Capítulo IV: Cálculo Integral

Ya hemos comentado algunos de los problemas que dieron origen al orígen del Cálculo, ahora hablaremos de alguno más, tal como el problema de calcular la longitud de una curva o del área y volúmen de una figura acotada por curvas y superficies.

El origen de los métodos que ahora empleamos se remonta a más de 2000 años, cuando los griegos para resolver el problema del cálculo del área de ciertas figuras geométricas, idearon el procedimiento de exhaución: Dada una región cuya área quiere determinarse, se inscriben en ella sucesivas regiones poligonales cuyas áreas se aproximen cada vez mejor al área de la región que queremos determinar; procediendo ahora por "paso al límite"podremos determinar el área buscada. Este método fue usado satisfactoriamente por Arquímedes (287-212 a. C.) para hallar la fórmula exacta del área del círculo.

Gradualmente, este método ha ido transformándose en una potente herramienta que tiene numerosas aplicaciones en todas las ciencias entre ellas la resolución de los problemas ya enunciados y de otros relacionados, como ya veremos, tales como el cálculo del centro de gravedad de un cuerpo y la fuerza de atracción de la gravedad

Índice general

Capítulo 1

Capítulo 2

Capítulo 3

Capítulo 4

Integración en una y varias variables

4.1. Funciones integrables

Sumario

En esta lección introduciremos el concepto de función integrable, en el sentido de Riemann, como una evolución natural del método de exhaución, usado por los griegos para calcular ciertas áreas, y estudiaremos sus propiedades. Enunciaremos el teorema fundamental del cálculo que relaciona la integral con la derivación y la Regla de Barrow indispensable para el cálculo integral. Finalmente estudiaremos las funciones impropiamente integrables. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

4.1.1. Funciones integrables

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y sea sea $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. Para cada $k \in \{1, 2, ..., n\}$, llamemos I_k al intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ y notemos por

$$M_k(f, P) = Sup\{f(I_k)\}, \quad m_k(f, P) = Inf\{f(I_k)\}.$$

Llamaremos **suma superior de la función f respecto de la partición P** al número real

$$S(f,P) := \sum_{k=1}^{k=n} M_k(f,P)(x_k - x_{k-1}),$$

y análogamente llamaremos **suma inferior de la función f respecto de la partición P** al número real

$$I(f,P) := \sum_{k=1}^{k=n} m_k(f,P)(x_k - x_{k-1}).$$

Sea

$$S := \{S(f,P); P \ \text{ partición del intevalo } [a,b]\}$$

e

$$I = \{I(f,P); P \ \text{ partición del intevalo } [a,b]\}.$$

Es claro que dadas dos particiones cualesquiera del intervalo $[a,b]$ se tiene que

$$I(f,P) \leq S(f,Q),$$

y por tanto el conjunto S es un conjunto minorado de números reales. Llamaremos **integral superior de** f en el intervalo $[a,b]$, al ínfimo del conjunto S que notaremos por

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Por idéntica razón el conjunto I es un conjunto mayorado de números reales y llamaremos **integral inferior de** f en el intervalo $[a,b]$ al supremo de dicho conjunto, supremo que notaremos por

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Diremos que f **es integrable en el intervalo** $[a,b]$ si el ínfimo del conjunto S y el supremo del conjunto I coinciden, esto es, si

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Si f es integrable en $[a,b]$ dicho valor $Inf S = Sup\ I$ será conocido como la **integral de f en** $[a,b]$, y se notará por

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Para mayor comodidad, si f es integrable en $[a,b]$, acordamos los siguientes convenios:

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx, \quad \text{y} \quad \int_a^a f(x)dx = 0.$$

Observación

Es fácil probar que si $[a, b]$ es un intervalo y $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada, entonces f es integrable en $[a, b]$ si, y sólo si, existe una sucesión de particiones $\{P_n\}$ verificando que la sucesión $\{S(f, P_n) - I(f, P_n)\}$ converge a cero.

4.1.2. Ejemplos

1) Es fácil probar que toda función constante es integrable, de hecho

$$\int_a^b c dx = c(b-a).$$

2) Las funciones monótonas en un intervalo $[a, b]$ son funciones integrables en dicho intervalo.

3) Las funciones continuas son también funciones integrables.

   La demostración de que toda función continua es integrable necesita del teorema de Heine sobre la continuidad uniforme.

4) De hecho tenemos que

   Proposición 4.1.1. *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable. Entonces si $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función que coincide con f excepto a lo más en un número finito de puntos de $[a, b]$, g es también una función integrable y además*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

5) La función de Dirichlet:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in [0,1] \cap \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$

   No es integrable en $[0, 1]$. De hecho, es fácil probar que

$$\overline{\int_0^1} f(x)dx = 1, \quad \underline{\int_0^1} f(x)dx = 0.$$

4.1.3. Propiedades de las funciones integrables

Veamos ahora algunas propiedades de las funciones integrables

Proposición 4.1.2. *Sean* $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *dos funciones integrables en* $[a, b]$*. Entonces*

1. $f + g$ *es una nueva función integrable en* $[a, b]$ *y se verifica que*
$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$
2. *Para cada* $r \in \mathbb{R}$*, la función* rf *es una nueva función integrable en* $[a, b]$ *y se verifica que*
$$\int_a^b (rf)(x)dx = r\int_a^b f(x)dx.$$
3. *Si para cada* $x \in [a, b]$*,* $f(x) \leq g(x)$*, se tiene que*
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$
4. $|f|$ *es también una función integrable y se verifica que*
$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f|(x)dx.$$
5. $f.g$ *es una nueva función integrable en* $[a, b]$ *y se verifica que*
$$\int_a^b (f.g)(x)dx \leq (\int_a^b f^2(x)dx)^{\frac{1}{2}}.(\int_a^b g^2(x)dx)^{\frac{1}{2}} \quad (\textit{desigualdad de Schwarz}),$$
y
$$(\int_a^b (f+g)^2(x)dx)^{\frac{1}{2}} \leq (\int_a^b f^2(x)dx)^{\frac{1}{2}}+(\int_a^b g^2(x)dx)^{\frac{1}{2}} \ (\textit{desigualdad de Minkowski}).$$

Finalmente también se verifica la propiedad de la aditividad respecto del intervalo, esto es,

Proposición 4.1.3. *Sea* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función acotada y sea* $c \in]a, b[$*. Entonces* f *es integrable en* $[a, b]$ *si, y sólo si,* f *es integrable en* $[a, c]$ *y* $[c, b]$*. En caso de ser integrables se tiene que*
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Como ejercicio calcúlese la siguiente integral:
$$\int_0^3 3E[x] + 2\ dx.$$

4.1.4. Relación entre integración y derivación.

Estudiaremos ahora la importante conexión entre los tres conceptos básicos de la primera parte del curso: continuidad, derivación e integración. Para poder enunciar este resultado, esto es, el teorema fundamental del cálculo, necesitamos introducir el concepto de integral indefinida.

Sea I un intervalo de números reales, y una $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Si $c \in I$ llamaremos **integral indefinida de f con origen en c** a la función $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$, definida, para cada $x \in I$, por

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt.$$

Teorema 4.1.4. *(fundamental del Cálculo)*
Sea f una función continua en un intervalo I y sea F cualquier integral indefinida de f. Entonces F es derivable en I y para cada $x \in I$,

$$F'(x) = f(x).$$

Para su demostración necesitamos algunas observaciones:

a) Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable y $c \in [a,b]$, entonces

$$\int_a^b f + \int_b^c f + \int_c^a f = 0.$$

b) Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, entonces existe $c \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f = f(c)(b-a).$$

Ejercicio: Sea $F : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_1^x 1/t \ dt.$$

Calcúlese F(1), la función derivada de F y determínense sus propiedades analíticas.

4.1.5. Cómo evaluar una integral

El siguiente resultado, el cual es consecuencia del teorema del valor medio, es importantísimo ya que nos permitirá evaluar la integral de una función conocida su primitiva. Para enunciarlo, necesitamos recordar que dada una función f definida en in intervalo I se dice que f **admite primitiva** si existe una función $G : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable tal que, para cada $x \in I$, $G'(x) = f(x)$.

Teorema 4.1.5. *(Regla de Barrow)*
Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable y supongamos que admite una primitiva G. Entonces

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Es claro que si f es continua, entonces, como consecuencia del teorema fundamental del cálculo, cualquier integral indefinida F de f es una primitiva de f. Pero si intentamos evaluar dichas primitivas no obtenemos ninguna información no trivial. Por tanto el problema de evaluar la integral de una función continua f, para aplicar la Regla de Barrow, consiste en conseguir una primitiva de f susceptible de ser evaluada en los puntos a y b.

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_0^1 2x^3 + 1 \; dx.$$

A menudo conviene transformar la función f en otra función cuya primitiva sea más accesible; los siguientes resultados ofrecen algunas transformaciones interesantes.

Corolario 4.1.6. *(teorema del cambio de variable)*
Sea $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1([a, b])$ con $g'(x) \neq 0$. Si f es una función continua en $g([a, b])$, entonces la función $f \circ g.g'$ es una nueva función integrable y

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx = \int_a^b f(g(t)).g'(t)dt.$$

La regla formal seguida en el resultado anterior consiste en sustituir $g(t)$ por x y $g'(t)dt$ por dx y los valores extremos $t = a, t = b$ por los correspondientes $x = g(a), x = g(b)$.

Ejercicios:

1. Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_0^1 2xe^{x^2} \; dx.$$

2. Demuéstrese que , para $a, b \in \mathbb{R}^+$,

$$\int_a^{ab} 1/t \; dt = \int_1^b 1/t \; dt.$$

Nota

Obsérvese que después de esta propiedad, la función $F : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$F(x) = \int_1^x 1/t \; dt.$$

es una biyección estrictamente creciente verificando que:

- $F(1) = 0$
- $F(xy) = F(x) + F(y)$.
- $F(e) = 1$

Esto es, la función F no es otra cosa que la función logaritmo neperiano cuya existencia afirmábamos al principio de curso.

La siguiente técnica es especialmente útil cuando se trata de calcular la integral de un producto de funciones o de una función fácilmente derivable (basta ver ésta como el producto de ella por la función constante uno).

Corolario 4.1.7. *(teorema de integración por partes)*
Sean $F, G : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *dos funciones de clase* $\mathcal{C}^1([a, b])$. *Entonces*

$$\int_a^b F(x).G'(x)dx = F(b).G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b F'(x).G(x)dx.$$

Ejercicio: Calcúlense las siguientes integrales:

$$\int_1^2 log(x)dx \quad \text{y} \quad \int_0^1 x^2 sen(x)dx.$$

4.1.6. Integrales impropias

El concepto de integral que hemos introducido presenta, entre otras, dos limitaciones importantes:

1. El intervalo de integración es del tipo $[a, b]$
2. El integrando es una función acotada en dicho intervalo.

Nuestro objetivo más inmediato es extender la noción de integral a intervalos arbitrarios y a funciones continuas no necesariamente acotadas.

Sea $I =]\alpha, \beta[$ un intervalo con $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \cup \{ -\infty, +\infty\}$. Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en I y sea G una primitiva de f. Se dice que f es **impropiamente integrable en** $]\alpha, \beta[$ si existen

$$lim_{x \to \beta} G(x), \quad lim_{x \to \alpha} G(x).$$

Además en caso afirmativo

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = lim_{x \to \beta} G(x) - lim_{x \to \alpha} G(x).$$

Dicha integral recibe el nombre de **integral impropia** de f en $]\alpha, \beta[$.

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_0^1 1/\sqrt{x} dx.$$

Es claro que toda función continua en un intervalo $[a, b]$ es impropiamente integrable en $]a, b[$ y su integral impropia coincide con su integral.

Las propiedades de las funciones impropiamente integrables son similares a las ya estudiadas para las funciones integrables.

