

**Avances en teoría de juegos con
aplicaciones económicas y sociales**

J. M. Bilbao F. R. Fernández
Editores

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

AUTORES

Encarnación Algaba Durán♣	encarni@matinc.us.es
Jesús Mario Bilbao Arrese♣	mbilbao@matinc.us.es
Francisco R. Fernández García♠	fernande@cica.es
Julio R. Fernández García♣	julio@polimat01.eup.us.es
Miguel A. Hinojosa Ramos♦	mhinojo@cica.es
Nieves Jiménez Jiménez♣	nieves@polimat01.eup.us.es
Andrés Jiménez Losada♣	hispan@matinc.us.es
Esperanza A. Lebrón Rueda♣	lebron@polimat01.eup.us.es
Jorge J. López Vázquez♣	jorge@polimat01.eup.us.es
Amparo M. Mármol Conde♦	amarmol@cica.es
Luisa Monroy Berjillos♦	lmonroy@cica.es
Justo Puerto Albandoz♠	puerto@cica.es

♦Economía Aplicada III

♠Estadística e Investigación Operativa

♣Matemática Aplicada II

Universidad de Sevilla

Índice

I	Juegos matriciales escalares	1
1	Introducción a los juegos matriciales	1
2	Juegos de suma nula con pagos escalares	6
3	Juegos continuos escalares	17
4	Juegos por objetivos	19
II	Juegos matriciales vectoriales	27
1	Juegos de suma nula con pagos vectoriales	27
2	Concepto de solución	29
3	Juegos vectoriales con núcleos continuos	37
4	Juegos vectoriales por objetivos	44
III	Juegos bipersonales de suma no nula como vectoriales	54
1	Juegos como problemas de decisión múltiple	54
2	Resolución como juegos por objetivos	66
IV	Aplicaciones económicas	73
1	Introducción	73
2	Campaña publicitaria	74
3	Modelo de mercados competitivos	79
4	Duopolio como juego bicriterio	83
V	Resolución del problema lineal múltiple con ADBASE	89
1	Objetivo del programa ADBASE	89
2	Estructura	90
3	Ficheros de entrada y salida	92

VI Situaciones de comunicación	105
1 Juegos cooperativos	105
2 El modelo de Myerson y su generalización	114
VII Aplicaciones a las ciencias sociales	140
1 El poder de las naciones en la Unión Europea	140
2 Cooperación y conflicto en el Parlamento de Andalucía	151
VIII Un nuevo modelo de cooperación	160
1 Juegos sobre coaliciones factibles	160
2 Conceptos de solución	169
3 Juegos simples	187
IX Valores e índices de poder en geometrías convexas	202
1 El valor de Shapley en geometrías convexas	202
2 El índice de poder de Banzhaf en geometrías convexas	211
X Algoritmos para calcular valores con Mathematica	220
1 Cálculo de valores con cooperación total	220
2 El valor de Myerson y el potencial de Hart y Mas-Colell	227
3 Cálculo de valores en geometrías convexas	240
Bibliografía	246

Prefacio

Los fundamentos de la *teoría de juegos* fueron establecidos por John von Neumann en 1928, y expuestos en el libro *Theory of games and economic behaviour*, que publicó junto a Oskar Morgenstern en 1944. Esta nueva teoría pone de manifiesto que los acontecimientos de las ciencias sociales pueden ser descritos mediante modelos tomados de los juegos de estrategia con una mayor riqueza que a través de modelos creados en su día para las ciencias físicas, pues los agentes actúan a veces unos contra otros para la consecución de sus objetivos.

Destaquemos desde un principio que la teoría de juegos proporciona solamente modelos de las situaciones reales, por lo que, frecuentemente, las conclusiones que dichos modelos aportan son sólo pautas generales de comportamiento, que nos proporcionarán normas de actuación más precisas en tanto el modelo refleje con más perfección la realidad. Lo que queda fuera de toda duda, desde la publicación del libro clásico citado, es que la teoría de juegos ha demostrado tener el suficiente interés para ser estudiada como disciplina independiente.

En dicha obra, se dan las bases para realizar un análisis matemático riguroso de los modelos que se plantean en dicha teoría. Nosotros exponemos, en este libro, las aportaciones que hacemos a la teoría general, especialmente, en los modelos relacionados con los *juegos con pagos vectoriales* y en los *juegos con cooperación restringida*. Dichos modelos se aplican tanto en el análisis de situaciones económicas como en la determinación de los índices de poder de las coaliciones en contextos políticos.

El libro está dividido, por tanto, en dos partes. La primera de ella está dedicada al análisis de los juegos no cooperativos. En la segunda parte, se introducen los juegos cooperativos de n personas en los que se incluye el estudio de diversos modelos de cooperación parcial.

En el capítulo I, revisamos los resultados clásicos de los juegos matriciales que posteriormente serán generalizados. Se analizan juegos matriciales

restringidos y se estudia la incorporación de información adicional al juego, obteniendo la solución del juego restringido a través de otro juego matricial modificado. Se plantean algunos de los problemas que surgen cuando se resuelven los juegos matriciales con el enfoque tradicional del valor esperado, en particular su relevancia cuando el juego se juega una sola vez. De aquí partimos para proponer el estudio de los juegos matriciales por medio de los juegos por objetivos que consiste en obtener la probabilidad de conseguir un valor del juego establecido por el jugador, y la estrategia para lograrlo.

En el capítulo II, se estudian distintos aspectos de los juegos matriciales con pagos múltiples. En primer lugar se formula el modelo y se establece el concepto de solución de estrategia de seguridad Pareto-óptima. A través de la programación lineal multiobjetivo se proporcionan procedimientos para resolver los juegos matriciales vectoriales. En este capítulo también se desarrolla el análisis de los juegos vectoriales por objetivos en los que no sólo se está interesado en obtener un resultado, sino también la posibilidad que se tiene de lograrlo. El jugador establece un conjunto de objetivos o niveles de satisfacción y a partir de ellos se formula el juego por objetivos y se establecen los resultados que caracterizan las soluciones de estos problemas. Se realiza un análisis de sensibilidad en los objetivos establecidos por el jugador.

En el capítulo III, se analizan los juegos bipersonales de suma no nula por dos procedimientos. El primero de ellos a través de la programación lineal multiobjetivo, el segundo por medio de los juegos vectoriales por objetivos definidos en el capítulo segundo. En primer lugar se plantea la relación que existe entre un juego bipersonal, tanto escalar como vectorial, y un problema bipersonal de decisión múltiple. Se formulan los juegos bimatriciales escalares no cooperativos, como problemas lineales múltiples y se estudian desde la óptica de uno de los jugadores. Estos planteamientos son similares a considerar el juego bimatricial como un juego vectorial de suma nula, cuyos pagos tienen dos componentes, para uno de los jugadores. A continuación, se consideran los objetivos que ha establecido un jugador y se formula el correspondiente juego vectorial por objetivos asociado. El espacio de objetivos para dicho jugador se descompone en regiones tales que todos los objetivos que pertenecen a una misma región, tienen la misma probabilidad de alcanzarse. A la vista de esta

información, el jugador podrá determinar, según su actitud ante el riesgo, que objetivos quiere conseguir en la realización del juego.

En el capítulo IV se aplican las técnicas expuestas en los capítulos anteriores a modelos económicos. Se analizan tres casos de mercados competitivos en los que las empresas compiten simultáneamente en varios mercados. El primero de ellos corresponde a un juego en el que el conjunto de estrategias puras de los jugadores es finito, por lo que los pagos pueden representarse por una matriz cuyos elementos son vectores. El segundo modelo corresponde a un juego en el cuadrado unidad, es decir cada jugador tiene un continuo de estrategias puras representadas como puntos del intervalo unidad. Por último se analiza un duopolio como un juego biobjetivo analizando tanto el caso continuo como discreto.

En el capítulo V se presentan las características básicas del programa ADBASE que es el que se utiliza para resolver los problemas lineales múltiples que aparecen en los capítulos II, III y IV.

La segunda parte comienza en el capítulo VI, en el que se introducen los juegos cooperativos de n personas, estableciendo algunas de sus características especiales y apuntando dos conceptos de solución que son tratados ampliamente a lo largo de esta parte: el core de un juego y el valor de Shapley.

El modelo clásico de la teoría de juegos presupone que todos los jugadores desean cooperar entre sí y no hay ningún impedimento para ello. Sin embargo, la realidad impone ciertos límites a la cooperación total.

En la actualidad, la teoría de juegos cooperativos se aplica en distintas áreas de conocimiento como pueden ser la investigación operativa, teoría de la decisión, ciencias políticas y económicas, mercados económicos, asignación de costes, modelos sobre contaminación y localización.

Debido a ello, esta filosofía de cooperación general entre todos los jugadores no siempre puede aplicarse ya que no sirve para modelar todas las situaciones. Esto sucede, por ejemplo, en aquellos juegos que modelan los diferentes sistemas de votación establecidos en diversas instituciones sociales, empresariales, políticas, etc. También puede observarse en cualquier juego que intente representar una situación en la que algunos jugadores no sean afines entre sí, su cooperación esté condicionada por intereses comunes, o tengan algún

tipo de veto a la participación de ciertos jugadores en determinadas coaliciones.

La consecuencia de estas ideas es la necesidad de estudiar juegos de n personas entre las que hay una cooperación parcial. Este estudio, comienza con los trabajos de Myerson el cuál modela las relaciones entre los jugadores mediante un grafo de cooperación. Una vez presentadas las ideas fundamentales del modelo de Myerson, se propone una generalización de dichos conceptos.

Con la intención de aclarar los conceptos básicos introducidos, se presenta, en el capítulo VII, una aplicación de los juegos cooperativos: el estudio y cálculo de los índices de poder en juegos de votación ponderada. En particular, se estudia la cooperación en el Consejo de la Unión Europea y en el Parlamento de Andalucía; en este segundo caso, analizamos la dinámica de formación de coaliciones que hace que los jugadores —si no hay imposiciones a priori— alcancen un determinado escenario de cooperación.

En el capítulo VIII, se estudia un nuevo concepto de cooperación parcial que contempla a la cooperación total como una situación particular. En esta situación, el juego cooperativo va a estar definido únicamente sobre aquellas coaliciones que sean factibles. Se estudian, de manera especial, los juegos definidos sobre familias de coaliciones que tienen estructura de espacio de clausura o de geometría convexa.

En la última sección del capítulo octavo se introduce una clase especial de juegos: los juegos simples. Un caso particular de este tipo de juegos lo constituyen los juegos de votación ponderada que sirvieron para el estudio de los índices de poder en el Consejo de la Unión Europea y en el Parlamento de Andalucía. Se analiza el papel tanto de los denominados jugadores veto como el de las coaliciones ganadoras minimales para ver cómo influyen en el core y el conjunto de Weber de un juego simple. Además, se estudian, para este tipo de juegos, los conjuntos estables y de negociación —que constituyen conceptos clásicos de solución en la teoría general de juegos cooperativos—, relacionándolos con el core y el conjunto de Weber.

Se introducen, en el capítulo IX, los conceptos de valor de Shapley y de Banzhaf en el nuevo modelo de cooperación, proporcionando axiomatizaciones de los mismos cuando la estructura del sistema de coaliciones factibles es una geometría convexa.

Con la idea de aportar herramientas que permitan hacer cálculos efectivos de valores e índices de poder se presentan, en el capítulo X, diversos algoritmos creados con el programa de cálculo simbólico Mathematica y los programas específicos de Skiena y Carter. Se introducen, para los modelos de cooperación parcial, nuevos métodos de cálculo basados en la función potencial de Hart y Mas-Colell y se definen las funciones necesarias para el cálculo de los valores e índices de Shapley y Banzhaf en geometrías convexas.

Por último, los autores deseamos agradecer a los Departamentos de Economía Aplicada III, Estadística e Investigación Operativa y Matemática Aplicada II, su ayuda en la difusión de este tema de investigación.

Sevilla, 21 de Mayo de 1998

J. M. Bilbao y F. R. Fernández.

CAPÍTULO I

Juegos matriciales escalares

F. R. Fernández J. Puerto

1. Introducción a los juegos matriciales

Comenzamos estudiando aquellas situaciones que pueden modelizarse a través de juegos con dos jugadores (o agentes), juegos bipersonales y que fácilmente pueden generalizarse a juegos con cualquier número de jugadores siguiendo la línea clásica ofrecida por von Neumann y Morgenstern (1944). Proceder de este modo evita, en un primer acercamiento al problema real, tener presente la formación de coaliciones para obtener mejores resultados individuales a través de ellas, aunque los resultados obtenidos en juegos bipersonales pueden emplearse en la teoría general de formación de coaliciones en juegos de n personas.

Supondremos que en estas situaciones se permite a los jugadores sólo un número finito de movimientos, cuando se plantea el juego en su forma desarrollada o extendida, con lo que podremos llevar el modelo a un juego, en su forma reducida o normal, en el que cada jugador escoge una *estrategia* (pura) *de un conjunto finito de ellas*, y que cada una de ellas representa a uno de los posibles planes de movimientos que este jugador realizaría a lo largo del desarrollo del juego.

Representaremos por $I_i, 1 \leq i \leq n$, las estrategias puras del jugador I, y por $II_j, 1 \leq j \leq m$, las estrategias puras del jugador II. El juego permite determinar la valoración que ocasiona el que cada jugador utilice una de sus estrategias, por lo que representamos por $v(i, j)$, la valoración de las consecuencias del empleo de la estrategia I_i por el primer jugador y la estrategia II_j por parte del segundo. Al variar i y j en sus respectivos campos, se tiene una estructura de matriz, aunque los valores no sean números reales, por lo que a estos juegos se les denomina *juegos matriciales*. Estas valoraciones pueden ser interpretadas de muy diversas formas por los jugadores que intervienen en el juego.

Ejemplo 1.1 *O.G. Haywood (1954) [47]. En el desembarco aliado, en agosto de 1944, se ha abierto una brecha por mar en Avranches (Francia). La cabeza de playa ha expuesto el flanco oeste del noveno ejército alemán, mandado por el general von Kluge. Este tiene dos posibles formas de actuar: (1) Atacar hacia el oeste para llegar al mar, asegurándose su flanco occidental y dividir a las fuerzas americanas. (2) Retirarse hacia el este para llegar a una mejor posición defensiva cerca del río Sena. El general americano Bradley tiene al primer ejército americano conteniendo al ejército alemán desde la cabeza de playa, y más al interior tiene al tercer ejército, bajo las órdenes del general Patton, en reserva, haciendo misiones de limpieza del terreno hacia el este, sur y oeste. Bradley consideró tres posibilidades: (1) Ordenar a la reserva volver a defender la brecha abierta. (2) Enviar la reserva hacia el este para intentar cortar la retirada del noveno ejército alemán. (3) Mantener las reservas en sus posición durante un día y decidir después si ordenar ayudar a la cabeza de playa si era atacada o enviarlas hacia el este.*

El análisis completo de la situación le llevó a valorar los diferentes resultados de acuerdo con la tabla siguiente, en la que las filas representan las estrategias del general Bradley, y las columnas las estrategias del general von Kluge.

	1. Atacar	2. Retirarse
1. Reforzar	Se mantiene la brecha	Débil presión sobre la retirada alemana
2. Mover	Se produce el corte alemán	Fuerte presión en la retirada alemana
3. Esperar	Se mantiene la brecha y los alemanes son rodeados	Moderada presión en la retirada alemana

Lógicamente, la resolución del conflicto dependerá de la valoración de los resultados $v(i, j)$, $i = 1, 2, 3$ y $j = 1, 2$. El orden de preferencias de mejor a peor según la doctrina del ejército americano era

$$v(3, 1) > v(2, 2) > v(3, 2) > v(1, 2) > v(1, 1) > v(2, 1),$$

por lo que al buscar la estrategia menos mala, maximin, el general Bradley escogió la tercera estrategia. Las valoraciones alemanas debían ser similares, pues el general von Kluge decidió retirarse, pero nunca ejecutó su decisión. Hitler, a cientos de kilómetros del campo de batalla, debió tener otras valoraciones del conflicto y ordenó atacar y cerrar la brecha.

El resultado fue que Bradley resistió el ataque alemán, y mantuvo la reserva en el sur, lo que permitió enviarla el segundo día hacia el este; los alemanes comenzaron la retirada, siendo rodeados por las armadas americana y francesa, lo que llevó al suicidio al general alemán.

Cada jugador puede ordenar las valoraciones y dar valores numéricos a las consecuencias

$$v(i, j) \equiv (v_I(i, j), v_{II}(i, j))$$

En el caso de que las valoraciones se consideren de forma totalmente opuesta por los jugadores, para uno supone ganancias y para el otro implique pérdidas, éstas pueden expresarse $v_I(i, j) = -v_{II}(i, j)$, se dice que la situación corresponde a un *juego de suma nula*. Cuando esto no ocurre, la valoración del juego vendrá dada para cada resultado por dos números, no necesariamente relacionados pues suponen el reflejo de dos valoraciones independientes,

llamándose a estos juegos, por oposición a los anteriores, *juegos de suma no nula*.

En otras ocasiones las valoraciones no pueden ordenarse, e incluso al valorar las estrategias pueden tenerse en cuenta diferentes aspectos. En el ejemplo 1.1, los generales podían valorar los resultados no sólo dependiendo del curso de la guerra, sino también del impacto que se podría producir en la población civil y su entorno.

De hecho, muchos modelos se consideran con objetivos escalares debido a la dificultad de resolver el modelo con objetivos múltiples. Hay situaciones en las que una misma estrategia debe ser empleada en diferentes escenarios, por ejemplo, las políticas de producción de dos empresas que compiten en un mercado pueden valorarse escalarmente, pero si compiten simultáneamente en varios mercados debe emplearse la valoración vectorial.

Ejemplo 1.2 *Morton D. Davis (1971) [27].*

En un año electoral los dos principales partidos políticos se encuentran en el proceso de redacción de sus programas. Hay una disputa entre las comunidades X e Y relativa a ciertos derechos de aguas, y cada partido decide si favorecer a X , a Y o soslayar la cuestión.

Los ciudadanos de las restantes comunidades no son indiferentes a la cuestión, lo que nos lleva a un juego matricial vectorial, no pudiéndose sumar los resultados de las diversas comunidades, ya que los votos repercuten localmente por comunidad, aunque la elección del programa sea para todas las comunidades. En la siguiente tabla se representan por filas las estrategias del programa A , y por columnas las estrategias del programa B .

	1. Favorecer X	2. Favorecer Y	3. Soslayar
1. Favorecer X	$v(1, 1)$	$v(1, 2)$	$v(1, 3)$
2. Favorecer Y	$v(2, 1)$	$v(2, 2)$	$v(2, 3)$
3. Soslayar	$v(3, 1)$	$v(3, 2)$	$v(3, 3)$

En este caso $v(i, j)$ es un vector que nos indica en cada componente el porcentaje de votos que se va a obtener en la comunidad correspondiente a esa

componente. Nótese que como las diferentes comunidades tendrán diferentes sensibilidades frente al problema, dicho vector numérico no podrá reducirse a un solo número, por lo que se trata de un *juego con pagos vectoriales* o *juego multicriterio*. En el caso en que las valoraciones en cada comunidad sean complementarias para ambos partidos, el juego será de suma nula, si sólo representan aportaciones subjetivas no relacionadas será de suma no nula.

Estos ejemplos ponen de manifiesto que al analizar los juegos matriciales debemos de comenzar por los juegos bipersonales de suma nula escalares, ya que en ellos la valoración de las estrategias es más simple.

Comenzaremos haciendo una breve descripción de los mismos, ya que éstos han sido los juegos más estudiados de toda la teoría de juegos, véase por ejemplo Owen (1982) [71] y Thomas (1984) [91], para un tratamiento más general. Describimos los elementos básicos y necesarios para su extensión en situaciones más generales, en especial el concepto de nivel de seguridad, y la interpretación del valor de un juego cuando éste va a desarrollarse una sola vez, ya que en este caso puede ser más interesante considerar la probabilidad de obtener un cierto pago, lo que llamamos juegos por objetivos.

Posteriormente analizamos los juegos de suma nula con pagos vectoriales, donde la dificultad de su análisis nace del hecho de que la limitación entre los pagos de los jugadores que el teorema minimax establece para juegos escalares no ocurre necesariamente, por lo que es aconsejable recurrir a diferentes conceptos de solución. Introducimos la valoración de las estrategias basándonos en el concepto de nivel de seguridad, de forma similar al caso de juegos escalares.

El resultado principal de la sección se relaciona con la determinación de las estrategias de seguridad no dominadas a través de la programación lineal múltiple, con lo que conseguimos un paralelismo con el empleo de la programación lineal en el caso escalar. Dado que la solución a este modelo viene dada en forma de un conjunto de puntos no dominados, la aproximación que hacemos al problema a través de los juegos multicriterio por objetivos nos permite un análisis más rico en estos juegos matriciales, en especial al desear destacar alguna solución no dominada por ponderaciones entre las diversas valoraciones del juego. Vemos también como los teoremas clásicos sobre juegos continuos

cóncavos convexos pueden extenderse a juegos con pagos vectoriales.

2. Juegos de suma nula con pagos escalares

Los elementos que aparecen en la formulación del juego en forma normal son los siguientes:

1. Un conjunto finito de estrategias puras $E_1 = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$, para el jugador I, y un conjunto finito de estrategias puras para el jugador II, $E_2 = \{II_1, II_2, \dots, II_m\}$.
2. Una matriz real de orden $n \times m$, $A = (a_{ij})$. Cada elemento de esta matriz a_{ij} es el pago para el jugador I cuando elige la estrategia I_i y el jugador II escoge la estrategia II_j . El pago para el jugador II en estas circunstancias es $-a_{ij}$.

Una solución de estos juegos especifica las estrategias óptimas que jugadores racionales usarán y el pago que se obtiene con ellas.

La solución o soluciones de un juego bipersonal de suma nula pueden caracterizarse de dos formas: mediante las estrategias de seguridad y con el concepto de punto de equilibrio.

2.1. Estrategias de seguridad

En los juegos de suma nula cuando un jugador intenta maximizar su pago, a la vez está intentando minimizar el pago de su oponente. Cada jugador considera el peor resultado que puede conseguir con cada una de sus estrategias y después escoge la estrategia que le proporciona el mejor de los peores resultados.

Definición 1.1 *Para cada estrategia pura $I_i \in E_1$, el nivel de seguridad del jugador I es el pago que puede asegurarse con esa estrategia, prescindiendo de las acciones del jugador II.*

$$v_I(I_i) = \min_j a_{ij}$$

Para cada estrategia pura $II_j \in E_2$, el nivel de seguridad del jugador II es el pago que puede asegurarse con esa estrategia, prescindiendo de las acciones del jugador I.

$$v_{II}(II_j) = \max_i a_{ij}$$

Definición 1.2 El valor maximin (o valor inferior del juego) del jugador I es

$$v_I = \max_i v_I(I_i) = \max_i \min_j a_{ij}$$

Una estrategia de seguridad o estrategia maximin es la que proporciona al jugador su valor maximin. El valor minimax (o valor superior del juego) del jugador II es

$$v_{II} = \min_j v_{II}(II_j) = \min_j \max_i a_{ij}$$

Una estrategia de seguridad o estrategia minimax es la que proporciona al jugador su valor minimax.

Teorema 1.1 Para cada juego matricial de matriz $A = (a_{ij})$ se verifica:

1. Los valores v_I y v_{II} son únicos.
2. Existe al menos una estrategia de seguridad para cada jugador.
3. $v_I \leq v_{II}$.

Definición 1.3 Un juego matricial de matriz $A = (a_{ij})$ tiene un punto de silla en estrategias puras cuando se verifica que:

$$v_I = v_{II}.$$

Este valor común se llama valor del juego y es el menor elemento de su fila y el máximo de su columna. Se denota por v .

Definición 1.4 Un punto de silla, si existe, es el pago correspondiente a una pareja de estrategias de seguridad. Dichas estrategias, junto con el valor del juego, constituyen una solución del juego.

Ejemplo 1.3 *M. Shubik (1955) [85]. Supongamos que dos empresas disponen, cada una de ellas, de 1 millón de unidades monetarias (u.m.) para realizar publicidad de sus productos en una determinada área de mercado. Para su campaña pueden utilizar radio, televisión y prensa. El efecto esperado que producirán las distintas posibilidades de publicidad viene recogido en la siguiente tabla.*

	Radio	T.V.	Prensa	No publ.
Radio	0	-0.5	0	2.5
T.V.	2	0	1.5	5
Prensa	1	-0.5	0	3.5
No publ.	-2	-4	-3	0

Si las empresas pueden invertir en un solo medio publicitario, se observa que el juego tiene un punto de silla, correspondiente a las estrategias consistentes en hacer publicidad en televisión. En este caso, el resultado neto que consiguen ambas empresas es el mismo que conseguirían si no hiciesen publicidad ninguna de las dos. Sin embargo, ninguna puede arriesgarse a elegir esta estrategia pues en el caso de que su oponente no la escoja, saldría perjudicada.

Las estrategias que proporcionan los puntos de silla no tienen porqué ser únicas. Si existen más de una pareja son equivalentes, es decir, proporcionan el mismo valor del juego.

No todos los juegos de suma nula poseen un punto de silla en estrategias puras como puede verse en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.4 *M. Shubik (1955) [85]. Supongamos que las empresas del ejemplo anterior pueden gastar su dinero en diferentes programas en los que se utiliza más de un medio publicitario. Si pueden elegir entre tres programas diferentes, los efectos de las decisiones de ambas empresas vienen recogidos en la siguiente tabla*

	Programa 1	Programa 2	Programa 3
Programa 1	2	4	-2
Programa 2	4	2	-2
Programa 3	-2	-2	3

En este caso no hay punto de silla, ya que el valor maximin del juego, v_I , es -2 y el valor minimax v_{II} es 3.

En los juegos sin punto de silla, si un jugador descubre la estrategia elegida por el otro, este último puede salir perjudicado. Por ello, lo ideal es mantener la elección de las estrategias a seguir, fuera del alcance del oponente. Una forma de conseguir esto consiste en seleccionar las estrategias al azar. Es decir, mezclar las estrategias de acuerdo con alguna distribución de probabilidad en el conjunto de las estrategias puras del jugador.

Definición 1.5 *Una estrategia mixta para un jugador es una distribución de probabilidad en el conjunto de sus estrategias puras.*

En general, si un jugador tiene n estrategias puras, una estrategia mixta para él, es una n -tupla $x = (x_1, \dots, x_n)$ tal que $\sum_{i=1}^n x_i = 1$, $0 \leq x_i \leq 1$, donde x_i indica la probabilidad con que el jugador seleccionará su i -ésima estrategia pura.

El conjunto de estrategias mixtas siempre incluye a todas las estrategias puras porque estas últimas, pueden considerarse como un caso especial de estrategia mixta en que la correspondiente estrategia pura se juega con probabilidad 1 y todas las demás con probabilidad cero.

Sea $A = (a_{ij})$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, la matriz de pagos del juego, X e Y los conjuntos de estrategias mixtas de los jugadores I y II respectivamente.

$$\begin{aligned} X &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n \right\} \\ Y &= \left\{ y \in \mathbb{R}^m : \sum_{j=1}^m y_j = 1, y_j \geq 0, j = 1, \dots, m \right\} \end{aligned}$$

Para analizar el resultado del juego cuando uno o ambos jugadores utilizan estrategias mixtas, podemos utilizar el concepto de valor esperado. En este caso la función de pagos del juego es

$$v(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i a_{ij} y_j, \quad x \in X, y \in Y$$

que es el valor esperado de conseguir los pagos del juego con la combinación de estrategias mixtas $x \in X$, $y \in Y$.

Los distintos conceptos estudiados en estrategias puras pueden extenderse al caso de las estrategias mixtas.

Definición 1.6 *Para cada estrategia mixta $x \in X$, el nivel de seguridad del jugador I es el valor esperado que puede asegurarse con esa estrategia, prescindiendo de las acciones del jugador II.*

$$v_I(x) = \min_{y \in Y} v(x, y)$$

Para cada estrategia mixta $y \in Y$, el nivel de seguridad del jugador II es el valor esperado que puede asegurarse con esa estrategia, prescindiendo de las acciones del jugador I.

$$v_{II}(y) = \max_{x \in X} v(x, y)$$

Definición 1.7 *El valor maximin en estrategias mixtas del jugador I es*

$$v_I^M = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} v(x, y)$$

Una estrategia de seguridad o estrategia maximin es la que proporciona al jugador su valor maximin.

El valor minimax en estrategias mixtas del jugador II es

$$v_{II}^M = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} v(x, y)$$

Una estrategia de seguridad o estrategia minmax es la que proporciona al jugador su valor minimax.

Teorema 1.2 *En un juego matricial de suma nula se verifica:*

1. *Los valores v_I^M y v_{II}^M son únicos.*
2. *Al menos existe una estrategia mixta de seguridad para cada jugador.*
3. *Los niveles de seguridad en estrategias puras y mixtas verifican: $v_I \leq v_I^M$ y $v_{II}^M \leq v_{II}$.*

Definición 1.8 Las estrategias mixtas $x^* \in X$, $y^* \in Y$ son óptimas para los jugadores I y II, respectivamente si

$$v_I^M = \min_{y \in Y} v(x^*, y) = \min_{y \in Y} x^{*t} A y, \quad v_{II}^M = \max_{x \in X} v(x, y^*) = \max_{x \in X} x^t A y^*$$

El nivel de seguridad para una estrategia mixta $\hat{x} \in X$ viene dado por $v_I(\hat{x}) = \min_{y \in Y} \hat{x}^t A y$, cuya valoración puede obtenerse por medio del problema dual del anterior

$$\begin{aligned} \max \quad & \lambda(\hat{x}) \\ \text{s.a.} \quad & e\lambda(\hat{x}) \leq \hat{x}^t A \\ & \hat{x} \in X, \lambda(\hat{x}) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

siendo $e = (1, \dots, 1)^t$. Las estrategias que proporcionan los mejores niveles de seguridad son las que verifican

$$v_I^M = \max_{x \in X} v_I(x)$$

Estas estrategias, así como el valor del juego, pueden obtenerse a través del siguiente problema de programación lineal

$$\begin{aligned} \max \quad & v_I \\ \text{s.a.} \quad & e v_I \leq x^t A \\ & x \in X \end{aligned}$$

Podemos realizar el mismo razonamiento para el segundo jugador. Al tratar de minimizar su nivel de seguridad de forma que limite al otro jugador, llegamos a otro problema de programación lineal de la forma

$$\begin{aligned} \min \quad & v_{II} \\ \text{s.a.} \quad & A y \leq v_{II} e \\ & y \in Y \end{aligned}$$

Si comparamos estos dos problemas vemos que son duales, por lo que si ambos tienen soluciones óptimas x^* , y^* entonces $v_I^* = v_{II}^*$, es decir, las estrategias óptimas se autolimitan en lo que se conoce como teorema minimax.

Teorema 1.3 (Teorema Minimax) En todo juego bipersonal finito de suma cero, existen estrategias mixtas óptimas $x^* \in X$, $y^* \in Y$, para cada jugador y se verifica $v_I^M = v_{II}^M = v^*$, siendo v^* el valor del juego.

Este resultado pone de manifiesto que las estrategias de seguridad óptimas no sólo optimizan los niveles de seguridad de cada jugador, sino que limitan los pagos del oponente.

El teorema minimax fue demostrado por von Neumann en 1928, y posteriormente se han establecido diversas demostraciones entre las que destaca la de Kakutani de 1941, empleando el teorema del punto fijo de Brouwer. Por medio de la teoría de la dualidad de la programación lineal, como se ha indicado anteriormente, y a través del método del simplex se obtienen las estrategias óptimas de cada jugador y el valor del juego de forma rápida.

Ejemplo 1.5 *M. Shubik (1955) [85]. Consideremos el juego descrito en el ejemplo 1.4. Para encontrar las estrategias óptimas, el jugador I debe resolver el siguiente problema lineal:*

$$\begin{aligned} \max \quad & v \\ \text{s.a.} \quad & 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 \geq v \\ & 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 \geq v \\ & -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \geq v \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Mediante el método del simplex obtenemos la estrategia óptima del jugador I $x = (1/4, 1/4, 1/2)$ y el valor del juego $v = 1/2$. La estrategia consiste en utilizar la primera estrategia pura con probabilidad $1/4$, la segunda estrategia pura con probabilidad $1/4$, y la tercera con probabilidad $1/2$. Con esta estrategia se obtiene un pago esperado de $1/2$.

A veces, las estrategias de uno o más jugadores están sometidas a restricciones adicionales, dando lugar a los denominados juegos restringidos. Este tipo de juegos permiten una formulación más realista y práctica de ciertos problemas de decisión bajo incertidumbre. Así, un jugador puede incorporar al conjunto de sus estrategias restricciones que representen limitaciones de recursos, relaciones técnicas, o considerar la posible información que un jugador posea acerca de la frecuencia relativa con que su oponente utiliza sus estrategias.

Charnes (1963) [24] estableció la equivalencia entre ciertos problemas lineales y los juegos matriciales en los que las estrategias mixtas están sometidas a restricciones lineales. En algunos casos particulares interesantes, el conjunto de restricciones adicionales puede representarse en función de sus puntos extremos, lo que permite el tratamiento del problema en términos de un juego transformado (Monroy, 1996 [61]), como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.6 *Consideremos el juego biperonal de suma nula cuya matriz de pagos es:*

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Las estrategias óptimas, el jugador I se obtienen a partir del problema lineal

$$\begin{aligned} \max \quad & v \\ \text{s.a.} \quad & 4x_1 + 6x_2 \geq v \\ & 6x_1 + 4x_2 \geq v \\ & 5x_3 \geq v \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

La estrategia óptima para el jugador I es $x = (1/4, 1/4, 1/2)$ y el valor del juego $v = 2.5$.

Supongamos que la distribución de probabilidad sobre el conjunto de las estrategias puras del jugador I, está sometida a la siguiente ordenación

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq 0$$

y la distribución de probabilidad sobre el conjunto de estrategias puras del jugador II, está ordenada de la forma

$$y_1 \geq y_2 \geq y_3 \geq 0$$

Los jugadores I y II deben determinar respectivamente

$$\max_{x \in S} \min_{y \in T} x^t A y \qquad \min_{y \in T} \max_{x \in S} x^t A y$$

siendo

$$S = \{x \in X : x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq 0\}$$

$$T = \{y \in Y : y_1 \geq y_2 \geq y_3 \geq 0\}$$

Los conjuntos de estrategias S y T pueden representarse en función de sus puntos extremos como

$$S = \{x \in X : x = P\alpha, \alpha \in \mathbb{R}^3, \sum_{i=1}^3 \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, 3\}$$

$$T = \{y \in Y : y = P\beta, \beta \in \mathbb{R}^3, \sum_{j=1}^3 \beta_j = 1, \beta_j \geq 0, j = 1, \dots, 3\}$$

siendo P la matriz de puntos extremos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

El problema se transforma en un juego sin restringir cuya matriz de pagos es P^tAP , dada por

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 10/3 \\ 5 & 5 & 10/3 \\ 10/3 & 10/3 & 25/9 \end{pmatrix}$$

Las estrategias óptimas de este juego transformado son

$$\alpha^* = (1, 0, 0)^t \quad \beta^* = (0, 0, 1)^t$$

por lo que las estrategias óptimas del juego restringido se obtienen como

$$x^* = P\alpha^* = (1, 0, 0) \quad y^* = P\beta^* = (1/3, 1/3, 1/3)$$

y el valor del juego es $v^* = 10/3$.

2.2. Puntos de equilibrio

Una de las propiedades más interesantes de las estrategias óptimas en los juegos matriciales, es que cuando ambos jugadores las utilizan, ninguno de ellos se beneficia si cambia a otra estrategia, mientras que el contrario se mantiene en la óptima.

Supongamos que los jugadores I y II juegan sus estrategias óptimas x^* , y^* , respectivamente. Si el jugador II sigue jugando y^* y el jugador I cambia a otra estrategia x , no obtendrá más ganancias que si continúa jugando x^* , y recíprocamente. Estas estrategias forman en cierto modo, un equilibrio. Establezcamos formalmente la definición de par de estrategias en equilibrio.

Definición 1.9 *Un par de estrategias $x^* \in X$, $y^* \in Y$ es un punto de equilibrio para un juego matricial de matriz A si:*

$$v(x, y^*) \leq v(x^*, y^*) \leq v(x^*, y) \quad \forall x \in X, \forall y \in Y$$

o bien:

$$x^t A y^* \leq x^{*t} A y^* \leq x^{*t} A y \quad \forall x \in X, \forall y \in Y$$

La primera desigualdad establece que x^* es la mejor respuesta del jugador I a la estrategia y^* del jugador II, y la segunda establece que y^* es la mejor respuesta del jugador II a la estrategia x^* del jugador I.

Puede ocurrir que un juego matricial tenga más de un punto de equilibrio, pero en este caso son intercambiables y equivalentes, es decir, pueden combinarse entre sí para formar un nuevo punto de equilibrio y además todos proporcionan el mismo pago.

En los juegos de suma nula los conceptos de solución considerados, estrategias óptimas y puntos de equilibrio, son equivalentes

Teorema 1.4 *Sean $x^* \in X$, $y^* \in Y$, un par de estrategias de un juego matricial, (x^*, y^*) es un punto de equilibrio del juego si y sólo si (x^*, y^*, v^*) es una solución del juego.*

Este resultado establece que las estrategias óptimas forman pares de estrategias en equilibrio y son los únicos puntos de equilibrio. El teorema 1.4, puede reinterpretarse en términos de solución de un juego como:

Corolario 1.1 *Si un juego matricial tiene más de una solución, todas proporcionan el mismo valor del juego.*

Ejemplo 1.7 *Una empresa tiene dos compañías, A y B, que, en media, pagan a Hacienda anualmente 4.000.000 u.m. y 12.000.000 u.m. respectivamente. Para cada una de las compañías, la empresa puede declarar sus ingresos reales y pagar los impuestos correspondientes, o bien falsificar su contabilidad y evitar el pago de impuestos. El servicio de inspección de Hacienda sólo tiene medios para investigar una compañía cada año. Si investiga una compañía con ingresos falsos, descubrirán el fraude, y la compañía tendrá que pagar los impuestos correspondientes más una multa que será el doble de lo defraudado. Se desea obtener la estrategia óptima para la inspección de Hacienda, si ésta desea maximizar los ingresos.*

Las estrategias de Hacienda son:

I_1 : Investigar la compañía A.

I_2 : Investigar la compañía B.

Las estrategias de la empresa son:

II_1 : Declarar los ingresos reales de A y B.

II_2 : Declarar ingresos reales de A y falsos de B.

II_3 : Declarar ingresos reales de B y falsos de A.

II_4 : Declarar ingresos falsos para A y B.

La matriz de pagos en millones de u.m. es

	II_1	II_2	II_3	II_4
I_1	16	4	24	12
I_2	16	40	12	36

El valor del juego es $v = 16$ y corresponde a las estrategias óptimas $x^ = (\alpha, 1 - \alpha)$, $1/3 \leq \alpha \leq 2/3$, $y^* = (1, 0, 0, 0)$, es decir $y^* = II_1$.*

Cuando se generalizan estos resultados, bien a juegos de n personas, con $n > 2$, o bien a juegos de suma no nula, las propiedades de las estrategias en equilibrio, de ser equivalentes e intercambiables se pierden. Es decir, un par de estrategias maximin no tiene que ser necesariamente un par de estrategias

en equilibrio, o viceversa. Todos los puntos de equilibrio no proporcionan necesariamente el mismo pago, por lo que no hay un concepto único de solución del juego.

3. Juegos continuos escalares

En este apartado abordaremos el estudio de los juegos bipersonales continuos. En estos juegos cada jugador dispone de un continuo de estrategias puras. Usualmente se las suele asociar con el intervalo $[0, 1]$. Obviamente, es cierto que existe una biyección entre todo conjunto con la cardinalidad del continuo y el intervalo $[0, 1]$. Sin embargo, también es cierto que con esta transformación muchas de las propiedades de las funciones de pago del juego original pueden perderse. Por ello a veces es más razonable mantener la estructura del conjunto original de estrategias y estudiar los juegos continuos en sus espacios originales. De cualquier forma, el análisis detallado de la problemática de estas transformaciones está fuera del alcance de este libro y en lo que sigue nos reduciremos a considerar los juegos continuos sobre sus espacios originales.

Consideremos dos espacios de estrategias puras X e Y respectivamente para los jugadores I y II. Supongamos que para todo par de estrategias puras $(x, y) \in X \times Y$ tenemos definida una función de pago $K(x, y)$, usualmente llamada núcleo. Una estrategia mixta en este juego será una medida normalizada (probabilidad) sobre el conjunto de estrategias puras. Supongamos que F (respectivamente G) es una probabilidad sobre X (respectivamente Y), conjunto de estrategias puras del jugador I (respectivamente II).

Si el jugador I juega su estrategia pura x y el jugador II su estrategia mixta G el valor esperado del juego será

$$E(x, G) = \int_Y K(x, y) dG(y)$$

donde estamos integrando en el sentido de Lebesgue-Stieltjes con respecto a la medida inducida por G .

Si el jugador II juega su estrategia pura y y el jugador I su estrategia mixta F el valor esperado del juego será

$$E(F, y) = \int_X K(x, y) dF(x).$$

Por lo tanto, si el jugador I juega según F y el jugador II según G , el valor esperado del juego vendrá dado por:

$$E(F, G) = \int_{X \times Y} K(x, y) d(F \times G)$$

donde $F \times G$ es la medida producto de las medidas F y G definidas sobre los conjuntos de estrategias puras de cada jugador.

Ahora siguiendo el mismo tratamiento que en el caso con un número finito de estrategias puras podremos definir el valor del juego como el único valor (caso de existir) que verifica:

$$v_I = v_{II}$$

siendo:

$$\begin{aligned} v_I &= \sup_F \inf_y E(F, y) \\ v_{II} &= \inf_G \sup_x E(x, G). \end{aligned}$$

La pregunta lógica es cuándo estos juegos tienen valor y más aún cuándo existe una estrategia óptima. Esto es, establecer cuando existen valores para los cuales los ínfimos y supremos anteriores se alcancen. A ambas cuestiones es fácil darle respuesta. En este sentido puede probarse el siguiente teorema (véase Owen 1982 [71]).

Teorema 1.5 *Si los conjuntos de estrategias puras de ambos jugadores son conjuntos compactos y el núcleo K es una función continua, entonces:*

1. $v_I = v_{II}$
2. *Los operadores $\inf \sup$ y $\sup \inf$ pueden sustituirse por $\min \max$ y $\max \min$.*

Adicionalmente, es posible cuestionarse bajo que condiciones puede alcanzarse el valor del juego en estrategias puras. Esta pregunta se responde introduciendo el concepto de juego cóncavo-convexo.

Definición 1.10 *Un juego continuo es cóncavo-convexo si su núcleo $K(x, y)$ es una función convexa en x para cada y fijo y cóncava en y para cada x .*

Para este tipo de juegos, admitiendo además alguna hipótesis adicional de continuidad es posible asegurar la existencia de estrategias óptimas en estrategias puras.

Teorema 1.6 *Todo juego cóncavo-convexo con núcleo K continuo sobre conjuntos de estrategias puras convexos y compactos alcanza el valor del juego en estrategias puras.*

4. Juegos por objetivos

Un problema que surge inmediatamente con respecto al concepto de estrategia mixta es su relevancia cuando el juego se juega una sola vez. Esto deriva del hecho de que la noción de pago esperado, es decir, la cantidad que un jugador racional desea maximizar, parece sólo aplicable a un juego repetido varias veces. Pero en un juego que se juega una sola vez puede no tener sentido escoger una estrategia, de acuerdo con la distribución de probabilidad asociada. Una estrategia mixta x proporciona al jugador un valor esperado $v(x)$ que es una media ponderada y puede aceptarse si dicha estrategia se usa un gran número de veces. Sin embargo, si se utiliza una sola vez la posibilidad de que el jugador obtenga un valor menor que $v(x)$ puede ser grande. Si con una estrategia pura I_i se obtiene un valor $v(I_i)$ muy próximo a $v(x)$ no parece razonable que el jugador se arriesgue tanto en obtener valores inferiores a uno que tiene seguro, $v(I_i)$, por aumentar su nivel de seguridad, ya que al realizar el juego una única vez es posible que salga perdiendo.

Parece, pues, un poco arriesgado el criterio de escoger entre las estrategias mixtas. Sería más adecuado que el jugador hiciera crecer su nivel de seguridad, pero asegurándose una ganancia real cada vez que realice el juego.

Nosotros proponemos un nuevo enfoque en el estudio de los juegos, que complementa al estudio tradicional, pues podremos asegurar la consecución de objetivos en una situación conflictiva con una cierta probabilidad. Esta perspectiva mejora el desarrollo clásico que se apoya en la repetición de las situaciones, que nunca suelen ser las mismas, ya que los conflictos suelen cambiar cuando cambian las situaciones. Cuando se conoce la probabilidad con

que puede ocurrir un resultado, se consigue que los objetivos que se marquen las partes en conflicto sean más realistas.

4.1. Juegos matriciales por objetivos

Consideremos un juego bipersonal, finito de suma nula, en forma normal. Sea $A = (a_{ij})$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, la matriz de pagos del juego y X e Y los conjuntos de estrategias mixtas de los jugadores I, y II, respectivamente.

Analizamos el problema desde el punto de vista del jugador I. Sea $P \in \mathbb{R}$ un objetivo establecido por dicho jugador. Para determinar las estrategias basadas en la probabilidad de conseguir el objetivo P , formulamos un juego de suma nula llamado juego matricial por objetivos.

Definición 1.11 *La función de pagos del juego por objetivos para cada par de estrategias $x \in X$, $y \in Y$, viene dada por*

$$v(x, y) = x^t A_P y$$

donde

$$A_P = (\delta_{ij}) \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{ij} \geq P \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$v(x, y)$ es la probabilidad de obtener al menos P en el juego original cuando el jugador I juega su estrategia $x \in X$ y el jugador II juega su estrategia $y \in Y$.

Como $v(x, y)$ depende de la estrategia que juegue el jugador II, consideraremos el peor de los casos, es decir, supondremos que el jugador II escogerá una estrategia $y \in Y$ que proporcione el valor mínimo de $v(x, y)$. Por ello, para cada $x \in X$, el jugador I obtendrá:

$$v(x) = \min_{y \in Y} v(x, y) = \min_{y \in Y} x^t A_P y = \min_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^n x_i \delta_{ij}$$

Definición 1.12 *El nivel de seguridad del juego por objetivos para el jugador I es la máxima probabilidad de obtener el objetivo P que el jugador I puede asegurarse prescindiendo de las acciones de el jugador II.*

Viene dado por:

$$v = \max_{x \in X} v(x) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} v(x, y) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} x^t A_P y$$

Definición 1.13 *Una estrategia $x \in X$ es una estrategia de seguridad de nivel P para el jugador I, si $v = \min_{y \in Y} x^t A_P y$*

El siguiente resultado caracteriza a las estrategias de seguridad de nivel P y proporciona un procedimiento para resolver los juegos de suma nula por objetivos.

Teorema 1.7 *Las estrategias de seguridad de nivel P y la máxima probabilidad de obtener al menos el objetivo P vienen dadas por la solución del juego bipersonal de suma nula cuya matriz de pagos es A_P .*

Demostración: Para $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$, e $y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in Y$, el valor esperado del juego de suma nula de matriz A_P es:

$$v(x, y) = x^t A_P y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j \delta_{ij}$$

Para cada $i = 1, \dots, n$ sea Y_i la suma de las y_j en las columnas que tienen un elemento igual a 1 en la fila i -ésima, es decir,

$$Y_i = \sum_{j=1}^m y_j \delta_{ij} \quad i = 1, \dots, n$$

La probabilidad de obtener un pago mayor o igual que P cuando los jugadores utilizan las estrategias x e y es:

$$\sum_{i=1}^n x_i Y_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j \delta_{ij} = v(x, y)$$

□

Observación: Si existe un i tal que $\delta_{ij} = 1$, para $j = 1, \dots, m$, entonces utilizando la estrategia pura i -ésima de el jugador I, la probabilidad de conseguir al menos el objetivo P es 1. Si existe j tal que $\delta_{ij} = 0$ para $i = 1, \dots, n$, entonces la probabilidad de conseguir al menos el objetivo P es 0, porque la estrategia pura j -ésima del jugador II impide al jugador I obtener más de este valor.

Ejemplo 1.8 Consideremos el juego bipersonal de suma nula con matriz de pagos

$$\begin{pmatrix} 2 & 15 & 8 & 4 \\ 10 & 7 & 2 & 7 \\ 8 & 4 & 10 & 7 \\ 7 & 14 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

Supongamos que el jugador I desea conocer la probabilidad de obtener el objetivo $P = 6$, y las estrategias para lograrlo. La matriz A_p inducida por $P = 6$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y el problema que hemos de resolver es:

$$\begin{aligned} \max \quad & v \\ \text{s. a.} \quad & x_2 + x_3 + x_4 \geq v \\ & x_1 + x_2 + x_4 \geq v \\ & x_1 + x_3 \geq v \\ & x_2 + x_3 + x_4 \geq v \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

cuya solución es $v = 2/3$ y $x^* = (1/3, 1/3, 1/3, 0)$, es decir, la probabilidad de conseguir al menos el objetivo $P = 6$ es $2/3$, y la estrategia de nivel de seguridad P es $x^* = (1/3, 1/3, 1/3, 0)$. El valor esperado de este juego es $v = 7,67619$ que se conseguiría con una probabilidad de $1/2$.

4.2. Descomposición del espacio de objetivos

Hasta ahora hemos estudiado el problema para un objetivo conocido P , pero podemos realizar un análisis global cuando no disponemos de ninguna información sobre el objetivo que el jugador quiere alcanzar. Los posibles objetivos que el jugador puede obtener se encuentran entre el menor y el mayor elemento de la matriz de pagos A . A este segmento lo llamamos *espacio de objetivos*.

A su vez el espacio de objetivos puede partitionarse, de forma que todos los objetivos que pertenecen al mismo segmento se alcanzan con la misma probabilidad. Para determinar estas probabilidades en cada uno de los segmentos de la partición, aplicamos el teorema 1.7 de forma ordenada y consideramos análisis de sensibilidad de programación lineal.

Supongamos que la matriz A tiene r elementos distintos. Dichos elementos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, se ordenan de manera creciente. Los conjuntos que forman la partición del espacio de objetivos son

$$(\alpha_{i-1}, \alpha_i] \quad i = 2, \dots, r$$

y el punto α_1 .

4.3. Proceso secuencial de resolución

Consideramos la matriz A_P para el objetivo $P = \alpha_r$, y resolvemos el juego biperpersonal de suma nula con matriz de pagos A_P . El valor de este juego es la probabilidad de que el jugador I obtenga un pago de al menos P en el juego original, para cualquier $P \in (\alpha_{r-1}, \alpha_r]$.

En el siguiente paso, consideramos la matriz A_P para el objetivo $P = \alpha_{r-1}$. Usando la información obtenida en el paso anterior, (base óptima), resolvemos el juego biperpersonal de suma nula con esta matriz de pagos. El valor del juego es la probabilidad de que el jugador I obtenga al menos el objetivo P en el juego original, para cualquier $P \in (\alpha_{r-2}, \alpha_{r-1}]$. Si obtenemos la misma solución que en el paso anterior, los dos segmentos, $(\alpha_{r-1}, \alpha_r]$ y $(\alpha_{r-2}, \alpha_{r-1}]$, pueden colapsarse en uno solo, $(\alpha_{r-2}, \alpha_r]$.

El procedimiento continúa hasta la primera vez que se obtenga una matriz A_P con todos los elementos de una fila igual a 1. Si esto ocurre para el objetivo $P = \alpha_s$, entonces la probabilidad de alcanzar cualquier objetivo P tal que $P \leq \alpha_s$ es igual a 1.

El algoritmo siguiente proporciona los valores de estas probabilidades.

Algoritmo

Paso 1: Inicializar todos los elementos de A_P a cero.

Paso 2: Determinar la posición (i, j) correspondiente al mayor elemento en la matriz A aún no considerado. Poner un 1 en la posición (i, j) de la matriz A_P .

Paso 3: ¿ Tiene A_P alguna columna con todos los elementos igual a 0?

Si: ir al paso 2

No: ir al paso 4

Paso 4: Resolver el juego de suma nula de matriz A_P . Escribir la solución.

Paso 5: ¿ Tiene A_P alguna fila con todos sus elementos igual a 1?

Si: ir al paso 6

No: ir al paso 2.

Paso 6: Fin.

Con este procedimiento obtenemos el conjunto de soluciones para todos los objetivos posibles P , y el jugador I escogerá entre ellos según el riesgo que quiera asumir.

Ejemplo 1.9 : *Consideremos el juego bipersonal de suma nula del ejemplo anterior, cuya matriz de pagos es*

$$\begin{pmatrix} 2 & 15 & 8 & 4 \\ 10 & 7 & 2 & 7 \\ 8 & 4 & 10 & 7 \\ 7 & 14 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

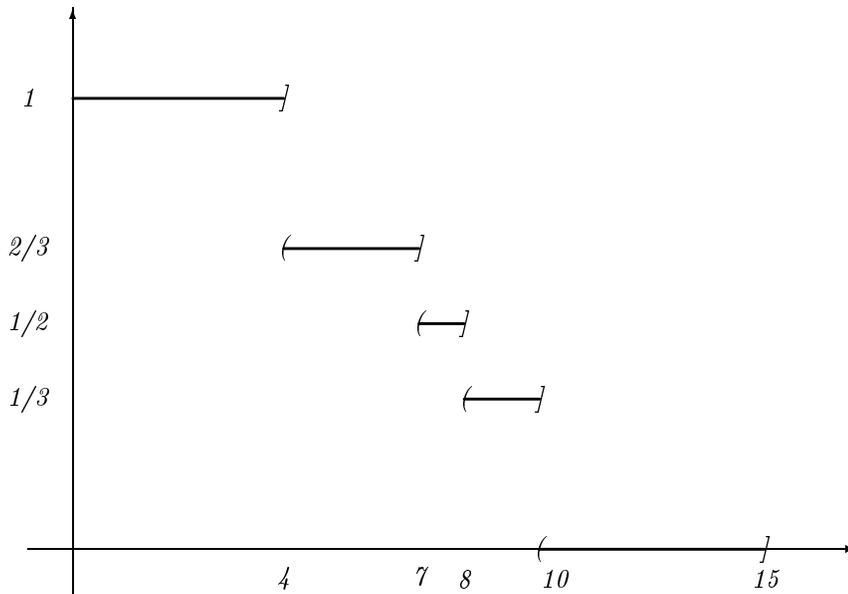
Los segmentos que forman la partición del espacio de objetivos son

$$2, (2,4], (4,7], (7,8], (8,10], (10,11], (11,14], (14,15]$$

Las probabilidades de obtener los objetivos que pertenecen a cada segmento y el correspondiente conjunto de estrategias de seguridad de nivel P son:

Segmento	Probabilidad	Conjunto
2	1	X
$(2,4]$	1	$\text{conv}\{(0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$
$(4,7]$	$2/3$	$\text{conv}\{(1/3,1/3,1/3,0), (1/3,0,1/3,1/3)\}$
$(7,8]$	$1/2$	$\{(0,0,1/2,1/2)\}$
$(8,10]$	$1/3$	$\{(0,1/3,1/3,1/3)\}$
$(10,11]$	0	X
$(11,14]$	0	X
$(14,15]$	0	X

donde $\text{conv}\{a,b\}$ es el cierre convexo de los vectores a,b . Gráficamente



Observemos que el jugador I obtendrá al menos el objetivo $P = 7$ con probabilidad $2/3$, $\forall x \in \text{conv}\{(1/3,1/3,1/3,0), (1/3,0,1/3,1/3)\}$, $\forall y \in Y$.

Sin embargo, la probabilidad de conseguir el objetivo $P = 9$ es $1/3$ con $x = (0, 1/3, 1/3, 1/3)$, $\forall y \in Y$.

Nótese que para los juegos con núcleo continuo tratados en la sección 3 también sería posible definir objetivos y su correspondiente análisis como juego por objetivos. Todos los argumentos expuestos anteriormente serían válidos sin más que definir para un objetivo P un nuevo núcleo K^P a través de la expresión:

$$K^P(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } K(x, y) < P \\ 1 & \text{si } K(x, y) \geq P. \end{cases}$$

Sin embargo, ahora no es posible asegurar el teorema minimax, ni tan siquiera la existencia de estrategias óptimas puesto que con esta definición el nuevo núcleo deja de ser continuo y no podríamos aplicar los resultados expuestos previamente en esta sección. Es por tanto una cuestión interesante el estudio de los juegos continuos por objetivos.

CAPÍTULO II

Juegos matriciales vectoriales

L. Monroy J. Puerto

1. Juegos de suma nula con pagos vectoriales

Los juegos en los que los pagos que reciben los jugadores vienen representados por vectores en lugar de por números reales, se les denomina *juegos vectoriales*, *juegos multicriterio* o *juegos con pagos múltiples*.

En estos juegos, si no hay cooperación entre los jugadores, como ocurre en el caso de suma nula, se añade la dificultad de la no existencia de un orden total entre los elementos que definen la matriz de pago, por lo que la valoración de las estrategias y la comparación entre las mismas es un problema adicional que presenta la teoría de juegos, siendo el concepto de solución clásica de un juego difícil de desarrollar.

En un juego escalar toda estrategia pura puede recorrer un conjunto de valores, y entre ellos hay uno más desfavorable:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La primera estrategia pura del jugador I tiene asociados los valores 0 y 2, siendo el 0 una valoración pesimista de dicha estrategia.

En un juego vectorial la estrategia pura toma un conjunto de valores vectoriales y entre ellos no tiene por qué existir uno más desfavorable:

$$\begin{pmatrix} (0, 0) & (2, -1) \\ (1, -2) & (0, 0) \end{pmatrix}$$

La primera estrategia del jugador I tiene asociados los valores $(0, 0)$ y $(2, -1)$, pero no podemos destacar ninguno de ellos como valoración pesimista de dicha estrategia.

Por esta razón han aparecido nuevos conceptos de solución. En este sentido, el concepto de estrategia de seguridad Pareto-óptima es muy importante para la resolución de juegos con pagos múltiples, utilizando conceptos de solución basados en los niveles de seguridad de los jugadores.

Así, Ghose y Prasad (1989) [41] definen puntos de equilibrio con niveles de seguridad Pareto-óptimos y puntos de silla de Pareto. Para determinar el conjunto de estrategias de seguridad Pareto-óptimas establecen dos juegos escalares, uno para cada jugador, y prueban que las estrategias maximin y minimax de estos juegos son estrategias de seguridad Pareto-óptimas para el jugador correspondiente.

Ghose (1991) [42] obtiene las estrategias de seguridad Pareto-óptimas de un juego vectorial de suma nula por medio de la escalarización del juego original. Demuestra, mediante un largo proceso, que una extensión del conjunto formado por los vectores de nivel de seguridad es un conjunto poliédrico. A partir de este resultado, establece que una escalarización estrictamente positiva es una condición necesaria y suficiente para obtener una estrategia de seguridad Pareto-óptima para tales juegos.

En este capítulo obtenemos la misma escalarización como un caso particular de un enfoque más general, realizado a través de un procedimiento alternativo que simplifica, en gran manera, las demostraciones establecidas por estos autores. Por medio de la programación lineal multiobjetivo, obtenemos todas las estrategias de seguridad Pareto-óptimas como soluciones eficientes de problemas lineales multiobjetivo.

2. Concepto de solución

Consideramos un juego finito biperpersonal, de suma nula en forma normal. Sea $A = (a_{ij})$, $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$, la matriz de pago del juego. Cada elemento a_{ij} de la matriz es un vector de dimensión k ,

$$a_{ij} = (a_{ij}(1), a_{ij}(2), \dots, a_{ij}(k)) \in \mathbb{R}^k,$$

que determina k matrices de orden $n \times m$ de la forma:

$$A(s) = (a_{ij}(s)) \quad 1 \leq s \leq k, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m$$

Las estrategias mixtas en estos juegos se definen de la misma forma que en los juegos escalares. Así, los espacios de estrategias mixtas para los jugadores I y II son respectivamente

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$$

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^m : \sum_{j=1}^m y_j = 1, y_j \geq 0, j = 1, \dots, m\}$$

Definición 2.1 *El pago esperado del juego cuando los jugadores escogen sus estrategias mixtas $x \in X$ e $y \in Y$, respectivamente, viene dado por:*

$$v(x, y) = x^t A y = (v_1(x, y), \dots, v_k(x, y))$$

donde

$$v_s(x, y) = x^t A(s) y \quad s = 1, \dots, k$$

Dado que una estrategia debe ser valorada por un conjunto de vectores, podemos dar una *única valoración*, al considerar que el oponente puede actuar en cada coordenada de la matriz A de modo independiente, y ofrecer el vector que se asegura el jugador, aunque realmente obtenga valores superiores. Así, la primera estrategia del ejemplo anterior estaría valorada por el vector $(0, -1)$, que aunque no es un valor del juego, es la menor cantidad que puede obtener en cada objetivo, por lo que es un nivel de seguridad.

Definición 2.2 Para cada estrategia $x \in X$ del jugador I, el vector de nivel de seguridad para dicho jugador es el pago que puede garantizarse, con esa estrategia, en cada juego escalar inducido por el juego vectorial. Análogamente para el jugador II.

Los vectores de niveles de seguridad de los jugadores I y II son respectivamente:

$$\underline{v}(x) = (\underline{v}_1(x), \dots, \underline{v}_k(x))$$

$$\bar{v}(y) = (\bar{v}_1(y), \dots, \bar{v}_k(y))$$

donde

$$\underline{v}_s(x) = \min_{y \in Y} v_s(x, y) = \min_{y \in Y} x^t A(s) y$$

$$\bar{v}_s(y) = \max_{x \in X} v_s(x, y) = \max_{x \in X} x^t A(s) y$$

Observemos que dada una estrategia $x \in X$ del jugador I, cada componente del vector de nivel de seguridad $\underline{v}_s(x)$, $s = 1, \dots, k$ pueden obtenerse con distintas estrategias $y \in Y$ del jugador II. Ghose y Prasad (1989) [41], establecen la definición de estrategia de seguridad Pareto-óptima que en nuestra notación es como sigue:

Definición 2.3 Una estrategia $x^* \in X$ es una estrategia de seguridad Pareto-óptima para el jugador I si no existe $x \in X$, tal que $\underline{v}(x^*) \leq \underline{v}(x)$, $\underline{v}(x^*) \neq \underline{v}(x)$. Una estrategia $y^* \in Y$ es una estrategia de seguridad Pareto-óptima para el jugador II si no existe $y \in Y$ tal que $\bar{v}(y^*) \geq \bar{v}(y)$, $\bar{v}(y^*) \neq \bar{v}(y)$.

