# Notas y Ejercicios sobre Teoría de Juegos.

Un **juego en forma normal** es un triplete $\Gamma_N = \left[I, \{S_i\}_1^I, \{u_i\}_1^I\right]$ donde

- $I$ es un conjunto finito de jugadores que normalmente llamaremos $I = \{1, 2, ..., I\}$.
- $S_i$ es, para cada jugador $i$, un conjunto que llamaremos el conjunto de *estrategias*. Son las cosas que puede hacer el jugador $i$ en el juego. Para $S = S_1 \times ... \times S_I$, a cada $s \in S$ lo llamaremos un *perfil* de estrategias: una estrategia para cada jugador.
- $u_i : S \to \mathbf{R}$ es la función de utilidad del jugador $i$. El número $u_i(s)$ es la utilidad que obtiene el jugador $i$ cuando él juega $s_i$ los demás (sus "oponentes") juegan $s_{-i} = (s_1, ..., s_{i-1}, s_{i+1}, ..., s_I)$.

Los juegos se utilizan para modelar situaciones que son de interés para el investigador. Por ejemplo, en 1964 fue asesinada en Queens, Nueva York, una chica llamada Kitty Genovese, mientras 38 personas miraban sin intentar evitarlo (la persona que la atacó estuvo más de media hora golpeándola, atacándola sexualmente y acuchillándola mientras la gente miraba y no llamaba a la policía, o intervenía). Esta situación resultó incomprensible para muchos hasta que un economista modeló la situación como un juego y observó que el resultado "natural" en el juego que había planteado era precisamente que nadie hiciera nada.

Por supuesto, una vez que nos planteamos un problema, o un juego, debemos decidir qué vamos a entender como el resultado "natural" de esa situación. Es decir que una vez que especificamos un grupo de jugadores, sus estrategias y sus utilidades, debemos preguntarnos "cómo actuaría un determinado grupo de gente si estuvieran en una situación como la que plantea mi juego". La terminología que se usa para "resultado natural" es *equilibrio*: debemos preguntarnos cuál es un concepto razonable de equilibrio; o lo que es lo mismo, debemos preguntarnos cuáles son las combinaciones de estrategias que tenderemos a observar.

En la profesión hay aún bastante desacuerdo sobre cuál es el resultado natural en cualquier juego que nos planteemos. Comenzaremos ahora por ver los conceptos de equilibrio menos disputados, o más aceptados.

Comenzaremos por definir el concepto de estrategia dominada: es una estrategia que le va peor que a otra, sin importar lo que hagan los demás. Definimos entonces $S_{-i} = S_1 \times S_2 \times ... \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times ... \times S_I$, el conjunto de todas las combinaciones de estrategias que pueden adoptar "los demás", cuando el jugador $i$ está comparando sus estrategias. Es decir, $s_{-i} \in S_{-i}$ es una combinación de estrategias para los jugadores $1, 2, ..., i-1, i+1, ..., I$. Una estrategia $s_i$ para el jugador $i$ es **dominada** si para algún $s_i' \in S_i$ sucede que

$$u_i(s_i', s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-1}), \text{ para todo } s_{-i} \in S_{-i}$$

y la desigualdad es estricta para algún perfil $s_{-i}' \in S_{-i}$. En este caso, decimos que $s_i'$ **domina** a $s_i$. Es decir, una estrategia $s_i$ es dominada si existe otra $s_i'$ (la que la domina) a la cual le va mejor que a $s_i$ *para cualquier combinación concebible* de las estrategias de los demás jugadores (y en algunos casos le va estrictamente mejor). Obviamente, una estrategia dominada no debería ser jugada nunca: para cualquier creencia que tengamos sobre lo que van a hacer los demás, siempre convendrá jugar $s_i'$ y no $s_i$. Si pensamos que todos los demás participantes del juego son racionales, y por tanto no jugarán estrategias dominadas, podemos imaginarnos un juego en que de los espacios de estrategias se han eliminado las estrategias dominadas, y podemos ver si en este nuevo juego hay estrategias dominadas. Así, podemos seguir el proceso. Si todas las estrategias menos una se eliminaran en algún paso, el juego sería **soluble por eliminación iterada de estrategias dominadas**. Veremos ahora un ejemplo de un juego sencillo (tomado del Mas-Colell, Whinston y Green) que es soluble mediante la eliminación iterada de estrategias dominadas.

**Ejercicio 1. El hermando del fiscal**. En las siguientes matrices están el dilema del prisionero "típico" y una variante llamada "el hermano del fiscal". En el dilema del prisionero, si ambos confiesan, van presos 5 años, si uno confiesa y el otro no, el que confesó recibe una pena muy chica, 1 año, y al otro lo guardan 10 años. Si ninguno confiesa, sólo los pueden acusar de algún delito menor, y están 2 años presos. En la variante "el hermano del fiscal", si ninguno confiesa, el fiscal puede liberar a su hermano, el jugador 1. En las matrices aparecen dos números en cada celda. El primero corresponde a la utilidad del jugador fila, y el segundo al del jugador columna. Además, habitualmente se representa al jugador 1 en las filas y al dos en las columnas.

| | N | C |
|---|---|---|
| N | -2,-2 | -10,-1 |
| C | -1,-10 | -5,-5 |

| | N | C |
|---|---|---|
| N | 0,-2 | -10,-1 |
| C | -1,-10 | -5,-5 |

**Parte A.** En el Dilema del Prisionero, muestre que la estrategia $N$ es dominada para ambos jugadores.

**Parte B.** Muestre que en el juego del Hermano del Fiscal, aunque $N$ no es dominada para 1, el juego es soluble por eliminación iterada de estrategias dominadas.

**Ejemplo 2. Solución de Cournot por eliminación iterada de estrategias dominadas**. En la versión sencilla del modelo de Cournot, hay dos firmas, con costos marginales $c_1$ y $c_2$. Cada una debe elegir un nivel de producción $q_i \in \mathbf{R}_+$, y enfrentan una demanda $p = a - b(q_1 + q_2)$. Así, los beneficios de la firma 1 son,

$$q_1 [a - b(q_1 + q_2) - c_1].$$

El juego en forma normal es

$$\Gamma_N = \left\{ \{1,2\}, \{\mathbf{R}_+, q_i [a - b(q_1 + q_2) - c_i]\}_{i=1}^2 \right\}.$$

La mejor respuesta del jugador 1 a cualquier cantidad $q_2$ que se imagine que va a producir la firma 2 se encuentra resolviendo el problema de elegir $q_1$ para maximizar

$$q_1 [a - b(q_1 + q_2) - c_1]$$

De las condiciones de primer orden obtenemos

$$b_1(q_2) = \begin{cases} \frac{a - bq_2 - c_1}{2b} & q_2 \leq \frac{a - c_1}{b} \\ 0 & q_2 > \frac{a - c_1}{b} \end{cases}$$

