Problemas y Ejercicios Resueltos.

Tema 2: Espacios vectoriales.

Ejercicios

1.- *Determinar el valor de x para que el vector $(1,x,5) \in \mathbb{R}^3$ pertenezca al subespacio $<(1,2,3),(1,1,1)>$.*

Solución. $(1,x,5)$ pertenece al subespacio $<(1,2,3),(1,1,1)>$ si y sólo si $(1,x,5)$ es combinación lineal de $(1,2,3)$ y $(1,1,1)$, o sea, si existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$(1,x,5) = \alpha(1,2,3) + \beta(1,1,1),$$

Pero entonces,

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha + \beta \\ x &= 2\alpha + \beta \\ 5 &= 3\alpha + \beta \end{aligned}$$

y resolviendo el sistema anterior, tenemos $\alpha = 2$, $\beta = -1$ y $x = 3$.

2.- *Calcular bases de los subespacios de $\mathbb{R}^4$ S, T, $S+T$ y $S \cap T$, siendo $S = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) | x_1 - x_2 = 0\}$ y $T = <(1,1,2,1),(2,3,-1,1)>$.*

Solución. Tenemos

$$S = \{(x_1,x_2,x_3,x_4)|x_1 - x_2 = 0\} = \{(x_1,x_1,x_3,x_4)|x_1,x_2,x_3 \in \mathbb{R}\} =< (1,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1) >,$$

luego un sistema generador de S es $\{(1,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$. Ahora,

$$(0,0,0,0) = \alpha(1,1,0,0) + \beta(0,0,1,0) + \gamma(0,0,0,1) \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0,$$

o sea que es libre, resulta que $\mathfrak{B}_S = \{(1,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ es una base de S.

Un sistema generador de T es $(1,1,2,1),(2,3,-1,1)$. Pero es también libre, ya que

$$(0,0,0,0) = \lambda(1,1,2,1) + \beta(2,3,-1,1) \to \begin{array}{c} 0 = \lambda + 2\beta \\ 0 = \lambda + 3\beta \\ 0 = 2\lambda - \beta \\ 0 = \lambda + \beta \end{array}$$

y la única solución al sistema anterior es $\lambda = \beta = 0$. Por tanto, $\mathfrak{B}_T = \{(1,1,2,1),(2,3,-1,1)\}$ es una base de T.

Por definición,

$$\begin{aligned} S+T &= \{s+t | s \in S \text{ y } t \in T\} \\ &= \{(x_1,x_1,x_2,x_3) + (\alpha+2\beta, \alpha+3\beta, 2\alpha-\beta, \alpha+\beta) | x_1,x_2,x_3,\alpha,\beta \in \mathbb{R}\}. \\ &=< (1,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1),(1,1,2,1),(2,3,-1,1) > \end{aligned}$$

Por tanto, un sistema generador de $S+T$ es $\{(1,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1),(1,1,2,1),(2,3,-1,1)\}$. Pero $(1,1,2,1) = (1,1,0,0)+(0,0,1,0)+(0,0,0,1)$, luego $\{(1,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1),(2,3,-1,1)\}$ es sistema generador de $S+T$. Además, este sistema es libre luego es una base de $S+T$.

Por último, sabemos que $S \cap T$ es un subespacio vectorial de dimensión 1 porque

$$\dim(S \cap T) = \dim(S+T) - \dim(S) - \dim(T)$$

Ahora, $(1,1,2,1) \in S \cup T$, luego como $\dim(S \cap T)$ es 1, se tiene que $< (1,1,2,1) >= S \cap T$ y una base de $S \cap T$ es $\mathfrak{B}_{S\cap T} = \{(1,1,2,1)\}$.

3.- *Encontrar una base y la dimensión del subespacio vectorial*

$$S =< (1,2,-1,3),(2,1,0,-2),(0,1,2,1),(3,4,1,2) > .$$

Solución. Un sistema genereador de S es $A = \{(1,2,-1,3),(2,1,0,-2),(0,1,2,1),(3,4,1,2)\}$. Pero A no es libre ya que

$$(0,0,0,0) = \alpha_1(1,2,-1,3) + \alpha_2(2,1,0,-2) + \alpha_3(0,1,2,1) + \alpha_4(3,4,1,2) \Rightarrow$$
$$\begin{cases} 0 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 3\alpha_4 \\ 0 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 4\alpha_4 \\ 0 = -\alpha_1 + 2\alpha_3 + \alpha_4 \\ 0 = 3\alpha_2 - 2\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 \end{cases}$$