2.1. Procedimiento de resolución

Dada una estrategia $x \in X$, el nivel de seguridad s -ésimo del jugador I viene dado por:

$$\underline{v}_s(x) = \min_{y \in Y} v_s(x, y) = \min_{y \in Y} x^t A(s) y$$

El problema a resolver, es un problema lineal escalar, por tanto tiene una solución óptima entre los puntos extremos del poliedro Y . Por ello, podemos expresar

$$\underline{v}_s(x) = \min_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^n x_i a_{ij}(s)$$

o matricialmente:

$$\underline{v}_s(x) = \min x^t A(s)$$

A continuación, introducimos el siguiente problema de programación lineal multiobjetivo, denominado el problema lineal del juego multicriterio.

$$\begin{aligned} (PLJM) : \quad & \max \quad v_1, \dots, v_k \\ \text{s.a.} \quad & x^t A(s) \geq (v_s, \dots, v_s) \quad s = 1, \dots, k \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Teorema 2.1 *Una estrategia $x^* \in X$ es una estrategia de seguridad Pareto-óptima y $v^* = (v_1^*, \dots, v_k^*)$ su vector de nivel de seguridad asociado si y sólo si (v^*, x^*) es una solución eficiente del problema (PLJM).*

Demostración: Sea $x^* \in X$ una estrategia de seguridad Pareto-óptima, entonces no existe otra estrategia $x \in X$ tal que $\underline{v}(x^*) \leq \underline{v}(x)$, $\underline{v}(x^*) \neq \underline{v}(x)$, o equivalentemente:

$$(\min x^t A(1), \dots, \min x^t A(k)) \geq (\min x^{*t} A(1), \dots, \min x^{*t} A(k))$$

$$(\min x^t A(1), \dots, \min x^t A(k)) \neq (\min x^{*t} A(1), \dots, \min x^{*t} A(k))$$

De aquí, $x \in X$ es una solución eficiente del problema

$$\max_{x \in X} (\min x^t A(1), \dots, \min x^t A(k))$$

y este problema es equivalente a

$$\begin{aligned} (PLJM) : \quad & \max \quad v_1, \dots, v_k \\ \text{s.a.} \quad & x^t A(s) \geq (v_s, \dots, v_s) \quad s = 1, \dots, k \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Recíprocamente, supongamos que una solución eficiente (v^*, x^*) del problema (PLJM) no es una estrategia de seguridad Pareto-óptima, entonces existe $\bar{x} \in X$ tal que

$$(\min \bar{x}^t A(1), \dots, \min \bar{x}^t A(k)) \geq (\min x^{*t} A(1), \dots, \min x^{*t} A(k))$$

$$(\min \bar{x}^t A(1), \dots, \min \bar{x}^t A(k)) \neq (\min x^{*t} A(1), \dots, \min x^{*t} A(k))$$

Sea $\bar{v} = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k)$, donde $\bar{v}_s = \min \bar{x}^t A(s)$, $s = 1, \dots, k$, el vector (\bar{v}, \bar{x}) es una solución del problema (PLJM) que domina a (v^*, x^*) , en contra de ser una solución eficiente de dicho problema. \square

Este resultado es muy importante por varias razones. En primer lugar pone de manifiesto que, al igual que la programación lineal se utiliza para obtener las estrategias óptimas y el valor de los juegos escalares bipersonales de suma nula, de la misma forma puede utilizarse la programación lineal multiobjetivo para resolver los juegos bipersonales de suma nula con pagos vectoriales, siempre que se considere el concepto de estrategia de seguridad Pareto-óptima como solución de los mismos.

En segundo lugar, hay que hacer notar que, como es usual en los problemas lineales multiobjetivo, a partir de las soluciones eficientes extremas, se obtienen todas las estrategias de seguridad Pareto-óptimas.

Ejemplo 2.1 : Consideremos el juego vectorial cuya matriz de pagos es

$$\begin{pmatrix} (1, 3) & (2, 1) \\ (3, 1) & (1, 2) \\ (1, 1) & (3, 3) \end{pmatrix}$$

el problema lineal multiobjetivo asociado es

$$\begin{aligned} \max \quad & v_1, v_2 \\ \text{s. a.} \quad & x_1 + 3x_2 + x_3 \geq v_1 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq v_1 \\ & 3x_1 + x_2 + x_3 \geq v_2 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq v_2 \\ & \sum_{i=1}^3 x_i = 1 \\ & x \geq 0, v_1, v_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Utilizando el paquete de programación multiobjetivo ADBASE hemos obtenido las siguientes soluciones extremas eficientes:

$$(v^1, x^1) = (2, 1; 0, 1/2, 1/2)$$

$$(v^2, x^2) = (9/5, 9/5; 2/5, 2/5, 1/5)$$

$$(v^3, x^3) = (1, 2; 1/2, 0, 1/2)$$

y el conjunto de todas las estrategias de seguridad Pareto-óptimas para el jugador I es:

$$\text{conv}\{(0, 1/2, 1/2), (2/5, 2/5, 1/5)\} \cup \text{conv}\{(2/5, 2/5, 1/5), (1/2, 0, 1/2)\}$$

Definición 2.4 Un par de estrategias $x \in X$, $y \in Y$, forman un punto de silla de Pareto para el juego vectorial si $\underline{v}(x) = \bar{v}(y)$.

Este concepto puede equipararse con el concepto de solución ideal en programación multiobjetivo, que es aquella solución factible que maximiza todos los objetivos simultáneamente. Así, tenemos la siguiente definición:

Definición 2.5 $x^* \in X$ es una estrategia ideal para el jugador I si x^* maximiza $\underline{v}_s(x)$, $\forall s = 1, \dots, k$. $y^* \in Y$ es una estrategia ideal para el jugador II si y^* minimiza $\bar{v}_s(y)$, $\forall s = 1, \dots, k$.

Sin embargo, la existencia de estrategia ideal para un jugador no implica la existencia de punto de silla de Pareto para el juego vectorial, puesto que los niveles de seguridad de cada juego escalar $A(s)$, $s = 1, \dots, k$, se pueden obtener con estrategias diferentes del otro jugador.

Corolario 2.1 Un par de estrategias $x^* \in X$, $y^* \in Y$, forman un punto de silla de Pareto para los jugadores I y II si y sólo si x^* e y^* son estrategias ideales para los jugadores I y II respectivamente.

Ejemplo 2.2 Consideremos el juego matricial propuesto por Ghose y Prasad (1989) [41], cuya matriz de pagos es

$$\begin{pmatrix} (2, 3) & (3, 2) \\ (4, 1) & (2, 3) \end{pmatrix}$$

La estrategia $x^* = (2/3, 1/3)$ del jugador I, y la estrategia $y^* = (1/3, 2/3)$ del jugador II forman un punto de silla de Pareto para este juego. Además ambas estrategias son estrategias ideales para el jugador I y el jugador II respectivamente.

2.2. Métodos de escalarización

El teorema 2.1 establece una equivalencia entre las estrategias de seguridad Pareto-óptimas de un juego vectorial y las soluciones eficientes de un problema lineal múltiple. La forma más usual de caracterizar soluciones eficientes de problemas múltiples es a través de las soluciones de problemas escalares apropiados.

Vamos a considerar dos formas de escalarizar el juego vectorial para su resolución: el problema lineal ponderado y el problema maximin ponderado.

2.2.1. El problema lineal ponderado

Este método consiste en asociar a cada objetivo del problema lineal del juego múltiple un peso no negativo, λ_i , y obtener una nueva función objetivo como la suma de los k objetivos ponderados. Formalmente:

Dado el problema lineal del juego multicriterio:

$$\begin{aligned}
 (PLJM) : \quad & \max \quad v_1, \dots, v_k \\
 \text{s.a.} \quad & x^t A(s) \geq (v_s, \dots, v_s) \quad s = 1, \dots, k \\
 & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\
 & x \geq 0
 \end{aligned}$$

formamos el problema lineal escalar:

$$\begin{aligned}
 (P(\lambda)) : \quad & \max \quad \sum_{s=1}^k \lambda_s v_s \\
 \text{s.a.} \quad & x^t A(s) \geq (v_s, \dots, v_s) \quad s = 1, \dots, k \\
 & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\
 & x \geq 0
 \end{aligned}$$

donde $\lambda \in \Lambda^0 = \{\lambda \in \mathbb{R}^k : \lambda_s > 0, \sum_{s=1}^k \lambda_s = 1\}$.

El siguiente teorema establece la caracterización de las estrategias de seguridad Pareto-óptimas del juego vectorial por medio de las soluciones del problema ponderado.

Teorema 2.2 *Una estrategia $x^* \in X$ es una estrategia de seguridad Pareto-óptima y v^* su vector de nivel de seguridad asociado si y sólo si existe $\lambda^* \in \Lambda^0$ tal que (v^*, x^*) es una solución óptima del problema $P(\lambda^*)$*

Demostración: Por el teorema 2.1, x^* es una estrategia de seguridad Pareto-óptima y v^* su vector de nivel de seguridad asociado si y sólo si (v^*, x^*) es una solución eficiente del problema $(PLJM)$, y esto equivale a que existe $\lambda^* \in \Lambda^0$ tal que (v^*, x^*) es una solución óptima del problema $P(\lambda^*)$. \square

Cada estrategia de seguridad Pareto-óptima x^* está asociada con un conjunto poliédrico $\Lambda(x^*) \subset \Lambda^0$, tal que (v^*, x^*) es una solución óptima del problema $P(\lambda)$, $\forall \lambda \in \Lambda(x^*)$. Si (v^*, x^*) es una solución eficiente extrema del $(PLJM)$ el conjunto de pesos asociado es:

$$\Lambda(x^*) = \{\lambda \in \Lambda : \lambda^t(C - Z)(x^*) \leq 0\}$$

donde $(C - Z)(x^*)$ es la matriz de costes reducidos asociada con la estrategia x^* .

El conjunto $\Lambda(x^*)$ puede considerarse como una región de sensibilidad ya que cambios pequeños en los parámetros no cambian la estrategia óptima cuando esta región tiene interior relativo no vacío. Las regiones asociadas con las soluciones eficientes extremas del $(PLJM)$ inducen una partición en Λ^0 , y en el conjunto de las estrategias de seguridad Pareto-óptimas de los jugadores.

Sea X_{ep} el conjunto de los pares formados por las estrategias de seguridad Pareto-óptimas del jugador I y su nivel de seguridad asociado (análogamente para el jugador II, Y_{ep}), es decir

$$X_{ep} = \{(\underline{v}(x), x) : x \in X, x \text{ es una estrategia de seguridad Pareto-óptima}\}$$

Sea $H(x)$ el conjunto de soluciones óptimas del problema $P(\lambda)$, $\forall \lambda \in \Lambda(x)$, y sea $ext(PLJM)$ el conjunto de soluciones eficiente extremas del problema $(PLJM)$.

Teorema 2.3 *Se verifica $X_{ep} = \bigcup_{x \in ext(PLJM)} H(x)$*

Demostración: Sea x una estrategia de seguridad Pareto-óptima, por el teorema 2.2, existe un $\lambda^0 \in \Lambda^0$ tal que x es una solución de $P(\lambda^0)$. Al ser $P(\lambda^0)$ un problema lineal, tiene al menos un punto extremo x^* de su región factible que también es solución óptima. Por tanto, $\lambda^0 \in \Lambda(x^*)$ por lo que $x \in H(x^*)$.

Recíprocamente, sea $x^0 \in H(x)$ para algún $x \in \text{ext}(PLJM)$, entonces x^0 es una solución óptima de $P(\lambda)$, $\forall \lambda \in \Lambda(x) \subset \Lambda$. Por el teorema 2.2, tenemos que x^0 es una estrategia de seguridad Pareto-óptima. \square

Ejemplo 2.3 *En el ejemplo 2.1, cada estrategia de seguridad Pareto-óptima extrema está asociada a un conjunto de ponderaciones o pesos:*

$$(v^1, x^1) = (2, 1; 0, 1/2, 1/2) \text{ para pesos } \lambda_1 \in [4/5, 1]$$

$$(v^2, x^2) = (9/5, 9/5; 2/5, 2/5, 1/5) \text{ para pesos } \lambda_1 \in [1/5, 1/4]$$

$$(v^3, x^3) = (1, 2; 1/2, 0, 1/2) \text{ para pesos } \lambda_1 \in [0, 1/5].$$

$$\text{Con } \lambda_2 = 1 - \lambda_1.$$

2.2.2. El problema maximin ponderado

Si el jugador desea calcular las estrategias de seguridad Pareto-óptimas, de forma que los niveles de seguridad alcanzados con ellas en cada juego escalar, aumenten en conjunto, es decir, si el jugador quiere maximizar todos y cada uno de ellos, es conveniente la utilización del criterio maximin. Este criterio consiste en hallar una estrategia que maximice el mínimo de los niveles de seguridad de los juegos escalares.

Dado el problema lineal del juego multicriterio:

$$\begin{aligned} (PLJM) : \quad & \max \quad v_1, \dots, v_k \\ \text{s.a.} \quad & x^t A(s) \geq (v_s, \dots, v_s) \quad s = 1, \dots, k \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

el problema maximin asociado es:

$$\begin{aligned} \max \quad & \min \quad v_1, \dots, v_k \\ \text{s.a.} \quad & x^t A(s) \geq (v_s, \dots, v_s) \quad s = 1, \dots, k \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Este problema es un caso particular del problema en el que los niveles de seguridad están ponderados. El problema maximin ponderado asociado con $(PLJM)$ es:

$$\begin{aligned}
(PMP(\omega)) : \quad & \max \quad \min \quad \omega_1 v_1, \dots, \omega_k v_k \\
\text{s.a.} \quad & x^t A(s) \geq (v_s, \dots, v_s) \quad s = 1, \dots, k \\
& \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\
& x \geq 0
\end{aligned}$$

con $\omega \in \Omega = \{\omega \in \mathbb{R}^k : \omega > 0\}$.

Este problema puede expresarse equivalentemente como:

$$\begin{aligned}
\max \quad & z \\
\text{s.a.} \quad & x^t A(s) \geq (v_s, \dots, v_s) \quad s = 1, \dots, k \\
& \omega_s v_s \geq z \quad s = 1, \dots, k \\
& \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\
& x \geq 0
\end{aligned}$$

con $z \in \mathbb{R}$.

A continuación establecemos un teorema que caracteriza las estrategias de seguridad Pareto-óptimas en función de las soluciones del problema $(PMP(\omega))$.

Teorema 2.4 *Una estrategia $x^* \in X$ es una estrategia de seguridad Pareto-óptima para el jugador I, en el juego vectorial si y sólo si (v^*, x^*) es una solución óptima del problema $PMP(\omega^0)$ con $\omega^0 \in \Omega$*

Demostración: Yano y Sakawa (1989) [99], establecen que (v^*, x^*) es una solución eficiente del problema $(PLJM)$ si y sólo si existe $\omega^0 \in \Omega$ tal que (v^*, x^*) es una solución óptima del problema $PMP(\omega^0)$. Por el teorema 2.1, es equivalente a que x^* es una estrategia de seguridad Pareto-óptima del jugador I en el juego original. \square

3. Juegos vectoriales con núcleos continuos

En este apartado abordaremos el estudio de los juegos bipersonales continuos multiobjetivo. Para ello utilizaremos como punto de partida los conceptos

de solución que se basan en niveles de seguridad y concretamente las estrategias de seguridad Pareto-óptimas.

Consideremos un juego bipersonal en forma normal con vector de pagos $K = (K_1, \dots, K_p)$, donde cada K_j es una función $K_j : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ convexa en x y cóncava en y , siendo $K(x, y)$ el pago recibido por el jugador I (II) del jugador II (I) cuando el jugador I (II) toma la estrategia $x(y)$.

En este problema los espacios de estrategias para los jugadores I y II vienen dados por:

$$\begin{aligned} \Gamma^1 &= \{x \in C_1 : p_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, s\} \\ \Gamma^2 &= \{y \in C_2 : q_j(y) \leq 0, j = 1, \dots, t\} \end{aligned}$$

donde $C_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ y $C_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ son conjuntos convexos y $p_i, i = 1, \dots, s$ y $q_j, j = 1, \dots, t$ son funciones convexas. En lo que sigue, siempre supondremos que Γ^1 and Γ^2 son conjuntos compactos.

Cada estrategia $x \in \Gamma^1$ (respectivamente $y \in \Gamma^2$) define sus niveles de seguridad $\underline{K}_l(x)$ (respectivamente $\overline{K}_l(y)$) como el vector de pagos K cuando II (respectivamente I) actúa de la mejor forma posible frente a la estrategia x (respectivamente frente a y), Ghose y Prasad (1989) [41]. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \underline{K}_l(x) &= \min_{y \in \Gamma^2} K_l(x, y) \quad l = 1, \dots, p \\ \overline{K}_l(y) &= \max_{x \in \Gamma^1} K_l(x, y) \quad l = 1, \dots, p \end{aligned}$$

siendo los niveles de seguridad las p -uplas:

$$\begin{aligned} \underline{K}(x) &= [\underline{K}_1(x), \dots, \underline{K}_p(x)] \\ \overline{K}(y) &= [\overline{K}_1(y), \dots, \overline{K}_p(y)]. \end{aligned}$$

Es importante resaltar que bajo estas condiciones las funciones de nivel de seguridad \underline{K}_l son cóncavas y que al igual que señalabamos para los juegos matriciales, cada estrategia x de Γ^1 , puede producir que sus niveles de seguridad $\underline{K}_l(x), l = 1, \dots, p$ se alcancen por diferentes estrategias de Γ^2 .

Definición 2.6 Una estrategia $x^* \in \Gamma^1$ es una estrategia de seguridad Pareto-óptima para I si $\nexists x \in \Gamma^1$ tal que $\underline{K}(x^*) \leq \underline{K}(x)$, $\underline{K}(x^*) \neq \underline{K}(x)$.

Este concepto tiene buenas propiedades en el caso de que el núcleo K sea bilineal. Sin embargo, en el caso no lineal algunas soluciones eficientes presentan comportamientos poco deseables con respecto a su estabilidad. Por esta razón, introduciremos una modificación del concepto de estrategia de seguridad Pareto-óptima, basada en la consideración de estrategias propiamente eficientes (Khun y Tucker (1951) [55]).

Sea f una función convexa y denotemos por $\partial f(x)$ el conjunto subdiferencial de la función f en x .

Definición 2.7 Una estrategia $x^* \in X$ es de seguridad propiamente Pareto-óptima para el jugador I si x^* es Pareto-óptima y además no existe $h \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\begin{aligned} \langle \xi_i, h \rangle &\geq 0, \quad \forall \xi_i \in \partial K_i(x^*), \text{ para todo } i = 1, \dots, p \\ \langle \xi_l, h \rangle &> 0, \quad \forall \xi_l \in \partial K_l(x^*), \text{ para algún } l \end{aligned}$$

y

$$\langle \xi_j, h \rangle \geq 0, \quad \forall \xi_j \in \partial p_j(x^*), \text{ para algún } j \in \{k : p_k(x^*) = 0\}$$

Ambos conceptos están muy relacionados porque toda estrategia de seguridad propiamente Pareto-óptima es también Pareto-óptima. Además, probaremos a continuación, que cuando K es un núcleo bilineal ambos conceptos coinciden.

Proposición 2.1 Sea un juego bipersonal con pagos múltiples $K_l(x, y) = x^t A_l y$, donde $A_l \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y con espacios poliédricos de estrategias X^1, X^2 respectivamente para los jugadores I y II. Entonces, una estrategia x^0 para el jugador I es de seguridad Pareto-óptima si y sólo si es una estrategia de seguridad propiamente Pareto-óptima.

Demostración. Puesto que $K(x, y)$ es bilineal el juego considerado es un juego matricial multicriterio. Para estos juegos hemos probado que x^0 es una estrategia de seguridad Pareto-óptima y $\underline{v} \in \mathbb{R}^p$ es su vector de niveles de seguridad si y sólo si (\underline{v}, x^0) es una solución eficiente de un determinado problema lineal múltiple (véase el teorema 2.1). Entonces, (\underline{v}, x^0) es una solución eficiente

de ese problema si y sólo si es propiamente eficiente (véase Sawaragi y otros (1985) [77]). Así pues, de la definición 2.7 se sigue que x^0 es una estrategia de seguridad propiamente Pareto-óptima para el juego y además \underline{v} es su vector de niveles de seguridad. \square

Para la determinación de la estrategia de seguridad propiamente Pareto-óptima utilizaremos procedimientos de escalarización. Con este fin, introducimos el siguiente problema escalar,

$$\begin{aligned} (\text{P}(w)): \quad & \max \sum_{l=1}^p w_l \underline{K}_l(x) \\ \text{s. a:} \quad & p_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, s \\ & x \in C_1 \end{aligned}$$

donde $w \in W = \{w \in \mathbb{R}^p : w > 0, \sum_{l=1}^p w_l = 1\}$.

Teorema 2.5 *Una estrategia $x^* \in \cdot^1$ es de seguridad propiamente Pareto-óptima si y sólo si existe $w^* \in W$ tal que x^* es solución óptima del problema $P(w^*)$.*

Demostración. Usando la definición 2.7, x^* es una estrategia de seguridad propiamente Pareto-óptima si y sólo si x^* es una solución propiamente eficiente del siguiente problema multiobjetivo no lineal que denominaremos problema del juego multicriterio (PJM)

$$\begin{aligned} (\text{PJM}): \quad & \max \underline{K}_1(x), \dots, \underline{K}_p(x) \\ \text{s.a:} \quad & p_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, s \\ & x \in C_1, \end{aligned}$$

lo que equivale a las siguientes condiciones: $\exists w^* \in W : \lambda^* \in \mathbb{R}_+^s$ tal que

$$\begin{aligned} \lambda^* p(x^*) &= 0 \\ 0 &\in \sum_{i=1}^p w_i^* \partial \underline{K}_i(x^*) + \sum_{i=1}^s \lambda_i^* \partial p_i(x^*) + N_{C_1}(x^*) \end{aligned}$$

Ahora bien, puesto que K es cóncava, p son funciones convexas y C_1 es un conjunto convexo estas condiciones son equivalentes a que x^* sea una solución óptima de $P(w^*)$. \square

Aunque en general, la caracterización de las estrategias de seguridad propiamente Pareto-óptimas depende de las funciones \underline{K}_i , se pueden obtener caracterizaciones alternativas que no dependen explícitamente de las mismas. Denotemos por $\text{conv}(A)$ a la envolvente convexa de los elementos de A .

Teorema 2.6 *Consideremos un juego con pagos vectoriales $K = (K_1, \dots, K_p)$ y espacios de estrategias $,^1, ,^2$ respectivamente para los jugadores I y II. Supongamos además que $K_l(x, y)$ es una función convexa en x y cóncava en y para todo $l = 1, \dots, p$ y que $,^2$ es un conjunto convexo y compacto. Entonces $x^* \in ,^1$ es una estrategia de seguridad propiamente Pareto-óptima para el jugador I si y sólo si existen $w^* \in W, \lambda^* \in \mathbb{R}_+^s$ tales que $\lambda^* p(x^*) = 0$ y*

$$0 \in \sum_{i=1}^p w_i^* \text{conv}\{\partial_x K_i(x, y) : y \in M(x)\} + \sum_{i=1}^s \lambda_i^* \partial p_i(x^*) + N_{C_1}(x^*)$$

donde $M(x) = \{y \in ,^2 : \underline{K}_i(x) = K_i(x, y)\} \forall x \in ,^1$.

Demostración. Por el teorema 2.5 x^* es una estrategia de seguridad propiamente Pareto-óptima si y sólo si $\exists w^* \in W, \lambda^* \in \mathbb{R}_+^s$ tal que

$$\begin{aligned} \lambda^* p(x^*) &= 0 \\ 0 &\in \sum_{i=1}^p w_i^* \partial \underline{K}_i(x^*) + \sum_{i=1}^s \lambda_i^* \partial p_i(x^*) + N_{C_1}(x^*) \end{aligned}$$

El problema es calcular el conjunto subdiferencial de \underline{K}_i en x^* . Por hipótesis $,^2$ es un conjunto convexo y $K_l(\cdot, y)$ son funciones cóncavas para todo $x \in ,^1$, por tanto $\underline{K}_i(x)$ es cóncava y $K_l(\cdot, y)$ es una función localmente lispchitziana. Además $,^2$ es un conjunto compacto y aplicando el Teorema 5N en Rockafellar (1979) [75] tenemos

$$\partial \underline{K}_i(x) = \text{conv}\{\partial_x K_l(x, y) : y \in M(x)\}$$

lo que concluye la demostración. \square

De la misma forma pueden darse condiciones (aunque ahora sólo necesarias) para que una estrategias sea de seguridad Pareto-óptima para uno de los jugadores.

Teorema 2.7 *Si una estrategia $x^* \in ,^1$ es de seguridad Pareto-óptima para el jugador I entonces existe $w^* \in \overline{W} = \{w \in \mathbb{R}^p : w \geq 0, \sum_{l=1}^p w_l = 1\}$ tal que x^* es una solución óptima del problema $P(w^*)$.*

La demostración es similar a la del teorema previo aunque ahora no se puede obtener la condición suficiente sin imponer restricciones de cualificación sobre el problema multiobjetivo asociado con la definición de estrategia de seguridad Pareto-óptima.

Ejemplo 2.4 *Consideremos un juego bipersonal en el cuadrado unidad con las siguientes funciones de pago,*

$$K_1(x, y) = \begin{cases} 2(x - y), & \text{si } x \geq y \\ 3(y - x), & \text{si } y \geq x \end{cases} \quad K_2(x, y) = \begin{cases} 3(x - y), & \text{si } x \geq y \\ 2(y - x), & \text{si } y \geq x \end{cases}$$

Podemos interpretar este juego como una competición entre dos firmas por un único mercado en dos escenarios diferentes. La inversión de cada firma en cada escenario es de una unidad monetaria. Es fácil obtener los niveles de seguridad para el jugador II siendo estos:

$$\overline{K}_1(x) = \begin{cases} 3(1 - x), & \text{si } x \leq 3/5 \\ 2x, & \text{si } x \geq 3/5 \end{cases} \quad \overline{K}_2(x) = \begin{cases} 2(1 - x), & \text{si } x \leq 2/5 \\ 3x, & \text{si } x \geq 2/5 \end{cases}$$

De donde es fácil deducir que el conjunto de estrategias de seguridad propiamente Pareto-óptimas del jugador II es el intervalo $(2/5, 3/5)$ (Figura 2.1).

La importancia de los conceptos de solución basados en eficiencia y niveles de seguridad se ha puesto de manifiesto en diferentes publicaciones como por ejemplo en [38], [41] y [42]. Sin embargo, es necesario dar buenos procedimientos de cómputo para tales soluciones. El teorema 2.5 da una caracterización para ello. Ahora bien, otra vía consiste en definir juegos escalares asociados tales que la solución minimax de los mismos sea la estrategia de seguridad propiamente Pareto-óptima buscada. Como consecuencia del teorema 2.5 probaremos que el hecho de ser un punto de silla de cierto juego escalar de suma nula es una condición necesaria y suficiente para que una estrategia sea de seguridad propiamente Pareto-óptima.

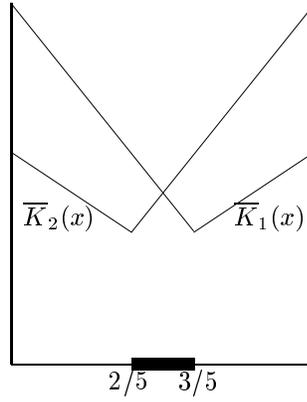


Figura 2.1. Estrategias de seguridad propiamente Pareto-óptimas del jugador II

Sean x, y dos estrategias de seguridad propiamente Pareto-óptimas para los jugadores I y II respectivamente. Puesto que los vectores de niveles de seguridad $\underline{K}(x), \overline{K}(y)$ deben dominar cada pago se verifica que:

$$\underline{K}(x) \leq K(x, y) \leq \overline{K}(y) \quad \forall x \in ,^1, \forall y \in ,^2.$$

Esto nos lleva a la siguiente caracterización de todas las estrategias de seguridad propiamente Pareto-óptimas por medio de solución de juegos escalares.

Consideremos un juego donde el jugador I selecciona su estrategia en $,^1$, el jugador II juega p diferentes estrategias (y^1, \dots, y^p) en $,^2$ y la función de pago es:

$$K(x, \underline{y}, w) = \sum_{l=1}^p w_l K_l(x, y^l)$$

donde $\underline{y} = (y^1, \dots, y^p)$ siendo $y^l \in ,^2$, $l = 1, \dots, p$ y $w = (w_1, \dots, w_p) \in W$. Denominemos este juego por $J(w)$.

Puesto que $J(w)$ es un juego escalar, la definición usual de estrategia maximin (veáse Owen (1982) [71]) es la clásica para ambos jugadores. Entonces se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.8 *Una estrategia $x^* \in \Gamma^1$ es de seguridad propiamente Pareto-óptima si y sólo si existe $w^* \in W$ tal que x^* es solución maximin de $J(w^*)$.*

Demostración. Utilizando el hecho de que $J(w^*)$ es un juego escalar de suma nula, x^* es una estrategia maximin del juego $J(w^*)$ si y sólo si es una solución óptima del problema

$$\max_{x \in \Gamma^1} \min_{(y^1, \dots, y^p) \in (\Gamma^2)^p} \sum_{l=1}^p w_l^* K_l(x, y^l),$$

si y sólo es una solución óptima del problema

$$\max_{x \in \Gamma^1} \sum_{l=1}^p w_l^* \min_{y^l \in (\Gamma^2)} K_l(x, y^l) = \max_{x \in \Gamma^1} \sum_{l=1}^p w_l^* \underline{K}_l(x).$$

Esta última formulación es equivalente a $P(w^*)$, entonces x^* es una estrategia maximin para $J(w^*)$ si y sólo si x^* es una solución óptima de $P(w^*)$. \square

Este resultado ya fue mostrado para estrategias de seguridad Pareto-óptimas en juegos matriciales multicriterio, lo que pone una vez más de manifiesto las similitudes entre estrategias de seguridad propiamente Pareto-óptimas para juegos multicriterio cóncavo-convexos y estrategias de seguridad Pareto-óptimas en juegos matriciales.

4. Juegos vectoriales por objetivos

En esta sección, extendemos los resultados obtenidos para juegos escalares al caso de juegos con pagos múltiples. Con ello, proponemos una nueva metodología para estudiar los juegos vectoriales, analizando el pago que puede alcanzar un jugador y la probabilidad que tiene de lograrlo.

Sea $P = (P_1, \dots, P_k)$ un vector de objetivos o niveles de satisfacción, uno por cada juego escalar, establecido por el jugador I. Consideremos que dicho jugador desea escoger una estrategia de forma que en cada juego escalar obtenga un pago de al menos P_s

Definición 2.8 *Para cada par de estrategias mixtas $x \in X$, $y \in Y$, la función de pagos del juego vectorial por objetivos viene dada por:*

$$v(x, y) = x^t A_P y = (v_1(x, y), \dots, v_k(x, y))$$

donde

$$v_s(x, y) = x^t A_P(s) y \quad s = 1, \dots, k$$

$$A_P(s) = (\delta_{ij}^s) \quad 1 \leq s \leq k, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m$$

$$\delta_{ij}^s = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{ij}(s) \geq P_s \\ 0 & \text{si } a_{ij}(s) < P_s \end{cases} \quad \forall s = 1, \dots, k.$$

Asociado con cada estrategia del jugador I, existe un nivel de seguridad por objetivos en cada uno de los juegos escalares que forman el juego vectorial.

Definición 2.9 Para cada estrategia $x \in X$, el nivel de seguridad por objetivos de cada juego escalar inducido por el juego vectorial es la probabilidad que puede garantizarse el jugador de alcanzar al menos el nivel P_s con esa estrategia en dicho juego.

Dado $x \in X$ el vector de nivel de seguridad para los objetivos P es

$$v^P(x) = (v_1^P(x), \dots, v_k^P(x))$$

siendo

$$v_s^P(x) = \min_{y \in Y} v_s^P(x, y) = \min_{y \in Y} x^t A_P(s) y = \min_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^n x_i \delta_{ij}^s \quad s = 1, \dots, k$$

$v_s^P(x)$, $s = 1, \dots, k$, es la probabilidad de alcanzar al menos el nivel P_s en el juego escalar de matriz $A(s)$, $s = 1, \dots, k$ cuando el jugador I utiliza la estrategia x . Observemos que dada una estrategia $x \in X$ del jugador I, los niveles de seguridad $v_s^P(x)$, $s = 1, \dots, k$, pueden obtenerse con distintas estrategias $y \in Y$ del jugador II.

De forma análoga puede determinarse el vector de nivel de seguridad por objetivos para el jugador II, a partir de los objetivos que éste considere. Vamos a establecer el concepto de solución para juegos vectoriales, basado en el nivel de seguridad por objetivos.

Definición 2.10 Una estrategia $x^* \in X$ es una estrategia de seguridad de nivel P para el jugador I, si no existe $x \in X$, tal que $v^P(x^*) \leq v^P(x)$, $v^P(x^*) \neq v^P(x)$.

Debido a que estamos estudiando juegos con pagos vectoriales, el concepto de solución anterior se basa en la optimalidad de Pareto, es decir, una componente de $v^P(x^*)$ tomará un valor mejor sólo si otra toma un valor peor.

El conjunto de estrategias de seguridad de nivel P se determina como soluciones eficientes de un problema lineal multiobjetivo particular.

4.1. Determinación de estrategias de seguridad de nivel P

Consideremos el siguiente problema de programación lineal multiobjetivo, denominado problema lineal del juego multicriterio por objetivos, $(JMO)_P$.

$$\begin{aligned} (JMO)_P : \quad & \max \quad v_1, \dots, v_k \\ & \text{s.a.} \quad x^t A_P(s) \geq (v_s, \dots, v_s) \quad s = 1, \dots, k \\ & \quad \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & \quad \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

Teorema 2.9 *Una estrategia $x^* \in X$ es una estrategia de seguridad de nivel P y $v^* = (v_1^*, \dots, v_k^*)$ su vector de nivel de seguridad asociado si y sólo si (v^*, x^*) es una solución eficiente del problema $(JMO)_P$.*

Demostración: Análoga a la del teorema 2.1 sustituyendo cada matriz $A(s)$, $s = 1, \dots, k$, por la matriz $A(s)_P$, $s = 1, \dots, k$ □

Al resolver un juego vectorial por medio de la programación lineal multiobjetivo, el jugador se encuentra con un conjunto de estrategias de seguridad de nivel P entre las que tiene que escoger la que va a jugar. Para caracterizar dicha estrategia existen distintos procedimientos como se ha indicado en la sección 2.2.

Si consideramos el problema lineal ponderado $P(\lambda)$ asociado al problema lineal del juego multicriterio por objetivos, el jugador I puede establecer valores para los pesos de dicho problema de diferentes formas. Puede considerar las metas que ha establecido en cada juego escalar, o bien la probabilidad de alcanzarlas, o incluso las desviaciones respecto de estas metas. En el caso en que los objetivos no estén medidos en las mismas unidades pueden modificarse multiplicando por un factor de equiparación de rangos.

Conocidos los pesos, la función objetivo del problema $P(\lambda)$ está perfectamente determinada. Si el jugador considera como pesos los valores de los objetivos, $\lambda_s = P_s$, $s = 1, \dots, k$, dicha función es precisamente la esperanza de los objetivos P_s . De esta forma, el jugador I escogerá la estrategia que le proporcione mayor esperanza en los objetivos, es decir la solución del problema lineal escalar dado por:

$$\begin{aligned} \max \quad & P_1 v_1 + \dots + P_k v_k \\ \text{s.a.} \quad & x^t A_P(s) \geq (v_s, \dots, v_s) \quad s = 1, \dots, k \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

A continuación, consideremos la escalarización dada mediante el problema maximin ponderando $PMP(\omega)$ asociado al problema lineal del juego multicriterio por objetivos, $(JMO)_P$. En este caso, si el jugador I escoge $\omega_s = P_s$, $s = 1, \dots, k$, la solución óptima del problema escalar

$$\begin{aligned} \max \quad & \min P_1 v_1, \dots, P_k v_k \\ \text{s.a.} \quad & x^t A_P(s) \geq (v_s, \dots, v_s) \quad s = 1, \dots, k \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

determina una estrategia de seguridad de nivel P que comparte el riesgo de obtener los objetivos P_s , $s = 1, \dots, k$, entre todos ellos.

Ejemplo 2.5 : *Consideremos la matriz de pagos del ejemplo 2.1*

$$\begin{pmatrix} (1,3) & (2,1) \\ (3,1) & (1,2) \\ (1,1) & (3,3) \end{pmatrix}$$

Sea $P = (3,2)$ un vector de objetivos fijado por el jugador I. Las matrices $A_P(1)$ y $A_P(2)$ que induce el objetivo P son

$$A_P(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_P(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para obtener todas las estrategias de seguridad de nivel P para el jugador I , resolvemos el siguiente problema lineal multiobjetivo

$$\begin{aligned}
 \max \quad & v_1, v_2 \\
 \text{s. a.} \quad & x_2 \geq v_1 \\
 & x_3 \geq v_1 \\
 & x_1 \geq v_2 \\
 & x_2 + x_3 \geq v_2 \\
 & \sum_{i=1}^3 x_i = 1 \\
 & x \geq 0, v_1, v_2 \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Las soluciones eficientes extremas son: $(v^1, x^1) = (1/4, 1/2; 1/2, 1/4, 1/4)$ $(v^2, x^2) = (1/2, 0; 0, 1/2, 1/2)$, y el conjunto de las estrategias de seguridad de nivel P para el jugador I es

$$\text{conv}\{(1/2, 1/4, 1/4), (0, 1/2, 1/2)\}$$

La estrategia de seguridad que proporciona el mayor valor esperado en los objetivos P para el jugador I , viene dada por la solución óptima del problema lineal

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 3v_1 + 2v_2 \\
 \text{s. a.} \quad & x_2 \geq v_1 \\
 & x_3 \geq v_1 \\
 & x_1 \geq v_2 \\
 & x_2 + x_3 \geq v_2 \\
 & \sum_{i=1}^3 x_i = 1 \\
 & x \geq 0, v_1, v_2 \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

y es

$$x^1 = (1/2, 1/4, 1/4), \quad v^1 = (1/4, 1/2)$$

La estrategia de seguridad que comparte el riesgo de obtener los objetivos $P_1 = 3, P_2 = 2$ viene dada por la solución óptima del problema lineal

$$\begin{aligned}
& \max && z \\
& s.a. && x_2 \geq v_1 \\
& && x_3 \geq v_1 \\
& && x_1 \geq v_2 \\
& && x_2 + x_3 \geq v_2 \\
& && 3v_1 \geq z \\
& && 2v_2 \geq z \\
& && \sum_{i=1}^3 x_i = 1 \\
& && x \geq 0, v_1, v_2, z \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

y es,

$$x = (11/25, 7/25, 7/25), v = (7/25, 11/25).$$

4.2. Análisis de sensibilidad en los objetivos

En el apartado anterior hemos obtenido las estrategias de seguridad de nivel P y el vector de nivel de seguridad asociado para el jugador I resolviendo un problema lineal multiobjetivo. Ahora queremos determinar si una solución eficiente (v^*, x^*) de este problema sigue siéndolo cuando se producen variaciones en los objetivos P_s .

Consideramos dos casos. En el primero, suponemos que los objetivos $P = (P_1, \dots, P_k)$ aumentan a $P' = (P'_1, \dots, P'_k)$ y en el segundo suponemos que los objetivos $P = (P_1, \dots, P_k)$ disminuyen a $P' = (P'_1, \dots, P'_k)$.

1) Si aumentamos cada objetivo P_s a P'_s , $s = 1, \dots, k$, la matriz $A_{P'}(s)$ inducida por P'_s , $s = 1, \dots, k$, tiene más elementos nulos que la matriz $A_P(s)$, $s = 1, \dots, k$. Por ello, el conjunto factible del nuevo problema lineal $(JMO)_{P'}$ se reduce. De aquí, si (v^*, x^*) sigue siendo factible para el problema asociado a los objetivos P' , también será eficiente para dicho problema.

Consideramos las matrices

$$M(s) = (m_{ij}(s)), \quad 1 \leq s \leq k, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m,$$

cuyos elementos son:

$$m_{ij}(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } P_s \leq a_{ij}(s) < P'_s \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \forall s = 1, \dots, k$$

Teorema 2.10 Sea (v^*, x^*) una solución eficiente del problema $(JMO)_P$. Si

$$\sum_{i=1}^n x_i^* m_{ij}(s) \leq h_j^*(s), \quad j = 1, \dots, m, \quad \forall s = 1, \dots, k$$

donde $h_j^*(s)$, $j = 1, \dots, m$, son las variables de holgura de la solución eficiente del problema $(JMO)_P$, entonces (v^*, x^*) es una solución eficiente del problema $(JMO)_{P'}$.

Demostración: Podemos expresar $A_{P'}(s) = A_P(s) - M(s)$, $s = 1, \dots, k$. Si (v^*, x^*) es una solución eficiente del problema $(JMO)_P$, entonces

$$\begin{aligned} x^{*t} A_P(s) &\geq (v_s^*, \dots, v_s^*), \quad s = 1, \dots, k \\ \sum_{i=1}^n x_i^* &= 1 \\ x^* &\geq 0. \end{aligned}$$

Por hipótesis, tenemos

$$\sum_{i=1}^n x_i^* m_{ij}(s) \leq h_j^*(s), \quad j = 1, \dots, k, \quad \forall s = 1, \dots, k$$

donde $h_j^*(s) = \sum_{i=1}^n x_i^* m_{ij}(s) - v_s^*$ $j = 1, \dots, m$. Estas expresiones pueden escribirse de la forma

$$x^{*t} M(s) \leq x^{*t} A_P(s) - (v_s^*, \dots, v_s^*) \quad s = 1, \dots, k$$

de donde

$$\begin{aligned} (v_s^*, \dots, v_s^*) &\leq x^{*t} A_P(s) - x^{*t} M(s) = x^{*t} (A_P(s) - M(s)) \\ &= x^{*t} A_{P'}(s), \quad \forall s = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

y

$$\sum_{i=1}^n x_i^* = 1, \quad x^* \geq 0$$

Lo que implica que (v^*, x^*) es una solución eficiente del problema $(JMO)_{P'}$. □

2) Supongamos ahora que los objetivos P_s , $s = 1, \dots, k$, disminuyen a los nuevos valores P'_s , $s = 1, \dots, k$. En este caso, la matriz $A_{P'}(s)$ inducida por P'_s , $s = 1, \dots, k$, tiene más elementos iguales a 1 que la matriz $A_P(s)$, $s = 1, \dots, k$, lo que significa que el conjunto factible del problema aumenta. Por ello, si (v^*, x^*) es una solución eficiente del problema asociado a los objetivos P_s seguirá siendo factible para el problema asociado a los objetivos P'_s , pero puede dejar de ser eficiente. Para ver si (v^*, x^*) es solución eficiente del nuevo problema efectuamos un test de eficiencia.

Sea $A_{P'}(s)$ la matriz inducida por P'_s , $s = 1, \dots, k$. El nuevo problema es

$$\begin{aligned} (JMO)_{P'} : \quad & \max \quad v_1, \dots, v_k \\ & \text{s.a.} \quad x^t A_{P'}(s) \geq (v_s, \dots, v_s) \quad s = 1, \dots, k \\ & \quad \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & \quad \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

Podemos expresar $A_{P'}(s) = A_P(s) + M(s)$, $s = 1, \dots, k$, donde $M(s) = (m_{ij}(s))$ es una matriz cuyos elementos son

$$m_{ij}(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } P'_s \leq a_{ij}(s) < P_s \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \forall s = 1, \dots, k$$

El problema $(JMO)_{P'}$ puede expresarse

$$\begin{aligned} & \max \quad v_1, \dots, v_k \\ & \text{s.a.} \quad x^t (A_P(s) + M(s)) \geq (v_s, \dots, v_s) \quad s = 1, \dots, k \\ & \quad \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & \quad \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

Teorema 2.11 *Sea (v^*, x^*) una solución eficiente del problema $(JMO)_P$. Si el problema lineal escalar*

$$\begin{aligned} & \max \quad t_1 + t_2 + \dots + t_k \\ & \text{s.a.} \quad x^t (A_P(s) + M(s)) \geq (v_s, \dots, v_s) \quad s = 1, \dots, k \\ & \quad \quad v_s - t_s = v_s^* \quad s = 1, \dots, k \\ & \quad \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & \quad \quad x \geq 0, t_s \geq 0, \quad s = 1, \dots, k \end{aligned}$$

tiene un valor óptimo igual a cero entonces (v^*, x^*) es una solución eficiente del problema $(JMO)_P$.

Demostración: Si el valor óptimo de la función objetivo es cero, entonces $t_i = 0, \forall i = 1, \dots, k$. Aplicando el test de eficiencia esto significa que la solución (v^*, x^*) no puede mejorarse. \square

Supongamos que el jugador I no puede indicar los objetivos que quiere alcanzar en la realización del juego. En este caso, el conjunto de todos los objetivos posibles, llamado espacio de objetivos, puede descomponerse en regiones en las que los objetivos que pertenecen a ellas, se alcanzan con la misma probabilidad.

Es decir, podemos obtener el conjunto de soluciones eficientes del problema $(JMO)_P$ para cualesquiera objetivos P en el espacio de objetivos. Para determinar estos conjuntos aplicamos el teorema 2.10 reiteradamente. A partir de las soluciones eficientes obtenidas para unos objetivos determinados, podemos obtener las soluciones eficientes del nuevo problema.

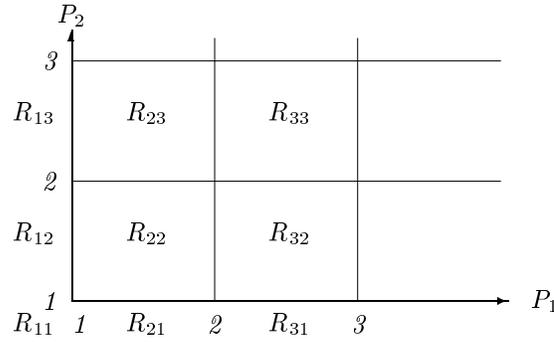
Ejemplo 2.6 : Consideremos el juego del ejemplo 2.1. El espacio de objetivos para este juego es

$$GS = \{P = (P_1, P_2) : 1 \leq P_1 \leq 3, 1 \leq P_2 \leq 3\}$$

Análogamente al caso escalar, consideramos los elementos diferentes de las matrices $A(1)$ y $A(2)$ ordenados en orden creciente. Las regiones que forman la partición del espacio de objetivos son

$$\begin{aligned} R_{11} &= \{(1, 1)\} \\ R_{1j} &= \{1\} \times (j - 1, j], \quad j = 2, 3 \\ R_{i1} &= (i - 1, i] \times \{1\}, \quad i = 2, 3 \\ R_{ij} &= (i - 1, i] \times (j - 1, j], \quad i, j = 2, 3. \end{aligned}$$

Gráficamente:



Estas regiones corresponden a rectángulos, segmentos y un punto. Denotamos por $S_{(i,j)}$ el conjunto de soluciones eficientes del problema $(JMO)_P$ para $P \in R_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$. En el ejemplo, estos conjunto son:

$$\begin{aligned}
S_{(3,3)} &= \text{conv}\{(1/3, 1/3; 1/3, 1/3, 1/3), (0, 1/2; 1/2, 0, 1/2)\} \cup \\
&\quad \text{conv}\{(1/3, 1/3; 1/3, 1/3, 1/3), (1/2, 0; 0, 1/2, 1/2)\} \cup \\
&\quad \text{conv}\{(0, 1/2; 1/2, 0, 1/2), (1/2, 0; 0, 1/2, 1/2)\} \\
S_{(3,2)} &= \text{conv}\{(1/4, 1/2; 1/2, 1/4, 1/4), (1/2, 0; 0, 1/2, 1/2)\} \\
S_{(3,1)} &= \{(1/2, 1; 0, 1/2, 1/2)\} \\
S_{(2,3)} &= \text{conv}\{(1/2, 1/4; 1/4, 1/2, 1/4), (0, 1/2; 1/2, 0, 1/2)\} \\
S_{(2,2)} &= \{(1/2, 1/2; 1/2, 1/2, 0)\} \\
S_{(2,1)} &= \text{conv}\{(1/2, 1; 1/2, 1/2, 0), (1/2, 1; 0, 1/2, 1/2)\} \\
S_{(1,3)} &= \{(1, 1/2; 1/2, 0, 1/2)\} \\
S_{(1,2)} &= \text{conv}\{(1, 1/2; 1/2, 0, 1/2), (1, 1/2; 1/2, 1/2, 0)\} \\
S_{(1,1)} &= \text{conv}\{(1, 1; 1, 0, 0), (1, 1; 0, 1, 0), (1, 1; 0, 0, 1)\}.
\end{aligned}$$

CAPÍTULO III

Juegos bipersonales de suma no nula como vectoriales

F. R. Fernández L. Monroy

1. Juegos como problemas de decisión múltiple

El fundamento de un juego es la toma de decisión multilateral. Por ello, un juego puede considerarse como un problema de decisión múltiple, cuando los distintos decisores tienen que optimizar objetivos de forma cooperativa o no cooperativa, con estructuras de información iguales o diferentes y con un conjunto de acciones finito o infinito, entre las que tienen que elegir. Es decir, la teoría de juegos comparte con la teoría de decisión muchos aspectos, de forma que ambas teorías se complementan.

En general, un problema bipersonal de decisión es una situación en la que la toma de decisiones es compartida por dos decisores que, generalmente, valoran dicha decisión de forma distinta. Así, si X e Y son los conjuntos de estrategias mixtas de los jugadores, el conjunto de alternativas es $D = X \times Y$, y una decisión $d = (x, y) \in D$ será valorada mediante una función de dos componentes:

$$f(d) = (f_1(x, y), f_2(x, y)),$$

donde f_1 y f_2 son las funciones de pagos de cada jugador.

Este problema lo vamos a analizar de dos formas distintas. En primer lugar consideraremos una situación cooperativa, y posteriormente estudiaremos la situación no cooperativa.

1.1. Situación cooperativa

En la situación cooperativa, al tomar una decisión, ambos jugadores tratan de escoger la *mejor* de todas las alternativas disponibles, para ambos. Se busca una decisión no dominada d^* , es decir, $d^* \in D$ tal que no existe $d \in D$ con $f(d) \geq f(d^*)$ en ambas componentes.

Este estudio es similar al que se realiza en decisión múltiple, en el que se buscan soluciones eficientes o Pareto óptimas para tal problema. La dificultad proviene de la forma de las funciones f que pueden ser lineales, fraccionales, cuadráticas, etc. Notemos que este procedimiento puede aplicarse tanto a juegos escalares como vectoriales, pues el proceso de razonamiento es similar en ambos casos, aunque en el caso vectorial aumente la complejidad del problema.

Ejemplo 3.1 *La batalla de los sexos*

Una pareja tienen que decidir entre ir al teatro o ir a un combate de boxeo. Ella (jugador II) quiere ir al teatro y él (jugador I) al combate de boxeo, pero en cualquier caso ambos quieren ir juntos. Si la primera estrategia para ambos es ir al teatro y la segunda ir al combate de boxeo la matriz del juego es

	II_1	II_2
I_1	$(1,4)$	$(0,0)$
I_2	$(0,0)$	$(4,1)$

La región de pagos del juego se representa en la figura 3.1.

Si ambos jugadores cooperan, como las estrategias mixtas conjuntas están permitidas, la región de pagos del juego cooperativo es el cierre convexo de la región anterior, representado en la figura 3.2.

El juego se convierte, por tanto, en un problema lineal con dos objetivos que es fácil de resolver. La región de pagos no dominados es el segmento que une los puntos $(1,4)$, y $(4,1)$. Así, si deciden tirar una moneda y bien ir

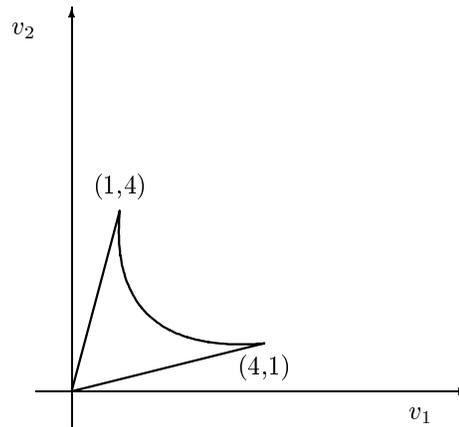


Figura 3.1.

al teatro o bien ir al combate de boxeo, se corresponde con jugar (I_1, II_1) o (I_2, II_2) con probabilidad $1/2$ cada una, lo que proporciona un pago esperado de $1/2(1, 4) + 1/2(4, 1) = (5/2, 5/2)$, que en la gráfica es el punto medio del segmento de extremos $(1, 4)$, $(4, 1)$.

1.2. Situación no cooperativa

Cuando tenemos una situación no cooperativa se plantea un aditamento, pues un decisor puede desear una acción x (o y) para asegurarse un cierto valor en su función objetivo, sin importarle lo que haga su oponente.

Analizaremos el concepto de equilibrio de Nash desde la perspectiva de la decisión múltiple. En este sentido, un punto de equilibrio puede verse como una solución eficiente de una determinada función de valoración de las decisiones.

Cada decisión $d^* = (x^*, y^*) \in X \times Y$ se valora con respecto a las otras decisiones mediante la función:

$$f(d, d^*) = (f_1(x, y^*), f_2(x^*, y)),$$

donde f_1 y f_2 son las funciones de pagos de los jugadores.

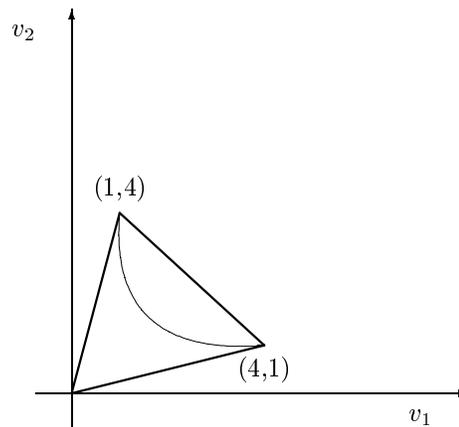


Figura 3.2.

Diremos que d^* está en equilibrio si no es dominada con respecto a dicha función. Es decir, no existe $d = (x, y) \in D$ tal que

$$f_1(x, y^*) \geq f_1(x^*, y^*) \quad \text{y} \quad f_2(x^*, y) \geq f_2(x^*, y^*).$$

Observemos que para el estudio del carácter no dominado de cada decisión se considera una función distinta. La dificultad del estudio va a depender, como en el caso anterior, de la forma de las funciones.

Notemos que si $x^* \in X$ verifica $f_1(x, y^*) \leq f_1(x^*, y^*)$, es que x^* es la mejor respuesta a $y^* \in Y$. Si $y^* \in Y$ verifica $f_2(x^*, y) \leq f_2(x^*, y^*)$, es que y^* es la mejor respuesta a $x^* \in X$. Cuando x^* e y^* son la mejor respuesta mutuamente, (x^*, y^*) es un punto de equilibrio. Es decir, si ambos jugadores adoptan estas estrategias, ningún jugador puede beneficiarse si alguno se desvía de ella. John Nash (1951) [66] probó que todo juego finito bipersonal tiene al menos un punto de equilibrio en estrategias puras o mixtas. En su honor, los equilibrios en los juegos de suma no nula se denominan *equilibrios de Nash*.

La batalla de los sexos es un juego con tres equilibrios de Nash, (I_1, II_1) con un pago $(1, 4)$, (I_2, II_2) con un pago $(4, 1)$ y el tercero formado por las estrategias mixtas $x = (1/5, 4/5)$ del jugador I, $y = (4/5, 1/5)$ del jugador

II, con un pago $(4/5, 4/5)$. Está claro que el jugador I intentará alcanzar el equilibrio (I_2, II_2) , por ello puede jugar su estrategia I_2 como una forma de obligar a su oponente a jugar II_2 . Sin embargo, observemos que si el jugador I utiliza su estrategia I_2 , mientras que el jugador II se mantiene en su estrategia II_1 , el pago que reciben es $(0, 0)$.

En los juegos estrictamente competitivos, en los que los intereses de los jugadores son totalmente opuestos, una decisión nunca puede dominar a otra pues si un jugador mejora con una, el otro debe empeorar. En el caso particular de un juego escalar de suma nula, en el que $f_1(x, y) = -f_2(x, y)$ al aplicar el concepto de punto de equilibrio, no podrá existir un $d = (x, y)$ tal que

$$f_1(x, y^*) \geq f_1(x^*, y^*) \geq f_1(x^*, y)$$

es decir, para cualquier $d = (x, y)$

$$f_1(x, y^*) \leq f_1(x^*, y^*) \leq f_1(x^*, y)$$

de donde la solución es un punto de silla para la función de pagos del juego.

No obstante, éste es un caso excepcional que suele presentarse en pocas ocasiones, incluso en los juegos vectoriales de suma nula, puesto que las desigualdades no tienen por qué invertirse y no tiene por qué existir el punto de silla. En estos juegos pueden buscarse las soluciones a través del concepto de nivel de seguridad, ya que ambos jugadores se oponen mutuamente como hemos visto en el capítulo II.

Para juegos escalares de suma no nula, también puede aplicarse este concepto, pero sólo para eliminar equilibrios triviales, pues un decisor nunca escogerá una estrategia \bar{x} (o \bar{y}) que le proporcione un pago inferior a su nivel de seguridad dado por $\inf_{y \in Y} f_1(\bar{x}, y)$, (o $\inf_{x \in X} f_2(x, \bar{y})$), ya que siempre puede emplear estrategias conservadoras que son las que le aseguran

$$\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} f_1(x, y) \quad (\text{o bien} \quad \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} f_2(x, y)),$$

aunque esto puede llevar a ambos jugadores al peor de los resultados como ocurre en el dilema del prisionero.

Ejemplo 3.2 *Dilema del prisionero*

La policía detiene a dos delincuentes con objetos robados y los interroga por separado. Ambos pueden confesar su delito o bien no hacerlo. Si ambos confiesan el robo, ambos son condenados a 9 años de cárcel, mientras que si ambos permanecen callados sólo los condenarían a 1 año de cárcel. Si uno confiesa y el otro no, el que confiesa, por haber cooperado con la justicia, quedaría libre, mientras que al otro le condenarían a 10 años de cárcel. Si la primera estrategia para ambos es confesar el robo y la segunda no confesarlo, la matriz de pagos del juego, considerando $-n$ para n años de prisión es:

	II_1	II_2
I_1	$(-9,-9)$	$(0,-10)$
I_2	$(-10,0)$	$(-1,-1)$

Este juego tiene un único equilibrio de Nash, (I_1, II_1) con el que se obtiene el pago $(-9, -9)$. Sin embargo, ésta no es una solución satisfactoria para el juego, puesto que el pago que proporciona es peor que el que ambos jugadores conseguirían si no confiesan su delito que es $(-1, -1)$.

En los juegos vectoriales bipersonales de suma no nula, donde las funciones f_1 y f_2 son vectoriales, obtenemos una definición similar. Una decisión $d^* \in D$ está en equilibrio si es eficiente para la función

$$f(d, d^*) = (f_1^1(x, y^*), \dots, f_1^k(x, y^*); f_2^1(x^*, y), \dots, f_2^k(x^*, y)),$$

es decir, no existe $d = (x, y) \in D$ tal que

$$f_1^i(x, y^*) \geq f_1^i(x^*, y^*), \quad f_2^i(x^*, y) \geq f_2^i(x^*, y^*), \quad i = 1, \dots, k$$

que sigue siendo una condición local.

En los juegos vectoriales, este concepto coincide con el de punto de equilibrio de Nash. Así, podemos caracterizar los puntos de equilibrios de los juegos vectoriales como lo hace Shapley (1959) [82], a través de los juegos escalares que resultan de la ponderación de los pagos, o como lo hace Corley (1985) [26] estableciendo la equivalencia entre un juego bipersonal vectorial y un problema lineal complementario paramétrico.

De la misma forma pueden estudiarse los puntos de equilibrio para un juego vectorial de n personas como Zhao (1991) [100] y Wang (1993) [95]. El principal inconveniente del punto de equilibrio como concepto de solución es que en el caso múltiple, estos equilibrios suelen no ser comparables entre sí, además de compartir con el caso escalar todas las deficiencias de inestabilidad que pusieron de manifiesto Selten (1975) [78] y Myerson (1978) [63] entre otros.

Por esto, diversos autores como Nieuwenhuis (1983) [67], Ghose y Prasad (1989) [41], Fernández y Puerto (1996) [38] y Puerto y Fernández (1995a) [73], han propuesto nuevos conceptos de solución para los juegos multicriterio de suma nula. Sin embargo, el correspondiente análisis de refinamiento del concepto de equilibrio en juegos multicriterio de n personas no cooperativos ha sido escasamente estudiado por su extraordinaria dificultad, véase van Mergen y otros (1995) [60] y Puerto y Fernández (1995b) [74].

Sin embargo, aún es posible un análisis alternativo de estos juegos, utilizando otro concepto de racionalidad. En las metodologías que hemos expuesto anteriormente, se han tenido presente a ambos jugadores simultáneamente. A continuación vamos a estudiar un planteamiento alternativo que se basa en los juicios que puede hacer un jugador de modo aislado. En este caso, el jugador siempre buscará lo mejor para sí, pero como sus acciones repercuten en el resultado del otro jugador, el estudio puede realizarse bajo dos aspectos diferentes. En uno de ellos, el jugador trata de obtener lo mejor para ambos, situación que denominamos de *actitud positiva*, mientras que en el otro, un jugador intenta conseguir lo mejor para sí, pero perjudicando al contrario, situación que denominamos de *actitud negativa*. Veamos cada uno de ellas.

2.2.1. Situación de actitud positiva

Dado un juego bipersonal escalar, supongamos que el jugador I quiere determinar la estrategia que le proporcione el mejor de los peores resultados, tanto para él como para el jugador II. Para ello, hay que considerar los pagos más desfavorables que se pueden obtener con una estrategia $\bar{x} \in X$, y que son:

$$v_1(\bar{x}) = \inf_{y \in Y} f_1(\bar{x}, y), \quad v_2(\bar{x}) = \inf_{y \in Y} f_2(\bar{x}, y).$$

Ante esta situación, el jugador I debe considerar sólo aquellas estrategias

que sean eficientes, pues en $v_1(\bar{x})$ y $v_2(\bar{x})$ solamente se considera al jugador II a través de su mejor respuesta ante la estrategia propuesta \bar{x} . Tendremos que \bar{x} es una estrategia eficiente del jugador I, si no existe $x \in X$ tal que $v_1(x) \geq v_1(\bar{x})$ y $v_2(x) \geq v_2(\bar{x})$ con alguna desigualdad estricta. Estas estrategias eficientes las llamaremos estrategias de seguridad por la forma de ser valoradas.

De igual forma puede plantearse el problema considerando al jugador II. Así, los pagos más desfavorables que éste puede obtener con una estrategia $y \in Y$ son:

$$u_1(\bar{y}) = \inf_{x \in X} f_1(x, \bar{y}), \quad u_2(\bar{y}) = \inf_{x \in X} f_2(x, \bar{y}).$$

Análogamente, \bar{y} es una estrategia eficiente del jugador II, si no existe $y \in Y$ tal que $u_1(\bar{y}) \leq u_1(y)$ y $u_2(\bar{y}) \leq u_2(y)$, con alguna desigualdad estricta.