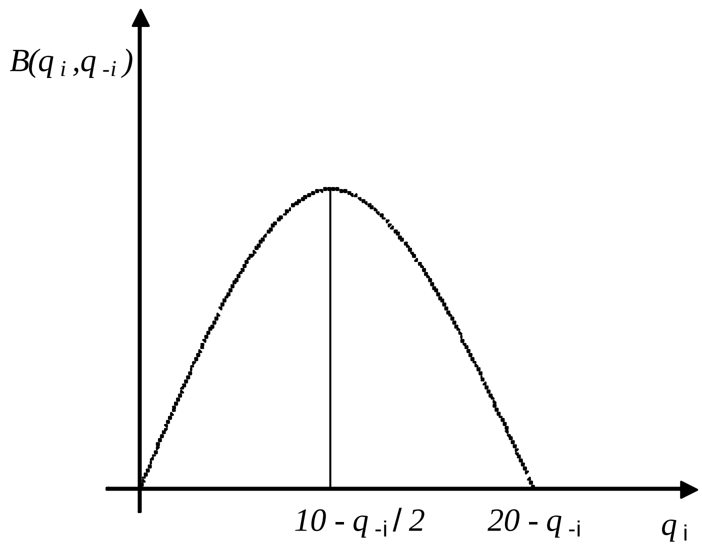
y los beneficios para la firma 1 son entonces $(a - bq_2 - c_1)^2 / 4b$. A la función $b_1(\cdot)$ se la llama **función de reacción**, o de mejor respuesta. En forma similar, obtenemos

$$b_2(q_1) = \begin{cases} \frac{a - bq_1 - c_2}{2b} & q_1 \leq \frac{a - c_2}{b} \\ 0 & q_1 > \frac{a - c_2}{b} \end{cases}$$

Supongamos que la demanda viene dada por $20 - q_1 - q_2$ y que los costos marginales son 0. Lo más obvio, es que ninguno producirá cantidades mayores que 20. Pero mirando la función de reacción, o de mejor respuesta, uno ve que aún si el otro produjera 0, no sería óptimo producir más de 10. Probablemente, si más de 10 no es óptimo para 0, no sea óptimo para ninguna cantidad $q_{-i} > 0$ del oponente. Verificamos eso ahora: 10 da un beneficio de $10(10 - q_{-i})$ mientras que producir $q_i > 10$ arrojaría unos beneficios de $B(q_i, q_{-i}) = q_i(20 - q_i - q_{-i})$, que es menor que $10(10 - q_{-i})$, pues para $q_i$ mayor que 10 es decreciente y son iguales en $q_i = 10$. Esto se puede ver de la derivada de los beneficios

$$\frac{dB}{dq_i} = 20 - 2q_i - q_{-i} < 0 \quad \text{si} \quad q_i > 10.$$

También, de la gráfica de los beneficios,




vemos que si $q_{-i}$ no será más chico que 0, $20 - q_{-i}$ no será más grande que 20, por lo que (la mitad, donde está el máximo) $10 - q_{-i}/2$ no será más grande que 10. Por lo tanto, $10 - q_{-i}/2$ queda a la izquierda de 10, y por lo tanto, si $q_i$ es mayor que 10, como la pendiente es negativa, convendrá elegir siempre 10 y no $q_i$. Quizás haya algo mejor que 10, pero seguro que 10 le "gana" a $q_i$, que es la idea de dominancia ¿Por qué elegimos 10 como la cantidad que "domina"? Porque 10 es la mejor respuesta a que el otro produzca 0.

Sabiendo que ninguno de los dos va a producir más que 10, las cantidades $q_i$ menores que 5 están dominadas por 5, pues 5 arroja unos beneficios de $5\,(15 - q_{-i})$ mientras que producir $q_i < 5$ arroja $q_i\,(20 - q_i - q_{-i})$ que para $q_i$ entre 0 y 5 y $q_{-1} < 10$, es creciente, y son iguales en $q_i = 5$. ¿Por qué elegimos 5 como la cantidad que "domina"? Porque 5 es la mejor respuesta a que el otro produzca 10.

Sabiendo que ninguno de los dos va a elegir cantidades afuera de $[5, 10]$, cantidades mayores que $7.5 = \frac{15}{2}$ están dominadas por $\frac{15}{2}$, pues esto arroja beneficios de $\frac{15}{2}\left(\frac{25}{2} - q_{-i}\right)$ y producir $q_i > \frac{15}{2}$ arroja $q_i\,(20 - q_i - q_{-i})$ que es decreciente para $q_i > \frac{15}{2}$ cuando $q_{-i} > 5$. ¿Por qué elegimos $\frac{15}{2}$ como la cantidad que "domina"? Porque $\frac{15}{2}$ es la mejor respuesta a que el otro produzca 5.

Si el otro no va a producir más de $\frac{15}{2}$, cantidades menores a $\frac{25}{4}$ están dominadas pues $q_i\,(20 - q_i - q_{-i})$ es creciente para $q_{-i} < \frac{15}{2}$ y $q_i < \frac{25}{4}$.

Continuando de esta manera, tenemos que los límites superior e inferior del intervalo van evolucionando como muestra la siguiente tabla (de cada número, ponemos en diagonal hacia abajo su mejor respuesta)

| | |
|---|---|
| $0$ | $10$ |
| $5$ | $10$ |
| $5$ | $\frac{15}{2}$ |
| $\frac{25}{4}$ | $\frac{15}{2}$ |
| $\frac{25}{4}$ | $\frac{55}{8}$ |
| $\frac{105}{16}$ | $\frac{55}{8}$ |
| $\frac{105}{16}$ | $\frac{215}{32}$ |

Los números siguen la siguiente progresión

$$f(n) = 10\left(\sum_{t=0}^{t=n}\left(-\frac{1}{2}\right)^t\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} 5$$

que converge, por supuesto, a

$$\frac{10}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{20}{3}.$$

Vemos entonces que si los empresarios son racionales, no jugarán más de 10. Si los empresarios saben que el otro es racional, no jugarán menos de 5. Si los empresarios saben que el otro sabe él es racional, no jugarán más de $15/2$. Continuando de esa manera, vemos que el la única cantidad que sobrevive la eliminación iterada de estrategias dominadas es $20/3$ (que es el equilibrio de Cournot que ya han visto en otros cursos). ∎

**Ejercicio 3. Este juego se utiliza algunas veces para mostrar que la eliminación iterada de estrategias dominadas no es una buena predicción de juego. En particular, sucede que cuando se juega este juego, lo que se observa es que la gente no juega la única estrategia que sobrevive la eliminación iterada de estrategias dominadas.** Considere el siguiente juego. Hay 10 jugadores, y el espacio de estrategias de cada uno es $S_i = [0, 100]$. El jugador que nombra el número más cercano a $1/2$ del promedio de los números nombrados por todos se gana 1 peso. Es decir, si para cada perfil de estrategias $s$ definimos

$$\overline{s} = \frac{\sum s_i}{10}$$

y la distancia de cada estrategia $s_i$ a $\overline{s}/2$ como

$$d_i(s) = \left| \frac{\overline{s}}{2} - s_i \right|$$

la utilidad de cada jugador para un perfil de estrategias $s$ es

$$u_i(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } d_i(s) = \min_j d_j(s) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

**Parte A.** Encuentre las estrategias dominadas en este juego.

**Parte B.** Encuentre las estrategias que son dominadas una vez que se eliminaron las estrategias dominadas para todos los jugadores. Es decir, encuentre las estrategias que son dominadas si se sabe que los demás jugadores no jugarán una estrategia dominada.

