



Teoría de Juegos Modelos Extensivos

Agosto 2016

Índice

2. Modelos Extensivos

2.1. Elementos que considera el modelo: alternancia, azar e información

2.2. Definición de juego extensivo

2.3. Definición de estrategia en un juego extensivo

2.4. Interacción estratégica

2.5. El algoritmo de Zermelo

2.6. La forma normal de un juego extensivo finito



2.1. Elementos que considera el modelo: alternancia, azar e información

- ▶ Alternancia: la competencia o disputa es un elemento indispensable del modelo.
- ▶ Azar: Las decisiones aleatorias o como resultado de la aleatoriedad pueden estar presentarse en muchos juegos.
- ▶ Información: el conjunto de información es indispensable aunque esta puede ser simétrica o asimétrica.



2.2. Definición de juego extensivo

- ▶ En un juego en forma extensiva se pueden identificar los siguientes **elementos**:
 - Los Nodos
 - Las Ramas
 - El sendero
 - Conjunto de Información
 - El cumplimiento de Reglas
 - La memoria

Juegos en forma extensiva (2)

▶ Los Nodos

- ▶ Nodo Inicial: representa el comienzo del juego
- ▶ Nodos finales/ Terminales: representan el final del juego. Cada uno de ellos llevan a los pagos del juego.

Juegos en forma extensiva (3)

▶ Las Ramas

Representan las decisiones que los jugadores pueden tomar en los nodos de decisión del juego. Están representadas por flechas.

Empezando desde algún nodo se puede recorrer el árbol siguiendo cada una de las flechas.

Los nodos que se alcanzan de esta forma son llamados los “sucesores” del nodo desde el que se empieza. Desde algún nodo, las ramas apuntan a sus “sucesores inmediatos”. Análogamente, haciendo el camino inverso o hacia atrás, encontramos a los nodos “antecesores” y los “antecesores inmediatos”.



Juegos en forma extensiva (4)

▶ El Sendero

Un sendero es una secuencia de nodos que:

- i. Empiezan con el nodo inicial
- ii. Terminan en un nodo terminal
- iii. Tienen la propiedad de que los nodos sucesivos en la secuencia son los sucesores inmediatos de otro nodo.

Un juego en forma extensiva se representa en forma de “árbol”: en él, hay nodos conectados por ramas.

Empezando por algún nodo se puede recorrer el árbol a través de las ramas, que son flechas.

Los nodos que se alcanzan de esta forma se denominan “sucesores” del nodo en el cual se ha empezado.

Juegos en forma extensiva (5)

▶ El cumplimiento de las reglas

En un juego en forma extensiva se cumplen las siguientes reglas:

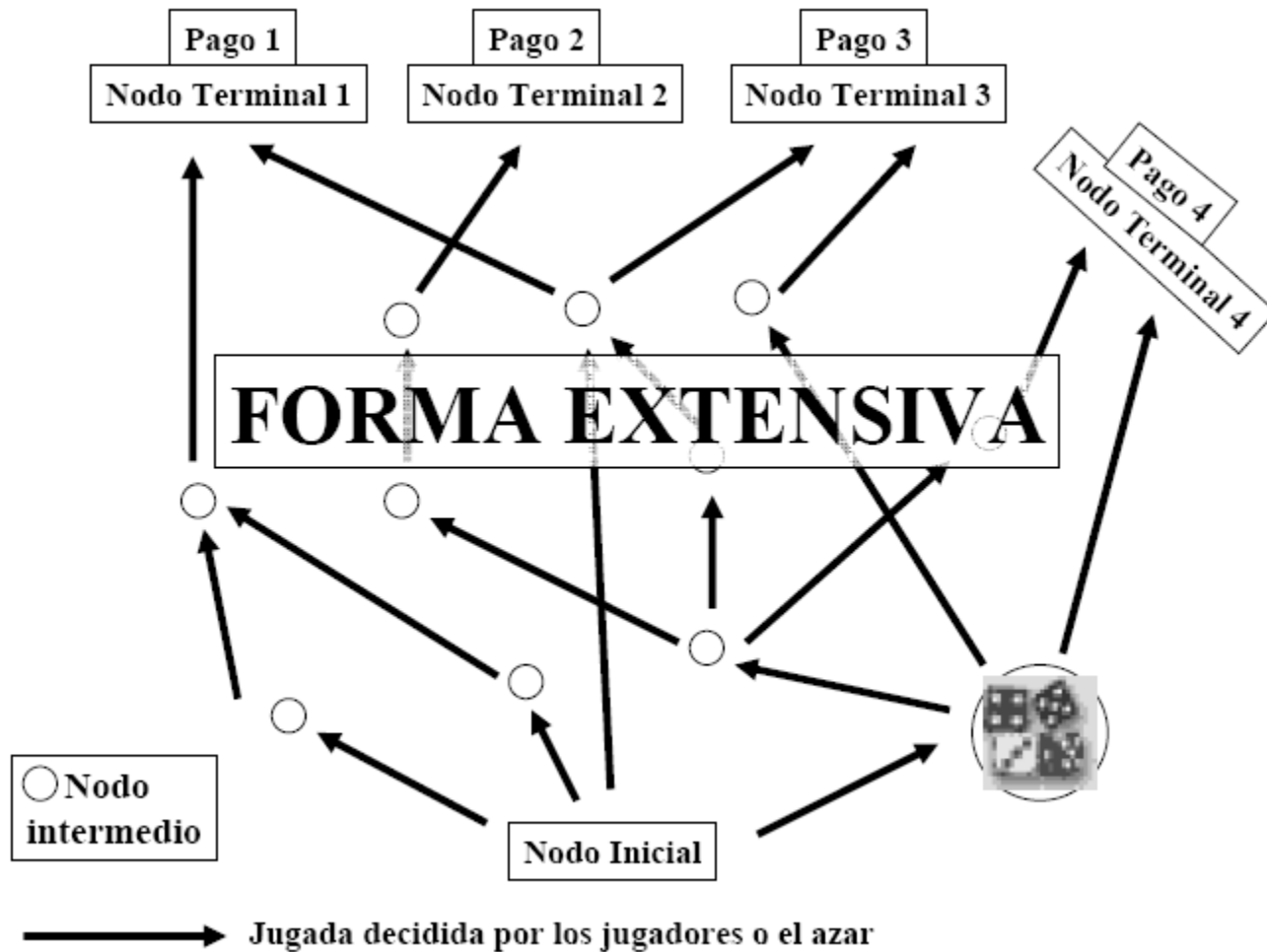
- ▶ Regla 1: Cada uno de los nodos son sucesores del nodo inicial. Este último es el único que tiene a todos los restantes nodos como sucesores.
- ▶ Regla 2: Cada nodo excepto el nodo inicial, tienen exactamente un antecesor inmediato. El nodo inicial no tiene antecesores. Esto garantiza que los senderos no se cruzarán.
- ▶ Regla 3: Si de un mismo nodo se extienden múltiples ramas, cada una de ellas representará distintas acciones.
- ▶ Regla 4: Cada uno de los nodos pertenecientes a un conjunto de información no unitario, deben tener el mismo número de sucesores inmediatos, y deben tener el mismo conjunto de acciones (representadas en las ramas). La importancia de esta regla, reside en que en caso contrario, cada jugador podría distinguir el nodo exacto en el cual le toca tomar su decisión.

Juegos en forma extensiva (6)