Proposición 4.1.8. *Sean $f, g :]\alpha, \beta[\longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones impropiamente integrables. Entonces*

1. *$f + g$ es una nueva función impropiamente integrable en $]\alpha, \beta[$ y se verifica que*

$$\int_\alpha^\beta (f + g)(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\alpha^\beta g(x)dx.$$

2. *Para cada $r \in \mathbb{R}$, la función rf es una nueva función impropiamente integrable en $]\alpha, \beta[$ y se verifica que*

$$\int_\alpha^\beta rf(x)dx = r \int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

3. *Si para cada $x \in [a, b]$, $f(x) \leq g(x)$, se tiene que*

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \leq \int_\alpha^\beta g(x)dx$$

E incluso,

Proposición 4.1.9. *Sea* $f :]\alpha, \beta[\longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua y* $c \in]\alpha, \beta[$. *Entonces* f *es impropiamente integrable en* $]\alpha, \beta[$ *si, y sólo si,* f *es impropiamente integrable en* $]\alpha, c[$ *y* $]c, \beta[$. *En caso afirmativo se tiene que*

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^c f(x)dx + \int_c^\beta f(x)dx.$$

Ejercicio: Calcúlense, cuando existan, las siguientes integrales:

$$\int_0^1 1/xdx, \quad \int_{-1}^1 1/x^2 dx, \quad \int_1^{+\infty} 1/\sqrt{x}dx \quad \text{y} \quad \int_1^{+\infty} 1/x^2 dx.$$

Como consecuencia de la definción, obtenemos los correspondientes teoremas del cambio de variable y de integración por partes.

Teorema 4.1.10. *(del cambio de variable)*
Sea g *una función de clase* $\mathcal{C}^1$ *en el intervalo* $]\alpha, \beta[$ *con* $g'(x) \neq 0$. *Si* f *es una función continua en* $g(]\alpha, \beta[)$, *entonces* f *es impropiamente integrable en* $]\alpha, \beta[$ *si, y sólo si,* $f \circ g.g'$ *es impropiamente integrable en* $]\alpha, \beta[$. *En caso afirmativo,*

$$\int_{lim_{x\to\alpha} g(x)}^{lim_{x\to\beta} g(x)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(x))g'(x)dx.$$

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_0^1 2x/(x^2+1)\ dx.$$

Teorema 4.1.11. *(de integración por partes)*
Sean F *y* G *dos funciones de clase* $\mathcal{C}^1$ *en el intervalo* $]\alpha, \beta[$ *y supongamos que* $F.G$ *tiene límite en* α *y en* β. *Entonces* $F.G'$ *es impropiamente integrable si, y sólo si* $F'.G$ *es impropiamente integrable. En caso afirmativo*

$$\int_\alpha^\beta F(x).G'(x)dx = lim_{x\to\beta} F(x)G(x) - lim_{x\to\alpha} F(x)G(x) - \int_\alpha^\beta F'(x).G(x)dx.$$

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_0^1 log(x)dx.$$

A veces resulta que una determinada función no es impropiamente integrable pero puede obtenerse un cierto valor relacionado con ella.

Supongamos que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en R. Llamamos **valor principal de Cauchy de la integral de** f en $\mathbb{R}$ y suele escribirse,

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} f = lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} f.$$

Así por ejemplo V.P. $\int_{-\infty}^{+\infty} xdx = 0$.

Análogamente si $f :]\alpha, \beta[\longrightarrow \mathbb{R}$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, es una función continua en $]\alpha, \beta[$, llamamos **valor principal de Cauchy de la integral de** f en $]\alpha, \beta[$ y suele escribirse,

$$V.P. \int_{\alpha}^{\beta} f = lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\alpha+\varepsilon}^{\beta-\varepsilon} f.$$

Es claro que si f es impropiamente integrable en $]\alpha, \beta[$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\} \bigcup \{-\infty\})$, entonces su valor principal de Cauchy coincide con su integral impropia.

4.1.7. Relación de ejercicios

1. Calcúlense las siguientes integrales:

$$\int_0^1 arctg(x)\ dx, \qquad \int_0^1 x^2 e^x\ dx,$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(log(x))^2} \qquad \int_0^{\pi/4} sen^2 x\ cos^3 x\ dx,$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} cosx\ \log(senx)\ dx, \qquad \int_0^{\pi/2} \frac{senx}{cos^2 x}\ dx.$$

2. Hállense las derivadas de cada una de las funciones siguientes:

a) $F(x) = \displaystyle\int_a^x sen^3(t)\ dt.$ b) $F(x) = \displaystyle\int_3^{x^2} \frac{1}{1+\sin^6 t + t^2}\ dt$

c) $F(x) = \displaystyle\int_3^{\int_1^x \frac{sen(s)}{s} ds} 1/(sen^2(t^2)+1)\ dt$

d) $F(x) = \displaystyle\int_x^b \frac{1}{1+t^2+sen^2(t)}\ dt.$

e) $F(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{t}{1+t^2+sen(t)}\ dt$ f) $F(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{tx}{1+t^2+sen(t)}\ dt$

4.2. Cálculo integral

Sumario

En esta lección nos ocuparemos del problema práctico de evaluar la integral de toda función racional y de algunas funciones no racionales. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

IV.2.1 Integración de funciones racionales.
IV.2.2 Integración de funciones no racionales.
IV.2.3 Relación de ejercicios.

4.2.1. Integración de funciones racionales

Daremos un método general para la evaluación de la integral de una función racional cuya "única"dificultad consiste en encontrar la descomposición en factores irreducibles de un polinomio con coeficientes reales.

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función racional y sean $P, Q, : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ las correspondientes funciones polinómicas tales que, $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ con $Q(x) \neq 0$, para cada $x \in [a,b]$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad (en caso contrario se manipula algebraicamente) que:

1) P y Q son dos polinomios primos entre sí.
2) El polinomio $Q(x)$ es de mayor grado que $P(x)$.
3) El coeficiente líder del polinomio $Q(x)$ es uno.

En la situación anterior, el problema de evaluar la integral de f se resuelve usando sendos resultados algebraicos: la descomposición en factores irreducibles de un polinomio con coeficientes reales y la descomposición en fracciones simples de una función racional con coeficientes reales.

Proposición 4.2.1.

1) *Descomposición en factores irreducibles*

Todo polinomio $Q(x)$ con coeficientes reales y con coeficiente líder igual a uno puede escribirse en la forma:

$$(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}...(x-a_p)^{n_p}(x^2+b_1x+c_1)^{m_1}(x^2+b_2x+c_2)^{m_2}...(x^2+b_qx+c_q)^{m_q},$$

donde p y q son números enteros no negativos,$a_1, a_2, ..., a_p, b_1, b_2, ..., b_q, c_1, c_2, ..., c_q$ son números reales, donde $a_1 < a_2 < ... < a_p$ son las raíces reales del polinomio Q

y $n_1, n_2, ...n_p$ *son, para cada* $k \in \{1, 2, ..., p\}$*, el orden de multiplicidad de la raíz* a_k*; y finalmente* $m_1, m_2, ..., m_q$ *son números naturales.*

La descomposición anterior en factores es única y

$$n_1 + n_2 + ... + n_p + 2(m_1 + m_2 + ... + m_q)$$

es el grado del polinomio.

2) *Descomposición en fracciones simples*

Si el polinomio se descompone en la forma dada en (1.) *y* $P(x)$ *es un polinomio primo con* $Q(x)$ *de grado menor que el de* $Q(x)$*, la función racional* $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ *puede escribirse de forma única como sigue:*

$$f(x) = \frac{A^{11}}{x - a_1} + \frac{A^{12}}{(x - a_1)^2} + ... + \frac{A^{1n_1}}{(x - a_1)^{n_1}} +$$

$$+ \frac{A^{21}}{x - a_2} + \frac{A^{22}}{(x - a_2)^2} + ... + \frac{A^{2n_2}}{(x - a_2)^{n_2}} + ... +$$

$$\frac{A^{p1}}{x - a_p} + \frac{A^{p2}}{(x - a_p)^2} + ... + \frac{A^{pn_1}}{(x - a_p)^{n_p}} + ... +$$

$$\frac{B^{11}x + C^{11}}{x^2 + b_1 x + c_1} + \frac{B^{12}x + C^{12}}{(x^2 + b_1 x + c_1)^2} + ... + \frac{B^{1m_1}x + C^{1m_1}}{(x^2 + b_1 x + c_1)^{m_1}} +$$

$$\frac{B^{21}x + C^{21}}{x^2 + b_2 x + c_2} + \frac{B^{22}x + C^{22}}{(x^2 + b_2 x + c_2)^2} + ... + \frac{B^{2m_2}x + C^{2m_2}}{(x^2 + b_2 x + c_2)^{m_2}} + ... +$$

$$\frac{B^{q1}x + C^{q1}}{x^2 + b_q x + c_q} + \frac{B^{q2}x + C^{q2}}{[(x^2 + b_q x + c_q)^2} + ... + \frac{B^{qm_q}x + C^{qm_q}}{[(x^2 + b_q x + c_q)^{m_q}},$$

donde, para cada $1 \leq i \leq q$ *y* $1 \leq j \leq m_1$*,* B^{ij} *y* C^{ij} *son números reales. Se tiene además que* $A^{kn_k} \neq 0$ *para* $k \in \{1, 2, ..., p\}$ *y* $(B^{jm_j})^2 + (C^{jm_j})^2 > 0$ *para* $j \in \{1, 2, ..., q\}$.

La principal dificultad a la hora de aplicar la proposición anterior consiste, como ya se ha dicho, en encontrar la descomposición en factores del polinomio $Q(x)$. Salvado este problema, la descomposición en fracciones simples dada por la segunda parte de la proposición puede ya obtenerse sin dificultad, aunque sí puede ser laboriosa.

La descomposición en fracciones simples dada anteriormente, junto con la linealidad de la integral nos permite limitarnos a considerar las integrales de cada uno de los tipos de fracciones simples que aparecen en la descomposición, a saber

Tipo 1

$$f(x) = \frac{A}{x-c},$$

para todo $x \in [a,b]$, y donde $A, c \in \mathbb{R}$ y c no pertenece al intervalo $[a,b]$. En tal caso tenemos que:

$$\int_a^b f(x)dx = A.log(|\frac{b-c}{a-c}|).$$

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_3^4 \frac{2-x^2}{x^3-3x^2+2x}dx.$$

Tipo 2

$$f(x) = \frac{A}{(x-c)^n},$$

para todo $x \in [a,b]$, y donde $A, c \in \mathbb{R}$ y c no pertenece al intervalo $[a,b]$. En tal caso tenemos que:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{A}{n-1}[\frac{1}{(a-c)^{n-1}} - \frac{1}{(b-c)^{n-1}}].$$

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_0^{1/2} \frac{2x}{x^2-2x+1}dx.$$

Tipo 3

$$f(x) = \frac{Bx+C}{x^2+cx+d},$$

para todo $x \in [a,b]$, donde $B, C, c, d \in \mathbb{R}$. En este caso se procede de la siguiente forma:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{B}{2}\int_a^b \frac{2x+c}{x^2+cx+d}dx + (C - Bc/2)\int_a^b \frac{dx}{x^2+cx+d}.$$

La primera integral del segundo miembro nos queda no es otra cosa que

$$log(|\frac{b^2+cb+d}{a^2+ca+d}|).$$

Para la segunda integral se escribe $x^2 + cx + d = (x-r)^2 + s^2$ y se toma toma $u = \frac{x-r}{s}$, con lo que nos queda

$$\frac{1}{s}\int_{\frac{a-r}{s}}^{\frac{b-r}{s}} \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{s}[arc\ tg(\frac{b-r}{s}) - arc\ tg(\frac{a-r}{s})].$$

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_3^4 \frac{2x-1}{x^4+x^3-x-1}dx.$$

Tipo 4 Esto es,

$$f(x) = \frac{r(x)}{(x^2+cx+d)^n},$$

para todo $x \in [a,b]$, donde $, c, d \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$ y $r(x)$ es un polinomio de grado menor o igual que $2n-1$.