**Parte C.** Demuestre que si, repitiendo los pasos anteriores $n$ veces, se sabe que nadie jugará ningún número mayor que $100/2^{n-1}$, entonces las estrategias entre $100/2^{n-1}$ y $100/2^n$ están dominadas.

**Parte D.** Demuestre que el único perfil que sobrevive la eliminación iterada de estrategias dominadas es aquél en el cual todos juegan 0.

Aunque es difícil argumentar en contra de la eliminación iterada (desde un punto de vista lógico al menos), sucede que en la mayoría de los juegos de interés no hay estrategias dominadas. Por lo tanto, el concepto de equilibrio "se jugará algún perfil de estrategias que sobreviva la eliminación iterada de estrategias dominadas" no es muy útil: en la mayoría de los casos no elimina ninguna estrategia. Es decir, en muchos casos no arroja predicciones concretas (hay multiplicidad de equilibrios).

La gran contribución de John Nash a la teoría de juegos fue "inventar" un concepto de equilibrio que es "razonable" y que arroja una predicción concreta en una gran variedad de contextos. Un perfil de estrategias $s \in S = S_1 \times ... \times S_I$ es un **equilibrio de Nash** en el juego $\Gamma_N = \left[ I, \{S_i\}_1^I, \{u_i\}_1^I \right]$ si para todo $i$,

$$u_i(s) \geq u_i(s_i', s_{-i}) \text{ para todo } s_i' \in S_i.$$

Es decir, un perfil de estrategias $s$ es un equilibrio de Nash si, suponiendo que los demás van a jugar $s_{-i} = (s_1, s_2, ..., s_{i-1}, s_{i+1}, ..., s_I)$, el jugador $i$ maximiza su utilidad jugando $s_i$. Visto de otra forma, un perfil $s$ es un equilibrio de Nash si no hay ningún jugador $i$ que quiera desviarse de $s_i$, dado lo que están haciendo los demás: no existe $i$ tal que para algún $s_i'$, $u_i(s_i', s_{-i}) > u_i(s)$.

El siguiente ejercicio muestra que siempre que la eliminación iterada de estrategias dominadas arroja una predicción única (el "mejor de los mundos" para alguien que desee utilizar ese concepto de equilibrio), esa predicción también será un equilibrio de Nash. Es decir, siempre que la eliminación iterada "sirve", también sirve el equilibrio de Nash.

**Ejercicio 4.** Demuestre que si en un juego (con una cantidad finita de estrategias) hay un único perfil de estrategias que sobrevive la eliminación iterada de estrategias dominadas (es decir, el juego es soluble por eliminación iterada de estrategias dominadas) entonces ese perfil de estrategias es un equilibrio de Nash.

**Ejercicio 5**. Los jugadores Juan e Inés van a jugar un juego. La naturaleza ha elegido con probabilidad $\frac{1}{2}$ cada una de las siguientes matrices de pagos

| Juan \ Ines | I | D |
|---|---|---|
| A | 11,-1 | 1,1 |
| B | -1,11 | 1,1 |

| Juan \ Ines | I | D |
|---|---|---|
| A | -1,11 | 1,1 |
| B | 11,-1 | 1,1 |

**Parte A** ¿Cuáles son los equilibrios de cada una de las matrices de pagos?

**Parte B** Escriba la matriz de pagos que resulta si nadie sabe cuál es la matriz elegida por la naturaleza. Encuentre el o los equilibrios de Nash para esa matriz de pagos.

**Parte C** Si a Juan se le diera la opción de ver cuál matriz ha sido elegida (y que Inés sepa si Juan observó eso) ¿Debería Juan averiguar qué matriz ha sido elegida?

**Problem 3.A** Consider the following game. What is the equilibrium payoff of player I?

| I \ II | Left | Right |
|---|---|---|
| Top | 0 , 1 | 2 , 2 |

**Part B.** Consider now the following game, in which Player I has more options (more choices, more strategies, more possibilities). What is the equilibrium payoff of Player I? Is it larger or smaller than in Part A?

| I \ II | Left | Right |
|---|---|---|
| Top | 0 , 1 | 2 , 2 |
| Bottom | 1 , 2 | 3 , -1 |

**Part C.** Could the reversal between Parts A and B happen when there is only one decision maker (i.e. can more choices make you worse off in a single agent decision problem?)

**Part D.** Discribe (in no more than 5 lines) a situation in which a monopolist would be better off if he had less options.

**Ejemplo 6. El equilibrio de Nash en el juego de Cournot.** Para encontrar el equilibrio de Nash en este juego, debemos encontrar un par $(q_1, q_2)$ tal que $q_1$ sea la mejor respuesta a $q_2$, y $q_2$ sea la mejor respuesta a $q_1$. Es decir, $(q_1, q_2) = [b_1(q_2), b_2(q_1)]$, o, lo que es lo mismo,

$$(q_1, q_2) = [b_1(b_2(q_1)), b_2(b_1(q_2))].$$

Por lo tanto, poniendo

$$q_1 = \frac{1}{2} \frac{a - b\frac{1}{2}\frac{a-bq_1-c_2}{b} - c_1}{b}$$

y operando obtenemos $q_1 = (a + c_2 - 2c_1)/3b$. En forma similar, $q_2 = (a + c_1 - 2c_2)/3b$. Cuando crece el costo marginal de la firma 1, la cantidad producida en equilibrio de la firma 1 se reduce, y la de la firma 2 aumenta (no es que eso sea muy importante). Los beneficios de la firma 1 en equilibrio son $(a - 2c_1 + c_2)^2/9b$. ■

**Ejercicio 7.** Cada uno de $I$ heladeros debe decidir en qué parte del intervalo $[0, 1]$ colocar su carrito. En cada punto $x$ del intervalo, hay una densidad, o "cantidad", $f(x) > 0$ de individuos. Cada heladero le venderá a un individuo si y sólo si él es el heladero más cercano: cada individuo comprará un helado seguro, y se lo compará al heladero que esté más cerca. Si $k$ heladeros coinciden en su ubicación, cada uno se llevará $1/k$ de los consumidores que atraiga esa ubicación. Los heladeros quiere maximizar sus ganancias, y tienen un costo de 0 por cada helado.