y el sistema anterior tiene por solución

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = -\alpha_4$$

Observamos que $(3,4,1,2)$ es combinación lineal de los anteriores, luego $A - \{(3,4,1,2)\} = \{(1,2,-1,3),(2,1,0,-2),(0,1,2,1)\}$ es también sistema generador de S. Pero

$$(0,0,0,0) = \beta_1(1,2,-1,3) + \beta_2(2,1,0,-2) + \beta_3(0,1,2,1) \Rightarrow$$
$$\begin{cases} 0 = \beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3 \\ 0 = 2\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \\ 0 = -\beta_1 + 2\beta_3 \\ 0 = 3\beta_2 - 2\beta_2 + \beta_3 \end{cases}$$

y el sistema anterior sólo tiene por solución a $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$, es decir, $\{(1,2,-1,3),(2,1,0,-2),(0,1,2,1)\}$ es libre. Por consiguiente una base de S es $\{(1,2,-1,3),(2,1,0,-2),(0,1,2,1)\}$ y la dimensión de S es 3.

4.- *Sea V un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial de dimensión 4 con base $\mathfrak{B} = \{u_1,u_2,u_3,u_4\}$. Se definen los vectores*

$$v_1 = 2u_1 + u_2 - u_3 \qquad v_2 = 2u_1 + u_3 + 2u_4 \qquad v_3 = u_1 + u_2 - u_3 \qquad v_4 = -u_1 + 2u_3 + 3u_4$$

Probar que $\mathfrak{B}' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ *es una base de* V *y calcular las coordenadas en la base* $\mathfrak{B}'$ *de un vector* v *que tiene por coordenadas en* $\mathfrak{B}$ *a* $(1\ 2\ 0\ 1)$.

Solución. Como $\mathfrak{B}'$ es de cardinal 4 y V es de dimensión 4, para demostrar que $\mathfrak{B}'$ es base de V, basta con probar que $\mathfrak{B}'$ es libre. Ahora,

$$0_V = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i v_i = (2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4)u_1 + (\alpha_1 + \alpha_3)u_2 + (-\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + 2\alpha_4)u_3 + (2\alpha_2 + 3\alpha_4)u_4,$$

y al ser $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ un conjunto libre, se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 \\ 0 &= \alpha_1 + \alpha_3 \\ 0 &= -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + 2\alpha_4 \\ 0 &= 2\alpha_2 + 3\alpha_4 \end{aligned}$$

y la única solución del sistema anterior es

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0,$$

luego $\mathfrak{B}'$ es libre.

Por otro lado, si v tiene por coordenadas a $(1\ 2\ 0\ 1)$ (esto es utilizamos la notación por filas) en la base $\mathfrak{B}$, significa que $v = u_1 + 2u_2 + u_4$, asi que las coordenadas de v $(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_4)$ en la base $\mathfrak{B}'$ deben cumplir

$$v = u_1 + 2u_2 + u_4 = \sum_{i=1}^{4} \beta_i v_i = (2\beta_1 + 2\beta_2 + \beta_3 - \beta_4)u_1 + (\beta_1 + \beta_3)u_2 + (-\beta_1 + \beta_2 - \beta_3 + 2\beta_4)u_3 + (2\beta_2 + 3\beta_4)u_4,$$

o sea,

$$\begin{aligned} 1 &= 2\beta_1 + 2\beta_2 + \beta_3 - \beta_4 \\ 2 &= \beta_1 + \beta_3 \\ 0 &= -\beta_1 + \beta_2 - \beta_3 + 2\beta_4 \\ 1 &= 2\beta_2 + 3\beta_4 \end{aligned}$$

y su solución es

$$\beta_1 = 10, \beta_2 = -4, \beta_3 = -8, \beta_4 = 3.$$

Por consiguiente las coordenadas del vector v en la base $\mathfrak{B}'$ son $(10\ \ -4\ \ -8\ 3)$.