En este caso usaremos el **método de Hermite** que consiste en escribir

$$f(x) = \frac{ex+f}{x^2+cx+d} + [\frac{F(x)}{(x^2+cx+d)^{n-1}}]',$$

donde $F(x)$ es un polinomio de grado 2n-3 a determinar. Por tanto, la técnica exige derivar el cociente, multiplicar la igualdad por $(x^2+cx+d)^n$, y a partir de aquí, calcular los coeficientes de dicho polinomio.

Así pues

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{ex+f}{x^2+cx+d}dx + \frac{F(b)}{(b^2+cb+d)^{n-1}} - \frac{F(a)}{(a^2+ca+d)^{n-1}}.$$

En este caso usaremos el **método de Hermite** que consiste en escribir

$$f(x) = \frac{ex+f}{x^2+cx+d} + [\frac{F(x)}{(x^2+cx+d)^{n-1}}]',$$

donde $F(x)$ es un polinomio de grado 2n-3 a determinar. Por tanto, la técnica exige derivar el cociente, multiplicar la igualdad por $(x^2+cx+d)^n$, y a partir de aquí, calcular los coeficientes de dicho polinomio.

Así pues

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{ex+f}{x^2+cx+d}dx + \frac{F(b)}{(b^2+cb+d)^{n-1}} - \frac{F(a)}{(a^2+ca+d)^{n-1}}.$$

La integral que queda es una de tipo 3).

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_3^4 \frac{2-x^2}{x^4+4x^2+4}dx.$$

4.2.2. Integración de funciones no racionales

El problema de evaluar funciones no racionales se llevará a cabo utilizando diversos cambios de variable hasta conseguir que la nueva función a integrar sea racional. No hay un método general para ello , sino un recetario más o menos amplio, de hecho, la simple inspección del integrando sugiere el cambio de variable adecuado.

Empezaremos fijando una notación que nos permitirá exponer de manera rápida y sin ambigüedad los distintos métodos de integración que vamos a tratar. En lo que sigue I será un intervalo del tipo $[a,b]$ y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ será una función continua. Para calcular la integral de f usaremos sistemáticamente el cambio de variable $x = \phi(t)$, donde ϕ es una función biyectiva de un cierto intervalo J sobre I y de clase $\mathcal{C}^1$ en J. Si notamos por $g(t) = f \circ \phi(t).\phi'(t)$, para todo $t \in J$, transformaremos la integral de la función inicial en la integral de la función g en el intervalo J. Si g es racional, aplicaremos los conocimientos dados en la primera parte de la lección. En las demás ocasiones será preciso un nuevo cambio de variable. Encontraremos así un nuevo intervalo K y una nueva función φ tal que $t = \varphi(u)$, donde φ es una función biyectiva de K sobre J y de clase $\mathcal{C}^1$ en K. Si notamos por $h(u) = g \circ \varphi(u).\varphi'(u)$, para todo $u \in k$, transformaremos la integral de la función g en la integral de la función h en el intervalo K, y vuelta a empezar.

1. <u>Funciones trigonométricas</u>

   Sea una función f que es cociente de sumas y productos de las funciones seno y coseno. Dado que f es una función periódica de periodo 2π podremos limitarnos a considerar $I \subseteq [-\pi, \pi]$. Hacemos en este caso el cambio de variable

   $$x = \phi(t) = 2arctg(t).$$

   La función g que aparece es una función racional. De hecho,

   $$cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \text{y} \quad sen(x) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

   Ejercicio: Calcular $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{sen(x)}$

A parte del cambio típico antes mencionado, podemos incluir otros cambios para algunos casos particulares del siguiente tipo de integral:

$$\int_a^b \frac{sen^n(x)}{cos^m(x)}dx \qquad a,b \in I$$

a) Si n es impar, se hace el cambio $x = arccos(t)$, siempre que $[a,b] \subseteq [0,\pi]$.

b) Si m es impar, se hace el cambio $x = arcsen(t)$, siempre que $[a,b] \subseteq [-\pi/2, \pi/2]$.

c) Si n y m son pares se usan las fórmulas

$$cos^2(x) = \frac{1+cos(2x)}{2}, \quad sen^2(x) = \frac{1-cos(2x)}{2}.$$

2. Funciones trascendentes

Sea f una función que es cociente de sumas y productos de la función e^x con ella misma. Hacemos en este caso el cambio de variable $x = \phi(t) = log(t)$. La función g que aparece es de nuevo una función racional.

Ejercicio: Calcúlese $\int_1^2 \frac{dx}{shx}$

3. Irracionales cuadráticas

Vamos a distinguir tres tipos fundamentalmente:

1) Funciones que son cociente de sumas y productos de las funciones x y $\sqrt{x^2-1}$

En este caso hacemos el cambio de variable ó bien $x = \phi(t) = \frac{1}{cost}$ y por tanto la función g que aparece es del tipo trigonométrico visto anteriormente, ó bien $x = \phi(t) = ch(t)$ y la función g que aparece es una función de tipo trascendente visto también anteriormente.

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_3^4 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx.$$

2) Funciones que son cociente de sumas y productos de las funciones x y $\sqrt{1-x^2}$

En este caso hacemos el cambio de variable $x = \phi(t) = sen(t)$ y por tanto la función g que aparece es del tipo trigonométrico visto anteriormente.

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

3) Funciones que son cociente de sumas y productos de las funciones x y $\sqrt{1+x^2}$

En este caso hacemos el cambio de variable ó bien $x = \phi(t) = tg(t)$ y por tanto la función g que aparece es del tipo trigonométrico visto anteriormente, ó bien $x = \phi(t) = sh(t)$ y la función g que aparece es una función de tipo trascendente visto también anteriormente.

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_3^4 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

Nota

Las funciones $f(x)$ que son cociente de sumas y productos de x y de $\sqrt{ax^2+bx+c}$ se pueden reducir a uno de los tres casos anteriores ya que

$$ax^2 + bx + c = a(x + b/2a)^2 - b^2/4a + c,$$

y por tanto si hacemos un primer cambio $u = x + b/2a$ y posteriormente

a) si $a > 0$ y $b^2 - 4ac > 0$, hacemos un nuevo cambio, $t = \frac{\sqrt{a}u}{\sqrt{b^2-4ac}}$, resultanto una integral del tipo $\sqrt{t^2-1}$

b) Si $a > 0$ y $b^2 - 4ac < 0$, hacemos un nuevo cambio, $t = \frac{\sqrt{a}u}{\sqrt{c-b^2/4a}}$, resultando una integral del tipo $\sqrt{t^2+1}$.

c) Si $a < 0$ y $b^2 - 4ac < 0$, hacemos un nuevo cambio, $t = \frac{\sqrt{-a}u}{\sqrt{c-b^2/4a}}$ resultando una integral del tipo $\sqrt{1-t^2}$

4. Irracionales en x:

Consideraremos funciones que son cociente de sumas y productos de potencias racionales de x, esto es, f tales que

$$f(x) = F(x^{\frac{p_1}{q_1}}, x^{\frac{p_2}{q_2}}, ..., x^{\frac{p_n}{q_n}}).$$

Hacemos el cambio de variable $x = t^m$, donde $m = m.c.m.\{q_1, q_2, ..., q_n\}$. Así pues, la función a integrar que resulta después del cambio es una función de tipo racional, que ya sabemos resolver.

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}} dx.$$

4.2.3. Relación de ejercicios

1. Calcúlense las siguientes integrales:

   a) $\int_2^3 \frac{1+2x-x^2}{x^4-4x^3+7x^2-6x+2}dx.$ b) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{senx-tgx}.$ c) $\int_0^{3\pi/2} \frac{dx}{2+cosx}.$

   d) $\int_0^1 \frac{dx}{coshx}.$ e) $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-2}}$ f) $\int_{1/2}^2 \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}.$

   g) $\int_1^2 \frac{dx}{(4+x^2)^{3/2}}.$ h) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^4-1}.$ i) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-2x+2)^2}.$

   j) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}.$ k) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}.$ l) $\int_0^1 x\sqrt{x^2+x+1}dx.$

2. Pruébense las siguientes igualdades:

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\ dx}{\sqrt{1-senx}} = 2, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}\ dx}{\sqrt{x}} = 2, \qquad \int_0^1 log(x)\ dx = -1$$

4.3. Aplicaciones del cálculo integral

Sumario

En esta lección presentaremos varias aplicaciones del cálculo integral. La idea que subyace en todas las aplicaciones que vamos a ver en esta lección es que la integral puede verse como un procedimiento de "paso al límite"de la suma. Así mismo, conviene señalar que en esta lección nos basta con la idea intuitiva del concepto de área y que más adelante definiremos con todo rigor. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

4.3.1. La integral como ″ paso al límite ″

La idea central en todo lo que sigue es que si f es una función integrable en un intervalo dado, la integral de dicha función puede obtenerse como el límite de una cierta sucesión de sumas. Escribamos esta idea de forma más concreta:

Sea $[a,b]$ un intervalo, $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ una partición del intervalo $[a,b]$ y supogamos que, para cada $k = 1, 2, ..., n$, $t_k \in I_k = [x_{k-1}, x_k]$.

Llamaremos **Suma integral de f asociada a la partición** P, $\alpha(f,P)$,

$$\alpha(f,P) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Se llama **diámetro** de la partición, ΔP, a la mayor de las longitudes de los subíntervalos $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ que genera la partición, esto es,

$$\Delta P = max\{|x_k - x_{k-1}| : \ k = 1, 2, ..., n\}.$$

La idea consiste en usar la siguiente propiedad:

Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable y si la sucesión de particiones del intervalo $[a,b]$, $\{P_n\}$, es tal que la sucesión de sus correspondientes diámetros, $\{\Delta(P_n)\}$, converje a cero, entonces la sucesión $\{\alpha(f,P_n)\}$ converge a la integral de f.

Este hecho es consecuencia del siguiente importante resultado

Teorema 4.3.1. *(***Teorema de Darboux***)*

Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable y si $\{P_n\}$ es una sucesión de particiones cuya sucesión de diámetros asociada, $\{\Delta P_n\}$, tiende a cero, entonces las sucesiones $\{S(f, P_n\}$ e $\{I(f, P_n)\}$ convergen a $\int_a^b f(x)dx$.

Esta técnica puede aplicarse a todos los campos de la ciencia, veamos algunos ejemplos:

Ejemplos

1. Cálculo de límites

A modo de ejemplo podemos probar que

$$lim_n\{\frac{1+2+...+n}{n^2}\} = 1/2.$$

Como estrategia general, tomaremos como $\{P_n\}$ la sucesión de particiones del intervalo $[a, b]$ tal que, para cada n, todos los subintervalos que generan I_k^n, son de longitud $(b-a)/n$, entonces

$$lim_n\{\sum_{k=1}^{n} f(y_k^n)(b-a)/n\} = \int_a^b f(x)dx,$$

siempre que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $y_k^n \in I_k^n$, así en nuestro caso concreto

$$lim_n\{\sum_{k=1}^{n} k/n^2\} = lim_n\{\sum_{k=1}^{n}(k/n)1/n\} = \int_0^1 xdx,$$

donde la función f considerada es la restricción de la función identidad al intervalo $[0, 1]$.

2. Ejemplo de un problema de tipo económico.

Supongamos que un negocio obtiene en sus primeros días los siguientes beneficios

días	1	2	3	4
Euros	8	17	32	53

El propietario tiene razones suficientes para creer que el negocio continuará creciendo siguiendo la pauta de los primeros días, a saber el beneficio de cada día t, seguirá la ley $B(t) = 3t^2 + 5$. Para hacer el cálculo del beneficio anual, siguiendo indicaciones de un economista, considera además que la ley del beneficio es la función continua descrita anteriormente. ¿Cuál será este beneficio anual?