**Parte A.** Escriba este juego en forma normal.

**Parte B.** Encuentre el único equilibrio cuando $I = 2$.

**Parte C.** Muestre que no hay equilibrio cuando $I = 3$.

**Ejercicio 8. Remates.** Un objeto será asignado a uno de $I$ jugadores a cambio de un pago. La valuación, en términos monetarios, del objeto por parte del individuo $i$ es $v_i$ con $v_1 > v_2 > ... > v_I > 0$, con $v_i$ conocidos. El mecanismo para asignar el objeto es un remate con sobre cerrado: los jugadores hacen ofertas (números mayores o iguales que 0) y el objeto es asignado al jugador con el "nombre" más chico, de entre los que presentaron la oferta más grande, y éste debe pagar un precio.

**Parte A. Remate de Primer Precio.** En este tipo de remate el ganador debe pagar el precio que ofreció. Escriba el remate de primer precio como un juego en forma normal.

**Parte B.** Muestre que en el remate de la Parte A, en cualquier equilibrio, el jugador 1 se lleva el objeto.

**Parte C. Remate de Segundo Precio.** En este tipo de remate el ganador debe pagar el precio más alto dentro de los que no se llevaron el objeto, de tal manera que si nadie ofreció el mismo precio que el ganador, el ganador paga el segundo precio más alto. Escriba el remate de segundo precio como un juego en forma normal.

**Parte D.** Muestre que en un remate de segundo precio hacer una oferta de $v_i$ es una estrategia débilmente dominante para el jugador $i$ : su utilidad cuando ofrece $v_i$ es débilmente mayor que su utilidad cuando ofrece cualquier otra cosa, independientemente de las acciones de los demás, y en algunos casos es estrictamente mejor.

**Parte E.** Muestre que en el remate de segundo precio, para cada $i = 2, ..., I$ hay un equilibrio en el cual el jugador $i$ gana el objeto.

**Ejercicio 9. Fudenberg y Tirole.** Considere los siguientes juegos.

| $s_1$ \ $s_2$ | I | D |
|---|---|---|
| A | 1,3 | 4,1 |
| B | 0,2 | 3,4 |

| $s_1$ \ $s_2$ | I | D |
|---|---|---|
| A | -1,3 | 2,1 |
| B | 0,2 | 3,4 |

**Parte A.** Demuestre que el panel de la izquierda se puede resolver por eliminación iterada de estrategias dominadas, y encuentre el único equilibrio. ¿Qué utilidad recibe el jugador 1 en equilibrio?

**Parte B.** Muestre que el juego en el panel de la derecha (en el cual hemos reducido las utilidades para el jugador 1 de jugar A) también se puede resolver por eliminación iterada de estrategias dominadas. Encuentre el único equilibrio de este juego. ¿Qué utilidad recibe el jugador 1 en equilibrio? Explique por qué una reducción en la utilidad de jugar A beneficia al jugador 1.

**Ejercicio 10.** Sea $I = \{1, 2\}$ el conjunto de jugadores; $S_i = \mathbf{R}_+$ para $i = 1, 2$ los conjuntos de estrategias y para $k > 1$,

$$u_1(s) = k \log(e_1 + e_2) - e_1 \quad \text{y} \quad u_2(s) = \log(e_1 + e_2) - e_2,$$

para $e_i \in S_i$, las funciones de utilidad. El juego representa la situación de dos jugadores que alquilan un apartamento, y deben usar su esfuerzo para limpiar. La higiene del apartamento es el logaritmo de la suma de los esfuerzos, y a cada jugador le disgusta limpiar. Al jugador 1 le importa más la higiene que al jugador 2.

**Parte A.** Encuentre las funciones de reacción de ambos jugadores. Tenga cuidado con las esquinas. En particular, ¿cuál es la mejor respuesta de, por ejemplo, el jugador 2 si el jugador 1 decide poner muchísimo esfuerzo en limpiar?

**Parte B.** Dibuje en el mismo par de ejes ambas curvas de reacción, y encuentre el equilibrio gráficamente.

**Parte C.** Demuestre que el equilibrio encontrado es único.

**Ejercicio 11.** Sean: $I = \{1, ..., n\}$ un conjunto de jugadores; $S_i = \mathbf{R}_+$ para $i = 1, ..., n$ los conjuntos de estrategias y

$$u_i(s) = 2\left(\sum_{j=1}^{n} s_j\right) + \beta\left(\prod_{j=1}^{n} s_j\right) - s_i^2$$

las funciones de utilidad. Recordamos que una estrategia $s_i$ **domina estrictamente** a una estrategia $\widetilde{s}_i$ si para todo $s_{-i}$ $u(s) > u(\widetilde{s}_i, s_{-i})$. Una estrategia $s_i$ es estrictamente dominante si domina estrictamente a todas las demás estrategias $\widetilde{s}_i$.

**Parte A.** Suponga que $\beta = 0$, y encuentre la estrategia estrictamente dominante.

**Parte B.** Demuestre que la estrategia en la Parte A domina estrictamente a todas las demás.

**Parte C.** Demuestre que si $\beta > 0$ no existe una estrategia estrictamente dominante.

**Ejercicio 12. Un equilibrio "estúpido".** Considere el siguiente juego. Hay 2 jugadores, y el espacio de estrategias para cada uno es $S_i = [0, 100]$. Cada uno debe nombrar un número, y la utilidad de ambos es el producto de los dos números. Es decir, $u_i(s) = s_1 s_2$.

**Parte A.** Encuentre los dos equilibrios de este juego.

**Parte B.** Encuentre todas las estrategias que son dominadas. Si dice que alguna estrategia es dominada, demuestre su respuesta.

**Parte C.** Una estrategia $s_i$ es **dominante** si domina a todas las $s_i' \in S_i$. ¿Hay alguna estrategia dominante? Demuestre su respuesta.

**Parte D.** Si asumimos que los jugadores jugarán un equilibrio, pero uno que nadie use estrategias dominadas, ¿Qué jugarán?

**Ejercicio 13**. Considere el modelo de Cournot con 2 jugadores, demanda $a - b(q_1 + q_2)$ y costos marginales iguales a $c$. Suponga que las firmas deciden coludirse y producir en iguales cantidades, de tal manera de maximizar los beneficios conjuntos (es decir, se transforman en un monopolista). Calcule el nivel de producto de monopolio (observe que es menor que el del equilibrio de Cournot). Suponga ahora que la firma 1 decide violar el acuerdo, y la 2 no. ¿Cuánto producirá la firma 1, y cuáles serán los beneficios de ambas firmas?