Otra manera de calcular las coordenadas es mediante la matriz de cambio de base:

$$(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_4) = (1\ 2\ 0\ 1) M_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'},$$

donde $M_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'}$ lleva las coordenadas de los vectores de la base $\mathfrak{B}$ en la base $\mathfrak{B}'$. Por tanto,

$$M_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'} = M_{\mathfrak{B}',\mathfrak{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 7 & -3 & -6 & 2 \\ 8 & -3 & -8 & 2 \\ -5 & 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

.

5.- *Sea* v *un vector de un* K*-espacio vectorial* V *de dimensión finita* $n \geq 3$ *cuyas coordenadas en una base de* V *son* $(x_1\ \ldots\ x_n)$, *siendo* $x_2 \neq x_3$. *¿Existe alguna base de* V *en la cual las coordenadas de* v *sean* $(1\ 0 \ldots\ 0)$*? ¿Por qué?*

Solución. Como $x_2 \neq x_3$, el vector v no es el vector nulo. Entonces, en cualquier base que se obtenga al completar $\{v\}$, esto es, $\mathfrak{B} = \{v, u_2, \cdots, u_n\}$, las coordenadas de v serán $(1\ 0 \ldots\ 0)$.

6.- *Si V es un espacio vectorial de dimensión 1, ¿cómo son sus bases?*

Solución. Las bases de V constan de un único vector no nulo.

7.- *Si $U, W \leq V$ dos subespacios distintos de V y $\dim(V) = n$, $\dim(U) = \dim(W) = n - 1$, ¿cuánto vale la dimensión de $U \cap W$?*

Solución. Sabemos que

$$n - 1 = \max\{\dim(U), \dim(W)\} \leq \dim(U + W) \leq \dim(V) = n.$$

Por tanto, $\dim(U + W) = n, n - 1$. Pero si $\dim(U + W) = n - 1$, al ser $U, W \subseteq U + W$, y coincidir las dimensiones, se deduce que $U = U + W = W$, lo cual es falso, por ser $U \neq W$. Consecuentemente, $\dim(U + W) = n$ y llevandolo a

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W),$$

deducimos que

$$\dim(U \cap W) = n - 1 + n - 1 - n = n - 2.$$

Problemas

1.- *Determinar los valores de a y b, si es que existen, para que*

$$< (a, 1, -1, 2), (1, b, 0, 3) >=< (1, -1, 1, -2), (-2, 0, 0, -6) > .$$

Solución. Para que los dos subespacios coincidan, debemos pedir que $(a, 1, -1, 2)$ y $(1, b, 0, 3)$ se escriban como combinación lineal de $(1, -1, 1, -2)$ y $(-2, 0, 0, -6)$ y que ambos vectores sean linealmente independientes. Por tanto,

$$\left.\begin{array}{ll} (a, 1, -1, 2) & = \alpha_1(1, -1, 1, -2) + \alpha_2(-2, 0, 0, -6) \\ (1, b, 0, 3) & = \beta_1(1, -1, 1, -2) + \beta_2(-2, 0, 0, -6) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} a &= \alpha_1 - 2\alpha_2 \\ 1 &= -\alpha_1 \\ -1 &= \alpha_1 \\ 2 &= -2\alpha_1 - 6\alpha_2 \\ 1 &= \beta_1 - 2\beta_2 \\ b &= -\beta_1 \\ 0 &= \beta_1 \\ 3 &= -2\beta_1 - 6\beta_2 \end{aligned}$$

y la solución al sistema anterior es: $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 0$, $a = -1$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = -\frac{1}{2}$ y $b = 0$. Por tanto, $(a, 1, -1, 2) = (-1, 1, -1, 2)$ y $(1, b, 0, 3) = (1, 0, 0, 3)$ y ambos vectores son linelamente independientes.

2.- *Sean* $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 = x_2 = x_4, x_3 = 0\}$, $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 = x_2 = x_3, x_4 = 0\}$ *y* $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_2 = x_1 + x_3, 3x_1 = x_2 + x_4\}$.

1. *Demostrar que* $\mathbb{R}^4 = U \oplus V \oplus W$.

2. *Descomponer el vector* $(1, 2, 3, 4)$ *en la forma* $u + v + w \in U + V + W$.

