

Cálculo Vetorial

Um Livro Colaborativo

22 de janeiro de 2021

Organizadores

Esequia Sauter - UFRGS

Fabio Souto de Azevedo - UFRGS

Pedro Henrique de Almeida Konzen - UFRGS

Licença

Este trabalho está licenciado sob a Licença Creative Commons Atribuição-CompartilhaIgual 3.0 Não Adaptada. Para ver uma cópia desta licença, visite <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/> ou envie uma carta para Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

Nota dos organizadores

Nosso objetivo é de fomentar o desenvolvimento de materiais didáticos pela colaboração entre professores e alunos de universidades, institutos de educação e demais interessados no estudo e aplicação do cálculo nos mais diversos ramos da ciência e tecnologia.

Para tanto, disponibilizamos em repositório público GitHub (<https://github.com/reatmat/Calculo>) todo o código-fonte do material em desenvolvimento sob licença Creative Commons Atribuição-CompartilhaIgual 3.0 Não Adaptada (CC-BY-SA-3.0). Ou seja, você pode copiar, redistribuir, alterar e construir um novo material para qualquer uso, inclusive comercial. Leia a licença para maiores informações.

O sucesso do projeto depende da colaboração! Participe diretamente da escrita dos recursos educacionais, dê sugestões ou nos avise de erros e imprecisões. Toda a colaboração é bem vinda. Veja mais sobre o projeto em:

<https://www.ufrgs.br/reatmat/Calculo>

Desejamos-lhe ótimas colaborações!

Prefácio

Em construção ... Gostaria de participar na escrita deste livro? Veja como em:

<https://www.ufrgs.br/reatmat/participe.html>

Sumário

| | |
|--|-----------|
| Capa | i |
| Organizadores | ii |
| Licença | iii |
| Nota dos organizadores | iv |
| Prefácio | v |
| Sumário | vii |
| 1 Introdução | 1 |
| 2 Curvas e trajetórias | 2 |
| 2.1 Funções vetoriais de uma variável - curvas e trajetórias | 2 |
| 2.2 Comprimento de arco | 7 |
| 2.3 Triedro de Frenet-Serret | 8 |
| 2.4 Curvatura e Torção | 12 |
| 3 Superfícies | 24 |
| 3.1 Funções vetoriais de duas variáveis reais - superfícies | 24 |
| 3.2 Quádricas | 25 |
| 3.3 Casos $y = f(x,z)$, $z = f(x,y)$ ou $x = f(y,z)$ | 26 |
| 3.4 Vetor unitário normal | 27 |
| 4 Campos vetoriais | 28 |
| 4.1 Campos escalares e campos vetoriais | 28 |
| 4.2 Representação gráfica dos campos vetoriais | 29 |
| 4.3 Cálculo com o operador nabla | 31 |
| 4.3.1 Operador $\vec{\nabla}$ | 31 |
| 4.3.2 Operadores diferenciais de segunda ordem | 33 |

| | | |
|-------|--|-----------|
| 4.3.3 | Derivada direcional e gradiente | 33 |
| 4.3.4 | Divergente | 33 |
| 4.3.5 | Rotacional | 33 |
| 4.4 | Identities envolvendo o operador nabla | 33 |
| 4.5 | Campos conservativos | 34 |
| 4.6 | Campos radiais e potenciais centrais | 35 |
| 4.7 | Exercícios finais | 37 |
| | Referências Bibliográficas | 38 |
| | Índice Remissivo | 39 |

Capítulo 1

Introdução

Em construção ... Gostaria de participar na escrita deste livro? Veja como em:

<https://www.ufrgs.br/reatmat/participe.html>

Capítulo 2

Curvas e trajetórias

Neste capítulo, estudamos funções vetoriais do tipo $\vec{r}(t)$, ou seja, uma função que associa um parâmetro real a vetores no plano ou espaço. Tais função vetoriais, que dependem de apenas uma variável, são os exemplos mais simples que estudaremos.

2.1 Funções vetoriais de uma variável - curvas e trajetórias

Uma função vetorial de uma variável é uma função da forma

$$\vec{r}: D \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

onde $D \subseteq \mathbb{R}$ é o domínio de definição de \vec{r} e t é um parâmetro - podendo ser interpretado como o tempo ou não. Em coordenadas cartesianas, uma função vetorial assume a seguinte forma:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

Exemplo 2.1.1. São exemplos de funções vetoriais

a) $\vec{f}(t) = \sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j}$

b) $\vec{g}(t) = t\vec{i} + \cosh(t)\vec{k}$

c) $\vec{h}(t) = 2\cos(t)\vec{i} + 4\sin(t)\vec{j} + t\vec{k}, \quad 0 \leq t \leq 8\pi$

Uma curva no espaço pode ser representada pelo conjunto de pontos de uma função vetorial $\vec{r}(t)$ não constante em todo o seu domínio. Um ponto $\vec{r}(t)$ de uma parametrização é dito regular se $\vec{r}'(t) \neq 0$. Uma parametrização é dita regular em

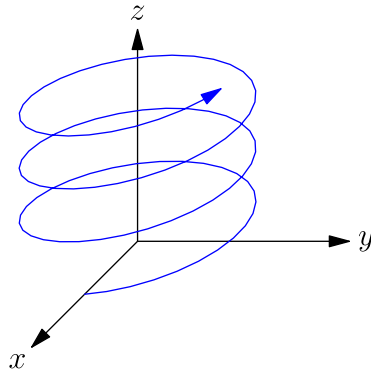


Figura 2.1: Hélice circular dextrogira associada à função vetorial do Exemplo 2.1.3.

t se $\vec{r}'(t) \neq 0$ em todos os pontos. É possível definir orientação para uma curva regularmente parametrizada, a orientação é dada pelo sentido de crescimento do parâmetro t .

Exemplo 2.1.2. A função vetorial $\vec{f}(t) = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j}$ para $0 \leq t \leq 2\pi$ descreve uma circunferência de raio 1 centrada na origem sobre o plano xy orientada no sentido anti-horário.

Exemplo 2.1.3. A função vetorial $\vec{f}(t) = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j} + t\vec{k}$ para $t \in \mathbb{R}$ descreve uma hélice circular, como mostra a figura 2.1.

O limite, a derivação e a integração vetorial são definidas componente a componente no sistema de coordenadas cartesiano:

$$\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t) = \lim_{t \rightarrow a} x(t)\vec{i} + \lim_{t \rightarrow a} y(t)\vec{j} + \lim_{t \rightarrow a} z(t)\vec{k} \quad (2.1)$$

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k} \quad (2.2)$$

$$\int_a^b \vec{r}(t)dt = \int_a^b x(t)dt\vec{i} + \int_a^b y(t)dt\vec{j} + \int_a^b z(t)dt\vec{k} \quad (2.3)$$

$$\int \vec{r}(t)dt = \int x(t)dt\vec{i} + \int y(t)dt\vec{j} + \int z(t)dt\vec{k} \quad (2.4)$$

Teorema 2.1.1 (Regras de derivação). *A derivada de funções vetoriais satisfaz as seguintes identidades:*

1. Se $\vec{r}(t)$ é um vetor constante, então $\vec{r}'(t) = \vec{0}$.

2. $\frac{d}{dt} [\alpha\vec{r}_1(t) + \beta\vec{r}_2(t)] = \alpha\frac{d\vec{r}_1(t)}{dt} + \beta\frac{d\vec{r}_2(t)}{dt}$

3. Se $f(t)$ é uma função real, então $\frac{d}{dt} [f(t)\vec{r}(t)] = f'(t)\vec{r}(t) + f(t)\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$
4. $\frac{d}{dt} [\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t)] = \vec{r}_1(t) \cdot \frac{d\vec{r}_2(t)}{dt} + \frac{d\vec{r}_1(t)}{dt} \cdot \vec{r}_2(t)$
5. $\frac{d}{dt} [\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t)] = \vec{r}_1(t) \times \frac{d\vec{r}_2(t)}{dt} + \frac{d\vec{r}_1(t)}{dt} \times \vec{r}_2(t)$

Demonstração. Os dois primeiros itens podem ser obtidos diretamente de (2.2). A verificação fica a cargo do leitor. O item três pode ser obtido de uma aplicação da regra da cadeia a (2.2):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [f(t)\vec{r}(t)] &= \frac{d}{dt} [f(t)x(t)\vec{i} + f(t)y(t)\vec{j} + f(t)z(t)\vec{k}] \\ &= [f'(t)x(t) + f(t)x'(t)]\vec{i} + [f'(t)y(t) + f(t)y'(t)]\vec{j} + [f'(t)z(t) + f(t)z'(t)]\vec{k} \\ &= f'(t) [x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}] + f(t) [x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}] \\ &= f'(t)\vec{r}(t) + f(t)\vec{r}'(t) \end{aligned}$$

A derivada do produto escalar de duas funções vetoriais é dado por:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t)] &= \frac{d}{dt} [x_1(t)x_2(t) + y_1(t)y_2(t) + z_1(t)z_2(t)] \\ &= [x_1'(t)x_2(t) + x_1(t)x_2'(t)] + [y_1'(t)y_2(t) + y_1(t)y_2'(t)] \\ &\quad + [z_1'(t)z_2(t) + z_1(t)z_2'(t)] \\ &= \vec{r}_1(t) \cdot \frac{d\vec{r}_2(t)}{dt} + \frac{d\vec{r}_1(t)}{dt} \cdot \vec{r}_2(t) \end{aligned}$$