**Ejercicio 14.** El siguiente juego es una variante del juego de Cournot, con $I$ jugadores

$$\Gamma_N = \left\{ \{1, 2, ..., I\}, \{\mathbf{R}_+\}_{i=1}^I, \left\{ q_i \left[ a - b \left( \sum_{i=1}^I q_i \right) - c \right] \right\}_{i=1}^I \right\}.$$

**Parte A.** Encuentre las funciones de reacción (sea cuidadoso con las condiciones de segundo orden, y con la condición de borde $q_i = 0$).

**Parte B.** Encuentre el equilibrio de Nash.

**Parte C.** ¿Qué pasa con el precio de equilibrio cuando $I \to \infty$?

## Existencia del equilibrio de Nash

Lo que aparece en estas notas es una versión ampliada de la demostración de existencia en el trabajo de Geanakoplos, "Nash and Walras Equilibrium via Brouwer," que pueden encontrar en

www.cowles.yale.edu

en la parte de los discussion papers.

Hasta ahora, en todos los ejemplos que hemos visto, siempre existía al menos un equilibrio de Nash. Puede suceder, sin embargo, que en un cierto juego no exista un equilibrio. El siguiente ejemplo, matching pennies, es uno de ellos.

**Ejemplo 15.** En este juego, dos jugadores deben apoyar al mismo tiempo una moneda en una mesa. Si coinciden en "ambas cara" o "ambas número", el jugador 1 se queda con las monedas (gana \$1). Si no coinciden, gana 2. Formalmente, el juego es: $I = \{1, 2\}$; estrategias $S_i = \{C, N\}$ $i = 1, 2$; utilidad de 1, $u_1(s, s) = -u_1(s, t) = 1$ para $s, t \in S_i$, $s \neq t$; utilidad de 2, $u_2 = -u_1$. En la siguiente matriz se representa el juego, y se han eliminado los pagos del jugador 2, pues son el opuesto de los de 1 :

| | | Jugador 2 | |
|---|---|---|---|
| | | Cara | Número |
| Jugador 1 | Cara | 1 | -1 |
| | Número | -1 | 1 |

Es bastante fácil ver que este juego no tiene un equilibrio: para cada perfil de estrategias $(s_1, s_2)$, si $s_1 = s_2$, el jugador 2 quiere jugar su otra estrategia (es decir, no se cumple que $u_2(s) \geq u_2(s_1, t)$ donde $t \neq s_2$); si $s_1 \neq s_2$, el jugador 1 querrá cambiar su estrategia. ■

El ejemplo anterior muestra que vale la pena preguntarse si hay alguna clase general de juegos en los cuales uno pueda asegurar que existirá un equilibrio. En particular, muchas veces nos planteamos modelos, y nos interesa saber qué propiedades tiene el equilibrio. Por ejemplo, en el modelo de Cournot, queremos saber si un aumento en los costos aumenta el precio de equilibrio. Si no podemos calcular el equilibrio explícitamente, muchas veces podemos decir "si hay un equilibrio, cuando sube el costo, sube el precio". El problema es que podemos estar hablando sobre algo que no existe. Entonces lo que tenermos que hacer es asegurarnos que existe un equilibrio, y a ahí si, decir "en cualquier equilibrio, cada vez que suba el costo, subirá el precio".

Antes de pasar al enunciado y demostración del teorema de existencia del equilibrio de Nash, necesitamos algunas definiciones. Para $X \subseteq \mathbf{R}^m$ para algún $m$, diremos que $X$ es **convexo** si para todo $x, y \in X$, y $\alpha \in [0,1]$, $\alpha x + (1-\alpha) y \in X$. Para una función $f : X \to \mathbf{R}$, donde $X$ es un conjunto convexo, diremos que $f$ es:

**cóncava** si para todo $x, y \in X$, y $\alpha \in [0,1]$

$$f(\alpha x + (1-\alpha) y) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y).$$

**estrictamente cóncava** si para todo $x, y \in X$, $x \neq y$ y $\alpha \in (0,1)$

$$f(\alpha x + (1-\alpha) y) > \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y).$$

**estrictamente convexa** si para todo $x, y \in X$, $x \neq y$ y $\alpha \in (0,1)$

$$f(\alpha x + (1-\alpha) y) < \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y).$$

La siguiente es una propiedad útil para verificar la concavidad o convexidad de funciones. No la demostraremos.

**Lema.** Para $X \subseteq \mathbf{R}$, sea $f : X \to \mathbf{R}$ una función cuya derivada segunda existe para todo $x \in X$. La función $f$ es cóncava si y sólo si $f"(x) \leq 0$ para todo $x \in X$.

**Ejercicio 16** Demostrar que si una función $g : S \to \mathbf{R}$, para $S$ convexo y $S \subseteq \mathbf{R}^l$, es tal que $g(s) = u(s) - n(s)$ para una una función cóncava $u$ y una función estrictamente convexa $n$, entonces $g$ es estrictamente cóncava.

**Ejercicio 17.** Demostrar que si una función $g : S \to \mathbf{R}$, para $S$ convexo y $S \subseteq \mathbf{R}^l$, es estrictamente cóncava, entonces existe a lo sumo un único $s^*$ tal que

$$s^* = \arg\max_{s \in S} g(s).$$

**Ejercicio 18.** Demostrar que para $\overline{s} \in \mathbf{R}^l$ para algún $l$, $n(s) = \sum_1^l (s_j - \overline{s}_j)^2$ es estrictamente convexa.

**Ejercicio 19.** Demostrar que si $S_i$ contenido en $\mathbf{R}^{l_i}$ para algún $l_i$ es cerrado, **acotado** (existe $c > 0$ tal que para todo $s_i \in S_i$ se cumple que $\|s_i\| < c$) y convexo para todo $i$, entonces $S = S_1 \times S_2 ... \times S_I$ es cerrado, acotado y convexo.

Para $f : X \to \mathbf{R}$ con $X \subseteq \mathbf{R}^l$ $f$ es **continua** en $x \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta_{\varepsilon,x} > 0$ tal que

$$\|x - x'\| < \delta_{\varepsilon,x} \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Decimos que la función $f$ es continua si es continua para todo $x$.

**Ejercicio 20.** Suponga que para $i = 1, 2, ..., I$, $G_i$ es una función de $S = S_1 \times S_2 ... \times S_I$ en $S_i$, para $S_i$ contenido en $\mathbf{R}^{l_i}$ para algún $l_i$. Sea $G : S \to S$ definida por $G(s) = (G_1(s), G_2(s), ..., G_I(s))$.