La estrategia a seguir será considerar una sucesión de particiones del intervalo $[0, 365]$ cuya sucesión de diámetros tiende a cero. De hecho podemos considerar que, para cada particíón, todos los subintervalos son de igual longitud $\Delta(P_n)$. A continuación se construyen las sumas integrales asociadas a la función $B(t)$ considerando como valor de cada subíntervalo su extremo derecho. El paso al límite nos dará como beneficio anual

$$B = \int_0^{365} 3t^2 + 5dt.$$

3. Ejemplo de un problema de tipo físico

Supóngase que queremos calcular la fuerza de atracción de un varilla metálica de masa M y de longitud l y una masa puntual m situada en la dirección de la varilla y cuya distancia al extremo más lejano es L.

La estrategia a seguir será considerar una sucesión de particiones del intervalo $[0, l]$ cuya sucesión de diámetros tiende a cero. De hecho podemos considerar que, para cada particíón, todos los subintervalos son de igual longitud $\Delta(P_n)$. A continuación se construyen las sumas integrales asociadas a la función $f(t) = G\frac{Mm}{l(L-t)^2}$ considerando como valor de cada subíntervalo su extremo derecho. El paso al límite nos dará como fuerza de atracción F.

$$F = \int_0^{l} f(t)dt.$$

4.3.2. Cálculo del área de un recinto plano

La segunda de las aplicación ya fue presentada al inicio de la lección I.9.

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ una función continua y sea

$$R(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Siguiendo el método de exhaución y el apartado anterior, se tiene que el "área"del conjunto $R(f)$, $A(R(f))$, viene dada por la siguiente fórmula.

$$A(R(f)) = \int_a^b f(x)dx.$$

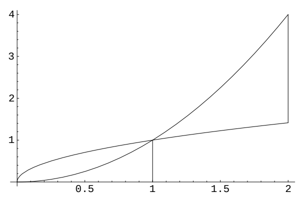
De manera más general, dadas $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones integrables, verificando que, para cada $x \in [a, b]$, $f(x) \geq g(x)$ podemos considerar el recinto

$$R(f, g) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq g(x)\}.$$

Es ahora fácil probar que el área de dicho recinto $A(R(f,g)))$, verifica

$$A(R(f,g)) = |\int_a^b f(x) - g(x)dx|.$$

Considérense por ejemplo las funciones $f, g : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$, y el recinto $R(f,g)$, comprendido entre las correspondientes gráficas



Es claro que área de dicho recinto $A(R(f,g)))$, verifica

$$A(R(f,g)) = |\int_0^1 x^2 - \sqrt{x}dx| + |\int_1^2 x^2 - \sqrt{x}dx| = 3 - 4/3\sqrt{2}.$$

Ejercicio: Calcular el área de un círculo de radio r.

4.3.3. Cálculo de la longitud de una curva

Una **curva en el plano** no es más que una función continua definida en un intervalo cerrado y acotado y con valores en $\mathbb{R}^2$.

Sea $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva en el plano. Tal como hicimos en la lección I.3 con la semicircunferencia unidad, podemos definir, supuesto que exista dicho supremo, la longitud de la curva γ por

$$l(\gamma) = Sup\{l(P,\gamma);\ P \text{ partición de } [a,b]\},$$

donde para cada partición $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$, se sabe que,

$$l(P,\gamma) = dist(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) + ... + dist(\gamma(t_{n-1}), \gamma(t_n)).$$

Es fácil probar que si $\{P_n\}$ es una sucesión de particiones del intervalo $[a,b]$, cuyos diámetros " tienden " a cero, entonces la sucesión $\{l(P_n,\gamma)\}$ tiende a $l(\gamma)$.

Pues bien, si existen dos funciones de clase $\mathcal{C}^1$ en el intervalo $[a,b]$ tales que $\gamma(t) = (f(t), g(t))$, entonces

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{[f'(x)]^2 + [g'(x)]^2}dx.$$

En orden a justificar la fórmula anterior conviene subrayar que para cada partición $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ y $k \in \{1, 2, ..., n\}$,

$$dist(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)) = dist[(f(t_{k-1}), g(t_{k-1})), (f(t_k)), g(t_k))] =$$

$$= \sqrt{(f(t_{k-1} - f(t_k))^2 + (g(t_{k-1} - g(t_k)^2},$$

pero, por el teorema del valor medio, sabemos que existen sendos x_k e y_k tales que

$$f(t_{k-1}) - f(t_k) = f'(x_k)(t_k - t_{k-1}),$$

y

$$g(t_{k-1}) - g(t_k) = g'(y_k)(t_k - t_{k-1}),$$

luego

$$dist(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)) = (t_k - t_{k-1})\sqrt{(f'(x_k))^2 + (g'(y_k))^2},$$

y por tanto

$$l(P, \gamma) = \sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})\sqrt{(f'(x_k))^2 + (g'(y_k))^2},$$

por lo que finalmente basta aplicar que la integral no es más que un paso al límite.

En particular si $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$, la longitud de su gráfica,

$$l(Graf(f)) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

Ejercicio: Calcular la longitud de una circunferencia de radio r.

4.3.4. Cálculo del volumen y del área de un sólido de revolución

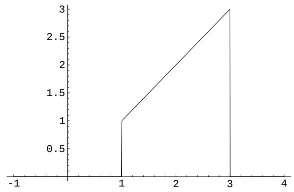
Sólidos de revolución

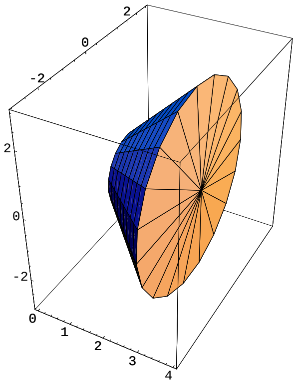
Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua cuya gráfica se encuentra en el semiplano superior. Supongamos que el recinto $R(f)$, definido como en el segundo apartado, gira alrededor del eje x. El conjunto así generado es llamado el **sólido de revolución generado por f al girar sobre el eje** x, el cual es el subconjunto de $\mathbb{R}^3$, definido por

$$S_x(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ a \leq x \leq b,\ y^2 + z^2 \leq f^2(x)\}.$$

Considérese por ejemplo la función identidad restringida al intervalo $[1, 3]$. En la siguiente figura vemos el correspondiente $R(f)$

y por tanto el correspondiente sólido de revolución es el siguiente tronco de cono



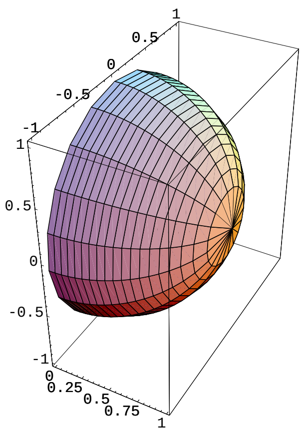


Área lateral

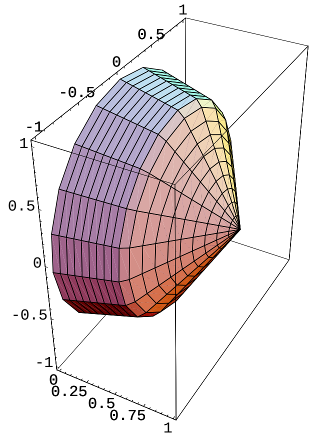
Se puede probar que el "área lateral"de $S_x(f)$, $A(S_x(f))$ se obtiene mediante la fórmula:

$$A(S_x(f)) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.$$

Para justificar la fórmula anterior basta considerar, para cada partición del intervalo $[a, b]$ y cada subíntervalo que ésta genera, el tronco de cono correspondiente. Así, por ejemplo, si consideramos la semiesfera de radio uno,



y los dos troncos de cono asociados a la partición $P = \{0, 1/2, 1\}$



Obsérvese que la suma de las áreas laterales de estos dos troncos de cono es menor que el área lateral de la semiesfera y que, a medida que tomemos particiones con más puntos, la suma de las áreas laterales de los correspondientes troncos de cono sigue siendo menor que el área lateral de la semiesfera pero cada vez más ajustada a ésta.

En tal caso, el área lateral se obtiene como paso al límite de la suma de las áreas laterales de los correspondientes troncos de cono, sin más que usar el hecho de que el área lateral de un tronco de cono es $\pi(R+r)s$, donde R es el radio mayor, r el radio menor y s es la "generatriz truncada".

Ejercicio: Calcúlese el área de una esfera.

Volumen

Podemos ahora considerar el volumen del sólido generado por giro alrededor del eje x. Es fácil ver que el "volumen"de $S(f)$, $V(S_x(f))$ se puede obtener mediante la fórmula

$$V(S_x(f)) = \int_a^b \pi f^2(x)dx.$$

Esta fórmula se obtiene considerando el volumen del sólido de revolución como el "paso al límite "de la suma de los correspondientes volúmenes de los de los cilindros, que para cada partición, tienen la longitud cada subíntervalo como altura y el valor de f en un punto de dicho subíntervalo como radio.

Si f es una función continua y monótona y con $0 \notin [a,b]$, y hacemos girar el recinto $R(f)$ alrededor del eje y, obtenemos un nuevo sólido de revolución

$$S_y(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ f(b) \le z \le f(a),\ x^2+y^2 \le f^2(x)\}.$$

En este caso, su volumen, $V(S_y(f))$, puede ser calculado como sigue:

$$V(S_y(f)) = \int_a^b 2x\pi f(x)dx,$$

usando como estrategia el cálculo del límite de las sumas de los volúmenes de los anillos cilíndricos que se generan al tomar particiones en el intervalo $[a, b]$.

Ejercicio: Calcular el volumen de un elipsoide.

4.3.5. Relación de ejercicios

1.- Calcular las siguientes áreas:

a) Área limitada por las curvas $y = x^2$ y $y^2 = 8x$

b) Área limitada por $y = x\mathrm{e}^{-x^2}$, el eje x, la recta $x = 0$ y la la recta $x = a$, donde a es la abscisa del punto donde la función $f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$ alcanza el máximo.

c) Area de la figura limitada por la curva $y = x(x-1)(x-2)$ y el eje x.

d) Area comprendida entre la curva $y = \mathrm{tg}(x)$, el eje OX y la recta $x = \pi/3$.

e) Area del recinto limitado por las rectas $x = 0,\ x = 1,\ y = 0$ y la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$

f) Area de la superficie obtenida por la revolución de la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $x = 5$ alrededor del eje x.

g) Hallar el área del recinto limitado por las gráficas de $f(x) = \cosh x$ y $g(x) = shx$, en el primer cuadrante.

2.- Hallar la longitud de la curva $y = \dfrac{x^4+48}{24x}$ en $[2, 4]$

3.- Hallar la longitud de la curva $y = \log(1-x^2)$ en $[1/3, 2/3]$.

4.- Hallar la longitud de la catenaria. Ecuación :

$$f : [-a, a] \to \mathbb{R} \quad : \quad f(x) = \frac{1}{2}a(\mathrm{e}^{x/a} + \mathrm{e}^{-x/a})$$

5.- Al girar alrededor del eje x, el segmento de curva $y = \sqrt{x}$ comprendido entre las abscisas 0 y a, engendra un tronco de paraboloide de revolución cuya superficie equivale a la de una esfera de radio $\sqrt{13/12}$. Hállese el valor de a.

6.- Calcúlese el volumen del sólido de revolución generado por la curva $y = \mathrm{sen}^2(x),\ x \in [0, \pi]$, cuando ésta gira en torno al eje x.

7.- Hallar el volumen generado al girar alrededor del eje OX la gráfica de $f(x) = \dfrac{18x}{x^2+9}$.

8.- Calcular el volumen del sólido generado al girar la región limitada por $x = y^2$ e $y = x^2$

a) alrededor del eje x.

b) alrededor del eje y.

9.- Idéntico ejercicio que el anterior para la región limitada por las rectas $y = 1$, $x = 1$ y la curva $y = x^3 + 2x + 1$.

10.- Calcúlese el trabajo necesario para levantar un objeto de masa m desde una altura h_a hasta una altura h_b, supuesto que la fuerza debida a la atracción que ejerce la Tierra, cuya masa es M y cuyo radio es R, no es constante.