2.2.2. Situación de actitud negativa

Como ya expusimos anteriormente, en este caso el jugador busca su máximo beneficio y al mismo tiempo el mayor perjuicio de su oponente. Es decir, desde esta perspectiva del jugador I quiere determinar una estrategia que le proporcione el mejor de los peores pagos para él y el peor de los mejores pagos para el jugador II. En este caso tiene que considerar una estrategia $\bar{x} \in X$ tal que:

$$v_1(\bar{x}) = \inf_{y \in Y} f_1(\bar{x}, y), \quad v_2(\bar{x}) = \sup_{y \in Y} f_2(\bar{x}, y).$$

Notemos que \bar{x} es una estrategia eficiente del jugador I si no existe $x \in X$ tal que $v_1(x) \geq v_1(\bar{x})$ y $v_2(x) \leq v_2(\bar{x})$ con alguna desigualdad estricta.

Análogamente, si consideramos el problema para el jugador II, los pagos más desfavorables que puede obtener con una estrategia $y \in Y$ son:

$$u_1(\bar{y}) = \sup_{x \in X} f_1(x, \bar{y}) \quad u_2(\bar{y}) = \inf_{x \in X} f_2(x, \bar{y}).$$

Entonces, \bar{y} es una estrategia eficiente del jugador II, si no existe $y \in Y$ tal que $u_1(\bar{y}) \geq u_1(y)$ y $u_2(\bar{y}) \leq u_2(y)$ con alguna desigualdad estricta.

De lo expuesto se deduce que el análisis de los juegos bajo la actitud positiva o bajo la actitud negativa, se realiza por el mismo procedimiento sin más que invertir el signo de una de las funciones de pago de los jugadores.

2.2.3. Juegos bimatriaciales no cooperativos como problemas lineales múltiples.

Un procedimiento análogo al propuesto en el capítulo II, para resolver los juegos vectoriales de suma nula por medio de la programación lineal multi-objetivo puede utilizarse para estudiar los juegos bimatriaciales escalares desde la óptica de uno de los jugadores.

Cuando los pagos de los jugadores vienen determinados por las matrices de pagos A y B respectivamente, el conjunto de estrategias de seguridad del jugador I y el conjunto de estrategias de seguridad del jugador II, son los conjuntos de soluciones eficientes de ciertos problemas lineales múltiples.

En el caso en que el jugador I trate de obtener lo mejor para ambos el problema lineal múltiple se obtiene de la siguiente forma:

Para cada $x \in X$, se consideran los valores $v_1(x) = \min_{y \in Y} x^t A y$ y $v_2(x) = \min_{y \in Y} x^t B y$, y se busca la estrategia $x \in X$, que haga máximos esos valores, es decir hay que resolver el problema:

$$\begin{aligned} \max \quad & v_1, v_2 \\ \text{s.a.} \quad & x^t A \geq (v_1, \dots, v_1) \\ & x^t B \geq (v_2, \dots, v_2) \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Observemos que el planteamiento anterior es similar a considerar el juego desde el punto de vista del jugador I, como un juego múltiple de suma nula con matriz de pagos (A, B) .

De la misma forma el conjunto de estrategias de seguridad para el jugador II viene dado por el conjunto de soluciones eficientes del problema:

$$\begin{aligned} \max \quad & u_1, u_2 \\ \text{s.a.} \quad & A y \geq (u_1, \dots, u_1)^t \\ & B y \geq (u_2, \dots, u_2)^t \\ & \sum_{j=1}^m y_j = 1 \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

Cuando uno de los jugadores trata de obtener lo mejor para sí, pero perjudicando al contrario, los problemas lineales múltiples que representan esta situación son, para los jugadores I y II, respectivamente:

$$\begin{aligned} \max \quad & v_1, -v_2 \\ \text{s.a.} \quad & x^t A \geq (v_1, \dots, v_1) \\ & x^t B \leq (v_2, \dots, v_2) \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & -u_1, u_2 \\ \text{s.a.} \quad & Ay \leq (u_1, \dots, u_1)^t \\ & By \geq (u_2, \dots, u_2)^t \\ & \sum_{j=1}^m y_j = 1 \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

En este caso, el planteamiento corresponde a considerar el juego desde el punto de vista del jugador I, como un juego múltiple de suma nula con matriz de pagos $(A, -B)$.

Obsérvese que este resultado puede considerarse como una generalización del concepto introducido por Owen [71], para determinar una estrategia de amenaza óptima en un juego bimatricial (A, B) . Owen las obtiene resolviendo el juego de suma nula de matriz $A - B$, que en nuestra metodología está relacionando con el caso en que se resuelve el juego múltiple de matriz $(A, -B)$ con pesos unidad.

Al estudiar los juegos bimatriciales de suma no nula bajo este enfoque, es decir, cuando consideramos este juego como uno vectorial de suma nula cuyos pagos son vectores de dos componentes, el jugador obtiene un conjunto de estrategias de seguridad donde podrá escoger la que va a utilizar, con algún criterio adicional de los estudiados en el capítulo II.

Ejemplo 3.3 *Consideremos el juego bipersonal de suma no nula propuesto por*

Borm y otros (1993) [17].

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

a) *Actitud Positiva.*

El conjunto de estrategias de seguridad para el jugador I, bajo una actitud positiva, viene dado por el conjunto de soluciones eficientes del problema

$$\begin{aligned} \max \quad & v_1, v_2 \\ \text{s.a.} \quad & 2x_2 + 2x_3 \geq v_1 \\ & 2x_1 \geq v_1 \\ & 2x_3 \geq v_1 \\ & 2x_2 + 2x_3 \geq v_2 \\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq v_2 \\ & 2x_3 \geq v_2 \\ & \sum_{i=1}^3 x_i = 1 \\ & x \geq 0, v_1, v_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

utilizando el paquete de programación multiobjetivo ADBASE hemos obtenido las siguientes soluciones extremas eficientes:

$$(v^1, x^1) = (1, 1; 1/2, 0, 1/2)$$

$$(v^2, x^2) = (0, 0; 0, 0, 1)$$

por lo que el conjunto de todas las estrategias de seguridad es:

$$\text{conv}\{(1/2, 0, 1/2), (0, 0, 1)\}$$

b) *Actitud Negativa.*

Si resolvemos el juego bajo una actitud negativa, el conjunto de estrategias de seguridad para el jugador I, viene dado por el conjunto de soluciones

eficientes del problema

$$\begin{aligned}
 \max \quad & v_1, -v_2 \\
 \text{s. a.} \quad & 2x_2 + 2x_3 \geq v_1 \\
 & 2x_1 \geq v_1 \\
 & 2x_3 \geq v_1 \\
 & 2x_2 + 2x_3 \leq v_2 \\
 & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq v_2 \\
 & 2x_3 \leq v_2 \\
 & \sum_{i=1}^3 x_i = 1 \\
 & x \geq 0, v_1, v_2 \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

cuyas soluciones extremas eficientes son:

$$(v^1, x^1) = (1, 3/2; 1/2, 0, 1/2)$$

$$(v^2, x^2) = (0, 1; 1, 0, 0)$$

por lo que el conjunto de todas las estrategias de seguridad es:

$$\text{conv}\{(1/2, 0, 1/2), (1, 0, 0)\}$$

En el caso de tratar el juego por el procedimiento de Owen, para determinar una estrategia de amenaza óptima consideremos la matriz $A - B$

$$A - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Al resolver el juego escalar de suma nula con matriz de pagos $A - B$ obtenemos la estrategia $x = (1, 0, 0)$ y el valor del juego $v^ = 0$. Esta estrategia es una de las estrategias obtenidas al resolver el juego bimatricial desde el punto de vista vectorial y bajo una actitud negativa por parte del jugador I.*

2. Resolución como juegos por objetivos

En esta sección establecemos un nuevo análisis para los juegos bimatrixiales no cooperativos, bajo el punto de vista de uno de los jugadores, y a través de los juegos por objetivos establecidos en el capítulo II. Con este nuevo enfoque, el jugador puede además conocer la probabilidad de conseguir aquellos objetivos que se ha marcado.

Sean $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, las matrices de pago de un juego bipersonal de suma no nula. Como hemos comentado anteriormente, el planteamiento puede realizarse bajo dos direcciones diferentes. Teniendo en cuenta que el jugador I intenta obtener lo mejor para ambos jugadores, o bien considerando que el jugador I trata de conseguir lo mejor para sí, pero perjudicando al contrario. A continuación desarrollamos el primer caso, ya que es el que más se acerca al enfoque clásico en el que ambos jugadores intentan maximizar sus ganancias.

Sean $P = (P_1, P_2)$ los objetivos establecidos por el jugador I. Dichos objetivos representan no sólo el pago deseado sino también la actitud ante el riesgo del jugador.

Definición 3.1 *El pago esperado del juego para los objetivos $P = (P_1, P_2)$, para cada par de estrategias $x \in X$, $y \in Y$, es:*

$$v(x, y) = (v_1(x, y), v_2(x, y))$$

donde

$$v_1(x, y) = x^t A_P y, \quad v_2(x, y) = x^t B_P y$$

$$A_P = (\delta_{ij}^1), \quad B_P = (\delta_{ij}^2), \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m$$

$$\delta_{ij}^1 = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{ij} \geq P_1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \delta_{ij}^2 = \begin{cases} 1 & \text{si } b_{ij} \geq P_2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Los niveles de seguridad para el jugador I vienen dados por

Definición 3.2 Dada $x \in X$, el vector de nivel de seguridad para los objetivos P es

$$v^P(x) = (v_1^P(x), v_2^P(x))$$

donde

$$v_1^P(x) = \min_{y \in Y} v_1^P(x, y) = \min_{y \in Y} x^t A_P y = \min_j \left(\sum_{i=1}^n x_i a_{ij}^1 \right)$$

$$v_2^P(x) = \min_{y \in Y} v_2^P(x, y) = \min_{y \in Y} x^t B_P y = \min_j \left(\sum_{i=1}^n x_i a_{ij}^2 \right)$$

Definición 3.3 Una estrategia $x^* \in X$ es una estrategia de seguridad de nivel P si no existe $x \in X$, tal que $v^P(x^*) \leq v^P(x)$, $v^P(x^*) \neq v^P(x)$.

El problema lineal multicriterio asociado al juego vectorial por objetivos, para el jugador I es:

$$(JMO)_P : \begin{array}{ll} \max & v_1, v_2 \\ \text{s.a.} & x^t A_P \geq (v_1, \dots, v_1) \\ & x^t B_P \geq (v_2, \dots, v_2) \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Teorema 3.1 Una estrategia $x^* \in X$ es una estrategia de seguridad de nivel P y $v^* = (v_1^*, v_2^*)$ su vector de nivel de seguridad si y sólo si (v^*, x^*) es una solución eficiente del problema $(JMO)_P$.

Demostración: Se deduce del teorema 2.9 para $k = 2$. □

Ejemplo 3.4 Sea un juego bipersonal de suma no nula con matrices

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 8 \\ 4 & 9 & 7 & 2 \\ 8 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 & 1 \\ 9 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Supongamos que el jugador I establece los objetivos $P = (6, 5)$. Considerando la actitud positiva, las estrategias de seguridad de nivel P y sus vectores de nivel de seguridad asociados son el cierre convexo de las soluciones

$$(v^1, x^1) = (v_1^1, v_2^1; x_1^1, x_2^1, x_3^1) = (1/2, 1/4; 1/4, 1/2, 1/4)$$

$$(v^2, x^2) = (v_1^2, v_2^2; x_1^2, x_2^2, x_3^2) = (1/3, 1/3; 1/3, 1/3, 1/3)$$

Si el jugador I utiliza la estrategia $x^1 = (1/4, 1/2, 1/4)$ conseguirá el objetivo $P_1 = 6$ con probabilidad al menos $1/2$, y el jugador II conseguirá $P_2 = 5$ con probabilidad al menos $1/4$.

2.1. Análisis de sensibilidad en los objetivos

El análisis de sensibilidad en los objetivos desarrollado en el capítulo II podemos aplicarlo en los juegos bipersonales de suma no nula, de forma que el espacio de objetivos se descompone en un número finito de regiones rectangulares en las cuales los puntos que pertenecen a una misma región tienen el mismo conjunto de soluciones y valores.

Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ y β_1, \dots, β_s los elementos de las matrices A y B respectivamente, ordenados en orden creciente. Las distintas regiones de la partición del espacio de objetivos son:

$$R_{11} = \{(\alpha_1, \beta_1)\}$$

$$R_{1j} = \{\alpha_1\} \times (\beta_{j-1}, \beta_j], \quad j = 2, \dots, s$$

$$R_{i1} = (\alpha_{i-1}, \alpha_i] \times \{\beta_1\}, \quad i = 2, \dots, r$$

$$R_{ij} = (\alpha_{i-1}, \alpha_i] \times (\beta_{j-1}, \beta_j], \quad i = 2, \dots, r, \quad j = 2, \dots, s$$

Dado un objetivo $P = (P_1, P_2)$, denotamos por C_P el conjunto de soluciones eficientes del problema $(JMO)_P$, es decir,

$$C_P = \{(v_1^P, v_2^P, x^P) : \text{solución eficiente de } (JMO)_P\}.$$

Teorema 3.2 *Se verifican los siguientes resultados:*

1. Para todo P, P' en R_{ij} , $C_P = C_{P'}$.
2. Sea $P = (P_1, P_2)$ un objetivo en R_{ij} para i fijo y $j = 1, \dots, m$. Sea \bar{v}_1^P el valor del juego de suma nula con matriz de pagos A_P , y denotemos por

X^{P_1} el conjunto de todas las estrategias óptimas para este juego. Entonces $(\bar{v}_1^P, \bar{v}_2^P, \bar{x}^P)$ es una solución eficiente de $(JMO)_P$ donde

$$\bar{v}_2^P = \max_{x \in X^{P_1}} \min_j \left(\sum_{i=1}^n x_i^P \delta_{ij}^2 \right)$$

$$\bar{x}^P = \arg \max_{x \in X^{P_1}} \min_j \left(\sum_{i=1}^n x_i^P \delta_{ij}^2 \right).$$

Demostración: 1. Por definición, para todo $P, P' \in R_{ij}$, $A_P = A_{P'}$ y $B_P = B_{P'}$, de donde $(JMO)_P = (JMO)_{P'}$ y $C_P = C_{P'}$.

2. Para cualquier $P_1 \in (\alpha_{i-1}, \alpha_i]$, y $P_2 \in (\beta_{j-1}, \beta_j]$, $j = 2, \dots, s$, consideremos el problema

$$(JMO)_P : \quad \max \quad v_1, v_2$$

$$\text{s.a.} \quad x^t A_P \geq (v_1, \dots, v_1)$$

$$x^t B_P \geq (v_2, \dots, v_2)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1$$

$$x \geq 0$$

Si (\bar{v}_1^P, \bar{x}^P) es una solución óptima del problema escalar

$$\max \quad v_1$$

$$\text{s.a.} \quad x^t A_P \geq (v_1, \dots, v_1)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1$$

$$x \geq 0$$

entonces tomando $\bar{v}_2^P = \min_j (\sum_{i=1}^n x_i^P \delta_{ij}^2)$ obtenemos que $(\bar{v}_1^P, \bar{v}_2^P, \bar{x}^P)$ es una solución lexicográfica de $(JMO)_P$, lo que implica el resultado. \square

Nota: Dado $P = (P_1, P_2) \in R_{ij}$, existe una solución eficiente del problema $(JMO)_P$ que proporciona el valor de la probabilidad máxima de conseguir P_1 , con $P_1 \in (\alpha_{i-1}, \alpha_i]$ para cualquier P_2 . De la misma forma, existe una solución del problema $(JMO)_P$ que proporciona el valor de la probabilidad máxima de conseguir P_2 , con $P_2 \in (\beta_{j-1}, \beta_j]$, para cualquier P_1 . Si el problema $(JMO)_P$ tiene una única solución eficiente, dicha solución proporciona conjuntamente el valor de la probabilidad máxima de alcanzar P_1 y P_2 .

Hemos descompuesto el espacio de objetivos en regiones rectangulares R_{ij} en las que los objetivos pertenecientes a cada una de ellas se alcanzan con la misma probabilidad. Puede ocurrir que objetivos pertenecientes a regiones distintas originen problemas con el mismo conjunto de soluciones. En este caso, estas regiones pueden colapsarse con lo que el número de regiones en la partición disminuye.

Ejemplo 3.5 Consideremos el juego bipersonal de suma no nula con matrices de pagos:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Si consideramos la actitud positiva, la partición del espacio de objetivos viene dada por el siguiente mapa de soluciones:

3			
$(1,0;1,0,0)$			
$(1,0;0,1,0)$	$(1,0;1,0,0)$	$(1,0;1,0,0)$	$(.5,0;.5,0,.5)$
$(1,0;0,0,1)$			
2			
$(.5,.5;.5,.5,0)$	$(.5,.5;.5,.5,0)$	$(.5,.5;.5,.5,0)$	$(.25,.5;.25,.5,.25)$
	$(.5,.5;0,.5,.5)$	$(1,0;1,0,0)$	$(.5,0;.5,0,.5)$
	$(1,0;1,0,0)$		
$(1,.5;0,.5,.5)$			
0	1	2	3
$(1,1;1,0,0)$			
$(1,1;0,1,0)$	$(1,1;1,0,0)$	$(1,1;1,0,0)$	$(.5,1;.5,0,.5)$
$(1,1;0,0,1)$			

Dentro de cada región hemos escrito las soluciones eficientes extremas que proporcionan las probabilidades de conseguir los objetivos pertenecientes a

cada una de ellas, y las estrategias correspondientes. Podemos observar que objetivos pertenecientes a distintas regiones se obtienen con las mismas probabilidades y las mismas estrategias, por tanto estas regiones pueden colapsarse.

3			
$(1,0;1,0,0)$ $(1,0;0,1,0)$ $(1,0;0,0,1)$	$(1,0;1,0,0)$		$(.5,0;.5,0,.5)$
2			
$(.5,.5;.5,.5,0)$ $(1,.5;0,.5,.5)$	$(.5,.5;.5,.5,0)$ $(.5,.5;0,.5,.5)$ $(1,0;1,0,0)$	$(.5,.5;.5,.5,0)$ $(1,0;1,0,0)$	$(.25,.5;.25,.5,.25)$ $(.5,0;.5,0,.5)$
0	1	2	3
$(1,1;1,0,0)$ $(1,1;0,1,0)$ $(1,1;0,0,1)$	$(1,1;1,0,0)$		$(.5,1;.5,0,.5)$
2			

Basándonos en el teorema 2.10, establecemos un procedimiento para obtener los conjuntos C_P para cualquier objetivo P . Para ello, denotamos por $(JMO)_P(i, j)$ el problema $(JMO)_{(\alpha_i, \beta_j)}$, siendo los elementos α_i, β_j los introducidos al comienzo de 2.1.

El procedimiento es el siguiente:

1. Considerar el objetivo $P = (\alpha_1, \beta_1)$, y resolver el problema $(JMO)_P(1, 1)$. Las soluciones extremas eficientes son las estrategias puras del jugador I y el valor del juego es $v_1 = 1, v_2 = 1$.
2. Considerar el objetivo $P = (\alpha_2, \beta_1)$ y el problema $(JMO)_P(2, 1)$. Este problema tiene más restricciones que $(JMO)_P(1, 1)$, por lo que sólo hay que comprobar si las soluciones de este problema verifican las nuevas restricciones.

- 2.1. Si todas las soluciones extremas las verifican, son las soluciones extremas eficientes del nuevo problema $(JMO)_P(2, 1)$
 - 2.2. Si algunas sí verifican las restricciones adicionales y otras no, las nuevas soluciones eficientes del problema $(JMO)_P(2, 1)$ están en la frontera que generan las nuevas restricciones.
 - 2.3. Si ninguna solución eficiente del problema $(JMO)_P(1, 1)$ verifica las nuevas restricciones del problema $(JMO)_P(2, 1)$, todas las soluciones eficientes de este problema están en la frontera que generan dichas restricciones.
3. Considerar el objetivo $P = (\alpha_3, \beta_1)$ y repetir el paso 2 con los problemas $(JMO)_P(2, 1)$ y $(JMO)_P(3, 1)$

Repitiendo el proceso de forma ordenada para todos los objetivos, se construye un procedimiento iterado mediante el cual se utiliza la información obtenida en el paso anterior (bases eficientes), para obtener las soluciones eficientes del nuevo problema.

CAPÍTULO IV

Aplicaciones económicas

A. Mármol L. Monroy

1. Introducción

La teoría de juegos proporciona un marco unificado para el análisis económico en muchos campos, lo que contribuye a estructurar el proceso de modelización del comportamiento económico. Las teorías tradicionales de la decisión y de juegos, estudian la forma en que los decisores pueden optimizar un único objetivo. Esta consideración impide una aplicación más amplia de sus técnicas, ya que cualquier problema que pueda aparecer en economía o en otras ciencias sociales envuelve más de un objetivo.

Además, cualquier situación competitiva que puede modelizarse como un juego escalar puede transformarse en un juego vectorial cuando hay más de un objetivo. Por ejemplo, las políticas de producción de dos firmas que compiten por un mercado, puede considerarse como un juego escalar. Sin embargo, cuando compiten simultáneamente en varios mercados, hay que considerar el enfoque multicriterio.

Los juegos con pagos vectoriales difieren de los juegos escalares únicamente en la estructura del pago, pero esto es suficiente para que muchos de los resultados de la teoría de juegos escalares, no tengan una extensión directa en

los juegos vectoriales, debido a que en general no existe un orden total entre los pagos vectoriales y por ello, no es fácil establecer comparaciones entre los distintos pagos obtenidos. Por esta razón, en los últimos años se han propuesto nuevos conceptos de solución y procedimientos para obtener estas soluciones.

La extensión natural del concepto de estrategias minimax es difícil de conseguir en los juegos con pagos vectoriales. Sin embargo, aunque en algunos casos es posible establecer la existencia de tales estrategias, suele ser bastante complicado obtenerlas y en la mayoría de los casos los valores que proporcionan no son únicos. Por ello, el concepto de solución de estrategia de seguridad Pareto-óptima, introducido en el capítulo II, es importante para resolver juegos vectoriales desde una actitud de aversión al riesgo. En este capítulo analizamos tres casos de mercados competitivos en los que las empresas compiten simultáneamente en varios escenarios. En este análisis utilizaremos los conceptos y resultados expuestos en los capítulos anteriores

2. Campaña publicitaria

La publicidad es una variable de decisión estratégica muy importante en un modelo de oligopolio cuando la información que los consumidores tienen con respecto a preferencias, precio o características de los productos es incompleta. Con respecto a la publicidad competitiva, cada empresa tiene, generalmente, un presupuesto fijo. Cuando una empresa tiene un sólo competidor importante, su objetivo suele ser conseguir la mayor cuota de mercado posible disminuyendo los clientes de su competidor. Sin embargo, la empresa también ha de tener en cuenta la variedad de medios que puede utilizar para su publicidad con objeto de alcanzar un segmento diversificado de población.

El primer caso que estudiamos corresponde a un juego en el que el conjunto de estrategias puras de los jugadores es finito, por lo que los pagos que reciben pueden representarse por una matriz cuyos elementos son vectores. Es una extensión del modelo presentado por Shubik (1955) [85], y vamos a considerarlo bajo el punto de vista de uno de los jugadores.

Dos empresas tienen un millón de unidades monetarias (u.m.) cada una para gastar en publicidad de sus productos. Pueden utilizar radio, televisión,

y prensa escrita para realizar su campaña publicitaria que va a ir dirigida a tres grupos de clientes potenciales, es decir, la publicidad va a tener efecto en tres escenarios distintos. El efecto esperado que producirán las distintas posibilidades de publicidad viene recogido en la siguiente matriz:

	Radio	Televisión	Prensa
Radio	(0, -0.2, 1)	(-0.5, 1, 1.2)	(0, 1.5, 1.5)
Televisión	(2, 0.5, 0.7)	(-0.5, 0.8, 0.7)	(1.5, 1.1, 0.3)
Prensa	(1, 1.2, -0.5)	(-0.5, 0.4, 0)	(0, 0.7, 0.2)

Cada entrada de la matriz de pagos es un vector cuyas componentes representan la cantidad de ingreso extra obtenido en cada grupo cuando cada jugador gasta su dinero en los diferentes medios. Podemos considerar que es posible gastar distintas cantidades en cada uno de ellos, en cuyo caso las estrategias $x = (x_1, x_2, x_3)$ representan la proporción de la cantidad total que la empresa I gasta en cada medio, o bien que la empresa debe gastar todo su dinero en un solo medio, en cuyo caso la estrategia $x = (x_1, x_2, x_3)$ puede considerarse como la probabilidad con que debe considerarse cada medio. Este modelo puede analizarse como un juego matricial vectorial, donde la matriz de pagos vectoriales se descompone en tres matrices escalares $A(1)$, $A(2)$ y $A(3)$:

$$\begin{aligned}
 A(1) &= \begin{pmatrix} 0 & -0.5 & 0 \\ 2 & -0.5 & 1.5 \\ 1 & -0.5 & 0 \end{pmatrix} & A(2) &= \begin{pmatrix} -0.2 & 1 & 1.5 \\ 0.5 & 0.8 & 1.1 \\ 1.2 & 0.4 & 0.7 \end{pmatrix} \\
 A(3) &= \begin{pmatrix} 1 & 1.2 & 1.5 \\ 0.7 & 0.7 & 0.3 \\ -0.5 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Como es usual, los espacios de estrategias mixtas de cada jugador son

$$X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \sum_{i=1}^3 x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, 2, 3\}$$

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^3 : \sum_{j=1}^3 y_j = 1, y_j \geq 0, j = 1, 2, 3\}$$

y la función de pagos del juego viene dada por el vector de tres componentes

$$v(x, y) = x^t A y = (v_1(x, y), v_2(x, y), v_3(x, y))$$

donde $v_k(x, y) = x^t A(k)y$, $k = 1, 2, 3$.

Cada estrategia $x \in X$ define niveles de seguridad para el jugador I en cada juego escalar inducido, de la forma:

$$v_k(x) = \min_{y \in Y} v_k(x, y), \quad k = 1, 2, 3$$

de donde el vector de nivel de seguridad para x es

$$v(x) = (v_1(x), v_2(x), v_3(x))$$

Para resolver este juego, consideramos el concepto de estrategia de seguridad Pareto-óptima para el jugador I, que consiste en maximizar (en sentido vectorial), el vector de nivel de seguridad del jugador I, es decir, el jugador I desde un punto de vista conservador, busca estrategias $x \in X$ cuyo vector de nivel de seguridad no pueda ser mejorado componente a componente.

El conjunto de estas estrategias y los correspondientes vectores de nivel de seguridad asociados, viene dado por el conjunto de soluciones eficientes del problema lineal multiobjetivo asociado al juego vectorial

$$\begin{aligned} \max \quad & v_1, v_2, v_3 \\ \text{s.a.} \quad & x^t A(1) \geq (v_1, v_1, v_1) \\ & x^t A(2) \geq (v_2, v_2, v_2) \\ & x^t A(3) \geq (v_3, v_3, v_3) \\ & \sum_{i=1}^3 x_i = 1 \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Con el programa ADBASE hemos obtenido las soluciones extremas

$$\begin{aligned} (v^1, x^1) &= (-1/2, 342/495, 3/11; 0, 8/11, 3/11) \\ (v^2, x^2) &= (-1/2, 677/990, 663/1980; 1/18, 62/99, 7/22) \\ (v^3, x^3) &= (-1/2, 17/90, 75/90; 4/9, 5/9, 0) \\ (v^4, x^4) &= (-1/2, -1/5, 1; 1, 0, 0). \end{aligned}$$

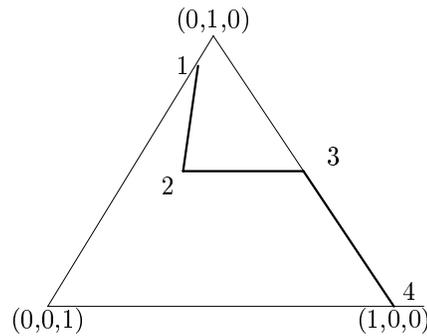


Figura 4.1.

La figura 4.1 representa el espacio de estrategias mixtas del jugador I, donde los vértices de este triángulo corresponden a las tres estrategias puras. El jugador I debe utilizar alguna de las estrategias que esté en la línea poligonal que une los puntos 1 y 4.

Por ejemplo, la estrategia $x^3 = (4/9, 5/9, 0)$ indica que utilizando el radio y televisión en proporción 4/5, se asegura una pérdida de ingresos de no más de 1/2 en el primer segmento de la población y un aumento de ingresos de al menos 17/90 y 75/90 en el segundo y el tercero respectivamente, y estos niveles no son mejorables conjuntamente.

Consideremos ahora los juegos vectoriales por objetivos para resolver este juego. Supongamos que el jugador I ha establecido los objetivos $P = (1, 0.8, 0.7)$, para cada par de estrategias $x \in X$, $y \in Y$ la función de pagos es

$$v^P(x, y) = x^t A_P y = (v_1^P(x, y), v_2^P(x, y), v_3^P(x, y))$$

donde

$$v_k^P(x, y) = x^t A_P(k) y, \quad k = 1, 2, 3$$

y

$$A_P(1) = (\delta_{ij}^1), \quad \delta_{ij}^1 = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{ij} \geq 1 \\ 0 & \text{si } a_{ij} < 1 \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3$$

$$A_P(2) = (\delta_{ij}^2), \quad \delta_{ij}^2 = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{ij} \geq 0.8 \\ 0 & \text{si } a_{ij} < 0.8 \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3$$

$$A_P(3) = (\delta_{ij}^3), \quad \delta_{ij}^3 = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{ij} \geq 0.7 \\ 0 & \text{si } a_{ij} < 0.7 \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3$$

En consecuencia, tenemos

$$A_P(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_P(2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_P(3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para cada estrategia $x \in X$ los niveles de seguridad en cada juego vienen dados por

$$v_P^k(x) = \min_{y \in Y} v_k^P(x, y) \quad k = 1, 2, 3$$

de donde el vector de seguridad de nivel P para el jugador I es

$$v^P = (v_1^P(x), v_2^P(x), v_3^P(x))$$

siendo $v_k^P(x)$ la probabilidad de conseguir al menos P_k en cada juego escalar cuando el jugador I juega la estrategia x .

La forma de obtener el conjunto de estrategias de seguridad de nivel P y los correspondientes vectores de nivel de seguridad, es resolviendo el problema lineal multiobjetivo:

$$\begin{aligned} \max \quad & v_1, v_2, v_3 \\ \text{s. a.} \quad & x^t A_P(1) \geq (v_1, v_1, v_1) \\ & x^t A_P(2) \geq (v_2, v_2, v_2) \\ & x^t A_P(3) \geq (v_3, v_3, v_3) \\ & \sum_{i=1}^3 x_i = 1 \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

La solución de este problema viene dada, en este caso, por la envolvente convexa de las soluciones eficientes extremas del mismo, que son:

$$(x^1, v^1) = (1/2, 0, 1/2; 0, 1/2, 1/2)$$

$$(x^2, v^2) = (1, 0, 0; 0, 0, 1).$$

Si el jugador I utiliza la estrategia $x^1 = (1/2, 0, 1/2)$ consigue no menos de $P_1 = 1$ con una probabilidad de al menos $1/2$, $P_2 = 0.8$ con probabilidad 0 y no menos de $P_3 = 0.7$ con probabilidad no menor de $1/2$.

3. Modelo de mercados competitivos

En las ciencias sociales, al estudiar modelos en los que las variables pertenecen a conjuntos finitos con un gran número de elementos, se suele suponer que dichos conjuntos son infinitos. Esto permite aplicar las técnicas de análisis matemático a una gran variedad de problemas. Por ello, al estudiar juegos con un gran número de estrategias para un jugador, es metodológicamente natural, a la vez que útil, considerar que el conjunto de estrategias para este jugador es infinito.

El siguiente modelo corresponde a un juego en el cuadrado unidad, es decir cada jugador tiene un continuo de estrategias puras, representadas como puntos del intervalo cerrado $[0,1]$. Por tanto, una estrategia pura para cada jugador es un número real en este intervalo y la función de pagos del juego es una función definida en el cuadrado unidad.

Este modelo es una extensión de un juego antagónico en el cuadrado unidad presentado por Vorobev (1977) [94].

Una empresa, el jugador II, controla dos mercados de dos bienes homogéneos en dos áreas diferentes A y B. Otra empresa, el jugador I, intenta conquistar uno de estos dos mercados, simultáneamente en las dos áreas. Con este propósito, el jugador I invierte en publicidad, en televisión y para ser emitida simultáneamente en las dos áreas, una cantidad de una unidad monetaria. Si el jugador asigna la cantidad x al primero de los mercados, entonces $1 - x$, es lo que asigna al segundo. Para mantener sus mercados intactos, el jugador II también emplea una unidad monetaria en publicidad, asignando la cantidad y al primer mercado y $1 - y$ al segundo.

Consideramos que si el jugador I consigue ventaja en uno de los mercados (no puede conquistar ambos a la vez) elimina a su oponente de este mercado y obtiene un vector de pagos cuyas componentes son el exceso de fondos asignado a este mercado multiplicado por un coeficiente que refleja la importancia de este

mercado en cada una de las dos áreas. La función de pagos es por tanto:

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$H(x, y) = (H_A(x, y), H_B(x, y))$$

donde

$$H_A(x, y) = \begin{cases} k_1(x - y) & \text{si } x \geq y \\ k_2(y - x) & \text{si } x \leq y \end{cases}$$

$$H_B(x, y) = \begin{cases} k_3(x - y) & \text{si } x \geq y \\ k_4(y - x) & \text{si } x \leq y \end{cases}$$

donde k_1, k_2, k_3 y $k_4 \geq 0$. k_1 y k_3 reflejan la importancia del primer mercado y k_2 y k_4 , la importancia del segundo mercado en las áreas A y B respectivamente.

Este juego lo resolvemos bajo el punto de vista del jugador II. Buscamos las estrategias de seguridad Pareto-óptimas para este jugador, es decir, el jugador II quiere determinar la cantidad y de forma que minimice el máximo del vector de pagos en ambas áreas.

En este caso, para cada $y \in [0, 1]$ los niveles de seguridad en cada mercado son:

$$\bar{H}_A(y) = \max_{x \in [0, 1]} H_A(x, y), \quad \bar{H}_B(y) = \max_{x \in [0, 1]} H_B(x, y)$$

y el vector de nivel de seguridad $\bar{H}(y) = (\bar{H}_A(y), \bar{H}_B(y))$, representa el pago que el jugador II puede garantizarse en cada mercado. Entonces el conjunto de estrategias de seguridad Pareto-óptimas y los niveles de seguridad asociados vienen dados por el conjunto de soluciones eficientes del problema bicriterio

$$\begin{aligned} \min \quad & \bar{H}_A(y), \bar{H}_B(y) \\ \text{s.a.} \quad & 0 \leq y \leq 1 \end{aligned}$$

Las componentes del vector de nivel de seguridad en este modelo son:

$$\begin{aligned} \bar{H}_A(y) &= \max_{0 \leq x \leq 1} H_A(x, y) = \max\left\{ \max_{y \leq x \leq 1} k_1(x - y), \max_{0 \leq x \leq y} k_2(y - x) \right\} \\ &= \max\{k_1(1 - y), k_2y\}, \\ \bar{H}_B(y) &= \max_{0 \leq x \leq 1} H_B(x, y) = \max\left\{ \max_{y \leq x \leq 1} k_3(x - y), \max_{0 \leq x \leq y} k_4(y - x) \right\} \\ &= \max\{k_3(1 - y), k_4y\}. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\overline{H}_A(y) = \begin{cases} k_1(1-y) & \text{si } 0 \leq y \leq \frac{k_1}{k_1+k_2} \\ k_2y & \text{si } \frac{k_1}{k_1+k_2} \leq y \leq 1 \end{cases}$$

$$\overline{H}_B(y) = \begin{cases} k_3(1-y) & \text{si } 0 \leq y \leq \frac{k_3}{k_3+k_4} \\ k_4y & \text{si } \frac{k_3}{k_3+k_4} \leq y \leq 1 \end{cases}$$

Basándonos en el siguiente resultado podemos obtener el conjunto de todas las estrategias de seguridad Pareto-óptimas de este juego

Lema 4.1 Sean $f_1, f_2 : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, funciones convexas en X compacto. Si x^1 es el único mínimo en X para f_1 y x^2 es el único mínimo en X para f_2 , ($x^1 < x^2$), entonces el conjunto de soluciones eficientes para el problema $\min f_1(x), f_2(x)$ es el intervalo cerrado $[x^1, x^2]$.

Demostración:

1. Sea $x \in (x^1, x^2)$, probaremos que no existe $y \neq x$ tal que $f_1(y) \leq f_1(x)$ y $f_2(y) \leq f_2(x)$ con al menos una desigualdad estricta.

Consideremos $y < x$. Como $y < x < x^2$, por ser f_2 convexa se tiene $f_2(x) \leq \lambda f_2(y) + (1-\lambda)f_2(x^2)$, $\lambda \in (0,1)$. Si $f_2(y) \leq f_2(x)$, entonces $f_2(x) \leq \lambda f_2(x) + (1-\lambda)f_2(x^2)$ y $f_2(x) \leq f_2(x^2)$, en contra de ser x^2 el único mínimo de f_2 , por tanto x no está dominada por y . En el caso $y > x$ se obtiene el resultado de forma análoga.

2. Si $x = x^1$ o $x = x^2$ la eficiencia se tiene de la condición de mínimo global.
3. Sea $x \notin (x^1, x^2)$. Si $x < x^1$ probaremos que x está dominada por x^1 . En primer lugar, $f_1(x^1) < f_1(x)$. Por otra parte, como $x^1 \in (x, x^2)$, por ser f_2 convexa se tiene $f_2(x^1) \leq \lambda f_2(x) + (1-\lambda)f_2(x^2) < \lambda f_2(x) + (1-\lambda)f_2(x) = f_2(x)$ y de aquí se obtiene el resultado. De forma análoga, cuando $x > x^2$ se demuestra que x está dominada por x^2 . \square

Este resultado puede generalizarse al caso de n funciones reales, en cuyo caso el conjunto eficiente es el menor intervalo cerrado que contiene sus mínimos.

Tenemos entonces el siguiente teorema:

Teorema 4.1 *El conjunto de estrategias de seguridad Pareto-óptimas para el jugador II en el juego bicriterio $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es el intervalo cerrado $[k_1/(k_1 + k_2), k_3/(k_3 + k_4)]$ o bien $[k_3/(k_3 + k_4), k_1/(k_1 + k_2)]$*

Demostración: El resultado es consecuencia inmediata del lema 4.1 ya que las funciones $\overline{H}_A(y), \overline{H}_B(y)$ son funciones convexas en $[0, 1]$ y sus mínimos globales se alcanzan en los puntos $y^1 = k_1/(k_1 + k_2)$ e $y^2 = k_3/(k_3 + k_4)$ respectivamente, con independencia de los valores relativos de los coeficientes k_i . \square

Con respecto a la posición relativa de las funciones $\overline{H}_A(y), \overline{H}_B(y)$ hay dos casos básicos, que podemos observar en las gráficas

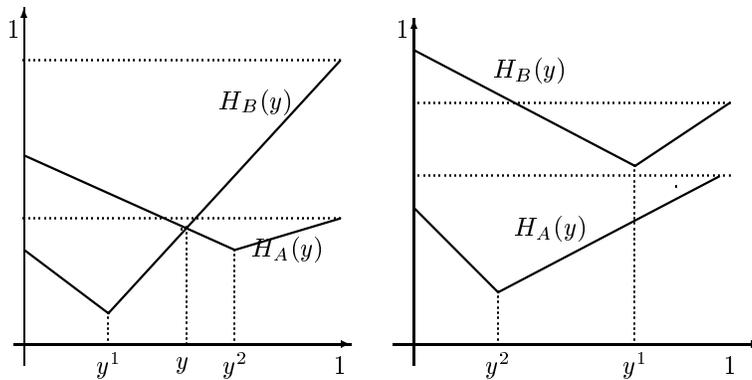


Figura 4.2.

El punto $y = k_3/(k_2 + k_3)$ en la gráfica de la izquierda de la figura 4.2 es una estrategia de seguridad Pareto-óptima, que es equitativa en el siguiente sentido: cuando el jugador II juega su estrategia y , se asegura la misma pérdida máxima en ambas áreas. Cualquier desviación de esta estrategia supondrá un incremento en la máxima pérdida que se asegura en una de las áreas y una disminución en la otra. Vemos que en el otro caso no existe una estrategia de seguridad Pareto-óptima equitativa. Las condiciones en los parámetros k_i para la existencia de dicha estrategia se establecen en este resultado:

Proposición 4.1 *Existe una estrategia de seguridad Pareto-óptima equitativa para el juego si y sólo si*

$$k_1/(k_1+k_2) \leq k_3/(k_2+k_3) \leq k_3/(k_3+k_4) \text{ cuando } k_1/(k_1+k_2) < k_3/(k_3+k_4)$$

o bien

$$k_3/(k_3+k_4) \leq k_1/(k_1+k_4) \leq k_1/(k_1+k_2) \text{ cuando } k_3/(k_3+k_4) \leq k_1/(k_1+k_2)$$

Con respecto a la existencia de estrategia minimax para este juego, notemos que como consecuencia de la forma especial de la función de pagos, el conjunto de soluciones minimax para el jugador II coincide con el conjunto de estrategias de seguridad Pareto-óptimas. Sin embargo, mientras que en el caso de estas últimas la valoración de cada estrategia viene dada por un único vector, la valoración de las estrategias minimax proporciona dos vectores diferentes.

4. Duopolio como juego bicriterio

Como hemos visto en el capítulo III, la programación multiobjetivo también puede utilizarse para analizar juegos bipersonales de suma no nula escalares desde el punto de vista de uno de los jugadores. Ahora bien, como las acciones de dicho jugador repercuten en el resultado del otro, la estrategia que el primero elegirá dependerá de la actitud que tenga hacia el otro.

En el caso de *actitud positiva*, es decir cuando el jugador I intenta conseguir el mejor resultado para ambos jugadores, si F_1 y F_2 son las funciones de pago del jugador I y II respectivamente, el juego bipersonal de suma no nula puede considerarse como un juego bicriterio cuya función de pagos es $F = (F_1, F_2)$. Desde una *actitud negativa*, es decir si el jugador I intenta conseguir el mejor resultado para él, pero perjudicando al contrario, el juego bipersonal de suma no nula puede considerarse como un juego bicriterio cuya función de pagos es $F = (F_1, -F_2)$.

Este estudio puede hacerse tanto en el caso continuo como en el discreto. Vamos a aplicar estas ideas para analizar un duopolio en el que las variables estratégicas son los precios y las dos empresas rivales intentan establecer un precio menor que el de la otra con el fin de aumentar su cuota de mercado.

4.1. Caso continuo

Dos empresas venden cada una un bien que, en el mercado, son sustitutos el uno del otro. Por ello, un cambio en el precio de un bien tiene un gran impacto en la demanda del otro. Las funciones de demanda de cada empresa son respectivamente,

$$d_1(p_1, p_2) = 10 - p_1 + 0.5p_2/p_1, \quad d_2(p_1, p_2) = 20 - 2p_2 + p_1/p_2.$$

donde p_1 y p_2 denotan los precios de la empresa 1 y de la empresa 2 respectivamente. Supongamos por simplicidad de cálculo, que ambas firmas tienen costes de producción nulos y tratan de maximizar beneficios estableciendo los precios.

Este problema puede modelizarse como un juego bipersonal en forma estratégica donde el conjunto de estrategias para ambos jugadores son respectivamente $S_1 = [0, 10]$ y $S_2 = [0, 10]$ y las funciones de pagos

$$F_1(p_1, p_2) = 10p_1 - p_1^2 + 0.5p_2, \quad F_2(p_1, p_2) = 20p_2 - 2p_2^2 + p_1.$$

Sin pérdida de generalidad, se consideran los precios en el intervalo $[0, 10]$ porque para precios mayores que 10 la función de demanda de ambos bienes puede ser cero. Las funciones de pagos son la funciones de beneficios obtenidas multiplicando las funciones de demanda por los precios respectivos.

Actitud positiva: Considerando una actitud positiva del jugador I, el vector de nivel de seguridad para una estrategia $p_1 \in [0, 10]$ viene dado por

$$F(p_1) = (F_1(p_1), F_2(p_1))$$

donde

$$F_1(p_1) = \min_{0 \leq p_2 \leq 10} F_1(p_1, p_2), \quad F_2(p_1) = \min_{0 \leq p_2 \leq 10} F_2(p_1, p_2).$$

Este vector representa el resultado que el jugador I se asegura para él y para el jugador II cuando juega la estrategia p_1 . La expresión analítica de los niveles de seguridad es

$$F_1(p_1) = 10p_1 - p_1^2, \quad F_2(p_1) = p_1.$$

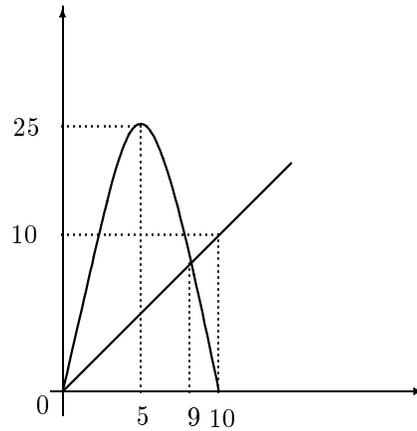


Figura 4.3.

En la figura 4.3 se tiene la representación gráfica de estas funciones.

Para maximizar el vector de nivel de seguridad hemos de resolver el problema biobjetivo

$$\begin{aligned} \max \quad & F_1(p_1), F_2(p_1) \\ \text{s.a.} \quad & 0 \leq p_1 \leq 10 \end{aligned}$$

Como $F_1(p_1), F_2(p_1)$ son funciones cóncavas en \mathbb{R} y sus valores máximos en el intervalo $[0, 10]$ se alcanzan en los puntos $p^1 = 5$ y $p^2 = 10$ respectivamente, por el lema 4.1, el conjunto de estrategias de seguridad Pareto-óptimas para el jugador I es el intervalo cerrado $[5, 10]$. En este caso, el precio $p_1 = 9$ es una estrategia de seguridad Pareto-óptima equitativa, en el sentido que cuando el jugador I establece este precio, se asegura un beneficio de 9 unidades para él y para el otro jugador, con independencia del precio que establezca el otro jugador.

Actitud negativa Considerando una actitud negativa, el jugador I está interesado en maximizar su beneficio mínimo a la vez que minimiza el beneficio máximo que el jugador II pueda obtener. Para una estrategia $p_1 \in [0, 10]$ el vector de nivel de seguridad viene dado por

$$F(p_1) = (F_1(p_1), F_2(p_1))$$

donde

$$F_1(p_1) = \min_{0 \leq p_2 \leq 10} F_1(p_1, p_2), \quad F_2(p_1) = \max_{0 \leq p_2 \leq 10} F_2(p_1, p_2).$$

La expresión analítica de los niveles de seguridad es

$$F_1(p_1) = 10p_1 - p_1^2, \quad F_2(p_1) = p_1 + 50.$$

En este caso, el jugador I quiere maximizar $F_1(p_1)$ y minimizar $F_2(p_1)$. Para encontrar las estrategias no dominadas resolvemos el problema biobjetivo

$$\begin{aligned} \max \quad & F_1(p_1), -F_2(p_1) \\ \text{s.a.} \quad & 0 \leq p_1 \leq 10 \end{aligned}$$

Las funciones $F_1(p_1)$ y $-F_2(p_1)$ son cóncavas en $[0, 10]$, y sus valores máximos en el intervalo $[0, 10]$ se alcanzan en los puntos $p^1 = 5$ y $p^2 = 0$ respectivamente. Entonces, el lema 4.1 asegura que el conjunto de estrategias de seguridad Pareto-óptimas para el jugador I es el intervalo cerrado $[0, 5]$. En este caso no existe una estrategia de seguridad Pareto-óptima equitativa.

4.2. Caso discreto

Si consideramos que hay un número finito de estrategias puras, este juego puede representarse por dos matrices de pagos. Supongamos que ambos precios toman los valores $p_1, p_2 = 2, 4, 6, 8, 10$. Las matrices de pago A y B que se obtienen para los jugadores I y II respectivamente son:

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\ 25 & 26 & 27 & 28 & 29 \\ 25 & 26 & 27 & 28 & 29 \\ 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 34 & 50 & 50 & 34 & 2 \\ 36 & 52 & 52 & 36 & 4 \\ 38 & 54 & 54 & 38 & 6 \\ 40 & 56 & 56 & 40 & 0 \\ 42 & 58 & 58 & 42 & 10 \end{pmatrix}$$

Los espacios de estrategias mixtas para cada jugador, en este caso, son

$$X = \{x \in \mathbb{R}^5 : \sum_{i=1}^5 x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^5 : \sum_{j=1}^5 y_j = 1, y_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5\}$$

Así, para $x \in X$, $y \in Y$, las funciones son

$$F_1(x, y) = x^t A y, \quad F_2(x, y) = x^t B y.$$

En esta situación, el juego bimatrixial puede analizarse como un juego matricial bicriterio. En el caso de actitud positiva, la matriz del pagos del juego bicriterio es (A, B) , y en el caso de actitud negativa la matriz del juego bicriterio es $(A, -B)$.

Actitud positiva: Considerando una actitud positiva del jugador I, el vector de nivel de seguridad para una estrategia $x \in X$ es

$$v_1(x) = \min_{y \in Y} x^t A y, \quad v_2(x) = \min_{y \in Y} x^t B y.$$

Para obtener las estrategias de seguridad Pareto-óptimas del jugador I resolvemos el problema lineal biobjetivo:

$$\begin{aligned} \max \quad & v_1, v_2 \\ \text{s.a.} \quad & x^t A \geq (v_1, \dots, v_1) \\ & x^t B \geq (v_2, \dots, v_2) \\ & x \in X \end{aligned}$$

cuyas soluciones extremas eficientes son:

$$(x^1, v^1) = (0, 0, 1, 0, 0; 25, 6)$$

$$(x^2, v^2) = (0, 0, 0, 1, 0; 17, 8)$$

$$(x^3, v^3) = (0, 0, 0, 0, 1; 1, 10)$$

y el conjunto de estrategias de seguridad Pareto-óptimas es el intervalo cerrado $[6, 10]$.

Por ejemplo, si el jugador I establece el precio $p_1 = 6$, se garantiza un beneficio al menos de 25 para él y un beneficio al menos de 6 para el jugador II independientemente del precio que establezca este último.

Actitud negativa: Considerando una actitud negativa del jugador I, el vector de nivel de seguridad para una estrategia $x \in X$ es

$$v_1(x) = \min_{y \in Y} x^t A y, \quad v_2(x) = \max_{y \in Y} x^t B y.$$

El problema lineal biobjetivo asociado es

$$\begin{aligned} \max \quad & v_1, -v_2 \\ \text{s.a.} \quad & x^t A \geq (v_1, \dots, v_1) \\ & x^t B \leq (v_2, \dots, v_2) \\ & x \in X \end{aligned}$$

cuyas soluciones extremas eficientes son:

$$(x^1, v^1) = (0, 1, 0, 0, 0; 25, 52)$$

$$(x^2, v^2) = (1, 0, 0, 0, 0; 17, 50)$$

y el conjunto de estrategias de seguridad Pareto-óptimas es el intervalo cerrado $[2, 4]$.

Observemos que los conjuntos de estrategias de seguridad Pareto-óptimas obtenidos en el caso discreto son subconjuntos de los correspondientes conjuntos obtenidos en el caso continuo.

CAPÍTULO V

Resolución del problema lineal múltiple con ADBASE

M. A. Hinojosa A. Mármol

El presente capítulo contiene las características básicas del software ADBASE, desarrollado por el Prof. Ralph Steuer para el tratamiento y resolución de problemas lineales multiobjetivo. Es apropiado, por tanto, para la obtención de soluciones de juegos matriciales multicriterio, como se ha expuesto en los capítulos precedentes. En Steuer (1986) [88] y en el manual de ADBASE (Steuer, 1995 [89]) puede verse información más extensa sobre este programa.

1. Objetivo del programa ADBASE

ADBASE es un programa Fortran, creado para la enumeración de los puntos extremos eficientes y las aristas no acotadas eficientes de problemas lineales multiobjetivo. Básicamente resuelve problemas de la forma

$$\max\{(Cx + a) = z, x \in S\},$$

donde C es la matriz de criterios, $z \in \mathbb{R}^n$ el vector de objetivos y S la región factible

$$S = \{x \geq 0 : A_k x \leq b_k, A_e x = b_e, A_s x \geq b_s\}$$

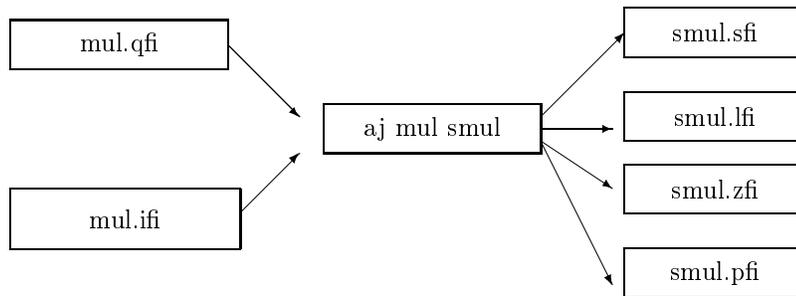
con los coeficientes del lado derecho de las restricciones b_k, b_e, b_s no negativos.

2. Estructura

Para la utilización del ADBASE en microordenador es necesario un editor para la preparación de ficheros. No hacemos referencia a un editor específico pues pueden servir la mayoría de los editores disponibles, así como los programas de tratamiento de texto, teniendo precaución en este caso de archivarlos como ficheros de texto para evitar los códigos internos del programa.

Para ejecutar ADBASE es necesario crear un fichero QFILE (con la extensión .qfi), y en la mayoría de los casos un fichero IFILE (extensión .ifi), en los que se recoge la información necesaria para resolver el problema. La salida aparece en un SFILE (.sfi) y algunas veces en un LFILE (.lfi), ZFILE (.zfi), y PFILE (.pfi).

Para ejecutarlo se da la orden AJ 'NOMBRE1' 'NOMBRE2', donde 'NOMBRE1' 'NOMBRE2' representan respectivamente los nombres asignados a los ficheros de entrada y de salida. Si se ejecuta el comando AJ MUL SMUL, la operación que realiza ADBASE se representa como sigue:



ADBASE trabaja en dos modos distintos:

MODE = 1: Modo Normal.

En MODE=1 el problema a resolver se manda al ADBASE desde un IFILE. En este modo, pueden resolverse los siguientes tipos de problemas:

a) Problemas lineales multiobjetivo:

$$\max\{Cx + a = z, x \in S\}$$

Utilizando el cono de criterios original, se obtienen todos los puntos extremos eficientes y todas las aristas no acotadas eficientes. Se realiza con IFASE0=0, IFASE2=1,2,3,4, o 5, y IFASE=2.

b) Problemas lineales multiobjetivo con intervalos en los pesos:

$$\max\{\lambda^t(Cx + a), x \in S\}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_i \in (l_i, u_i)$, $0 \leq l_i \leq u_i \leq 1, \forall i = 1, \dots, n$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Utilizando reducciones del cono de criterios, se generan subconjuntos del conjunto de puntos extremos eficientes. Se hace especificando los límites superiores e inferiores de los intervalos para los pesos, y con IFASE0=1 o 2, IFASE2=1,2,3,4, o 5, y IFASE3=2.

c) Problemas ponderados:

$$\max\{\lambda^t(Cx + a), x \in S\}$$

con λ fijo.

Se resuelve dando intervalos sobre los pesos de forma que $l_i = u_i, i = 1, \dots, n$, con IFASE0=1, IFASE2=1,2,3,4 o 5, y IFASE3=0. Si se quieren todos los puntos extremos óptimos, IFASE3=1.

d) Problemas lineales uniobjetivo:

$$\max\{cx, x \in S\}$$

Se resuelve haciendo NOBJS=1, IFASE0=0, IFASE2=1,2,3,4 o 5, y IFASE3=0. Si se quieren obtener todos los puntos extremos y aristas no acotadas óptimas, IFASE3=2.

MODE = 2: Modo generador de problemas aleatorios.

En MODE = 2 los problemas no se mandan al ADBASE desde un IFILE. Se generan aleatoriamente en el ADBASE y se resuelven. Sólo pueden generarse aleatoriamente problemas con restricciones menor o igual. Este modo es útil para realizar experimentos computacionales.

ADBASE trabaja de acuerdo con las cuatro fases siguientes:

FASE 0: Utilización del cono de criterios original (cono convexo generado por las filas de C) o contracción a un subconjunto suyo.

FASE I: Obtención de un punto extremo inicial de la región factible. Si no existe ninguno, el problema acaba con el mensaje SISTEM OF CONSTRAINTS IS INCONSISTENT.

FASE II: Obtención de una base eficiente inicial. Si no encuentra ninguna y el número de objetivos es 1, el problema acaba con el mensaje PROBLEM HAS UNBOUNDED OBJECTIVE FUNCTION VALUE. Si no puede encontrar una base eficiente y el número de objetivos es mayor que 1, el problema termina con el mensaje UNABLE TO FIND AN EFFICIENT EXTREME POINT.

FASE III: Después de hallar una base eficiente inicial, pivota a partir de ella para obtener todos los demás extremos eficientes.

3. Ficheros de entrada y salida.

3.1. Información del QFILE(.qfi):

Cada ejecución del ADBASE requiere un QFILE. En este fichero se fijan las opciones y características que son comunes a diversas ejecuciones del programa. Un ejemplo de QFILE es el siguiente:

```

***_****1*****-----****3****4***** ADBASE MODE= 1 SECTION
  1. NUMB          1  (NUMBER OF PROBLEMS TO BE SOLVED)
-----
  2. MODE          1  (REGULAR OR RANDOM PROBLEM MODE) 1,2
-----
  3. IFASE2        2  (PHASE II OPTION) 1 TO 5
  4. IFASE3        2  (PHASE III OPTION) 0,1,2
  5. IZFMT         3  (EXPONENTIAL/FIXED FORMAT IN ZFILE) 0 TO 6
  6. IWEAK         0  (EFFICIENT OR WEAKLY-EFFICIENT) 0,1
  7. MLISTB       3000 (MAXIMUM NUMBER OF EFFICIENT BASES) <3000
  8. FV           3.0  (RE-INVERSION TIMES M3 FACTOR) >2

```

```

-----
  9. IPRINT(1)      0 (OBVIOUS ERRORS) 0,1
 10. IPRINT(2)      1 (PROBLEM COEFFICIENTS) 0,1
 11. IPRINT(3)      4 (NOTHING/BASES/EXTR PTS) 0/1,2,3/4,5,6
 12. IPRINT(4)      1 (EFFICIENCY TOTALS) 0,1
 13. IPRINT(5)      0 (INDIVIDUAL PROBLEM DATA) 0,1
 14. IPRINT(6)      0 (CUMULATIVE DATA) 0,1
 15. IPRINT(7)      0 (CODE LISTS) 0,1
 16. IPRINT(8)      0 (ZFILE) 0,1
 17. IPRINT(9)      0 (REDUCED COSTS AND TABLEAUS) 0,1,2
 18.  IV9L          1 (BEGINNING TABLEAU VARIABLE)
 19.  IV9U          100 (ENDING TABLEAU VARIABLE)
 20.  I9L           0 (TABLEAUS BEGIN AT THIS BASIS)
 21.  I9U           9999 (TABLEAUS END AT THIS BASIS)
 22. IPRINT(10)     0 (LFILE) 0,1
 23.  I10L          0 (LFILE BEGINS ON WAY TO THIS BASIS)
 24.  I10U          100 (LFILE ENDS AT THIS BASIS)
 25. IPRINT(11)     0 (PREMULTIPLICATION T-MATRIX) 0,1

```

3.2. Información del IFILE (.if):

El IFILE contiene los datos concretos del problema a resolver. Si se quiere resolver más de un problema en una sola ejecución puede hacerse agrupando todos los ficheros de datos en un único IFILE.

Un fichero de datos IFILE contiene 5 tipos de registros.

1. Título del problema: Es el primer registro de cada fichero de datos de un problema, donde se especifica un título literal para el problema. Debe estar presente aunque esté vacío. Se sitúa en las columnas 2-72.

2. Cabecera: Es el segundo registro de cada fichero de datos. Tiene ocho campos donde se especifican las siguientes cantidades:

NOMB: Número del problema (no puede ser mayor que 9999).

NOBJS: Número de objetivos.

N1: Número de variables estructurales.

IK: Número de restricciones \leq .

IE: Número de restricciones =.

IS: Número de restricciones \geq .

IFASE0: Tipo de cono de criterios. Cono original IFASE0=0. Cono con intervalos en los pesos IFASE0=1. Cono envolvente reducido IFASE0=2.

NGRAYS: Con IFASE0=1, NGRAYS especifica el límite superior de generadores del cono de criterios antes de tomar la opción IFASE0=2. Si IFASE0 tiene otro valor, el valor de NGRAYS es ignorado.

Los datos deben estar situados en las siguientes columnas:

NOMB	NOBJS	N1	IK	IE	IS	IFASE0	NGRAYS
1-8	9-16	17-24	25-32	33-40	41-48	49-56	57-64

3. Contadores: Cada fichero de datos tiene ocho contadores correspondientes al número de coeficientes no nulos de $A_k, b_k, A_e, b_e, A_s, b_s, C$, y constantes a . Deben incluirse los 8 contadores incluso si no van seguidos de coeficientes no nulos. Se especifican en las columnas 1-8.

4. Registros de coeficientes no nulos: Especifican los valores de los coeficientes no nulos de $A_k, b_k, A_e, b_e, A_s, b_s, C$, y a . Cada registro tiene cuatro particiones compuestas de 3 subcampos. En los dos primeros se especifican los índices de la fila y la columna del coeficiente correspondiente, en el tercer subcampo se especifica el valor no nulo del coeficiente. Para los coeficientes de b_k, b_e, b_s , y a , el segundo subcampo se deja blanco, pues es innecesaria su designación.

Los datos de este registro se sitúan en las siguientes columnas:

Fila	Columna	Coef.no nulo	Fila	Columna	Coef.no nulo
1-3	4-6	7-18	55-57	58-60	61-72

5. Registro de intervalos de los pesos: (opcional) Este registro se incluye si y sólo si IFASE0 es 1 o 2 en la cabecera. Se especifican las cotas l_i, u_i de los intervalos de los pesos, con el formato:

i	l_i	u_i
1-8	11-22	23-34

De esta forma, el fichero de datos de un problema (.ifi) se configura como sigue:

Registro de título.
 Registro cabecera.
 Contador para A_k .
 } Registro de coeficientes (si existen) para A_k .
 Contador para b_k .
 } Registro de coeficientes (si existen) para b_k .
 Contador para A_e .
 } Registro de coeficientes (si existen) para A_e .
 Contador para b_e .
 } Registro de coeficientes (si existen) para b_e .
 Contador para A_s .
 } Registro de coeficientes (si existen) para A_s .
 Contador para b_s .
 } Registro de coeficientes (si existen) para b_s .
 Contador para C .
 } Registro de coeficientes (si existen) para C .
 Contador para a .
 } Registro de coeficientes (si existen) para a .
 Registro de intervalos de pesos (Si existen).