**Parte A.** Muestre que para todo $x, y \in S$, $\|G(x) - G(y)\| = \sqrt{\|G_1(x) - G_1(y)\|^2 + ... + \|G_I(x) - G_I(y)\|^2}$.

**Parte B.** Usando la Parte A, muestre que si cada $G_i$ es continua, entonces $G$ es continua. La idea es sencilla: si se logra que cada $G_i(x)$ esté cerca de $G_i(y)$, entonces $G(x)$ estará cerca de $G(y)$.

**Ejercicio 21**. Mostrar que una función $f : X \to \mathbf{R}$, $X \subseteq \mathbf{R}^l$ es continua en $x$ si y sólo si para toda secuencia $\{x_n\}$ con $x_n \to x$, se cumple que $f(x_n) \to f(x)$ (Pista: cuando asuma que $f$ no es continua en algún $x$ para demostrar que existe una secuencia $\{x_n\}$ tal que $x_n \to x$, pero no se cumple que $f(x_n) \to f(x)$, tome $x_n$ tal que $\|x_n - x\| < \delta_n = 1/n$).

El siguiente teorema es un caso particular de lo que se llama el Teorema del Máximo.

**Teorema del Máximo**. Sean $X \subseteq \mathbf{R}^l$; $Y \subseteq \mathbf{R}^m$; $f : X \times Y \to \mathbf{R}$. Si $f$ es continua y $Y$ es cerrado y acotado,

$$h(x) = \max_{y \in Y} f(x, y)$$

es una función, y si para todo $x$,

$$G(x) = \{y \in Y : f(x, y) = h(x)\} = \arg\max_{y \in Y} f(x, y)$$

es una función, entonces es continua.

**Prueba**. Como toda función continua en un conjunto cerrado y acotado tiene un máximo, para cada $x$, $h(x)$ está bien definida (en el sentido que el máximo existe, y es un número, y no por ejemplo, $\infty$).

Demostraremos ahora que si $G$ es una función, entonces es continua: que si $x_n \to x$, $G(x_n) \to G(x)$. Como $Y$ es cerrado y acotado, existe una subsecuencia de $\{G(x_n)\}$ que converge a algún $y \in Y$. Por simplicidad, continuamos llamando $\{G(x_n)\}$ a dicha subsecuencia. Queremos demostrar que $y = G(x)$. Para ello, tomamos un $z \in Y$ cualquiera y vemos que por definición de $G$,

$$f(x_n, G(x_n)) \geq f(x_n, z). \tag{1}$$

Para demostrar que $y = G(x)$, debemos mostrar que $f(x, y) \geq f(x, z)$, por lo que supongamos que

$$f(x, y) < f(x, z)$$

para llegar a una contradicción (que $f(x, y) \geq f(x, z)$ es "obvio" intuitivamente, si tomamos límites en (1) y usamos la continuidad de $f$, pero lo vamos a hacer formalmente). Definamos

$$\varepsilon = \frac{f(x, z) - f(x, y)}{2} > 0.$$

Como $f$ es continua, existen $\delta_y$ y $\delta_z$ tales que

$$\begin{gathered} d((x_n, G(x_n)), (x, y)) < \delta_y \Rightarrow |f(x_n, G(x_n)) - f(x, y)| < \varepsilon \Rightarrow f(x_n, G(x_n)) < f(x, y) + \varepsilon \\ d((x_n, z), (x, z)) < \delta_z \Rightarrow |f(x_n, z) - f(x, z)| < \varepsilon \Rightarrow f(x_n, z) > f(x, z) - \varepsilon \end{gathered}$$

Usando estas dos ecuaciones y la definición de $\varepsilon$, tenemos que

$$\begin{aligned} f(x_n, G(x_n)) &< f(x, y) + \frac{f(x, z) - f(x, y)}{2} = \frac{f(x, z) + f(x, y)}{2} \\ &= f(x, z) - \frac{f(x, z) - f(x, y)}{2} = f(x, z) - \varepsilon < f(x_n, z) \end{aligned}$$

lo que contradice la ecuación (1). Para completar la demostración, debemos mostrar que existen $(x_n, G(x_n))$ y $(x_n, z)$ tales que $d((x_n, G(x_n)), (x, y)) < \delta_y$ y $d((x_n, z), (x, z)) < \delta_z$. Pero eso se deduce del hecho que $(x_n, G(x_n)) \to (x, y)$ y $(x_n, z) \to (x, z)$. ■

**Ejemplo 22.** Sea $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida por $f(x,y) = -y^2 + 2xy - 4$. En este ejemplo $X = Y = \mathbf{R}$. Para cada $x$, el $y$ que maximiza $f$ es $y = x$. Por lo tanto,

$$h(x) = \max_{y \in Y} f(x,y) = x^2 - 4.$$

Para cada $x$, el $y$ que maximiza $f$ es único, por lo que $G(x)$ es una función. El teorema del máximo nos dice que debe ser continua. En efecto, vemos que $G(x) = x$ es continua. ■

**Ejercicio 23. Parte A**. Sean $X = Y = [0,1]$ y $f(x,y) = -y^2 + xy$. Encuentre $G(x)$ (observe que es continua).

**Parte B**. Repita la Parte A para $f(x,y) = -\left(y + \frac{x}{y}\right)$.

**Teorema de punto fijo de Brouwer.** Sea $S \subseteq \mathbf{R}^n$ para algún $n$, un conjunto cerrado, acotado y convexo, y sea $G : S \to S$ una función continua. Entonces $G$ tiene un punto fijo, es decir, existe un $s$ tal que $G(s) = s$.

Para ver que cada uno de los supuestos cumple algún rol relevante vemos que si no pedimos que $S$ sea cerrado, $f : (0,1) \to (0,1)$ definida por

$$f(x) = \frac{1+x}{2}$$

no tiene punto fijo. Si no pedimos que $S$ sea acotado, tenemos que $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ definida por $f(x) = x + 1$ tampoco tiene punto fijo. Si no requerimos que $S$ sea convexo, vemos que $f : \{0,1\} \to \{0,1\}$ definida por $f(x) = 1 - x$ tampoco tiene punto fijo. Finalmente, si $G$ es discontinua, tenemos que $G : [0,1] \to [0,1]$ definida por

$$G(x) = \begin{cases} 1 & x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

tampoco tiene punto fijo.

