 10^{17} \text{ s} \sim 13,7 \times 10^9 \text{ años.}$$

Repaso de la clase pasada Habíamos visto el principio cosmológico que establece que el universo es, en la macro macro macro escala, un fluido isótropo y homogéneo. La macro macro macro escala del universo es aquella escala en la que las galaxias son las partículas de un fluido, y cada elemento de fluido posee muchas galaxias. Para este fluido se aplica la ley de Hubble

$$\mathbf{v} = H\mathbf{r} \rightarrow \text{Ley de Hubble}$$

donde \mathbf{v} es el campo de velocidades del fluido y \mathbf{r} la posición, mientras que $H(t)$ es una constante de proporcionalidad (llamada constante de Hubble, ja) y que depende del tiempo así que no es tan constante.

Vimos que bajo estas hipótesis y asumiendo que la masa $M(t)$ del universo era constante (o sea $\partial_t M = 0$) la densidad del universo era

$$\rho(t) = \rho_0 \left(\frac{R_0}{R(t)}\right)^3 \rightarrow \text{Cuando } M = \text{constante}$$

siendo ρ_0 y R_0 la densidad y el radio de referencia a un momento t_0 , por ejemplo el presente. Reemplazando esto en no recuerdo dónde (creo que Navier-Stokes) habíamos obtenido que

$$E = \frac{\dot{R}^2}{2} - \frac{4\pi G\rho_0 R_0^3}{3R} = \text{constante}$$

y en función de si E era mayor o menor que cero, o cero, teníamos tres soluciones posibles. Para el caso $E = 0$ (conocido como un universo de Einstein-de Sitter) se encuentra que

$$R(t) = R_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3} \rightarrow \text{Einstein-de Sitter}$$

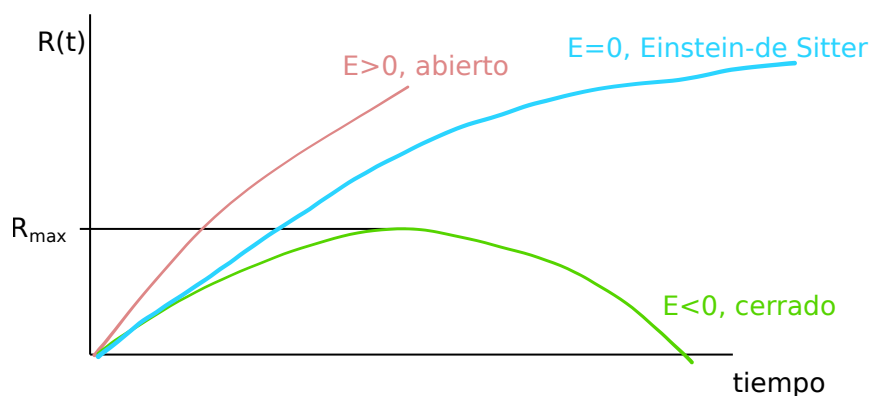
con $t_0 = \frac{1}{\sqrt{6\pi G\rho_0}}$ la edad del universo. Reemplazando $G \sim 10^{-8}$ y $\rho_0 \sim 10^{-30}$ (en el sistema CGS) se obtiene que

$$t_0 \sim 1,37 \times 10^{10} \text{ años.}$$

También podemos calcular el valor de la constante de Hubble en el presente

$$H_0 = \frac{2}{3t_0} \sim 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}.$$

Obsérvese que según el tipo de universo en el que estemos



y podemos calcular el radio máximo en el caso $E < 0$ que se obtendrá pidiendo que $\dot{R} = 0$ de donde sale

$$R_{\text{máx}} = -\frac{4\pi G\rho_0 R_0^3}{3E} \rightarrow \text{Para } E < 0$$

Se define el factor de desaceleración

$$q \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2} \rightarrow \text{Desaceleración}$$