11.- Calcúlese la fuerza de atracción que ejerce una varilla de longitud 6 unidades y de masa 18 unidades sobre un punto de masa m situado a 3 unidades de longitud

a) en la prolongación de la varilla.

b) en la perpendicular al punto medio de la varilla.

4.4. Integral de Lebesgue

Sumario

El objetivo de esta lección es presentar, a vista de pájaro, la integral de Lebesgue. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

4.4.1. ¿Por qué una nueva integral?

Hacia finales del siglo XIX resultó claro para muchos matemáticos que la integral de Riemann tiene importantes limitaciones, es sabido por ejemplo su mal comportamiento con ciertos procesos de convergencia. Ésta y otras limitaciones que ahora veremos, obligaron a realizar nuevos intentos de construcción de otras integrales. Entre estos intentos destacan los debidos a Jordan, Borel, Young y finalmente el de Lebesgue, que resultó ser el más exitoso.

En lo que respecta nosotros, nos interesa destacar las siguientes limitaciones:

1. El conjunto de funciones integrables es relativamente pequeño: Hay funciones sencillas que no son integrables. Recuérdese por ejemplo que la función de Dirichlet, esto es, la función, $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x\ es\ racional \\ 1 & si\ x\ es\ irracional \end{cases}$$

no es integrable.

2. Su extensión a varias variables tiene algunas dificultades.

Ambos problemas están íntimamente relacionados con el hecho de ampliar el concepto de medida a otros conjuntos de números reales no necesariamente intervalos y por extensión a otros subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Las cuestiones pues a resolver son varias: ¿qué conjuntos se pueden medir?, ¿cómo medirlos? , ¿qué funciones se pueden integrar? y ¿cómo hallar su integral?

4.4.2. Conjuntos medibles

1.- Conjuntos que se pueden medir.

Veamos primero algunos conjuntos que deben estar forzosamente entre la familia de los conjuntos "medibles".

Dado I un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ diremos que es un **intervalo** (respectivamante **intervalo acotado**), si existen $I_1, I_2, ..., I_n$ intervalos (respectivamante intervalos acotados) de números reales tales que

$$I = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n.$$

Veamos cómo añadir a partir de aquí nuevos conjuntos.

Se dice que una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ es una **σ-álgebra** si

i) $\mathbb{R}^n \in \mathcal{A}$,

ii) Si $\{A_n\}$ es una sucesión en $\mathcal{A}$, entonces $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$, y

iii) Si $A \in \mathcal{A}$ entonces $\mathbb{R}^n \setminus A \in \mathcal{A}$.

Por otra parte, si $\mathcal{S}$ es una familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, entonces existe una menor σ-álgebra en $\mathbb{R}^n$ conteniendo a $\mathcal{S}$, que denominaremos la **σ-álgebra engendrada** por $\mathcal{S}$.

En una primera etapa vamos a considerar la σ-álgebra engendrada por la familia de los conjuntos de los intervalos acotados, familia que llamaremos **σ-álgebra de Borel**, **B**, mientras que a sus elementos los llamaremos **borelianos**. Para hacernos idea de lo grande que es esta familia tengamos en cuenta que los todos los conjuntos abiertos son borelianos.

Nota

Obsérvese que los conjuntos que resultan de la intersección numerable de abiertos (conjuntos tipo G_δ), no necesariamente abiertos, y los conjuntos que resultan de la unión numerable de cerrados, conjuntos tipo F_δ, no necesariamente cerrados, son también conjuntos borelianos.

¿Cómo medir?

Una vez elegida la familia de conjuntos medibles el problema es asignarle una medida.

Es claro que si I es un intervalo acotado, entonces su medida debe coincidir con su volumen, esto es, $medida(I) = V(I)$, y claro está

$$V(I) = l(I_1)l(I_2)...l(I_n),$$

donde $l(I_k) = b_k - a_k$, siempre que $I_k = [a_k, b_k]$.

A partir de aquí, podemos definir, para cada $A \in$ B, la medida λ, mediante

$$\lambda(A) := Inf\{\sum_{n=1}^{\infty} v(I_n); A \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n, I_n \text{ intervalo acotado}, \quad \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

A dicha medida λ se le llama **medida de Borel-Lebesgue**.

Sabemos que existen conjuntos A borelianos de medida cero, $\lambda(A) = 0$, que contienen subconjuntos no medibles. Parece pues conveniente añadir a la σ-álgebra de Borel estos subconjuntos.

Consideremos pues $\underline{\mathcal{M}}$ la mínima σ-álgebra que contiene simultáneamente a la σ-álgebra de Borel y a todos los subconjuntos de los elementos de ésta que son de medida nula. Sus elementos se denominan **conjuntos medibles-Lebesgue** o simplemente **medibles**.

Los conjuntos medibles se pueden representar por $E = A \cup N$, donde A es un boreliano y N es un subconjunto de un boreliano de medida nula.

Podemos ahora definir una nueva medida, que notaremos igualmente por λ y que llamaremos **medida de Lebesgue** y que viene dada por

$$\lambda(E) = \lambda(A),$$

siempre que $E = A \cup N$, y donde $\lambda(N) = 0$.

Dicha medida posee la propiedad de la aditividad numerable, i.e., para cualquier familia de conjuntos $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ de la σ-álgebra $\mathcal{M}$, disjuntos dos a dos, se verifica

$$\lambda(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n).$$

Como consecuencia de la definición se pueden obtener las siguientes propiedades:

1. Si $A, B \in \mathcal{M}$ y $A \subset B$ entonces $\lambda(A) \leq \lambda(B)$.

2. $\lambda(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)\ \forall A_n \in \mathcal{A}$.

3. λ extiende el volumen de un intervalo, esto es, si $I = \prod_{k=1}^{n} I_k$ es un intervalo acotado en $\mathbb{R}^n$, entonces $\lambda(I) = v(I) = \prod_{k=1}^{n} l(I_k))$.

Se dice que una propiedad P relativa a un punto $x \in \mathbb{R}^n$ se verifica **casi por doquier (c.p.d.)**, si el conjunto de puntos C donde dicha propiedad no se verifica es un conjunto de medida cero, esto es, $\lambda(C) = 0$.

4.4.3. Funciones medibles. Integral de Lebesgue

1. Tipos de funciones que se pueden integrar

Una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ se llama **medible** si $f^{-1}(I) \in \mathcal{M}$ para todo intervalo abierto I.

Como ejemplos de funciones medibles, se pueden mencionar:

- las funciones continuas c.p.d.,

- funciones iguales c.p.d. a una función continua,

- las funciones características de los conjunto medibles.

Recuérdese que si A es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, se llama función **característica de** A, χ_A, a la función $\chi_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in A \\ 0 & si\ x \notin A \end{cases}$$

2) Cómo hallar su integral

Comencemos ahora con las funciones más sencillas y veamos cómo asignarle una integral

Una función medible $s : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice **simple** si sólo toma un número finito de valores.

Toda función simple s puede representarse por

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i},$$

donde $s(\mathbb{R}^n) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $A_i := \{x \in \mathbb{R}^n : s(x) = \alpha_i\}$ y χ_{A_i} es la función característica de A_i.

Si $\alpha_i \geq 0 \ \ \forall i$, se define la **integral** de s por :

$$\int_{\mathbb{R}^n} s d\lambda = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda(A_i).$$

El teorema de aproximación de Lebesgue nos asegura que toda función f medible **positiva** ($f \geq 0$) es límite de una sucesión creciente $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq ... \leq f$ de funciones simples que converge puntualmente a f ($\lim s_n(x) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^n$).

A partir de aquí definimos la **integral** de la función f por

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda := \lim_k \int_{\mathbb{R}^n} s_k \, d\lambda$$

Se puede comprobar que dicha definición no depende de la sucesión $\{s_k\}$ elegida.

4.4.4. Funciones integrables

Dada una función medible $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, se dice que f es **integrable** si

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f| \, d\lambda < \infty.$$

En tal caso se define la **integral de** f por

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} f^+ \, d\lambda - \int_{\mathbb{R}^n} f^- \, d\lambda,$$

donde $f^+ = Max\{f, 0\}$ y $f^- = Max\{-f, 0\}$ (nótese que ambas funciones son medibles positivas).

Notaremos por L al espacio formado por las funciones medibles que son integrables en $\mathbb{R}^n$, esto es

$$L = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \ \text{ medible}; \int_{\mathbb{R}^n} |f| \, d\lambda < \infty\}.$$

Podemos ahora considerar la integrabilidad en conjuntos medibles.

Dado $E \in \mathcal{M}$ y una función medible $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $(E \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n)$, podemos considerar la función $f\chi_E$ como la extensión de f a todo $\mathbb{R}^n$, que se anula fuera de E.

Se dice que f es **integrable en** E, si $f\chi_E \in L$, y en tal caso se define la **integral de** f **en** E por

$$\int_E f \, d\lambda := \int_{\mathbb{R}^n} f\chi_E \, d\lambda.$$

Dicha integral recibe el nombre **integral de Lebesgue de** f **en** E.

Dado $E \in \mathcal{M}$, notaremos por $L(E)$ al espacio formado por las funciones medibles que son integrables en E.

4.4.5. Propiedades

Comentemos algunas de sus propiedades más interesantes:

1) *$L(E)$ es un espacio vectorial y*

$$\int_E (rf+g)\ d\lambda = r\int_E f\ d\lambda + \int_E g\ d\lambda, \quad (r\in\mathbb{R}, f, g\in L(E)).$$

2)

$$|\int_E f\ d\lambda| \leq \int_E |f|\ d\lambda, \quad (f\in L(E))$$

3) *Si f y g son medibles e iguales c.p.d., entonces f es integrable en E si, y sólo si, lo es g*, y en tal caso

$$\int_E f\ d\lambda = \int_E g\ d\lambda.$$

4) Sean E, A y B tres conjuntos medibles tales que $E = A\cup B$ y $\lambda(A\cap B) = 0$. Entonces f es integrable en E si, y sólo si, f es integrable en A y B. Además, en caso afirmativo

$$\int_E f\ d\lambda = \int_A f\ d\lambda + \int_B f\ d\lambda.$$

5) $\lambda(E) = \int_E 1\ d\lambda$.

6)

Teorema 4.4.1. *(del cambio de variable)*
Sean U y V dos conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$, y $\phi : U \longrightarrow V$ una función biyectiva de clase $\mathcal{C}^1(U)$ cuyo jacobiano es no nulo en todo punto de U. Sea E un subconjunto medible contenido en U y sea $f : \phi(E) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable. Entonces

$$\int_{\phi(E)} f d\lambda = \int_E f\circ\phi |J_\phi| d\lambda.$$

Veamos finalmente la relación de ésta nueva integral con la integral de Riemann.