Ahora enunciamos y demostramos el resultado principal de estas notas. Sea $\Gamma = \left[I, \{S_i, u_i\}_{i=1}^I\right]$ un juego entre $I$ jugadores, en el cual $S_i$, el espacio de las estrategias para el jugador $i$, es un conjunto cerrado, acotado y convexo contenido en $\mathbf{R}^{l_i}$ para algún $l_i$. Asumamos también que $u_i$ es continua para todo $i$. Diremos que $\Gamma$ es un **juego cóncavo** si para todo $i$, y todo $s_{-i} \in S_{-i} = \Pi_{j \neq i} S_j$, $u_i(s_i, s_{-i})$ es cóncava en $s_i$ : para todo $s_i, \widetilde{s}_i \in S_i$ y $\alpha \in [0,1]$ tenemos que

$$u_i(\alpha s_i + (1-\alpha)\widetilde{s}_i, s_{-i}) \geq \alpha u_i(s_i, s_{-i}) + (1-\alpha) u_i(\widetilde{s}_i, s_{-i}).$$

**Teorema (Existencia del equilibrio de Nash)**. Todo juego cóncavo tiene un equilibrio de Nash.

**Prueba**. Definamos $G_i : S \to S_i$ mediante

$$G_i(\overline{s_1}, \overline{s_2}, ..., \overline{s_I}) = \arg\max_{s_i \in S_i} \left[u_i(s_i, \overline{s_{-i}}) - \|s_i - \overline{s_i}\|^2\right],$$

donde $\|s\|^2 = \sum_1^l s_j^2$ para $s \in \mathbf{R}^l$. Esta función nos da, para un perfil de estrategias $\overline{s}$, la "mejor respuesta" del jugador $i$. No es la mejor respuesta "en serio" porque a la utilidad se le resta un término de distancia entre la estrategia "candidata" $s_i$ y aquella con la que "se empezó" $\overline{s_i}$. Es decir, se trata de mejorar la utilidad, pero sin moverse demasiado: se penalizan los movimientos del status quo $\overline{s_i}$.

**Paso 1**: demostrar que $G_i$ es en efecto una función. Para ello debemos demostrar que para cada $\overline{s}$ existe un y sólo un $s_i$ que maximiza $u_i(s_i, \overline{s_{-i}}) - \|s_i - \overline{s_i}\|^2$. La existencia de al menos uno se deduce del hecho que $u_i(s_i, \overline{s_{-i}}) - \|s_i - \overline{s_i}\|^2$ es una función continua de $s_i$, y que $S_i$ es cerrado y acotado. Que es sólo uno se deduce del hecho que $u_i$ es cóncava, y $\|s_i - \overline{s_i}\|^2$ es estrictamente convexa en $s_i$ (ver ejercicios 16, 17 y 18).

**Paso 2**: demostrar que $G_i$ es continua para todo $i$. Para hacer esto, usaremos el Teorema del Máximo. Tenemos que $u_i(s_i, \overline{s_{-i}}) - \|s_i - \overline{s_i}\|^2$ es continua en $(s_i, \overline{s})$ (aca $s_i$ es el equivalente de $x$ en el Teorema del Máximo, y $\overline{s}$ el equivalente de $y$), y también que $S$ es cerrado y acotado. También sabemos por el paso 1 que $G_i$ es una función. Entonces, tenemos que $G_i$ es continua.

**Paso 3**: demostrar que $G : S \to S$ definida por $G(s) = (G_1(s), G_2(s), ..., G_I(s))$ tiene un punto fijo. Esto se deduce inmediatamente del Ejercicio 20 y del teorema de punto fijo de Brouwer, pues se cumplen todas sus hipótesis.

**Paso 4**: demostrar que si $\overline{s}$ es un punto fijo de $G$, entonces $\overline{s}$ es un equilibrio de Nash. Supongamos que no lo es, es decir, que existe algún $i$, y alguna estrategia $s_i$ tal que $u_i(s_i, \overline{s}_{-i}) > u_i(\overline{s})$. En ese caso tenemos que para todo $\varepsilon \in (0,1)$

$$\begin{aligned} u_i(\varepsilon s_i + (1-\varepsilon)\overline{s}_i, \overline{s}_{-i}) - \|\varepsilon s_i + (1-\varepsilon)\overline{s}_i - \overline{s}_i\|^2 &\geq \varepsilon u_i(s_i, \overline{s}_{-i}) + (1-\varepsilon) u_i(\overline{s}_i, \overline{s}_{-i}) - \|\varepsilon s_i - \varepsilon \overline{s}_i\|^2 \\ &= u_i(\overline{s}_i, \overline{s_{-i}}) + \varepsilon [u_i(s_i, \overline{s}_{-i}) - u_i(\overline{s}_i, \overline{s}_{-i})] - \varepsilon^2 \|s_i - \overline{s}_i\|^2 . \end{aligned}$$

Por lo tanto, si

$$\varepsilon < \frac{u_i(s_i, \overline{s}_{-i}) - u_i(\overline{s}_i, \overline{s}_{-i})}{\|s_i - \overline{s}_i\|^2}$$

obtenemos que

$$u_i(\varepsilon s_i + (1-\varepsilon)\overline{s}_i, \overline{s}_{-i}) - \|\varepsilon s_i + (1-\varepsilon)\overline{s}_i - \overline{s}_i\|^2 > u_i(\overline{s}_i, \overline{s}_{-i}) = u_i(\overline{s_i}, \overline{s}_{-i}) - \|\overline{s_i} - \overline{s_i}\|^2 \tag{2}$$

lo que contradice que $\overline{s}$ es un punto fijo de $G$. Si lo fuera, tendríamos $G(\overline{s}) = \overline{s}$, y por tanto, $G_i(\overline{s}) = \overline{s}_i$, o lo que es lo mismo,

$$\begin{aligned} G_i(\overline{s}) &= \arg\max_{s_i \in S_i} \left[ u_i(s_i, \overline{s_{-i}}) - \|s_i - \overline{s_i}\|^2 \right] = \overline{s}_i \Leftrightarrow \\ u_i(\overline{s}_i, \overline{s_{-i}}) - \|\overline{s}_i - \overline{s_i}\|^2 &\geq u_i(\widetilde{s}_i, \overline{s_{-i}}) - \|\widetilde{s}_i - \overline{s_i}\|^2 \text{ para todo } \widetilde{s}_i \in S_i. \end{aligned}$$

En particular, debemos tener que para $\widetilde{s}_i = \varepsilon s_i + (1-\varepsilon)\overline{s}_i$

$$u_i(\overline{s}_i, \overline{s_{-i}}) - \|\overline{s}_i - \overline{s_i}\|^2 \geq u_i(\varepsilon s_i + (1-\varepsilon)\overline{s}_i, \overline{s_{-i}}) - \|\varepsilon s_i + (1-\varepsilon)\overline{s}_i - \overline{s_i}\|^2$$

lo que contradice la ecuación (2). ■

La función $G$ utilizada en la demostración del teorema es un sustituto de la "función" que se usa habitualmente para encontrar equilibrios, que es la "función" de mejor respuesta. Definimos

$$B_i(s) = \arg\max_{x \in S_i} u(x, s_{-i})$$

como el conjunto de las mejores respuestas de $i$ cuando los demás juegan $s_{-i}$. Si para cada $s_{-i}$ la mejor respuesta es única, $B_i$ es una función. Si para algún $s_{-i}$ hay dos estrategias para el jugador $i$ que son óptimas, entonces $B_i$ ya no es una función, sino una correspondencia. Las correspondencias le asignan a cada elemento de su dominio, un subconjunto del codominio. $B_i$ es la **correspondencia de mejor respuesta**.