Para ver cuánto vale q consideremos

$$\begin{cases} \ddot{R} = -\frac{4\pi G\rho_0 R_0^3}{3R^2} & \rightarrow \text{Newton} \\ H = \frac{\dot{R}}{R} & \rightarrow \text{Definición de } H \\ \rho = \rho_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^3 \end{cases}$$

y entonces obtenemos que

$$q = \frac{4\pi G\rho}{3H^2} \rightarrow \text{Es siempre } > 0$$

y vemos también que $q \propto \rho$. Existe una $\rho_{\text{crítica}}$ tal que pasamos del universo cerrado al universo abierto. Es decir que esta densidad es la del universo de Einstein-de Sitter

$$E = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho = \rho_{\text{crítico}} = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

Ahora definimos la “densidad adimensional”

$$\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\rho}{\rho_{\text{crítica}}} \rightarrow \text{Densidad adimensional}$$

y entonces si $\Omega \begin{matrix} > \\ \cong \\ < \end{matrix} 1$ tenemos universo abierto, crítico o cerrado. Podemos reinterpretar las cosas y olvidarnos de la energía E considerando lo siguiente:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\dot{R}^2}{2} - \frac{4\pi G\rho_0 R_0^3}{3R^2} \\ &= \frac{R^2 H^2}{2} - \frac{4\pi G R^2 \rho_{\text{crítico}} \Omega}{3} \end{aligned}$$

y entonces (?)

$$E = \frac{R^2 H^2}{2} (1 - \Omega)$$

y nuevamente vemos que el signo de E está relacionado con $\Omega \begin{matrix} > \\ \cong \\ < \end{matrix} 1$. También se puede mostrar que

$$q = 2\Omega \rightarrow \text{Factor de desaceleración}$$

10.3. Termodinámica

Queremos estudiar la evolución de la temperatura a medida que el universo evoluciona, ya que dependiendo de la temperatura vamos a poder formar hadrones, átomos, moléculas, planetas, vida, espiners, etc.

Consideremos que el universo es un gas ideal. Entonces en la ecuación de Navier-Stokes (o la de continuidad?) vamos a tener que

$$\frac{3}{2} \frac{k\rho}{m_p} (\partial_t T + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T) = -p \nabla \cdot \mathbf{v} \rightarrow ?$$

Si el universo es homogéneo (principio cosmológico) entonces

$$\nabla T = 0 \rightarrow \text{Universo homogéneo}$$

y entonces

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

Para un gas ideal tenemos que

$$p = \frac{\rho k T}{m_p} \rightarrow \text{Gas ideal de protones}$$

y además por ley de Hubble

$$v = H(t) r$$

y si reemplazamos en lo anterior obtenemos

$$\frac{3}{2} \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = -3H$$

$$H \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\dot{R}}{R} \rightarrow = -3 \frac{\dot{R}}{R}$$

y entonces nos queda que

$$\frac{\dot{T}}{T} = -2 \frac{\dot{R}}{R}$$

Para resolver esto consideramos $T(t) = T(R(t))$ y entonces

$$\frac{\dot{R}}{T} \frac{dT}{dR} = -2 \frac{\dot{R}}{R} \Rightarrow TR^2 = \text{constante.}$$

Esto nos permite escribir que

$$T = T_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \rightarrow \text{Para gas ideal}$$

Universo dominado por radiación En el caso de un universo dominado por radiación tenemos que usar la presión de radiación de un cuerpo negro que es

$$p = \frac{4\sigma T^4}{3c} \rightarrow \text{Presión de radiación cuerpo negro}$$

y la “ecuación de Navier-Stokes” (o la de continuidad o la que sea) ahora es

$$\frac{3k\rho}{2m_p} \frac{dT}{dt} = -\frac{4\sigma T^4}{3c} 3H.$$

Aquí vamos a reemplazar $\rho = \frac{\rho_0 R_0^3}{R^3}$ y $H = \frac{\dot{R}}{R}$ que nos termina dando