Finalmente a derivada do produto vetorial pode ser obtida de:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t)] &= \frac{d}{dt} [y_1(t)z_2(t) - z_1(t)y_2(t)]\vec{i} \\ &\quad + \frac{d}{dt} [z_1(t)x_2(t) - x_1(t)z_2(t)]\vec{j} \\ &\quad + \frac{d}{dt} [x_1(t)y_2(t) - y_1(t)x_2(t)]\vec{k} \\ &= [y_1'(t)z_2(t) + y_1(t)z_2'(t) - z_1'(t)y_2(t) - z_1(t)y_2'(t)]\vec{i} \\ &\quad + [z_1'(t)x_2(t) + z_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)z_2(t) - x_1(t)z_2'(t)]\vec{j} \\ &\quad + [x_1'(t)y_2(t) + x_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)x_2(t) - y_1(t)x_2'(t)]\vec{k} \\ &= [y_1'(t)z_2(t) - z_1'(t)y_2(t)]\vec{i} \\ &\quad + [z_1'(t)x_2(t) - x_1'(t)z_2(t)]\vec{j} \\ &\quad + [x_1'(t)y_2(t) - y_1'(t)x_2(t)]\vec{k} \\ &\quad + [y_1(t)z_2'(t) - z_1(t)y_2'(t)]\vec{i} \\ &\quad + [z_1(t)x_2'(t) - x_1(t)z_2'(t)]\vec{j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ [x_1(t)y_2'(t) - y_1(t)x_2'(t)] \vec{k} \\ &= \vec{r}_1(t) \times \frac{d\vec{r}_2(t)}{dt} + \frac{d\vec{r}_1(t)}{dt} \times \vec{r}_2(t) \end{aligned}$$

□

Demonstraremos agora um importante teorema do cálculo vetorial:

Teorema 2.1.2. *Uma função vetorial $\vec{u}(t)$ possui norma constante se e somente se $\vec{u}(t) \cdot \vec{u}'(t) = 0$.*

Demonstração. Como $\|u\|^2 = \vec{u}(t) \cdot \vec{u}(t)$, temos

$$\frac{d\|u\|^2}{dt} = \frac{d}{dt} [\vec{u}(t) \cdot \vec{u}(t)] = \vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{u} = 2\vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt}$$

Assim, se $\|u\|$ for constante, a derivada à esquerda é nula e temos $\vec{u}(t) \cdot \vec{u}'(t) = 0$. Reciprocamente se $\vec{u}(t) \cdot \vec{u}'(t) = 0$, então $\|u\|$ deve ser constante. □

Observação 2.1.1. Uma importante interpretação deste teorema é que se $\vec{v}(t)$ representa a velocidade de uma partícula no instante de tempo t , então se o módulo da velocidade $v(t)$ for constante e não nulo então a aceleração $\vec{a} = \vec{v}'(t)$ é perpendicular à velocidade sempre que for não nula.

Exercícios resolvidos

Esta seção carece de exercícios resolvidos. Participe da sua escrita.

Veja como em:

<https://www.ufrgs.br/reatmat/participe.html>

Exercícios

E 2.1.1. Reconheça e represente graficamente as curvas descritas pelas seguintes funções vetoriais:

- $\vec{f}(t) = \sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j} + \vec{k}$, $0 \leq t \leq \pi$
- $\vec{f}(t) = \sin(t)\vec{i} + 2\cos(t)\vec{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$
- $\vec{f}(t) = \sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{k}$, $-\infty < t < \infty$
- $\vec{f}(t) = t\vec{i} + \sqrt{4-t^2}\vec{j}$, $-2 \leq t \leq 2$

e) $\vec{f}(t) = t\vec{i} + \cosh(t)\vec{j}$, $-\infty < t < \infty$

f) $\vec{f}(t) = \sinh(t)\vec{i} + \cosh(t)\vec{j}$, $-\infty < t < \infty$

E 2.1.2. Seja $\vec{r}(t)$ o vetor posição de uma partícula dado por

$$\vec{r}(t) = a \cos(\omega t)\vec{i} + a \sin(\omega t)\vec{j}$$

Calcule o vetor velocidade \vec{v} e o vetor aceleração \vec{a} dados por $\vec{v} = \vec{r}'(t)$ e $\vec{a} = \vec{v}'(t)$.

E 2.1.3. Dada a função vetorial $\vec{r}(t) = t^2\vec{i} + e^t\vec{j} - 2 \cos \pi t \vec{k}$, calcule:

a) $\lim_{t \rightarrow 0} \vec{r}(t)$

b) $\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$

c) $\vec{r}'(1)$

d) $\int_0^1 \vec{r}(t) dt$

e) $\int \vec{r}(t) dt$

E 2.1.4. Verifique que a função vetorial dada por $\vec{f}(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}\vec{i} + \frac{2t}{1+t^2}\vec{j}$, $-\infty < t < \infty$ representa uma curva contida em uma circunferência no plano xy centrada na origem. Identifique o raio desta circunferência, identifique a curva e isole os quatro quadrantes.

E 2.1.5. Encontre a derivada de cada uma das funções vetoriais do exemplo 3.1.1

E 2.1.6. Mostre as seguintes identidades:

a) $\frac{d\vec{r}(t)}{dt} \cdot \hat{r}(t) = r'(t)$

b) $\frac{d}{dt} [\vec{r}(t) \times \vec{r}'(t)] = \vec{r}(t) \times \vec{r}''(t)$

c) $\frac{dr(t)}{dt} = \frac{1}{r(t)} \vec{r}(t) \cdot \vec{r}'(t)$

d) $\frac{d\hat{r}(t)}{dt} = \frac{\vec{r}'(t)}{r(t)} - \frac{\vec{r}(t) \cdot \vec{r}'(t)}{r(t)^3} \vec{r}(t)$

Observação: Lembre-se que $\hat{r}(t) = \frac{\vec{r}(t)}{r(t)}$ e $r(t) = \|\vec{r}(t)\|$.

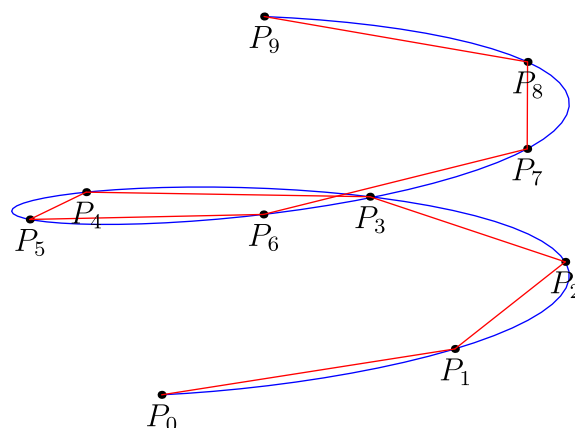


Figura 2.2: Aproximação poligonal do comprimento do arco

2.2 Comprimento de arco

Seja $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ uma partição equidistante do domínio com $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ e $P_i = \vec{r}(t_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$, pontos sobre a curva, como mostra a figura 2.2. Uma possível aproximação para o comprimento da curva é dado pelo comprimento da poligonal. Observe que o comprimento do segmento $P_{i-1}P_i$ é dado por $\|P_i - P_{i-1}\|$, logo, a aproximação para o comprimento da curva é

$$\begin{aligned}
 L_n &= \sum_{i=1}^n \|P_i - P_{i-1}\| \\
 &= \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 + (z_i - z_{i-1})^2} \\
 &= \sum_{i=1}^n \Delta t \sqrt{\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{(\Delta t)^2} + \frac{(y_i - y_{i-1})^2}{(\Delta t)^2} + \frac{(z_i - z_{i-1})^2}{(\Delta t)^2}} \\
 &= \sum_{i=1}^n \sqrt{\left(\frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{z_i - z_{i-1}}{\Delta t}\right)^2} \Delta t.
 \end{aligned}$$

Naturalmente, $L = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n$. Como o lado direito da última igualdade é uma soma de Riemann, temos:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz(t)}{dt}\right)^2} dt = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt. \quad (2.5)$$

Logo, o comprimento do arco s quando a parâmetro corre de a até t é

$$s(t) = \int_a^t \|\vec{r}'(\tau)\| d\tau, \quad a \leq t \leq b. \quad (2.6)$$

Exercícios resolvidos

Esta seção carece de exercícios resolvidos. Participe da sua escrita.

Veja como em:

<https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html>

Exercícios

Esta seção carece de exercícios. Participe da sua escrita.

Veja como em:

<https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html>

2.3 Triedro de Frenet-Serret

Seja a curva descrita pela função vetorial $\vec{r}(t)$. Queremos encontrar um vetor que seja tangente à curva em um dado ponto. Para tal tomamos o limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h}$$

Este limite converge para $\vec{r}'(t)$ e, geometricamente, para o vetor tangente à curva no ponto P relativo a $\vec{r}(t)$ ¹ sempre que $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$. O sentido do vetor $\vec{r}'(t)$ é dado pela parametrização da curva, em outras palavras, o vetor $\vec{r}'(t)$ aponta no sentido em que o parâmetro t cresce.

Observe que a norma do vetor tangente depende de como a curva é parametrizada e não apenas da curva em si. A fim de trabalhar com um objeto que independe da parametrização, é natural definirmos o vetor tangente unitário, denotado por \vec{T} (veja figura 2.4):

$$\|\vec{T}(t)\| = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}, \quad \vec{r}'(t) \neq \vec{0}. \quad (2.7)$$

¹O leitor atento ao formalismo pode tomar esta como uma definição de vetor tangente. Adiante, veremos que esta definição é consistente com o vetor tangente do cálculo de funções de uma variável.

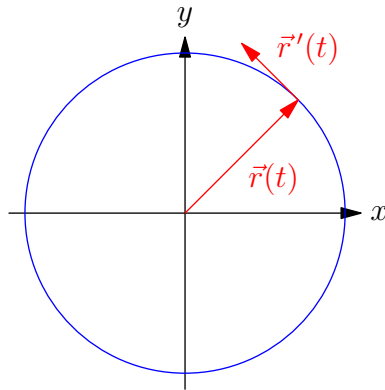


Figura 2.3: O vetor tangente $\vec{r}'(t)$

A condição de existência para o vetor \vec{T} é a função vetorial que parametriza a curva seja diferenciável que sua derivada seja diferente de zero, ou seja, que a parametrização seja regular.

Observação 2.3.1. Quando $\vec{r}(t)$ representa a trajetória de uma partícula ao longo do tempo, a derivada $\vec{r}'(t)$ é a velocidade $\vec{v}(t)$ da partícula. Neste caso, o vetor tangente unitário é o versor associado a $\vec{v}(t)$:

$$\vec{v}(t) = v(t)\hat{v}(t) = v(t)\vec{T}(t).$$

A norma de $\vec{v}(t)$, denotada por $v(t)$, é chamada de velocidade escalar. O vetor $\vec{T}(t)$ indica o sentido e a direção da velocidade.