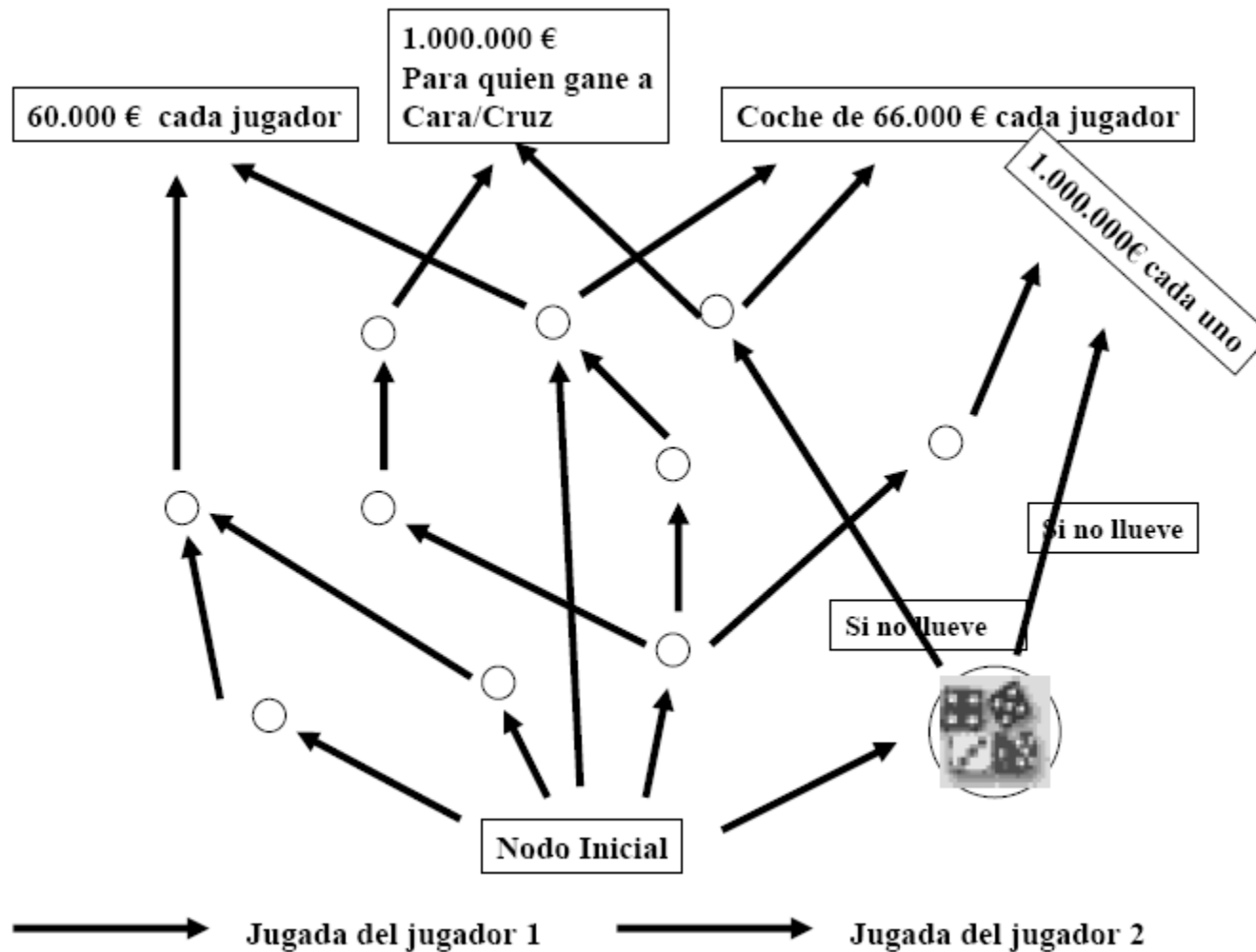
▶ **La Memoria**

- ▶ Memoria perfecta (Perfect Recall): Los jugadores recuerdan cuáles han sido las acciones/ decisiones que han elegido/ tomado en el pasado, como también cualquier otro evento que pudo haber ocurrido.
- ▶ Memoria Imperfecta.

Juegos en forma extensiva (7)



Juegos en forma extensiva (8)



Forma extensiva (matemática formal)

$$\Gamma = \langle N, R, Z, \{K_i\}_{i=1, \dots, n}, \{H_i\}_{i=1, \dots, n}, \{A(k)\}_{k \in K \setminus Z}, \{u_i\}_{i=1, \dots, n} \rangle$$

- ▶ N es un conjunto de jugadores, $N = \{1, \dots, N\}$.
- ▶ R es una relación que **define** un árbol con raíz donde K denota el conjunto de todos los nodos del árbol.
- ▶ Z son los nodos terminales del árbol.