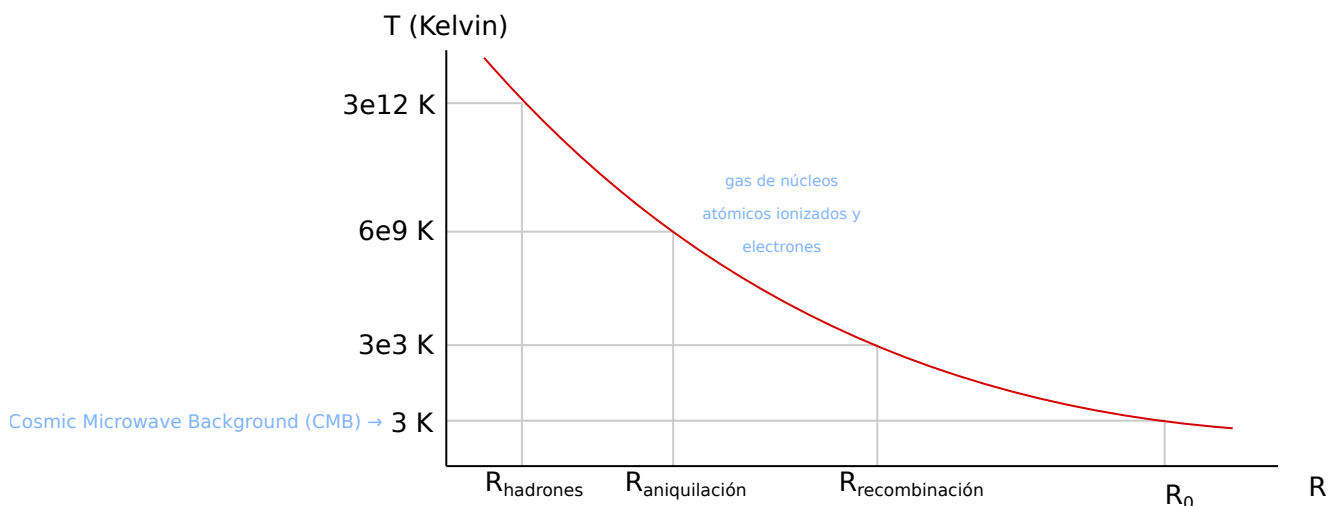
$$\left(\frac{3}{8} \frac{kc}{m_p \sigma} \rho_0 R_0^3 \right) \frac{\dot{T}}{T^4} = -R^2 \dot{R}$$

cuya solución es s

$$T = T_0 \left(\frac{R_0}{R} \right) \rightarrow \text{Universo dominado por radiación}$$

10.4. Épocas del universo

Estudiando la evolución de la temperatura del universo, podemos darnos una idea de su composición. A grandes rasgos tenemos lo siguiente:



Recombinación Es el momento en que los núcleos atómicos logran atrapar a los electrones para formar átomos. Supongamos que

$$TR = \text{constante}$$

$$13,6 \text{ eV} = kT \rightarrow T \sim 11 \text{ kK}$$

y para $T \sim 3 \text{ kK}$ tenemos un 10 % de ionización. Usando $TR = \text{constante}$ encontramos que

$$\frac{R_{\text{recombinación}}}{R_0} = \frac{T_0}{T_{\text{recombinación}}} \sim 10^{-3}.$$

Es decir que el universo era mil veces más chico cuando ocurrió la recombinación.

Si asumimos el modelo de Einstein-de Sitter en el que $R \sim t^{2/3}$ entonces tenemos que

$$\frac{R_{\text{recombinación}}}{R_0} \sim \left(\frac{t_{\text{recombinación}}}{t_0} \right)^{2/3} \Rightarrow \frac{t_{\text{recombinación}}}{t_0} \sim 10^{-5}$$