O vetor \vec{T} pode ser definido de forma alternativa como segue: olhamos s como função de t na expressão (2.6) e observamos que $s'(t) = \|\vec{r}'(t)\| > 0$. Assim, $s(t)$ é uma função contínua e monótona de t . Também, usando a regra da cadeia, temos:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \|\vec{r}'(t)\|.$$

Como $\vec{r}'(t)$ representa o vetor tangente, então

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{1}{\|\vec{r}'(t)\|} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{T}$$

representa um vetor tangente unitário.

Agora, queremos definir um vetor ortogonal a \vec{T} que esteja no mesmo plano formado por $\vec{r}'(t)$ e $\vec{r}''(t)$. Para isso, usamos o resultado do teorema 2.1.2. Observe que a função vetorial $\vec{T}(t)$ possui módulo constante e, portanto, $\vec{T}(t) \cdot \vec{T}'(t) = 0$.

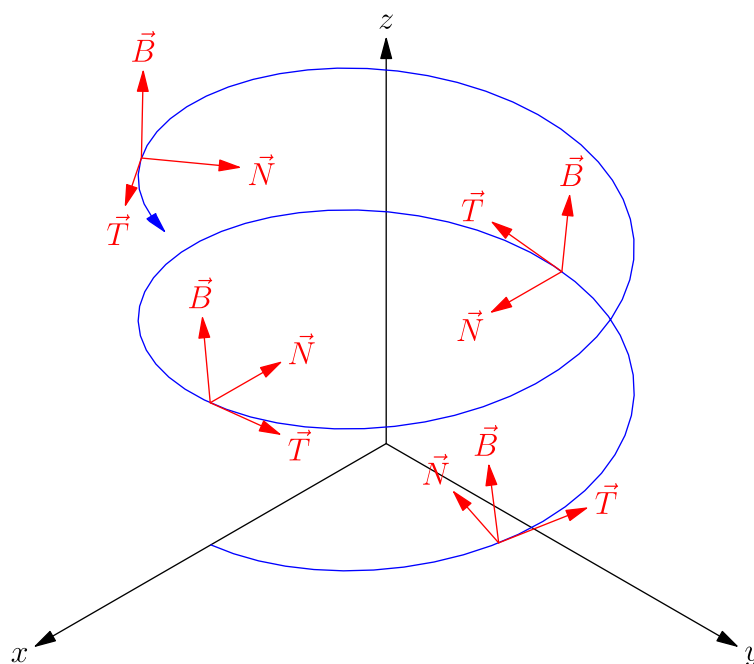


Figura 2.4: Triedro de Frenet-Serret

Observe que $\vec{T}(t)$ e $\vec{T}'(t)$ estão ambos no plano formado por $\vec{r}'(t)$ e $\vec{r}''(t)$ e são ortogonais entre si. No entanto, $\vec{T}'(t)$ não é necessariamente unitário. Logo, faz sentido definir o vetor normal unitário como

$$\vec{N} = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|}.$$

A figura 2.4 contém a representação do triedro de Frenet-Serret em alguns pontos de uma hélice dextrógira.

Finalmente, vamos definir um vetor unitário que é simultaneamente ortogonal a \vec{T} e \vec{N} . A forma natural de obter um vetor ortogonal a outros dois vem do produto vetorial. Assim, o vetor binormal unitário é definido como

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}.$$

Das propriedades de produto vetorial, temos que \vec{B} , além de ortogonal a \vec{T} e \vec{N} , é unitário e forma um sistema dextrógiro. O trio \vec{T} , \vec{N} e \vec{B} é chamado de triedro de Frenet-Serret. A figura 2.4 apresenta a representação de alguns triedros de Frenet-Serret.

Exercícios resolvidos

Esta seção carece de exercícios resolvidos. Participe da sua escrita.

Veja como em:

<https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html>

Exercícios

E 2.3.1. Represente graficamente o terno de vetores \vec{T}, \vec{N} e \vec{B} e verifique através da regra da mão direita as seguintes identidades:

a) $\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$

b) $\vec{T} = \vec{N} \times \vec{B}$

c) $\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T}$

Use a identidade vetorial dada por

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v}(\vec{u} \cdot \vec{w}) - \vec{w}(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

para obter as identidades b e c a partir de a .

E 2.3.2. Considere a trajetória dada pela equações paramétricas

$$x = t \operatorname{sen}(t)$$

$$y = t \operatorname{cos}(t)$$

$$z = 0$$

Esboce gráfico dessa trajetória para $0 \leq t \leq 2\pi$, indicando os pontos inicial e final. Esboce o triedro \vec{T}, \vec{N} e \vec{B} nos instantes $t = \pi/4, t = 3\pi/4, t = 5\pi/4, t = 7\pi/4$. (Obs.: Não é necessário calcular analiticamente o triedro.) Considere a identidade vetorial $\frac{d\vec{r}^2}{dt} = 2\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$ no instante $t = \pi/2$, ela é compatível com seu desenho?

E 2.3.3. Um erro comum entre estudantes é substituir a definição de vetor binormal unitário $\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$ pela expressão espúria dada por

$$\frac{\frac{d\vec{N}}{dt}}{\left\| \frac{d\vec{N}}{dt} \right\|}$$

Calcule esta expressão para o movimento circular uniforme e verifique que ela é igual a $-\vec{T}$ e, portanto, perpendicular a \vec{B} .

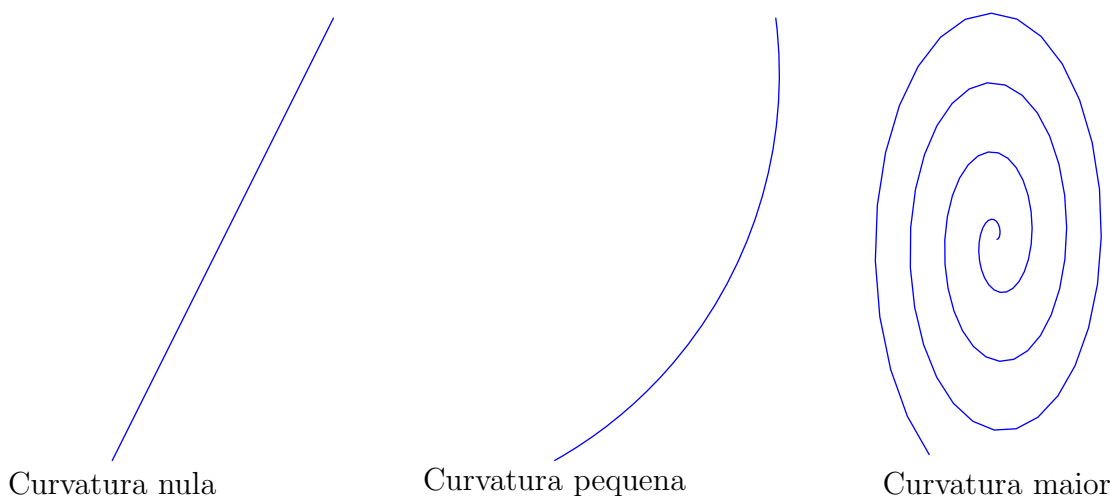


Figura 2.5: Ideia de curvatura.

Esta seção carece de exercícios. Participe da sua escrita.

Veja como em:

<https://www.ufrgs.br/reatmat/participe.html>

2.4 Curvatura e Torção

Nessa seção, estamos interessados em definir, a cada ponto da curva, funções que medem o quanto ela está torcida ou curvada, isto é, se a curva é muito diferente de uma reta ou se está fora de qualquer plano do espaço. Primeiro, definiremos uma função chamada de curvatura, que mede a cada ponto do domínio, a variação do vetor tangente com respeito ao comprimento de arco s . Naturalmente, queremos que a reta tenha curvatura nula, pois ela não difere da sua tangente em ponto algum. Para facilitar a visualização, podemos começar pensando apenas nas curvas que estão contidas em algum plano. A figura 2.5 nos dá uma ideia de curvatura.

Pelo teorema 2.1.2, temos que $\frac{d\vec{T}}{ds}$ é paralelo ao vetor normal \vec{N} , ou seja,

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \kappa\vec{N}, \quad (2.8)$$

onde $\kappa(t) > 0$ é uma função escalar chamada de curvatura. Por outro lado, calculamos a variação do vetor tangente com respeito ao comprimento de arco

s usando a regra da cadeia

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{d\vec{T}}{dt} \frac{1}{|s'(t)|},$$

onde $s(t)$ é a função que mede o comprimento do arco dado pela expressão (2.6). Usando o fato que $s'(t) = \|\vec{r}'(t)\|$, temos:

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{\|\vec{r}'(t)\|} \frac{d\vec{T}}{dt}.$$

Portanto, podemos escrever

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{T}'(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|}.$$

Definimos também, para cada ponto t do domínio, o raio de curvatura $\rho(t)$ da forma:

$$\rho(t) = \frac{1}{\kappa(t)}.$$

O raio de curvatura tem a seguinte interpretação geométrica: considere um ponto $\vec{r}(t_0)$ onde a curvatura não é nula e defina o ponto $\vec{r}(t_0) + \kappa(t_0)\vec{N}$, chamado de centro de curvatura. O círculo centrado no centro de curvatura e raio $\rho(t_0)$ é tangente a curva em t_0 e possui a mesma curvatura (veja a figura 2.6).