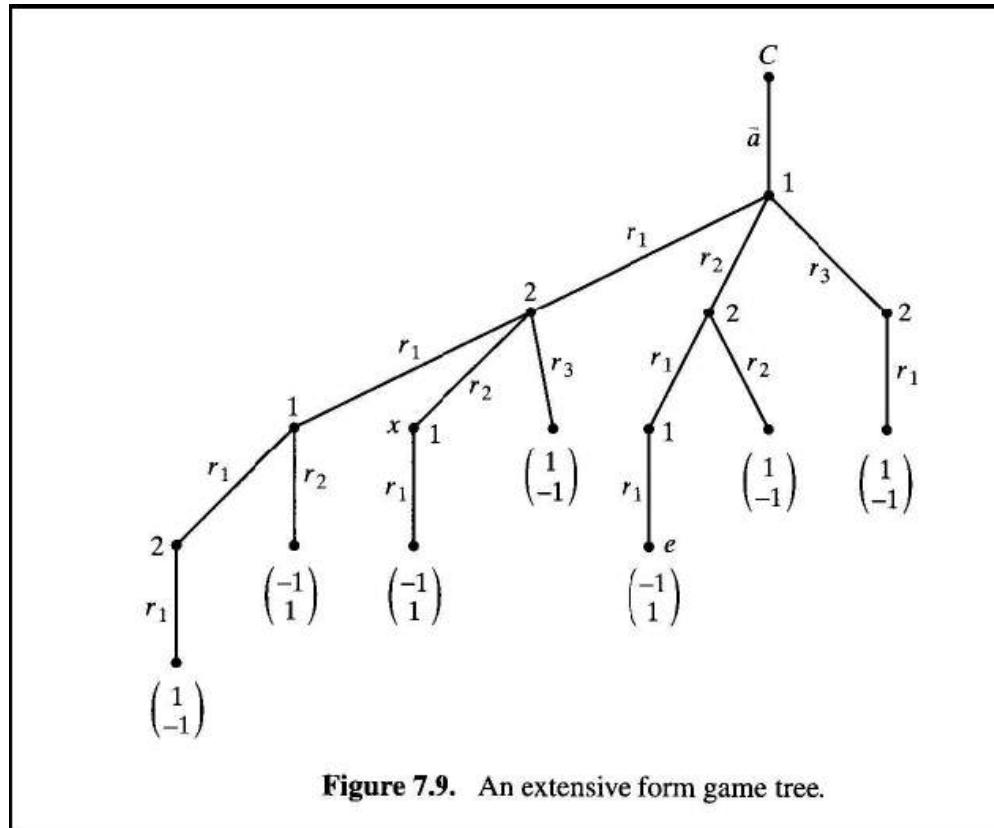
Forma extensiva (matemática formal) (2)

- ▶ $\{K_i\}_{i=1,\dots,n}$ es una partición de $K \setminus Z$ que denota los nodos donde cada jugador juega.
- ▶ Para $i = 1, \dots, N$; H_i es una partición de K_i . Cada $h \in H_i$ denota un conjunto de información.
- ▶ Para $i = 1, \dots, N$, y $k \in K_i$, $A(k)$ denota las acciones posibles del jugador i en el nodo k . Denotamos un elemento de $a \in A(k)$ por a_k . Dados k y $k' \in h \in H_i$ debe cumplirse que $A(k) = A(k')$.
- ▶ Abusando un poco del lenguaje definimos $A(h) = A(k)$, $k \in h$ y denotamos una acción $a \in A(h)$ por a_h .

Forma extensiva (matemática formal) (3)