Aniquilación Es el momento en que se dejaron de aniquilar los positrones y los electrones. Más hacia el futuro habían electrones mientras que más hacia el pasado había sólo radiación. Usando que

$$m_e c^2 \sim \underbrace{kT_{\text{aniquilación}}}_{\text{Energía térmica}}$$

obtenemos que

$$T_{\text{aniquilación}} \sim 6 \times 10^9 \text{ K.}$$

Por otro lado tenemos que

$$\frac{R_{\text{aniquilación}}}{R_0} = \frac{T_0}{T_{\text{aniquilación}}} \sim 10^{-10}$$

y “haciendo cálculos más detallados” (no lo vamos a calcular acá) se puede encontrar que

$$t_{\text{aniquilación}} - t_{\text{big bang}} \sim 6 \text{ s.}$$

Creación de hadrones Planteando

$$m_p c^2 = kT_{\text{hadronización}}$$

obtenemos

$$T_{\text{hadronización}} \sim 10^{12} \text{ K.}$$

En este caso tenemos que

$$\frac{R_{\text{hadronización}}}{R_0} = \frac{T_0}{T_{\text{hadronización}}} \sim 10^{-12}$$

y nuevamente usando un modelo mucho más detallado que este modelo newtoniano que claramente no funciona bien para esto se encuentra que

$$t_{\text{hadronización}} - t_{\text{big bang}} \sim 10^{-5} \text{ s.}$$

Criterio para usar relatividad general El criterio para usar la relatividad general o no es

$$\frac{E_{\text{gravitatoria}}}{E_{\text{en reposo}}} \geq 1.$$

Reemplazando $E_{\text{gravitatoria}} = \frac{GM_0 m}{R_0}$ con M_0 la masa del universo y R_0 el radio y $E_{\text{en reposo}} = mc^2$ obtenemos

$$\frac{GM_0}{R_0 c^2} \geq 1.$$

Reemplazando $M_0 = \frac{4\pi}{3} \rho_0 R_0^3$ lo anterior es

$$\begin{aligned} \frac{GM_0}{R_0 c^2} &= \frac{G \frac{4\pi}{3} \rho_0 R_0^3}{c^2 R_0} \\ R_0 \sim ct_0 \rightarrow &= \frac{4\pi}{3} \rho_0 G t_0^2. \end{aligned}$$

Asumiendo universo de Einstein-de Sitter entonces $t_0 = \frac{1}{\sqrt{6\pi G \rho_0}}$ y entonces

$$\frac{E_{\text{gravitatoria}}}{E_{\text{en reposo}}} \sim \frac{2}{9}$$

lo cual implica que deberíamos usar relatividad general si quisiéramos hacer bien las cosas.

11. Tema extra: acreción

La acreción es el proceso por el cual un objeto gana materia producto de la fuerza gravitatoria. La creación de una estrella se puede pensar como un mecanismo de acreción ya que la gravedad hace que la masa colapse. En una configuración perfectamente simétrica la acreción tiene lugar en forma esférica. Sin embargo una pequeña asimetría hará que la masa tenga un momento angular no nulo que romperá la simetría esférica. Esto hará que se forme un disco de acreción.

A nivel cualitativo podemos distinguir los siguiente objetos generalmente presentes en los diversos procesos de acreción:



Entonces la acreción actúa como un mecanismo en el que se produce una conversión de energía como sigue:

$$\text{Energía gravitatoria} \rightarrow \text{Energía cinética} \rightarrow \text{Energía térmica} \rightarrow \text{Radiación}$$

y es por eso que en el centro del disco tenemos más brillo que en las periferias. Si bien la energía se va transformando y se termina disipando, esto no le ocurre al momento angular:

$$\mathbf{L} \approx \text{constante.}$$

La pérdida de energía por acreción es

$$\frac{\Delta E_{\text{acr}}}{m} \sim \frac{GM}{R}.$$

Si pensamos que una estrella de neutrones tiene una masa del orden de la masa solar y un radio de 10 km entonces obtenemos

$$\left[\frac{\Delta E_{\text{acr}}}{m} \right]_{\text{Estrella de neutrones}} \sim 10^{20} \text{ erg g}^{-1}.$$

Comparemos esta energía con la energía que libera el hidrógeno en una reacción nuclear de fusión

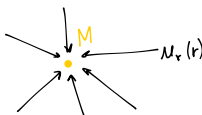
$$\frac{\Delta E_{\text{fusión hidrógeno}}}{m} \sim 0,007c^2 \sim 10^{18} \text{ erg g}^{-1}.$$

Como se puede ver la cantidad de energía que se disipa en acreción es mayor a la energía de una reacción nuclear.