Exemplo 2.4.1. A curva descrita por $\vec{r} = a \cos(t)\vec{i} + a \sin(t)\vec{j}$, $a > 0$, $0 \leq t \leq 2\pi$ é uma circunferência. Sua curvatura pode ser obtida da seguinte forma:

$$\vec{r}'(t) = -a \sin(t)\vec{i} + a \cos(t)\vec{j}, \quad (2.9)$$

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{a^2 \sin^2(t) + a^2 \cos^2(t)} = \sqrt{a^2} = |a| = a, \quad (2.10)$$

$$\vec{T}(t) = \frac{-a \sin(t)\vec{i} + a \cos(t)\vec{j}}{a} = -\sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j}, \quad (2.11)$$

$$(2.12)$$

Exemplo 2.4.2. Dada a curva $y = x^2$, vamos encontrar a curvatura e o raio de curvatura no ponto $x = 1$. Primeiro, encontramos uma parametrização para essa curva, por exemplo, $\vec{r} = t\vec{i} + t^2\vec{j}$. Calculamos:

$$\vec{r}'(t) = \vec{i} + 2t\vec{j},$$

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2},$$

$$\vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2}} (\vec{i} + 2t\vec{j})$$

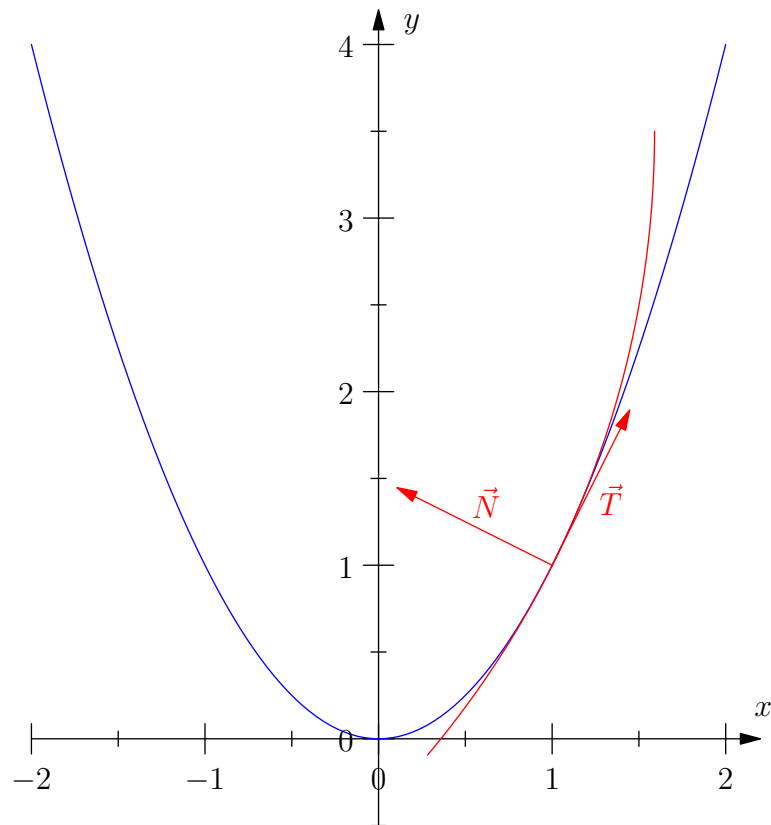


Figura 2.6: Círculo de curvatura

e

$$\vec{T}'(t) = -\frac{4t}{\sqrt{(1+4t^2)^3}}\vec{i} + \left(-\frac{8t^2}{\sqrt{(1+4t^2)^3}} + \frac{2}{\sqrt{1+4t^2}}\right)\vec{j},$$

Em $t = 1$, temos:

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{5},$$

$$\vec{T}'(t) = -\frac{4}{\sqrt{5^3}}\vec{i} + \left(-\frac{8}{\sqrt{5^3}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\vec{j} = -\frac{4}{\sqrt{5^3}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5^3}}\vec{j},$$

e

$$\|\vec{T}'(t)\| = \sqrt{\frac{16}{5^3} + \frac{4}{5^3}} = \frac{2}{5}.$$

Portanto,

$$\kappa(1) = \frac{\|\vec{T}'\|}{\|\vec{r}'\|} = \frac{2}{5\sqrt{5}}$$

e

$$\rho(1) = \frac{5\sqrt{5}}{2}.$$

veja representação geométrica na figura 2.6.

O leitor deve ter observado que conhecendo somente a curvatura não é possível reconstruir uma curva a partir de um ponto dado. Uma curva pode não estar contida em plano algum no espaço e, por isso, precisamos definir uma função escalar, chamada torção, que mede a magnitude da variação do vetor binormal. A figura 2.7 apresenta uma ideia de torção: uma curva contida em algum plano no espaço tem torção nula e quando maior a variação com respeito ao plano definido por \vec{T} e \vec{N} , maior a torção. O leitor deve tomar cuidado na interpretação da figura 2.7, pois se esticarmos indefinidamente a hélice circular representada, ela voltará a se aproximar de uma reta, que tem torção nula (veja problema 2.4.2). Sabendo que a torção será definida em termos da variação do vetor binormal com respeito ao comprimento de arco $s(t)$, fazendo algumas observações:

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{d}{ds}(\vec{T} \times \vec{N}) = \frac{d\vec{T}}{ds} \times \vec{N} + \vec{T} \times \frac{d\vec{N}}{ds}.$$

Usando a expressão (2.8), temos que $\frac{d\vec{T}}{ds} = \kappa\vec{N}$, logo

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = \vec{T} \times \frac{d\vec{N}}{ds}.$$

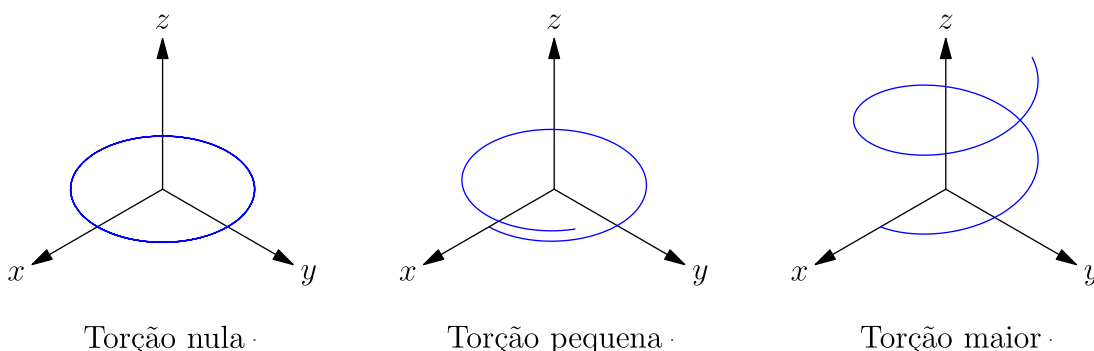


Figura 2.7: Ideia de torção.

Isso implica que $\frac{d\vec{B}}{ds}$ é ortogonal a \vec{T} . Mas, pelo teorema 2.1.2, temos que $\frac{d\vec{B}}{ds}$ é ortogonal a \vec{B} . Logo, $\frac{d\vec{B}}{ds}$ é paralelo a \vec{N} , ou seja,

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = -\tau\vec{N}, \quad (2.13)$$

onde τ é chamado de torção. O sinal negativo tem um propósito: quando $\tau > 0$, $\frac{d\vec{B}}{ds}$ está no sentido de $-\vec{N}$; então se P é um ponto sobre a curva movendo-se no sentido positivo, \vec{B} gira em torno de \vec{T} como um parafuso de rosca direita sendo apertado (veja a figura 2.8). Em alguns contextos, calculamos a módulo da torção, dada por

$$|\tau| = \left\| \frac{d\vec{B}}{ds} \right\| = \frac{\|\vec{B}'(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|}.$$

Ainda, definimos o raio de torção por

$$\sigma(t) = \frac{1}{\tau(t)}.$$

Podemos calcular $\frac{d\vec{N}}{ds}$ em termos da curvatura e da torção:

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = \frac{d}{ds} (\vec{B} \times \vec{T}) = \frac{d\vec{B}}{ds} \times \vec{T} + \vec{B} \times \frac{d\vec{T}}{ds}.$$

Usando as expressões (2.8) e (2.13), escrevemos

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = -\tau\vec{N} \times \vec{T} + \vec{B} \times \kappa\vec{N}.$$

ou seja,

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B}. \quad (2.14)$$

As equações (2.8), (2.13) e (2.14) são chamadas de Fórmulas de Frenet-Serret.

Como esperávamos, se $\kappa = 0$, então $\frac{d\vec{T}}{ds} = \vec{0}$, o que implica que \vec{T} não varia ao longo da curva, ou seja, a curva é uma reta. Agora, se $\tau = 0$, então $\frac{d\vec{B}}{ds} = \vec{0}$ e \vec{B} é um vetor constante. Como $\vec{B} \cdot \vec{T} = \vec{B} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} = 0$, então podemos integrar para obter $\vec{B} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$, onde \vec{r}_0 é um vetor constante da integração. Logo \vec{r} está contido no plano ortogonal a \vec{B} .

Exemplo 2.4.3. Vamos calcular curvatura, raio de curvatura e o módulo da torção para a hélice circular $\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j} + tk\vec{k}$:

$$\vec{r}'(t) = -\sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j} + \vec{k},$$

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{2},$$

$$\vec{T}(t) = -\frac{\sin(t)}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{\cos(t)}{\sqrt{2}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k},$$

$$\vec{T}'(t) = -\frac{\cos(t)}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{\sin(t)}{\sqrt{2}}\vec{j},$$

$$\|\vec{T}'(t)\| = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\kappa(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2},$$

$$\rho(t) = 2,$$

$$\vec{N}(t) = -\cos(t)\vec{i} - \sin(t)\vec{j},$$

$$\begin{aligned} \vec{B}(t) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{\sin(t)}{\sqrt{2}} & \frac{\cos(t)}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\cos(t) & -\sin(t) & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{\sin(t)}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{\cos(t)}{\sqrt{2}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}. \end{aligned}$$

$$\vec{B}'(t) = \frac{\cos(t)}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{\sin(t)}{\sqrt{2}}\vec{j},$$

$$\|\vec{B}'(t)\| = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$|\tau(t)| = \frac{1}{2}.$$