Solución. 1. Para ver que $\mathbb{R}^4 = U \oplus V \oplus W$, debemos comprobar que $\mathbb{R}^4 = U + V + W$ y que $U \cap (V + W) = V \cap (U + W) = W \cap (U + V) = \{(0, 0, 0, 0)\}$. Esto equivale a demostrar que $\mathfrak{B}_U \cup \mathfrak{B}_V \cup \mathfrak{B}_W$ es una base de $\mathbb{R}^4$. Ahora,$\mathfrak{B}_U = \{(1, 1, 0, 1)\}$, $\mathfrak{B}_V = \{(1, 1, 1, 0)\}$ y $\mathfrak{B}_W = \{(1, 0, 1, 3), (0, 1, -1, -1)\}$ ya que

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 = x_2 = x_4, x_3 = 0\} = \{(x_1, x_1, 0, x_1) | x_1 \in \mathbb{R}\} =< (1, 1, 0, 1) >$$

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 = x_2 = x_3, x_4 = 0\} = \{(x_1, x_1, x_1, 0) | x_1 \in \mathbb{R}\} =< (1, 1, 1, 0) >$$

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_2 = x_1 + x_3, 3x_1 = x_2 + x_4\} = \{(x_1, x_2, x_1 - x_2, 3x_1 - x_2) | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$
$$=< (1, 0, 1, 3), (0, 1, -1, -1) > .$$

Entonces,

$$\mathfrak{B}_U \cup \mathfrak{B}_V \cup \mathfrak{B}_W = \{(1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 3), (0, 1, -1, -1)\}$$

y como el cardinal de $\mathfrak{B}_U \cup \mathfrak{B}_V \cup \mathfrak{B}_W$ es 4 y coincide con la dimensión de $\mathbb{R}^4$, para ver que $\mathfrak{B}_U \cup \mathfrak{B}_V \cup \mathfrak{B}_W$ es base de $\mathbb{R}^4$ es suficiente con demostrar que $\mathfrak{B}_U \cup \mathfrak{B}_V \cup \mathfrak{B}_W$ es libre. Ahora,

$$(0, 0, 0, 0) = \alpha_1(1, 1, 0, 1) + \alpha_2(1, 1, 1, 0) + \alpha_3(1, 0, 1, 3) + \alpha_4(0, 1, -1, -1)$$

implica

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ 0 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 \\ 0 &= \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 \\ 0 &= \alpha_1 + 3\alpha_3 - \alpha_4 \end{aligned}$$

y la única solución al sistema anterior es $\alpha_i = 0$, para $i = 1, 2, 3, 4$, luego $\mathfrak{B}_U \cup \mathfrak{B}_V \cup \mathfrak{B}_W$ es libre.

2. El vector $(1, 2, 3, 4) = \beta_1(1, 1, 0, 1) + \beta_2(1, 1, 1, 0) + \beta_3(1, 0, 1, 3) + \beta_4(0, 1, -1, -1)$ siendo $\beta_1 = -11$, $\beta_2 = 4$, $\beta_3 = 8$ y $\beta_4 = 9$, luego $u = \beta_1(1, 1, 0, 1) = (-11, -11, 0, -11)$, $v = \beta_2(1, 1, 1, 0) = (4, 4, 4, 0)$ y $w = \beta_3(1, 0, 1, 3) + \beta_4(0, 1, -1, -1) = (8, 9, -1, 15)$.

3.- *Sea* $U = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}\}$ *y* $W = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f(x) = -f(-x), \forall x \in \mathbb{R}\}$. *Probar que* $\mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f \text{ es aplicación}\}$ *es suma directa de* U *y* W.

Solución. Por definición, $\mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = U \oplus W$ si y sólo si $\mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = U + W$ y $U \cap W = \{0_{\mathbb{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\}$, donde $0_{\mathbb{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ denota la aplicación nula.

Comprobemos que $\mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = U + W$:

$\subseteq$ Sea $f \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y definimos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$. Es claro que $f = g + h$. Además, $g \in U$ ya que $g(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = \frac{f(x)+f(-x)}{2} = g(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ y $h \in W$ porque $h(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -\frac{f(x)-f(-x)}{2} = -h(x)$,para todo $x \in \mathbb{R}$.

$\supseteq$ Es inmediato porque $U, W \subseteq \mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Por otro lado, si $f \in U \cap W$, se tiene que $f \in U$ y $f \in W$, luego para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x)$, por ser $f \in U$ y $f(x) = -f(-x)$ por ser $f \in W$. Entonces,

$$f(x) = f(-x) = -f(x) \Rightarrow 2f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0,$$

esto es f es la aplicación nula.