Observacionalmente se observa que los discos de acreción irradian rayos X. Esto nos dice que tienen que estar muy calientes para ello.

11.1. Acreción esférica

Es el caso más sencillo. Tenemos un objeto central y una nube de gas que lo rodea y hay simetría esférica. Consideremos lo siguiente:



donde vamos a asumir una situación estacionaria $\partial_t \equiv 0$, y además simetría esférica $\partial_\phi, \partial_\theta \equiv 0$. Planteando las ecuaciones de fluidos tenemos, por un lado la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \rightarrow \text{Estacionario}$$

y si desarrollamos en esféricas encontramos que

$$4\pi r^2 \rho u = \text{constante}$$

donde $u = \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{r}}$ es la componente radial de la velocidad. A la constante la vamos a llamar $-\dot{m}$, es decir que

$$4\pi r^2 \rho u = -\dot{m}. \rightarrow \text{Continuidad}$$

La constante \dot{m} es la *tasa de acreción*.

Planteando por otro lado la ecuación de movimiento (ecuación de Euler) para este fluido

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{GM}{r^2} \rightarrow \text{Euler}$$

y aquí M es la masa del objeto central, que no depende de r ya que lo asumimos “muy compacto”. Además tenemos la ecuación de la politrópica

$$p = p_\infty \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^\gamma \rightarrow \text{Politrópica}$$

y la velocidad del sonido definida como

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} = \dots = \frac{\gamma p}{\rho}.$$

Usando la simetría esférica del problema, la estacionariedad $\partial_t = 0$ y juntando las dos ecuaciones previas, encontramos que

$$\frac{u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} - \frac{GM}{r} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_\infty}{\rho_\infty}. \rightarrow \text{Bernoulli}$$

(Véase que es similar a los teoremas de Bernoulli de Estructura 1.) Ahora vamos a adimensionalizar todas las cantidades haciendo

$$\text{Adimensionalizar} \rightarrow \begin{cases} \rho_{\text{con unidades}} = \rho \rho_\infty \\ p_{\text{con unidades}} = p p_\infty \\ c_{\text{con unidades}} = c c_\infty \\ u_{\text{con unidades}} = u c_\infty \\ r_{\text{con unidades}} = r \frac{GM}{2c_\infty^2} \end{cases}$$

donde ρ_∞ es una constante con unidades de densidad y ρ es adimensional, y lo mismo para todas las demás cantidades. Reemplazando todo eso en las últimas dos ecuaciones obtenemos

$$\text{Adimensionalizadas} \rightarrow \begin{cases} \dot{m} = r^2 \rho u & \rightarrow \text{Continuidad} \\ \frac{u^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma-1} - \frac{2}{r} = \frac{1}{\gamma-1} & \rightarrow \text{Bernoulli} \\ c^2 = \rho^{\gamma-1} & \rightarrow \text{Velocidad del sonido?} \end{cases}$$

Esto parece un sistemita re inocente pero se complica pues es altamente no lineal. Para resolver lo que vamos a hacer es derivar con respecto a r y obtenemos

$$\begin{cases} \frac{r}{2} \frac{u'}{u} = -\frac{c^2 - \frac{1}{r}}{c^2 - u^2} \\ \frac{r}{\gamma-1} \frac{c'}{c} = \frac{u^2 - \frac{1}{r}}{c^2 - u^2} \end{cases}.$$

Acá tenemos un problema ya que si $u = c$ entonces todo se va al demonio de Maxwell.

Vamos a definir el punto sónico r_* como aquel punto tal que

$$u(r_*) = c(r_*). \rightarrow \text{Punto sónico}$$

Si se dan las condiciones del punto sónico entonces estamos en un punto singular ya que los denominadores se anulan. Si además ocurre que

$$u^2 = \frac{1}{r_*} = c^2 \rightarrow \text{Quizá se evita la singularidad}$$

podría salvarse la singularidad ya que las ecuaciones tienen $\frac{0}{0}$ que podría converger. Esto efectivamente ocurre y se conoce como *acreción de Bondi*.