Ejemplo 5.1 *Consideremos el siguiente problema de maximización vectorial:*

$$\begin{aligned} \max \quad & \{x + y + z, 4x + 2y + z, -2x - y + z\} \\ \text{s.a.} \quad & 2x + 5y + z \leq 1600 \\ & 2x + 2y + 3z \leq 1200 \\ & x, y, z \geq 0 \end{aligned}$$

El fichero IFILE para este problema lo hemos denominado mul.ifi, y se muestra a continuación. Obsérvese que el problema no tiene restricciones de igualdad ni de mayor o igual, ni constantes a , por lo que aparece 0 en los contadores correspondientes.

PROBLEMA MULTIOBJETIVO

```

      1      3      3      2      0      0      0      40
      6
    1 1 2      1 2 5      1 3 1      2 1 2
    2 2 2      2 3 3
      2
    1      1600      2      1200
      0
      0
      0
      0
      9
    1 1 1      1 2 1      1 3 1      2 1 4
    2 2 2      2 3 1      3 1 -2      3 2 -1
    3 3 1
      0

```

Con el comando AJ MUL SMUL se ejecuta ADBASE generando el fichero smul.sfi y opcionalmente smul.lfi y smul.zfi.

3.3. Información del SFILE:(.sfi)

En este fichero ADBASE escribe los puntos extremos eficientes y las aristas no acotadas eficientes. Tiene la opción de escribir también los costes reducidos y las tablas correspondientes.

Ejemplo 5.2 Para el problema anterior, un fichero de salida smul.sfi es:

```
**1*****2*****3*****4*****5*****6*****7**
```

```

1. NUMB..... 1
2. MODE..... 1
3. IFASE2..... 2
4. IFASE3..... 2
5. IZFMT..... 3
6. IWEAK..... 0
7. MLISTB..... 3000

```

8. FV.....	3.000
9. IPRINT(1).....	0
10. IPRINT(2).....	1
11. IPRINT(3).....	4
12. IPRINT(4).....	1
13. IPRINT(5).....	0
14. IPRINT(6).....	0
15. IPRINT(7).....	0
16. IPRINT(8).....	0
17. IPRINT(9).....	0
18. IV9L.....	1
19. IV9U.....	100
20. I9L.....	0
21. I9U.....	9999
22. IPRINT(10)....	0
23. I10L.....	0
24. I10U.....	100
25. IPRINT(11)....	0

1***2*****3*****4*****5*****6*****7**

PROBLEM NO. 1

PROBLEMA MULTI OBJETIVO

NOBJS...	3
N1.....	3
IK.....	2
IE.....	0
IS.....	0
IFASEO..	0
NGRAYS..	40
A(1, 1) =	2.000000
A(1, 2) =	5.000000
A(1, 3) =	1.000000

$A(2, 1) = 2.000000$
 $A(2, 2) = 2.000000$
 $A(2, 3) = 3.000000$

$B(1) = 1600.000000$
 $B(2) = 1200.000000$

$C(1, 1) = 1.000000$
 $C(1, 2) = 1.000000$
 $C(1, 3) = 1.000000$
 $C(2, 1) = 4.000000$
 $C(2, 2) = 2.000000$
 $C(2, 3) = 1.000000$
 $C(3, 1) = -2.000000$
 $C(3, 2) = -1.000000$
 $C(3, 3) = 1.000000$

EXTREME POINT	CRITERION VALUES	NONZERO STRUCTURAL BASIC VARIABLE VALUES
1	$Z(1) = 600.000000$ $Z(2) = 2400.000000$ $Z(3) = -1200.000000$	$X(1) = 600.000000$
2	$Z(1) = 600.000000$ $Z(2) = 2133.333333$ $Z(3) = -1066.666667$	$X(1) = 466.666667$ $X(2) = 133.333333$
3	$Z(1) = 400.000000$ $Z(2) = 400.000000$ $Z(3) = 400.000000$	$X(3) = 400.000000$
4	$Z(1) = 492.307692$ $Z(2) = 769.230769$ $Z(3) = -61.538462$	$X(2) = 276.923077$ $X(3) = 215.384615$

```

NUMBER OF EFFICIENT BASES VISITED      =    4
NUMBER OF EFFICIENT EXTREME POINTS     =    4
NUMBER OF UNBOUNDED EFFICIENT EDGES    =    0

```

```
**1*****2*****3*****4*****5*****6*****7**
```

Por tanto el problema tiene cuatro soluciones eficientes extremas que son:

$(600, 0, 0)$, $(1400/3, 400/3, 0)$, $(0, 0, 400)$, $(0, 3600/13, 2800/13)$

y los valores que toman los objetivos en estos puntos vienen dados en el vector z .

Con las opciones $IPRINT(3)=3$ y $IPRINT(9) = 1$ en el QFILE del problema aparecen en el fichero de salida SFILE, además de las soluciones eficientes extremas, los costes reducidos correspondientes. Esta información es útil para realizar análisis de sensibilidad. A continuación se muestra un fichero SFILE para este problema con los costes reducidos, en el que se ha eliminado la impresión de los coeficientes del problema con la opción $IPRINT(2) = 0$.

```
**1*****2*****3*****4*****5*****6*****7**
```

PROBLEM NO. 1

PROBLEMA MULTIOBJETIVO

BASIS	CRITERION VALUES	ALL
		BASIC VARIABLE VALUES
1	Z(1) = 600.000000	X(1) = 600.000000
	Z(2) = 2400.000000	X(4) = 400.000000
	Z(3) = -1200.000000	

C(J)-Z(J) REDUCED COSTS

	2	3	5
	.00000	-.50000	-.50000
	-2.00000	-5.00000	-2.00000
	1.00000	4.00000	1.00000

2	Z(1) =	600.000000	X(1) =	466.666667
	Z(2) =	2133.333333	X(2) =	133.333333
	Z(3) =	-1066.666667		

C(J)-Z(J) REDUCED COSTS

	3	4	5
	-.50000	.00000	-.50000
	-6.33333	.66667	-2.66667
	4.66667	-.33333	1.33333

3	Z(1) =	400.000000	X(3) =	400.000000
	Z(2) =	400.000000	X(4) =	1200.000000
	Z(3) =	400.000000		

C(J)-Z(J) REDUCED COSTS

	1	2	5
	.33333	.33333	-.33333
	3.33333	1.33333	-.33333
	-2.66667	-1.66667	-.33333

4	Z(1) =	492.307692	X(2) =	276.923077
	Z(2) =	769.230769	X(3) =	215.384615

$$Z(3) = -61.538462$$

C(J)-Z(J) REDUCED COSTS		
1	4	5
.23077	-.07692	-.30769
2.92308	-.30769	-.23077
-2.15385	.38462	-.46154

NUMBER OF EFFICIENT BASES VISITED = 4
 NUMBER OF EFFICIENT EXTREME POINTS = 4
 NUMBER OF UNBOUNDED EFFICIENT EDGES = 0

1***2*****3*****4*****5*****6*****7**

3.4. Información del LFILE:(.lfi)

La creación de este fichero de salida es opcional. Si elegimos la opción $IPRINT(10) = 1$ en el QFILE correspondiente, se crea un LFILE que contiene la información sobre los pivoteos realizados para obtener los extremos y las aristas eficientes.

3.5. Información del ZFILE:(.zfi)

La creación de este fichero también es opcional. Con $IPRINT(8) = 1$, ADBASE escribe en un ZFILE los vectores de criterios de cada uno de los puntos extremos eficientes calculados.

3.6. Información del PFILE:(.pfi)

En $MODE = 2$ y con $IPRINT(12)=1$, ADBASE escribe los problemas generados aleatoriamente en un PFILE en formato de entrada ADBASE.

Ejemplo 5.3 Usaremos el programa ADBASE para obtener las estrategias de seguridad Pareto-óptimas del juego vectorial del ejemplo 2.1, cuya matriz de

pagos es

$$\begin{pmatrix} (1,3) & (2,1) \\ (3,1) & (1,2) \\ (1,1) & (3,3) \end{pmatrix}$$

El conjunto de las estrategias de seguridad Pareto-óptimas para el jugador I, es el conjunto de soluciones eficientes del problema lineal bicriterio

$$\begin{aligned} \max \quad & v_1, v_2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + 3x_2 + x_3 \geq v_1 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq v_1 \\ & 3x_1 + x_2 + x_3 \geq v_2 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq v_2 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ & v_1, v_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

El fichero de datos LFILE para este problema es

JUEGO VECTORIAL

6	2	5	0	1	4	0	40
0							
0							
3							
1	1	1	1	2	1	1	3
1	1						
16							
1	1	1	1	2	3	1	3
2	1	2	2	2	1	3	3
3	1	3	3	2	1	3	3
4	1	1	4	2	2	4	3
0							
2							
1	4	1	2	5	1		

Un fichero SFILE para este problema es

1***2*****3*****4*****5*****6*****7**

PROBLEM NO. 6

JUEGO VECTORIAL

EXTREME POINT	CRITERION VALUES	NONZERO STRUCTURAL BASIC VARIABLE VALUES
1	Z(1) = 2.000000 Z(2) = 1.000000	X(2) = .500000 X(3) = .500000 X(4) = 2.000000 X(5) = 1.000000
2	Z(1) = 1.800000 Z(2) = 1.800000	X(1) = .400000 X(2) = .400000 X(3) = .200000 X(4) = 1.800000 X(5) = 1.800000
3	Z(1) = 1.000000 Z(2) = 2.000000	X(1) = .500000 X(3) = .500000 X(4) = 1.000000 X(5) = 2.000000
NUMBER OF EFFICIENT BASES VISITED	=	3
NUMBER OF EFFICIENT EXTREME POINTS	=	3
NUMBER OF UNBOUNDED EFFICIENT EDGES	=	0

1***2*****3*****4*****5*****6*****7**

Este fichero proporciona las estrategias de seguridad Pareto-óptimas extremas del juego bicriterio, así como los niveles de seguridad correspondientes:

$$(v_1, x_1) = (2, 1; 0, 1/2, 1/2),$$

$$(v_2, x_2) = (9/5, 9/5; 2/5, 2/5, 1/5),$$

$$(v_3, x_3) = (1, 2; 1/2, 0, 1/2).$$

CAPÍTULO VI

Situaciones de comunicación

E. Algaba N. Jiménez Jiménez J. J. López

1. Juegos cooperativos

La teoría de juegos fue fundada por John von Neumann en 1928 [92]. Esta aproximación a los problemas de cooperación y competición se redescubrió, en 1944, cuando von Neumann escribe un tratado con el economista Oskar Morgenstern, titulado *Theory of games and economic behavior* [93]. En este libro, definieron el concepto de juego cooperativo de n personas e introdujeron las ideas relacionadas con la solución del juego. Todo el trabajo que se ha llevado a cabo desde entonces sobre los juegos de n personas ha estado fuertemente influenciado por esta obra. En ella, un juego cooperativo es una situación derivada de una actividad en la que los elementos o actores que intervienen (personas, instituciones, empresas, etc.) persiguen alcanzar un determinado objetivo (ganar una votación, buscar mayores beneficios empresariales, mejorar una gestión, etc.) mediante la colaboración entre ellos.

A diferencia de los denominados juegos competitivos o no cooperativos —caracterizados por las estrategias que pueden emplear cada uno de los jugadores y una función de pagos asociada a cada jugador, la cual depende de las diferentes estrategias que se empleen—, en un juego cooperativo no es nece-

sario analizar las estrategias de los jugadores; es suficiente conocer los pagos asociados a los resultados del juego.

Si la utilidad de los jugadores es transferible, un *juego cooperativo* es un par (N, v) , donde N es un conjunto finito y v es una función $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$, que verifica $v(\emptyset) = 0$. Los elementos de $N = \{1, 2, \dots, n\}$ se denominan *jugadores*, los subconjuntos $S \in 2^N$ *coaliciones* y $v(S)$ es el *valor* de la coalición S .

El valor de una coalición es, por establecer algún paralelismo, análogo al valor del juego que se determina en los juegos bipersonales, y es igual a la cantidad mínima que puede obtener la coalición si todos sus miembros se asocian y juegan en equipo. La función v se denomina habitualmente *función característica del juego*, siendo identificado —siempre que no haya lugar a confusión— el juego (N, v) mediante su función característica.

A continuación, vamos a presentar algunos ejemplos.

Ejemplo 6.1 *Una finca rústica está valorada por su actual propietario en 50 millones de ptas. Un empresario le ofrece acondicionarla para su utilización como polígono industrial, con lo que su valor de mercado alcanzaría los 100 millones de pesetas. Otro empresario le ofrece urbanizar la finca para su posible subdivisión en parcelas destinadas a viviendas unifamiliares. Con esta urbanización, el valor de la finca sería de unos 125 millones.*

El juego se representa con $N = \{1, 2, 3\}$ y $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$, siendo

$$\begin{aligned} v(\{1\}) &= 50, & v(\{2\}) &= v(\{3\}) = v(\{2, 3\}) = 0, \\ v(\{1, 2\}) &= 100, & v(\{1, 3\}) &= 125, & v(\{1, 2, 3\}) &= 125, \end{aligned}$$

donde el jugador 1 representa al propietario actual y los jugadores 2 y 3 a los diferentes empresarios. Lógicamente, habría que predecir que coalición se formará y como se repartirá el beneficio entre los socios.

Ejemplo 6.2 *En un órgano colegiado de una institución, constituido por 40 personas con derecho a voz y voto, las decisiones se adoptan mediante el voto favorable de la mayoría absoluta de sus miembros. En esta situación, el juego se representa con $N = \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq 40\}$ y $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{si } |S| \geq 21 \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

para cualquier $S \subseteq N$. En este caso, los valores 0 y 1 reflejan si una coalición de jugadores $S \subseteq N$ es perdedora o ganadora en una votación.

Ejemplo 6.3 Tres ciudades de una misma comarca necesitan un sistema de tratamiento de aguas residuales. Cada ayuntamiento ha hecho un estudio de los costes, individuales y colectivos con los otros ayuntamientos para ver la posibilidad de ahorro. El estudio se representa en la siguiente tabla, donde 1, 2 y 3, simbolizan a cada una de las ciudades:

Coalición	Coste	Beneficio
{1}	150	0
{2}	200	0
{3}	550	0
{1, 2}	350	0
{1, 3}	610	90
{2, 3}	650	100
{1, 2, 3}	780	120

Tabla 6.1

Esta situación se modela mediante un juego cooperativo (N, v) , donde $N = \{1, 2, 3\}$ y la función característica v del juego es:

$$\begin{aligned} v(\{1\}) &= v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0, \\ v(\{1, 2\}) &= 0, \quad v(\{1, 3\}) = 90, \quad v(\{2, 3\}) = 100, \\ v(\{1, 2, 3\}) &= 120. \end{aligned}$$

En general, denotamos por \mathcal{G}^N al conjunto de todos los juegos cooperativos de utilidad transferible definidos sobre el conjunto finito N . En el conjunto \mathcal{G}^N , se introducen las operaciones

$$+ : \mathcal{G}^N \times \mathcal{G}^N \rightarrow \mathcal{G}^N, \quad (v, w) \mapsto v + w$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times ,^N \Leftrightarrow ,^N, \quad (\alpha, v) \Leftrightarrow \alpha \cdot v$$

definidas por

$$(v + w)(S) = v(S) + w(S), \quad (\alpha \cdot v)(S) = \alpha \cdot v(S),$$

para cualquier $S \subseteq N$. Con respecto a estas operaciones, la terna $(,^N, +, \cdot)$ constituye un espacio vectorial $(2^n \Leftrightarrow 1)$ -dimensional.

Una base está formada por el conjunto $\{u_T \in ,^N : T \subseteq N, T \neq \emptyset\}$, siendo

$$u_T(S) = \begin{cases} 1, & \text{si } T \subseteq S \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Estos juegos $u_T \in ,^N$, se denominan *juegos de unanimidad*. También, los juegos $\delta_T \in ,^N$, con $T \subseteq N, T \neq \emptyset$, denominados *de identidad* y definidos de la siguiente forma:

$$\delta_T(S) = \begin{cases} 1, & \text{si } T = S \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

forman una base del espacio $,^N$.

Normalmente, las propiedades especiales que tenga la función característica correspondiente a un juego cooperativo son las que cualifican y dan nombre al juego. Así, cuando $v(S) \leq v(T)$, para todo $S \subseteq T \subseteq N$, entonces se dice que el juego (N, v) es *monótono*. Puede observarse que la función característica del primer ejemplo cumple esta condición.

El juego (N, v) , es llamado *cero-normalizado*, *cero-monótono*, *aditivo* o *superaditivo*, respectivamente, si su función característica v , verifica la correspondiente condición:

- (a) $v(\{i\}) = 0$, para todo elemento $i \in N$.
- (b) $v(S) + \sum_{i \in T \setminus S} v(\{i\}) \leq v(T)$, para toda $S \subseteq T \subseteq N$.
- (c) $v(S \cup T) = v(S) + v(T)$, para toda $S, T \subseteq N$ con $S \cap T = \emptyset$.
- (d) $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$, para toda $S, T \subseteq N$ con $S \cap T = \emptyset$.

Una clase especial de juegos superaditivos son los llamados juegos convexos. Estos fueron introducidos por Shapley [84] y se utilizan para modelar diversas situaciones que estudian las ciencias económicas. Un juego (N, v) se dice que es *convexo* si la función característica es *supermodular*, esto es,

$$v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T), \text{ para cualquier par } \{S, T\} \subseteq 2^N.$$

Cuando analizamos un juego cooperativo, nuestra primera idea consiste en buscar la mejor estrategia para cada jugador y encontrar el pago que podría esperarse que obtuvieran un grupo de jugadores racionales. Sin embargo, pronto nos podemos dar cuenta que es un objetivo demasiado ambicioso ya que hasta los juegos más elementales son demasiado complejos para determinar un solo pago. Esto no debe suponer decepción alguna sino entender que cualquier teoría, que intente ser un reflejo de la realidad, debe admitir que siempre hay una gran variedad de resultados cuando se juega en la vida real y que dependen de variables como la capacidad de negociación, la habilidad de los jugadores, las presiones de tipo social, etc.

Cuando hay que decidir qué resultados del juego son plausibles, una de las ideas básicas en la teoría de juegos cooperativos de utilidad transferible es que, dado un juego (N, v) y suponiendo que se llega a algún tipo de entendimiento entre los jugadores, se reparte la ganancia total $v(N)$ de la gran coalición N entre ellos. Esto parece lógico en la situación contemplada en el ejemplo 6.3, donde es obvio que todas las ciudades desean cooperar entre ellas y obtener un ahorro de costes de 120 millones. La cuestión central sería cómo repercute ese beneficio/ahorro en cada ciudad o, dicho de otra forma, cuál es el coste para cada una de ellas.

Por tanto, es obligado repartir el beneficio/ahorro total entre todos y, de ahí, si representamos por x_1, x_2, x_3 lo que corresponde a cada ciudad, tenemos

$$\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 120\},$$

con lo que una solución razonable sería, en principio, cualquier vector de \mathbb{R}^3 que verifique esta condición. También, debería ser deseable imponerles —a los

vectores de \mathbb{R}^3 que verifican la condición anterior— las restricciones siguientes:

$$\begin{aligned}x_1 &\geq 0, & x_2 &\geq 0, & x_3 &\geq 0, \\x_1 + x_2 &\geq 0, & x_1 + x_3 &\geq 90, & x_2 + x_3 &\geq 100.\end{aligned}$$

Este modelo implica que cada ciudad y cada coalición tiene asegurado un reparto final de beneficios que no les perjudica en ningún caso. De ahí, que el conjunto de pagos o *repartos razonables* estaría formado por

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_+^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 120, x_1 + x_2 \geq 0, x_1 + x_3 \geq 90, x_2 + x_3 \geq 100\},$$

que constituye lo que se denominará el *core* del juego.

De lo anterior se deduce que, a la hora de buscar resultados posibles, debe hacerse una distribución de la cantidad $v(N)$ entre los jugadores. Esta puede ser representada por una función x con valores reales sobre el conjunto de jugadores N y debe satisfacer el *principio de eficiencia*:

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N),$$

donde x_i representa el pago al jugador i con la función x . La función x sobre N se identifica con un vector de n números reales $x = (x_1, \dots, x_n)$. Los vectores $x \in \mathbb{R}^n$ que satisfacen el principio de eficiencia son llamados *preimputaciones* para el juego (N, v) . De acuerdo con esta idea, una *solución* sobre una colección no vacía de juegos es una aplicación Ψ que asocia a cada juego cooperativo (N, v) de dicha colección un subconjunto $\Psi(v)$ del conjunto de preimputaciones.

Además, la mayoría de los conceptos de solución propuestos para juegos cooperativos requieren que los vectores de pago eficientes cumplan el llamado principio de *individualidad racional*, el cual exige que el pago a cada jugador i con el vector x sea al menos la cantidad que el jugador puede obtener por sí mismo en el juego. Es decir,

$$x_i \geq v(\{i\}), \quad \text{para todo } i \in N.$$

Las preimputaciones que verifican el principio de individualidad racional se llaman *imputaciones* para el juego (N, v) . Por último, es necesario plantearse

que los pagos sean *coalicionalmente razonables*; esto es, que los miembros de cada coalición deben recibir un pago total que sea mayor o igual que el valor de dicha coalición. Si le exigimos a las imputaciones que verifiquen el principio de racionalidad para todas las coaliciones no vacías, obtenemos el siguiente concepto de solución de un juego, denominado *core*.

$$C(N, v) = \{x \in \mathbb{R}^n : x(N) = v(N), x(S) \geq v(S), \text{ para toda } S \subseteq N\},$$

donde $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$, y $x(\emptyset) = 0$.

Esta idea del core de un juego fue introducida por Gillies [40] y pueden darse ejemplos de juegos en los que el core es vacío. No obstante, hay clases de juegos cooperativos de utilidad transferible para los que el core es no vacío. A este respecto, merece destacarse el conjunto de juegos convexos.

En el estudio de las condiciones que determinan si el juego tiene o no un core vacío, Shapley [83] introdujo el concepto de *coaliciones equilibradas* y de *juego equilibrado*.

Una colección $\{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ de subconjuntos de N , distintos y no vacíos, es *equilibrada sobre N* si existen números positivos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, denominados *pesos*, tales que, para todo $i \in N$, verifican

$$\sum_{\{j: i \in S_j\}} \alpha_j = 1.$$

Sea (N, v) un juego. Si para cualquier colección equilibrada sobre N , se verifica que

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j v(S_j) \leq v(N),$$

entonces se dice que el juego (N, v) es *equilibrado*. Bondareva [16] y Shapley [83] demuestran que la clase de juegos equilibrados coincide con la clase de juegos de core no vacío.

Cercano al concepto de juego equilibrado está la noción de equilibrio total. Un juego (N, v) se dice *totalmente equilibrado* si los subjuegos inducidos (S, v_S) son equilibrados para toda $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$. Aquí se entiende por subjuego inducido (S, v_S) aquel cuya función característica viene determinada por

$$v_S(T) = v(T), \text{ para toda } T \subseteq S.$$

Ahora bien, teniendo en cuenta, por un lado, que el core de un juego cooperativo (N, v) puede ser vacío y que, por otro lado, no siempre se ajusta a un concepto idóneo de solución, es por lo que se han introducido otros conceptos de solución que serán tratados a lo largo de los diferentes capítulos de esta segunda parte.

El core de un juego nos limita las soluciones de éste a un conjunto de resultados razonables. Teniendo en cuenta los razonamientos anteriores, intentar predecir el resultado de un juego cooperativo parece un asunto bastante arriesgado ya que es lógico pensar que la personalidad de los jugadores, su entorno, sus facilidades de comunicación, etc., tengan efectos sobre la conclusión final. No obstante, Lloyd S. Shapley (1953) [80], propone una fórmula para calcular el valor para cada jugador $i \in N$, en un juego v . Dicho valor, viene dado por la siguiente expresión combinatoria,

$$\Phi_i(v) = \sum_{\{S \subseteq N: i \in S\}} \frac{(s \Leftrightarrow 1)!(n \Leftrightarrow s)!}{n!} [v(S) \Leftrightarrow v(S \setminus \{i\})],$$

donde $n = |N|$ y $s = |S|$. Esta fórmula expresa el llamado *valor de Shapley* para un jugador i y podemos observar que está determinado, de forma exclusiva y a priori, por la función característica del juego, haciendo abstracción de cualquiera de los factores anteriormente mencionados.

El valor de Shapley es, entre otros, un concepto de solución que puede interpretarse como la contribución marginal *esperada* del jugador i , o como un promedio de las contribuciones marginales $v(S) \Leftrightarrow v(S \setminus \{i\})$ de dicho jugador a todas las coaliciones no vacías $S \in 2^N$ cuando se supone que la coalición a la que pertenece el jugador i es equiprobable que sea de igual tamaño s ($1 \leq s \leq n$) y que todas las coaliciones de tamaño s tienen la misma probabilidad. Es decir, una suma ponderada de las contribuciones marginales del jugador i , sabiendo que la probabilidad p_s^i de que el jugador i pertenezca a una coalición de tamaño s , viene dada por

$$p_s^i \binom{n \Leftrightarrow 1}{s \Leftrightarrow 1} = \frac{1}{n} \text{ lo que implica } p_s^i = \frac{1}{n} \binom{n \Leftrightarrow 1}{s \Leftrightarrow 1}^{-1} = \frac{(s \Leftrightarrow 1)!(n \Leftrightarrow s)!}{n!}.$$

De otra forma, el valor de Shapley puede deducirse también de un modelo de regateo. Supongamos que, al principio, un jugador se une con otro para

formar una coalición de dos personas, y posteriormente a estas dos personas se les agrega un tercer jugador, y así sucesivamente hasta formar una coalición de n personas. Admitamos que, en cada etapa, el nuevo jugador obtiene una ganancia marginal constituida por la diferencia entre el valor de la coalición que ya estaba formada y el de la nueva a la que ya pertenece el jugador añadido. Si se supone que la coalición de n jugadores tiene tantas probabilidades de formarse tanto de una forma como de otra, la ganancia esperada de un jugador es precisamente el valor de Shapley.

Si se partiera de la apreciación subjetiva de que para el jugador i es equiprobable pertenecer a cualquier coalición, surge otro concepto de solución: el *valor de Banzhaf-Coleman* [5] [25], definido por

$$\Psi_i(v) = \sum_{\{S \subseteq N: i \in S\}} \frac{1}{2^{n-1}} [v(S) \leftrightarrow v(S \setminus \{i\})].$$

La idea de Shapley es, en principio, sólomente una de las que podrían servir para tomar una decisión sobre cuál debe ser la solución de un juego cooperativo de n personas. Sin embargo, Shapley justifica su elección indicando requisitos que debería cumplir cualquier solución razonable y demostrando que, el valor de Shapley, es el único que satisface estos axiomas. El valor de Shapley satisface los siguientes axiomas:

Axioma de linealidad: Si (N, v) y (N, w) son dos juegos cooperativos cualesquiera de utilidad transferible, entonces

$$\Phi_i(\alpha v + \beta w) = \alpha \Phi_i(v) + \beta \Phi_i(w), \text{ para todo } i \in N, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Axioma del jugador pasivo: Si $i \in N$ es un jugador pasivo en el juego v , es decir, $v(S) = v(S \setminus \{i\}) + v(\{i\})$ para todo $S \subseteq N$, entonces

$$\Phi_i(v) = v(\{i\}).$$

Axioma de eficiencia:

$$\sum_{i \in N} \Phi_i(v) = v(N).$$

Axioma de simetría: Para cada permutación π del conjunto N ,

$$\Phi_{\pi i}(\pi v) = \Phi_i(v),$$

donde πv es el juego definido por $\pi v(\pi S) = v(S)$, para toda $S \subseteq N$.

Teorema 6.1 *Sea (N, v) un juego de utilidad transferible. El valor de Shapley del juego (N, v) es el único vector de pagos que satisface los axiomas de linealidad, jugador pasivo, eficiencia y simetría.*

2. El modelo de Myerson y su generalización

En principio, en el estudio de los juegos cooperativos, se supone que cualquiera de los jugadores quiere cooperar con los demás o, en otro caso, el juego se desarrollará en forma no cooperativa. Es decir, será posible formar cualquier coalición entre jugadores y, por tanto, existirá una cooperación universal entre todos ellos.

El interés por el estudio de juegos de n personas en los que se incorporan restricciones a las coaliciones entre los jugadores, se inicia con el modelo de Aumann y Maschler [3] sobre *juegos con estructuras de coalición*. En esta aproximación a una cooperación más restringida o limitada, los jugadores son distribuidos formando una partición del conjunto de los mismos, $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_k\}$, denominada *estructura de coalición*. Así, dada una estructura de coalición, las relaciones entre jugadores pueden realizarse, únicamente, dentro de las coaliciones que constituyen la estructura.

Las estructuras de coalición no pueden emplearse en aquellas situaciones en las que la relación entre los jugadores no sea transitiva. Por ello, Myerson, en su trabajo *Graphs and cooperation in games* [62], propone un nuevo punto de vista para modelar la conducta cooperativa entre los jugadores.

Dado un juego (N, v) , Myerson le asocia un grafo de cooperación $G = (N, E)$ cuyo conjunto de vértices N es el formado por todos los jugadores y cuyo conjunto de aristas no ordenadas E viene dado por los acuerdos bilaterales entre los jugadores. El grafo indica las posibilidades de comunicación entre parejas de jugadores y lleva implícito que no todas las coaliciones de jugadores son factibles.

Así, serán consideradas *coaliciones factibles* aquellas coaliciones de jugadores que son conexas en el grafo; es decir, una coalición de jugadores va a ser

factible si dados dos elementos cualesquiera de la misma, existe un camino en el grafo que los relaciona y que está completamente incluido en dicha coalición.

Ejemplo 6.4 Sea $G = (N, E)$ el grafo de cooperación establecido entre los jugadores del conjunto $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, donde el conjunto de aristas es $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 6\}, \{4, 5\}\}$.

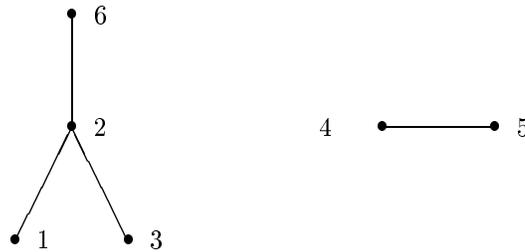


Figura 6.1. Diagrama de G

El conjunto de coaliciones factibles, que denotaremos por \mathcal{F} , es

$$\mathcal{F} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 6\}, \{4, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 6\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 2, 3, 6\}\}.$$

Es decir, dado un grafo de cooperación $G = (N, E)$, el conjunto de coaliciones factibles es $\mathcal{F} = \{S \subseteq N : (S, E(S)) \text{ es un subgrafo conexo de } G\}$.

Teniendo en cuenta lo anterior, la cooperación parcial entre jugadores viene determinada por una terna (N, v, G) que, habitualmente, es denominada *situación de comunicación* y, para Myerson, la existencia de coaliciones factibles y de otras que no lo son, obliga a que la función característica del juego (N, v) tenga que ser modificada, dando lugar al *juego restringido* por el grafo de cooperación G , que denotamos (N, v^G) . Con el propósito de definir la función característica asociada al juego (N, v^G) , introducimos las siguientes nociones.

Sea (N, v, G) una situación de comunicación y sea \mathcal{F} el sistema de coaliciones factibles. A cada $S \subseteq N$, le asociamos la familia de sus subconjuntos

factibles $\{H \subseteq S : H \in \mathcal{F}\}$. Este conjunto es no vacío para toda coalición no vacía de jugadores, ya que cualquier elemento de S constituye una coalición factible unitaria. Entonces, se dice que T es una *coalición factible maximal* de S si se verifica que $T \in \mathcal{F}$ y no existe $T' \in \mathcal{F}$ tal que $T \subset T' \subseteq S$. Al conjunto formado por todas las coaliciones factibles maximales de S lo denotaremos por $C_{\mathcal{F}}(S)$. De hecho, son las componentes conexas del subgrafo inducido $(S, E(S))$ y se denominan *componentes* de S en \mathcal{F} .

En el ejemplo 6.4, si $S = \{1, 2, 3, 4\} \subseteq N$, resulta que

$$\begin{aligned} \{H \subseteq S : H \in \mathcal{F}\} &= \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}, \\ C_{\mathcal{F}}(S) &= \{\{4\}, \{1, 2, 3\}\}. \end{aligned}$$

Definición 6.1 Sea la terna (N, v, G) , donde G es un grafo y (N, v) es un juego. El juego restringido por el grafo de cooperación G , es el par (N, v^G) con

$$v^G : 2^N \leftrightarrow \mathbb{R}, \quad v^G(S) = \sum_i v(S_i), \quad v^G(\emptyset) = 0,$$

donde la suma está extendida a todas las coaliciones $S_i \in C_{\mathcal{F}}(S)$.

Si $S \subseteq N$ es una coalición factible, entonces $v^G(S) = v(S)$. Por tanto, si G es el grafo completo de cooperación K_n , entonces $(N, v^G) = (N, v)$.

Ejemplo 6.5 Sea la situación de comunicación (N, v, G) , con (N, v) tal que, para cualquier coalición S no vacía de N , $v(S) = |S|^2 \Leftrightarrow 1$ y G es el grafo de cooperación de la figura 6.2.

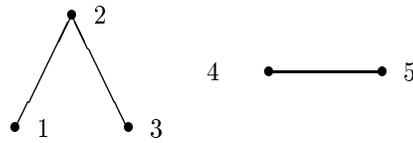


Figura 6.2.

La función característica asociada al juego restringido por el grafo de cooperación es $v^G : 2^N \leftrightarrow \mathbb{R}$, y sus valores se dan en la tabla 6.2.

$v^G(\{i\}) = 0$, para todo $i \in N$.
$v^G(\{1, 2\}) = v^G(\{2, 3\}) = v^G(\{4, 5\}) = 3$, $v^G(\{i, j\}) = 0$, en otro caso.
$v^G(\{1, 2, 3\}) = 8$, $v^G(\{1, 3, 4\}) = v^G(\{1, 3, 5\}) = 0$, $v^G(\{i, j, k\}) = 3$, en otro caso.
$v^G(\{1, 2, 3, 4\}) = v^G(\{1, 2, 3, 5\}) = 8$, $v^G(\{1, 2, 4, 5\}) = v^G(\{2, 3, 4, 5\}) = 6$, $v^G(\{1, 3, 4, 5\}) = 3$.
$v^G(N) = 11$.

Tabla 6.2

Este modelo, que se utiliza en problemas de asignación de costes/beneficios y redes de comunicación, ha suscitado una línea de investigación —que continua en la actualidad— con trabajos de Owen [72], Nouweland y Borm [68], Carreras [21], Nouweland, Borm y Tijs [69], entre otros. Estos trabajos sobre las situaciones de comunicación de Myerson han seguido, básicamente, tres direcciones de estudio:

1. Propiedades del juego (N, v) que se transmiten o son heredadas por el juego restringido (N, v^G) .
2. Conceptos de solución de conjunto para el juego restringido (N, v^G) y existencia de relaciones entre éstos y los del juego (N, v) .
3. Conceptos de solución de punto o reglas de asignación de pagos para las situaciones de comunicación.

Obviamente, presentar todos los resultados obtenidos en los campos de estudio indicados para las situaciones de comunicación es una tarea que escapa de los objetivos que se plantean en este libro. No obstante, indicamos brevemente algunos de los resultados más interesantes y nos detenemos algo en las reglas de asignación de pagos para las situaciones de comunicación.

Teorema 6.2 *Sea (N, v, G) una situación de comunicación. Entonces:*

- 1) *Si el juego (N, v) es superaditivo, el juego restringido (N, v^G) es también superaditivo.*
- 2) *Si G es un grafo ciclo-completo y (N, v) es un juego convexo, el juego (N, v^G) es convexo.*

En este resultado, cuya demostración puede consultarse en los trabajos de Owen, Nouweland y Borm citados anteriormente, se pone de manifiesto que la superaditividad de la función característica del juego (N, v) es heredada siempre por el correspondiente juego restringido. Sin embargo, la propiedad de convexidad no se transmite de forma automática del juego (N, v) al juego (N, v^G) a menos que la situación de comunicación tenga la siguiente característica peculiar: si el grafo G tiene un ciclo $(x_1, x_2, \dots, x_p, x_1)$, entonces el subgrafo generado por los elementos $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ es un subgrafo completo de G . Esta propiedad de un grafo es la que define y caracteriza a los llamados grafos ciclo-completos o grafos bloque.

Teorema 6.3 *Sea (N, v, G) una situación de comunicación en la que el grafo G es conexo (N es una coalición factible). Entonces:*

- 1) *Si (N, v) es un juego equilibrado, el juego restringido (N, v^G) , es equilibrado.*
- 2) *Si (N, v) es un juego totalmente equilibrado, el juego restringido (N, v^G) es totalmente equilibrado.*

Teniendo en cuenta que Bondareva y Shapley demuestran que la clase de los juegos equilibrados es precisamente la clase de los juegos que tienen core no vacío, este teorema nos permite obtener como conclusión que si el core del juego (N, v) es no vacío, entonces el juego restringido por el grafo de cooperación tiene core no vacío. Además, esta conclusión puede extenderse a cualquier subjuego inducido (S, v_S) .

En la primera sección de este capítulo, pusimos de manifiesto que uno de los conceptos más clásicos en la búsqueda de soluciones para un juego cooperativo era el valor de Shapley. Es entonces lógico que, cuando se abordan ideas

de cooperación parcial modeladas a través de situaciones de comunicación, se piense en utilizar el valor de Shapley asociado a la función característica del juego restringido por el grafo de cooperación. A su definición, como regla de asignación, y a sus propiedades nos referimos a continuación.

Sea (N, v) un juego cooperativo y sea SC^N el conjunto de todas las situaciones de comunicación definidas sobre el conjunto N ; es decir:

$$SC^N = \{(N, v, G) : (N, v) \text{ es un juego y } G = (N, E) \text{ es un grafo}\}.$$

Denominamos *regla de asignación para el juego v* a una función

$$Y : SC^N \Leftrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (N, v, G) \Leftrightarrow (Y_1(N, v, G), \dots, Y_n(N, v, G)),$$

que verifica la siguiente condición

$$\forall (N, v, G) \in SC^N, \text{ y } \forall S \in C_{\mathcal{F}}(N), \text{ se tiene que } \sum_{k \in S} Y_k(N, v, G) = v(S).$$

Es decir, una regla de asignación para el juego v es una función que a cada situación de comunicación (N, v, G) le asigna un vector n -dimensional que es *eficiente* para las coaliciones factibles maximales de la coalición N .

La regla de asignación, $Y : SC^N \Leftrightarrow \mathbb{R}^n$, es *justa* si para cualquier $(N, v, G) \in SC^N$ y cualquier arista $\{i, j\} \in E$,

$$Y_j(N, v, G) \Leftrightarrow Y_j(N, v, G \setminus \{i, j\}) = Y_i(N, v, G) \Leftrightarrow Y_i(N, v, G \setminus \{i, j\}).$$

La regla de asignación es *estable* si para cualquier $(N, v, G) \in SC^N$ y cualquier arista $\{i, j\} \in E$, se verifica

$$Y_j(N, v, G) \geq Y_j(N, v, G \setminus \{i, j\}), \text{ y } Y_i(N, v, G) \geq Y_i(N, v, G \setminus \{i, j\}).$$

Definición 6.2 *El valor de Myerson de la situación de comunicación (N, v, G) , denotado por $\mu(N, v, G) \in \mathbb{R}^n$, es el valor de Shapley del juego restringido por el grafo, es decir, $\mu(N, v, G) = \Phi(N, v^G)$.*

Los siguientes teoremas ponen de manifiesto que el valor de Myerson es la única regla de asignación justa que puede definirse en el conjunto de las

situaciones de comunicación asociadas a un juego (N, v) , y que, en el caso de que el juego (N, v) sea superaditivo, es una regla de asignación estable. Las pruebas originales de Myerson pueden consultarse en su trabajo *Graphs and cooperation in games* (1977) [62].

Teorema 6.4 *Dado un juego (N, v) , existe una única regla de asignación justa $Y : SC^N \Leftrightarrow \mathbb{R}^n$, dada por $Y(N, v, G) = \mu(N, v, G)$.*

Teorema 6.5 *Si el juego (N, v) es superaditivo y cero-normalizado, entonces el valor de Myerson $\mu(N, v, G)$, es una regla de asignación justa y estable.*

Aunque el modelo de Myerson supone el primer paso en el estudio de la cooperación parcial, éste no cubre todas las situaciones posibles que pueden plantearse. Por ejemplo, es inmediato observar que si no fuera posible formar coaliciones factibles de dos jugadores, entonces sería imposible modelar las relaciones entre los jugadores mediante un grafo de cooperación. Por ello, Myerson en su trabajo *Conference structures and fair allocation rules* (1980) [64], propone otros modelos que generalizan las situaciones de comunicación, basándose en la existencia de un conjunto de coaliciones factibles que no tiene porqué derivarse de las coaliciones conexas en un grafo de cooperación entre los jugadores. Dos de estos modelos van a exponerse a lo largo de este capítulo y del siguiente. El primero de ellos —que expondremos a continuación— es la generalización, que consideramos más natural, de las situaciones de comunicación (véase López [58] y Algaba [1]). El segundo de los modelos constituirá el centro de atención del capítulo octavo y responderá a un concepto mucho más general de cooperación parcial.

Para desarrollar la generalización de los conceptos de Myerson, podemos pensar, en principio, en una terna (N, v, \mathcal{F}) en la que (N, v) es un juego cooperativo de utilidad transferible y (N, \mathcal{F}) es un sistema de coaliciones factibles. Es decir, $\mathcal{F} \subseteq 2^N$ y los elementos de \mathcal{F} son las coaliciones posibles impuestas por la cooperación parcial. Además, sería lógico no exigirle a \mathcal{F} que tenga una estructura predeterminada salvo una mínima condición razonable; ésta consiste en admitir que las coaliciones formadas por un solo jugador sean factibles.

Definición 6.3 *Un sistema de coaliciones factibles es un par (N, \mathcal{F}) , $\mathcal{F} \subseteq 2^N$, que satisface el siguiente axioma:*

(P1) $\emptyset \in \mathcal{F}$, y las coaliciones $\{i\} \in \mathcal{F}$, para todo $i \in N$.

Es evidente que, en un sistema de coaliciones factibles, podríamos definir el concepto de coaliciones factibles maximales de cualquier coalición de la misma forma que se hizo para las situaciones de comunicación.

Definición 6.4 *Sea (N, \mathcal{F}) un sistema de coaliciones factibles y sea $S \subseteq N$. Se dice que T es una \mathcal{F} -componente de S si $T \in \mathcal{F}$ y no existe $T' \in \mathcal{F}$ tal que $T \subset T' \subseteq S$.*

Es decir, las \mathcal{F} -componentes de $S \subseteq N$ son las coaliciones factibles maximales contenidas en S .

Proposición 6.1 *Sea (N, \mathcal{F}) un sistema de coaliciones factibles. Si $S \subseteq N$, entonces sus \mathcal{F} -componentes, denotadas por $\{T_k\}_k \subseteq 2^S$, verifican $S = \bigcup_k T_k$.*

Demostración: Para todo k , $T_k \subseteq S$, su unión está necesariamente incluida en la coalición S . Además, al ser $\{a\} \in \mathcal{F}$, para todo $a \in S$, entonces o bien $\{a\} = T_k$ o bien $\{a\} \subset T_k$ para un cierto k . Ello asegura que cualquier elemento de S pertenece a una \mathcal{F} -componente de la coalición S . \square

El primer inconveniente para proseguir la generalización del modelo de Myerson es que, en un sistema de coaliciones factibles, las \mathcal{F} -componentes de una coalición $S \subseteq N$ no tienen porqué formar una partición de S .

Ejemplo 6.6 *Considérese el conjunto $N = \{1, 2, 3, 4\}$ y la familia*

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}.$$

El par (N, \mathcal{F}) es un sistema de coaliciones factibles. Las coaliciones factibles maximales contenidas en $S = \{1, 3, 4\} \subseteq N$ son $\{1, 3\}$ y $\{3, 4\}$, y no forman una partición de S .

Ante este problema, podemos seguir dos líneas de investigación. La primera consiste en aceptar que las \mathcal{F} -componentes no forman una partición y, en ese caso, definir la función característica del juego restringido por la cooperación parcial de una forma diferente a como lo hace Myerson. La segunda vía de trabajo consiste en exigirle más condiciones al sistema de coaliciones factibles para que se pueda generalizar el modelo de Myerson.

Ambas líneas de investigación están abiertas y tienen antecedentes en la literatura de la cooperación parcial. Ahora bien, en este texto, vamos a apuntar cómo sería la definición de juego restringido si aceptamos la primera idea, y desarrollaremos algo más profundamente la segunda línea de trabajo ya que es la que tiene una relación más estrecha con la generalización de las situaciones de comunicación de Myerson.

Así, si aceptamos la definición de coaliciones factibles dada anteriormente, ya hemos observado que las coaliciones factibles maximales de cualquier coalición no forman, en general, una partición de la misma. Sin embargo, podemos considerar, para cada coalición $S \subseteq N$, el conjunto constituido por todas las posibles particiones de S en coaliciones factibles no vacías. Dicho conjunto, que denotaremos por $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(S)$, es no vacío, siempre que $S \neq \emptyset$, debido a que cualquier coalición $S \subseteq N$ puede expresarse como unión disjunta de coaliciones factibles al ser $S = \bigcup_{a \in S} \{a\}$, aunque, esta partición de S en coaliciones factibles no tiene por qué ser única tal como puede observarse en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.7 Sean el conjunto $N = \{1, 2, 3, 4\}$ y la familia

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}.$$

Si $S = \{1, 3, 4\} \subseteq N$, entonces las particiones de S en coaliciones factibles son

$$\Pi_1 = \{\{1\}, \{3\}, \{4\}\}, \quad \Pi_2 = \{\{1, 3\}, \{4\}\}, \quad \Pi_3 = \{\{1\}, \{3, 4\}\}.$$

A continuación, introducimos el concepto de juego con cooperación restringida por un sistema de coaliciones factibles.

Definición 6.5 Sean (N, \mathcal{F}) un sistema de coaliciones factibles y (N, v) un juego. Se denomina juego con cooperación restringida por \mathcal{F} , al par $(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}})$, donde

$$\tilde{v}^{\mathcal{F}} : 2^N \leftrightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{v}^{\mathcal{F}}(S) = \max \left\{ \sum_{i \in I} v(T_i) : \{T_i\}_{i \in I} \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(S) \right\}.$$

Ejemplo 6.8 Sea la terna (N, v, \mathcal{F}) , donde (N, \mathcal{F}) es un sistema de coaliciones factibles dado por $N = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$, y sea v la función característica tal que, para cada $S \subseteq N$,

$$v(S) = \begin{cases} 2, & \text{si } |S| \geq 2 \\ 1/2, & \text{si } |S| = 1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En esta situación, el juego con cooperación restringida por el sistema de coaliciones factibles, $(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}})$, queda determinado en la siguiente tabla:

S	$\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(S)$	$\tilde{v}^{\mathcal{F}}(S)$
\emptyset	$\{\emptyset\}$	0
$\{1\}$	$\{\{1\}\}$	1/2
$\{2\}$	$\{\{2\}\}$	1/2
$\{3\}$	$\{\{3\}\}$	1/2
$\{1, 2\}$	$\{\{1\}, \{2\}\}$	$1/2 + 1/2 = 1$
$\{1, 3\}$	$\{\{1\}, \{3\}\}, \{\{1, 3\}\}$	$\max\{1/2 + 1/2, 2\} = 2$
$\{2, 3\}$	$\{\{2\}, \{3\}\}$	$1/2 + 1/2 = 1$
$\{1, 2, 3\}$	$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}, \{\{2\}, \{1, 3\}\}$	$\max\{3/2, 1/2 + 2\} = 5/2$

Tabla 6.3

El concepto de juego de cooperación restringido por un sistema de coaliciones factibles es una extensión, a cualquier coalición de jugadores, del utilizado por Faigle [33] en su análisis de juegos con cooperación restringida y por Bergantiños, Carreras y García Jurado [6], cuando consideran grafos de comunicación para reflejar situaciones de incompatibilidad entre algunos jugadores.

De manera especial, los trabajos de Faigle nos proporcionan un estudio exhaustivo y profundo de las implicaciones y características de este modelo de cooperación parcial.

Si nos planteamos exigirle unas condiciones al sistema de coaliciones factibles para intentar generalizar las ideas de Myerson, parece adecuado que se imponga la siguiente definición.

Definición 6.6 *Un sistema de partición es un par (N, \mathcal{F}) , con $\mathcal{F} \subseteq 2^N$ que satisface los siguientes axiomas:*

(P1) $\emptyset \in \mathcal{F}$, $\{i\} \in \mathcal{F}$ para todo $i \in N$.

(P2) Para toda $S \subseteq N$, las \mathcal{F} -componentes de S forman una partición de S , denotada por Π_S .

Es evidente que un sistema de partición es un sistema de coaliciones factibles, por lo que los elementos de \mathcal{F} seguirán llamándose de igual forma. Además, si (N, \mathcal{F}) es un sistema de partición, entonces el par (S, \mathcal{F}') definido por $\mathcal{F}' = \{T \in \mathcal{F} : T \subseteq S\}$ también lo es.

Ejemplo 6.9 *Las colecciones de subconjuntos de $N = \{1, \dots, n\}$, dadas por $\mathcal{F} = 2^N$, y $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \dots, \{n\}\}$, son los sistemas de partición maximal y minimal, respectivamente.*

Ejemplo 6.10 *Recordemos que una situación de comunicación es una terna (N, v, G) , donde (N, v) es un juego y $G = (N, E)$ es un grafo. Es fácil ver que el par (N, \mathcal{F}) , con*

$$\mathcal{F} = \{S \subseteq N : (S, E(S)) \text{ es un subgrafo conexo de } G\},$$

es un sistema de partición.

Habría que resaltar que lo recíproco no siempre es cierto. En efecto, consideremos el sistema de conjuntos dado por

$$N = \{1, 2, 3, 4\} \quad \text{y} \quad \mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, N\}.$$

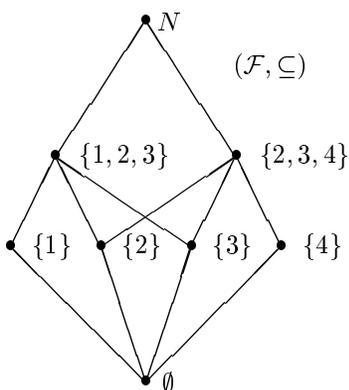


Figura 6.3. Un sistema de partición

Puede comprobarse que (N, \mathcal{F}) constituye un sistema de partición que no coincide con la familia de subgrafos conexos de ningún grafo. Esto es debido a que cualquier grafo G se define mediante pares $\{i, j\}$, lo cual implica que deben existir forzosamente coaliciones factibles formadas por dos elementos y, en este caso, no pertenecen a la familia de coaliciones \mathcal{F} considerada.

Definición 6.7 Sean (N, \mathcal{F}) un sistema de partición y (N, v) un juego. Se denomina juego restringido por el sistema de partición \mathcal{F} , al par $(N, v^{\mathcal{F}})$ con

$$v^{\mathcal{F}} : 2^N \rightleftarrows \mathbb{R}, \quad v^{\mathcal{F}}(S) = \sum_{T \in \Pi_S} v(T).$$

Las definiciones dadas anteriormente constituyen una generalización de los conceptos de situación de comunicación y de juego restringido por un grafo de comunicación dados por Myerson y Owen.

La definición de sistema de partición se ha introducido para generalizar el modelo de situación de comunicación de Myerson. Ello ha obligado a imponer, a los sistemas de coaliciones factibles, la exigencia de que cada coalición de jugadores pueda descomponerse en una partición de sus coaliciones factibles maximales. Ahora bien, a pesar de ser una exigencia, en principio, estrictamente matemática, podemos observar que tiene una interpretación bastante realista en un ámbito de cooperación parcial.

Es decir, vamos a ver que un sistema de partición viene caracterizado por el siguiente método de colaboración entre los jugadores: siempre que haya dos coaliciones factibles con intersección no vacía, los jugadores pertenecientes a la intersección van a actuar como intermediarios entre ambas coaliciones y logran que la unión de ambas constituya una nueva coalición factible más amplia.

En la siguiente proposición, estableceremos que esta propiedad de intermediación caracteriza a los sistemas de partición.

Proposición 6.2 *Un sistema de coaliciones factibles (N, \mathcal{F}) , $\mathcal{F} \subseteq 2^N$, es un sistema de partición si y sólo si cualesquiera $A, B \in \mathcal{F}$, con $A \cap B \neq \emptyset$, satisfacen que $A \cup B \in \mathcal{F}$.*

Demostración: En primer lugar, probaremos la condición suficiente. Teniendo en cuenta la proposición 6.1, basta probar que cualquier par de \mathcal{F} -componentes de $A \subseteq N$ son disjuntas. Considérense T_i, T_j ($i \neq j$) coaliciones factibles maximales de A . Si $T_i \cap T_j \neq \emptyset$ entonces, por hipótesis, $T_i \cup T_j \in \mathcal{F}$ siendo $T_i \cup T_j \subseteq A$. Ello contradice que T_i y T_j son coaliciones factibles maximales de A .

Para obtener el recíproco, sean $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$ con $A \cap B \neq \emptyset$. Si $A \cup B \notin \mathcal{F}$, resulta que $A \cup B = \bigcup_k T_k$, siendo $\{T_k\}$ la partición de $A \cup B$ en conjuntos maximales. Como A y B son coaliciones factibles contenidas en $A \cup B$, se tiene que $A \subseteq T_j$, $B \subseteq T_p$ para algún j y p . Si $j \neq p$, entonces $T_j \cap T_p = \emptyset$ y, de ahí, $A \cap B = \emptyset$ en contra de la hipótesis; luego $A \cup B \in \mathcal{F}$. Si $j = p$ queda $A \subseteq T_j \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq T_j \subseteq A \cup B$, lo que implica que $A \cup B = T_j \in \mathcal{F}$. \square

Ejemplo 6.11 *Sea $N = \{1, 2, 3, 4\}$ y considérense los siguientes sistemas de coaliciones factibles (N, \mathcal{F}_1) , (N, \mathcal{F}_2) , donde*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}, N\}, \\ \mathcal{F}_2 &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, N\}. \end{aligned}$$

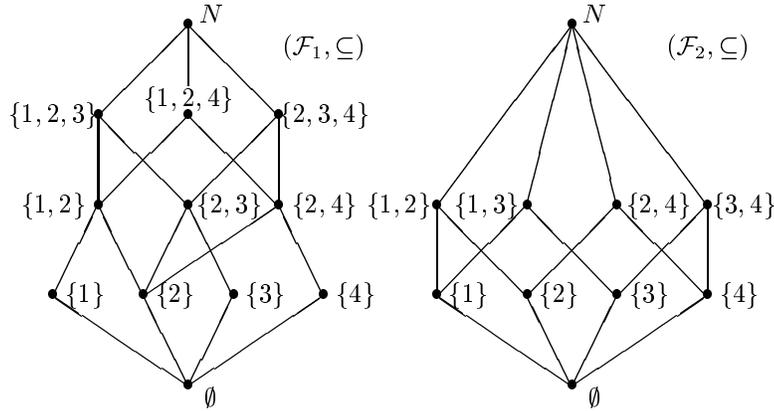


Figura 6.4.

A través de la representación de $(\mathcal{F}_1, \subseteq)$ y $(\mathcal{F}_2, \subseteq)$ puede examinarse la caracterización, dada por la proposición 6.2, de los sistemas de partición: (N, \mathcal{F}_1) constituye un sistema de partición ya que, como puede comprobarse en su diagrama de Hasse, siempre que dos coaliciones factibles tienen intersección no vacía, su unión es una coalición factible. El par (N, \mathcal{F}_2) es un sistema de coaliciones factibles que no verifica la proposición 6.2, luego no es un sistema de partición.

En lo que sigue de este capítulo, desarrollaremos el estudio de algunas propiedades de la función característica asociada al juego restringido por un sistema de partición, intentando determinar qué propiedades del juego (N, v) se transmiten al juego $(N, v^{\mathcal{F}})$, daremos algunas relaciones entre los cores de ambos juegos y, por último, apuntaremos cual será la extensión lógica del valor de Myerson a los sistemas de partición (véase Algaba, Bilbao y López [2]). De forma inmediata, podemos establecer que:

- (a) Si $S \in \mathcal{F}$, entonces $v^{\mathcal{F}}(S) = v(S)$.
- (b) Si v es cero-normalizado, también $v^{\mathcal{F}}$ lo es.
- (c) $(v^{\mathcal{F}})^{\mathcal{F}} = v^{\mathcal{F}}$.

En el siguiente ejemplo se muestra que el carácter monótono del juego v no se transmite, en general, al juego restringido por un sistema de partición a menos que se añadan algunas hipótesis adicionales.

Ejemplo 6.12 Sea $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y el juego (N, v) , cuya función característica viene dada por $v(\emptyset) = 0$ y, para cada $S \subseteq N$, por

$$v(S) = \begin{cases} 1/2, & \text{si } |S| = 1 \\ 1, & \text{si } |S| = 2 \\ 3/2, & \text{si } |S| > 2. \end{cases}$$

El juego v es monótono. Considérese la situación de comunicación (N, v, G) , con $G = (N, E)$, donde $E = \{\{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}\}$.

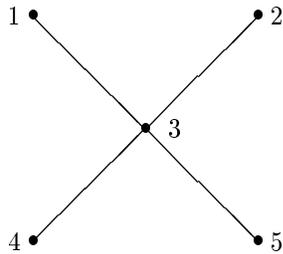


Figura 6.5. Estrella de cinco jugadores

En esta situación, el sistema de coaliciones factibles

$$\mathcal{F} = \{S \subseteq N : (S, E(S)) \text{ es un subgrafo conexo de } G\},$$

es un sistema de partición y el juego restringido por \mathcal{F} no es monótono. En efecto, si $A = \{1, 2, 4, 5\}$ y $B = N$, entonces $v^{\mathcal{F}}(A) = 2$ y $v^{\mathcal{F}}(B) = 3/2$.

La monotonía no se transmite del juego (N, v) al juego restringido, pero sí se hereda el hecho de que la función característica del juego (N, v) sea superaditiva. Ello es una consecuencia de los resultados que se presentan a continuación.

Lema 6.1 *Sea (N, \mathcal{F}) un sistema de partición. Sean $A, B \subseteq N$ dos coaliciones disjuntas. Si $\{A_i\}_i$ y $\{B_j\}_j$ son sus respectivas \mathcal{F} -componentes, entonces las coaliciones factibles maximales de $A \cup B$ son de la forma $\Pi_{A \cup B} = \{C_t\}_t$, siendo*

$$C_t = \left(\bigcup_i A_i \right) \cup \left(\bigcup_j B_j \right), \text{ para algunos } i, j,$$

o bien $C_t = A_k$ o $C_t = B_p$, para ciertos k y p .

Demostración: Sea $A_i \in \Pi_A$ (el razonamiento es similar con $B_j \in \Pi_B$), es decir, cada $A_i \in \mathcal{F}$ es una coalición factible maximal en A . Si, además, es maximal en $A \cup B$ tenemos que $A_i \in \Pi_{A \cup B}$. Si no lo es, entonces al conjunto A_i se le pueden añadir ciertos elementos (N es finito) que lo convierten en una coalición factible maximal de la unión. Dichos elementos no pueden ser exclusivamente pertenecientes a A ya que A_i es maximal en A . Supongamos que $A_i \cup \{a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_h\} \in \mathcal{F}$ donde

$$\{a_1, \dots, a_r\} \subseteq A \setminus A_i, \text{ y } \{b_1, \dots, b_h\} \subseteq B \text{ (} A \cap B = \emptyset \text{)}.$$

Si $a_1 \in A \setminus A_i$, puede admitirse, sin perder generalidad, que $a_1 \in A_1$, con $A_i \neq A_1$ lo que implica, teniendo en cuenta la característica fundamental de un sistema de partición (proposición 6.2):

$$\begin{cases} A_i \cup \{a_1, a_2, \dots, a_r, b_1, \dots, b_h\} \in \mathcal{F} \\ a_1 \in A_1, \quad A_1 \in \mathcal{F} \\ (A_i \cup \{a_1, a_2, \dots, a_r, b_1, \dots, b_h\}) \cap A_1 \neq \emptyset \end{cases}$$

y, de aquí, $A_i \cup A_1 \cup \{a_2, \dots, a_r, b_1, \dots, b_h\} \in \mathcal{F}$.

Razonando, de igual forma, con los demás elementos se llega a que la coalición factible maximal de la unión estaría formada por

$$C_t = \left(\bigcup_i A_i \right) \cup \left(\bigcup_j B_j \right), \text{ para algunos } i, j.$$

□

Teorema 6.6 *Sea (N, \mathcal{F}) un sistema de partición y (N, v) un juego superadiitivo. Si $(N, v^{\mathcal{F}})$ es el juego restringido por \mathcal{F} , entonces*

(a) Para cualquier coalición S , tenemos $v^{\mathcal{F}}(S) \leq v(S)$.

(b) El juego $(N, v^{\mathcal{F}})$ es superaditivo.