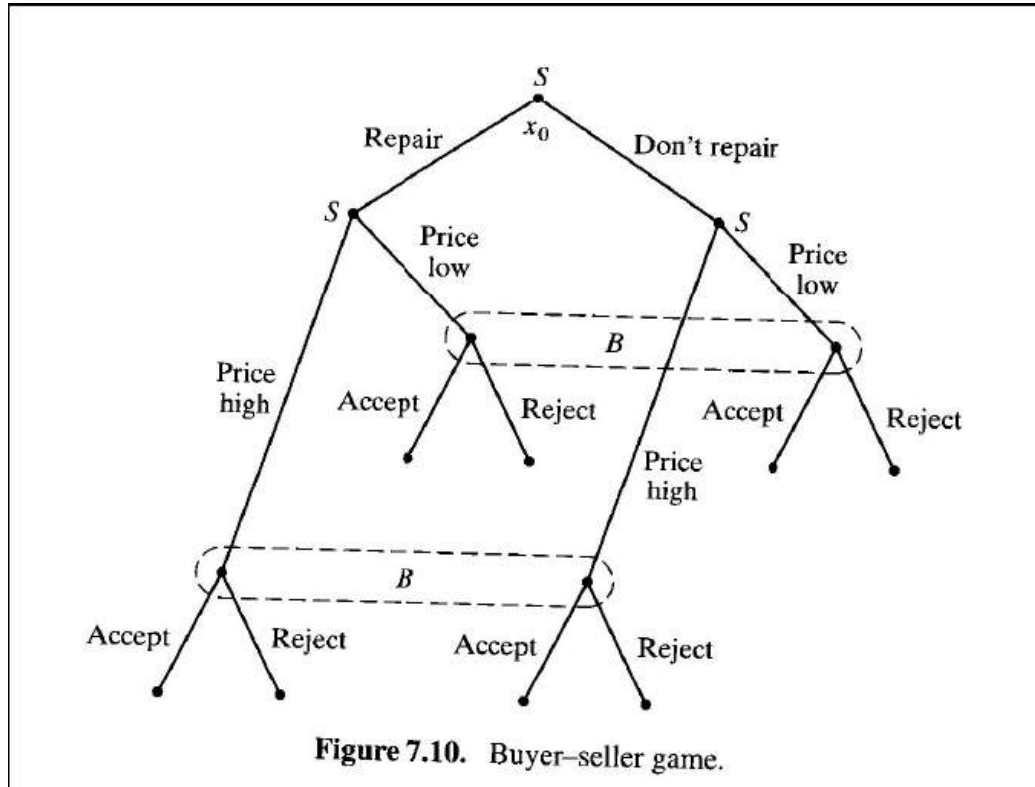
- ▶ Para $i = 1, \dots, N$, y $z \in Z$, $u_i(z)$ denota la utilidad del agente i en caso de que el resultado final del juego sea el nodo terminal z .
- ▶ Interpretamos estas funciones de utilidad como funciones de utilidad (instantáneas) de Von Neumann y Morgenstern. Esto no excluye que existan pagos intermedios.
- ▶ Es fácil extender la definición al caso en que existen nodos en los que sucede algún evento incierto importante para el juego (i.e., jugadas de la naturaleza).
- ▶ Suponer que la naturaleza solo juega al comienzo del juego es sin pérdida de generalidad. Por ejemplo, en Bagamon (Backgammon), se lanzan los dados muchas veces durante un juego. Supongamos que para la totalidad de un juego se lanzan n veces. Entonces podríamos modelar este juego como uno en el que al inicio la naturaleza juega una de 6^n alternativas.

Ejemplos (información perfecta)



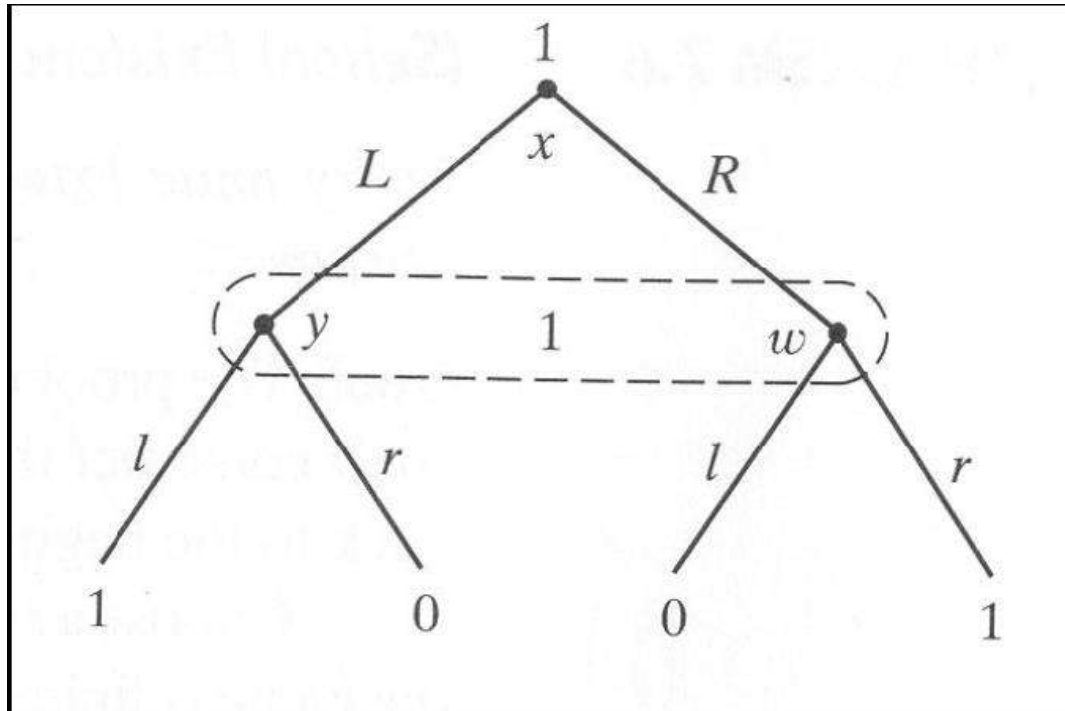
Información perfecta: porque los conjuntos de información tienen un solo nodo