Acreción de Bondi (1952) Se asume el caso isotérmico con $\gamma = 1$ (acá habría que volver unos pasos para atrás y salvar el caso $\gamma = 1$ pues en Bernoulli nos quedó $\frac{\gamma}{\gamma-1}$, pero no es problema pues parece que se arregla fácil). Como tenemos un gas ideal entonces

$$p = \frac{\rho k T}{m_p} \rightarrow \text{Gas ideal}$$

y como $T = T_0 = \text{constante}$ entonces

$$p = \frac{k T_0}{m_p} \rho = \left(\frac{p_\infty}{\rho_\infty} \right) \rho$$

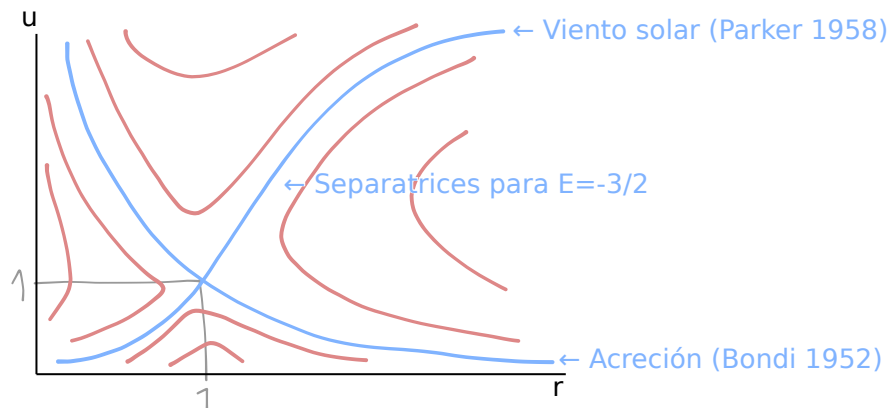
por lo tanto $\frac{p_\infty}{\rho_\infty} = \frac{k T}{m_p}$. No sé si es consecuencia de esto, o si lo asumimos, pero

$$c \equiv 1$$

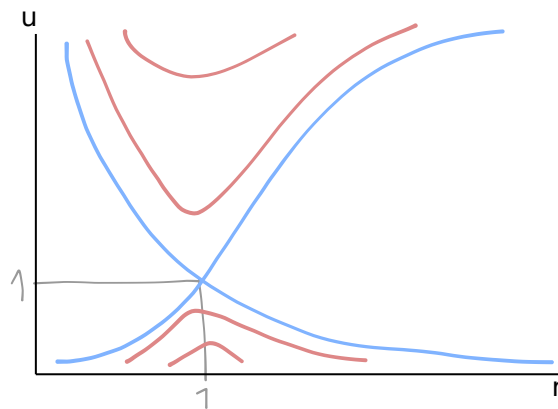
ahora y entonces $\frac{r}{2} \frac{u'}{u} = -\frac{c^2 - \frac{1}{r}}{c^2 - u^2}$ se puede integrar fácilmente y nos da

$$E = \frac{u^2}{2} - \ln(ur^2) - \frac{2}{r} = \text{constante}$$

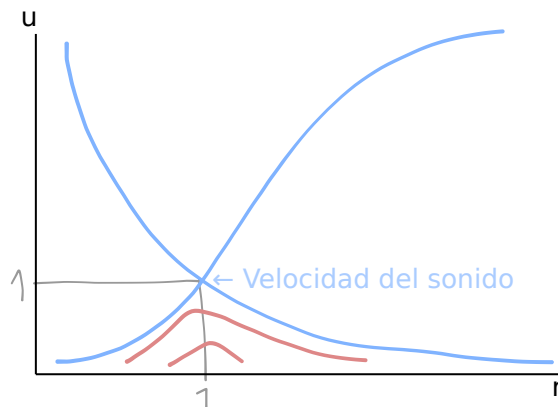
Despejando de aquí podemos obtener $u(r)$. Lo malo es que es una ecuación trascendente y no la podemos despejar ☹, pero si usamos métodos numéricos o métodos gráficos podemos ver cómo es. Si uno resuelve el problema con Matlab obtiene