Demostración: (a) Como v es superaditiva y las \mathcal{F} -componentes forman una colección finita de conjuntos disjuntos entre sí, entonces

$$v^{\mathcal{F}}(S) = \sum_k v(S_k) \leq v\left(\bigcup_k S_k\right) = v(S).$$

(b) Sean $A \subseteq N$, $B \subseteq N$, con $A \cap B = \emptyset$. Como (N, \mathcal{F}) es un sistema de partición, cualquier conjunto puede expresarse como unión disjunta de sus \mathcal{F} -componentes, es decir,

$$A = \bigcup_k A_k, \quad B = \bigcup_p B_p.$$

Todas las \mathcal{F} -componentes de A y B son coaliciones factibles contenidas en $A \cup B$. Teniendo en cuenta el lema 6.1, o bien algunas coaliciones factibles maximales de la unión coinciden con algunas de las de los conjuntos A , B , o bien son de la forma

$$C_t = \left(\bigcup_i A_i\right) \cup \left(\bigcup_j B_j\right), \quad \text{para algunos } i, j.$$

Reagrupando las \mathcal{F} -componentes de A y B , y aplicando el carácter superaditivo del juego (N, v) , se tiene

$$v^{\mathcal{F}}(A) + v^{\mathcal{F}}(B) = \sum_k v(A_k) + \sum_p v(B_p) \leq \sum_t v(C_t) = v^{\mathcal{F}}(A \cup B).$$

□

La monotonía del juego (N, v) no es transmitida al juego $v^{\mathcal{F}}$ a menos que el juego (N, v) sea también superaditivo y cero-normalizado. No obstante, puede darse una condición local: supongamos que $A \subseteq B$ y $\Pi_A = \{A_1, \dots, A_k\}$, $\Pi_B = \{B_1, \dots, B_p\}$ son las correspondientes particiones de A y B en sus \mathcal{F} -componentes, entonces para cada $A_i \in \Pi_A$ existe una única $B_j \in \Pi_B$ tal que $A_i \subseteq B_j$. Si esta relación establecida entre las coaliciones factibles

maximales de A y B es una-a-una (es decir, dos componentes diferentes de A están contenidas en diferentes componentes de B) y v es un juego monótono y cero-normalizado, entonces $v^{\mathcal{F}}(A) \leq v^{\mathcal{F}}(B)$ ya que

$$v^{\mathcal{F}}(A) = \sum_{i=1}^k v(A_i) \leq \sum_{\{B_j: A_i \subseteq B_j\}} v(B_j) \leq \sum_{j=1}^p v(B_j) = v^{\mathcal{F}}(B).$$

En el resultado anterior se ha mostrado que si (N, v) es superaditivo, entonces el juego restringido por un sistema de partición $(N, v^{\mathcal{F}})$ también lo es. Sin embargo, la convexidad no es transmitida, de forma general, al correspondiente juego restringido. Ello, puede observarse en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.13 Sea (N, v, G) una situación de comunicación donde el conjunto de jugadores es $N = \{1, 2, 3, 4\}$, y la función característica es $v(S) = |S| \Leftrightarrow 1$, para toda coalición no vacía $S \subseteq N$. Si G es el ciclo representado en la figura 6.6, y (N, \mathcal{F}) es el sistema de partición de los subgrafos conexos, entonces es fácil ver que (N, v) es un juego convexo, mientras que $(N, v^{\mathcal{F}})$ no lo es ya que, para $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{2, 3, 4\}$ se verifica la desigualdad contraria

$$v^{\mathcal{F}}(A \cup B) + v^{\mathcal{F}}(A \cap B) = 3 + 0 < v^{\mathcal{F}}(A) + v^{\mathcal{F}}(B) = 2 + 2.$$

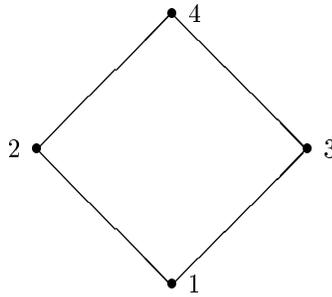


Figura 6.6. Ciclo de cuatro jugadores

Esta situación, referente a la convexidad del juego restringido, nos obliga a estudiar las condiciones estructurales que tendrían que cumplirse para que se transmitiera la convexidad. Los conceptos que a continuación se presentan tienen ese objetivo.

Grötschel, Lovász y Schrijver [44, capítulo 10] introducen el siguiente concepto. Una colección $\mathcal{C} \subseteq 2^N$ es una *familia intersectante* si

$$\forall S, T \in \mathcal{C} \text{ con } S \cap T \neq \emptyset \implies S \cap T \in \mathcal{C}, S \cup T \in \mathcal{C}.$$

La proposición 6.2 implica que, si una familia intersectante \mathcal{C} es *atómica*, es decir, $\{i\} \in \mathcal{C}$, para todo $i \in N$ y $\emptyset \in \mathcal{C}$, entonces (N, \mathcal{C}) es un sistema de partición.

Teorema 6.7 *Sea (N, \mathcal{C}) una familia intersectante, atómica y tal que $\emptyset \in \mathcal{C}$. Si (N, v) es un juego convexo, entonces el juego restringido por el sistema de partición $(N, v^{\mathcal{C}})$ también lo es.*

Demostración: Véase Algaba, Bilbao y López [2]. □

Este teorema nos indica que, los sistemas de partición para los que la intersección de dos cualesquiera de sus elementos pertenece al sistema, transmiten la convexidad de un determinado juego (N, v) al correspondiente juego restringido por un sistema de partición con esta propiedad. Dicho de otra forma: para esta clase especial de sistemas de coaliciones factibles no hace falta ninguna hipótesis adicional a la convexidad de la función característica del juego (N, v) para que ésta se transmita al juego con cooperación restringida.

El teorema 6.7 puede extenderse a una terna (N, v, \mathcal{C}) en la que (N, \mathcal{C}) es una unión finita disjunta de familias intersectantes, atómicas, que contienen al conjunto vacío y v es un juego en N . Es decir,

$$\begin{aligned} N &= N_1 \cup \dots \cup N_t \text{ con } N_i \cap N_j = \emptyset, i \neq j, \\ \mathcal{C} &= \mathcal{C}_1 \cup \dots \cup \mathcal{C}_t \text{ con } \mathcal{C}_i \subseteq 2^{N_i}, \emptyset \in \mathcal{C}_i, i = 1, \dots, t, \end{aligned}$$

y cada \mathcal{C}_i es una familia intersectante atómica. En los siguientes párrafos, se denotará $(N, \mathcal{C}) = \bigcup_i (N_i, \mathcal{C}_i)$.

Con estas premisas, \mathcal{C} es una familia intersectante, atómica que contiene al conjunto vacío. En efecto, $\emptyset \in \mathcal{C}$ ya que $\emptyset \in \mathcal{C}_i$, para $i = 1, \dots, t$. Además, si $a \in N$ entonces $a \in N_i$, para un único i , lo que implica que $\{a\} \in \mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{C}$ debido a que \mathcal{C}_i , $i = 1, \dots, t$, es una familia atómica. Por último, si $A, B \in \mathcal{C}$

con $A \cap B \neq \emptyset$ entonces $A, B \in \mathcal{C}_i$, para un único i ; de ahí $A \cap B \in \mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{C}$ y $A \cup B \in \mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{C}$.

El razonamiento anterior indica que (N, \mathcal{C}) es un sistema de partición y, por tanto, tiene sentido considerar el correspondiente juego restringido por \mathcal{C} ,

$$v^{\mathcal{C}}(S) = \sum \{v(S_k) : S_k \in \Pi_S\}, \quad S \subseteq N,$$

siendo Π_S la partición de S en sus \mathcal{C} -componentes.

Además, podemos considerar la colección de subjuegos $\{(N_i, v_{N_i})_{i=1}^t\}$, donde $v_{N_i}(A) = v(A)$ con $A \subseteq N_i$ y, como (N_i, \mathcal{C}_i) es un sistema de partición, tiene razón de ser la terna $(N_i, v_{N_i}, \mathcal{C}_i)$ y el juego restringido por \mathcal{C}_i . De estas consideraciones y debido a que

$$S = S \cap N = S \cap \left(\bigcup_i N_i \right) = \bigcup_i (S \cap N_i),$$

y a la estructura de $(N, \mathcal{C}) = \bigcup_i (N_i, \mathcal{C}_i)$ resulta ser

$$v^{\mathcal{C}}(S) = \sum_i \left\{ \sum v(S_{ki}) : S_{ki} \in \Pi_{S \cap N_i} \right\} = \sum_i v_{N_i}^{\mathcal{C}_i}(S \cap N_i).$$

Proposición 6.3 *Sea $(N, \mathcal{C}) = \bigcup_i (N_i, \mathcal{C}_i)$ una unión finita disjunta de familias intersectantes atómicas que contienen al vacío. Si (N, v) es un juego convexo, entonces, el correspondiente juego restringido por \mathcal{C} satisface la misma propiedad.*

Demostración: Si (N, v) es convexo y $N = \bigcup_i N_i$, cada uno de los subjuegos de la colección $\{(N_i, v_{N_i})_{i=1}^t\}$ también lo es. Como \mathcal{C}_i , para cualquier i , es una familia intersectante atómica que contiene al conjunto vacío, resulta que el juego restringido que corresponde a cada terna $(N_i, v_{N_i}, \mathcal{C}_i)$ es convexo como consecuencia del teorema 6.7. Entonces, si $A, B \subseteq N$ resulta que $A \cap N_i \subseteq N_i$ y $B \cap N_i \subseteq N_i$. Aplicando la supermodularidad de la función $v_{N_i}^{\mathcal{C}_i}$ a las coaliciones $A \cap N_i$ y $B \cap N_i$, se tiene:

$$v_{N_i}^{\mathcal{C}_i}((A \cup B) \cap N_i) + v_{N_i}^{\mathcal{C}_i}((A \cap B) \cap N_i) \geq v_{N_i}^{\mathcal{C}_i}(A \cap N_i) + v_{N_i}^{\mathcal{C}_i}(B \cap N_i).$$

Al ser válido el razonamiento para cualquier i , se cumple

$$\begin{aligned} \sum_i v_{N_i}^{\mathcal{C}_i}((A \cup B) \cap N_i) + \sum_i v_{N_i}^{\mathcal{C}_i}((A \cap B) \cap N_i) &\geq \\ \sum_i v_{N_i}^{\mathcal{C}_i}(A \cap N_i) + \sum_i v_{N_i}^{\mathcal{C}_i}(B \cap N_i). \end{aligned}$$

Finalmente, se obtiene que

$$v^C(A \cup B) + v^C(A \cap B) \geq v^C(A) + v^C(B).$$

□

A continuación, siguiendo las ideas utilizadas por Nouweland [70], indicamos las condiciones que ha de cumplir un sistema de partición para que el core del juego restringido no sea vacío cuando no lo sea el core del juego (N, v) . También, exponemos un resultado que nos establece que el core del juego restringido está completamente determinado por las coaliciones factibles.

Proposición 6.4 Sean (N, \mathcal{F}) un sistema de partición y (N, v) un juego.

(a) Si $v(N) = v^{\mathcal{F}}(N)$, entonces $C(N, v) \subseteq C(N, v^{\mathcal{F}})$.

(b) Para toda $S \in \mathcal{F}$ se verifica que $C(S, v_S) \subseteq C(S, v_S^{\mathcal{F}})$.

Demostración: (a) Sea $x \in C(N, v)$. En primer lugar, se tiene que

$$v^{\mathcal{F}}(N) = v(N) = x(N).$$

Por otro lado, si $S \subseteq N$, con $S \neq \emptyset$, entonces

$$v^{\mathcal{F}}(S) = \sum_k v(S_k) \leq \sum_k \left(\sum_{i \in S_k} x_i \right) = \sum_{i \in S} x_i = x(S),$$

ya que las \mathcal{F} -componentes de S forman una partición de S .

(b) Si $S \in \mathcal{F}$, entonces $v(S) = v^{\mathcal{F}}(S)$ y, debido al apartado anterior y al concepto de subjuego, resulta inmediatamente que $C(S, v_S) \subseteq C(S, v_S^{\mathcal{F}})$. □

Debemos hacer notar que si el core $C(N, v)$ es no vacío, la igualdad $v^{\mathcal{F}}(N) = v(N)$ es condición necesaria y suficiente para que se verifique la inclusión entre los cores. Además, si $v^{\mathcal{F}}(N) \neq v(N)$ es inmediato que la intersección $C(N, v) \cap C(N, v^{\mathcal{F}})$ es vacía.

Teorema 6.8 Sean (N, \mathcal{F}) un sistema de partición y (N, v) un juego que verifica $v(N) = v^{\mathcal{F}}(N)$. Entonces:

(a) Si (N, v) es un juego equilibrado, también lo es $(N, v^{\mathcal{F}})$.

(b) Si (N, v) es totalmente equilibrado, también lo es $(N, v^{\mathcal{F}})$.

Demostración: (a) Es inmediato, teniendo en cuenta el resultado de Bondareva y Shapley y el apartado (a) de la proposición 6.4.

(b) Hay que probar que, para toda $S \subseteq N$, el juego $(S, v_S^{\mathcal{F}})$ es equilibrado. Si $S \in \mathcal{F}$, el par (S, v_S) es un juego equilibrado y, debido al apartado (b) de la proposición 6.4, $(S, v_S^{\mathcal{F}})$ lo es. Si $S \notin \mathcal{F}$, entonces $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k$ (\mathcal{F} -componentes de S) y, por hipótesis:

$$C(S_t, v_{S_t}) \neq \emptyset, \quad t = 1, \dots, k.$$

Para probar que $(S, v_S^{\mathcal{F}})$ es equilibrado, basta demostrar que su core no es vacío. En efecto, considérese

$$x^{S_1} \in C(S_1, v_{S_1}), \dots, x^{S_k} \in C(S_k, v_{S_k}).$$

Como cada elemento $i \in S$ pertenece a una única \mathcal{F} -componente de S , resulta que si $i \in S_p \subseteq S$, $S_p \in \Pi_S$, se puede asociar

$$i \leftrightarrow x_i^{S_p},$$

siendo $x_i^{S_p}$ la componente del jugador i en el vector $x^{S_p} \in C(S_p, v_{S_p})$. Con ello, se define $y \in \mathbb{R}^{|S|}$ tal que $y_i = x_i^{S_p}$. El vector así determinado pertenece al core del subjuego inducido $(S, v_S^{\mathcal{F}})$ ya que, en primer lugar:

$$\begin{aligned} y(S) &= \sum_{i \in S} y_i = \sum_{i \in S} x_i^{S_p} = \sum_{S_p \in \Pi_S} \left(\sum_{i \in S_p} x_i^{S_p} \right) \\ &= \sum_{S_p \in \Pi_S} x^{S_p}(S_p) = \sum_{S_p \in \Pi_S} v(S_p) = v^{\mathcal{F}}(S) = v_S^{\mathcal{F}}(S). \end{aligned}$$

En segundo lugar, si $T \subseteq S$, entonces

$$v_S^{\mathcal{F}}(T) = \sum_k v(T_k).$$

Como $T_k \subseteq S_j$, para un único j , y $x^{S_j} \in C(S_j, v_{S_j})$, se tiene que

$$v(T_k) = v_{S_j}(T_k) \leq x^{S_j}(T_k) = \sum_{i \in T_k} x_i^{S_j},$$

y resulta finalmente

$$v_S^{\mathcal{F}}(T) = \sum_k v(T_k) \leq \sum_k \left(\sum_{i \in T_k} x_i^{S_j} \right) = \sum_{i \in T} x_i^{S_j} = \sum_{i \in T} y_i = y(T).$$

□

Proposición 6.5 Sean (N, \mathcal{F}) un sistema de partición y (N, v) un juego. Si $v(N) = v^{\mathcal{F}}(N)$, entonces

$$C(N, v^{\mathcal{F}}) = \{x \in \mathbb{R}^n : x(N) = v(N), x(S) \geq v(S), \text{ para toda } S \in \mathcal{F}\}.$$

Demostración: Si $x \in C(N, v^{\mathcal{F}})$, entonces

$$x(N) = v^{\mathcal{F}}(N), \quad x(S) \geq v^{\mathcal{F}}(S), \quad \text{para toda } S \subseteq N,$$

por lo que

$$x(N) = v^{\mathcal{F}}(N) = v(N), \quad x(S) \geq v^{\mathcal{F}}(S) = v(S), \quad \text{para toda } S \in \mathcal{F}.$$

Por otra parte, sea $x \in \mathbb{R}^n$, con $x(N) = v(N)$, $x(S) \geq v(S)$, para toda $S \in \mathcal{F}$. Entonces, $x(N) = v(N) = v^{\mathcal{F}}(N)$ y, para toda $S \subseteq N$, se tiene

$$x(S) = \sum_{i \in S} x_i = \sum_k \left(\sum_{i \in S_k} x_i \right) = \sum_k x(S_k) \geq \sum_k v(S_k) = v^{\mathcal{F}}(S),$$

siendo $\{S_k\}$ la partición de S en sus \mathcal{F} -componentes. □

Si (N, \mathcal{F}) es un sistema de partición, para cada juego (N, v) es posible considerar el correspondiente juego con estructura de cooperación asociado a él. De ahí que pueda definirse una aplicación de $,^N$ en sí mismo, que se denotará por $L_{\mathcal{F}} : ,^N \Leftrightarrow ,^N$, $L_{\mathcal{F}}(v) = v^{\mathcal{F}}$.

En lo que sigue, nuestro objetivo es establecer que los juegos de unanimidad cuyo soporte es una coalición factible constituyen una base para el conjunto de los juegos restringidos por un sistema de partición. Para ello, se admitirá que, en el sistema de partición que se considere, siempre será $\mathcal{F} \neq 2^N$ ya que en el caso de la igualdad cualquier coalición de N es una coalición factible y, como consecuencia, $v^{\mathcal{F}} = v$ con lo que la aplicación $L_{\mathcal{F}}$ es la identidad.

Dado que $,^N$ es un espacio vectorial de dimensión $(2^{|N|} \Leftrightarrow 1)$ y que el juego restringido por \mathcal{F} está definido sobre una suma extendida a las \mathcal{F} -componentes de cada coalición, es de esperar que $L_{\mathcal{F}}$ sea un endomorfismo en $,^N$. Ello se recoge en la siguiente proposición.

Proposición 6.6 *Si $\mathcal{F} \neq 2^N$, el operador $L_{\mathcal{F}}$ es lineal y no biyectivo.*

Demostración: Es fácil ver que

$$L_{\mathcal{F}}(\alpha v + \beta w) = \alpha L_{\mathcal{F}}(v) + \beta L_{\mathcal{F}}(w), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall v, w \in ,^N,$$

debido a la definición del juego restringido. En efecto, para cualquier $S \subseteq N$:

$$\begin{aligned} (\alpha v + \beta w)^{\mathcal{F}}(S) &= \sum_i (\alpha v + \beta w)(S_i) = \alpha \sum_i v(S_i) + \beta \sum_i w(S_i) \\ &= (\alpha v^{\mathcal{F}} + \beta w^{\mathcal{F}})(S). \end{aligned}$$

La aplicación $L_{\mathcal{F}}$ no es biyectiva ya que su núcleo no queda reducido al juego nulo ($\theta(S) = 0, \forall S \subseteq N$). Como $\mathcal{F} \subset 2^N$ ($\mathcal{F} \neq 2^N$), existen subconjuntos de N que no son coaliciones factibles. De ahí, el juego definido, para toda $S \subseteq N$, por

$$v(S) = \begin{cases} 0, & \text{si } S \in \mathcal{F} \\ 1, & \text{si } S \notin \mathcal{F}, \end{cases}$$

es no nulo, y su imagen es el juego nulo:

$$\forall S \subseteq N, \quad v^{\mathcal{F}}(S) = \sum_k v(S_k) = 0.$$

□

En el espacio vectorial $,^N$, sabemos que el conjunto de los juegos de unanimidad $\{u_T : T \subseteq N, T \neq \emptyset\}$ constituye una base. Por tanto, cualquier juego $v \in ,^N$ puede expresarse como combinación lineal de ellos, resultando que (véase Shapley [80])

$$v = \sum_{\{T \subseteq N: T \neq \emptyset\}} \Delta_v(T) u_T \quad \text{con} \quad \Delta_v(T) = \sum_{H \subseteq T} (\Leftrightarrow 1)^{|T|-|H|} v(H).$$

Tal como indica Harsanyi [45], a cada una de las coordenadas del juego v en la base formada por los juegos de unanimidad, $\Delta_v(T)$, se la denomina *dividendo* de T en el juego v .

Teorema 6.9 Si (N, \mathcal{F}) es un sistema de partición, entonces el conjunto de los juegos de unanimidad $\{u_T : T \in \mathcal{F}, T \neq \emptyset\}$ constituye una base del espacio $L_{\mathcal{F}}(\cdot, N)$.

Corolario 6.1 Sea (N, \mathcal{F}) un sistema de partición y sea $v \in \cdot, N$. Entonces, el juego restringido por \mathcal{F} puede expresarse como

$$v^{\mathcal{F}} = \sum_{T \in \mathcal{F}} \Delta_{v^{\mathcal{F}}}(T) u_T, \text{ con } \Delta_{v^{\mathcal{F}}}(\emptyset) = 0.$$

El teorema 6.9 generaliza los resultados obtenidos por Owen [72, teoremas 2 y 3] cuando considera sistemas de partición derivados de situaciones de comunicación y los correspondientes juegos restringidos por grafos. Bilbao [8] analiza los dividendos, el potencial y nuevas fórmulas para valores de juegos $v^{\mathcal{F}}$ restringidos por sistemas de partición.

Por último, indicamos cual sería la extensión natural del valor de Myerson. Para ello, recordemos que si en el modelo de las situaciones de comunicación parecía lógico utilizar el valor de Shapley del juego restringido por el grafo de cooperación, entonces, también debe parecer conveniente que se emplee la misma idea para los sistemas de partición.

Definición 6.8 Sean (N, \mathcal{F}) un sistema de partición y (N, v) un juego. El \mathcal{F} -valor de Shapley del juego (N, v) es el valor de Shapley del juego restringido $(N, v^{\mathcal{F}})$, es decir, $\Phi_i^{\mathcal{F}}(N, v) = \Phi_i(N, v^{\mathcal{F}})$, para cada $i \in N$.

Obsérvese que para el sistema de partición considerado en el ejemplo 6.10, el \mathcal{F} -valor de Shapley es el valor de Myerson, ya que

$$\Phi_i^{\mathcal{F}}(N, v) = \Phi_i(N, v^{\mathcal{F}}) = \Phi_i(N, v^G) = \mu_i(N, v, G).$$

De igual forma, si se considera la terna (N, v, \mathcal{F}) con $\mathcal{F} = 2^N$, resulta que $v^{\mathcal{F}}$ es el juego v y el \mathcal{F} -valor coincide con el valor de Shapley para el juego (N, v) . Además, se pueden establecer los siguientes resultados:

Teorema 6.10 Sean (N, \mathcal{F}) un sistema de partición y (N, v) un juego. El \mathcal{F} -valor de Shapley es una regla de asignación, es decir,

$$\forall S \in C_{\mathcal{F}}(N), \quad \sum_{k \in S} \Phi_k^{\mathcal{F}}(N, v) = v(S).$$

Teorema 6.11 *Sea (N, \mathcal{F}) una familia intersectante, atómica y tal que $\emptyset \in \mathcal{C}$. Si el juego (N, v) es convexo, entonces $\Phi^{\mathcal{F}}(N, v) \in C(N, v^{\mathcal{F}})$.*

Demostración: Si (N, v) es convexo, el teorema 6.7 asegura que el juego restringido $(N, v^{\mathcal{F}})$ también lo es, ya que (N, \mathcal{F}) es una familia intersectante, atómica y contiene al conjunto vacío. Entonces, el \mathcal{F} -valor de Shapley pertenece al core del juego restringido, por ser éste convexo [84]. \square

Es evidente que el teorema anterior es también válido para cualquier terna (N, v, \mathcal{F}) en la que (N, \mathcal{F}) sea una unión finita y disjunta de familias intersectantes atómicas que contengan al conjunto vacío.

CAPÍTULO VII

Aplicaciones a las ciencias sociales

E. Algaba J. M. Bilbao J. R. Fernández

1. El poder de las naciones en la Unión Europea

Vamos a presentar una aplicación de la teoría de juegos cooperativos para evaluar la distribución del poder de los miembros de una institución social, cultural, empresarial o política, que tenga establecido algún sistema de votación para adoptar acuerdos.

El modelo para asignar índices o cuotas de poder a los partidos, grupos parlamentarios, naciones o actores sociales que deciden mediante votaciones, está basado en los *juegos de votación ponderada* (véase Brams et al. [18]). Estos juegos permiten asignar a cada uno de los jugadores un *índice* o *cuota de poder*, que mide su capacidad para participar en coaliciones que superen la mayoría adoptada, es decir, en coaliciones ganadoras.

Un juego de votación ponderada se define sobre un conjunto finito de jugadores $N = \{1, 2, \dots, n\}$, cada uno de los cuales tiene asignado un número entero positivo de votos o pesos, que se denota por w_1, w_2, \dots, w_n .

Los votos que reúne cada coalición de jugadores $S \subseteq N$, son la suma de los que tienen sus componentes, es decir,

$$w(S) = \sum_{i \in S} w_i.$$

Una coalición de jugadores será ganadora si el número de votos que reúne es superior a la *cuota* o mayoría exigida para ganar. En estos juegos, la dualidad ganar/perder se simboliza por 1/0, donde 1 representa el caso de que una coalición alcance la mayoría exigida y sea, por tanto, ganadora.

Así, la función característica asociada a un juego de votación ponderada queda determinada de la siguiente forma. Dada una cuota $q > \frac{1}{2}w(N)$, se define el juego

$$v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}, \quad v(S) = \begin{cases} 1, & \text{si } w(S) \geq q \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

A la vista de la definición, un juego de votación ponderada se representa, con los siguientes datos $v = [q; w_1, w_2, \dots, w_n]$.

Es fácil probar que estos juegos son monótonos y que, en ellos, no pueden existir dos coaliciones disjuntas que sean ganadoras. En efecto, es monótono ya que los pesos $w_i > 0$, para todo $i \in N$. Además, si existen dos coaliciones ganadoras disjuntas $S, T \subseteq N$, se tiene que

$$\sum_{i \in S} w_i \geq q \text{ y } \sum_{i \in T} w_i \geq q \text{ implican } w(S \cup T) = \sum_{i \in S \cup T} w_i \geq 2q > w(N),$$

lo cual es contradictorio. De estas propiedades, se deduce que el juego v es superaditivo.

El valor de Shapley, para cada jugador $i \in N$, es

$$\begin{aligned} \Phi_i(v) &= \sum_{\{S \subseteq N : i \in S\}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} (v(S) - v(S \setminus \{i\})) \\ &= \sum_{\{S \in \mathcal{W} : i \in S\}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}, \end{aligned}$$

donde \mathcal{W} denota al conjunto de coaliciones ganadoras minimales, es decir,

$$\mathcal{W} = \{S \subseteq N : v(S) = 1 \text{ y } v(T) = 0, \text{ si } T \subset S \text{ y } T \neq S\}.$$

Este valor se denomina *índice de poder de Shapley-Shubik* [81], y se interpreta como la contribución marginal esperada por un jugador que convierte una coalición perdedora en ganadora.

A continuación, vamos a analizar los índices de poder de las naciones de la actual Unión Europea, respecto al proceso de toma de decisiones por mayorías cualificadas en el Consejo de la Unión Europea. El estudio de estos índices de poder en las ciencias políticas tiene antecedentes en los trabajos de Herne y Nurmi [48], Widgrén [97], Bilbao y López [13], Lane y Mæland [57], los cuales analizan el poder coalicional en el Consejo de la Unión Europea. Carreras y Owen [20], Carreras [21], Calvo y Lasaga [19], calculan dichos índices en los Parlamentos de Cataluña y España.

En el modelo que vamos a plantear, supondremos que el poder reside en el Consejo de la Unión Europea. Cada nación es un jugador que puede unirse a otros para formar coaliciones y tiene el número de votos que le asigna el Tratado de la Unión Europea. También, debido a la decisión del Consejo de 29 de Marzo de 1994 sobre la adopción de decisiones por el Consejo por mayoría cualificada (Diario Oficial de la Comunidades Europeas 94/C, 105/1), se toman las mayorías cualificadas de 62 y 65 votos, de un total de 87, como aquéllas que sirven en la actualidad para contraer acuerdos.

No obstante, dado que está abierta la discusión sobre cual debe ser la exigencia de mayoría cualificada para la obtención de compromisos, se van a obtener índices de poder coalicional utilizando reglas de mayoría cualificada que exijan cuotas entre 61 y 68 votos sobre el total de 87 votos. Por tanto, teniendo en cuenta los datos de la tabla 7.1, el juego de votación del Consejo de la Unión Europea se modela mediante los siguientes datos.

$$v = [q; 10, 10, 10, 10, 8, 5, 5, 5, 5, 4, 4, 3, 3, 3, 2],$$

Las mayorías cualificadas que estudiaremos pertenecen al conjunto

$$\{q \in \mathbb{N} : 61 \leq q \leq 68\}.$$

El Consejo de la Unión Europea				
	Población	Votos	Índice P.	Índice V.
Alemania	80.6	10	.2188	.1149
Reino Unido	57.9	10	.1573	.1149
Francia	57.5	10	.1561	.1149
Italia	56.9	10	.1545	.1149
España	39.1	8	.1061	.0920
Holanda	15.2	5	.0414	.0575
Grecia	10.3	5	.0281	.0575
Bélgica	10.1	5	.0273	.0575
Portugal	9.8	5	.0268	.0575
Suecia	8.7	4	.0236	.0460
Austria	7.9	4	.0215	.0460
Dinamarca	5.2	3	.0141	.0345
Finlandia	5.1	3	.0137	.0345
Irlanda	3.6	3	.0097	.0345
Luxemburgo	0.4	2	.0011	.0230
Total	368.2	87	1	1

Tabla 7.1

Los índices de población, votos y poder, presentados en las tablas 7.1 y 7.2, permiten obtener las siguientes conclusiones:

1. Alemania, el Reino Unido, Francia e Italia tienen un índice de votos y de poder, en el Consejo de la Unión Europea, que es claramente inferior a sus respectivos índices de población. Los índices de poder no se corresponden con sus índices de población, aunque son ligeramente superiores a los correspondientes índices de votación.
2. España tiene un índice de votos en el Consejo de la Unión Europea equilibrado con respecto a su índice de población ya que, junto con Holanda, su número de votos es el más proporcional a su población. Resalta su

situación al ser el país más equilibrado en la relación población/votos/poder, y existen mayorías cualificadas que le permitirían tener índices de poder superiores a su índice de votación.

3. El resto de países no contemplados en los dos apartados anteriores tienen un índice de poder y de votación superiores a sus correspondientes índices de población.

Índices de poder en el Consejo de la Unión Europea								
q	61	62	63	64	65	66	67	68
Alemania	.119	.117	.12	.119	.121	.118	.115	.124
Reino Unido	.119	.117	.12	.119	.121	.118	.115	.124
Francia	.119	.117	.12	.119	.121	.118	.115	.124
Italia	.119	.117	.12	.119	.121	.118	.115	.124
España	.0917	.0955	.0924	.0884	.0936	.0921	.0981	.0911
Holanda	.0558	.0552	.0566	.0556	.0566	.0558	.0542	.055
Grecia	.0558	.0552	.0566	.0556	.0566	.0558	.0542	.055
Bélgica	.0558	.0552	.0566	.0556	.0566	.0558	.0542	.055
Portugal	.0558	.0552	.0566	.0556	.0566	.0558	.0542	.055
Suecia	.0464	.0454	.0402	.049	.0398	.0472	.0463	.0374
Austria	.0464	.0454	.0402	.049	.0398	.0472	.0463	.0374
Dinamarca	.0313	.0353	.0331	.0306	.0332	.0316	.0373	.0321
Finlandia	.0313	.0353	.0331	.0306	.0332	.0316	.0373	.0321
Irlanda	.0313	.0353	.0331	.0306	.0332	.0316	.0373	.0321
Luxemburgo	.0218	.0207	.0226	.0237	.0185	.022	.0215	.0237

Tabla 7.2

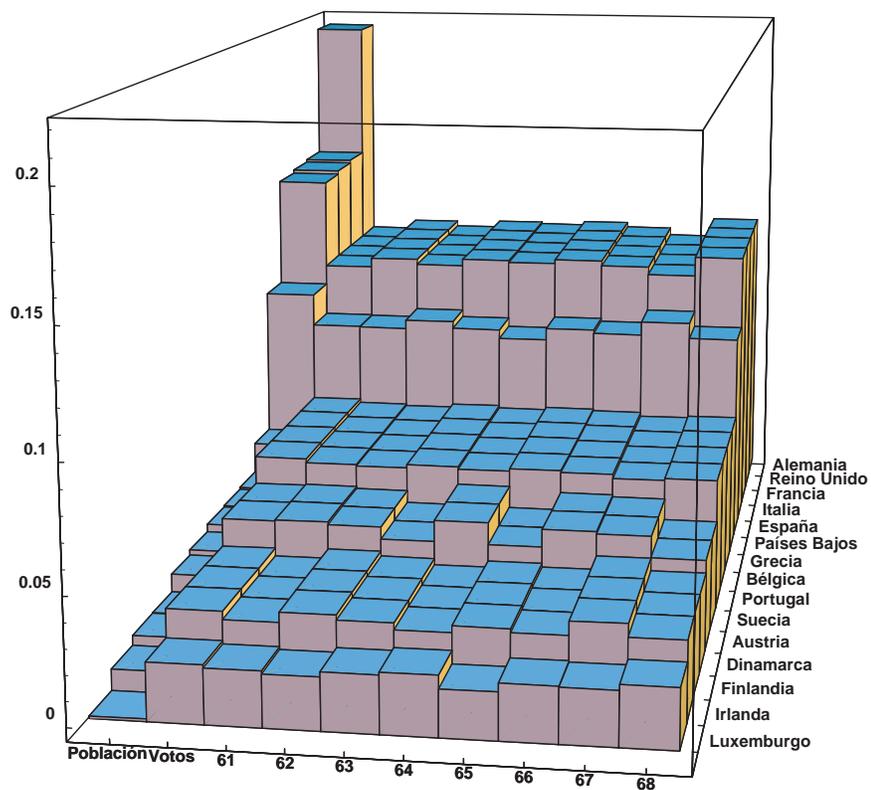


Figura 7.1. Población, votos y poder en la UE

Los cálculos de los índices de poder de las naciones en el Consejo de la Unión Europea, realizados para diferentes mayorías cualificadas, presuponen que es factible la formación de cualquier coalición. Sin embargo, es razonable admitir que existirán coaliciones factibles y otras que no lo serán, y que las naciones se agruparán en bloques siguiendo intereses políticos comunes, áreas de influencia económica, etc. En ese caso, hay que abordar el estudio con modelos de *cooperación parcial*. Evidentemente, la formación de bloques puede ser muy variada y abordar todas las posibilidades escapa de las intenciones y posibilidades de esta aplicación.

Aquí, vamos a exponer el método que se aplicaría para determinar los índices de poder de las naciones, ejemplificándolo con una situación derivada de modelar las relaciones bilaterales mediante el grafo de la figura 7.2, constituido por varios bloques de naciones. Dichos índices de poder se calcularán para las dos reglas de mayoría cualificada vigentes en la Unión Europea, que exigen al menos 62 o 65 votos de un total de 87.

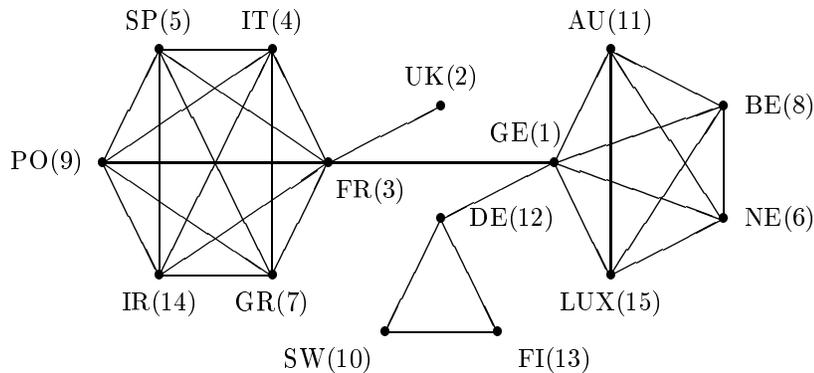


Figura 7.2. Un modelo de comunicación en la Unión Europea

El juego restringido por el grafo de cooperación parcial (N, v^G) , para un juego de votación ponderada, viene dado por

$$v^G(S) = \max \{v(S_i) : S_i \in C_{\mathcal{F}}(S)\}.$$

Esta fórmula es consecuencia directa de la definición,

$$v^G(S) = \sum_{S_i \in C_{\mathcal{F}}(S)} v(S_i),$$

porque, en un juego de votación ponderada, tenemos que $v(S_i) = 1$ o $v(S_i) = 0$, y no existen coaliciones disjuntas ganadoras. El índice de Shapley-Shubik del juego restringido por el grafo de cooperación (N, v^G) , es el valor de Myerson $\mu(N, v, G)$, de la situación de comunicación que estamos estudiando.

Los resultados obtenidos se exponen en la tabla 7.3 y, a continuación, se comparan los índices de Shapley-Shubik y de Myerson en los diagramas tridimensionales mostrados en las figuras 7.3 y 7.4. En ellos, puede observarse el aumento de poder —un poder quizás más real que el derivado de una supuesta cooperación completa— que experimentan Alemania y Francia, así como la disminución ostensible de Italia y el Reino Unido. Por otro lado, se advierte que España pierde la característica de país equilibrado en la relación población/votos/poder.

El cálculo práctico de los índices de poder se ejecuta con el programa de cálculo simbólico *Mathematica* y los algoritmos utilizados se presentan en el capítulo décimo.

Índice de Shapley y valor de Myerson en el Consejo				
$q = 62$			$q = 65$	
	I. S.	V. M.	I.S.	V.M.
Alemania	0.117	0.2925	0.121	0.2653
Reino Unido	0.117	0.06284	0.121	0.07274
Francia	0.117	0.2925	0.121	0.2653
Italia	0.117	0.06284	0.121	0.07274
España	0.0955	0.05117	0.0936	0.05675
Holanda	0.0552	0.02824	0.0566	0.03276
Grecia	0.0552	0.02824	0.0566	0.03276
Bélgica	0.0552	0.02824	0.0566	0.03276
Portugal	0.0552	0.02824	0.0566	0.03276
Suecia	0.0454	0.01491	0.0398	0.0155
Austria	0.0454	0.02466	0.0398	0.02288
Dinamarca	0.0353	0.04499	0.0332	0.05726
Finlandia	0.0353	0.01106	0.0332	0.01217
Irlanda	0.0353	0.001829	0.0332	0.01955
Luxemburgo	0.0207	0.01134	0.0185	0.00868

Tabla 7.3

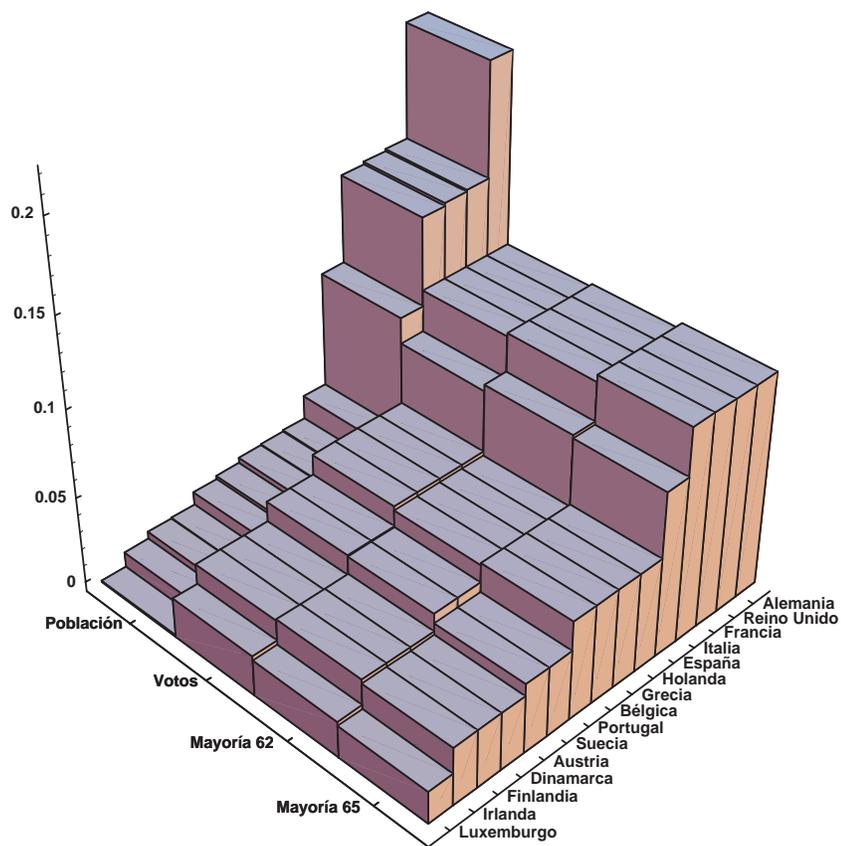


Figura 7.3. Población, votos e índices de Shapley

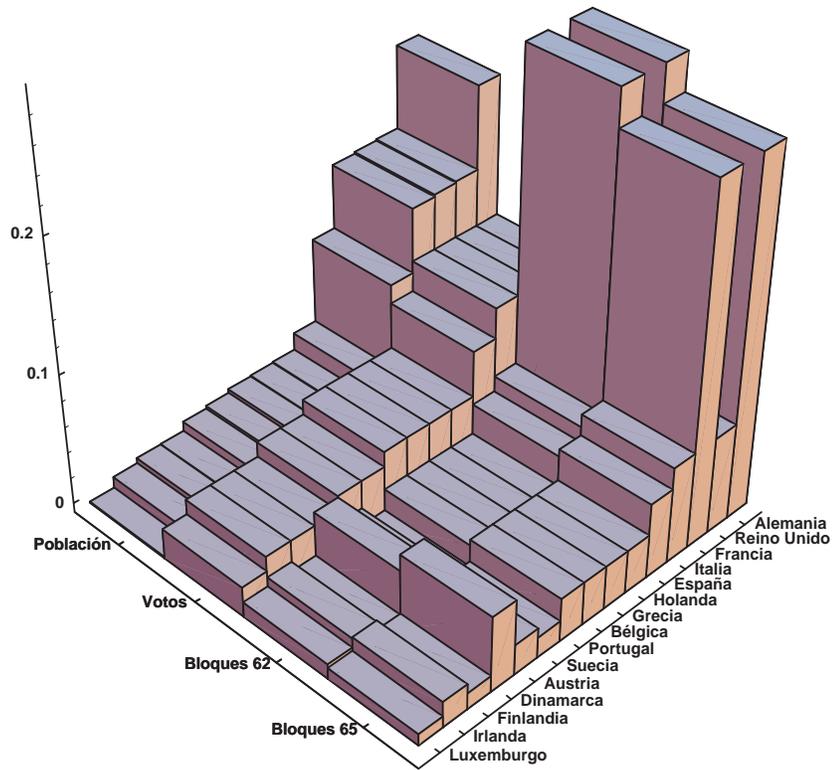


Figura 7.4. Población, votos y valores de Myerson

2. Cooperación y conflicto en el Parlamento de Andalucía

En esta sección se expone un modelo para el estudio de la formación endógena de coaliciones o de estructuras de cooperación basado en la técnica de *análisis del conflicto*, creada por Fang, Hipel y Kilgour en [36], [37] y [56]. Además, se incluyen los análisis de estabilidad y equilibrio, usando los conceptos de Nash [65], [66].

En el siguiente cuadro se clasifica esta técnica de resolución de conflictos junto a otros métodos para tomar decisiones:

		Objetivos	
		Uno	Dos o más
Actores	Uno	<i>Investigación operativa</i>	<i>Decisión multicriterio</i>
	Dos o más	<i>Juegos cooperativos</i>	<i>Análisis del conflicto</i>

Para la presentación de las técnicas de análisis del conflicto, se va a considerar el juego de votación ponderada, correspondiente a la legislatura 1994–96, que modela el sistema de votación y toma de decisiones en el Parlamento de Andalucía (la elección de esta legislatura obedece a razones de riqueza de discusión en la formación de coaliciones).

En el Parlamento de Andalucía, elegido en 1994, los jugadores son los grupos parlamentarios

$$N = \{\text{Poder Andaluz, IU-LV-CA, PP-Andalucía, PSOE-Andalucía}\},$$

y el juego de poder queda definido por los datos [55; 3, 20, 41, 45].

En la tabla 7.4, se presentan los índices de poder de Shapley-Shubik de los partidos andaluces en el juego de votación definido anteriormente y se comparan estos índices de poder (multiplicados por cien) con sus porcentajes de votos y escaños.

El Parlamento de Andalucía			
	Votos	Escaños	Poder
PSOE de Andalucía	38.56	41.28	33.33
PP de Andalucía	34.47	37.61	33.33
IU-LV-CA	19.17	18.35	33.33
Poder Andaluz	5.80	2.75	0

Tabla 7.4

Las estrategias competitivas de los tres partidos con poder en el juego de mayoría absoluta son:

1. El PSOE tiene dos estrategias: lograr el apoyo de IU para gobernar y dialogar con el PP para evitar una coalición de bloqueo entre el PP e IU.
2. El PP tiene una estrategia dominante, controlar la acción del gobierno y sumar a dicho control a IU y al PA. A la vez está abierto al diálogo con el gobierno en temas institucionales.
3. La coalición IU tiene dos estrategias que desarrolla a la vez: apoyar y controlar la acción gubernamental, según el signo de las políticas del ejecutivo.

Estas estrategias de los jugadores originan un *juego competitivo* en el que hay 6 combinaciones estratégicas, que se denominan *escenarios*. Cada escenario se representa mediante un grafo en cuyos vértices están los partidos con poder y cada arista que une dos partidos representa la disposición para coaligarse en dicho escenario. Si no hay arista entre dos partidos, entonces la coalición entre ambos no es viable. En todas las combinaciones estratégicas, se supone que se ha elegido un gobierno en minoría del PSOE por ser el grupo con mayor número de diputados andaluces y porque el PP e IU no desean formar un gobierno conjunto.

En la figura 7.5 se representan los seis grafos que modelan los seis escenarios aludidos. Para obtener todos los escenarios posibles se debe añadir el escenario E_0 en el que no hay ninguna relación y el escenario E_7 en el que todos

los jugadores se relacionan entre sí formando un grafo completo. Es evidente que el poder coalicional de los tres partidos en el escenario E_0 es 0 y en el escenario E_7 es de $1/3$ para cada uno de ellos, ya que se debe corresponder con el índice de poder de Shapley-Shubik.

Escenario 1 = <i>Apoyo de IU al gobierno</i>
Escenario 2 = <i>Apoyo del PP al gobierno</i>
Escenario 3 = <i>Apoyo del PP y IU al gobierno</i>
Escenario 4 = <i>Apoyo y control de IU al gobierno</i>
Escenario 5 = <i>Apoyo y control del PP al gobierno</i>
Escenario 6 = <i>Control del PP e IU al gobierno</i>

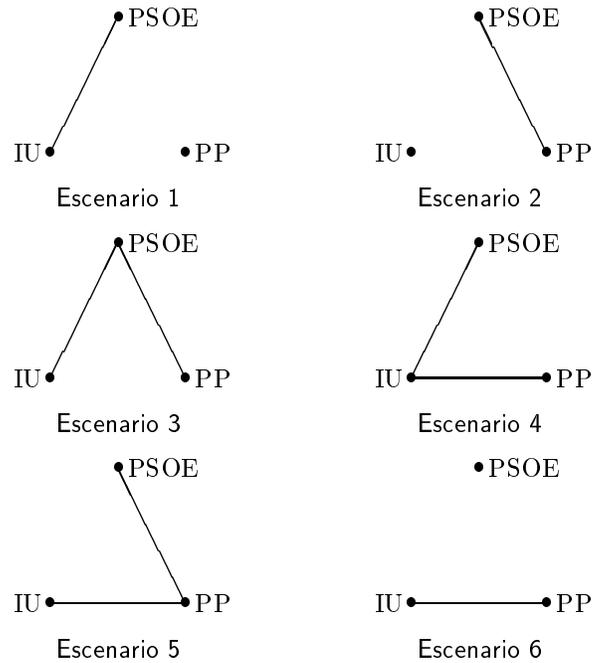


Figura 7.5.

Para cada uno de los seis escenarios descritos, se calcula el valor de Shapley del juego restringido que resulta de tomar como sistema de coaliciones factibles el que se deriva de considerar los subgrafos conexos.

Es decir, para las diferentes situaciones de comunicación planteadas, se determina el valor de Myerson. El poder coalicional de cada grupo parlamentario es el expuesto en la siguiente tabla.

El Poder coalicional en Andalucía			
	PSOE	PP	IU
Escenario 1	1/2	0	1/2
Escenario 2	1/2	1/2	0
Escenario 3	4/6	1/6	1/6
Escenario 4	1/6	1/6	4/6
Escenario 5	1/6	4/6	1/6
Escenario 6	0	1/2	1/2

Tabla 7.5

El juego competitivo entre los tres partidos con poder coalicional en el Parlamento Andaluz es un conflicto, para alcanzar un escenario en el que cada partido trata de obtener un poder coalicional máximo.

Fang, Hipel y Kilgour, en [36] y [37], proponen el siguiente modelo gráfico para un conflicto. Éste consiste en un conjunto $N = \{1, 2, \dots, n\}$ de jugadores, un conjunto $U = \{1, 2, \dots, u\}$ de escenarios, una familia de funciones de pago $P_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ y una familia de grafos dirigidos $D_i = (U, A_i)$, ambas definidas para cada jugador $i \in N$.

En la situación que se está considerando, el juego de poder coalicional se modela considerando a los jugadores $N = \{1, 2, 3\}$, donde 1 representa al PSOE, 2 al PP y 3 a IU. El conjunto U de los escenarios del juego está formado por los ocho grafos etiquetados de tres vértices. Es decir, los seis escenarios E_i definidos y representados en la figura 7.5, el grafo sin aristas E_0 y el grafo completo E_7 .

Las funciones de pago $P_j(E_i)$, $0 \leq i \leq 7$, $1 \leq j \leq 3$, son los índices de poder coalicional de la tabla 7.5. Además hay que añadir los pagos $(0, 0, 0)$

y $(1/3, 1/3, 1/3)$ correspondientes a los escenarios E_0 y E_7 respectivamente. Dado que los índices de poder suman uno en todos los escenarios, excepto en E_0 , se tiene

$$\sum_{j=1}^3 P_j(E_i) = 1, \quad 1 \leq i \leq 7; \quad \sum_{j=1}^3 P_j(E_0) = 0.$$

El modelo se completa definiendo el conjunto de movimientos que un jugador puede realizar para cambiar (unilateralmente) de escenario y así obtener los grafos dirigidos D_i .

Puesto que, en el juego, el objetivo es aumentar el poder coalicional, se propone la siguiente definición

Definición 7.1 *Un jugador i puede mover unilateralmente del escenario dado por el grafo g a $g + ij$ (nuevo grafo que resulta al añadir la arista ij) si los pagos a i y j no decrecen. Es decir, $P_i(g + ij) \geq P_i(g)$ y $P_j(g + ij) \geq P_j(g)$. Un jugador i puede mover de g a $g - ij$ si $P_i(g - ij) \geq P_i(g)$ (porque i no necesita la aprobación de j para romper su acuerdo).*

Dado un escenario g y un jugador i , el conjunto de los escenarios que el jugador puede alcanzar unilateralmente desde g se denota por $S_i(g)$. Si además, i recibe un pago estrictamente mayor, los escenarios de mejora unilateral para i son:

$$S_i^+(g) = \{q \in S_i(g) : P_i(q) > P_i(g)\}.$$

Con las definiciones anteriores, se tiene que:

$$g + ij \in S_i^+(g) \iff P_i(g + ij) > P_i(g) \quad \text{y} \quad P_j(g + ij) \geq P_j(g),$$

$$g - ij \in S_i^+(g) \iff P_i(g - ij) > P_i(g).$$

Además, si ordenamos, para cada jugador, los escenarios según el poder coalicional que se alcanza en cada uno de ellos y, posteriormente, consideramos la definición de movimiento unilateral que puede ejecutar cada jugador, se obtiene el grafo dirigido correspondiente a los movimientos que son ventajosos para cada uno de los participantes en el juego.

Así, para el jugador 1 (PSOE), tenemos que la ordenación de los escenarios es

$$E_0 = E_6 < E_4 = E_5 < E_7 < E_1 = E_2 < E_3 ,$$

y los movimientos unilaterales del jugador 1, se modelan con los siguientes grafos dirigidos.

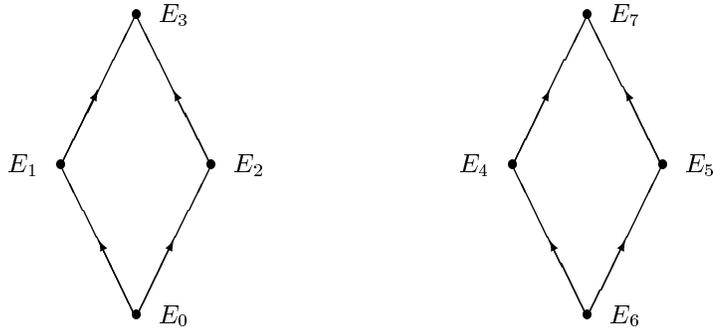


Figura 7.6. Jugador 1

De forma análoga se realiza para los otros dos jugadores.

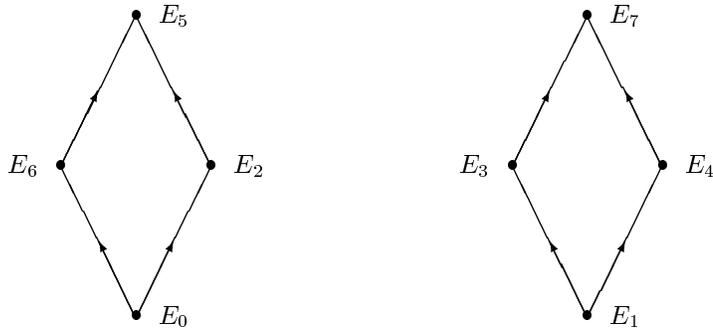


Figura 7.7. Jugador 2

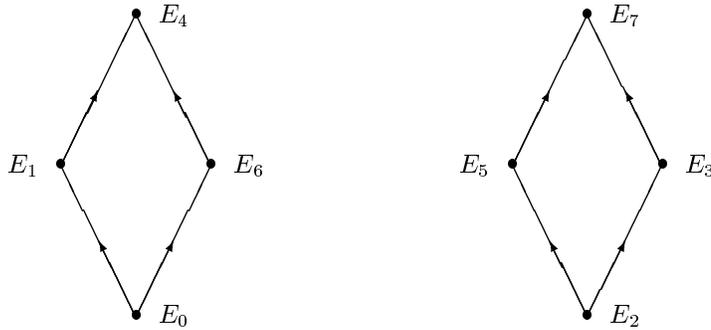


Figura 7.8. Jugador 3

Por último, se introducen dos conceptos de estabilidad y equilibrio para aplicarlos al análisis del juego coalicional y encontrar soluciones a la pregunta sobre cuál o cuáles serán las estructuras de cooperación que se van a formar.

Definición 7.2 Un escenario $g \in U$ es estable Nash para el jugador i si se verifica que $S_i^+(g) = \emptyset$.

Definición 7.3 Un escenario $g \in U$ es secuencialmente estable para el jugador i si para cualquier $g_1 \in S_i^+(g)$ existe al menos un escenario g_x perteneciente al conjunto de escenarios de mejora unilateral del resto de jugadores, denotado por $S_{N \setminus \{i\}}^+(g_1)$, tal que $P_i(g_x) \leq P_i(g)$.

Definición 7.4 Un equilibrio de Nash es un escenario que es estable Nash para todos los jugadores. Un equilibrio secuencial es un escenario que es secuencialmente estable para todos los jugadores.

Teorema 7.1 El único equilibrio de Nash en el juego del poder coalicional es el escenario del grafo completo.

Demostración: Si el grafo completo E_7 no es un equilibrio de Nash, entonces existen un jugador i y un escenario $g \in S_i^+(E_7)$, con $P_i(g) > P_i(E_7)$. Dado que E_7 es el grafo completo, g se obtiene eliminando una de las aristas $\{ij, ik\}$ que controla i en E_7 . Los pagos P_i que obtiene el jugador i al eliminar cualquiera de

las dos aristas o ambas son $1/6$ o 0 respectivamente. Entonces $P_i(g) \leq P_i(E_7)$, en contradicción con lo supuesto.

Si g es un escenario cuyo grafo no es completo, existen dos jugadores i y j tales que la arista ij no pertenece a g . La estabilidad del valor de Myerson [62] en este juego coalicional implica que $P_i(g+ij) > P_i(g)$, luego $g+ij \in S_i^+(g) \neq \emptyset$. Entonces, el escenario g no es estable Nash para el jugador i , por lo que no es un equilibrio de Nash. \square

Corolario 7.1 *Un escenario es estable Nash para i en el juego del poder coalicional de 3 jugadores si y sólo si i está conectado a los otros dos jugadores (el grado de i en el grafo es $n - 1 = 2$).*

Teorema 7.2 *Los tres escenarios con un jugador aislado E_1 , E_2 y E_6 son secuencialmente estables para los dos jugadores relacionados.*

Demostración: Sea g un escenario con un jugador aislado k y sean $\{i, j\}$ los dos jugadores relacionados. Entonces los pagos que reciben los jugadores son

$$P_i(g) = P_j(g) = \frac{1}{2}, \quad P_k(g) = 0.$$

Para probar que g es secuencialmente estable para los jugadores i y j , considérese un escenario $g_1 \in S_i^+(g)$. Entonces, necesariamente g_1 es el grafo con aristas $\{ij, ik\}$, donde $P_i(g_1) = 4/6$. Ante la mejora unilateral de i , los jugadores de $N \setminus \{i\} = \{j, k\}$ responden con un acuerdo mutuo porque ambos mejoran en el escenario $g_1 + jk = E_7$ del grafo completo, recibiendo cada uno $1/3$ en vez de $1/6$. Esta respuesta implica que

$$P_i(E_7) = \frac{1}{3} < \frac{1}{2} = P_i(g),$$

con lo que g es secuencialmente estable para i . El mismo razonamiento es válido para el jugador j . \square

El teorema 7.1 establece que el único equilibrio de Nash en el juego de poder coalicional de tres jugadores es el grafo completo E_7 . Esta configuración aparece en el Parlamento Andaluz durante las negociaciones sobre los presupuestos de 1995 y 1996.

El teorema 7.2 explica que los acuerdos entre los jugadores que excluyen a un tercero son secuencialmente estables, es decir, son acuerdos que se mantienen excepto en el caso de que alguno de los coaligados entable relaciones con el jugador aislado. En ese caso, una respuesta de los otros dos hace que el escenario cambie al grafo completo. La amenaza de la respuesta conjunta a un primer movimiento unilateral es la base de la estabilidad en estos escenarios. De hecho, el escenario E_6 fue la configuración dominante durante la mayor parte de la legislatura analizada.

CAPÍTULO VIII

Un nuevo modelo de cooperación

J. M. Bilbao N. Jiménez Jiménez E. A. Lebrón

1. Juegos sobre coaliciones factibles

En el capítulo sexto se ha justificado la necesidad de estudiar modelos más generales de juegos cooperativos en los que pueda haber restricciones en la cooperación entre los jugadores, ya que algunas aplicaciones requieren establecer posibilidades intermedias entre la cooperación total y la no cooperación.

En el modelo que aquí presentamos, se estudian situaciones en las que la comunicación entre los jugadores está representada por una familia \mathcal{L} de subconjuntos del conjunto de jugadores N , a cuyos elementos se les denominará *coaliciones factibles*. Hasta ahora las coaliciones factibles implicaban la modificación de la función característica del juego (N, v) para dar lugar a un nuevo juego llamado *juego restringido por el sistema de coaliciones factibles*. Esta forma de modelar la cooperación parcial es una posibilidad frente a otras varias. Una alternativa, sugerida por Faigle en *Cores of Games with Restricted Cooperation* (1989) [33], es considerar que la función característica del juego con cooperación parcial sólo debe ser definida para las coaliciones factibles. En este capítulo seguiremos el modelo de Faigle y observaremos cómo la cooperación total surge entonces como un caso particular.

Aunque sería deseable que el conjunto de coaliciones factibles no tuviese ningún condicionante, aquí exigiremos que el conjunto formado por todos los jugadores, N , y el conjunto vacío sean coaliciones factibles. Además, en algunos casos, la familia de coaliciones factibles tendrá una estructura determinada, dependiendo ésta de las reglas de cooperación que se establezcan, pero en todos los casos se generalizarán resultados conocidos para un juego cooperativo (N, v) .

Teniendo en cuenta estas consideraciones, definiremos los juegos mediante funciones que asignen valores sólo a las coaliciones factibles.

Definición 8.1 *Un juego es una terna (N, v, \mathcal{L}) , donde N es un conjunto finito, \mathcal{L} es una familia de subconjuntos de N tal que $\emptyset, N \in \mathcal{L}$, y $v : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $v(\emptyset) = 0$.*

Los elementos del conjunto $N = \{1, 2, \dots, n\}$, se denominan *jugadores* y los de la familia \mathcal{L} *coaliciones factibles*. Si $\{i\} \in \mathcal{L}$ para todo $i \in N$, la familia \mathcal{L} se denomina *atómica*. En lo que sigue, identificaremos el juego (N, v, \mathcal{L}) con la función $v : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$, y diremos que v es un juego definido sobre la familia \mathcal{L} . Nótese que la definición clásica de juego cooperativo es un caso particular de ésta, en la que se considera que \mathcal{L} es el conjunto 2^N de los subconjuntos de N .

Denotaremos por $\mathcal{G}(\mathcal{L})$ el conjunto de todos los juegos definidos sobre la familia \mathcal{L} . El conjunto $\mathcal{G}(\mathcal{L})$ dotado de las operaciones suma y producto por escalar, definidas en el capítulo sexto, es un espacio vectorial. Dentro de este conjunto existen dos colecciones de juegos especiales con valores en $\{0, 1\}$, los *juegos de unanimidad* y los *juegos de identidad* que definimos a continuación.

Para cualquier coalición no vacía $T \in \mathcal{L}$, el correspondiente *juego de unanimidad*, denotado ζ_T , está definido por $\zeta_T : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\zeta_T(S) = \begin{cases} 1, & \text{si } T \subseteq S \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

para cada coalición $S \in \mathcal{L}$.

El *juego de identidad* $\delta_T : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ está definido por

$$\delta_T(S) = \begin{cases} 1, & \text{si } S = T \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

para cada coalición $S \in \mathcal{L}$. La relevancia de estas dos colecciones de juegos se pone de manifiesto en el siguiente resultado.

Proposición 8.1 *La dimensión del espacio vectorial (\mathcal{L}) es $|\mathcal{L}| \Leftrightarrow 1$, y las colecciones*

$$\{\zeta_T : T \in \mathcal{L}, T \neq \emptyset\} \quad \text{y} \quad \{\delta_T : T \in \mathcal{L}, T \neq \emptyset\}$$

son dos bases de (\mathcal{L}) .

Demostración: Es evidente que la colección $\{\delta_T : T \in \mathcal{L}, T \neq \emptyset\}$ es una base de (\mathcal{L}) ya que cualquier $v \in (\mathcal{L})$ puede ser escrito como

$$v = \sum_{\{T \in \mathcal{L} : T \neq \emptyset\}} v(T) \delta_T.$$

y además, si $\sum_{\{T \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}\}} \alpha_T \delta_T = \theta$ donde θ denota al juego nulo, es inmediato que $\alpha_T = 0$, para toda coalición no vacía $T \in \mathcal{L}$.

Para probar que el conjunto de juegos de unanimidad $\{\zeta_T : T \in \mathcal{L}, T \neq \emptyset\}$ es una base de (\mathcal{L}) es suficiente probar que es un conjunto linealmente independiente. Si se considera $\sum_{\{T \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}\}} \alpha_T \zeta_T = \theta$ y aplicamos dicha combinación lineal nula a las distintas coaliciones de \mathcal{L} , se obtiene un sistema lineal homogéneo que tiene a la solución trivial como única solución. \square

Cualquier familia \mathcal{L} de coaliciones factibles, $\mathcal{L} \subseteq 2^N$, es un conjunto parcialmente ordenado por la relación de inclusión. Al ser N finito, entonces (\mathcal{L}, \subseteq) es también finito siendo \emptyset su primer elemento y N el último, esto es, para toda $S \in \mathcal{L}$,

$$\emptyset \subseteq S \subseteq N.$$

A veces nos será útil visualizar las relaciones de inclusión entre las coaliciones factibles y para ello se empleará el correspondiente diagrama de Hasse.