- **Las funciones integrables de siempre son también integrables en el sentido de Lebesgue**

Sea $n = 1$ y sea $E = [\alpha, \beta]$, con $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$. Si f es integrable en el sentido de Riemann en E entonces $f \in L(E)$ y en tal caso

$$\int_E f\ d\lambda = \int_\alpha^\beta f(x)\ dx.$$

- **Añadimos nuevas funciones**

  La función de Dirichlet es integrable en el sentido de Lebesgue; de hecho, dado que $\mathbb{Q}$ es de medida nula, se tiene que

$$\int_{[0,1]} f \ d\lambda = 1.$$

- **También las funciones absolutamente integrables quedan bajo control**

  En el caso en que admitamos que α puede ser $-\infty$ y β a su vez $+\infty$, y que f sea una función continua en $I =]\alpha, \beta[$, $|f|$ es "impropiamente"integrable en el sentido de Riemann en I si, y sólo si, $f \in L(I)$, y en tal caso

$$\int_I |f| \ d\lambda = \int_\alpha^\beta |f(x)| \ dx.$$

- **Seguimos teniendo las propiedades más interesantes de la integral de Riemann**

  a)

  Teorema 4.4.2. *(***Regla de Barrow***) Si $f \in L(I)$ y admite primitiva G, entonces existen los límites de G en α y en β, y además se tiene*

$$\int_I f \ d\lambda = \lim_{x \to \beta} G(x) - \lim_{x \to \alpha} G(x).$$

  En consecuencia,

  b)

  Teorema 4.4.3. *(***de integración por partes***) Sean $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones derivables tales que $f'g$ y $fg' \in L(I)$. Entonces existen los límites de fg en α y en β, y además se tiene*

$$\int_I fg' \ d\lambda = \lim_{x \to \beta} f(x)g(x) - \lim_{x \to \alpha} f(x)g(x) - \int_I fg' \ d\lambda.$$

  c)

  Teorema 4.4.4. *(***del cambio de variable***) Si $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función derivable, con $\varphi'(t) \neq 0$ y $f : \varphi(I) \to \mathbb{R}$ es una función medible, entonces $f \in L(\varphi(I))$ si, y sólo si, $f \circ \varphi . \varphi' \in L(I)$ y*

$$\int_{\varphi(I)} f \ d\lambda = \int_I f \circ \varphi . \varphi' \ d\lambda.$$

4.4.6. Funciones definidas por integrales

En esta parte final de la lección vamos a hablar de funciones **definidas por una integral**, llamadas también integrales **dependientes de un parámetro**, esto es, funciones $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$, donde I es un intervalo de números reales, y definidas a partir de otra función

$$f : I \times E \longrightarrow \mathbb{R},$$

tal que, para cada $t \in I$, $w \longmapsto f(t, w)$ es integrable en E, donde E es un subconjunto medible de $\mathbb{R}^n$. Concretamente la función F, viene definida mediante la fórmula

$$F(t) = \int_E f(t, w) d\lambda \ \ \forall t \in I.$$

Pues bien se tiene que si

1) a) para cada $w \in E$, la aplicación $t \longmapsto f(t, w)$ es continua en I y
   b) Existe g integrable en E tal que

$$|f(t, w)| \leq g(w), \quad \forall t \in I, \ \forall w \in E$$

Entonces F es continua en I.

2) a) para cada $w \in E$, la aplicación $t \longmapsto f(t, w)$ es derivable en I y
   b) Existe g integrable en E tal que

$$|\frac{\partial f}{\partial t}(t, w)| \leq g(w), \quad \forall t \in I, \ \forall w \in E$$

Entonces F es derivable en I con

$$F'(t) = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(t, w) d\lambda \quad \forall t \in I.$$

Ejemplo Pruébese que la función $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} cos(tx) e^{-x^2/2} dx$$

es derivable con $F'(t) = -tF(t) \ \ \forall t \in \mathbb{R}$. Deducir de ello que

$$F(t) = Ce^{-t^2/2} \ \ \forall t \in \mathbb{R},$$

siendo $C = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx$.

4.5. Técnicas de integración en varias variables

Sumario

En esta lección vamos a introducir la integración en varias variables. Entre otros problemas nos encontramos con el hecho de que no se dispone de ningún procedimiento elemental comparable a la Regla de Barrow. Esta contrariedad se resolverá con una técnica fundamental: Teorema de Fubini, que relaciona la integral en $\mathbb{R}^n$ con integraciones sucesivas en espacios de menor dimensión. Siguiendo este proceso acabaremos finalmente integrando en una de las variables. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

4.5.1. Teorema de Fubini

Como era de esperar, la definición de integral no es útil para el cálculo de dicha integral. Recuérdese que este problema, en el caso de intervalos de números reales, se resolvió en $\mathbb{R}$ usando la regla de Barrow, pero esta herramienta no está disponible ni en $\mathbb{R}^2$ ni en $\mathbb{R}^3$. Nuestro siguiente resultado trata de resolver esta dificultad, relacionando la integral múltiple con sucesivas integrales en $\mathbb{R}$. Para ello, consideremos las siguientes observaciones:

Sea $E \subseteq \mathbb{R}^{p+q}$, notaremos, para cada $x \in \mathbb{R}^p$, por

$$E(x) = \{y \in \mathbb{R}^q : \ (x, y) \in E\}.$$

Análogamente, notaremos, para cada $y \in \mathbb{R}^q$, por

$$E(y) = \{x \in \mathbb{R}^p : \ (x, y) \in E\}.$$

Es fácil probar que si E es un subconjunto medible de $\mathbb{R}^{p+q}$, entonces $E(x)$ y $E(y)$ son subconjuntos medibles respectivamente de $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^q$.

Teorema 4.5.1. *(Teorema de Fubini.Caso $p = 1, q = 1$)*
Sea $E \subseteq \mathbb{R}^2$ medible y sea $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable, entonces

$$\int_E f(x, y)d(x, y) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} [\int_{E(x)} f(x, y)dy]dx = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} [\int_{E(y)} f(x, y)dx]dy,$$

siendo $\alpha_1 = Inf\ E_1,\ \beta_1 = Sup\ E_1,\ \alpha_2 = Inf\ E_2,\ \beta_2 = Sup\ E_2$, *donde*

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R};\ E(x) \neq \emptyset\}$$

y

$$E_2 = \{y \in \mathbb{R};\ E(y) \neq \emptyset\}$$

En particular, cuando $E = I \times J$, *siendo* I, J *intervalos de* $\mathbb{R}$, *entonces*

$$\int_E f(x,y) = \int_I [\int_J f(x,y)dy]dx = \int_J [\int_I f(x,y)dx]dy.$$

Ejemplo: Calcular el área de la elipse de semiejes a y b.

Teorema 4.5.2. *(Teorema de Fubini. Caso* $p = 2, q = 1$*)*
Sea $E \subseteq \mathbb{R}^3$ *medible y sea* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función integrable, entonces*

$$\int_E f(x,y,z)d(x,y,z) = \int_{\alpha_3}^{\beta_3} [\int_{E(z)} f(x,y)d(x,y)]dz,$$

siendo $\alpha_3 = Inf\ E_3,\ \beta_3 = Sup\ E_3$, *donde*

$$E_3 = \{z \in \mathbb{R};\ E[z] \neq \emptyset\}$$

y a su vez

$$E[z] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ (x,y,z) \in E\}.$$

Análogamente se podría hacer, para $(p = 1,\ q = 2)$ sin más que considerar los conjuntos $E[x]$ y $E[y]$.

Ejercicio: Calcúlese el volumen del elipsoide de semiejes a, b y c.

4.5.2. Cambio de coordenadas

Es posible que convenga cambiar la función inicial por otra función. Este cambio será arbitrado por el teorema del cambio de variable, que suele usarse en alguna de las siguientes formas concretas:

<u>*Coordenadas polares,* $n = 2$</u>

Tomamos $U = \mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi[$, $V = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x,0);\ x \leq 0\}$, y la aplicación $\phi : U \longrightarrow V$ definida por

$$\phi(\rho,\theta) = (\rho cos\theta, \rho sen\theta).$$

En este caso

$$detJ_\phi(\rho,\theta)=\rho>0,\ \forall(\rho,\theta)\in U,$$

y por tanto

$$\int_E f(x,y)d(x,y)=\int_{\phi^{-1}(E)} f(\rho cos\theta,\rho sen\theta)\rho d(\rho,\theta).$$

Ejercicio: Sea $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2\leq r^2\}$. Calcúlese $\int_E 1d(x,y)$.

Coordenadas cilíndricas, $n=3$

Tomamos $U=\mathbb{R}^+\times]-\pi,\pi[\times\mathbb{R}$, $V=\mathbb{R}^3\backslash\{(x,0,z);\ x\leq 0\}$, y la aplicación $\phi:U\longrightarrow V$ definida por

$$\phi(\rho,\theta,z)=(\rho cos\theta,\rho sen\theta,z).$$

En este caso

$$detJ_\phi(\rho,\theta,z)=\rho>0,\ \forall(\rho,\theta,z)\in U,$$

y por tanto

$$\int_E f(x,y,z)d(x,y,z)=\int_{\phi^{-1}(E)} f(\rho cos\theta,\rho sen\theta,z)\rho d(\rho,\theta,z).$$

Ejercicio: Sea $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x^2+y^2\leq r^2;\ 0\leq z\leq h\}$, con $r,h>0$. Calcúlese $\int_E 1d(x,y,z)$.

Coordenadas esféricas, $n=3$

Tomamos $U=\mathbb{R}^+\times]-\pi,\pi[\times]-\pi/2,\pi/2[$, $V=\mathbb{R}^3\backslash\{(x,0,z);\ x\leq 0\}$, y la aplicación $\phi:U\longrightarrow V$ definida por

$$\phi(\rho,\theta,\varphi)=(\rho cos\theta cos\varphi,\rho sen\theta cos\varphi,\rho sen\varphi).$$

En este caso

$$detJ_\phi(\rho,\theta,\varphi)=\rho^2cos\varphi>0,\ \forall(\rho,\theta,\varphi)\in U,$$

y por tanto

$$\int_E f(x,y,z)d(x,y,z)=\int_{\phi^{-1}(E)} f(\rho cos\theta cos\varphi,\rho sen\theta cos\varphi,sen\varphi)\rho^2cos\varphi d(\rho,\theta,\varphi).$$

Ejercicio: Sea $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2\leq r^2\}$, con $r>0$. Calcúlese $\int_E 1d(x,y,z)$.

4.5.3. Relación de ejercicios

1) Calcúlense las siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int_I \text{sen}^2 x\ \text{sen}^2 y\ d(x,y),\ I=[0,\pi]\times[0,\pi].$

   b) $\displaystyle\int_I \frac{x^2}{1+y^2}\ d(x,y),\ I=[0,1]\times[0,1].$

   c) $\displaystyle\int_I y\ log x\ d(x,y),\ I=[1,e]\times[1,e].$

   d) $\displaystyle\int_I x^3\ y^3\ d(x,y),\ I=[0,1]\times[0,1].$

   e) $\displaystyle\int_I \frac{1}{(1+x+y)^2}\ d(x,y),\ I=[0,1]\times[0,1].$

   f) $\displaystyle\int_I \frac{1}{(1+x+y+z)^3}\ d(x,y,z),\ I=[0,1]\times[0,1]\times[0,1].$

   g) $\displaystyle\int_I x\ log(xy)\ d(x,y),\ I=[2,3]\times[1,2].$

   h) $\displaystyle\int_I y\ \cos(xy)\ d(x,y),\ I=[0,1]\times[1,2].$

2) Sea $f: A\to\mathbb{R}$, calcúlese su integral en los siguientes casos:

   a) $f(x,y)=1$ siendo A la región limitada por $y^2=x^3,\quad y=x.$

   b) $f(x,y)=x^2$ siendo A la región limitada por $xy=16, y=x, y=0, x=8.$

   c) $f(x,y)=x$ siendo A el triángulo de vértices $(0,0),(1,1),(0,1).$

   d) $f(x,y)=x$ siendo A la región limitada por la recta que pasa por $(0,2)$ y $(2,0)$ y la circunferencia de centro $(0,1)$ y radio 1.

   e) $f(x,y)=e^{\frac{x}{y}}$ siendo A la región limitada por $y^2=x, x=0, y=1.$

   f) $f(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$ siendo A la región limitada por $y=\frac{x^2}{2}, y=x.$

   g) $f(x,y)=xy^2$ siendo A la región limitada por $y^2=2x, x=1.$

   h) $f(x,y)=xy$ siendo A la región limitada por la semicircunferencia superior $(x-2)^2+y^2=1$ y el eje OX.

   i) $f(x,y)=4-y^2$ siendo A la región limitada por $y^2=2x$ y $y^2=8-2x$

   j) $f(x,y)=e^{x^2}$ siendo el conjunto A el triángulo formado por las rectas $2y=x$, $x=2$ y el eje x