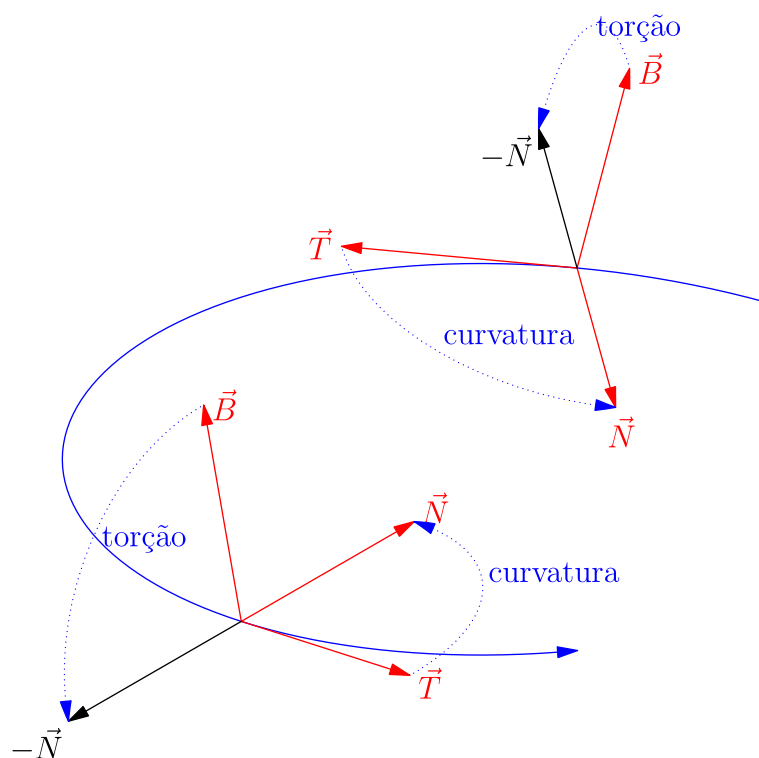


Figura 2.8: Curvatura e Torção

E 2.4.1. Calcule a curvatura, o raio de curvatura e o módulo da torção das curvas abaixo:

- $\vec{r} = a \cosh(t)\vec{i} + b \sinh(t)\vec{j}$, $-\infty < t < \infty$, $a > 0$, $b > 0$.
- $\vec{r} = a \cos(t)\vec{i} + b \sin(t)\vec{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $a > 0$, $b > 0$.
- $\vec{r} = a \cos(t)\vec{i} + a \sin(t)\vec{j} + ct\vec{k}$, $t \geq 0$, $a > 0$, $c > 0$.

E 2.4.2. Dada a hélice circular $\vec{r} = a \cos(t)\vec{i} + a \sin(t)\vec{j} + ct\vec{k}$, $t \geq 0$, $a > 0$, $c > 0$, calcule o valor de c para que a torção seja máxima.

A curvatura e a torção podem ser calculadas de maneira mais simples. Para concluir isso, começamos calculando as derivadas de \vec{r} . Usamos aqui que $s'(t) = \|\vec{r}'(t)\|$, obtida da equação (2.6):

$$\vec{r}' = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = s' \vec{T},$$

$$\begin{aligned}
\vec{r}'' &= s''\vec{T} + s'\vec{T}' \\
&= s''\vec{T} + s'\|\vec{T}'\|\vec{N} \\
&= s''\vec{T} + s'^2\kappa\vec{N}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\vec{r}''' &= s'''\vec{T} + s''\vec{T}' + 2s's''\kappa\vec{N} + s'^2(\kappa\vec{N}' + \kappa'\vec{N}) \\
&= s'''\vec{T} + s''s'\kappa\vec{N} + (2s's''\kappa + s'^2\kappa')\vec{N} \\
&\quad + s'^3\kappa(-\kappa\vec{T} + \tau\vec{B}) \\
&= (s''' - \kappa^2s'^3)\vec{T} + (3s''s'\kappa + s'^2\kappa')\vec{N} + s'^3\kappa\tau\vec{B},
\end{aligned}$$

onde usamos as expressões (2.8) e (2.14). Agora, tomamos os seguintes produtos:

$$\vec{r}' \times \vec{r}'' = s'^3\kappa\vec{B} \quad \text{e} \quad \vec{r}' \times \vec{r}'' \cdot \vec{r}''' = s'^6\kappa^2\tau.$$

Isso implica em

$$\|\vec{r}' \times \vec{r}''\| = |s'|^3\kappa \quad \text{e} \quad \vec{r}' \times \vec{r}'' \cdot \vec{r}''' = \|\vec{r}' \times \vec{r}''\|^2\tau.$$

ou seja,

$$\kappa = \frac{\|\vec{r}' \times \vec{r}''\|}{\|\vec{r}'\|^3} \quad (2.15)$$

e

$$\tau = \frac{\vec{r}' \times \vec{r}'' \cdot \vec{r}'''}{\|\vec{r}' \times \vec{r}''\|^2}. \quad (2.16)$$

Observação 2.4.1. Uma aplicação natural é a decomposição da aceleração em suas componentes tangencial e normal. Observe que

$$\vec{r}' = \vec{v} = v\vec{T} = s'\vec{T}$$

e

$$\vec{a} = v'\vec{T} + v^2\kappa\vec{N}.$$

Concluimos que a aceleração está no plano normal a \vec{B} e possui componentes tangencial e normal:

$$\vec{a} = a_T\vec{T} + a_N\vec{N},$$

onde $a_T = v'$ e $a_N = v^2\kappa$. Então, se a velocidade possui normal constante, temos que $v' = 0$ e a aceleração possui apenas componente normal.

Exemplo 2.4.4. Consideremos agora, a curva gerada pelas seguintes equações paramétricas:

$$x(t) = \cos(t) \quad y(t) = \sin(t) \quad z(t) = f(t).$$

Onde $f(t)$ é uma função dada. Observe que a projeção desta curva no plano xy é uma circunferência de raio 1. A curva é, portanto, gerada pela trajetória de ponto cuja projeção do movimento no plano xy é circular e a altura é dada pela função $f(t)$. Podemos calcular a curvatura e a torção conforme a seguir:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j} + f(t)\vec{k} \\ \vec{r}'(t) &= -\sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j} + f'(t)\vec{k} \\ \vec{r}''(t) &= -\cos(t)\vec{i} - \sin(t)\vec{j} + f''(t)\vec{k} \\ \vec{r}'''(t) &= \sin(t)\vec{i} - \cos(t)\vec{j} + f'''(t)\vec{k} \end{aligned}$$

Assim, calculamos:

$$\begin{aligned} \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) &= [f''(t)\cos(t) + f'(t)\sin(t)]\vec{i} + [-f'(t)\cos(t) + f''(t)\sin(t)]\vec{j} + \vec{k} \\ \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) \cdot \vec{r}'''(t) &= f'(t) + f'''(t) \\ \|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\| &= \sqrt{1 + (f'(t))^2 + (f''(t))^2} \\ \|\vec{r}'(t)\| &= \sqrt{1 + (f'(t))^2} \end{aligned}$$

E finalmente, obtemos:

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\sqrt{1 + (f'(t))^2 + (f''(t))^2}}{(1 + (f'(t))^2)^{3/2}} \\ \tau &= \frac{f'(t) + f'''(t)}{1 + (f'(t))^2 + (f''(t))^2} \end{aligned}$$

Podemos, agora, explorar diversos casos particular:

- Caso $f(t) = c$ constante. Neste caso, recaímos na circunferência de raio 1, cuja curvatura é 1 e a torção é nula.
- Caso $f(t) = ct$ com c constante. Recaímos na hélice circular uniforme, já estudada, cuja curvatura é $\frac{1}{1+c^2}$ e a torção é $\frac{c}{1+c^2}$.
- Caso $f(t) = ct^2$ com c constante. Recaímos na hélice circular com espaçamento linearmente crescente, cuja curvatura é dada por $\frac{\sqrt{4c^2+1+4c^2t^2}}{(1+4c^2t^2)^{3/2}}$ e cuja torção é dada por $2\frac{ct}{4c^2+1+4c^2t^2}$.

- d) Caso $f(t) = \text{sen}(t)$. Reçaimos na elipse de semieixos 1 e $\sqrt{2}$ no plano $y = z$. Neste caso, a curvatura é $\kappa = \frac{\sqrt{2}}{(1+\cos(t^2))^{3/2}}$ e a torção é nula.
- e) Caso $\tau = 0$, isto é, $f'(t) + f'''(t) = 0$, o que é equivalente a $f(t) = a + b \cos(t) + c \text{sen}(t)$ onde a , b e c são constantes. Reçaimos na elipse de semieixos 1 e $\sqrt{1+b^2+c^2}$ no plano $z = bx + cy$. Neste caso, a curvatura é $\kappa = \frac{\sqrt{b^2+c^2+1}}{(1-bc \text{sen}(2t)+c^2 \cos^2(t)+b^2 \text{sen}^2(t))^{3/2}}$ e a torção é nula.

Exercícios resolvidos

Esta seção carece de exercícios resolvidos. Participe da sua escrita.

Veja como em:

<https://www.ufrgs.br/reatmat/participe.html>

Exercícios

E 2.4.3. Considere a hélice dada por

$$\begin{aligned}x &= a \cos(t), \\y &= a \text{sen}(t), \\z &= ct,\end{aligned}$$

onde $a > 0$.

- a) Encontre a curvatura desta hélice usando a fórmula

$$\kappa = \frac{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3}$$

- b) Encontre a torção desta curva usando a seguinte fórmula para calcular o vetor binormal unitário:

$$\vec{B} = \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)}{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|}$$

- c) Encontre a torção máxima e a torção mínima para um dado a .

E 2.4.4. Considere as funções vetoriais dadas por

$$\begin{aligned}\vec{f}(t) &= \cos(\pi t)\vec{i} + \text{sen}(\pi t)\vec{j} \\ \vec{g}(t) &= \cos(\pi t^3)\vec{i} + \text{sen}(\pi t^3)\vec{j}\end{aligned}$$

Verifique que ambas parametrizam a mesma curva quando $-1 \leq t \leq 1$. Verifique se as parametrizações são regulares e compare o comportamento da derivada em $t = 0$. Que consequências isso tem para a existência do vetor tangente unitário?

E 2.4.5. Uma motocicleta percorre uma trajetória circular de raio $20m$ com velocidade constante em módulo. A motocicleta poderá derrapar se a aceleração normal exceder $2m/s^2$. Qual é a velocidade máxima do motocicleta para que ela não derrape?

E 2.4.6. Mostre que se a_N e a_T indicam as acelerações normal e tangencial, respectivamente, então

$$\|\vec{a}\|^2 = a_N^2 + a_T^2$$

onde \vec{a} é o vetor aceleração.