Como ya hemos indicado antes, a veces, estableceremos algunas reglas de cooperación en determinados juegos. Estas reglas son las que dotarán a la familia \mathcal{L} de una determinada estructura combinatoria. A continuación, introducimos la estructura denominada *espacio de clausura*.

Definición 8.2 Una familia $\mathcal{L} \subseteq 2^N$ es un espacio de clausura en N cuando verifica:

- (1) $\emptyset \in \mathcal{L}$ y $N \in \mathcal{L}$,
- (2) Si $A \in \mathcal{L}$ y $B \in \mathcal{L}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{L}$.

El concepto anterior es equivalente a considerar \mathcal{L} como un operador clausura $\mathcal{L} : 2^N \leftrightarrow 2^N$ definido por

$$A \leftrightarrow \mathcal{L}(A) = \bigcap \{S \in \mathcal{L} : A \subseteq S\},$$

ya que es fácil comprobar, denotando $\mathcal{L}(A) = \bar{A}$, que se verifica

- (C1) $A \subseteq \bar{A}$,
- (C2) $\overline{\bar{A}} = A$,
- (C3) Si $A \subseteq B$, entonces $\bar{A} \subseteq \bar{B}$,

con la propiedad adicional $\overline{\emptyset} = \emptyset$. Los elementos de \mathcal{L} , o equivalentemente, aquellos subconjuntos $A \subseteq N$, tales que $A = \bar{A}$, los denominaremos conjuntos *cerrados*.

Un espacio de clausura $\mathcal{L} \subseteq 2^N$, ordenado por inclusión, es un retículo completo. Recordemos que un *retículo* es un conjunto parcialmente ordenado con supremo e ínfimo para cualquier par de elementos y es *retículo completo* si cualquier subconjunto suyo no vacío tiene supremo e ínfimo. Para todo $A, B \in \mathcal{L}$, se tiene que $A \cap B \in \mathcal{L}$, y así $\inf \{A, B\} = A \cap B$.

Por otro lado, como la unión de conjuntos cerrados no es necesariamente un conjunto cerrado, entonces el menor conjunto cerrado que lo contiene es $\overline{A \cup B}$ y por tanto, $\sup \{A, B\} = \overline{A \cup B}$.

En el resto de esta sección, se supondrá que la familia \mathcal{L} de coaliciones factibles es un espacio de clausura sobre el conjunto de jugadores, lo cual significa que hay una regla fundamental de cooperación: cuando dos coaliciones sean factibles, también su intersección lo será. Este requisito que se impone a la cooperación entre los jugadores tiene una interpretación que hace útil el estudio que se va a realizar en muchos casos reales. Si se supone que los jugadores

encuentran algún beneficio cuando todos se unen, es lógico pensar que las posibles coaliciones entre ellos se hacen atendiendo a intereses comunes (comparten ciertas ideas, son de la misma nacionalidad, pertenecen a una cierta empresa) y de ahí que aquellos jugadores comunes a dos coaliciones formen también una coalición para defender en común un conjunto más amplio de intereses.

A continuación, presentamos diversos ejemplos de espacios de clausura:

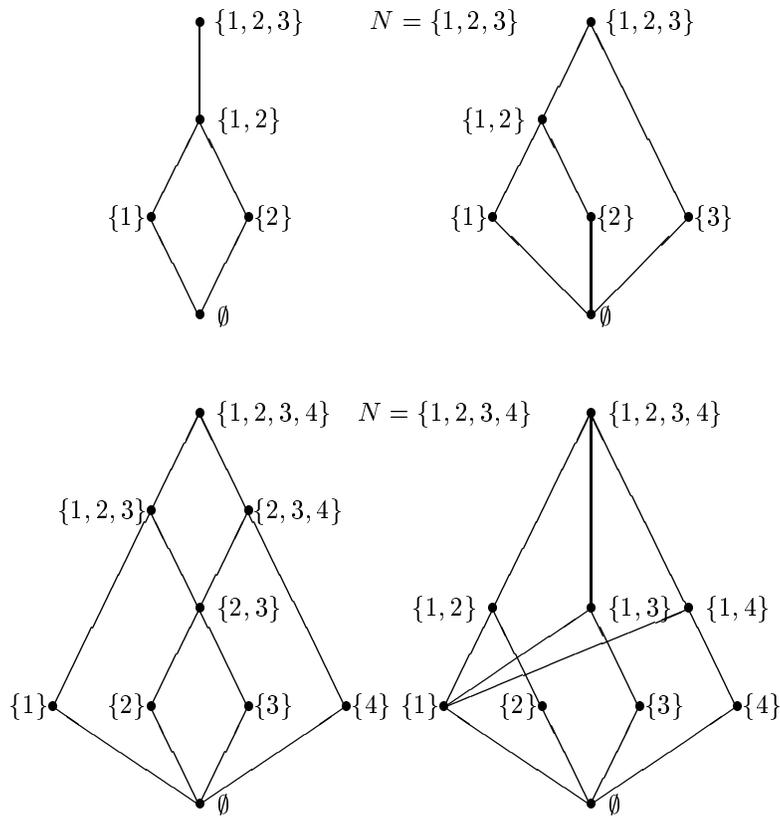


Figura 8.1.

Una clase especial de espacios de clausura son las *geometrías convexas*.

Definición 8.3 Una familia $\mathcal{L} \subseteq 2^N$ es una *geometría convexa* en N si satisface las siguientes propiedades:

(G1) $\emptyset \in \mathcal{L}$,

(G2) Si $A, B \in \mathcal{L}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{L}$,

(G3) Si $A \in \mathcal{L}$ y $A \neq N$, existe $j \in N \setminus A$ tal que $A \cup \{j\} \in \mathcal{L}$.

Los elementos de una geometría convexa se llaman *convexos*. Nótese que las propiedades (G1) y (G3) implican que $N \in \mathcal{L}$.

Como ya se ha indicado anteriormente, la propiedad (G2), que caracteriza a los espacios de clausura, es lógica no sólo desde el punto de vista matemático, sino también desde el punto de vista real. La propiedad (G3) se puede interpretar de la siguiente manera: la coalición formada por todos los jugadores se alcanza mediante procesos secuenciales de incorporación, uno a uno, de los participantes en el juego.

En relación con la interpretación de la propiedad (G3), Edelman y Jamison [30] definen un *orden compatible* con una geometría convexa \mathcal{L} como un orden total de los elementos de N , $i_1 < i_2 < \dots < i_n$, de forma que

$$\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \in \mathcal{L}, \text{ para todo } 1 \leq k \leq n.$$

A cada orden compatible con \mathcal{L} le corresponde exactamente una *cadena maximal* en \mathcal{L} . Una cadena maximal C de \mathcal{L} es una colección ordenada de conjuntos convexos

$$\emptyset = C_0 \subset C_1 \subset \dots \subset C_{n-1} \subset C_n = N,$$

de manera que no existe un conjunto convexo M ni un índice $0 \leq j \leq n \Leftrightarrow 1$ tales que $C_j \subset M \subset C_{j+1}$. Esto es, C es una cadena que no está contenida en ninguna cadena más larga. Denotaremos por $\mathcal{C}(\mathcal{L})$ el conjunto de todas las cadenas maximales de \mathcal{L} .

Otro concepto relevante en una geometría convexa es el de punto extremal. Dado un convexo $A \in \mathcal{L}$, diremos que un elemento $a \in A$ es un *punto extremal* de A cuando $A \setminus \{a\} \in \mathcal{L}$. En lo que sigue, por simplicidad en la notación, escribiremos $A \setminus a$ en lugar de $A \setminus \{a\}$. Denotaremos por $ex(A)$ al conjunto de todos los puntos extremales de A . Los puntos extremales permiten identificar las geometrías convexas con los espacios de clausura que verifican

la propiedad finita de Minkowski-Krein-Milman: *cada conjunto cerrado es la clausura de sus puntos extremales.*

A continuación, se presenta un ejemplo de geometría convexa donde se muestran los conceptos anteriores.

Ejemplo 8.1 *Si consideramos $N = \{1, 2, 3\}$ y la geometría convexa*

$$\mathcal{L} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, N\},$$

apreciamos en su diagrama de Hasse

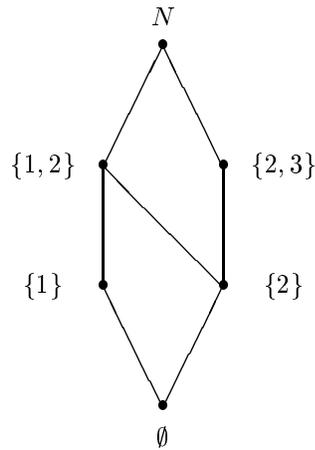


Figura 8.2.

que hay en \mathcal{L} tres cadenas maximales

$$C_1 : \emptyset \subset \{1\} \subset \{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$$

$$C_2 : \emptyset \subset \{2\} \subset \{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$$

$$C_3 : \emptyset \subset \{2\} \subset \{2, 3\} \subset \{1, 2, 3\}.$$

Los conjuntos de puntos extremales son $ex(\{1\}) = \{1\}$, $ex(\{2\}) = \{2\}$,

$$ex(\{1, 2\}) = \{1, 2\}, \quad ex(\{2, 3\}) = \{3\}, \quad ex(\{1, 2, 3\}) = \{1, 3\}.$$

Obsérvese que si $\mathcal{L} = 2^N$ entonces hay $n!$ cadenas maximales correspondientes a todos los posibles órdenes de jugadores y, para cualquier coalición $S \subseteq N$, todos sus jugadores son extremales.

Las geometrías convexas pueden ser también definidas como los espacios de clausura que satisfacen la denominada propiedad *anticambio*: dado un conjunto cerrado A y dos elementos $x \neq y$ pertenecientes a $N \setminus A$, entonces $y \in \overline{A \cup \{x\}}$ implica que $x \notin \overline{A \cup \{y\}}$.

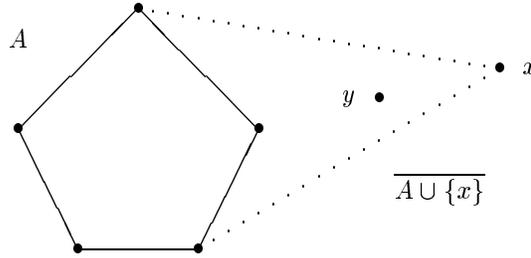


Figura 8.3.

Estas equivalencias en la identificación de una geometría convexa se recogen en el siguiente teorema [30, teorema 2.1].

Teorema 8.1 *Sea \mathcal{L} es un espacio de clausura en N . Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (a) *La familia \mathcal{L} es una geometría convexa.*
- (b) *La familia \mathcal{L} satisface la propiedad anticambio.*
- (c) *Para cada conjunto cerrado $C \subseteq N$, se verifica que $C = \overline{ex(C)}$.*

A continuación, se muestran algunos ejemplos de familias de conjuntos con estructura de geometría convexa que han aparecido en la literatura relacionada con la cooperación parcial.

Ejemplo 8.2 *Recordemos que una situación de comunicación es una terna (N, v, G) , donde (N, v) es un juego y $G = (N, E)$ un grafo. Si $G = (N, E)$ es un grafo conexo y ciclo-completo, entonces la familia de todas las coaliciones de N que inducen subgrafos conexos $\mathcal{L} = \{S \subseteq N : (S, E(S)) \text{ es conexo}\}$, es una geometría convexa [30, teorema 3.7].*

Ejemplo 8.3 La familia de subconjuntos convexos de un conjunto finito parcialmente ordenado (P, \leq) es una geometría convexa (Birkhoff y Bennett [15]). En este contexto, se ha de entender que un conjunto S de P es convexo siempre que $a \in S$, $b \in S$ y $a \leq b$ impliquen $\{c \in P : a \leq c \leq b\} \subseteq S$. Denotaremos por $Co(N)$ la correspondiente geometría convexa al considerar $N = \{1, 2, \dots, n\}$ con el orden natural de sus elementos. Así, los elementos de $Co(N)$ son

$$[i, j] = \{i, i+1, \dots, j\}, \text{ para } 1 \leq i \leq j \leq n.$$

Este modelo sirve para estudiar situaciones de cooperación parcial en juegos de votación ponderada y ha sido analizado por Edelman [31].

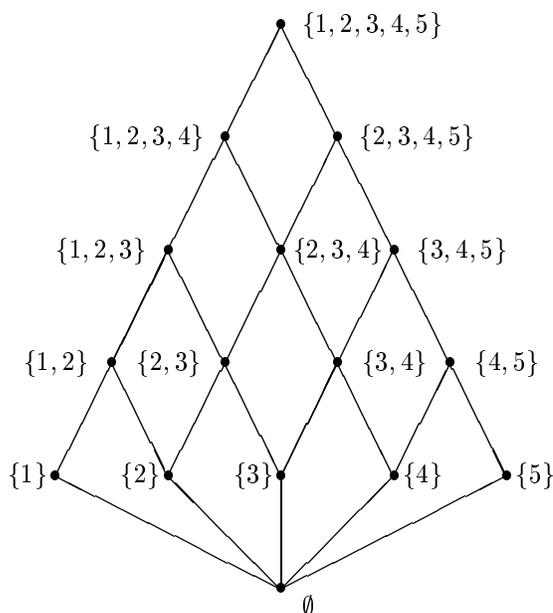


Figura 8.4. La geometría convexa $Co(\{1, 2, 3, 4, 5\})$.

Ejemplo 8.4 Sea (P, \leq) un conjunto parcialmente ordenado, $I \subseteq P$ es un ideal del orden de P cuando

$$\forall x \in I, \text{ si } y \leq x \implies y \in I.$$

El operador definido, para cualquier $X \subseteq P$, por

$$X \Leftrightarrow \overline{X} = \{y \in P : y \leq x \text{ para algún } x \in X\},$$

es un operador clausura sobre P y sus conjuntos cerrados son los ideales de orden de P . Este retículo se denota por $J(P)$. Como la unión y la intersección de ideales de orden es un ideal de orden, se sigue que $J(P)$ es un subretículo de 2^P . Además $J(P)$ es una geometría convexa cerrada bajo la unión y el conjunto de puntos extremales de $S \in J(P)$ es el conjunto de todos los puntos maximales $\text{Max}(S)$. Faigle y Kern [34] [35] estudian juegos sobre retículos distributivos $J(P)$.

2. Conceptos de solución

En la teoría de juegos cooperativos, el problema más extensamente estudiado ha sido cómo dividir los beneficios totales entre todos los jugadores, ya que suponemos que todos los jugadores que participan en un juego deciden cooperar entre ellos y formar la gran coalición N . Esto conduce al problema de distribuir la cantidad $v(N)$ entre ellos, como ya reflejamos en diversos ejemplos del capítulo sexto.

Cada vector $x = (x_i)_{i \in N} \in \mathbb{R}^n$ se denomina *distribución* o *vector de pago*, y la coordenada x_i representa el pago al jugador i . Un vector de pago x se llama *eficiente* para el juego v si distribuye exactamente el valor de la coalición N entre los jugadores, es decir

$$\sum_{i=1}^n x_i = v(N).$$

Usualmente escribiremos, para cada $S \subseteq N$, $x(S)$ en lugar de $\sum_{i \in S} x_i$ y entenderemos que $x(\emptyset) = 0$. Los vectores de pago que cumplen este *principio de eficiencia* se llaman *preimputaciones*. Denotaremos al conjunto de preimputaciones de un juego $v : \mathcal{L} \Leftrightarrow \mathbb{R}$, por $I^*(\mathcal{L}, v)$, esto es,

$$I^*(\mathcal{L}, v) = \{x \in \mathbb{R}^n : x(N) = v(N)\}.$$

Una *solución* o *concepto de solución* sobre una colección no vacía de juegos definidos sobre \mathcal{L} es una aplicación ψ que asocia a cada juego v de dicha colección un subconjunto $\psi(\mathcal{L}, v)$ del conjunto de sus preimputaciones.

La mayoría de los conceptos de solución propuestos requieren que los vectores de pago eficientes cumplan el llamado *principio de individualidad racional* que exige que el pago a cada jugador i mediante el vector de pago x sea al menos la cantidad que el jugador puede obtener por sí mismo en el juego, esto es, para todo $i \in N$ tal que $\{i\} \in \mathcal{L}$,

$$x_i \geq v(\{i\}).$$

Las preimputaciones que verifican este principio de individualidad racional se llaman *imputaciones* para el juego v . El conjunto de imputaciones es

$$I(\mathcal{L}, v) = \{x \in I^*(\mathcal{L}, v) : x_i \geq v(\{i\}) \text{ si } \{i\} \in \mathcal{L}\}.$$

Por definición se tiene que $I(\mathcal{L}, v) \subseteq I^*(\mathcal{L}, v)$, pero aunque $I^*(\mathcal{L}, v) \neq \emptyset$, podemos tener $I(\mathcal{L}, v) = \emptyset$. Sin embargo, se puede observar que si la familia \mathcal{L} no contiene ninguna coalición unitaria, entonces $I(\mathcal{L}, v) = I^*(\mathcal{L}, v)$ con lo cual $I(\mathcal{L}, v) \neq \emptyset$. Por otro lado, si la familia \mathcal{L} contiene al menos una coalición unitaria, se pueden dar los siguientes casos:

1. Si \mathcal{L} no es atómica (es decir, si existe $j \in N$ tal que $\{j\} \notin \mathcal{L}$), entonces $I(\mathcal{L}, v) \neq \emptyset$, ya que se puede definir el vector $x = (x_i)_{i \in N}$ de la siguiente forma

$$x_i = \begin{cases} v(\{i\}), & \text{si } \{i\} \in \mathcal{L} \\ v(N) \Leftrightarrow \sum_{\{k\} \in \mathcal{L}} v(\{k\}), & \text{si } i = j \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

que verifica las condiciones para poder afirmar que $x \in I(\mathcal{L}, v)$.

2. Cuando, para todo $i \in N$, se tiene que $\{i\} \in \mathcal{L}$, es decir, \mathcal{L} es atómica, entonces

$$I(\mathcal{L}, v) \neq \emptyset \text{ si y sólo si } v(N) \geq \sum_{i \in N} v(\{i\}).$$

A diferencia del conjunto de imputaciones de un juego $v \in \mathcal{G}$, (2^N) , el conjunto de imputaciones de un juego sobre una familia \mathcal{L} puede ser o no

acotado, dependiendo de la familia \mathcal{L} . Obsérvese que el conjunto $I(\mathcal{L}, v)$ viene determinado por un número finito de desigualdades y por tanto constituye un poliedro. La teoría de poliedros [79] proporciona algunas definiciones y resultados útiles para establecer una condición suficiente sobre la familia \mathcal{L} para que el conjunto de imputaciones sea acotado. Un conjunto $P \subseteq \mathbb{R}^n$ se llama *poliedro* si existe una matriz A y un vector columna b tal que

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}.$$

El poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ está acotado si y sólo si

$$\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0\} = \{0\}.$$

Además, un poliedro no vacío $P \subseteq \mathbb{R}^n$ está acotado si, y sólo si, existen $x_1, \dots, x_t \in \mathbb{R}^n$ tales que $P = \text{conv}\{x_1, \dots, x_t\}$.

Proposición 8.2 *Dado $v \in \mathcal{V}(\mathcal{L})$, son equivalentes:*

- (a) *La familia \mathcal{L} es atómica.*
- (b) *El conjunto $I(\mathcal{L}, v)$ está acotado.*

Demostración: Al ser el poliedro $I(\mathcal{L}, v)$ acotado si, y sólo si,

$$\{x \in \mathbb{R}^n : x(N) = 0, x_i \geq 0, \text{ para todo } \{i\} \in \mathcal{L}\} = \{0\},$$

es inmediato que para ello es condición necesaria y suficiente que la familia \mathcal{L} sea atómica. \square

De la definición de imputación es inmediato deducir que cuando la familia \mathcal{L} es atómica y $v(N) = \sum_{i \in N} v(\{i\})$, el conjunto de imputaciones se reduce a una única distribución.

Proposición 8.3 *Dado $v \in \mathcal{V}(\mathcal{L})$, donde la familia \mathcal{L} es atómica, se verifica*

$$I(\mathcal{L}, v) = \{(v(\{1\}), \dots, v(\{n\}))\} \text{ si y sólo si } v(N) = \sum_{i \in N} v(\{i\}).$$

Otro concepto de solución se basa en la idea de que no sólo cada jugador, sino también cada coalición factible S reciba al menos la cantidad que ésta puede obtener por sí sola. Es decir, que para toda coalición $S \in \mathcal{L}$, el vector de pago x verifique

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S).$$

El *core* del juego v consta de todos los vectores de pago eficientes que satisfacen las siguientes desigualdades.

$$\text{Core}(\mathcal{L}, v) = \{x \in \mathbb{R}^n : x(N) = v(N), x(S) \geq v(S), \text{ para toda } S \in \mathcal{L}\}$$

Obsérvese que si la familia \mathcal{L} es atómica, la acotación del conjunto de imputaciones $I(\mathcal{L}, v)$, implica la siguiente proposición.

Proposición 8.4 *Sea $v \in \mathcal{G}(\mathcal{L})$. Si la familia \mathcal{L} es atómica, entonces el poliedro $\text{Core}(\mathcal{L}, v)$ está acotado.*

El recíproco de esta proposición no es cierto en general. Basta considerar $N = \{1, 2, 3\}$ y la familia $\mathcal{L} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$, sobre la que se define el juego $v(S) = |S| \Leftrightarrow 1$, para toda coalición no vacía $S \in \mathcal{L}$. En este caso,

$$\text{Core}(\mathcal{L}, v) = \{x \in \mathbb{R}_+^n : x_1 + x_2 + x_3 = 2, x_1 \leq 1, x_2 \leq 1, x_3 \leq 2\},$$

es un conjunto acotado y sin embargo, la familia \mathcal{L} no es atómica.

Para poder asegurar que se verifica el recíproco, hay que establecer una condición adicional sobre la familia \mathcal{L} .

Proposición 8.5 *Sean \mathcal{L} un espacio de clausura y $v \in \mathcal{G}(\mathcal{L})$ un juego tal que $\text{Core}(\mathcal{L}, v) \neq \emptyset$. Son equivalentes:*

- (a) *El core del juego v es un poliedro acotado.*
- (b) *La familia \mathcal{L} es atómica.*

Demostración: Como ya se ha visto, la implicación (b) \Rightarrow (a) es cierta, aunque la familia \mathcal{L} de coaliciones factibles no sea espacio de clausura. Queda probar la otra implicación. Si existiera $j \in N$ tal que $\{j\} \notin \mathcal{L}$, consideramos $\overline{\{j\}} \in \mathcal{L}$. Sea $k \in \overline{\{j\}}$ con $k \neq j$. Definimos el vector $x \in \mathbb{R}^n$ de la siguiente forma

$$x_i = \begin{cases} \Leftrightarrow 1, & \text{si } i = j \\ 1, & \text{si } i = k \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se verifica $x(N) = 0$. Además, $x(S) \geq 0$, para toda $S \in \mathcal{L}$, ya que si $j \in S$ entonces $\overline{\{j\}} \subseteq S$ y de aquí $k \in S$. Esto prueba que

$$\{x \in \mathbb{R}^n : x(N) = 0, x(S) \geq 0, \text{ para toda } S \in \mathcal{L} \neq \{0\},$$

en contradicción con la hipótesis de acotación del poliedro $Core(\mathcal{L}, v)$. \square

Cuando el conjunto de imputaciones es no vacío, se definen los *conjuntos estables*, concepto de solución para juegos cooperativos, debido a von Neumann y Morgenstern [93]. Para extender su definición a juegos $v \in \mathcal{G}(\mathcal{L})$, introducimos una relación entre las imputaciones llamada *dominación*.

Definición 8.4 Sean $v \in \mathcal{G}(\mathcal{L})$, $x, y \in I(\mathcal{L}, v)$. La imputación y domina a la imputación x , $y \text{ dom } x$, si existe una coalición no vacía $S \in \mathcal{L}$ tal que

$$y(S) \leq v(S), \text{ y además } y_i > x_i, \text{ para todo } i \in S.$$

Observemos que estas condiciones excluyen la dominancia a través de la gran coalición N y de aquellas coaliciones unitarias de \mathcal{L} .

Definición 8.5 Sea $v \in \mathcal{G}(\mathcal{L})$. Un conjunto $E \subseteq I(\mathcal{L}, v)$ se dice que es un conjunto estable para el juego v cuando satisface las dos condiciones siguientes:

1. *Estabilidad interna:* dados cualesquiera $x, y \in E$, x no domina a y .
2. *Estabilidad externa:* si $x \in I(\mathcal{L}, v) \setminus E$, entonces existe $y \in E$ tal que $y \text{ dom } x$.

A continuación, se analiza la dominancia entre imputaciones y se estudia la relación con el core. Además, probaremos que si el core de un juego $v \in \mathcal{G}(\mathcal{L})$ es estable, entonces es el único conjunto estable para el juego. En el caso $\mathcal{L} = 2^N$, estos resultados son conocidos (ver Driessen [28]).

Proposición 8.6 *Si $v \in \mathcal{G}(\mathcal{L})$, se verifica:*

$$\text{Core}(\mathcal{L}, v) \subseteq \{x \in I(\mathcal{L}, v) : \text{no existe } y \in I(\mathcal{L}, v) \text{ tal que } y \text{ dom } x\}.$$

Demostración: Sea $x \in \text{Core}(\mathcal{L}, v)$. Supongamos que existe $y \in I(\mathcal{L}, v)$ tal que $y \text{ dom } x$. La definición de dominancia asegura que existe $S \in \mathcal{L}$, $S \neq \emptyset$, verificando $x(S) < y(S) \leq v(S)$. Entonces, $x(S) < v(S)$ es una contradicción con $x \in \text{Core}(\mathcal{L}, v)$. \square

Teorema 8.2 *Si E es un conjunto estable para $v \in \mathcal{G}(\mathcal{L})$, se verifican*

1. $\text{Core}(\mathcal{L}, v) \subseteq E$.
2. Si $\text{Core}(\mathcal{L}, v)$ es un conjunto estable, entonces $E = \text{Core}(\mathcal{L}, v)$.

Demostración: 1. Si la inclusión no fuese cierta, entonces existiría $x \in \text{Core}(\mathcal{L}, v) \setminus E$. Por ser E un conjunto estable, existe $y \in E$ tal que $y \text{ dom } x$. Esto contradice la proposición anterior.

2. Por el apartado anterior, $\text{Core}(\mathcal{L}, v) \subseteq E$, con lo cual, es suficiente demostrar la inclusión contraria. Supóngase que existe $x \in E \setminus \text{Core}(\mathcal{L}, v)$. Como $\text{Core}(\mathcal{L}, v)$ es un conjunto estable, existe $y \in \text{Core}(\mathcal{L}, v)$ tal que $y \text{ dom } x$. Por tanto $\{x, y\} \subseteq E$ satisface que $y \text{ dom } x$, pero esto es una contradicción con la estabilidad de E . \square

Ejemplo 8.5 (Driessen [28]) *Consideremos una situación económica en la que hay varias empresas que fabrican dos artículos A y B complementarios que son utilizables sólo en iguales cantidades. Supongamos que el conjunto de empresas se divide en dos subconjuntos disjuntos no vacíos P y Q , donde las que pertenecen a P (Q respectivamente) producen diariamente una unidad (α unidades) del artículo A (B). Por otro lado, se supone que la mercancía que*

se produce con una unidad de ambos artículos puede ser vendida obteniéndose una ganancia neta de una unidad de dinero.

Con las consideraciones anteriores, la función de ganancia neta diaria v que describe el valor monetario más grande posible de la producción de los artículos por un grupo de empresas, está dada por

$$v(S) = \min\{|S \cap P|, \alpha |S \cap Q|\} \text{ para todo } S \subseteq N.$$

Esta situación económica puede ser modelada como un juego cooperativo (N, v) donde el conjunto N de jugadores es $N = P \cup Q$, y la función característica v es precisamente la función de ganancia neta diaria. Notemos que $v(\{i\}) = 0$ para todo $i \in N$.

Trataremos el caso de tres empresas donde $P = \{1\}$, $Q = \{2, 3\}$ y discutiremos los casos correspondientes a $\alpha = 0.5$ y $\alpha = 1$. En esta situación, $v(N) = 1$, $v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = \alpha$, $v(\{2, 3\}) = 0$, así que tenemos

$$\begin{aligned} \text{Core}(v) &= \{x \in \mathbb{R}_+^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_2 \leq 1 \Leftrightarrow \alpha, x_3 \leq 1 \Leftrightarrow \alpha\} \\ &= \text{conv}\{(1, 0, 0), (\alpha, 1 \Leftrightarrow \alpha, 0), (\alpha, 0, 1 \Leftrightarrow \alpha), (2\alpha \Leftrightarrow 1, 1 \Leftrightarrow \alpha, 1 \Leftrightarrow \alpha)\}. \end{aligned}$$

El core es un cuadrilátero dentro del conjunto de imputaciones cuando $\alpha = 0.5$, y se reduce a un único punto si $\alpha = 1$.

En orden a investigar la estabilidad, notemos que la dominación sólo es posible a través de las coaliciones $\{1, 2\}$ y $\{1, 3\}$. Para toda $x, y \in I(2^N, v)$ se tiene

$$x \text{ dom } y \text{ a través de } \{1, 2\} \text{ cuando } x_1 > y_1, x_2 > y_2, x_3 \geq 1 \Leftrightarrow \alpha.$$

$$x \text{ dom } y \text{ a través de } \{1, 3\} \text{ cuando } x_1 > y_1, x_3 > y_3, x_2 \geq 1 \Leftrightarrow \alpha.$$

En el caso $\alpha = 0.5$ se sigue que el conjunto de todas las imputaciones que son dominadas por algún elemento del core a través de las coaliciones $\{1, 2\}$ y $\{1, 3\}$ respectivamente es igual a

$$\{y \in I(2^N, v) : y_2 < 0.5 < y_3\} \text{ y } \{y \in I(2^N, v) : y_3 < 0.5 < y_2\},$$

y puesto que estos dos conjuntos junto con el core determinan el conjunto de imputaciones, entonces el core es el único conjunto estable.

En el caso $\alpha = 1$, el juego posee una colección de conjuntos estables de la forma

$$\text{conv}\{(0, \beta, 1 \Leftrightarrow \beta), (1, 0, 0)\},$$

donde β es cualquier número real tal que $0 \leq \beta \leq 1$. En particular, el conjunto estable obtenido para $\beta = 1$, determina que la ganancia neta podría repartirse de cualquier forma entre los jugadores 1 y 2.

Weber [96] ha propuesto como concepto de solución para un juego cooperativo un subconjunto del conjunto de preimputaciones cuya definición se basa en los vectores de contribución marginal. Si consideramos todas las posibles permutaciones del conjunto de jugadores N , cada permutación i_1, i_2, \dots, i_n se puede entender como un proceso secuencial de formación de la gran coalición. Partiendo del conjunto vacío, primero se incorpora el jugador i_1 , a continuación el i_2 y así sucesivamente hasta que la incorporación del jugador i_n origina la coalición N . En cada uno de estos procesos, cada jugador puede evaluar su contribución a la coalición a la que se ha incorporado, lo cual se puede reflejar en un vector que se denomina *vector de contribución marginal*. La componente j -ésima de dicho vector representa la contribución del jugador j a la coalición de sus predecesores.

Para extender la idea de Weber a un juego v definido sobre una familia $\mathcal{L} \neq 2^N$, consideraremos a partir de ahora que la familia de coaliciones factibles es una geometría convexa.

Cuando \mathcal{L} es una geometría convexa, cada una de sus cadenas maximales determina una permutación del conjunto de jugadores y en definitiva, un orden secuencial de formación de la gran coalición (un orden compatible según la definición de Edelman). Dados $i \in N$, y una cadena maximal C , el conjunto

$$C(i) = \{j \in N : j \preceq i \text{ en la cadena } C\},$$

representará la coalición de \mathcal{L} formada por el jugador i y sus predecesores en la cadena C . Evidentemente, $i \in \text{ex}(C(i))$ ya que $C(i) \setminus i \in \mathcal{L}$.

Definición 8.6 Sea $C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$ una cadena maximal. Si $v \in \mathcal{V}(\mathcal{L})$, el vector de contribución marginal con respecto a la cadena C en el juego v es el vector $a^C(v) \in \mathbb{R}^n$, cuyas componentes son $a_i^C(v) = v(C(i)) \Leftrightarrow v(C(i) \setminus i)$.

De la siguiente proposición deduciremos que los vectores de contribución marginal asociados a las cadenas maximales $C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$ son preimputaciones para el juego v .

Proposición 8.7 *Sea $v \in \mathcal{G}(\mathcal{L})$ un juego sobre una geometría convexa. Entonces, se verifica*

$$\sum_{j \in S} a_j^C(v) = v(S),$$

para cada cadena $C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$ y para todo convexo S de la cadena C .

Demostración: Dada $C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$, para cada $k \in N$, denotaremos por S_k la coalición de la cadena maximal C de cardinal k . Si $S_0 = \emptyset$ y $S_k = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ para todo $1 \leq k \leq n$, se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{j \in S_k} a_j^C(v) &= \sum_{j=1}^k a_{i_j}^C(v) \\ &= \sum_{j=1}^k [v(C(i_j)) \Leftrightarrow v(C(i_j) \setminus i_j)] \\ &= \sum_{j=1}^k [v(S_j) \Leftrightarrow v(S_{j-1})] \\ &= v(S_k). \end{aligned}$$

Notemos que para $S_n = N$ se verifica $\sum_{j \in N} a_j^C(v) = v(N)$. □

De acuerdo con este resultado, cualquier vector de contribución marginal es un vector eficiente que satisface al menos n igualdades de entre las desigualdades que definen el core del juego. Entonces, podemos afirmar que cualquier vector de contribución marginal es o bien un punto exterior al core o bien un vértice del core, ya que un punto de un poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ es un vértice del mismo si y sólo si verifica n igualdades linealmente independientes de $Ax = b$.

Corolario 8.1 *Sea $v \in \mathcal{G}(\mathcal{L})$ un juego sobre una geometría convexa y sea $C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$. Si el vector $a^C(v) \in \text{Core}(\mathcal{L}, v)$, entonces $a^C(v)$ es un vértice del poliedro $\text{Core}(\mathcal{L}, v)$.*

Definición 8.7 Sea \mathcal{L} una geometría convexa. El conjunto de Weber de un juego $v \in \mathcal{G}(\mathcal{L})$ es la envoltura convexa de los vectores de contribución marginal. Es decir,

$$\text{Weber}(\mathcal{L}, v) = \text{conv} \{a^C(v) : C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})\}.$$

Puesto que el conjunto de preimputaciones es convexo y los vectores de contribución marginal son preimputaciones, se verifica que

$$\text{Weber}(\mathcal{L}, v) \subseteq I^*(\mathcal{L}, v).$$

Sin embargo, en general, los vectores del conjunto de Weber no son imputaciones. Pero es fácil observar, teniendo en cuenta que $I(\mathcal{L}, v)$ es convexo, el siguiente resultado: una condición necesaria y suficiente para que $\text{Weber}(\mathcal{L}, v) \subseteq I(\mathcal{L}, v)$ es que todo vector de contribución marginal sea una imputación.

Ejemplo 8.6 Consideremos $N = \{1, 2, 3, 4\}$ y la geometría convexa

$$\mathcal{L} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, N\}.$$

Para el juego $v : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$v(S) = \begin{cases} |S| \Leftrightarrow 1, & \text{si } S \neq N, \emptyset \\ 2, & \text{si } S = N, \end{cases}$$

se tiene

$$\text{Core}(\mathcal{L}, v) = \text{conv} \{(1, 1, 0, 0), (2, 0, 0, 0)\},$$

$$\text{Weber}(\mathcal{L}, v) = \text{conv} \{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0)\}.$$

Obsérvese que $\text{Weber}(\mathcal{L}, v) \subseteq I(\mathcal{L}, v)$, y que el reparto que proporciona cualquier vector del core parece menos apropiado como solución que, por ejemplo, el vector $(1, 1/2, 1/4, 1/4) \in \text{Weber}(\mathcal{L}, v)$.

Weber [96] probó que si $\mathcal{L} = 2^N$, entonces $\text{Core}(\mathcal{L}, v) \subseteq \text{Weber}(\mathcal{L}, v)$. Sin embargo, esta inclusión no es cierta si $\mathcal{L} \neq 2^N$. A continuación, damos

varios ejemplos en los cuales se pone de manifiesto esta afirmación. En ellos, se considerará la geometría convexa

$$Co(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\},$$

cuyo diagrama es el siguiente:

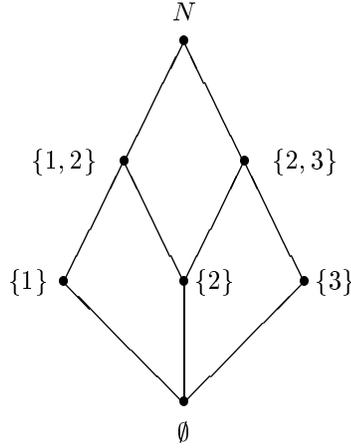


Figura 8.5.

Observemos que hay cuatro cadenas maximales en \mathcal{L} ,

$$C_1 : \quad \emptyset \subset \{1\} \subset \{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\},$$

$$C_2 : \quad \emptyset \subset \{2\} \subset \{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\},$$

$$C_3 : \quad \emptyset \subset \{2\} \subset \{2, 3\} \subset \{1, 2, 3\},$$

$$C_4 : \quad \emptyset \subset \{3\} \subset \{2, 3\} \subset \{1, 2, 3\}.$$

Ejemplo 8.7 Sea el juego $v : \mathcal{L} \Leftrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0, \quad v(\{1, 2\}) = v(\{2, 3\}) = 2, \quad v(N) = 3.$$

Los vectores de contribución marginal en el juego v son

$$a^{C_1}(v) = (v(\{1\}) \Leftrightarrow v(\emptyset), v(\{1, 2\}) \Leftrightarrow v(\{1\}), v(N) \Leftrightarrow v(\{1, 2\})) = (0, 2, 1),$$

$$a^{C_2}(v) = (v(\{1, 2\}) \Leftrightarrow v(\{2\}), v(\{2\}) \Leftrightarrow v(\emptyset), v(N) \Leftrightarrow v(\{1, 2\})) = (2, 0, 1),$$

$$a^{C_3}(v) = (v(N) \Leftrightarrow v(\{2, 3\}), v(\{2\}) \Leftrightarrow v(\emptyset), v(\{2, 3\}) \Leftrightarrow v(\{2\})) = (1, 0, 2),$$

$$a^{C_4}(v) = (v(N) \Leftrightarrow v(\{2, 3\}), v(\{2, 3\}) \Leftrightarrow v(\{3\}), v(\{3\}) \Leftrightarrow v(\emptyset)) = (1, 2, 0),$$

por lo que $Weber(\mathcal{L}, v) = conv\{(0, 2, 1), (2, 0, 1), (1, 0, 2), (1, 2, 0)\}$.

Por otro lado, el core del juego v es el conjunto

$$\begin{aligned} Core(\mathcal{L}, v) &= \{x \in \mathbb{R}_+^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 3, x_3 \leq 1, x_1 \leq 1\} \\ &= conv\{(0, 2, 1), (1, 2, 0), (0, 3, 0), (1, 1, 1)\}. \end{aligned}$$

En la siguiente figura se reflejan las posiciones de ambos conjuntos.

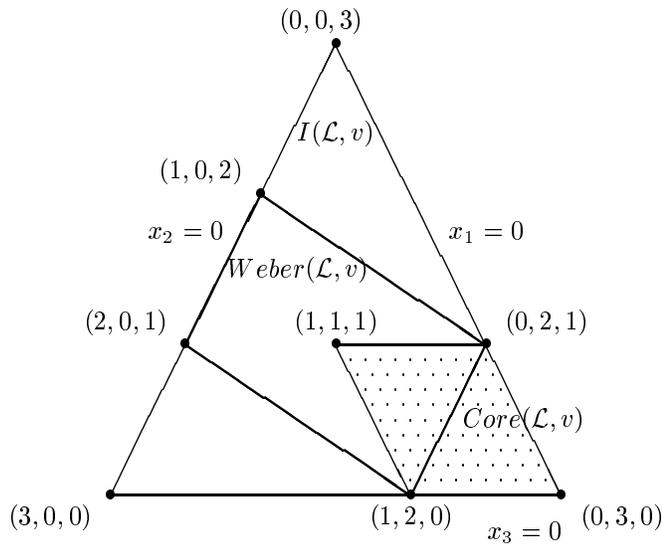


Figura 8.6.

En este ejemplo, $Core(\mathcal{L}, v) \not\subseteq Weber(\mathcal{L}, v)$ y $Weber(\mathcal{L}, v) \not\subseteq Core(\mathcal{L}, v)$.

Ejemplo 8.8 Sea el juego $v : \mathcal{L} \Leftrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0, \quad v(\{1, 2\}) = 1, \quad v(\{2, 3\}) = 0, \quad v(N) = 3.$$

Los vectores de contribución marginal para este juego v son

$$a^{C_1}(v) = (0, 1, 2), \quad a^{C_2}(v) = (1, 0, 2), \quad a^{C_3}(v) = (3, 0, 0), \quad a^{C_4}(v) = (3, 0, 0),$$

y el conjunto de Weber es

$$\text{Weber}(\mathcal{L}, v) = \text{conv}\{(0, 1, 2), (1, 0, 2), (3, 0, 0)\}.$$

Por otra parte, el core del juego viene dado por el conjunto

$$\begin{aligned} \text{Core}(\mathcal{L}, v) &= \{x \in \mathbb{R}_+^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 3, x_3 \leq 2, x_1 \leq 3\} \\ &= \text{conv}\{(0, 1, 2), (1, 0, 2), (3, 0, 0), (0, 3, 0)\}. \end{aligned}$$

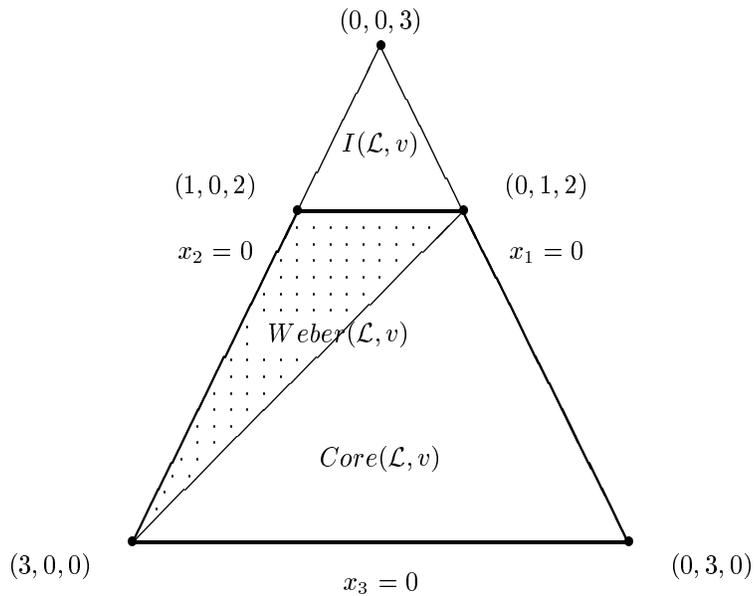


Figura 8.7.

En este juego, todos los vectores de contribución marginal coinciden con alguno de los vértices del core y, por tanto, se verifica

$$\text{Weber}(\mathcal{L}, v) \subset \text{Core}(\mathcal{L}, v).$$

Como veremos seguidamente, esta inclusión se debe a una característica del juego: su convexidad.

Definición 8.8 Un juego $v \in \mathcal{G}(\mathcal{L})$ se dice convexo o supermodular si se verifica

$$v(\overline{S \cup T}) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T),$$

para cualesquiera $S, T \in \mathcal{L}$.

En el caso de un juego cooperativo, es decir, si $\mathcal{L} = 2^N$, el juego es convexo cuando $v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T)$, para cualesquiera $S, T \subseteq N$.

Shapley [84] probó que en un juego cooperativo convexo, el core coincide con el conjunto de Weber. Ichiishi [49] demostró que un juego cooperativo, para el cual el core coincide con el conjunto de Weber, es un juego convexo. Entonces,

$$\text{Core}(2^N, v) = \text{Weber}(2^N, v) \text{ si y sólo si } v \text{ es un juego convexo.}$$

En los ejemplos anteriores, comprobamos que la inclusión

$$\text{Core}(\mathcal{L}, v) \subseteq \text{Weber}(\mathcal{L}, v),$$

no se verifica en general si \mathcal{L} es una geometría convexa distinta de 2^N . No obstante, cabe preguntarse si la inclusión contraria es cierta en el caso de los juegos supermodulares.

Para la clase de juegos supermodulares, es lógico pensar que sí va a ser cierta la inclusión

$$\text{Weber}(\mathcal{L}, v) \subseteq \text{Core}(\mathcal{L}, v),$$

ya que podemos argumentar del siguiente modo: si $v \in \mathcal{G}(\mathcal{L})$ y consideramos cualquier extensión $\tilde{v} \in \mathcal{G}(2^N)$ de este juego v , es decir, $\tilde{v} : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tilde{v}(S) = v(S)$ para toda $S \in \mathcal{L}$, entonces se tendrá

$$\text{Core}(2^N, \tilde{v}) \subseteq \text{Core}(\mathcal{L}, v),$$

ya que los vectores del $\text{Core}(2^N, \tilde{v})$ verifican las restricciones del $\text{Core}(\mathcal{L}, v)$ y en general, algunas más. Si comparamos ahora los conjuntos $\text{Weber}(\mathcal{L}, v)$ y $\text{Weber}(2^N, \tilde{v})$, claramente se tiene

$$\text{Weber}(\mathcal{L}, v) \subseteq \text{Weber}(2^N, \tilde{v}).$$

Esto se sigue sin más que observar que la geometría convexa 2^N consta de todas las cadenas maximales de \mathcal{L} y, en general, de algunas más. Aplicando ahora la caracterización de los juegos cooperativos convexos, si $\tilde{v} \in \mathcal{G}(2^N)$ es un juego convexo o supermodular, se tiene

$$Weber(\mathcal{L}, v) \subseteq Weber(2^N, \tilde{v}) = Core(2^N, \tilde{v}) \subseteq Core(\mathcal{L}, v).$$

Para formalizar este razonamiento, hay que generalizar previamente la definición de juego cooperativo convexo o supermodular al caso de juegos sobre geometrías convexas. Una generalización podría ser la dada anteriormente, pero también hay otras posibles generalizaciones.

Definición 8.9 *Sea \mathcal{L} una geometría convexa. Un juego $v \in \mathcal{G}(\mathcal{L})$ se dice quasi-supermodular si, para cualesquiera $S, T \in \mathcal{L}$ con $S \cup T \in \mathcal{L}$, se verifica*

$$v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T).$$

Es evidente que todo juego supermodular es quasi-supermodular. Se puede observar que si hay una única cadena maximal en \mathcal{L} , dadas dos coaliciones $S, T \in \mathcal{L}$, se tiene que o bien $S \subseteq T$ o bien $T \subseteq S$ y así cualquier juego que se defina sobre \mathcal{L} es supermodular y quasi-supermodular porque se tendría la igualdad $v(S \cup T) + v(S \cap T) = v(S) + v(T)$. Esto es, ambas nociones coinciden en este tipo de geometrías convexas.

La siguiente proposición, que caracteriza los juegos quasi-supermodulares, será usada en las pruebas de resultados posteriores.

Proposición 8.8 *Sea \mathcal{L} una geometría convexa. Un juego $v \in \mathcal{G}(\mathcal{L})$ es quasi-supermodular si y sólo si para cualesquiera $S, T \in \mathcal{L}$ tal que $T \subseteq S$ y para todo $i \in ex(S) \cap T$, se verifica $v(S) \Leftrightarrow v(S \setminus i) \geq v(T) \Leftrightarrow v(T \setminus i)$.*

El siguiente resultado permite identificar los juegos para los que los vectores de contribución marginal son vectores del core.

Proposición 8.9 *Sea \mathcal{L} una geometría convexa. Una condición necesaria y suficiente para que todos los vectores de contribución marginal de un juego $v \in \mathcal{G}(\mathcal{L})$ sean vectores del core es que el juego v sea quasi-supermodular.*

Demostración: *Condición suficiente.* Sea C una cadena maximal en \mathcal{L} . Entonces $a^C(v)$ es eficiente y, para toda coalición S de la cadena C , se verifica

$$\sum_{j \in S} a_j^C(v) = v(S).$$

Para ver que $a^C(v) \in \text{Core}(\mathcal{L}, v)$, hay que probar que, para toda coalición S que no esté en la cadena C , se tiene

$$\sum_{j \in S} a_j^C(v) \geq v(S).$$

En efecto, sea $S \in \mathcal{L}$ una coalición que no pertenece a C , y supongamos que $|S| = s$. Denotamos $S = \{i_1, i_2, \dots, i_s\}$, donde los elementos están escritos en el orden de incorporación en la cadena C ; esto es

$$C(i_1) \subset C(i_2) \subset \dots \subset C(i_s).$$

Si llamamos S_j al conjunto $\{i_1, i_2, \dots, i_j\}$ para toda $1 \leq j \leq s$ y $S_0 = \emptyset$, podemos observar que, para todo $1 \leq j \leq s$, se tiene que $S_j \in \mathcal{L}$ ya que $S_j = S \cap C(i_j)$. Además $i_j \in \text{ex}(C(i_j))$, y también $i_j \in S_j$. Por ser v un juego quasi-supermodular, la proposición 8.8 implica que, para todo $1 \leq j \leq s$,

$$v(C(i_j)) \Leftrightarrow v(C(i_j) \setminus i_j) \geq v(S_j) \Leftrightarrow v(S_{j-1}),$$

y de aquí obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{j \in S} a_j^C(v) &= \sum_{j=1}^s a_{i_j}^C(v) \\ &= \sum_{j=1}^s [v(C(i_j)) \Leftrightarrow v(C(i_j) \setminus i_j)] \\ &\geq \sum_{j=1}^s [v(S_j) \Leftrightarrow v(S_{j-1})] \\ &= v(S). \end{aligned}$$

Condición necesaria. Para cada $S, T \in \mathcal{L}$ con $S \cup T \in \mathcal{L}$, consideramos una cadena maximal $C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$ que contenga a $S \cap T$ y $S \cup T$. Por ser los

vectores de contribución marginal elementos del $Core(\mathcal{L}, v)$, tenemos

$$\sum_{j \in S} a_j^C(v) \geq v(S) \quad \text{y} \quad \sum_{j \in T} a_j^C(v) \geq v(T).$$

Por la elección de la cadena maximal C , se verifica también que

$$\sum_{j \in S \cup T} a_j^C(v) = v(S \cup T) \quad \text{y} \quad \sum_{j \in S \cap T} a_j^C(v) = v(S \cap T).$$

Por tanto, obtenemos

$$\begin{aligned} v(S) + v(T) &\leq \sum_{j \in S} a_j^C(v) + \sum_{j \in T} a_j^C(v) \\ &= \sum_{j \in S \cup T} a_j^C(v) + \sum_{j \in S \cap T} a_j^C(v) \\ &= v(S \cup T) + v(S \cap T). \end{aligned}$$

□

Al ser el core de un juego un conjunto convexo, una consecuencia inmediata de este teorema es la siguiente.

Corolario 8.2 *Sea $v \in \mathcal{G}(\mathcal{L})$ un juego sobre una geometría convexa. Una condición necesaria y suficiente para que $Weber(\mathcal{L}, v) \subseteq Core(\mathcal{L}, v)$ es que el juego v sea quasi-supermodular.*

Veremos que la clase de juegos quasi-supermodulares se identifica con la de los juegos supermodulares dentro del conjunto de juegos monótonos. Para ello, definimos previamente el concepto de juego monótono.

Definición 8.10 *Un juego $v \in \mathcal{G}(\mathcal{L})$ es monótono cuando, para cualesquiera $S, T \in \mathcal{L}$ con $S \subseteq T$, se verifica que $v(S) \leq v(T)$.*

Nótese que si v es monótono entonces $v(S) \geq v(\emptyset) = 0$, para todo $S \in \mathcal{L}$.

Teorema 8.3 *Si $v \in \mathcal{G}(\mathcal{L})$ es un juego monótono, entonces v es supermodular si y sólo si v es quasi-supermodular.*

Demostración: Es suficiente probar que todo juego monótono quasi-supermodular es supermodular. Sean $S, T \in \mathcal{L}$, y $C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$ una cadena maximal conteniendo a $\overline{S \cup T}$ y $S \cap T$. El vector de contribución marginal asociado a esta cadena $a^C(v)$, es un vector del $Core(\mathcal{L}, v)$ y además se verifica que $a_i^C(v) = v(C(i)) \Leftrightarrow v(C(i) \setminus i) \geq 0$ para todo $i \in N$, debido a la monotonía del juego v . Así, se tiene $a^C(v) \geq 0$ y además

$$\begin{aligned} \sum_{j \in S} a_j^C(v) &\geq v(S) \\ \sum_{j \in T} a_j^C(v) &\geq v(T) \\ \sum_{j \in \overline{S \cup T}} a_j^C(v) &= v(\overline{S \cup T}) \\ \sum_{j \in S \cap T} a_j^C(v) &= v(S \cap T). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta estas relaciones, obtenemos

$$\begin{aligned} v(S) + v(T) &\leq \sum_{j \in S} a_j^C(v) + \sum_{j \in T} a_j^C(v) \\ &= \sum_{j \in \overline{S \cup T}} a_j^C(v) + \sum_{j \in S \cap T} a_j^C(v) \\ &\leq \sum_{j \in \overline{S \cup T}} a_j^C(v) + \sum_{j \in S \cap T} a_j^C(v) \\ &= v(\overline{S \cup T}) + v(S \cap T). \end{aligned}$$

□

El siguiente ejemplo muestra que hay juegos quasi-supermodulares para los que el core y el conjunto de Weber coinciden.

Ejemplo 8.9 Sea el juego $v : \mathcal{L} \Leftrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$v(\{1\}) = 1, v(\{2\}) = \Leftrightarrow 1, v(\{3\}) = 1, v(\{1, 2\}) = v(\{2, 3\}) = 0, v(N) = 1.$$

Este juego es quasi-supermodular y los vectores de contribución marginal son: $a^{C_1}(v) = a^{C_2}(v) = a^{C_3}(v) = a^{C_4}(v) = (1, \Leftrightarrow 1, 1)$. Entonces, se verifica que $Weber(\mathcal{L}, v) = \{(1, \Leftrightarrow 1, 1)\}$. Además, también $Core(\mathcal{L}, v) = \{(1, \Leftrightarrow 1, 1)\}$.

Proposición 8.10 Sean \mathcal{L} una geometría convexa atómica y $v \in \mathcal{V}(\mathcal{L})$. Entonces, $Weber(\mathcal{L}, v) = \{(v(\{1\}), \dots, v(\{n\}))\}$ si y sólo si $v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\})$, para toda $S \in \mathcal{L}$.

Demostración: Es evidente que si $v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\})$, para toda $S \in \mathcal{L}$, entonces todos los vectores de contribución marginal coinciden y además $a^C(v) = \{(v(\{1\}), \dots, v(\{n\}))\}$, para toda $C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$.

Recíprocamente, si $Weber(\mathcal{L}, v) = \{(v(\{1\}), \dots, v(\{n\}))\}$, probaremos que $v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\})$, para toda $S \in \mathcal{L}$, por inducción sobre el cardinal de S . Para $S \in \mathcal{L}$ con $|S| = 2$, se tiene $S = \{i, j\}$ con $\{i\}, \{j\} \in \mathcal{L}$. Entonces, siendo C una cadena maximal que contiene a S , y $S = C(j)$, se verifica $a_j^C(v) = v(C(j)) \Leftrightarrow v(C(j) \setminus j) = v(\{i\})$ y así $v(S) = v(\{i\}) + v(\{j\})$.

Supongamos que la igualdad es cierta para toda $T \in \mathcal{L}$ con $|T| = r$. Para cualquier $S \in \mathcal{L}$ con $|S| = r + 1$, existe una coalición $T \in \mathcal{L}$ con $|T| = r$ tal que $S = T \cup \{k\}$ con $k \notin T$. Para una cadena maximal C que contenga a S y a T , se tiene que $a_k^C(v) = v(S) \Leftrightarrow v(T)$. Además, $a_k^C(v) = v(\{k\})$ para toda $C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$. Por tanto, $v(S) = v(T) + v(\{k\})$, y como, por hipótesis de inducción, se verifica

$$v(T) = \sum_{i \in T} v(\{i\}),$$

obtenemos

$$v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\}).$$

□

Observemos que todo juego que verifique $v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\})$, para toda $S \in \mathcal{L}$, es quasi-supermodular. Así podemos afirmar que éstos son los únicos juegos para los que su conjunto de imputaciones, core y conjunto de Weber coinciden y tienen como única distribución el vector $(v(\{1\}), \dots, v(\{n\}))$.

3. Juegos simples

Vamos a estudiar los conceptos de solución ya definidos anteriormente para una interesante clase particular de juegos: los *juegos simples*. Este tipo

de juegos surge, por ejemplo, al modelar situaciones de votación en las que el resultado refleja dos posibilidades (ganar-perder, aprobar-rechazar, etc.). Un tipo común de juego simple son los llamados juegos de votación ponderada, definidos en el capítulo anterior.

Supondremos, en todo lo que sigue, que la familia $\mathcal{L} \subseteq 2^N$ de coaliciones factibles es atómica, y sólo en determinadas ocasiones exigiremos otros requisitos a dicha familia.

Definición 8.11 *Un juego $v \in \mathcal{G}(\mathcal{L})$ es simple si satisface las dos condiciones siguientes:*

1. *Para cada coalición $S \in \mathcal{L}$, $v(S) \in \{0, 1\}$ y $v(N) = 1$.*
2. *Para cualesquiera $S, T \in \mathcal{L}$ con $S \subseteq T$, se tiene $v(S) \leq v(T)$.*

Denotaremos por $\Omega(\mathcal{L})$ la clase de todos los juegos simples definidos sobre la familia \mathcal{L} .

En un juego simple, decimos que una coalición $S \in \mathcal{L}$ es *ganadora* si $v(S) = 1$; en otro caso, es *perdedora*. Una coalición ganadora S es *minimal* si es ganadora, y no existe ninguna coalición contenida en S que sea ganadora. Denotaremos al conjunto de las coaliciones ganadoras minimales por \mathcal{W} . Dicho conjunto es no vacío y, en general, escribiremos $\mathcal{W} = \{S_1, \dots, S_r\}$ con $r \geq 1$. Observemos que todo juego simple está totalmente caracterizado por sus coaliciones ganadoras minimales. Si un juego tiene una única coalición ganadora minimal, esto es, $\mathcal{W} = \{S_1\}$, se tiene que v es el juego de unanimidad ζ_{S_1} .

Hay cierta clase de jugadores que, en los juegos simples, desempeñan un papel muy importante, y son los llamados jugadores veto. Un jugador $i \in N$ es un *jugador veto* en el juego v si pertenece a cada coalición ganadora S , es decir,

$$v(S) = 1 \implies i \in S.$$

Denotaremos por \mathcal{V} el conjunto de jugadores veto en el juego $v \in \Omega(\mathcal{L})$, esto es,

$$\mathcal{V} = \bigcap_{\{S \in \mathcal{L} : v(S)=1\}} S.$$

Si existen $\{i\}, \{j\} \in \mathcal{L}$, $i \neq j$, tales que $v(\{i\}) = v(\{j\}) = 1$, entonces $\mathcal{V} = \emptyset$. Esto quiere decir que no hay jugadores veto en todos los juegos simples. Por ello, para distinguir entre los juegos simples que tienen jugadores veto, y los que no los tienen, introducimos la siguiente definición. Un juego simple se llama *débil* si tiene al menos un jugador veto, esto es, $\mathcal{V} \neq \emptyset$. Se tiene entonces que cualquier juego de unanimidad ζ_T es débil y los jugadores veto son los miembros de la coalición T .

En la siguiente proposición probamos que, en la clase de juegos simples, el conjunto de juegos supermodulares es el conjunto de juegos de unanimidad.

Proposición 8.11 *Si \mathcal{L} es un espacio de clausura y $v \in \Omega(\mathcal{L})$, son equivalentes:*

- (a) *El juego v es supermodular.*
- (b) *El juego v es un juego de unanimidad.*

Además, cuando la familia \mathcal{L} es una geometría convexa, entonces (a) y (b) son equivalentes a

- (c) *El juego v es quasi-supermodular.*

Demostración: (b) \Rightarrow (a) Consideremos el juego de unanimidad ζ_T , y dos coaliciones $A, B \in \mathcal{L}$. Distinguimos tres situaciones:

1. Si se verifica $A \supseteq T$ y $B \supseteq T$, entonces

$$\zeta_T(A) = 1, \zeta_T(B) = 1, \zeta_T(\overline{A \cup B}) = 1 \text{ y } \zeta_T(A \cap B) = 1.$$

2. Si se verifica que $A \supseteq T$ y $B \not\supseteq T$, entonces

$$\zeta_T(A) = 1, \zeta_T(B) = 0, \zeta_T(\overline{A \cup B}) = 1 \text{ y } \zeta_T(A \cap B) = 0.$$

3. Si se verifica que $A \not\supseteq T$ y $B \not\supseteq T$, entonces

$$\zeta_T(A) = 0, \zeta_T(B) = 0, \zeta_T(\overline{A \cup B}) \geq 0 \text{ y } \zeta_T(A \cap B) = 0.$$

Por tanto, en cualquier caso se verifica la condición de supermodularidad.

(a) \Rightarrow (b) Sea $v \in \Omega(\mathcal{L})$ un juego supermodular y sea $T \in \mathcal{L}$ tal que

$$|T| = \min \{|S| : v(S) = 1\} = \alpha.$$

Esta coalición T es única ya que si hay dos coaliciones $A, T \in \mathcal{L}$, $A \neq T$ que satisfacen $v(T) = v(A) = 1$ y $|T| = |A| = \alpha$ entonces, como

$$v(T) + v(A) \leq v(\overline{T \cup A}) + v(T \cap A),$$

llegamos a $v(T \cap A) = 1$. Esto contradice la elección de T .

Ahora, utilizando dicha coalición T , para cualquier otra $A \in \mathcal{L}$ tal que $A \not\supseteq T$, como se verifica

$$v(A) + v(T) \leq v(\overline{A \cup T}) + v(A \cap T) = 1,$$

deducimos que $v(A) = 0$. Así el juego v es el juego de unanimidad correspondiente a la coalición T , esto es, $v = \zeta_T$.

Para finalizar la demostración, sólo hay que tener en cuenta que cuando el juego está definido sobre una geometría convexa la equivalencia entre (a) y (c) para juegos monótonos está probada en el teorema 8.3. \square

La equivalencia de (a) y (b) con la afirmación (c) no es cierta si \mathcal{L} no es una geometría convexa. Para ver esto, basta considerar

$$N = \{1, 2, 3, 4\}, \quad \mathcal{L} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, N\},$$

y el juego $v : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ que tiene como coaliciones ganadoras minimales a $\{1\}, \{2\}, \{3\}$. Este juego es quasi-supermodular y no es de unanimidad.