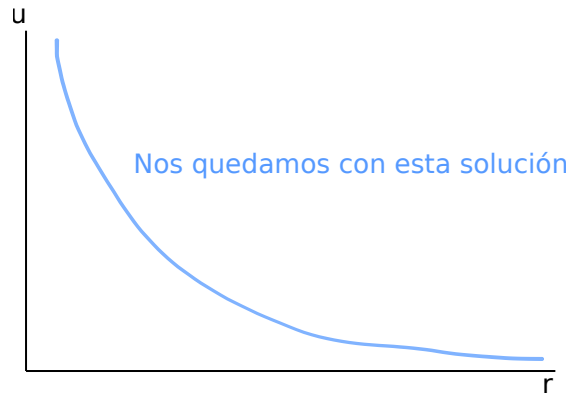
De aquí vamos a descartar todo un set de soluciones por ser multiavludadas, vamos a quedarnos con las siguientes:



Por otro lado para las soluciones “de arriba” vemos que son supersónicas en todo r . En particular en $r \rightarrow \infty$ tenemos que la velocidad es supersónica. Esta condición de contorno no tiene sentido, así que también descartamos todas esas soluciones



Por último también tiramos las soluciones rojas que quedaron en el dibujito previo ya que la velocidad del fluido tiende a cero a medida que nos acercamos a la masa, lo cual es irreal (acreción ineficiente). Entonces nos quedamos sólo con la solución azul:



Vemos que el fluido está en reposo en $r \rightarrow \infty$ y tiene velocidad infinita cuando $r \rightarrow 0$.

11.2. Sistemas binarios

Son aproximadamente un 30 % de todas las estrellas, así que una cantidad no despreciable forma sistemas binarios. De acuerdo con la ley de Kepler la velocidad angular de estas estrellas será

$$\Omega^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{G(M_1 + M_2)}{a^3} \rightarrow \text{Kepler}$$

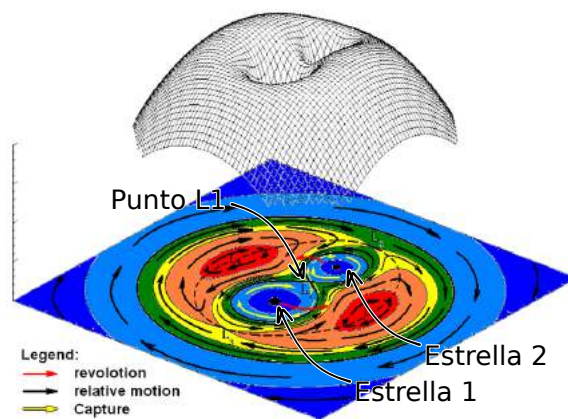
Ahora queremos ver qué hace el fluido que está en las inmediaciones del sistema binario. La ecuación de fluidos para un potencial generado por un sistema binario planteada en un sistema no inercial que rota junto con las estrellas parece que es

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla \Phi - \underbrace{2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}}_{\text{Coriolis}} - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

donde

$$\Phi = -\frac{GM_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} - \frac{GM_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} - \frac{1}{2} |\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}|^2.$$

Vamos a despreciar los efectos de Coriolis y ∇p , para simplificar el problema. Vamos a trabajar únicamente con el potencial gravitatorio. El potencial tiene una forma así:



y se conoce como **lóbulo de Roche**. Supongamos que la estrella 1 se convierte en una gigante roja: entonces su masa será la misma pero su volumen será mucho mayor y si su atmósfera supera su lóbulo de Roche entonces parte de su material comenzará a caer sobre la estrella 2, y como están girando formará un disco de acreción. Lo que va a ocurrir es esto:



Fin