Definimos ahora la **correspondencia de mejor respuesta agregada** $B : S \rightrightarrows S$ (esa es la notación para una correspondencia) mediante

$$B(s) = (B_1(s), ..., B_I(s)).$$

La utilidad de esta correspondencia es que los los puntos fijos de esta correspondencia son los equilibrios de Nash del juego. Un punto fijo para una correspondencia es un $s$ tal que $s \in B(s)$. En el caso particular de la correspondencia de mejor respuesta agregada, si $s$ es un punto fijo, quiere decir que para cada $i$, $s_i$ es una de las mejores respuestas cuando los demás juegan $s_{-i}$. Vemos entonces lo que decíamos antes: los puntos fijos de $B$ son los equilibrios de Nash.

Otra forma útil de trabajar con las mejores respuestas es la siguiente. Asumamos que $B_i$ es una función (y no una correspondencia). Si $B_1(B_2(s_1)) = s_1$, entonces $(s_1, B(s_1))$ es un equilibrio de Nash. Esto es lo que se hace en general para resolver el juego de Cournot. Se iguala la función de mejor respuesta del jugador 1 a $q_1$ y se sustituye la mejor respuesta del jugador 2 en el lugar de $q_2$. Despejando se encuentra $q_1$.

**Ejercicio 24**. Para los siguientes juegos

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \left[ \{1,2\}, \{\mathbf{R}_+, u_i(s_1, s_2) = s_1 s_2\}_1^2 \right] \\ \Gamma_2 &= \left[ \{1,2\}, \{\mathbf{R}_{++}, u_i(s_1, s_2) = s_1 s_2\}_1^2 \right] \end{aligned}$$

determine:

**Parte A**. Si existe o no un equilibrio de Nash.

**Parte B.** Si se aplica el teorema de existencia de equilibrio visto en clase.

**Ejercicio 25**. Existencia de un equilibrio de Nash en un modelo de Cournot. Hay dos firmas, con costos marginales $c$. Cada una debe elegir un nivel de producción $q_i \in [0,1]$, y enfrentan una demanda continua $p(Q)$ tal que $p' < 0$ y $p'' < 0$, donde $Q = q_1 + q_2$. Los beneficios de la firma $i$ son,

$$q_i \left[p\left(q_1 + q_2\right) - c\right].$$

El juego en forma normal es

$$\Gamma_N = \left\{\{1,2\}, \{[0,1], q_i \left[p\left(q_1 + q_2\right) - c\right]\}_{i=1}^{2}\right\}.$$

Demostrar que existe un equilibrio de Nash.

**Ejercicio 26. Bertrand.** Hay dos jugadores, con espacios de estrategias $S_1 = S_2 = [0,10]$. Las funciones de utilidad son

$$u_i(s) = \begin{cases} s_i(20 - s_i) & s_i < s_j \\ \frac{1}{2} s_i (20 - s_i) & s_i = s_j \\ 0 & s_i > s_j \end{cases}.$$

Este juego corresponde a una situación en que las firmas eligen un precio (esa es su estrategia) y la firma que elige el precio menor enfrenta toda la demanda del mercado, que está dada por $q = 20 - p$ (y los costos marginales son 0).

**Parte A.** Muestre que $s_i = 0$ es una estrategia dominada.

**Parte B.** Muestre que ningún precio mayor que 0 es dominado.

**Parte C.** Encuentre el único equilibrio (encuentre un equilibrio y muestre que no hay ningún otro).

**Ejercicio 27.** Decimos que una estrategia $s_i$ **domina débilmente** a otra $s_i'$ si para cualquier combinación de las estrategias de los demás, a $s_i$ le va débilmente mejor que a $s_i'$: $u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i})$ para todo $s_{-i} \in S_{-i}$. Una estrategia es **débilmente dominante** si domina débilmente a todas las demás estrategias $s_i'$ del jugador $i$. Demuestre que si un jugador tiene dos estrategias débilmente dominantes $s_i$ y $s_i'$, para cualquier perfil $s_{-i}$ de estrategias de los demás, $u_i(s_i, s_{-i}) = u_i(s_i', s_{-i})$.

**Ejercicio 28.** En una planta nuclear, para que haya un accidente, deben fallar una máquina (que falla con probabilidad $p_m$) y cada uno de $n$ individuos. La probabilidad de que cada individuo falle, si invierte un esfuerzo de $e$, es $p = (1-e)^a$ para $a > 1$. La utilidad esperada del individuo $i$ para un perfil de esfuerzos $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ es

$$u_i(e) = -p_m D \prod_{j=1}^{j=n} p(e_j) - e_i$$

donde $D$ es el daño.

**Parte A.** Encuentre el único equilibrio simétrico (todos juegan lo mismo) de este juego.

**Parte B.** Muestre que cuando $n$ sube, sube la probabilidad total de accidente en el equilibrio.

**Ejercicio 29.** Hay dos firmas, cada una puede elegir un nivel de producto $q \in \mathbf{R}_+$, la demanda viene dada por $p = 10 - q_1 - q_2$ y los costos son $c(q) = q^2$.

**Parte A.** Encuentre las funciones de reacción de las firmas.

**Parte B.** Encuentre el equilibrio de Nash.

**Ejercicio 30.** Hay 3 firmas, cada una puede elegir un nivel de producto $q \in \mathbf{R}_+$, la demanda viene dada por $p = 120 - 2Q$ y los costos son $c_i(q) = 10 + iq^2$.
**Parte A.** Encuentre las funciones de reacción de las firmas.

**Parte B.** Encuentre el equilibrio de Nash.

**Ejercicio 31.** Hay dos individuos $i = 1, 2$ que deben ejercer un nivel de esfuerzo $e_i \in \mathbf{R}_+$. El individuo no quiere esforzarse ni más ni menos que el otro (un cierto sentido de justicia), por lo que su utilidad contiene un término $-(e_1 - e_2)^2$. Por otro lado, el esfuerzo del otro hace más productivo mi esfuerzo, por lo que las utilidades también contienen el término $e_1 e_2$. Finalmente, hacer un esfuerzo $e_i$ le cuesta $e_i$ al individuo $i$. Por tanto las utilidades son $u_1(e_1, e_2) = e_1 e_2 - (e_1 - e_2)^2 - e_1$ y $u_2(e_1, e_2) = e_1 e_2 - (e_1 - e_2)^2 - e_{2.}$. Encuentre el equilibrio de Nash.