3) Calcúlese $\int_A f$ en cada uno de los casos siguientes:

   a) $f(x,y)=1-x-y,\ A=\{(x,y)\in[0,1]\times[0,1];\ x+y\le 1\}$

   b) $f(x,y)=x^2+y^2,\ A=\{(x,y)\in[0,1]\times[0,1];\ x^2+y^2\le 1\}$

   c) $f(x,y)=x+y,\ A=\{(x,y)\in[0,1]\times[0,1];\ x^2\le y\le 2x^2\}$

   d) $f(x,y)=x^2\ y^2,\ A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x\}$

e) $f(x,y) = y^2,\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \le r^2\}$
f) $f(x,y) = 1,\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{4} + y^2 \le 1,\ x^2 \le y\}$
g) $f(x,y) = 1,\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \le 1, x^2 + y^2 \le 2x\}$
h) $f(x,y) = 1,\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\}$
i) $f(x,y) = 1,\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \le r^2\}$
j) $f(x,y) = \cos(x^2 + y^2),\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \le \pi/2\}$
k) $f(x,y) = \dfrac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2},\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0\}$
l) $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2},\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$
m) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}},\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \le 1\}$
n) $f(x,y) = x\ y,\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ 1 \le x^2 + y^2 \le 2\}$
ñ) $f(x,y) = x^2\ y,\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ x \ge 0\}$
o) $f(x,y) = x,\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ x^2 + y^2 \le 1,\ x^2 + y^2 - 2x \ge 0\}$

4) Utilícese el cambio a coordenadas polares para el cálculo de las integrales de las siguientes funciones en los recintos que se indican:
a) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2},\quad A = \bar{B}((0,0),1)$
b) $f(x,y) = y,\quad A = \{(x,y) \in B((\frac{1}{2},0),\frac{1}{2}) :\quad y \ge 0\}$
c) $f(x,y) = x^2 + y^2,\quad A = \bar{B}((1,0),1)$
d) $f(x,y) = x^2 + y^2,\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\quad 4 \le x^2 + y^2 \le 9\}$

5) Calcúlense las siguientes integrales dobles:
a) $f(x,y) = x,\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \le 2x\}$
b) $f(x,y) = x\sqrt{1 - x^2 - y^2},\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \le 1,\ x, y \ge 0\}$
c) $f(x,y) = \exp(\frac{x}{y}),\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y^3 \le x \le y^2,\quad x \ge 0, y \ge 0\}$
d) $f(x,y) = \exp\left(\frac{y-x}{y+x}\right),\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x, y \ge 0,\ x + y \le 2\}$
e) $f(x,y) = (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}},\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\quad x \le y,\ x + y \ge 1,\ x^2 + y^2 \le 1\}$
f) $f(x,y) = x^2 + y^2,\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ (x^2 + y^2)^2 \le 4(x^2 - y^2),\ x \ge 0\}$
g) $f(x,y) = x^2 + y^2,\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \le 2y,\ x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0\}$

6) Calcúlese el volumen de la región A definida por:
a) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \le r^2,\quad x^2 + y^2 - ry \le 0\}$.
b) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \ge 1,\ x^2 + y^2 \le 2,\ z(x^2 + y^2) \le 1,\ z \ge 0\}$.
c) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z^2 \le x^2 + y^2 \le z\}$.
d) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 0 \le z \le 1 - (x^2 + y^2)\}$.

7) Calcúlense las siguientes integrales triples:

a) $\displaystyle\int_A z\, e^{-(x^2+y^2)}\, d(x,y,z)$, $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 2(x^2+y^2) \leq z^2,\ z \geq 0,\ z \leq 1\}$.

b) $\displaystyle\int_A \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, d(x,y,z)$, $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 4\}$.

c) $\displaystyle\int_A (x+y-2z)\, d(x,y,z)$, $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z^2 \geq x^2+y^2,\ z \geq 0,\ z \leq 3\}$.

d) $\displaystyle\int_A \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\right)^n d(x,y,z)$, $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2 \leq a^2\}$ $(n \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{R}^+)$.

e) $f(x,y,z) = (x+y+z)^2, \quad A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 \leq 1, x^2+y^2+z^2 \leq 2z\}$

f) $f(x,y,z) = z, \quad A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \leq 1, z \geq 0\}$

g) $f(x,y,z) = z, \quad A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 1\}$

h) $f(x,y,z) = x^2, \quad A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x \geq 0,\ x^2+y^2+(z-1)^2 \leq 1,\ 4z^2 \geq 3(x^2+y^2)\}$

i) $f(x,y,z) = zy\sqrt{x^2+y^2} \quad A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \leq z \leq x^2+y^2,\ 0 \leq y \leq \sqrt{2x-x^2}\}$

j) $f(x,y,z) = z, \quad A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 \leq 2,\ x^2+y^2 \leq z\}$

k) $f(x,y,z) = z^2, \quad A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 \leq \mathrm{R}^2,\ x^2+y^2+z^2 \leq 2\mathrm{R}z\}$

l) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 3\}$

8) Demuéstrese que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2/2} dx = \sqrt{2\pi/a}$, donde $a > 0$.

4.6. Algunas aplicaciones del cálculo integral a la Física

Sumario

En esta lección obtenemos nuevas aplicaciones del cálculo integral en una y varias variables. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

IV.6.1 Volumen de un sólido.
IV.6.2 Medias
IV.6.3 Centros de gravedad.
IV.6.4 Momentos de inercia.

4.6.1. Volumen de un sólido

Principio de Cavalieri

Sea E un subconjunto medible de $\mathbb{R}^3$, tal que

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R};\ E(x) \neq \emptyset\} = [a, b].$$

Según hemos visto en la lección anterior su volumen, $\lambda(E)$, viene dado por

$$\lambda(E) = \int_E 1\ d(x, y, z),$$

por lo que aplicando el teorema de Fubini y la definición de área de subconjuntos medibles de $\mathbb{R}^2$, se tiene que

$$\lambda(E) = \int_a^b (\int_{E(x)} 1\ d(y, z))dx) = \int_a^b \lambda(E(x))dx.$$

Dicha igualdad es conocida como el **principio de Cavalieri**.

Veamos una sencilla aplicación: Sea E un subconjunto medible de $\mathbb{R}^3$, tal que

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R};\ E[x] \neq \emptyset\} = [a, b].$$

Según hemos visto ya, su volumen, $\lambda(E)$, viene dado por

$$\lambda(E) = \int_E 1\ d(x, y, z),$$

por lo que, aplicando el teorema de Fubini y la definición de área de subconjuntos medibles de $\mathbb{R}^2$, se tiene que

$$\lambda(E) = \int_a^b \left(\int_{E[x]} 1 \, d(y,z)\right)dx = \int_a^b \lambda(E[x])\,dx.$$

Dicha igualdad es conocida como el **principio de Cavalieri**.

Obsérvese que si E es el sólido de revolución generado por la gráfica de una cierta $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$, aplicando el principio de Cavalieri, obtenemos que

$$V(E) = \pi \int_a^b f^2(x)dx,$$

como ya habíamos comentado anteriormente.

Ejemplo:

Un leñador corta una pieza C con forma de cuña de un árbol cilíndrico de radio 50 cm mediante dos cortes de sierra hacia el centro del árbol: uno horizontal y otro con un ángulo $\pi/4$. Calcúlese el volumen de dicha cuña.

La integral en dos variables vista como un cierto volumen

Sea ahora $A \subseteq \mathbb{R}^2$ medible y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo integrable en A tal que, para cada $(x,y) \in A$, se tiene que $f(x,y) \geq 0$. Obsérvese que como consecuencia del teorema de Fubini, si

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R};\ A(x) \neq \emptyset\} = [a,b],$$

entonces

$$\int_A f(x,y)d(x,y) = \int_a^b \left(\int_{A(x)} f(x,y)dy\right)dx = \int_a^b S(x)dx,$$

donde, para cada $x \in [a,b]$, $S(x)$ es el área de la región del plano comprendida entre el eje x y la gráfica de la función $g : A(x) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida para cada $y \in A(x)$ por $g(y) = f(x,y)$. Aplicando finalmente el principio de Cavalieri, la integral

$$\int_A f(x,y)d(x,y)$$

puede interpretarse como el **volumen del sólido comprendido entre el plano $z = 0$ y la gráfica del campo escalar f.**

Ejemplo:

Calcúlese el volumen de madera eliminado al taladrar, hasta el centro, una esfera de madera de radio 9 con una broca de radio 1.

4.6.2. Medias

Es sabido que dados $x_1, x_2, ..., x_n$ n números reales, su media aritmética se define como $\widehat{x} = \frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$. Esto puede entenderse como el valor medio de una función cuyos valores son constantes en intervalos de longitud 1. Esta idea, permite generalizar el concepto de valor medio para una función real $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ como sigue:

$$[f]_m = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}.$$

Sabemos que si f es continua, entonces existe $c \in [a,b]$ tal que $[f]_m = f(c)$

Análogamente si f es una función de varias variables, se llama **valor medio** de f sobre A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

$$[f]_m = \frac{\int_A f(x_1, x_2, ..., x_n)d(x_1, x_2, ..., x_n)}{\int_A d(x_1, x_2, ..., x_n}.$$

Ejemplo:

Se sabe que la temperatura en cada punto del cubo $I = [-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1]$ es proporcional al cuadrado de la distancia al origen. ¿Cuál es la temperatura media? ¿En qué puntos del cubo es la temperatura igual a la temperatura media?

4.6.3. Centros de gravedad

La ley de Arquímedes del equilibrio para una palanca establece que si se sitúan masas $m_1, m,2, ..., m_n$ en los puntos $x_1, x_2, ..., x_n$ del eje x, y $\overline{x}$ es la posición del punto de apoyo o centro de gravedad, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - \overline{x}) = 0.$$

Y por tanto,

$$\overline{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + ... + m_nx_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n}.$$

Si ahora consideremos que la masa se distribuye de forma continua a lo largo de la palanca, es coherente definir el **centro de gravedad** mediante la siguiente fórmula:

$$\overline{x} = \frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}.$$

Obsérvese que el denominador nos informa sobre la masa total de la palanca, y el numerador sobre el momento total.

Si A es una figura plana y $f(x,y)$ es la función densidad de masa, el **centro de gravedad** tendría como coordenadas $(\overline{x},\overline{y})$ donde:

$$\overline{x} = \frac{\int_A xf(x,y)d(x,y)}{\int_A f(x,y)d(x,y)}$$

y

$$\overline{y} = \frac{\int_A yf(x,y)d(x,y)}{\int_A f(x,y)d(x,y)},$$

donde el denominador señala la masa total de la figura plana.

Análogamente se haría para el centro de gravedad de un sólido.

Ejemplo:

Hállese el centro de gravedad de la región semiesférica definida por $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ y $z \geq 0$, supuesta que la densidad es constantemente igual a uno.

4.6.4. Momentos de inercia

El momento de inercia mide la respuesta de un cuerpo a los esfuerzos para someterlo a rotaciones, como por ejemplo, cuando se trata de hacer girar un tiovivo. Así el momento de inercia I_x mide la respuesta del cuerpo a las fuerzas que intentan hacerlo girar alrededor del eje x.

Si el sólido W tiene una densidad uniforme δ, los **momentos de inercia** I_x, I_y, I_Z respecto de los ejes x,y,z, respectivamente, se definen por

$$I_x = \int_W (y^2+z^2)\delta d(x,y,z), \quad I_y = \int_W (x^2+z^2)\delta d(x,y,z),$$

$$I_z = \int_W (x^2+y^2)\delta d(x,y,z).$$

El factor y^2+z^2 mide la distancia al eje x y pondera más las masas alejadas del eje de rotación. Análogamente el resto de los factores de las otras integrales

El concepto de momento de inercia es análogo al de masa, que mide la respuesta de un cuerpo a los esfuerzos para someterlo a traslaciones. Sin embargo, a diferencia del movimiento de traslación, dependen de la forma y no sólo de la masa total. Esto explica que es más fácil hacer girar una placa grande que una bola compacta de la misma masa.

Ejemplo:

Calcúlese el momento de inercia I_z del sólido comprendido entre el plano $z = 0$, el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$, si se supone que la densidad es constantemente uno.