E 2.4.7. Mostre que a curvatura do gráfico da função

$$y = f(x)$$

sobre o plano xy é dada pela expressão

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}.$$

Use esta expressão para obter a curvatura das seguintes curvas planas:

- a) $y = ax + b$
- b) $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $-a < x < a$ onde $a > 0$.
- c) $y = x^4$
- d) $y = ax^2$
- e) $y = \cosh(x)$
- f) $y = \sinh(x)$
- g) $y = \cos(x)$

Como você interpreta os casos a e b? As curvas dos itens c e g possuem pontos onde a curvatura é zero. Que implicação isso tem sobre a existência do vetor normal unitário \vec{N} ? Interprete geometricamente.

E 2.4.8. Calcule o valor mínimo e o valor máximo do raio de curvatura de uma elipse de semi-eixos a e b quando $0 < a < b$. O que acontece quando $a = b$? Quais são os semi-eixos da elipse cujo raio de curvatura varia entre $50m$ e $400m$?

Esta seção carece de exercícios. Participe da sua escrita.

Veja como em:

<https://www.ufrgs.br/reatmat/participe.html>

Capítulo 3

Superfícies

Neste capítulo, estudamos funções vetoriais do tipo $\vec{f}(u,v)$, ou seja, uma função que associa um ponto do plano real a vetores no espaço.

3.1 Funções vetoriais de duas variáveis reais - superfícies

Uma função vetorial de duas variáveis é uma função da forma

$$\vec{r} : D_1 \times D_2 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

onde $D_1 \times D_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ é o domínio de definição de \vec{r} e $(u,v) \in D_1 \times D_2$ são os parâmetros ou as coordenadas de superfície. Em coordenadas cartesianas, uma função vetorial assume a seguinte forma:

$$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$$

Exemplo 3.1.1. São exemplos de funções vetoriais

a) $\vec{f}(u,v) = \sin(u)\vec{i} + \cos(v)\vec{j} + uv\vec{k}$

b) $\vec{g}(u,v) = \sin(u)\cos(v)\vec{i} + \cosh(u)\sinh(v)\vec{k} + u\vec{k}$

Uma superfície no espaço pode ser representada pelo conjunto de pontos de uma função vetorial $\vec{r}(u,v)$ não constante em todo o seu domínio. A seguinte interpretação ajuda entender essa função: se fixamos v e temos que $\vec{r}(u,v)$ descreve uma curva e $\vec{r}_u(u,v)$ é um vetor tangente a essa curva. Da mesma forma, se fixamos u temos que $\vec{r}(u,v)$ descreve uma curva e $\vec{r}_v(u,v)$ é um vetor tangente a essa curva. Se essas curvas não forem paralelas, temos um sistema de coordenadas curvilíneo para escrever todos os pontos da superfície. Pense no globo terrestre, o meridiano

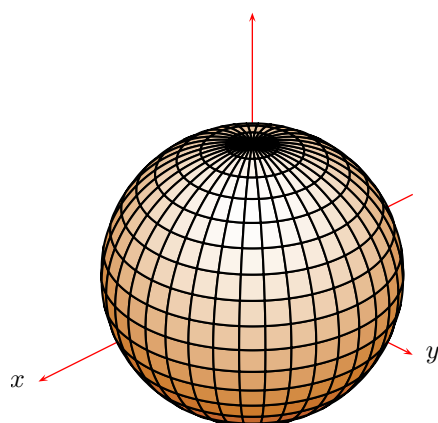


Figura 3.1: Um esfera centrada na origem com meridianos e paralelos traçados.

de Greenwich e a linha do Equador: o globo como uma superfície, Greenwich e Equador como duas curvas e longitude e latitude como um sistema de coordenadas curvilíneo, veja Figura 3.1 Observe que esse sistema curvilíneo fica bem definido quando \vec{r}_u e \vec{r}_v não são paralelos nos pontos do domínio. Chamamos de superfície regular aquela que satisfaz

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}.$$

Exemplo 3.1.2. A superfície

$$\vec{r} = a \sin(u) \cos(v) \vec{i} + a \sin(u) \sin(v) \vec{j} + a \cos(u) \vec{k}, \quad a > 0, \quad 0 \leq u < \pi, \quad 0 \leq v < 2\pi$$

descreve uma esfera centrada na origem e raio a . De fato, colocando

$$x = a \sin(u) \cos(v), \quad y = a \sin(u) \sin(v) \quad \text{e} \quad z = a \cos(u),$$

temos que

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

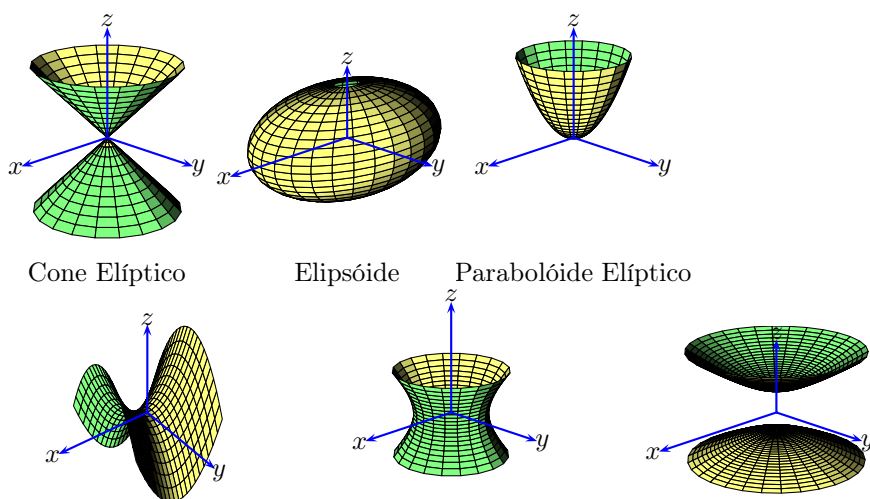
Além disso, se (x, y, z) é um ponto qualquer nesta esfera, então existem u e v na parametrização. Para tal, basta escolher $u = \cos^{-1}\left(\frac{z}{a}\right)$ e escolher $v \in [0, 2\pi)$ tal que:

$$\cos(v) = \frac{x}{a \sin(u)} \quad \text{e} \quad \sin(v) = \frac{y}{a \sin(u)}, \quad u \neq 0 \quad \text{e} \quad u \neq \pi.$$

3.2 Quádricas

A figura 3.2 apresenta uma lista das principais quádricas estudadas na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral com funções de várias variáveis. As equações são as seguintes:

- a) Cone elíptico: $z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.
- b) Elipsóide: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
- c) Parabolóide Elíptico: $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$
- d) Parabolóide Hiperbólico: $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$
- e) Hiperbolóide de uma folha: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
- f) Hiperbolóide de duas folhas: $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



Parabolóide Hiperbólico Hiperbolóide de uma folha Hiperbolóide de duas folhas

Figura 3.2: Quádricas

3.3 Casos $y = f(x,z)$, $z = f(x,y)$ ou $x = f(y,z)$

O caso particular da superfície representada por uma função $z = f(x,y)$, podemos assumir uma parametrização natural $\vec{r} = u\vec{i} + v\vec{j} + f(u,v)\vec{k}$. Analogamente para os casos $y = f(x,z)$ ou $x = f(y,z)$, podemos assumir, respectivamente, as

parametrizações $\vec{r} = u\vec{i} + f(u,v)\vec{j} + v\vec{k}$ ou $\vec{r} = f(u,v)\vec{i} + v\vec{j} + u\vec{k}$. Para o caso $z = f(x,y)$ (analogamente para os demais), a condição $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$ assume a forma

$$\begin{aligned}\vec{r}_u \times \vec{r}_v &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f_u(u,v) \\ 0 & 1 & f_v(u,v) \end{vmatrix} \\ &= -f_u\vec{i} - f_v\vec{j} + \vec{k} \neq \vec{0}.\end{aligned}$$

Isso implica que $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq 0$, ou seja, a superfície é regular. Voltaremos a discutir esse assunto nos próximos capítulos, quando o vetor gradiente estiver definido.

3.4 Vetor unitário normal

Para os fins de teoria de integração sobre superfícies, que discutiremos mais adiante, é fundamental definir o vetor unitário normal. Dado uma superfície e um ponto nela, dizemos que um vetor é normal à superfícies, se ele é perpendicular no ponto a cada curva contida na superfícies. Em especial, um vetor normal à superfícies no ponto $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$ e $z_0 = z(u_0, v_0)$, deve ser perpendicular às curvas $\vec{r}(u_0, v)$ e $\vec{r}(u, v_0)$, isto é, as curvas geradas quando se fixa um dos parâmetros u_0 ou v_0 , respectivamente. Assim, podemos concluir que cada vetor normal está da mesma direção do produto vetorial $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$. Finalmente, o vetor normal unitário deve ter normal unitário, portanto, deve ser da forma:

$$\vec{n} = \pm \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}. \quad (3.1)$$

Aqui o sinal indica para qual lado o vetor normal aponta.

Capítulo 4

Campos vetoriais

4.1 Campos escalares e campos vetoriais

Campo é termo usado para designar funções definidas em uma porção do espaço tridimensional (ou bidimensional), isto é, funções cujo domínio D é um subconjunto de \mathbb{R}^3 (ou \mathbb{R}^2). Trabalharemos com dois tipos de campos: os campos escalares e os campos vetoriais. Os campos vetoriais são funções cuja imagem é composta de vetores no \mathbb{R}^3 , já a imagem dos campos escalares são números reais, isto é, escalares.

Exemplo 4.1.1. São exemplos de campos escalares.