El conjunto de imputaciones

Si denotamos por $\{e_i\}_{i=1}^n$ el conjunto de vectores de la base canónica de \mathbb{R}^n , es inmediato comprobar que para el conjunto de imputaciones $I(\mathcal{L}, v)$ de un juego simple $v \in \Omega(\mathcal{L})$ hay tres posibilidades:

- $I(\mathcal{L}, v) = \emptyset$, si hay dos coaliciones ganadoras de cardinal uno.

- $I(\mathcal{L}, v) = \{e_k\}$, si existe $k \in N$, con $v(\{k\}) = 1$, y $v(\{i\}) = 0$ para todo $i \in N, i \neq k$.
- $I(\mathcal{L}, v) = \text{conv}\{e_1, \dots, e_n\}$, si $v(\{i\}) = 0$ para todo $i \in N$.

Luego el conjunto de imputaciones es un conjunto amplio cuando ninguna coalición ganadora minimal tiene cardinal uno.

El core

Se trata de probar aquí que el core de un juego simple está completamente determinado por los jugadores veto del juego.

Siendo, en general,

$$\text{Core}(\mathcal{L}, v) = \{x \in \mathbb{R}^n : x(N) = v(N), x(S) \geq v(S) \text{ para toda } S \in \mathcal{L}\},$$

podemos observar que cuando $v \in \Omega(\mathcal{L})$ hay ciertas desigualdades $x(S) \geq v(S)$ que son redundantes. En concreto, lo son las desigualdades correspondientes a coaliciones no unitarias que sean o bien perdedoras o bien ganadoras no minimales. En efecto: los vectores del core deben verificar las desigualdades $x_i \geq 0$ para todo $i \in N$, por lo que las restricciones correspondientes a coaliciones perdedoras no unitarias son redundantes. Además, si $S \in \mathcal{L}$ es ganadora pero no minimal, existe una coalición S^* ganadora minimal tal que $S^* \subset S$. En este caso se tendría

$$x(S) \geq x(S^*) \geq v(S^*) = v(S),$$

luego la condición $x(S) \geq v(S)$ es consecuencia de $x(S^*) \geq v(S^*)$ y por tanto es redundante. A la vista de estas observaciones, podemos concluir que

$$\text{Core}(\mathcal{L}, v) = \{x \in \mathbb{R}_+^n : x(N) = x(S) = 1, \text{ para todo } S \in \mathcal{W}\}.$$

Teorema 8.4 *Sea $v \in \Omega(\mathcal{L})$ un juego simple. Una condición necesaria y suficiente para que $\text{Core}(\mathcal{L}, v)$ sea no vacío es que el juego v sea débil. Además,*

$$\text{Core}(\mathcal{L}, v) = \{x \in \mathbb{R}_+^n : x(N) = x(\mathcal{V}) = 1\}.$$

Demostración: *Condición suficiente.* Si v es débil, entonces $\mathcal{V} \neq \emptyset$ y para cada $i \in \mathcal{V}$, consideramos el correspondiente vector e_i de la base canónica de \mathbb{R}^n . Tenemos entonces que $e_i(N) = 1 = v(N)$ y $e_i(S) = v(S)$ para todo $S \in \mathcal{W}$. Por tanto $e_i \in \text{Core}(\mathcal{L}, v)$.

Condición necesaria. Construimos la matriz $A = (a_{ij})$ de orden $r \times n$ tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } j \in S_i \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde S_1, \dots, S_r son las coaliciones ganadoras minimales en v . Entonces $\text{Core}(\mathcal{L}, v)$ es el conjunto de vectores que verifican

$$\sum_{j=1}^n x_j = 1, \quad Ax = (1, \dots, 1)^t, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Si dicho conjunto es no vacío, debe tener un elemento $x \neq 0$. Si suponemos que $\mathcal{V} = \emptyset$, cada columna de la matriz A tiene al menos una entrada igual a 0, y sumando todas las ecuaciones correspondientes a las filas de Ax se obtiene

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = |\mathcal{W}|, \quad \text{con } \alpha_j < |\mathcal{W}| \quad \text{para } 1 \leq j \leq n.$$

Por tanto, $(|\mathcal{W}| \Leftrightarrow \alpha_1) x_1 + \dots + (|\mathcal{W}| \Leftrightarrow \alpha_n) x_n = 0$, y esto es una contradicción por ser $x_j \geq 0$ para $1 \leq j \leq n$ y algún $x_k > 0$ con $1 \leq k \leq n$. Luego el juego es débil.

Finalmente, podemos observar que si el juego es débil y se toma $i \notin \mathcal{V}$ entonces debe ser $x_i = 0$ para todo vector del core, y así

$$\text{Core}(\mathcal{L}, v) = \{x \in \mathbb{R}_+^n : x(N) = x(\mathcal{V}) = 1\}.$$

□

El teorema anterior permite identificar los extremos del poliedro $\text{Core}(\mathcal{L}, v)$ y, como consecuencia de ello, es inmediato el siguiente resultado.

Proposición 8.12 *Para todo juego débil $v \in \Omega(\mathcal{L})$, se tiene*

$$\text{Core}(\mathcal{L}, v) = \text{conv}\{e_i : i \in \mathcal{V}\}.$$

El conjunto de Weber

A continuación, vamos a considerar el conjunto de Weber y, por ello, es necesario exigir, en lo que sigue, que la familia de coaliciones factibles \mathcal{L} sea una geometría convexa en N , no necesariamente atómica.

En primer lugar, veremos que el conjunto de Weber es un convexo cuyos puntos extremos están determinados por los jugadores que al unirse a una coalición perdedora la convierten en ganadora.

Proposición 8.13 *Si $v \in \Omega(\mathcal{L})$, entonces*

$$\text{Weber}(\mathcal{L}, v) = \text{conv} \left\{ e_i : i \in \bigcup_{l=1}^r \text{ex}(S_l) \right\}.$$

Demostración: Sea $C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$ una cadena maximal y sea $a^C(v) \in \mathbb{R}^n$ el vector de contribución marginal correspondiente a esta cadena. Para todo $i \in N$ se tiene que $a_i^C(v) = v(C(i)) \Leftrightarrow v(C(i) \setminus i) \in \{0, 1\}$ ya que v es un juego monótono. Además $a^C(v)(N) = v(N) = 1$. Entonces, el vector $a^C(v) \in \mathbb{R}^n$ tiene sólo una de sus componentes igual a 1 y el resto de ellas iguales a 0. Si suponemos que la componente j es igual a 1, es decir, $v(C(j)) = 1$ y $v(C(j) \setminus j) = 0$, entonces $a^C(v) = e_j$.

Por otra parte, $C(j)$ es una coalición ganadora y, por tanto, existe una coalición ganadora minimal S_k tal que $S_k \subseteq C(j)$. Nótese que $j \in S_k$, ya que en otro caso se tendría $S_k \subseteq C(j) \setminus j$ y así $C(j) \setminus j$ sería una coalición ganadora, lo cual no es posible ya que $v(C(j) \setminus j) = 0$. Además, $j \in \text{ex}(S_k)$ puesto que $S_k \setminus j = (C(j) \setminus j) \cap S_k \in \mathcal{L}$.

Para probar la inclusión contraria, sea $i \in \bigcup_{l=1}^r \text{ex}(S_l)$. Entonces existe una coalición ganadora minimal S_l tal que $i \in \text{ex}(S_l)$. Si $C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$ es una cadena maximal tal que $S_l = C(i)$, resulta que, para esta cadena, se tendría la igualdad $a^C(v) = e_i$. \square

En el caso particular de ser $\mathcal{L} = 2^N$, se tiene que

$$\text{Weber}(\mathcal{L}, v) = \text{conv} \left\{ e_i : i \in \bigcup_{l=1}^r S_l \right\}$$

y contiene al core. Sin embargo, cuando no trabajamos en dicha geometría convexa no siempre se verifica esta inclusión para juegos simples. En efecto,

siendo $N = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{L} = Co(\{1, 2, 3, 4\})$, y $v : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ el juego simple cuya única coalición ganadora minimal es $\{1, 2, 3\}$, tenemos

$$Core(\mathcal{L}, v) = \text{conv}\{e_1, e_2, e_3\} \quad \text{y} \quad Weber(\mathcal{L}, v) = \text{conv}\{e_1, e_3\}.$$

Conjuntos estables

Estudiaremos algunos resultados relativos a la estabilidad para juegos simples $v \in \Omega(\mathcal{L})$, donde \mathcal{L} es una familia atómica. Veamos, en primer lugar, que todo juego simple cuyo conjunto de imputaciones sea no vacío, tiene al menos un conjunto estable.

Teorema 8.5 *Todo juego simple $v \in \Omega(\mathcal{L})$ sobre una familia atómica, con $I(\mathcal{L}, v) \neq \emptyset$, tiene al menos un conjunto estable.*

Demostración: Al ser \mathcal{L} atómica y el conjunto de imputaciones no vacío, solo caben dos posibilidades para $I(\mathcal{L}, v)$. Cuando el conjunto de imputaciones se reduce a un vector, es inmediato deducir que dicho conjunto es el único conjunto estable del juego. Por ello, supongamos que $I(\mathcal{L}, v) = \text{conv}\{e_1, \dots, e_n\}$. Comprobaremos, en este caso, que para cada coalición ganadora minimal S en v , el conjunto formado por las imputaciones que reparten la unidad entre los jugadores de S es un conjunto estable. Si denotamos por E_S dicho conjunto; esto es

$$E_S = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n : \sum_{i \in S} x_i = 1, \quad x_j = 0, \quad \text{para todo } j \notin S \right\}$$

tenemos:

i) *Estabilidad interna.* Dados $x, y \in E_S$, no se verifica $x \text{ dom } y$. Ello es debido a que, caso de verificarse, existiría una coalición no vacía $T \in \mathcal{L}$, tal que

$$x_i > y_i \quad \text{para todo } i \in T, \quad \sum_{j \in T} x_j \leq v(T).$$

Estas dos condiciones sólo se pueden verificar si $T \subset S$ y $v(T) = 1$, ya que $x, y \in E_S$. Pero esto es imposible por ser S una coalición ganadora minimal.

ii) *Estabilidad externa.* Si $x \in I(\mathcal{L}, v) \setminus E_S$, entonces existe $y \in E_S$ tal que $y \text{ dom } x$. En efecto, teniendo en cuenta que $v(S) \Leftrightarrow x(S) > 0$, basta considerar el vector y de componentes

$$y_i = \begin{cases} 0, & \text{si } i \notin S \\ x_i + \frac{v(S) \Leftrightarrow x(S)}{|S|}, & \text{si } i \in S. \end{cases}$$

□

El siguiente resultado indica que los juegos de unanimidad son los únicos juegos simples sobre geometrías convexas para los que el core es un conjunto estable.

Teorema 8.6 *Sea \mathcal{L} una geometría convexa y sea $v \in \Omega(\mathcal{L})$ un juego simple. El conjunto $Core(\mathcal{L}, v)$ es estable si, y sólo si, el juego v es un juego de unanimidad.*

Demostración: Si $Core(\mathcal{L}, v)$ es estable, entonces es no vacío y además $Core(\mathcal{L}, v) = \text{conv} \left\{ e_i : i \in \bigcap_{j=1}^r S_j \right\}$, donde $\{S_1, \dots, S_r\}$ es el conjunto de coaliciones ganadoras minimales con $|S_1| \leq |S_2| \leq \dots \leq |S_r|$. Consideramos dos casos:

a) Si $|S_1| = 1$ o $|S_1| = n$, entonces $v = \zeta_{S_1}$.

b) Sea $1 < |S_1| < n$, y supongamos que $Weber(\mathcal{L}, v) \not\subseteq Core(\mathcal{L}, v)$. Entonces existe $k \in \bigcup_{j=1}^r ex(S_j) \setminus \bigcap_{j=1}^r S_j$ y así $e_k \notin Core(\mathcal{L}, v)$. Como $Core(\mathcal{L}, v)$ es un conjunto estable, existe $x \in Core(\mathcal{L}, v)$ tal que $x \text{ dom } e_k$ usando una coalición $T \in \mathcal{L}$. Por ser $x(T) = v(T)$, $x_i > 0$ para todo $i \in T$, $i \neq k$, y $x_k > 1$ si $k \in T$, debe ser $v(T) = 1$ y $k \notin T$. Así, existe una coalición ganadora minimal $S_{j^*} \in \mathcal{L}$ tal que $S_{j^*} \subseteq T$ y $x(S_{j^*}) = v(S_{j^*}) = 1$. Por tanto, $x_i > 0$ para todo $i \in S_{j^*}$ y como $x(N \setminus S_{j^*}) = 0$, esto implica que $x(S_p \setminus S_{j^*}) = 0$ para toda coalición ganadora minimal $S_p \in \mathcal{L}$, $S_p \neq S_{j^*}$. Sin embargo, como $x \in Core(\mathcal{L}, v)$, se tiene que $v(S_p) = 1$ y de aquí $x(S_p \cap S_{j^*}) = 1$ para toda coalición ganadora minimal $S_p \in \mathcal{L}$. Entonces, tiene que ser $S_{j^*} \subseteq \bigcap_{j=1}^r S_j$. Si no fuese así, existiría una coalición ganadora minimal $S_p \in \mathcal{L}$ tal que $S_{j^*} \not\subseteq S_p$ y se tendría que

$$x(N) = x(S_{j^*} \cap S_p) + x(S_{j^*} \setminus S_p) + \dots > 1,$$

pero esto es imposible. Por tanto, $\bigcap_{j=1}^r S_j = S_{j^*}$ y así $v = \zeta_{S_{j^*}}$.

Probaremos ahora el recíproco. Sea $v = \zeta_T$ un juego de unanimidad. Entonces, el conjunto $Core(\mathcal{L}, v) = \text{conv}\{e_i : i \in T\}$ al ser T la única coalición ganadora minimal y, como se ha probado en el teorema anterior $E_T = Core(\mathcal{L}, v)$ es un conjunto estable. \square

Ejemplo 8.10 Consideremos $N = \{1, 2, 3\}$, y el juego $v : 2^N \leftrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{si } |S| \geq 2 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces, $I(2^N, v) = \text{conv}\{e_1, e_2, e_3\}$ y $Core(2^N, v) = \emptyset$. Además, hay una infinidad de conjuntos estables. Cualquier conjunto formado por imputaciones que asignen un valor constante c a un jugador i , y determinen todos los posibles repartos del valor $1 \leftrightarrow c$ entre los otros dos jugadores, son conjuntos estables. Cada uno de estos conjuntos estables contienen infinidad de imputaciones, pero además el siguiente conjunto finito también es estable

$$E = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right), \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right), \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}.$$

En este ejemplo se observa con claridad que cada conjunto estable puede entenderse como un modelo de comportamiento, por el cual se eligen la imputaciones. Además, sugiere que cada conjunto estable delimita formas de reparto sobre las que los jugadores deben negociar, o bien indica un juego más pequeño entre las coaliciones.

Ejemplo 8.11 Consideremos $N = \{1, 2, 3\}$, la familia $\mathcal{L} = Co(\{1, 2, 3\})$, y el juego $v : \mathcal{L} \leftrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{si } |S| \geq 2 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Tiene interés observar cuales son sus conjuntos estables, y comparar con el ejemplo anterior. Teniendo en cuenta que, según lo que se advirtió al comienzo del estudio de los conjuntos estables, son conjuntos estables los E_S , con $S \in \mathcal{W}$, permanecen como conjuntos estables

$$E_{\{1,2\}} = \text{conv}\{e_1, e_2\}, \quad E_{\{2,3\}} = \text{conv}\{e_2, e_3\}.$$

Sin embargo, ninguno de los otros conjuntos estables del ejemplo anterior lo son ahora. Además, obsérvenos que $\text{Core}(\mathcal{L}, v) = \{(0, 1, 0)\}$, y aunque el core es no vacío, éste no ofrece soluciones razonables al juego, ni tampoco es un conjunto estable.

Conjuntos de negociación

Aunque en la literatura hay varios conceptos de conjuntos de negociación, introduciremos en el contexto de juegos simples, sólo tres de ellos, y mostraremos algunos resultados que los relacionan con el core y el conjunto de Weber.

Los diferentes conceptos de solución denominados conjuntos de negociación tienen en común el estudiar cómo repartir las ganancias de la cooperación (se supone ya decidida esta cooperación) teniendo en cuenta los procesos de negociación que se pueden establecer entre las diferentes coaliciones. Esto es, se tiene presente que ciertos jugadores pueden ofrecer pactos a otros con el fin de conseguir repartos más ventajosos, y que a su vez a estos pactos se pueden contraponer otros que los hagan peligrar.

- *Conjunto de Negociación de Aumann-Maschler (1969) [3].*

Sea x una imputación en $v \in \mathcal{L}$ y sean $i, j \in N$. Una *objeción* de i contra j en el vector x es un par (y, S) , donde $y \in \mathbb{R}_+^n$, $S \in \mathcal{L}$, $i \in S$, $j \notin S$, verificando

$y_k > x_k$, para cada $k \in S$: todos los miembros de S prefieren y a x . $y(S) = v(S)$: el jugador i puede asegurar a S el pago y , porque no supera $v(S)$.

Una *contraobjeción* de j contra el par (y, S) es un par (z, T) , donde $z \in \mathbb{R}_+^n$, $T \in \mathcal{L}$, $i \notin T$, $j \in T$, verificando

$z_k \geq x_k$, para cada $k \in T$:	el reparto de z les parece a todos los miembros de T al menos tan bueno como el de x .
$z_k \geq y_k$, para $k \in S \cap T$:	z es competitivo con y .
$z(T) = v(T)$:	el jugador j asegura a los miembros de T lo que ofrece con z .

El conjunto de negociación de Aumann-Maschler de v es el conjunto $B(\mathcal{L}, v)$ de todas las imputaciones x tales que si un jugador i tiene una objeción contra otro jugador j respecto x , entonces j tiene una contraobjeción a esta objeción.

Ejemplo 8.12 Consideremos $N = \{1, 2, 3\}$, y el juego $v : 2^N \leftrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$v(S) = \begin{cases} 0, & \text{si } |S| = 1 \\ 1, & \text{si } |S| \geq 2. \end{cases}$$

Entonces, $I(2^N, v) = \text{conv}\{e_1, e_2, e_3\}$ y $\text{Core}(2^N, v) = \emptyset$. De esta forma, caso de que esté decida la cooperación entre los jugadores ¿cómo se repartirán los jugadores el valor de la gran coalición $v(N) = 1$? El core, en este caso, no determina ninguna forma de reparto. Además parece lógico pensar que cualquier imputación no sea aceptada como reparto por todos los jugadores. Por ejemplo, la imputación $(1, 0, 0)$ no debe satisfacer a los jugadores 2 y 3, puesto que, en el juego su coalición está valorada por 1. Por otro lado, teniendo en cuenta la simetría del papel de los jugadores en dicho juego, sería razonable esperar que el reparto que se adopte los trate a todos por igual, esto es, que sea $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. En este caso el conjunto $B(\mathcal{L}, v) = \{(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})\}$. Para comprobar esta afirmación, basta observar que cualquier jugador i puede objetar contra cualquier otro j respecto de dicha imputación usando la coalición que él forma con el restante jugador k . Sin embargo, cualquier objeción presentada tiene contraobjeción por parte del jugador j utilizando la coalición $\{j, k\}$.

Obsérvese ahora que cuando el conjunto de imputaciones de un juego es vacío, entonces también el conjunto de negociación anterior es vacío. Esto sucede, por ejemplo, en el caso del juego $v : 2^{\{1,2,3\}} \leftrightarrow \mathbb{R}$, dado por

$$v(S) = \begin{cases} 0, & \text{si } S \in \{\emptyset, \{3\}\} \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En casos como éste, en los que también el conjunto de imputaciones es vacío, ¿cómo se debe hacer el reparto cuando los jugadores han decidido formar la gran coalición? Se verá que los siguientes conjuntos de negociación si pueden ofrecer soluciones.

- *El conjunto de negociación de Mas-Colell (1989) [59].*

Consideremos el conjunto $X(\mathcal{L}, v) = \{x \in \mathbb{R}_+^n : x(N) = v(N)\}$ y sea $x \in X(\mathcal{L}, v)$. Una *objeción* a x en el sentido de Mas-Colell es un par (y, S) con $y \in \mathbb{R}_+^n$, $S \in \mathcal{L}$, verificando

$$\begin{aligned} y_k &\geq x_k, \text{ para cada } k \in S, \text{ con al menos una desigualdad estricta,} \\ y(S) &\leq v(S). \end{aligned}$$

Una *contraobjeción* contra (y, S) es un par (z, T) , donde $z \in \mathbb{R}_+^n$ y $T \in \mathcal{L}$, verificando

$$\begin{aligned} z_k &\geq y_k, \text{ para cada } k \in T \cap S, \\ z_k &\geq x_k, \text{ para cada } k \in T \setminus S, \text{ con al menos una desigualdad estricta,} \\ z(T) &\leq v(T). \end{aligned}$$

El *conjunto de negociación de Mas-Colell* del juego v , denotado por $MB(\mathcal{L}, v)$, es el formado por los vectores $x \in X(\mathcal{L}, v)$ para los que toda objeción a x tiene contraobjeción.

- *El conjunto de negociación de Greenberg (1992) [43].*

Consideremos el conjunto $X^*(\mathcal{L}, v) = \{x \in \mathbb{R}_+^n : x(N) \leq v(N)\}$, y sea $x \in X^*(\mathcal{L}, v)$. Una *objeción* a x en el sentido de Greenberg es un par (y, S) con $y \in \mathbb{R}_+^n$, $S \in \mathcal{L}$, verificando

$$\begin{array}{l} y_k > x_k, \text{ para todo } k \in S, \\ y_k = x_k, \text{ para todo } k \in N \setminus S, \\ y(S) = v(S). \end{array}$$

Una *contraobjeción* contra (y, S) es un par (z, T) , donde $z \in \mathbb{R}_+^n$, y $T \in \mathcal{L}$, verificando

$$\begin{array}{l} z_k > y_k, \text{ para todo } k \in T, \\ z_k = y_k, \text{ para todo } k \in N \setminus T, \\ z(T) = v(T). \end{array}$$

El *conjunto de negociación modificado*, $MBS(\mathcal{L}, v)$, consta de todos los vectores $x \in X^*(\mathcal{L}, v)$ para los cuales toda objeción a x tiene una contraobjeción en el sentido de Greenberg.

Se puede comprobar que en el último ejemplo se tiene que el vector $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ pertenece a los dos últimos conjuntos de negociación. Además, dicho vector se puede considerar un reparto razonable ya que en este caso se puede entender que el jugador 3 no aporta nada a las coaliciones en las que participa, y sin embargo, los jugadores 1 y 2 desempeñan el mismo papel en el juego.

Los tres conjuntos de negociación introducidos contienen al core, ya que con estas definiciones a los vectores del core no se les puede poner objeciones. A continuación, se estudian diversas clases de juegos simples en los que dichos conjuntos coinciden con el core o con el conjunto de Weber. Las demostraciones de los resultados presentados a continuación, se dan en Jiménez Jiménez [52].

Teorema 8.7 *Sean \mathcal{L} un espacio de clausura atómico y $v \in \Omega(\mathcal{L})$ un juego débil. Entonces*

$$B(\mathcal{L}, v) = MB(\mathcal{L}, v) = Core(\mathcal{L}, v).$$

Este resultado anterior no es cierto si el juego $v \in \Omega(\mathcal{L})$ no es débil. Basta observar el ejemplo 8.12.

Teorema 8.8 Sean \mathcal{L} una geometría convexa atómica y $v \in \Omega(\mathcal{L})$ un juego débil. Entonces $MBS(\mathcal{L}, v) = Core(\mathcal{L}, v)$ si y sólo si v es un juego de unanimidad.

Los juegos de unanimidad sobre geometrías convexas son débiles. Si consideramos el juego de unanimidad $v = \zeta_T$, con $T \in \mathcal{L}$, $T \neq \emptyset$ entonces:

- $\mathcal{V} = T$,
- $Core(\mathcal{L}, v) = \text{conv}\{e_i : i \in T\} = B(\mathcal{L}, v) = MB(\mathcal{L}, v) = MBS(\mathcal{L}, v)$,
- $Weber(\mathcal{L}, v) = \text{conv}\{e_i : i \in ex(T)\}$,
- $Core(\mathcal{L}, v) = Weber(\mathcal{L}, v) \iff T = ex(T) \iff 2^T \subseteq \mathcal{L}$.

Teorema 8.9 Sean \mathcal{L} una geometría convexa atómica y $v \in \Omega(\mathcal{L})$ un juego simple. Si $B(\mathcal{L}, v) = Weber(\mathcal{L}, v)$, entonces v es un juego de unanimidad.

Teorema 8.10 Sean \mathcal{L} una geometría convexa atómica y el juego $v \in \Omega(\mathcal{L})$. Si $Core(\mathcal{L}, v) \neq \emptyset$ y $MB(\mathcal{L}, v) = Weber(\mathcal{L}, v)$, entonces v es un juego de unanimidad.

El recíproco de estos dos últimos teoremas no es cierto. Basta tomar el juego $v = \zeta_T$, con $T \in \mathcal{L}$, $T \neq \emptyset$ tal que $2^T \not\subseteq \mathcal{L}$, entonces

$$Weber(\mathcal{L}, v) \subset B(\mathcal{L}, v) \quad \text{y} \quad Weber(\mathcal{L}, v) \subset MB(\mathcal{L}, v).$$

CAPÍTULO IX

Valores e índices de poder en geometrías convexas

J. M. Bilbao A. Jiménez Losada E. A. Lebrón

1. El valor de Shapley en geometrías convexas

Un juego cooperativo de utilidad transferible es una aplicación

$$v : 2^N \Leftrightarrow \mathbb{R}, \quad v(\emptyset) = 0.$$

Como se indicó en el capítulo VI, Shapley [80] propuso el concepto de valor $\Phi(v) = (\Phi_1(v), \dots, \Phi_n(v))$ del juego. Este valor asigna, a cada jugador $i \in N$, el siguiente número

$$\Phi_i(v) = \sum_{\{S \subseteq N : i \in S\}} \frac{(s \Leftrightarrow 1)! (n \Leftrightarrow s)!}{n!} (v(S) \Leftrightarrow v(S \setminus i)), \quad s = |S|, \quad n = |N|.$$

La fórmula expresa el valor de Shapley para un jugador i como una suma ponderada de términos de la forma $v(S) \Leftrightarrow v(S \setminus i)$, que son las contribuciones marginales del jugador i a las coaliciones S .

El valor $\Phi_i(v)$ puede interpretarse como la contribución marginal esperada del jugador i , cuando la formación de coaliciones se produce de una manera determinada. El artículo original y una amplia discusión sobre este concepto y sus generalizaciones, se encuentran en el texto editado por Roth [76].

El valor de Shapley está axiomatizado para un juego cooperativo en el que se postula que todas las coaliciones son posibles. Sin embargo, ya que existen situaciones en las que sólo se puede suponer cooperación parcial, vamos a considerar una familia de coaliciones factibles $\mathcal{L} \subseteq 2^N$, elementos de una geometría convexa. Para este modelo, proponemos una nueva axiomatización del valor de Shapley en juegos definidos en geometrías convexas [7]. Para ello, probaremos que existe un único valor

$$\Phi : v \leftrightarrow (\Phi_1(v), \dots, \Phi_n(v)),$$

que satisface los axiomas de linealidad, jugador pasivo, eficiencia y cadena. Además, obtendremos una fórmula explícita de dicho valor y construiremos las funciones necesarias para calcularlo con el programa Mathematica. Estas funciones se expondrán en el capítulo X.

Sea Φ una aplicación

$$\Phi : , (\mathcal{L}) \leftrightarrow \mathbb{R}^n, \quad v \leftrightarrow (\Phi_1(v), \dots, \Phi_n(v)).$$

En primer lugar, estudiamos la propiedad de linealidad para los valores $\Phi_i(v)$ de los jugadores $i \in N$.

Axioma de linealidad: Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, y $v, w \in , (\mathcal{L})$, se verifica

$$\Phi_i(\alpha v + \beta w) = \alpha \Phi_i(v) + \beta \Phi_i(w), \quad \text{para todo } i \in N.$$

Teorema 9.1 *Sea $\Phi_i : , (\mathcal{L}) \leftrightarrow \mathbb{R}$ un valor para i , que satisface el axioma de linealidad. Entonces, existen unos coeficientes únicos $\{a_S^i : S \in \mathcal{L}, S \neq \emptyset\}$ tales que*

$$\Phi_i(v) = \sum_{S \in \mathcal{L}} a_S^i v(S).$$

Demostración: Al ser la colección $\{\delta_S : S \in \mathcal{L}, S \neq \emptyset\}$ una base del espacio vectorial $, (\mathcal{L})$, cualquier juego v se puede escribir como

$$v = \sum_{\{S \in \mathcal{L} : S \neq \emptyset\}} v(S) \delta_S,$$

y por la linealidad de Φ_i

$$\Phi_i(v) = \sum_{\{S \in \mathcal{L}: S \neq \emptyset\}} \Phi_i(\delta_S)v(S) = \sum_{\{S \in \mathcal{L}: S \neq \emptyset\}} a_S^i v(S).$$

□

Vamos a introducir el concepto de *jugador pasivo* y obtendremos algunas propiedades necesarias de los jugadores pasivos en los juegos de unanimidad e identidad. Por simplicidad en la notación, escribiremos $S \cup i$ en lugar de $S \cup \{i\}$.

Definición 9.1 *El jugador $i \in N$ es pasivo en el juego $v \in \mathcal{G}(\mathcal{L})$ si, para cualquier convexo $T \in \mathcal{L}$ tal que $i \notin T$ y $T \cup i \in \mathcal{L}$, se verifica*

$$v(T \cup i) \Leftrightarrow v(T) = \begin{cases} v(\{i\}), & \text{si } \{i\} \in \mathcal{L} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Proposición 9.1 *Sea \mathcal{L} una geometría convexa y sea $S \in \mathcal{L}$ un conjunto convexo. Entonces*

1. *Si $i \notin ex(S)$, el jugador i es pasivo en el juego de unanimidad ζ_S .*
2. *Si $i \in S \setminus ex(S)$, el jugador i es pasivo en el juego de identidad δ_S .*

Demostración: Sea $i \in N$ tal que $i \notin ex(S)$. Si $\{i\} \in \mathcal{L}$ entonces $S \neq \{i\}$, luego $\zeta_S(\{i\}) = 0$ y $\delta_S(\{i\}) = 0$.

1. Supongamos que existe $T \in \mathcal{L}$, tal que $i \notin T$ y $T \cup i \in \mathcal{L}$ verificando que $\zeta_S(T \cup i) \neq \zeta_S(T)$. En ese caso $\zeta_S(T \cup i) = 1$ y $\zeta_S(T) = 0$, por lo que $S \subseteq T \cup i$ y $S \not\subseteq T$. En consecuencia $S \setminus i = S \cap T \in \mathcal{L}$, luego obtenemos $i \in ex(S)$, en contra de lo supuesto.

2. Sean $T \in \mathcal{L}$, $i \notin T$ y $T \cup i \in \mathcal{L}$ tales que $\delta_S(T \cup i) \neq \delta_S(T)$. Entonces $\delta_S(T \cup i) = 1$ o $\delta_S(T) = 1$. Si $S = T \cup i$ tenemos que $S \setminus i = T \in \mathcal{L}$ y si $S = T$ entonces $i \in T$, lo cual contradice la hipótesis. □

Axioma del jugador pasivo: Si el jugador $i \in N$ es pasivo en $v \in \mathcal{G}(\mathcal{L})$, entonces

$$\Phi_i(v) = \begin{cases} v(\{i\}), & \text{si } \{i\} \in \mathcal{L} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Teorema 9.2 Sea $\Phi_i : , (\mathcal{L}) \Leftrightarrow \mathbb{R}$ un valor para i definido por

$$\Phi_i(v) = \sum_{S \in \mathcal{L}} a_S^i v(S),$$

que satisface el axioma del jugador pasivo. Entonces, el valor es

$$\Phi_i(v) = \sum_{\{S \in \mathcal{L} : i \in ex(S)\}} a_S^i (v(S) \Leftrightarrow v(S \setminus i)).$$

Además, si $\{i\} \in \mathcal{L}$ los coeficientes verifican $\sum a_S^i = 1$.

Demostración: Sea $E_i : , (\mathcal{L}) \Leftrightarrow \mathbb{R}$, la aplicación definida para $i \in N$ por

$$E_i(v) = \sum_{\{S \in \mathcal{L} : i \in ex(S)\}} a_S^i (v(S) \Leftrightarrow v(S \setminus i)).$$

Los operadores E_i y Φ_i son lineales y los juegos de unanimidad forman una base de $, (\mathcal{L})$. Entonces, será suficiente demostrar que $\Phi_i(\zeta_T) = E_i(\zeta_T)$, para cualquier convexo $T \in \mathcal{L}$, $T \neq \emptyset$. Fijamos $i \in N$, $T \in \mathcal{L}$, y vamos a considerar dos casos.

En primer lugar, si $i \notin ex(T)$ entonces la proposición 9.1 asegura que i es pasivo en el juego ζ_T . Por ello $\zeta_T(S) \Leftrightarrow \zeta_T(S \setminus i) = 0$, para todo $S \in \mathcal{L}$, tal que $i \in ex(S)$ porque $\zeta_T(\{i\}) = 0$, cuando $\{i\} \in \mathcal{L}$. Por lo tanto, la definición de E_i implica que $E_i(\zeta_T) = 0$. Por otro lado, el axioma del jugador pasivo asegura que $\Phi_i(\zeta_T) = 0$.

Ahora, supongamos que $i \in ex(T)$, luego $i \in T$, por lo que $\zeta_T(S \setminus i) = 0$, para toda $S \in \mathcal{L}$, con $i \in ex(S)$. Así, obtenemos la equivalencia

$$\zeta_T(S) \Leftrightarrow \zeta_T(S \setminus i) = 1 \iff S \supseteq T.$$

Observemos que

$$\begin{aligned} E_i(\zeta_T) &= \sum_{\{S \in \mathcal{L} : i \in ex(S), S \supseteq T\}} a_S^i \\ &= \sum_{\{S \in \mathcal{L} : i \in ex(S), S \supseteq T\}} \Phi_i(\delta_S) \\ &= \Phi_i \left(\sum_{\{S \in \mathcal{L} : S \supseteq T\}} \delta_S \right) \\ &= \Phi_i(\zeta_T), \end{aligned}$$

porque $\Phi_i(\delta_S) = 0$, cuando $i \in S \setminus ex(S)$.

Finalmente, si $\{i\} \in \mathcal{L}$ entonces i es pasivo en $\zeta_{\{i\}}$. Sea T un convexo tal que $i \notin T$ y $T \cup i \in \mathcal{L}$. Entonces $\zeta_{\{i\}}(T \cup i) = 1$, $\zeta_{\{i\}}(T) = 0$, $\zeta_{\{i\}}(\{i\}) = 1$. Dado que Φ_i satisface el axioma del jugador pasivo, la ecuación anterior implica que la suma de los coeficientes es

$$\sum_{\{S \in \mathcal{L} : i \in ex(S)\}} a_S^i = \Phi_i(\zeta_{\{i\}}) = \zeta_{\{i\}}(\{i\}) = 1.$$

□

Si consideramos una geometría convexa con $\{i\} \notin \mathcal{L}$, tenemos que

$$\sum_{\{S \in \mathcal{L} : i \in ex(S)\}} a_S^i = \sum_{\{S \in \mathcal{L} : i \in S\}} a_S^i = \Phi_i(\zeta_{\overline{\{i\}}}),$$

donde el juego de unanimidad correspondiente a la coalición $\overline{\{i\}}$ está definido por

$$\begin{aligned} \zeta_{\overline{\{i\}}}(T) &= \begin{cases} 1, & \text{si } \overline{\{i\}} \subseteq T \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{si } i \in T \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

Aplicando los teoremas 9.1 y 9.2, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 9.3 *Sea $\Phi_i : (\mathcal{L}) \Leftrightarrow \mathbb{R}$ un valor para i que satisface los axiomas de linealidad y del jugador pasivo. Entonces, para cualquier juego v , existe un único conjunto de coeficientes $\{a_S^i : S \in \mathcal{L}, i \in ex(S)\}$ tal que*

$$\Phi_i(v) = \sum_{\{S \in \mathcal{L} : i \in ex(S)\}} a_S^i (v(S) \Leftrightarrow v(S \setminus i)).$$

Además, si $\Phi_i(\zeta_{\overline{\{i\}}}) = 1$ entonces $\sum a_S^i = 1$.

Podemos observar que para geometrías convexas tales que $\{i\} \in \mathcal{L}$, la condición $\Phi_i(\zeta_{\overline{\{i\}}}) = 1$ no es necesaria, porque se obtiene aplicando el axioma del jugador pasivo.

Si el vector cuyas componentes son los valores $\Phi(v) = (\Phi_1(v), \dots, \Phi_n(v))$, es una distribución de todos los recursos que tiene la gran coalición N , entonces Φ cumple el siguiente axioma:

Axioma de eficiencia: Para cada $v \in \mathcal{V}$, se verifica que

$$\sum_{i \in N} \Phi_i(v) = v(N).$$

El axioma de eficiencia implica las siguientes relaciones para los coeficientes de valores, que cumplan los axiomas de linealidad y jugador pasivo.

Teorema 9.4 Sea $\Phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ un valor definido, para todo juego v y para todo jugador $i \in N$, por

$$\Phi_i(v) = \sum_{\{S \in \mathcal{L} : i \in ex(S)\}} a_S^i (v(S) \Leftrightarrow v(S \setminus i)).$$

Entonces, el valor Φ satisface el axioma de eficiencia si y sólo si

$$\sum_{i \in ex(N)} a_N^i = 1, \text{ y } \sum_{i \in ex(S)} a_S^i = \sum_{\{j \notin S : S \cup j \in \mathcal{L}\}} a_{S \cup j}^j, \quad \forall S \in \mathcal{L}, S \neq N, \emptyset.$$

Demostración: Dado un juego cualquiera $v \in \mathcal{V}$, tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N} \Phi_i(v) &= \sum_{i \in N} \sum_{\{S \in \mathcal{L} : i \in ex(S)\}} a_S^i (v(S) \Leftrightarrow v(S \setminus i)) \\ &= \sum_{S \in \mathcal{L}} v(S) \left(\sum_{i \in ex(S)} a_S^i \Leftrightarrow \sum_{\{j \notin S : S \cup j \in \mathcal{L}\}} a_{S \cup j}^j \right). \end{aligned}$$

Si los coeficientes satisfacen las relaciones dadas en el enunciado, entonces $\sum_{i \in N} \Phi_i(v) = v(N)$ luego Φ cumple el axioma de eficiencia.

Recíprocamente, fijamos un convexo no vacío $T \in \mathcal{L}$, y consideramos el juego de identidad δ_T . Si aplicamos la igualdad obtenida previamente al juego δ_T , obtenemos

$$\sum_{i \in N} \Phi_i(\delta_T) = \begin{cases} \sum_{i \in ex(N)} a_N^i, & \text{si } T = N \\ \sum_{i \in ex(S)} a_S^i \Leftrightarrow \sum_{\{j \notin S : S \cup j \in \mathcal{L}\}} a_{S \cup j}^j, & \text{si } T = S \neq N, \emptyset. \end{cases}$$

En consecuencia, si Φ satisface el axioma de eficiencia entonces se cumplen las relaciones. \square

Para cualesquiera $S, T \in \mathcal{L}$ tales que $T \subset S$, denotamos por $c([T, S])$ el número de cadenas maximales de T a S . Además, $c([\emptyset, S])$, se escribirá de forma abreviada como $c(S)$ y así, $c(N)$ es el número total de cadenas maximales en \mathcal{L} .

La caracterización clásica del valor de Shapley establece que es el único valor que satisface los axiomas del soporte, simetría y aditividad en el cono de los juegos superaditivos [80]. Para el espacio vectorial de todos los juegos, Weber [96, teorema 15] considera los axiomas de linealidad, jugador pasivo, simetría y eficiencia, y prueba la unicidad del valor de Shapley. Bilbao, Jiménez Jiménez y Lebrón [12] extienden el trabajo de Weber, estudiando valores probabilísticos para juegos definidos en geometrías convexas.

Faigle y Kern [33] definen el concepto de *fuerza jerárquica* $h_S(i)$ del jugador $i \in S$ en la coalición $S \in \mathcal{L}$ como

$$h_S(i) = \frac{|\{C \in \mathcal{C}(\mathcal{L}) : C(i) \cap S = S\}|}{|\mathcal{C}(\mathcal{L})|}.$$

Es decir, $h_S(i)$ es el promedio de ordenaciones compatibles de \mathcal{L} en las que i es el último elemento de S en la ordenación. Observemos que $h_S(i)$ verifica $h_S(i) \neq 0 \Leftrightarrow i \in \text{ex}(S)$. Faigle y Kern proponen el siguiente axioma para juegos en retículos distributivos.

Axioma de fuerza jerárquica: Para todo $S \in \mathcal{L}$ y para cualesquiera $i, j \in S$,

$$h_S(i)\Phi_j(\zeta_S) = h_S(j)\Phi_i(\zeta_S).$$

Faigle y Kern [33, teoremas 1 y 2] demuestran la siguiente extensión del valor de Shapley para juegos sobre retículos distributivos $v : J(P) \Leftrightarrow \mathbb{R}$.

Teorema 9.5 *Existe una única función $\Phi : v \Leftrightarrow (\Phi_1(v), \dots, \Phi_n(v))$ que cumple los axiomas de linealidad, soporte y fuerza jerárquica. Además, para cualquier $i \in P$, tenemos*

$$\Phi_i(v) = \sum_{\{T \in J(P) : i \in \text{Max}(T)\}} \frac{e(T \setminus i) e(P \setminus T)}{e(P)} (v(T) \Leftrightarrow v(T \setminus i)),$$

donde $e(\cdot)$ es el número de extensiones lineales de los subconjuntos parcialmente ordenados de P .

Bilbao y Edelman [10] generalizan esta fórmula para juegos en geometrías convexas. En este nuevo contexto, el número de extensiones lineales e es el número de cadenas maximales c .

A continuación, vamos a introducir un nuevo axioma, en el que el valor de un jugador depende de su posición en la estructura de retículo de la geometría convexa.

Axioma de la cadena: Para todo $S \in \mathcal{L}$ y para cualesquiera $i, j \in ex(S)$,

$$c(S \setminus i) \Phi_j(\delta_S) = c(S \setminus j) \Phi_i(\delta_S).$$

Usando resultados obtenidos previamente, vamos a probar la unicidad y una fórmula para el valor de Shapley en geometrías convexas.

Teorema 9.6 *Existe una única función $\Phi : (\mathcal{L}) \Leftrightarrow \mathbb{R}^n$ que satisface los axiomas de linealidad, jugador pasivo, eficiencia y cadena. Además, dicha función es*

$$\Phi_i(v) = \sum_{\{S \in \mathcal{L} : i \in ex(S)\}} \frac{c(S \setminus i) c([S, N])}{c(N)} (v(S) \Leftrightarrow v(S \setminus i)), \quad i \in N.$$

Demostración: Los teoremas 9.3 y 9.4 implican que, para cualquier $i \in N$, existe un único conjunto $\{a_S^i : S \in \mathcal{L}, i \in ex(S)\}$ tal que

$$\begin{aligned} \Phi_i(v) &= \sum_{\{S \in \mathcal{L} : i \in ex(S)\}} a_S^i (v(S) \Leftrightarrow v(S \setminus i)), \\ \sum_{i \in ex(N)} a_N^i &= 1, \\ \sum_{i \in ex(S)} a_S^i &= \sum_{\{j \notin S : S \cup j \in \mathcal{L}\}} a_{S \cup j}^j, \quad \forall S \in \mathcal{L}, S \neq N, \emptyset. \end{aligned}$$

Entonces, será suficiente demostrar que

$$a_S^i = \frac{c(S \setminus i) c([S, N])}{c(N)}, \quad \text{para todo } S \in \mathcal{L} \text{ y } i \in ex(S).$$

Dado que los coeficientes son $a_S^i = \Phi_i(\delta_S)$, tenemos que el axioma de la cadena implica que $a_S^j c(S \setminus i) = a_S^i c(S \setminus j)$, $\forall i, j \in ex(S)$. Si fijamos $i \in ex(S)$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{j \in ex(S)} a_S^j &= a_S^i + \sum_{\{j \in ex(S) : j \neq i\}} \frac{c(S \setminus j)}{c(S \setminus i)} a_S^i \\ &= \frac{a_S^i}{c(S \setminus i)} \sum_{j \in ex(S)} c(S \setminus j) \\ &= a_S^i \frac{c(S)}{c(S \setminus i)}. \end{aligned}$$

Para $S = N$, la primera relación de eficiencia implica $c(N \setminus i) = a_N^i c(N)$, para todo $i \in ex(N)$. Entonces, $a_N^i = c(N \setminus i) c([N, N]) / c(N)$, $\forall i \in ex(N)$. Vamos a proceder por inducción, suponiendo la siguiente hipótesis: para todo $T \in \mathcal{L}$, con $|T| = k \geq 2$ se verifica

$$a_T^i = \frac{c(T \setminus i) c([T, N])}{c(N)}, \quad \forall i \in ex(T).$$

El caso $k = n$, es decir $T = N$ ha sido probado. Sea $S \in \mathcal{L}$, tal que $|S| = k \Leftrightarrow 1 < n$. Entonces $S \neq N, \emptyset$, y las relaciones de eficiencia implican

$$\begin{aligned} \sum_{i \in ex(S)} a_S^i &= \sum_{\{j \notin S : S \cup j \in \mathcal{L}\}} a_{S \cup j}^j \\ &= \sum_{\{j \notin S : S \cup j \in \mathcal{L}\}} \frac{c(S) c([S \cup j, N])}{c(N)} \\ &= \frac{c(S)}{c(N)} \sum_{\{j \notin S : S \cup j \in \mathcal{L}\}} c([S \cup j, N]) \\ &= \frac{c(S) c([S, N])}{c(N)}, \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se obtiene con la hipótesis de inducción para $T = S \cup j$. Por último, para cualquier $i \in ex(S)$,

$$a_S^i \frac{c(S)}{c(S \setminus i)} = \frac{c(S) c([S, N])}{c(N)} \text{ implica } a_S^i = \frac{c(S \setminus i) c([S, N])}{c(N)}.$$

□

2. El índice de poder de Banzhaf en geometrías convexas

El concepto de solución que vamos a tratar en esta sección tiene su origen exclusivamente en el mundo de la política y las leyes. El uso de la teoría de juegos en el estudio de la distribución de poder en sistemas de votación puede remontarse a la invención de los *juegos simples* por von Neumann y Morgenstern [93]. Shapley y Shubik, en 1954 [81] aplicaron el valor de Shapley, estudiado en la anterior sección, a los juegos simples obteniendo *el índice de Shapley-Shubik*.

Una nueva aplicación de los juegos a las ciencias políticas apareció en los años sesenta en Estados Unidos cuando el Tribunal Supremo, con la idea de "una persona, un voto", aplica estas técnicas en sistemas de representación electoral a niveles de estado y locales. En estas circunstancias, se empezaron a revisar sistemas de votación existentes así como a crear nuevos modelos de representación.

En 1965, John F. Banzhaf III, un abogado con conocimientos matemáticos, describe en [5] un nuevo índice de poder: el *índice de Banzhaf*. Dicho índice es, junto con el de Shapley-Shubik, el más utilizado en las ciencias sociales y políticas.

Ambos índices tratan de responder a la cuestión del poder individual, analizando la probabilidad de que el voto de un jugador afecte al resultado final de la votación.

Para ello miden el poder, de cada jugador, para constituir coaliciones ganadoras y ser fundamental en ellas. Esto se pone de manifiesto, en el siguiente ejemplo.

Consideremos una votación entre tres individuos A, B y C con votos $[2,1,1]$ respectivamente. Entonces, si las coaliciones ganadoras necesitan, al menos, tres votos, éstas serían

$$\{A, B\}, \quad \{A, C\}, \quad \{A, B, C\}.$$

El jugador A es fundamental en las tres puesto que si las abandona serán perdedoras, mientras que los que los jugadores B y C sólo son fundamentales

en $\{A, B\}$ y $\{A, C\}$ respectivamente. Entonces, el índice de Banzhaf es

$$\beta_A = \frac{3}{5}, \quad \beta_B = \beta_C = \frac{1}{5},$$

normalizado con el número total de veces en las que hay un jugador fundamental.

Dado un jugador $i \in N$, se define un *swing* de i en un juego simple v como una coalición ganadora S que contiene a i y tal que $S \setminus i$ es perdedora. El número de swings de un jugador i en el juego simple v se denota por $\eta_i(v)$, y el número total de swings del juego por $\eta(v)$.

Definición 9.2 *El índice de Banzhaf normalizado, para un juego v , viene dado por*

$$\beta_i(v) = \frac{\eta_i(v)}{\eta(v)} = \sum_{\{S \in \mathcal{L}: i \in S\}} \frac{1}{\eta(v)} (v(S) \Leftrightarrow v(S \setminus i)),$$

para cada $i \in N$.

Existe otro índice de Banzhaf probabilístico, dado por Dubey y Shapley [29], donde los coeficientes de las contribuciones marginales son una distribución de probabilidad. Teniendo en cuenta que las coaliciones que son posibles swings de i son aquellas que contienen al jugador, se introduce la siguiente definición:

Definición 9.3 *El índice de Banzhaf probabilístico, para un juego v , viene dado por*

$$\beta'_i(v) = \frac{\eta_i(v)}{2^{n-1}} = \sum_{\{S \in \mathcal{L}: i \in S\}} \frac{1}{2^{n-1}} (v(S) \Leftrightarrow v(S \setminus i)),$$

para cada $i \in N$.

El índice normalizado da una idea relativa del poder de los jugadores, mientras que el probabilístico da una idea absoluta sobre todos los juegos. Veamos un ejemplo de ello. Consideremos las votaciones con tres jugadores, cada uno con 1 voto, con mayorías en 2 y 3 votos, v_2 y v_3 respectivamente.

$$\beta(v_2) = \beta(v_3) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right),$$

$$\beta'(v_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \beta'(v_3) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

Es lógico que en el juego v_2 el poder sea mayor que en el juego v_3 porque los votantes tienen mayor capacidad de formar swings. El índice normalizado no distingue este matiz pero si lo hace el probabilístico.

Los valores numéricos de los índices de Banzhaf y Shapley-Shubik son a menudo muy similares y ambos se pueden entender como equivalente en muchos casos. No obstante, tienen diferencias significativas que no han sido exploradas con gran profundidad. Podemos considerar que el índice de Banzhaf tiene en cuenta las combinaciones de votos a favor o en contra de una propuesta mientras que el de Shapley-Shubik se basa en la permutaciones de los votantes. Straffin [90] pone de manifiesto la comparación entre el índice probabilístico y el de Shapley-Shubik, entendiendo que, mientras el primero responde a la cuestión de efecto individual, considerando la probabilidad de elección de voto independiente para cada jugador, el segundo considera, esta probabilidad, homogénea en el conjunto de los jugadores.

En la realidad, el índice de Banzhaf ha tenido una buena acogida en el ámbito jurídico y político por su sencilla definición aunque el de Shapley-Shubik tiene una mayor atracción entre los teóricos de juegos por partir de fundamentos matemáticos más naturales. Dubey y Shapley [29] analizan las propiedades matemáticas del índice de Banzhaf y dan una axiomatización similar a la del índice de Shapley-Shubik pero usando una eficiencia distinta basada en que la suma debe de ser el número de swings que se puedan producir por algún jugador. En esta sección, daremos una definición y axiomatización del índice de Banzhaf, normalizado y probabilístico, para juegos definidos en geometrías convexas (véase Bilbao, Jiménez Losada y López [11]). Los valores de Shapley y Banzhaf, para juegos definidos en estructuras combinatorias como matroides y antimatroides, se analizan en Jiménez Losada [53].

Para introducir los índices convexas normalizado y probabilístico de Banzhaf, necesitamos definir el concepto de swing para geometrías convexas.

Definición 9.4 *Para un jugador i y un juego simple $v : \mathcal{L} \Leftrightarrow \{0, 1\}$ diremos que el par $(S, S \setminus i)$ es un swing convexo si $S \in \mathcal{L}$, $i \in ex(S)$, $v(S) = 1$ y $v(S \setminus i) = 0$. El número de swings convexas de un jugador se denotará por*

$cs_i(v)$, y el número total de swings convexos para el juego v es

$$cs(v) = \sum_{i \in N} cs_i(v).$$

Es obvio que las coaliciones convexas donde un jugador es extremal son las únicas coaliciones que toman parte en el juego. En consecuencia, vamos a definir dos números que aparecerán frecuentemente.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i &= |\{S \in \mathcal{L} : i \in ex(S)\}|, \text{ para todo } i \in N, \\ \mathcal{E}_i(T) &= |\{S \in \mathcal{L} : i \in ex(S), S \supseteq T\}|, \text{ para todo } i \in N. \end{aligned}$$

Cada coeficiente \mathcal{E}_i se llamará *poder extremal* del jugador i y $\mathcal{E}_i(T)$ es el *poder extremal* de i sobre T . El cociente $\mathcal{E}_i(T)/\mathcal{E}_i$, se denominará *poder relativo extremal* de i sobre T .

Consideramos la relación entre los swings convexos de un jugador y el conjunto de todas las coaliciones convexas tales que tengan al jugador i como extremal.

Definición 9.5 Para todo jugador $i \in N$, el número

$$cs'_i(v) = \frac{cs_i(v)}{\mathcal{E}_i},$$

se llamará *probabilidad de swings convexos de i para el juego v* . La suma de todos esos números la denotaremos como $cs'(v)$.

Esta definición generaliza a la dada por Dubey y Shapley (1979) para juegos simples sobre 2^N . Notemos que el par $(S, S \setminus i)$ es un swing convexo si y sólo si $v(S) \Leftrightarrow v(S \setminus i) = 1$. Por tanto, podemos establecer la siguiente proposición.

Proposición 9.2 Sea $v \in \Omega(\mathcal{L})$ un juego simple en una geometría \mathcal{L} . Entonces, para cada $i \in N$,

$$cs_i(v) = \sum_{\{S \in \mathcal{L} : i \in ex(S)\}} (v(S) \Leftrightarrow v(S \setminus i))$$

Definición 9.6 Un jugador i es nulo en el juego v si $cs_i(v) = 0$.

Proposición 9.3 *Sea $S \in \mathcal{L}$ con $i \notin ex(S)$, entonces i es un jugador nulo para el juego de unanimidad ζ_S .*

Demostración: Si $i \notin ex(S)$, entonces existen dos posibilidades para i . Si $i \notin S$ entonces $\zeta_S(T) = \zeta_S(T \setminus i)$, luego $cs_i(\zeta_S) = 0$. Sea $i \in S$ y $S \subseteq T$, entonces tenemos que $i \notin ex(T)$. En el otro caso $T \setminus i$ y S son coaliciones convexas, por lo que $(T \setminus i) \cap S = S \setminus i$ es una coalición convexa. En consecuencia, $i \in ex(S)$. \square

Proposición 9.4 *El número de swings convexas para ζ_S , $S \in \mathcal{L}$, es*

$$cs_i(\zeta_S) = \begin{cases} 0, & \text{si } i \notin ex(S) \\ \mathcal{E}_i(S), & \text{si } i \in ex(S). \end{cases}$$

Demostración: Usando la proposición 9.2, obtenemos

$$cs_i(\zeta_S) = \sum_{\{T \in \mathcal{L} : i \in ex(T)\}} (\zeta_S(T) \Leftrightarrow \zeta_S(T \setminus i)).$$

Si $i \notin ex(S)$, entonces la fórmula sigue de la proposición 9.3. En el caso de que $i \in ex(S)$ se verifica que $\zeta_S(T) \Leftrightarrow \zeta_S(T \setminus i) = 1$ si y sólo si el convexo $T \in \{S \in \mathcal{L} : i \in ex(S)\}$ y $T \supseteq S$. \square

Definición 9.7 *El vector cuyas componentes son los números de swings convexas $cs_i(v)$ se llamará índice convexo de Banzhaf. Cuando estos números son normalizados, entonces se obtiene el índice convexo normalizado de Banzhaf, $c\beta : \Omega(\mathcal{L}) \Leftrightarrow \mathbb{R}^n$, definido por*

$$c\beta(v) = (c\beta_1(v), \dots, c\beta_n(v)), \quad \text{donde } c\beta_i(v) = \frac{cs_i(v)}{cs(v)}.$$

El índice convexo probabilístico de Banzhaf es $c\beta' : \Omega(\mathcal{L}) \Leftrightarrow \mathbb{R}^n$, definido por

$$c\beta'(v) = (c\beta'_1(v), \dots, c\beta'_n(v)), \quad \text{donde } c\beta'_i(v) = \frac{cs_i(v)}{\mathcal{E}_i} = cs'_i(v).$$

Si usamos la proposición 9.2, entonces estos índices satisfacen

$$\begin{aligned}
c\beta_i(v) &= \sum_{\{S \in \mathcal{L} : i \in ex(S)\}} \frac{1}{cs(v)} (v(S) \Leftrightarrow v(S \setminus i)), \\
c\beta'_i(v) &= \sum_{\{S \in \mathcal{L} : i \in ex(S)\}} \frac{1}{\mathcal{E}_i} (v(S) \Leftrightarrow v(S \setminus i)),
\end{aligned}$$

y tenemos que $c\beta'_i(v)$ es un índice probabilístico, porque verifica

$$\sum_{\{S \in \mathcal{L} : i \in ex(S)\}} \frac{1}{\mathcal{E}_i} = 1.$$

Dados dos juegos simples $v, w \in \Omega(\mathcal{L})$, se definen

$$(v \vee w)(S) = \max\{v(S), w(S)\}, \quad (v \wedge w)(S) = \min\{v(S), w(S)\}, \quad \forall S \in \mathcal{L}.$$

Estas operaciones internas en $\Omega(\mathcal{L})$ permiten establecer la siguiente relación entre los índices convexos de Banzhaf.

Proposición 9.5 *El índice convexo de Banzhaf satisface la propiedad de transferencia, es decir,*

$$cs_i(v \vee w) + cs_i(v \wedge w) = cs_i(v) + cs_i(w), \quad \text{para todo } v, w \in \Omega(\mathcal{L}),$$

Demostración: La siguiente tabla implica que $(v \vee w) + (v \wedge w) = v + w$.

v	w	$v \vee w$	$v \wedge w$	$v + w$	$(v \vee w) + (v \wedge w)$
1	1	1	1	2	2
1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0

Usando la proposición 9.2, se obtiene el resultado. \square

El índice normalizado no satisface esta propiedad porque su denominador depende del juego. Sin embargo el índice probabilístico no ofrece problemas.

Sea $\varphi : \Omega(\mathcal{L}) \Leftrightarrow \mathbb{R}^n$ un valor con $\varphi(v) = (\varphi_i(v))_{1 \leq i \leq n}$. Introduciremos varios axiomas con el objetivo de obtener una caracterización de los índices

convexos de Banzhaf. Observemos que si $i \in N$ es un jugador nulo para el juego simple $v \in \Omega(\mathcal{L})$, entonces $c\beta_i(v) = c\beta'_i(v) = cs_i(v) = 0$.

Axioma 1 *Jugador nulo*: Si $i \in N$ es un jugador nulo en v , entonces $\varphi_i(v) = 0$.

Axioma 2a *Totalidad de swings* : La suma de todas las componentes de $\varphi(v)$ es igual al número total de swings convexos,

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = cs(v).$$

Axioma 2b *Totalidad de probabilidades de swings*: La suma de todas las componentes de $\varphi(v)$ es igual al número total de probabilidades de swings convexos,

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = cs'(v).$$

Axioma 3a *Poder extremal* : Sea ζ_S el juego de unanimidad correspondiente a $S \in \mathcal{L}$. Entonces, para cualesquiera $i, j \in S$,

$$\mathcal{E}_i(S) \varphi_j(\zeta_S) = \mathcal{E}_j(S) \varphi_i(\zeta_S).$$

Axioma 3b *Poder extremal relativo*: Sea ζ_S el juego de unanimidad correspondiente a $S \in \mathcal{L}$. Entonces, para cualesquiera $i, j \in S$,

$$\frac{\mathcal{E}_i(S)}{\mathcal{E}_i} \varphi_j(\zeta_S) = \frac{\mathcal{E}_j(S)}{\mathcal{E}_j} \varphi_i(\zeta_S).$$

Axioma 4 *Transferencia*: Si $v, w \in \Omega(\mathcal{L})$ entonces

$$\varphi(v) + \varphi(w) = \varphi(v \vee w) + \varphi(v \wedge w).$$

Ahora probaremos que, con estos axiomas, podemos caracterizar los índices convexos normalizados y probabilísticos de Banzhaf. En el caso del índice normalizado no se usará el Axioma 4 ya que no satisface la propiedad de transferencia. Por tanto, en el siguiente teorema no se obtiene el índice normalizado directamente.

Teorema 9.7 *Existe una única función φ que satisface los axiomas de jugador nulo, totalidad de swings, poder extremal y transferencia. Además,*

$$c\beta(v) = \frac{1}{cs(v)}\varphi(v), \text{ para todo } v \in \Omega(\mathcal{L}).$$

Demostración: Sea S una coalición convexa, si $j \notin ex(S)$ entonces j es nulo en ζ_S y el Axioma 1 implica

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(\zeta_S) = \sum_{j \in ex(S)} \varphi_j(\zeta_S).$$

Si $i \in ex(S)$ entonces $S \in \{T \in \mathcal{L} : i \in ex(T)\}$ y $S \supseteq S$, por tanto $\mathcal{E}_i(S) \neq 0$ y por el Axioma 3a obtenemos que

$$\varphi_j(\zeta_S) = \frac{\mathcal{E}_j(S)}{\mathcal{E}_i(S)}\varphi_i(\zeta_S).$$

Por tanto, φ está determinada unívocamente sobre los juegos de unanimidad ya que por el Axioma 2a,

$$\begin{aligned} cs(v) &= \sum_{j \in ex(S)} \varphi_j(\zeta_S) \\ &= \sum_{j \in ex(S)} \frac{\mathcal{E}_j(S)}{\mathcal{E}_i(S)}\varphi_i(\zeta_S) \\ &= \frac{\varphi_i(\zeta_S)}{\mathcal{E}_i(S)} \sum_{j \in ex(S)} \mathcal{E}_j(S). \end{aligned}$$

Usando la proposición 9.3, probamos que

$$\sum_{j \in ex(S)} \mathcal{E}_j(S) = cs(\zeta_S) \text{ y } \mathcal{E}_i(S) = cs_i(\zeta_S).$$

Así, obtenemos que $\varphi_i(\zeta_S) = cs_i(\zeta_S)$. Finalmente, podemos extender φ_i a $\Omega(\mathcal{L})$ aplicando el Axioma 4, porque el cálculo de $\varphi_i(v)$ puede reducirse al de $\varphi_i(\zeta_S)$.