4.7. Ecuaciones diferenciales

Sumario

En esta lección vamos a introducir las ecuaciones diferenciables (e.d.o.). Estas ecuaciones suelen aparecer en todos los campos de la ciencia y de una forma extaordinariamente prolífica en el campo de la Física. Centraremos nuestra atención en las e.d.o. de primer orden. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

4.7.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias

Una **ecuación diferencial ordinaria (e.d.o.)** es una ecuación en la que la incógnita es una una función desconocida y de una sola variable x, y en la que aparecen ligadas la propia función y sus derivadas.

Ejemplos:

$$(y')^2 + 1 = 0 \quad (1)$$

y

$$(y'')^3 + y^2 = 0 \quad (2).$$

El **orden** de una ecuación diferencial es el de la derivada de mayor orden contenida en ella. La ecuación (1) es de orden uno y la ecuación (2) es de orden 2.

Se llama **solución** de la e.d.o. de orden n en un intervalo I a toda función real $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifica las siguientes propiedades:

1) f es n-veces derivable en I.
2) Para cada $x \in I$, se verifica la ecuación cuando se sustituye la incógnita por la función f.

Con frecuencia a una solución f de una e.d.o. se le llama una **integral** o **solución particular** de la ecuación y a su gráfica **curva integral** ó curva solución. Se llama **solución general** al conjunto de todas las soluciones. Al proceso de obtener todas las soluciones de la e.d.o. se le denomina **integración ó resolución** de una e.d.o.

Las e.d.o. suelen responder a los planteamientos de algunos problemas físicos. En estos casos suelen aparecer algunas condiciones adicionales. Los tipos más frecuentes de condiciones adicionales suelen ser condiciones **iniciales**. El problema de encontrar la solución de la correspondiente e.d.o. que verifica ciertas condiciones iniciales se denomina **Problema de valores iniciales asociado** a dicha e.d.o.

Ejemplos

$$1)\ \begin{cases} y' = y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} my'' = g(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0 =) = y_1 \end{cases}$$

Cuando se trata de encontrar una solución particular de una e.d.o. o de un problema de valores iniciales, parece conveniente que, antes de aventurarnos en la búsqueda de una tal solución, podamos saber si ésta existe, y, una vez garantizada la existencia, saber si ésta es única. Como ejemplo de este tipo de resultados, para la ecuaciones de primer orden, tenemos el siguiente

Teorema 4.7.1. *Sea* $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ *un problema de valores iniciales. Si existe un rectángulo* R *del plano tal que* $(x_0, y_0) \in R^{int}$ *y verificando que* $f, \frac{\partial f}{\partial y} \in \mathcal{C}(R)$, *entonces existe un intervalo* $I =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ *con* $\delta > 0$ *y una única función* $y = f(x)$ *definida en* I *tal que la solución de la e.d.o. que verifica la condición adicional* $y_0 = f(x_0)$.

4.7.2. Lineal de primer orden

Una ecuación diferencial ordinaria se dice **lineal de orden 1** si es de la forma:

$$y' + a(x)y = b(x),$$

donde $b, a : I \longrightarrow \mathbb{R}$, son dos funciones continuas definidas en un intervalo I de números reales. Si $b(x) = 0,\ \forall x \in I$, se dice que dicha ecuación es **homogénea**.

Caso homogéneo

Para resolver esta ecuación vamos a comenzar considerando el caso homogéneo. En tal caso basta escribir $y'(x)/y(x) = -a(x)$, por lo que

$$log[y(x)] = -A(x)$$

donde $A(x)$ es una primitiva de la función $a(x)$. Y por tanto cualquier función

$$f(x) = Ce^{-A(x)}, \quad C \in \mathbb{R}$$

es solución de la ecuación.

Si ahora imponemos alguna condición adicional del tipo $y(x_0) = y_0$, la solución, quedará determinada de forma única al quedar determinada la primitiva (todas las primitivas se diferencian en una constante).

Ejemplo: Resuélvase el problema de valores iniciales:

$$y' = -ky, \quad y(0) = 1.$$

Caso no homogéneo:

Es fácil probar que

$$f(x) = (C + B(x))e^{-A(x)},$$

es una solución de la ecuación $y' + a(x)y = b(x)$, donde $C \in \mathbb{R}$, $A(x)$ es cualquier primitiva de $a(x)$, y $B(x)$ es cualquier primitiva de $b(x)e^{A(x)}$.

Análogamente, si fijamos una condición adicional del tipo $y(x_0) = y_0$, la solución, quedará determinada de forma única.

Ejemplo: Resuélvase el problema de valores iniciales:

$$y' + ky = 1, \quad y(0) = 1.$$

4.7.3. e.d.o. de orden uno no lineal

La resolución de estas e.d.o. está supeditado a una clasificación previa en distintos tipos. La experiencia demostrará que muchas veces no será posible expresar las soluciones de forma explícita

Tipo I: **Ecuaciones diferenciales de variable separadas**

Una e.d.o. de primer orden se dice de **variables separadas** si es de la forma

$$y' = G(x, y),$$

donde $G = P(x)Q(y)$, donde $P(x)$ y $Q(y)$ son dos funciones continuas en sendos intervalos, I y J, con $Q(y) \neq 0, \ \forall y \in J$.

Se demuestra que una función f definida en el intervalo I es solución de la ecuación anterior si satisface la siguiente igualdad, que la define implícitamente:

$$B(f(x)) = A(x),$$

donde B es una primitiva de la función $1/Q(y)$ y A es una primitiva de $P(x)$

Ejemplos: Resolver la ecuación $y' = y$ y el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y' = -y/x \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

Tipo II: **Ecuaciones diferenciales de primer orden homogéneas**

Una e.d.o. de primer orden se dice **homogénea** si es de la forma

$$y' = F(y/x),$$

donde F es una función continua en cierto conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^2$

Una función f es solución si, y sólo si $f(x)/x$ es solución de la ecuación de variables separadas $u' = (F(u) - u)/x$.

Ejemplo: Resuélvase la e.d.o.

$$x^2 y' = y^2 - xy + x^2.$$

Tipo III: **Ecuaciones diferenciales reducibles a homogéneas**

Las ecuaciones diferenciales de la forma

$$y' = F(\frac{Ax + By + C}{ax + by + c}),$$

donde $A, B, C, a, b, c \in \mathbb{R}$, se pueden reducir a una ecuación diferencial homogénea teniendo en cuenta las siguientes observaciones:

1) Si ambas rectas $Ax + By + C = 0$ y $ax + by + c = 0$ se cortan en el punto (c, d) entonces se hace el cambio $X = x - c$ y $Y = y - d$ y se obtiene que

$$F(\frac{Ax + By + C}{ax + by + c}) = G(Y/X),$$

y por tanto $Y' = G(Y/X)$ es una ecuación diferencial homogénea.

2) Si ambas rectas son paralelas $A/a = B/b$, hacemos el cambio $z = ax + by$ resulta que $z' = a + by'$ por lo que nos resultará una nueva ecuación diferencial de variables separadas:

$$z' = Q(z)P(x),$$

con $P(x)$ constante.

Ejemplos: Resuélvanse las ecuaciones: $y' = \frac{3x+2y}{2+x}$ e $y' = \frac{2x-y+2}{-4x+2y+1}$.

Tipo IV: **Ecuaciones diferenciales exactas**

Una e.d.o. de primer orden se dice que es **exacta** cuando puede escribirse de la forma

$$Q(x,y)y' + P(x,y) = 0,$$

donde P y Q son dos funciones definidas en un abierto $D \subseteq \mathbb{R}^2$, tales que pueden obtenerse como derivadas parciales de otra función $G(x,y)$, es decir tales que

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial x} = P(x,y), \ \frac{\partial G(x,y)}{\partial y} = Q(x,y), \ \forall (x,y) \in D.$$

Para saber si una ecuación es ó no exacta no es necesario construir la función G tal como veremos en el tema 6.2.

Si la e.d.o. es exacta, se tiene que f es solución de dicha ecuación si, y sólo si $G(x, f(x)) = C$, con $C \in \mathbb{R}$

Ejemplo: Resolver $y' = \frac{2xcos(y)+3x^2y}{-x^3+x^2seny+y}$ con $y(0) = 2$.

4.7.4. Relación de ejercicios

1) Compruébese que las funciones dadas a continuación son soluciones de la ecuación diferencial $y^{(4)} - 16y = 0$.
   a) $y = 3\cos[x]$ b) $y = e^{-2x}$ c) $y = 5\log x$
2) Obténganse las soluciones generales de las siguientes e.d.o.
   a) $2x^2 + 2y^2 + (4xy + 3y^2)y' = 0$. b) $3(y-1)^2y' = 2 + sen(x)$.
   c) $(2+y)y' = 2x + 3y$.
   d) $y' = \frac{x+y}{x-y}$. e) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-x^2}{3xy}$.
   f) $2ydx + (x+y)dy = 0$, $y > 0$.
   g) $ye^x dx + (2y + e^x)dy = 0$.
3) Resuélvanse los siguientes problemas de valores iniciales.
   a) $ye^{xy}dx + (3 + xe^{xy})dy = 0$, $y(0) = 0$.
   b) $\frac{y}{x^2}dx - \frac{1}{x}dy = 0$, $y(1) = 2$.
4) Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto $(1,3)$ y cuya pendiente es $\frac{y}{x^2}$.
5) Bajo ciertas condiciones, la caña de azúcar en agua se convierte en dextrosa a un ritmo proporcional a la cantidad que está en ese momento sin convertir todavía. Si de 75 gramos en $t = 0$ se han convertido 8 gramos en los primeros 30 minutos, hállese la cantidad transformada en hora y media.

6) La desintegración radiactiva es proporcional a la cantidad de sustancia que queda por desintegrar. La constante K de desintegración coincide con $log(2)/T$, donde T es la llamada semivida[1] de cada elemento radiactivo. Sabiendo que la semivida del isótopo de Plutonio ^{239}Pu es 24.360 años, y que estimamos que en el accidente nuclear de Chernobil se liberaron 10 gramos del este isótopo, calcélese el tiempo necesario para que sólo quede un gramo.

7) La ley de enfriamiento de Newton afirma que el ritmo de cambio de la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del aire que le rodea.
a) Supongamos que una habitación se mantiene a una temperatura constante de 25^{O} y que un objeto se enfria de 100^{O} a 90^{O} en 5 minutos. ¿Qué tiempo se necesitará para enfriar dicho objeto hasta una temperatura de 50^{O}?
b) Un objeto a 100^{O} es situado dentro de una habitación con temperatura desconocida constante. Sabiendo que después de 10 minutos el cuerpo está a 90^{O} y después de 20 minutos a 82^{O}, calcúlese la temperatura de la sala.

8) (**Modelo de población de Malthus, 1798**). La tasa de crecimiento $(\frac{p'(t)}{p(t)})$ de una población $p(t)$ de moscas de la fruta en un instante dado t es constante en dicho momento. Si hay 180 moscas después del segundo día del experimento y 300 moscas después del cuarto día, ¿cuántas moscas había originalmente?

9) (**Modelo de Verhuslt, 1834**). Un pueblo posee una población actual de 1000 habitantes. Suponiendo que la tasa de crecimiento de una población $p(t)$ está dada por $(2 - p(t))$, determínese la población del pueblo en cualquier instante futuro. Estimar hacía que valor tiende el número de habitantes para valores del tiempo t grandes. Calcúlese el instante en el cual el crecimiento de la población es máximo.

10) (**¡Ratón que te pilla el gato!**) Un ratón se encuentra pacíficamente comiendo su queso en el origen de coordenadas, cuando un gato hambriento localizado en el punto (10,0) lo descubre y parte en su persecución. Instantáneamente, el ratón descubre la presencia de su enemigo y toma la decisión de huir a lo largo del eje y en el sentido positivo con 25 cm/s de velocidad constante. La estrategia del gato es correr siempre en la dirección que se encuentra el ratón a una velocidad constante de 1 m/s. ¿Cuánto tiempo tarda el gato en cazar al ratón?

[1]el número de años que han de transcurrir para que se desintegren la mitad de los átomos iniciales de una muestra.