- a) A função que liga a posição de um ponto dentro de uma sala à temperatura neste ponto.
- b) A pressão do ar como função da posição na atmosfera.
- c) $f(x,y,z) = 100 + 20e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.
- d) $f(x,y,z) = \vec{r} \cdot \vec{r} = x^2 + y^2 + z^2$, onde $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

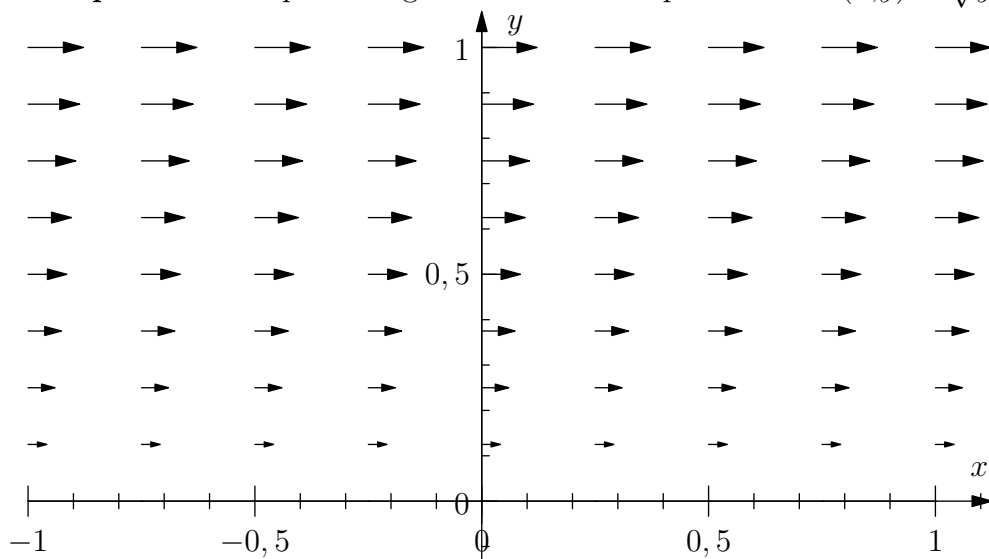
Exemplo 4.1.2. São exemplos de campos vetoriais.

- a) A função que liga a posição de um ponto dentro de uma fluido à velocidade (vetor) neste ponto.
- b) O campo magnéticos, elétrico, gravitacional etc.
- c) $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + z\vec{j} - y\vec{k}$.
- d) $\vec{F}(x,y,z) = \vec{r} \times \vec{k}$

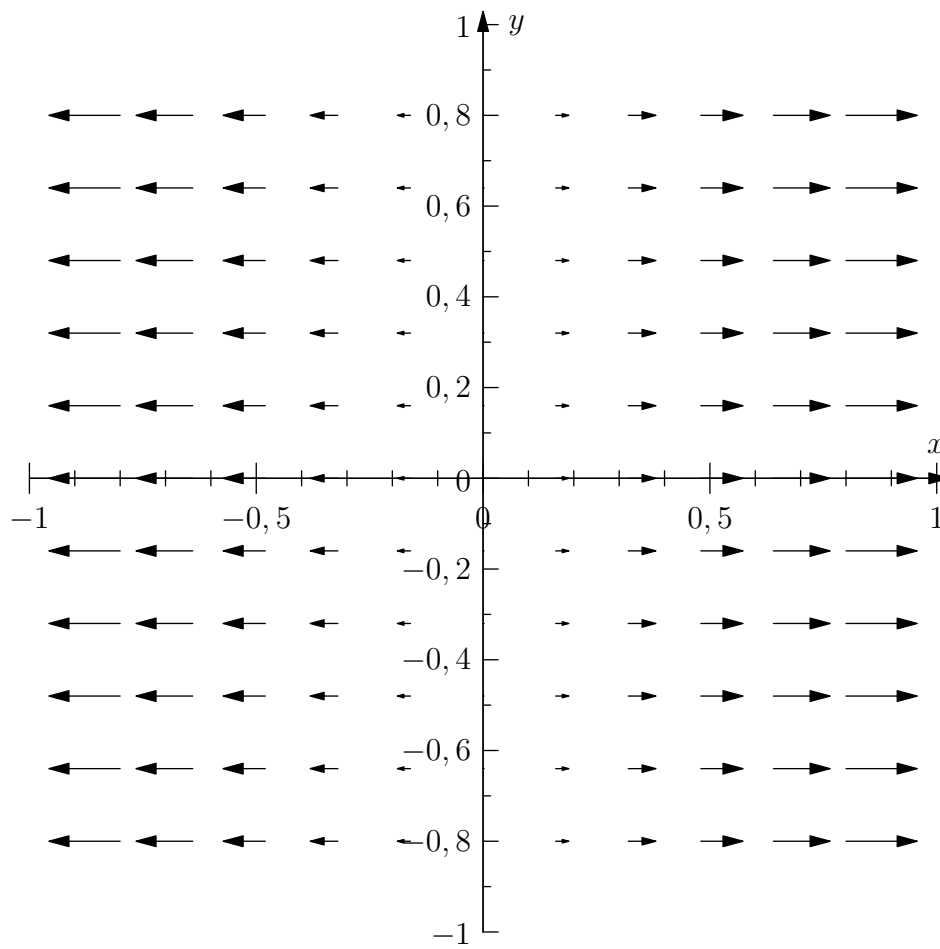
4.2 Representação gráfica dos campos vetoriais

Um campo vetorial é representado graficamente por um conjunto de setas partindo de pontos (x,y,z) e de comprimento proporcional ao módulo de $\vec{F}(x,y,z)$ e mesma direção e sentido de $\vec{F}(x,y,z)$. O conjunto de pontos é escolhido de forma arbitrária de forma a permitir interpretar o campo.

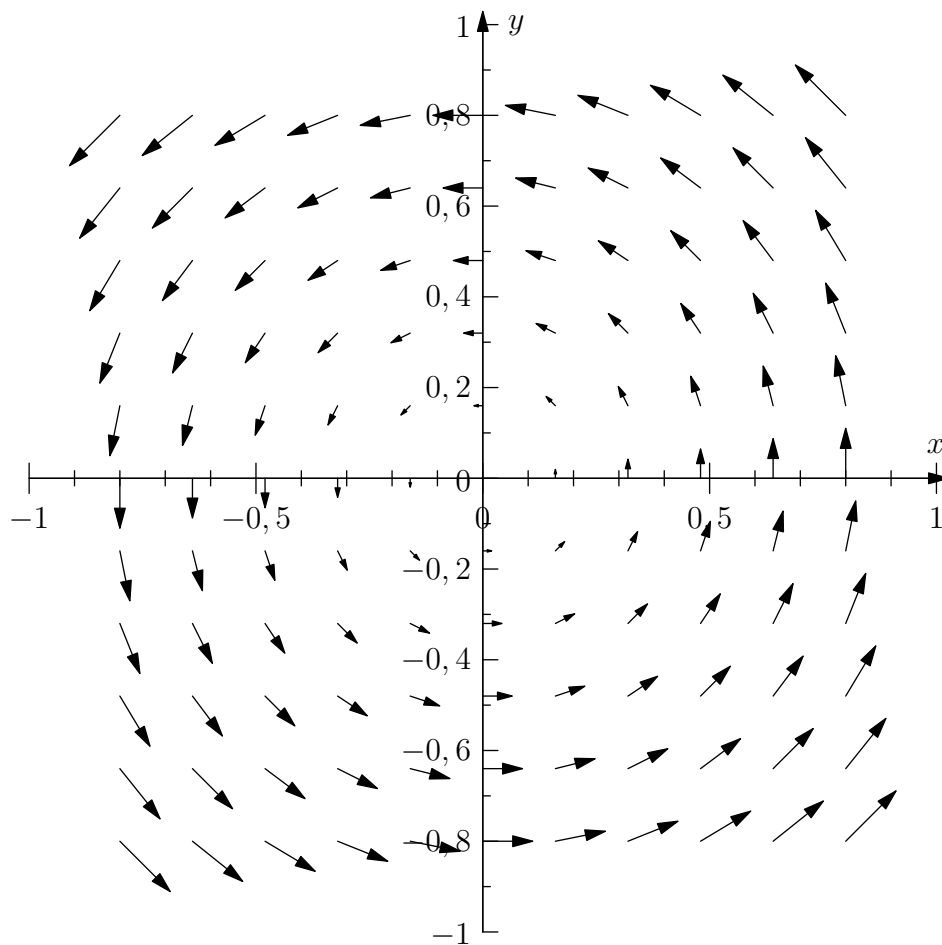
Exemplo 4.2.1. Represente graficamente o campo vetorial $\vec{F}(x,y) = \sqrt{y}\vec{i}$, $y \geq 0$.



Exemplo 4.2.2. Represente graficamente o campo vetorial $\vec{F}(x,y) = x\vec{i}$, $y \geq 0$.



Exemplo 4.2.3. Represente graficamente o campo vetorial $\vec{F}(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$.



4.3 Cálculo com o operador nabla

4.3.1 Operador $\vec{\nabla}$

No cálculo vetorial, o operador $\vec{\nabla}$, pronunciado nabla ou del, é um símbolo usado para denotar uma série de operadores diferenciais definidos em campos escalares e vetoriais, como gradiente, divergente e rotacional. Ele é definido simbolicamente como:

$$\vec{\nabla} \equiv \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (4.1)$$

Rigorosamente falando, o operador del não é um operador diferencial, mas um mnemônico que ajuda a lembrar de uma série de operadores diferenciais:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} f &= \vec{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial f}{\partial z} \quad (\text{Gradiente}), \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{F} &= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \quad (\text{Divergente}), \\ \vec{\nabla} \times \vec{F} &= \vec{i} \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \quad (\text{Rotacional}).\end{aligned}$$

O rotacional pode ser representado pelo seguinte determinante simbólico, que funciona como um mnemônico para lembrar facilmente de sua definição:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}.$$

Exemplo 4.3.1. Calcule o gradiente do campo escalar dado por $f(x,y,z) = xy + z$.

$$\vec{\nabla} f = \vec{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial f}{\partial z} = \vec{i} + x\vec{j} + \vec{k} \quad (4.2)$$

Exemplo 4.3.2. Calcule o divergente e o rotacional do campo vetorial dado por $\vec{F} = (yz + x)\vec{i} + z^2\vec{j} + z^3\vec{k}$.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 1 + 0 + 3z^2 = 3z^2 + 1 \quad (4.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz + x & z^2 & z^3 \end{vmatrix} \quad (4.4)$$

$$= (0 - 2z)\vec{i} + (y - 0)\vec{j} + (0 - z)\vec{k} \quad (4.5)$$

$$= -2z\vec{i} + y\vec{j} - z\vec{k}. \quad (4.6)$$

Exemplo 4.3.3. Dado o campo vetorial dado por $\vec{F} = x^5\vec{i} + y^2\vec{j}$, calcule o gradiente do divergente, $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$, de \vec{F}

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 5x^4 + 2y \quad (4.7)$$

$$\vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 20x^3\vec{j} + 2\vec{j} \quad (4.8)$$

4.3.2 Operadores diferenciais de segunda ordem

Operadores diferenciais de segunda ordem podem ser definidos através da composição de operadores diferenciais de segunda ordem. Combinando o gradiente, rotacional e divergente, encontramos as seguintes possibilidades:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f \quad (\text{Divergente do gradiente ou laplaciano}) \quad (4.9)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f \quad (\text{Rotacional do gradiente}) \quad (4.10)$$

$$\vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \quad (\text{Gradiente do divergente}) \quad (4.11)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \nabla \times \vec{F} \quad (\text{Divergente do rotacional}) \quad (4.12)$$

$$\vec{\nabla} \times \nabla \times \vec{F} \quad (\text{Rotacional do rotacional}) \quad (4.13)$$

$$(4.14)$$

Os operadores $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}$ e $\vec{\nabla} \cdot \nabla \times \vec{F}$ são identicamente nulos, o que pode ser provado por simples inspeção

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \vec{i} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Sob suficiente regularidade, as derivadas parciais podem ser comutadas e cada termo do rotacional é nulo, isto é:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f \equiv 0 \quad (4.17)$$

para todo f continuamente diferenciável.