Sean $S_1, \dots, S_p \in \mathcal{L}$ todas las coaliciones ganadoras minimales para $v \in \Omega(\mathcal{L})$, $v \neq \theta$. Usando la monotonía de v y la descomposición probada por Dubey y Shapley, obtenemos

$$v = \zeta_{S_1} \vee \zeta_{S_2} \vee \dots \vee \zeta_{S_p},$$

siendo ésta la única descomposición en $\Omega(\mathcal{L})$. Por el axioma de transferencia,

$$\varphi(v) = \varphi(\zeta_{S_1}) + \varphi(\zeta_{S_2} \vee \dots \vee \zeta_{S_p}) \Leftrightarrow \varphi(\zeta_{S_1} \wedge (\zeta_{S_2} \vee \dots \vee \zeta_{S_p})).$$

Cada juego que aparece en el segundo miembro es un juego con menos coaliciones convexas ganadoras que v . Así, podemos formar una inducción sobre el número de coaliciones convexas ganadoras minimales. Si $v = \theta$, entonces todos los jugadores son nulos y por tanto $\varphi_i(\theta) = 0$. Con esto queda probada la unicidad. La existencia se obtiene porque el vector de componentes $c\beta_i(v)$ satisface los axiomas. \square

Obtenemos el índice convexo probabilístico de Banzhaf con una prueba similar.

Teorema 9.8 *Existe una única función φ que satisface los axiomas de jugador nulo, totalidad de probabilidades de swings, poder extremal relativo y transferencia. Además, $c\beta'(v) = \varphi(v)$, para todo v en $\Omega(\mathcal{L})$.*

Podemos generalizar el índice convexo probabilístico de Banzhaf para obtener el valor convexo de Banzhaf.

Definición 9.8 *El valor convexo de Banzhaf de un juego $v \in \Omega(\mathcal{L})$, donde \mathcal{L} es una geometría convexa, viene dado por*

$$c\beta'(v) = \sum_{\{S \in \mathcal{L} : i \in ex(S)\}} \frac{1}{\mathcal{E}_i} (v(S) \Leftrightarrow v(S \setminus i)).$$

Los axiomas de jugador nulo, totalidad de probabilidades de swings, poder extremal relativo y, en este caso, el axioma de linealidad, caracterizan este valor.

Teorema 9.9 *Existe un único valor sobre $\Omega(\mathcal{L})$ que verifica los axiomas de linealidad, jugador nulo, totalidad de probabilidades de swings y poder extremal relativo. Este valor es el valor convexo de Banzhaf.*

Proposición 9.6 *Sea v un juego sobre la geometría convexa del orden lineal $Co(N)$. El valor convexo de Banzhaf viene dado por*

$$c\beta'(v) = \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^{i-1} [v([j, i]) \Leftrightarrow v([j, i \Leftrightarrow 1])] + \sum_{j=i+1}^n [v([i, j]) \Leftrightarrow v([i+1, j])] \right).$$

CAPÍTULO X

Algoritmos para calcular valores con Mathematica

J. R. Fernández A. Jiménez J. J. López

En el capítulo VII, se han calculado los valores de Shapley y de Myerson en el Consejo de la Unión Europea y en el Parlamento de Andalucía. En general, los cálculos de los anteriores índices de poder suponen un problema combinatorio que involucra un elevadísimo número de operaciones. Por ejemplo, las coaliciones que pueden formar los 15 países del Consejo de la Unión Europea son $2^{15} \Leftrightarrow 1 = 32.767$. Debido a ello, necesitamos algoritmos y programas para obtener dichos índices de poder.

En este capítulo, vamos a calcular valores con el programa de cálculo simbólico Mathematica de Wolfram [98], y los *packages* *DiscreteMath'Combinatorica* y *Cooperat'Cooperat'*, creados por Skiena [87] y Carter [22], respectivamente. El package de Skiena está diseñado para el trabajo con grafos y combinatoria, y el de Carter es específico para juegos cooperativos.

1. Cálculo de valores con cooperación total

El package de Carter incorpora métodos para calcular diversos conceptos de solución en juegos cooperativos, tales como el core, el valor de Shapley, y otros conceptos de solución. El cálculo del valor de Shapley se realiza mediante tres algoritmos distintos, que están implementados en las siguientes funciones: *ShapleyValue1*, *ShapleyValue2* y *ShapleyValue3*.

La función `ShapleyValue1` calcula el valor de Shapley a partir de la fórmula combinatoria

$$\Phi_i(v) = \sum_{\{S \subseteq N: i \in S\}} \gamma(S)(v(S) \Leftrightarrow v(S \setminus i)),$$

donde

$$\gamma(S) = \frac{(s \Leftrightarrow 1)!(n \Leftrightarrow s)!}{n!}.$$

Carter define, usando `Mathematica`, las siguientes expresiones:

```
In[1]:=
gamma[S_List]:=(Length[S]-1)!(Length[N]-length[S])! /Length[N]!
```

```
In[2]:=
ShapleyValue1[game_,i_]:= Plus @ @
(gamma[#] (v[#]- v[DeleteCases[#,i]]) & /@ Rest[Coalitions])
```

```
In[3]:=
Attributes[ShapleyValue1]={Listable};
ShapleyValue1[game_]:= ShapleyValue1[game,N]
```

La función `ShapleyValue2` desarrolla un algoritmo específico para el cálculo del coeficiente $\gamma(S)$, ligeramente distinto del anterior, que mejora el tiempo de cálculo. La función $\gamma(S)$ y el valor de Shapley se escriben en `Mathematica` del siguiente modo:

```
In[1]:=
g[s_Integer]:=g[s]=Module[{n=Length[N]},(s-1)! (n-s)!/n!]
```

```
In[2]:=
ShapleyValue2[game_,i_]:= Plus @ @
(g[Length[#]] (v[#] -v[DeleteCases[#,i]]) ) /@ Rest[Coalitions]
```

```
In[3]:=
```

```

Attributes[ShapleyValue2]={Listable};
ShapleyValue2[game_]:= ShapleyValue2[game,N]

```

El tercer algoritmo que suministra Carter viene dado por la función `ShapleyValue3`, y calcula el valor de Shapley mediante un método recursivo utilizando la función de potencial de Hart y Mas-Colell, la cual describimos a continuación.

Sea \mathcal{G}^N el conjunto de todos los juegos de utilidad transferible. La *función potencial* de Hart y Mas-Colell [46], es una función $P : \mathcal{G}^N \rightarrow \mathbb{R}$ que asigna a cada juego (N, v) un número real $P(N, v)$, y satisface las condiciones

$$P(\emptyset, v) = 0, \quad \sum_{i \in N} D^i P(N, v) = v(N),$$

donde $D^i P(N, v) = P(N, v) \ominus P(N \setminus i, v_{N \setminus i})$. En la expresión anterior, se entiende por $v_{N \setminus i}$ la restricción de la función característica v a las coaliciones $S \in 2^{N \setminus i}$. Es decir, $v_{N \setminus i}(S) = v(S)$ para toda coalición $S \subseteq N \setminus i$ y, siempre que no exista confusión, el juego $(N \setminus i, v_{N \setminus i})$ se denotará por $(N \setminus i, v)$.

El número real $D^i P(N, v)$ se denomina *contribución marginal* del jugador i al juego (N, v) y permite indicar que la función potencial exige, para todo juego (N, v) , que las contribuciones marginales sean eficientes. De la condición de eficiencia de las contribuciones marginales se deduce

$$P(S, v) = \frac{1}{|S|} \left(v(S) + \sum_{i \in S} P(S \setminus i, v) \right), \quad S \in 2^N, \quad S \neq \emptyset,$$

lo que genera, empezando con $P(\emptyset, v) = 0$, un algoritmo recursivo de cálculo para determinar $P(N, v)$. Hart y Mas-Colell [46] demuestran que la contribución marginal del jugador i coincide con el valor de Shapley:

$$D^i P(N, v) = P(N, v) \ominus P(N \setminus i, v) = \Phi_i(N, v), \quad \forall i \in N.$$

Además, prueban las siguientes fórmulas explícitas para el potencial

$$\begin{aligned}
 P(N, v) &= \sum_{S \subseteq N} \frac{1}{|S|} \Delta_v(S), \\
 P(N, v) &= \sum_{S \subseteq N} \frac{(s \Leftrightarrow 1)!(n \Leftrightarrow s)!}{n!} v(S),
 \end{aligned}$$

donde $n = |N|$, y $s = |S|$.

El algoritmo para calcular el valor de Shapley con la función `ShapleyValue3` es más eficiente que los dados anteriormente. La función potencial y el valor de Shapley se definen del siguiente modo:

```
In[1]:=
  p[{i_}]:= p[{i}]=v[{i}];
  p[S_]:= p[S] =
  (v[S] + Plus @@ Map[p[Complement[S,{#}]& /@ S])/ Length[S] }
```

```
In[2]:=
  ShapleyValue3[game_,List:N]:= Module[{value},value=
  p[N]-(p[DeleteCases[N,#]]& /@ S); p[#]=.& /@ Rest[Coalitions];
  Return[value] ]
```

```
In[3]:=
  ShapleyValue3[game_] := ShapleyValue3[game,N];
  ShapleyValue3[] := ShapleyValue3[Null,N];
  ShapleyValue3[game_:Null,i_?AtomQ] := ShapleyValue3[game,{i}]
```

A continuación, vamos a aplicar estos algoritmos para calcular el valor de Shapley en algunos ejemplos.

1.1. El poder en la Unión Europea

Teniendo en cuenta los datos del capítulo VII, el método de votación del Consejo de la Unión Europea se modela mediante el juego (N, v) en el que

$N = \{\text{Alemania, Reino Unido, Francia, Italia, España, Países Bajos, Grecia, Bélgica, Portugal, Suecia, Austria, Dinamarca, Finlandia, Irlanda, Luxemburgo}\}$,

$$v = [q; 10, 10, 10, 10, 8, 5, 5, 5, 5, 4, 4, 3, 3, 3, 2], \quad 61 \leq q \leq 68.$$

Introducimos los datos del juego en `Mathematica`.

```

JuegoUE15[n_Integer]:= (Clear[T,w,p,v];
T=Range[15];
w[i_Integer/;1<=i && i<=4]:=10;
w[5]:=8;
w[i_Integer/;6<=i && i<=9]:=5;
w[10]:=4; w[11]:=4;
w[i_Integer/;12<=i && i<=14]:=3;
w[15]:=2;
p[S_List]:=Apply[Plus,w /@ S]; v[{}]:=0;
v[S_ /;p[S]>=n]:=1;v[S_ /; p[S]<n]:=0;)

```

Lógicamente, al calcular los índices de poder de Shapley-Shubik obtendremos el mismo resultado con las diversas funciones definidas, aunque con diferencias en el tiempo de ejecución, tal y como mostramos a continuación. Los cálculos se han realizado con un ordenador personal con procesador Pentium 150. Obsérvese la notable mejora que se obtiene al utilizar `ShapleyValue3`.

```
N[Timing[ShapleyValue1[JuegoUE15[61]]]]
```

```
{10143.3 Second, {0.119114, 0.119114, 0.119114,
0.119114, 0.0916916, 0.0558358, 0.0558358, 0.0558358,
0.0558358, 0.0463703, 0.0463703, 0.0313298,
0.0313298, 0.0313298, 0.0217782}}
```

```
N[Timing[ShapleyValue2[JuegoUE15[61]]]]
```

```
{9076.61 Second, {0.119114, 0.119114, 0.119114,
0.119114, 0.0916916, 0.0558358, 0.0558358, 0.0558358,
0.0558358, 0.0463703, 0.0463703, 0.0313298,
0.0313298, 0.0313298, 0.0217782}}
```

```
N[Timing[ShapleyValue3[JuegoUE15[61]]]]
```

```
{665.306 Second, {0.119114, 0.119114, 0.119114,
0.119114, 0.0916916, 0.0558358, 0.0558358, 0.0558358,
0.0558358, 0.0463703, 0.0463703, 0.0313298,
0.0313298, 0.0313298, 0.0217782}}
```

1.2. El poder en el Congreso de España

En este apartado calculamos el índice de poder de Shapley-Shubik considerando la actual composición del Congreso de los Diputados de España, derivada de las elecciones de 1996, y suponiendo que no hay restricciones a la formación de coaliciones. Para ello, consideramos el siguiente conjunto de jugadores

$$N = \{PP(1), PSOE(2), IU(3), CiU(4), PNV(5), CC(6), BNG(7), HB(8), \\ ERC(9), EA(10), UV(11)\},$$

y el juego queda representado por el siguiente esquema de votación

$$[176; 156, 141, 21, 16, 5, 4, 2, 2, 1, 1, 1].$$

Usaremos los algoritmos empleados para la Unión Europea.

Definición de la función característica del juego

```
JuegoCongreso[n_Integer]:= (Clear[T,w,p,v];
T=Range[11];
w[1]:=156; w[2]:=141; w[3]:=21; w[4]:=16; w[5]:=5; w[6]:=4;
w[i_Integer/;7<=i && i<=8]:=2;
w[i_Integer/;9<=i && i<=11]:=1;
p[S_List]:=Apply[Plus, w /@ S]; v[{}]:=0;
v[S_/;p[S]>=n]:=1; v[S_/;p[S]<n]:=0;)
```

Cálculo de los índices de poder

```
N[Timing[ShapleyValue1[JuegoCongreso[176]]]]
```

```
{284.707 Second, {0.452092, 0.183838, 0.183838,
0.118759, 0.0171717, 0.0171717, 0.00804473,
0.00804473, 0.00367965, 0.00367965, 0.00367965}}
```

```
N[Timing[ShapleyValue2[JuegoCongreso[176]]]]
```

```
{219.022 Second, {0.452092, 0.183838, 0.183838,
0.118759, 0.0171717, 0.0171717, 0.00804473,
0.00804473, 0.00367965, 0.00367965, 0.00367965}}
```

```
N[Timing[ShapleyValue3[JuegoCongreso[176]]]]
```

```
{28.849 Second, {0.452092, 0.183838, 0.183838, 0.118759,
0.0171717, 0.0171717, 0.00804473, 0.00804473,
0.00367965, 0.00367965, 0.00367965}}
```

1.3. El poder en el Parlamento de Andalucía

Por último, presentamos el cálculo correspondiente a la legislatura iniciada en 1996, utilizando `ShapleyValue3`. En este caso, los jugadores también son los grupos parlamentarios

PSOE-A(1), PP-A(2), IU-CA(3), PA(4),

con la mayoría simple $q = 55$. Así, el juego de votación ponderada se representa por $[55; 52, 40, 13, 4]$.

Definición de la función característica del juego:

```
JuegoAndalucia[n_Integer]:= (Clear[T,w,p,v];
T=Range[4];
w[1]:=52; w[2]:=40; w[3]:=13; w[4]:=4;
```

```
p[S_List]:=Apply[Plus, w /@ S]; v[{}]:=0;
v[S_/:p[S]≥n]:=1;v[S_/:p[S]<n]:=0;
```

El resultado que se obtiene es:

```
ShapleyValue3[JuegoAndalucia[55]] = {1/2, 1/6, 1/6, 1/6}
```

2. El valor de Myerson y el potencial de Hart y Mas-Colell

Consideremos la situación de comunicación (N, v, G) , estudiada en el capítulo VI, sección 2, donde N representa el conjunto de jugadores, G el grafo de cooperación y (N, v) un juego. Si se denota por \mathcal{F} el correspondiente conjunto de coaliciones factibles, entonces la función característica del juego restringido la representaremos $v^{\mathcal{F}}$, y el valor de Myerson del jugador i es

$$\mu_i(N, v, G) = \Phi_i(N, v^{\mathcal{F}}).$$

Para calcular el valor de Myerson utilizaremos dos métodos:

Primer método. Es un método indirecto que consiste en calcular el correspondiente juego restringido por la situación de comunicación, y obtener a continuación el valor de Myerson con la función `ShapleyValue3`, la cual utiliza la función potencial de Hart y Mas-Colell. De este modo podemos establecer el siguiente proceso recursivo para determinar el potencial del juego restringido $(N, v^{\mathcal{F}})$:

$$P(\emptyset, v^{\mathcal{F}}) = 0, \quad P(S, v^{\mathcal{F}}) = \frac{1}{|S|} \left(v^{\mathcal{F}}(S) + \sum_{i \in S} P(S \setminus i, v^{\mathcal{F}}) \right), \quad S \in 2^N, \quad S \neq \emptyset,$$

y las contribuciones marginales verifican, para cada $i \in N$:

$$D^i P(N, v^{\mathcal{F}}) = P(N, v^{\mathcal{F}}) \Leftrightarrow P(N \setminus i, v^{\mathcal{F}}) = \Phi_i(N, v^{\mathcal{F}}) = \mu_i(N, G, v)$$

Segundo método. Bilbao y López (1996) [14] han establecido un nuevo algoritmo recursivo para calcular directamente el potencial del juego restringido por una situación de comunicación, sin necesidad de calcular los valores de la función $v^{\mathcal{F}}$. Estas ideas se extienden también a sistemas de partición.

A continuación, introducimos estas ideas, referidas a sistemas de partición y que, como sabemos, engloban a las situaciones de comunicación.

Definición 10.1 Sean (N, \mathcal{F}) un sistema de partición y (N, v) un juego. Definimos el \mathcal{F} -potencial restringido del juego (N, v) por

$$P^{\mathcal{F}}(N, v) = P(N, v^{\mathcal{F}}),$$

donde P es la función potencial de Hart y Mas-Colell, y $(N, v^{\mathcal{F}})$ es el juego restringido.

Proposición 10.1 Sean (N, \mathcal{F}) un sistema de partición y (N, v) un juego. Para todo subjuego (S, v) , donde $S \subseteq N$, existe el \mathcal{F}_S -potencial restringido

$$P^{\mathcal{F}_S}(S, v) = P(S, v^{\mathcal{F}}),$$

donde $\mathcal{F}_S = \{T \in \mathcal{F} : T \subseteq S\}$.

Demostración: Si (N, \mathcal{F}) es un sistema de partición y (N, v) un juego, entonces (S, \mathcal{F}_S) , siendo $S \subseteq N$ y $\mathcal{F}_S = \{T \in \mathcal{F} : T \subseteq S\}$, también lo es. Al ser (S, \mathcal{F}_S) un sistema de partición, podemos considerar el correspondiente juego restringido $(S, v^{\mathcal{F}_S})$ para el que es inmediato probar que $(S, v^{\mathcal{F}_S}) = (S, v^{\mathcal{F}})$.

En efecto, consideremos los juegos $v^{\mathcal{F}_S}$, y $v^{\mathcal{F}} : 2^S \leftrightarrow \mathbb{R}$. Si $T \in 2^S \cap \mathcal{F}$, entonces $T \in \mathcal{F}_S$ y $v^{\mathcal{F}}(T) = v(T) = v^{\mathcal{F}_S}(T)$. Si $T \subseteq S$ pero $T \notin \mathcal{F}$, entonces $T = \bigcup_k T_k$. Al ser $T_k \subset T \subseteq S$ y $T_k \in \mathcal{F}$, resulta que las \mathcal{F} -componentes de T son también sus \mathcal{F}_S -componentes y, por tanto $v^{\mathcal{F}}(T) = v^{\mathcal{F}_S}(T)$. Así, obtenemos las igualdades $P(S, v^{\mathcal{F}}) = P(S, v^{\mathcal{F}_S}) = P^{\mathcal{F}_S}(S, v)$. \square

Utilizando la misma notación que para la función característica correspondiente a un subjuego, escribiremos $P^{\mathcal{F}}(S, v)$ para indicar $P^{\mathcal{F}_S}(S, v)$, siempre que no haya algún problema de confusión. La proposición anterior hace que el proceso recursivo para el cálculo del potencial pueda expresarse formalmente de la siguiente manera:

$$P^{\mathcal{F}}(\emptyset, v) = 0, \quad P^{\mathcal{F}}(S, v) = \frac{1}{|S|} \left(v^{\mathcal{F}}(S) + \sum_{i \in S} P^{\mathcal{F}}(S \setminus i, v) \right), \quad S \in 2^N \setminus \emptyset.$$

Proposición 10.2 Sea (N, \mathcal{F}) un sistema de partición y (N, v) un juego. Entonces, el \mathcal{F} -valor de Shapley viene determinado por

$$\Phi_i^{\mathcal{F}}(N, v) = P^{\mathcal{F}}(N, v) \Leftrightarrow P^{\mathcal{F} \setminus i}(N \setminus i, v),$$

donde $\mathcal{F} \setminus i = \mathcal{F}_{N \setminus i}$.

Demostración: Las contribuciones marginales verifican, para cada $i \in N$:

$$D^i P(N, v^{\mathcal{F}}) = P(N, v^{\mathcal{F}}) \Leftrightarrow P(N \setminus i, v^{\mathcal{F}}) = \Phi_i(N, v^{\mathcal{F}}) = \Phi_i^{\mathcal{F}}(N, v).$$

La proposición 10.1 implica, de forma inmediata, el resultado. \square

Con objeto de simplificar la notación, denotaremos $P^{\mathcal{F}}(N \setminus i, v)$ en lugar de $P^{\mathcal{F} \setminus i}(N \setminus i, v)$. Como consecuencia directa de las propiedades de la función potencial, dadas por Hart y Mas-Colell, podemos establecer el siguiente resultado.

Proposición 10.3 Sean (N, \mathcal{F}) un sistema de partición y (N, v) un juego.

- (a) Si (N, v) es equilibrado y $v(N) = v^{\mathcal{F}}(N)$, entonces $P^{\mathcal{F}}(N, v) \leq v(N)$.
- (b) Si (N, v) es totalmente equilibrado, superaditivo y además $v(N) = v^{\mathcal{F}}(N)$, entonces $P^{\mathcal{F}}(S, v) \leq v(S)$, para toda $S \subseteq N$.

Demostración: (a) Si (N, v) es equilibrado, $(N, v^{\mathcal{F}})$ también lo es. Entonces,

$$P^{\mathcal{F}}(N, v) = P(N, v^{\mathcal{F}}) \leq v^{\mathcal{F}}(N) = v(N),$$

donde la desigualdad central es probada por Hart y Mas-Colell [46].

(b) Si el juego (N, v) es totalmente equilibrado y $v(N) = v^{\mathcal{F}}(N)$, el juego restringido $(N, v^{\mathcal{F}})$ es totalmente equilibrado. Entonces, el apartado anterior garantiza que, para toda $S \subseteq N$ $P^{\mathcal{F}}(S, v) = P(S, v^{\mathcal{F}}) \leq v^{\mathcal{F}}(S)$. Además, si (N, v) es superaditivo, entonces $v^{\mathcal{F}}(S) \leq v(S)$, para cualquier $S \subseteq N$. \square

A continuación, vamos a establecer un nuevo algoritmo recursivo para calcular el \mathcal{F} -potencial restringido del juego (N, v) , sin necesidad de calcular los valores de la función característica del juego restringido $(N, v^{\mathcal{F}})$.

Teorema 10.1 El \mathcal{F} -potencial restringido, verifica:

(a) Si $S \in \mathcal{F}$, entonces

$$P^{\mathcal{F}}(S, v) = \frac{1}{|S|} \left(v(S) + \sum_{i \in S} P^{\mathcal{F}}(S \setminus i, v) \right).$$

(b) Si $S \notin \mathcal{F}$, entonces

$$P^{\mathcal{F}}(S, v) = \sum \{P^{\mathcal{F}}(S_k, v) : S_k \in \Pi_S\}.$$

Demostración: (a) Es inmediata ya que si $S \in \mathcal{F}$, entonces $v^{\mathcal{F}}(S) = v(S)$.

(b) Los juegos de unanimidad u_T , con $T \in \mathcal{F}$, constituyen una base del espacio vectorial (\mathcal{F}) , por lo que

$$v^{\mathcal{F}} = \sum_{T \in \mathcal{F} \setminus \emptyset} \Delta_{v^{\mathcal{F}}}(T) u_T.$$

Aplicando la proposición 1 de Hart y Mas-Colell [46] al subjuego dado por $(S, v^{\mathcal{F}})$, tenemos que

$$P^{\mathcal{F}}(S, v) = P(S, v^{\mathcal{F}}) = \sum_{\{T \in \mathcal{F} : T \subseteq S\}} \frac{1}{|T|} \Delta_{v^{\mathcal{F}}}(T),$$

donde $\Delta_{v^{\mathcal{F}}}(T)$ son los dividendos de T en el juego restringido.

Sabemos que si $S \notin \mathcal{F}$, entonces $S = \bigcup_{k=1}^p S_k$, siendo $\{S_k\} = \Pi_S$ la partición de S en sus \mathcal{F} -componentes. Dado que la partición de S induce la partición

$$\{T \in \mathcal{F} : T \subseteq S\} = \bigcup_{k=1}^p \{T \in \mathcal{F} : T \subseteq S_k\},$$

obtenemos

$$P^{\mathcal{F}}(S, v) = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{\{T \in \mathcal{F} : T \subseteq S_k\}} \frac{1}{|T|} \Delta_{v^{\mathcal{F}}}(T) \right) = \sum_{k=1}^p P^{\mathcal{F}}(S_k, v).$$

□

Ejemplo 10.1 Sea (N, \mathcal{F}) un sistema de partición, donde $N = \{1, 2, 3, 4\}$, y $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}, N\}$.

El juego $v : 2^N \Leftrightarrow \mathbb{R}$, viene dado por

$$v(S) = \begin{cases} |S| \Leftrightarrow 1, & \text{si } S \neq \emptyset \\ 0, & \text{si } S = \emptyset. \end{cases}$$

Vamos a determinar el valor de Myerson $\mu_i(N, v, G)$, que viene dado por el \mathcal{F} -valor de Shapley, $\Phi_i^{\mathcal{F}}(N, v)$, utilizando el \mathcal{F} -potencial restringido del juego (N, v) , las propiedades de las contribuciones marginales y el procedimiento recursivo que se desprende del teorema 10.1. El algoritmo comienza con:

$$P^{\mathcal{F}}(\emptyset, v) = 0, \quad P^{\mathcal{F}}(\{i\}, v) = v(\{i\}) = 0, \quad \text{para todo } i \in N.$$

Utilizando el apartado (b) del teorema 10.1, se determina el \mathcal{F} -potencial restringido de las coaliciones no factibles por medio de la suma del potencial de sus \mathcal{F} -componentes. En efecto, si $S \notin \mathcal{F}$ y $|S| = 2$:

$$P^{\mathcal{F}}(\{i, j\}, v) = P^{\mathcal{F}}(\{i\}, v) + P^{\mathcal{F}}(\{j\}, v) = 0.$$

Las coaliciones factibles $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$, verifican:

$$P^{\mathcal{F}}(\{i, j\}, v) = \frac{1}{2} (v(\{i, j\}) + P^{\mathcal{F}}(\{i\}, v) + P^{\mathcal{F}}(\{j\}, v)) = \frac{1}{2}.$$

Procedemos de manera análoga con las coaliciones de tres elementos. Para la coalición no factible $S = \{1, 3, 4\}$:

$$P^{\mathcal{F}}(\{1, 3, 4\}, v) = P^{\mathcal{F}}(\{1\}) + P^{\mathcal{F}}(\{3, 4\}) = \frac{1}{2}.$$

Para las coaliciones factibles $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$:

$$\begin{aligned} P^{\mathcal{F}}(\{1, 2, 3\}, v) &= \frac{1}{3} \left(v(\{1, 2, 3\}) + \sum_{i \in \{1, 2, 3\}} P^{\mathcal{F}}(\{1, 2, 3\} \setminus i, v) \right) \\ &= \frac{1}{3} (2 + P^{\mathcal{F}}(\{2, 3\}) + P^{\mathcal{F}}(\{1, 3\}) + P^{\mathcal{F}}(\{1, 2\})) = 1, \\ P^{\mathcal{F}}(\{1, 2, 4\}, v) &= \frac{1}{3} \left(v(\{1, 2, 4\}) + \sum_{i \in \{1, 2, 4\}} P^{\mathcal{F}}(\{1, 2, 4\} \setminus i, v) \right) = 1, \\ P^{\mathcal{F}}(\{2, 3, 4\}, v) &= \frac{1}{3} \left(v(\{2, 3, 4\}) + \sum_{i \in \{2, 3, 4\}} P^{\mathcal{F}}(\{2, 3, 4\} \setminus i, v) \right) = \frac{7}{6}. \end{aligned}$$

Por último,

$$P^{\mathcal{F}}(N, v) = \frac{1}{4} \left(v(N) + \sum_{i \in N} P^{\mathcal{F}}(N \setminus i, v) \right) = \frac{5}{3}.$$

Aplicando la proposición 10.2, el valor de Myerson es:

$$\begin{aligned} \mu_1(N, v, G) &= \Phi_1^{\mathcal{F}}(N, v) = P^{\mathcal{F}}(N, v) \Leftrightarrow P^{\mathcal{F}}(N \setminus \{1\}, v) = \frac{1}{2}, \\ \mu_2(N, v, G) &= \Phi_2^{\mathcal{F}}(N, v) = P^{\mathcal{F}}(N, v) \Leftrightarrow P^{\mathcal{F}}(N \setminus \{2\}, v) = \frac{7}{6}, \\ \mu_3(N, v, G) &= \Phi_3^{\mathcal{F}}(N, v) = P^{\mathcal{F}}(N, v) \Leftrightarrow P^{\mathcal{F}}(N \setminus \{3\}, v) = \frac{2}{3}, \\ \mu_4(N, v, G) &= \Phi_4^{\mathcal{F}}(N, v) = P^{\mathcal{F}}(N, v) \Leftrightarrow P^{\mathcal{F}}(N \setminus \{4\}, v) = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

2.1. El Parlamento de Andalucía

Vamos a considerar la situación del actual Parlamento de Andalucía, elegido en 1996, suponiendo que la relación entre los partidos está modelada por una relación de orden lineal izquierda-derecha, denominada *policy order* por Axelrod [4] y Einy [32].

$$\text{IU(CA)}\text{---PSOE(A)}\text{---PA---PP(A)}$$

Los jugadores son denotados mediante:

$$\text{PSOE(A): 1, PP(A): 2, IU(CA): 3, PA: 4,}$$

con la mayoría simple $q = 55$ y el juego de votación es [55; 52, 40, 13, 4].

A continuación, indicamos los cálculos con *Mathematica*, una vez cargados los packages *DiscreteMath'Combinatoria* y *Cooperat'Cooperat*:

Introducción del grafo

```
grafolineal=FromUnorderedPairs[{{3,1},{1,4},{4,2}}];
grafolineal[[2]]={{2,0},{4,0},{1,0},{3,0}};
ShowLabeledGraph[grafolineal];
```



Figura 10.1. Grafo lineal en el Parlamento de Andalucía

Obtención de las coaliciones conexas y de la función que calcula los conexas contenidos en un subconjunto

```
Clear[conexas];
conexas=Select[Rest[Subsets[Range[V[grafolineal]]]],
(ConnectedQ[InduceSubgraph[grafolineal,#]])&]
{{1}, {2}, {3}, {4}, {1, 3}, {1, 4}, {2, 4}, {1, 2, 4},
{1, 3, 4}, {1, 2, 3, 4}}
subconexo[S_List]:=
Select[conexas,(Intersection[S,#]==#)&];
```

Primer método: Función característica del juego restringido

```
JuegoGrafoAndalucia[n_Integer]:=
(Clear[T,w,p,valor,v];T=Range[4];
w[1]:=52; w[2]:=40; w[3]:=13; w[4]:=4;
p[S_List]:=Apply[Plus, w /@ S];
```

```

valor[{}]:=0;
valor[S_ /;p[S] ≥ n]:=1;valor[S_ /;p[S]<n]:=0;
v[S_List]:=Max[(valor[#]) /@ subconexo[S]]

```

Cálculo de los índices de poder

```
Timing[ShapleyValue3[JuegoGrafoAndalucia[55]]]
```

```
{0.213 Second, {2/3, 0, 1/6, 1/6}}
```

Segundo método: *Potenciales restringidos*

Cálculo de las componentes de mayor tamaño en cada coalición

```

F:=Union[conexas,{{}}];
OneCom[S_List,F_List]:=
  Last[Sort[Select[Subsets[S],(MemberQ[F,#])&],
    (Apply[Length,{#1}] = Apply[Length,{#2})&]];

```

Las coaliciones factibles son:

```

F
{{}, {1}, {2}, {3}, {4}, {1, 3}, {1, 4}, {2, 4}, {1, 2, 4}, {1, 3, 4},
{1,2,3,4}

```

Determinación de las componentes de mayor tamaño para dos coaliciones, la primera factible y la segunda no factible:

```

OneCom[{1,3,4},F]
{1, 3, 4}

```

```
OneCom[{2,3,4},F]
```

```
{2, 4}
```

Cálculo de las componentes conexas maximales

```
Component[S_List,F_List]:=
Module[{temp=Sort[S],cotemp,comps={}},
While[temp!={},cotemp=OneCom[temp,F];
AppendTo[comps,cotemp];
temp=Sort[Complement[temp,cotemp]]];
Sort[comps];
```

Cálculo de las componentes de una coalición factible y una no factible:

```
Component[{1,3,4},F]
```

```
{{1, 3, 4}}
```

```
Component[{2,3,4},F]
```

```
{{3}, {2, 4}}
```

Definición de la función que calcula el valor de Shapley utilizando los potenciales restringidos.

```
pr[{i_}]:=pr[{i}]=v[{i}];
pr[S_]:=pr[S]=If[MemberQ[F,S],
(v[S]+Apply[Plus,
pr[Complement[S,{#}]]& /@ S])/Length[S],
Apply[Plus,pr[#]& /@ Component[S,F]]];
GrafoShapley[game_:=Null,S_List:=T]:=Module[{va},
```

```

va=pr[T]-(pr[DeleteCases[T,#]]& /@ S);
pr[#]=. & /@ Rest[Coalitions];
Return[va]]
GrafoShapley[game_]:=GrafoShapley[game,T]
GrafoShapley[]:=GrafoShapley[Null,T]
GrafoShapley[game_:=Null,i_?AtomQ]:=
GrafoShapley[game,{i}]

```

Cálculo de los índices de poder

```

Timing[GrafoShapley[JuegoAndalucia[55]]]

{0.213 Second, {2/3, 0, 1/6, 1/6}}

```

2.2. El Congreso de los Diputados de 1996

Hacemos un estudio similar al anterior teniendo en cuenta la composición del Congreso de los Diputados de España, elegido en 1996, y suponiendo que la relación entre los partidos está modelada también por el orden político unidimensional:

HB—BNG—ERC—EA—IU—PSOE—PNV—CiU—PP—CC—UV,

correspondiente a una relación de orden izquierda-derecha. El conjunto de jugadores considerado es:

$$N = \{PP(1), PSOE(2), IU(3), CiU(4), PNV(5), CC(6), \\ BNG(7), HB(8), ERC(9), EA(10), UV(11)\},$$

y el juego queda representado por el siguiente esquema de votación

$$[176; 156, 141, 21, 16, 5, 4, 2, 2, 1, 1, 1].$$

Al trabajar con el programa Mathematica procederemos del mismo modo que en el caso anterior con las siguientes modificaciones:

Introducción del grafo

```

grafolineal=FromUnorderedPairs[{{8,7},{7,9},{9,10},
{10,3},{3,2},{2,5},{5,4},{4,1},{1,6},{6,11}}];
grafolineal[[2]]={{9,0},{6,0},{5,0},{8,0},{7,0},
{10,0},{2,0},{1,0},{3,0},{4,0},{11,0}};
ShowLabeledGraph[grafolineal];

```

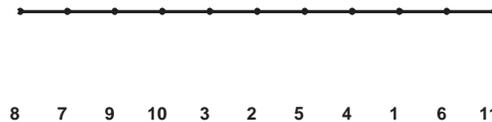


Figura 10.2. Grafo lineal en el Congreso de los Diputados

Si empleamos el *primer método*, hemos de definir la función característica del juego restringido del siguiente modo:

```

JuegoGrafoCongreso[n_Integer]:=(Clear[T,w,p,valor,v];T=Range[11];
w[1]:=156; w[2]:=141; w[3]:=21; w[4]:=16; w[5]:=5; w[6]:=4;
w[i_Integer/;7<=i && i<=8]:=2;
w[i_Integer/;9<=i && i<=11]:=1;
p[S_List]:=Apply[Plus, w /@ S];
valor[{}]:=0;

```

```
valor[S_/;p[S]≥n]:=1; valor[S_/;p[S]<n]:=0;
v[S_List]:=Max[(valor[#])& /@ subconexo[S]]
```

Si usamos ShapleyValue3 para calcular los valores de Myerson:

```
N[Timing[ShapleyValue3[JuegoGrafoCongreso[176]]]]

{150.99 Second, {0.216667, 0.05, 0.05, 0.466667,
0.133333, 0.0833333, 0, 0, 0, 0, 0}}
```

Con el segundo método, los valores de Myerson se obtendrán con:

```
N[Timing[GrafoShapley[JuegoCongreso[176]]]]

{59.004 Second, {0.216667, 0.05, 0.05, 0.466667,
0.133333, 0.0833333, 0, 0, 0, 0, 0}}
```

2.3. El poder en la Unión Europea

A continuación, consideramos de nuevo los datos del sistema de votación del Consejo de la Unión Europea (capítulo VII). La situación de comunicación (N, v, G) , se define mediante

$N = \{\text{Alemania (1), Reino Unido (2), Francia (3), Italia (4), España (5), Países Bajos (6), Grecia (7), Bélgica (8), Portugal (9), Suecia (10), Austria (11), Dinamarca (12), Finlandia (13), Irlanda (14) Luxemburgo (15)}\}$,

$$v = [q; 10, 10, 10, 10, 8, 5, 5, 5, 5, 4, 4, 3, 3, 3, 2], \quad 61 \leq q \leq 68,$$

siendo G el grafo que se indica a continuación.

Introducción del grafo

```
grafobloque=FromUnorderedPairs[
```

```

{{1,3},{1,6},{1,8},{1,11},{1,12},{1,15},{2,3},
{3,4},{3,5},{3,7},{3,9},{3,14},{4,5},{4,7},
{4,9},{4,14},{5,7},{5,9},{5,14},{6,8},{6,11},
{6,15},{7,9},{7,14},{8,11},{8,15},{9,14},{10,12},
{10,13},{11,15},{12,13}}

```

```

grafobloque[[2]]={ {2,0},{0,1},{-1,0},{-3,1},{-6,1},{7,-0.5},{-3,-1},
{7,0.5},{-8,0},{-1,-2.5},{4,1},{0,-1},{1,-2.5}, {-6,-1},{4,-1}};

```

```
ShowLabeledGraph[grafobloque];
```

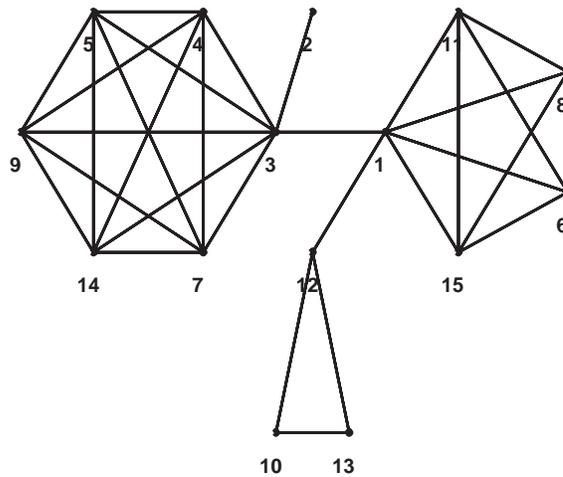


Figura 10.3. Un modelo de comunicación en la Unión Europea

Si empleamos el *primer método*, definiremos la función característica del juego restringido del siguiente modo:

```
JuegoGrafoUE15[n_Integer]:= (Clear[T,w,p,valor,v]; T=Range[15];
```

```

w[i_Integer/;1<=i && i<=4]:=10; w[5]:=8;
w[i_Integer/;6<=i && i<=9]:=5; w[10]:=4; w[11]:=4;
w[i_Integer/;12<=i && i<=14]:=3; w[15]:=2;
p[S_List]:=Apply[Plus,w /@ S];
valor[{}]:=0;
valor[S_;/;p[S]>=n]:=1; valor[S_;/;p[S]<n]:=0;
v[S_List]:=Max[(valor[#])& /@ subconexo[S]]

```

Si utilizamos `ShapleyValue3` para calcular los valores de Myerson, con una cuota de 62 votos, escribiremos:

```
N[Timing[ShapleyValue3[JuegoGrafoUE15[62]]]]
```

Empleando el segundo método, los valores de Myerson se obtienen con:

```
N[Timing[GrafoShapley[JuegoUE15[62]]]]
```

Los resultados obtenidos para cuotas de 62 y 65 votos se han incluido en la tabla 7.3 del capítulo VII.

3. Cálculo de valores en geometrías convexas

3.1. Valor de Shapley en geometrías convexas

Para calcular el valor de Shapley de juegos en geometrías convexas procederemos como se indica a continuación, una vez cargados los packages *DiscreteMath* ‘Combinatorica’ y *Cooperat* ‘Cooperat’.

Introducción de la familia de conjuntos de la geometría convexa

```

F:={ {}, {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6}, {1,2}, {2,3}, {3,4}, {4,5}, {5,6}, {1,2,3},
{2,3,4}, {3,4,5}, {4,5,6}, {1,2,3,4}, {2,3,4,5}, {3,4,5,6}, {1,2,3,4,5},

```

$$\{2,3,4,5,6\}, \{1,2,3,4,5,6\}$$

Definición del retículo de estos conjuntos convexos:

```
lattice[F_List]:=
MakeGraph[F,((Intersection[#2,#1]===#1)&&(#1 != #2))&];
labeling[F_]:=InputForm[ShowLabeledGraph[
HasseDiagram[lattice[F]],F]]
```

El diagrama de Hasse se obtiene con:

```
labelF=labeling[F];
```

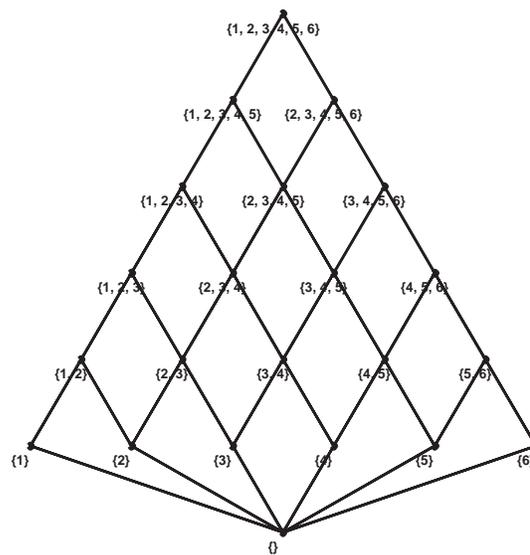


Figura 10.4. La geometría F

Relación entre los convexos de F y los vértices del diagrama de Hasse:

```
rulesF=Map[(Part[Table[labelF[[1,1,i,1]],
```

```
{i,Length[labelF[[1,1]]]-Length[F]+1,Length[labelF[[1,1]]]},#]
-> Part[Table[i,{i,Length[F]},#]&,Range[Length[F]]]
```

```
{{} -> 1, {1} -> 2, {2} -> 3, {3} -> 4, {4} -> 5, {5} -> 6, {6} -> 7,
{1, 2} -> 8, {2, 3} -> 9, {3, 4} -> 10, {4, 5} -> 11, {5, 6} -> 12,
{1, 2, 3} -> 13, {2, 3, 4} -> 14, {3, 4, 5} -> 15, {4, 5, 6} -> 16,
{1, 2, 3, 4} -> 17, {2, 3, 4, 5} -> 18, {3, 4, 5, 6} -> 19,
{1, 2, 3, 4, 5} -> 20, {2, 3, 4, 5, 6} -> 21, {1, 2, 3, 4, 5, 6} -> 22}
```

La salida de la siguiente función es la matriz cuyas entradas son las cadenas maximales $c([T, S])$, y $c([S, S]) = 1$, para toda $S \in F$.

```
chainMatrixF=Edges[GraphPower[HasseDiagram[lattice[F]],
Length[Last[F]]]+IdentityMatrix[Length[F]];
```

```
chainMatrixF[[9]]
```

```
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 2, 1, 0, 3, 1, 4}
chainNumberF[x_,y_.]:=
chainMatrixF[[x/.rulesF,y/.rulesF]]
```

```
chainNumberF[{2,3},Last[F]]
```

```
4
```

```
chainNumberF[{4,5},{1,2,3,4}]
```

```
0
```

La familia de los convexos S tales que $i \in ex(S)$:

```
Convex[i_,F_List]:=Sort[Select[F,(MemberQ[#,i])&&
(MemberQ[F,DeleteCases[#,i])&]]
```

```
Convex[3,F]
```

$\{\{3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5\}, \{3, 4, 5, 6\}\}$

La función `JoinShapleyValue` calcula el valor de Shapley cuando trabajamos en geometrías convexas:

```
JoinShapleyValueF[game_,i_]:=Apply[Plus,If[#=={ },0,
(chainNumberF[# ,T] chainNumberF[{ },DeleteCases[# ,i]]
/chainNumberF[{ },T])
(v[#]-v[DeleteCases[# ,i]])& /@ Convex[i ,F]]
Attributes[JoinShapleyValueF]={Listable};
JoinShapleyValueF[game_]:=JoinShapleyValueF[game ,T]
```

A continuación vamos a calcular los valores convexas de Shapley para el juego que modela la situación del Congreso de los Diputados resultante de las Elecciones Generales de 1996, restringiéndonos a los seis partidos con mayor número de votos, y considerando que el juego está definido sobre la geometría convexa F definida anteriormente

Jugador 1: Izquierda Unida (21 votos)
 Jugador 2: PSOE (141 votos)
 Jugador 3: PNV (5 votos)
 Jugador 4: CIU (16 votos)
 Jugador 5: Partido Popular (156 votos)
 Jugador 6: Coalición Canaria (4 votos)

```
Congreso96:=(T=Range[6];
Clear[w,p,v]; w[1]:=21; w[2]:=141;
w[3]:=5; w[4]:=16; w[5]:=156; w[6]:=4;
p[S_List]:=Plus @ @ w /@ S;
v[{ }]:=0;v[S_/:p[S]≥176]:=1;
v[S_/:p[S]<176]:=0);
```

El resultado se obtiene escribiendo

```
Timing[JoinShapleyValueF[Congreso96]]
```

```
{0.713 Second, {1/8, 0, 3/16, 3/16, 7/16, 1/16}}
```

3.2. Los índices convexos de Banzhaf

Finalmente, vamos a describir en Mathematica las dos funciones que permiten calcular, en geometrías convexas, los dos valores de Banzhaf: el normalizado y el probabilístico introducidos en el capítulo IX, sección 2. Al igual que en la sección anterior haremos los cálculos para la situación del Congreso de los Diputados resultante de las elecciones Generales de 1996, restringiéndonos a los seis mayores partidos, y considerando que el juego está definido sobre la geometría convexa \mathcal{L} ya definida en la sección anterior.

Función que calcula el índice convexo normalizado de Banzhaf:

```
ConvexBanzhaf[game_,i.]:=Length[
Select[Convex[i,F],(v[#]==1 &&
v[DeleteCases[#,i]]==0)&]]
Attributes[ConvexBanzhaf]={Listable};
ConvexBanzhaf[game.]:=
ConvexBanzhaf[game,T]
ConvexBanzhafIndex[game.]:=ConvexBanzhaf[game]/(Plus@@
ConvexBanzhaf[game])
```

Función que calcula el índice convexo probabilístico de Banzhaf:

```
ConvexBanzhafProb[game_,i.]:=Length[
Select[Convex[i,F],(v[#]==1 &&
v[DeleteCases[#,i]]==0)&]]/Length[Convex[i,F]]
```

```
Attributes[ConvexBanzhafProb]={Listable};  
ConvexBanzhafProb[game.]:=ConvexBanzhafProb[game,T]
```

Cálculo de los índices convexos de Banzhaf

```
Timing[ConvexBanzhafIndex[Congreso96]]
```

```
{1.9 Second, {1/7 , 0, 1/7, 2/7, 2/7, 1/7}}
```

```
Timing[ConvexBanzhafProb[Congreso96]]
```

```
{1.594 Second, {1/6, 0, 1/6, 1/3, 1/3, 1/6}}
```

Bibliografía

- [1] ALGABA, E. (1998) *Extensión de juegos definidos en sistemas de conjuntos*, Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla.
- [2] ALGABA, E., BILBAO, J.M., LÓPEZ, J.J. (1999) A unified approach to restricted games, aparecerá en *Theory and Decision*.
- [3] AUMANN, R., MASCHLER, M. (1964) The bargaining set for cooperative games, en: *Advances in Game Theory*, M. Dresher, L. Shapley, A. Tucker (eds.), Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 443–471.
- [4] AXELROD, R. (1970) *Conflict of Interest*, Markham, Chicago.
- [5] BANZHAF, J.F., III (1965) Weighted Voting doesn't work *Mathematical Analysis*, *Rutgers Law Review* 19, 317–343.
- [6] BERGANTIÑOS, G., CARRERAS, F., GARCÍA JURADO, I. (1993) Cooperation when Some Players are Incompatible, *ZOR Methods and Models of Operations Research* 38, 187–201.
- [7] BILBAO, J.M. (1998) Axioms for the Shapley value on convex geometries, *European Journal of Operational Research* 110, 368–376.
- [8] BILBAO, J.M. (1998) Values and potential of games with cooperation structure, *International Journal of Game Theory* 27, 131–145.
- [9] BILBAO, J.M. (1998) Closure spaces and restricted games, *Mathematical Methods of Operations Research* 48, 57–61.
- [10] BILBAO, J.M., EDELMAN P.H. (1999) The Shapley value on convex geometries, aparecerá en *Discrete Applied Mathematics*.
- [11] BILBAO, J.M., JIMÉNEZ LOSADA, A., LÓPEZ, J.J. (1998) The Banzhaf power index on convex geometries, *Mathematical Social Sciences* 36, 157–173.

- [12] BILBAO, J.M., JIMÉNEZ JIMÉNEZ, N., LEBRÓN, E. (1999) Probabilistic values on convex geometries, aparecerá en *Annals of Operations Research*.
- [13] BILBAO, J.M., LÓPEZ, J.J. (1994) El Poder de las Naciones en la Unión Europea, *Política Exterior* 40, 79–90.
- [14] BILBAO, J.M., LÓPEZ, J.J. (1996) El Potencial de Hart y Mas-Colell para juegos restringidos por grafos, *Quaderns d'Estadística i Investigació Operativa* 20(1), 7–22.
- [15] BIRKHOFF, G., BENNETT, M.K. (1985) The Convexity Lattice of a Poset, *Order* 2, 223–242.
- [16] BONDAREVA, O. (1963) Certain Applications of the Methods of Linear Programming to the Theory of Cooperative Games, *Problemy Kibernetiki* 10, 119–139.
- [17] BORM, P., JANSEN, M., POTTERS, J., TIJS, S. (1993) Pareto Equilibria for Bimatrix Games, *Computers & Mathematics with Applications* 25, 19–25.
- [18] BRAMS, S.J., LUCAS, W.F., STRAFFIN, P.D. (1983) *Political and Related Models*, Springer-Verlag, New York.
- [19] CALVO, E., LASAGA, J. (1997) Probabilistic Graphs and Power Indices: An Application to the Spanish Parliament, *Journal of Theoretical Politics* 9(4), 477–501.
- [20] CARRERAS, F., OWEN, G. (1988) Evaluation of the Catalanian Parliament, 1980–1984, *Mathematical Social Sciences* 15, 87–92.
- [21] CARRERAS, F. (1991) Restriction of Simple Games, *Mathematical Social Sciences* 21, 245–260.
- [22] CARTER, M. (1993) Cooperative Games, en: *Economic and Financial Modeling with Mathematics*, H.R. Varian (ed.), TELOS, Springer-Verlag, 167–191, Berlin.

- [23] CHANDRA, S., DURGA PRASAD, M.V. (1992) Constrained Vector Valued Games and Multiobjective Programming, *Opsearch* 29(1) 1–10.
- [24] CHARNES, A. (1963) Constrained Games and Linear Programming, *Proceeding of the National Academy of Science* 39, 639–641.
- [25] COLEMAN, J. (1971) Control of collectivities and the Power of a collectivity to act, en: *Social Choice*, B. Lieberman (ed.), Gordon and Breach, London, 269–300.
- [26] CORLEY S.C. (1985) Games with Vector Payoff, *Journal of Optimization Theory and Applications* 47, 491–498.
- [27] DAVIS, M.D. (1971) *Introducción a la teoría de juegos*, Alianza Editorial, Madrid.
- [28] DRIESSEN, T. (1988) *Cooperative Games, Solutions and Applications*, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands.
- [29] DUBEY, P., SHAPLEY, L. (1979) Mathematical Properties of the Banzhaf Power Index, *Mathematics Operations Research* 4, 99–131.
- [30] EDELMAN, P.H., JAMISON, R.E. (1985) The theory of convex geometries, *Geometriae Dedicata* 19, 247–270.
- [31] EDELMAN, P.H. (1997) A note on voting, *Mathematical Social Sciences* 34(1), 37–50.
- [32] EINY, E. (1985) On Connected Coalitions in Dominated Simple Games, *International Journal of Game Theory* 14(2), 103–125.
- [33] FAIGLE, U. (1989) Cores of Games with Restricted Cooperation, *ZOR-Methods and Models of Operations Research* 33, 405–422.
- [34] FAIGLE, U., KERN, W. (1992) The Shapley Value for Cooperative Games under Precedence Constraints, *International Journal of Game Theory* 21, 249–266.

- [35] FAIGLE, U., KERN, W. (1995) Partition Games and the Core of Hierarchically Convex Cost Games, *preprint*.
- [36] FANG, L., HIPEL, K.W., KILGOUR, D.M. (1989) Conflict models in graph form: Solution concepts and their interrelationships, *European Journal of Operational Research* 41, 86–100.
- [37] FANG, L., HIPEL, K.W., KILGOUR, D.M. (1993) *Interactive Decision Making: The Graph Model for Conflict Resolution*, Wiley, New York.
- [38] FERNÁNDEZ, F.R., PUERTO, J. (1996) Vector Linear Programming in Zero-sum Multicriteria Matrix Games, *Journal of Optimization Theory and Applications* 89, 115–127.
- [39] GEOFFRION, A.M. (1968) Proper Efficiency and the Theory of Vector Maximization, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 22, 618–630.
- [40] GILLIES, D.B. (1953) Some Theorems on n -Person Games, *Ph. D. Thesis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- [41] GHOSE, D.B., PRASAD U.R. (1989) Solution Concepts in Two-Person Multicriteria Games, *Journal of Optimization Theory and Applications* 63, 167–189.
- [42] GHOSE, D.B. (1991) A Necessary and Sufficient Condition for Pareto-Optimal Security Strategies in Multicriteria Matrix Games, *Journal of Optimization Theory and Applications* 68, 463–480.
- [43] GREENBERG, J. (1992) On the sensitivity of von Neumann and Morgenstern abstract stable set. The stable set and the individual stable bargaining set, *International Journal of Game Theory* 21, 41–55.
- [44] GRÖTSCHEL, L., LOVÁSZ, SCHRIJVER, A. (1988) *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*, Springer-Verlag, New York.
- [45] HARSANYI, J.C. (1963) A Simplified Bargaining Model for the n -Person Cooperative Game, *International Economic Review* 4, 194–220.

- [46] HART, S., MAS-COLELL, A. (1988) The Potential of the Shapley Value, en: *The Shapley Value*, A. Roth (ed.), Cambridge University Press, Cambridge, 127–137.
- [47] HAYWOOD, O.G. (1954) Military Decision and Game Theory, *ORSA* 2, 365–385.
- [48] HERNE, K., NURMI, H. (1993) The Distribution of a Priori Voting Power in the EC Council of Ministers and the European Parliament, *Scandinavian Political Studies* 16(3), 269–284.
- [49] ICHIISHI, T. (1981) Supermodularity: applications to convex games and to the greedy algorithm for LP, *J. Economic Theory* 25, 283–286.
- [50] IOFFE, A.D., LEVIN, V.L. (1972) Subdifferentials of convex functions, *Trans. Moscow Math. Soc.* 26, 1–72.
- [51] JAIN, S., BATHIA, D. (1986) Generalized Saddle Points in Multiobjective Bilinear Programming, *Opsearch* 23(3), 142–150.
- [52] JIMÉNEZ JIMÉNEZ, N. (1998) *Conceptos de solución para juegos sobre espacios de clausura*, Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla.
- [53] JIMÉNEZ LOSADA, A. (1998) *Valores para juegos sobre estructuras combinatorias*, Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla.
- [54] KANNIAPPAN, P. (1986) Necessary Conditions for Optimality of Nondifferentiable Convex Multiobjective Programming, *Journal of Optimization Theory and Applications* 40(2), 167–174.
- [55] KUHN, H.W., TUCKER, A.W. (1951) Nonlinear Programming, en: *Proceedings of Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Berkeley, California, 481–492.
- [56] KILGOUR, D.M., FANG, L., HIPEL, K.W. (1990) General preference structures in the graph model for conflicts, *Information and Decision Technologies* 16, 291–300.

- [57] LANE, J.E., MAELAND, R. (1995) Voting Power under the EU Constitution, *Journal of Theoretical Politics* 7(2), 223–230.
- [58] LÓPEZ, J. (1996) *Cooperación parcial en juegos de n personas*, Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla.
- [59] MAS-COLELL, A. (1989) An equivalence theorem for a bargaining set, *Journal of Mathematical Economics* 18, 129–139.
- [60] MERGEN F. VAN, BORM, P., TIJS, S. (1995) A Perfectness Concept for Multicriteria Games, *Working Paper CentER*, Universidad de Tilburg, Tilburg, Países Bajos.
- [61] MONROY, L. (1996) *Análisis de juegos bipersonales con pagos vectoriales*, Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla.
- [62] MYERSON, R.B. (1977) Graphs and Cooperation in Games, *Mathematics of Operations Research* 2, 225–229.
- [63] MYERSON, R.B. (1978) Refinement of the Nash Equilibrium Concept, *International Journal of Game Theory* 7, 73–78.
- [64] MYERSON, R.B. (1980) Conference Structures and Fair Allocation Rules, *International Journal of Game Theory* 9, 169–182.
- [65] NASH, J.F. (1950) Equilibrium points in n -Person Games, *Proceedings of National Academy of Sciences of the USA* 36, 48–49.
- [66] NASH, J.F. (1951) Non-cooperative Games, *Annals of Mathematics* 54 (2), 268–295.
- [67] NIEUWENHUIS, J.W. (1983) Some Minimax Theorems in Vector-valued Functions, *Journal of Optimization Theory and Applications* 40, 463–475.
- [68] NOUWELAND, A. VAN DEN, BORM, P. (1991) On the Convexity of Communication Games, *International Journal of Game Theory* 19, 421–430.
- [69] NOUWELAND, A. VAN DEN, BORM, P., TIJS, S. (1992) Allocation Rules for Hypergraph Communication Situations, *International Journal of Game Theory* 20, 255–268.

- [70] NOUWELAND, A. VAN DEN (1993) Games and Graphs in Economics Situations, *Ph. D. Thesis*, Tilburg University, The Netherlands.
- [71] OWEN, G. (1982) *Game Theory*, Academic Press, New York.
- [72] OWEN, G. (1986) Values of Graph-Restricted Games, *SIAM Journal of Algebraic and Discrete Methods* 7, 210–220.
- [73] PUERTO, J., FERNÁNDEZ, F.R. (1995a) Solution Concepts Based on Security Levels in Constrained Multicriteria Convex Games, *Opsearch* 32, 16–30.
- [74] PUERTO, J., FERNÁNDEZ, F.R. (1995b) Refinements of the Concept of Equilibrium in Multiple Objective Games, *Prepublicación n. 28 de la Facultad de Matemáticas*, Universidad de Sevilla.
- [75] ROCKAFELLAR, T.R. (1979) *La theorie des sous-gradients et ses applications a l'optimization*, Les Presses de l'Universit de Montreal.
- [76] ROTH, A. E. (1988) *The Shapley Value. Essays in Honor of Lloyd S. Shapley*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [77] SAWARAGI, Y., NAKAYAMA, H., TANINO, T. (1985) *Theory of Multiobjective Optimization*, Academic Press, Orlando, Florida.
- [78] SELTEN, R. (1975) Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games, *International Journal of Game Theory* 4, 25–55.
- [79] SCHRIJVER, A. (1986) *Theory of Linear and Integer Programming*, John Wiley & Sons, New York.
- [80] SHAPLEY, L.S. (1953) A Value for n -Person Games, en: *Contributions to the Theory of Games*, vol. II, H.W. Khun, A.W. Tucker (eds.), Princeton, New Jersey, 307–317.
- [81] SHAPLEY, L.S., SHUBIK, M. (1954) A Method for Evaluating the Distribution of Power in a Committee System, *American Political Science Review* 48, 787–792.

- [82] SHAPLEY, L.S. (1959) Equilibrium Points in Games with Vector Payoff, *Naval Research Logistics Quarterly* 6, 57–61.
- [83] SHAPLEY, L.S. (1967) On Balanced Sets and Cores, *Naval Research Logistics Quarterly* 14, 453–460.
- [84] SHAPLEY, L.S. (1971) Cores of convex games, *International Journal of Game Theory* 1, 11–26.
- [85] SHUBIK, M. (1955) The Uses of Game Theory in Management Science, *Management Science* 2, 40–54.
- [86] SINGH C., RUEDA, N. (1994) Constrained Vector Valued Games and Multiobjective Minmax Programming, *Opsearch* 31(2), 144–154.
- [87] SKIENA, S. (1990) *Implementing Discrete Mathematics: Combinatorial and Graph Theory with Mathematica*, Addison-Wesley, Massachusetts.
- [88] STEUER, R.E. (1986) *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Application*, Wiley, New York.
- [89] STEUER, R.E. (1995) *Manual for the ADBASE, Multiple Objective Linear Programming Package*, University of Georgia, Athens, Georgia.
- [90] STRAFFIN, P.D. (1983) Power Indices in Politics, en: *Political and Related Models*, S.J. Brams, W.F. Lucas, P.D. Straffin (eds.), Springer-Verlag, New York, 256–321.
- [91] THOMAS, L.C. (1984) *Games, Theory and Applications*, Ellis Horwood Limited, Chichester.
- [92] VON NEUMANN, J. (1928) Zur Theorie der Gesellschaftsspiele, *Mathematische Annalen* 100, 295–320.
- [93] VON NEUMANN, J., MORGENSTERN, O. (1944) *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- [94] VOROBEV, N.N. (1977) *Game Theory , Lecturs for Economist and Systems Scientists*, Springer-Verlag, New York.

- [95] WANG, S. (1993) Existence of a Pareto Equilibrium, *Journal of Optimization Theory and Applications* 3, 61–63.
- [96] WEBER, R.J. (1988) Probabilistic Values for Games, en: *The Shapley Value*, A. Roth (ed.), Cambridge University Press, Cambridge, 101–119.
- [97] WIDGRÉN, M. (1994) Voting Power in the EC decision making and the consequences of two different enlargements, *European Economic Review* 38, 1153–1170.
- [98] WOLFRAM, S. (1991) *Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer*, Addison-Wesley, Massachusetts.
- [99] YANO, H., SAKAWA, M. (1989) A Unified Approach for Characterizing Pareto Optimal Solutions of Multiobjective Optimization Problems: The Hyperplane Method, *European Journal of Operational Research* 39, 61–70.
- [100] ZHAO, J. (1991) The Equilibria of a Multiple Objective Game, *International Journal of Game Theory* 20, 171–182.