4.3.3 Derivada direcional e gradiente

4.3.4 Divergente

4.3.5 Rotacional

4.4 Identidades envolvendo o operador nabla

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = \vec{0} \quad (4.18)$$

4.5 Campos conservativos

Definição 4.5.1. Um campo $\vec{F}(x,y,z)$ é dito conservativo se existe um campo escalar $\varphi(x,y,z)$ tal que

$$\vec{F}(x,y,z) = \vec{\nabla}\varphi$$

Neste caso φ é chamado de campo potencial de

$$\vec{F}(x,y,z)$$

Observação 4.5.1. Campos conservativos também são conhecidos como campos gradiente ou campos irrotacionais, este último nome advém do fato que

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(x,y,z) = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\varphi = \vec{0}.$$

Esta identidade é oriunda da Equação 4.18.

Exemplo 4.5.1. O campo $\vec{F} = 2xy\vec{i} + x^2\vec{j}$ é conservativo por $\vec{F} = \vec{\nabla}(x^2y)$.

Teorema 4.5.1. Seja $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vetorial contínuo e $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$, então \vec{F} é conservativo.

Demonstração. Como $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$, temos:

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z}, \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}. \quad (4.21)$$

Defina, agora, a função $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x,y,z) = \int_0^x F_1(s,y,z) + \int_0^y F_2(0,s,z) + \int_0^z F_3(0,0,s).$$

Basta provar que $\vec{\nabla}\varphi(x,y,z) = \vec{F}$, isto é

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = F_1, \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = F_2, \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = F_3. \quad (4.24)$$

A primeira desigualdade advém diretamente do teorema fundamental do cálculo. Para obter a segunda desigualdade, derivamos o potencial em relação a y :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\varphi(x,y,z) &= \int \int_0^x \frac{\partial}{\partial y}F_1(s,y,z)ds + F_2(0,y,z) \\ &= \int_0^x \frac{\partial}{\partial s}F_2(s,y,z)ds + F_2(0,y,z) \\ &= (F_2(x,y,z) - F_2(0,y,z)) + F_2(0,y,z) = F_2(x,y,z)\end{aligned}$$

Onde usamos a Identidade 4.20.

Finalmente, para obter a terceira desigualdade, derivamos o potencial em relação a z :

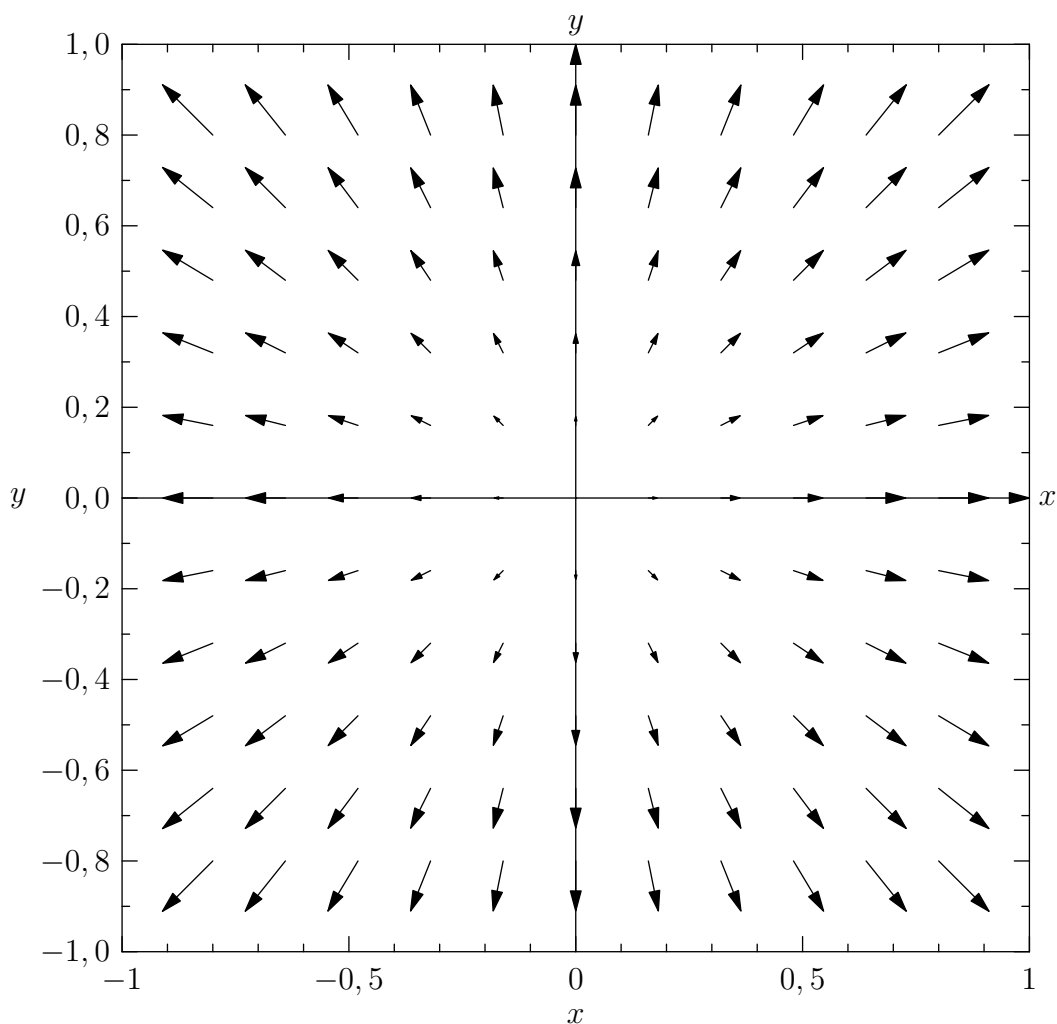
$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}\varphi(x,y,z) &= \int_0^x \frac{\partial}{\partial z}F_1(s,y,z)ds + \int_0^y \frac{\partial}{\partial z}F_2(0,s,z)ds + F_3(0,0,z) \\ &= \int_0^x \frac{\partial}{\partial s}F_3(s,y,z)ds + \int_0^z \frac{\partial}{\partial s}F_3(0,s,z)ds + F_3(0,0,z) \\ &= \int_0^x (F_3(x,y,z) - F_3(0,y,z)) + (F_3(0,y,z) - F_3(0,0,z)) + F_3(0,0,z) \\ &= F_3(x,y,z)\end{aligned}$$

Onde usamos as Identidade 4.19 e 4.21. □

4.6 Campos radiais e potenciais centrais

Campos radiais vetoriais são campos da forma $\vec{F} = f(r)\hat{r}$, isto é campos vetoriais cujo módulo depende apenas da distância até a origem, isto é, de $r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e cuja direção é sempre paralela ao vetor posição, \vec{r} .

Exemplo 4.6.1. Represente graficamente o campo vetorial $\vec{F} = \vec{r}$ no plano xy .



Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em:

<https://www.ufrgs.br/reatmat/participe.html>

Exercícios resolvidos

Esta seção carece de exercícios resolvidos. Participe da sua escrita.

Veja como em:

<https://www.ufrgs.br/reatmat/participe.html>

ER 4.6.1. Um exercício.

Solução. Resolução do exercício.

◇

Exercícios

Esta seção carece de exercícios. Participe da sua escrita.

Veja como em:

<https://www.ufrgs.br/reatmat/participe.html>

E 4.6.1. Um exercício.

4.7 Exercícios finais

Esta seção carece de exercícios. Participe da sua escrita.

Veja como em:

<https://www.ufrgs.br/reatmat/participe.html>

E 4.7.1. Um exercício.

Referências Bibliográficas

Índice Remissivo

- aceleração
 - normal, [19](#)
 - tangencial, [19](#)
- campo
 - conservativo, [34](#)
 - gradiente, [34](#)
 - rotacional, [34](#)
- campos radiais, [35](#)
- campos vetoriais, [28](#)
- centro de curvatura, [13](#)
- curva, [2](#)
- curvas e trajetórias, [2](#)
- curvatura, [12](#)

- derivada de uma função vetorial de uma variável, [3](#)
- derivada do produto de um escalar por um vetor, [4](#)
- derivada do produto escalar, [4](#)
- derivada do produto vetorial, [4](#)

- integral de uma função vetorial de uma variável, [3](#)

- limite de uma função vetorial de uma variável, [3](#)

- operador
 - de segunda ordem, [33](#)
 - laplaciano, [33](#)
- orientação de uma curva, [3](#)

- parametrização regular, [2](#)

- quádricas, [25](#)

- raio de curvatura, [13](#)
- raio de torção, [16](#)

- superfície, [24](#)

- torção, [15](#), [16](#)
- trajetórias, [2](#)

- velocidade escalar, [9](#)
- vetor binormal unitário, [10](#)
- vetor normal à uma superfície, [27](#)
- vetor normal unitário, [10](#)
- vetor tangente, [8](#)
- vetor tangente unitário, [8](#)