Ejemplos (información imperfecta)



Información imperfecta: algunos conjunto de información tiene más de un nodo.

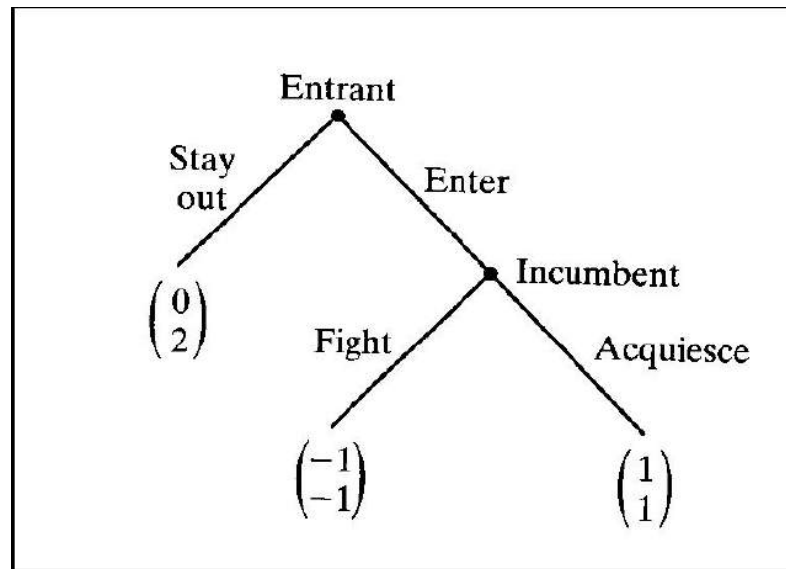
Ejemplos (memoria imperfecta)



Vamos a concentrarnos en juegos con memoria perfecta.

Ejemplos

- ▶ ¿Cuál es nuestra mejor predicción de este juego?



- ▶ Ahora el objetivo será desarrollar conceptos de equilibrio que exploten las características propias de la descripción de un juego en forma extensiva.
- ▶ Antes de continuar en esa dirección obsérvese que un juego en forma extensiva puede representarse de forma natural como un juego en forma estratégica.

2.3. Definición de estrategia en un juego extensivo

- ▶ Una estrategia es un plan de acciones completo que se lleva a cabo cuando se juega un juego.
- ▶ Se conoce antes de que comenzar el juego, y prescribe cada decisión que los agentes deben tomar durante el transcurso del juego, dada la información disponible para el agente.
- ▶ Una estrategia puede incluir movimientos aleatorios



2.4. Interacción estratégica

- ▶ La esencia de un juego de estrategia es la interdependencia entre las decisiones de los jugadores.
- ▶ Hay dos tipos de interacción:
 - **Secuencial**
 - **Simultánea**
- ▶ Se debe adaptar la estrategia al contexto correspondiente

Juegos Secuenciales

- ▶ Los juegos secuenciales (o dinámicos) son juegos en los que los jugadores posteriores tienen algún conocimiento de las acciones previas.
- ▶ Este conocimiento no necesariamente tiene que ser perfecto; sólo debe consistir en algo de información.
- ▶ Por ejemplo, un jugador 1 puede conocer que un jugador 2 no realizó una acción determinada, pero no saber cuál de las otras acciones disponibles eligió

Reglas de acción en Juegos secuenciales

- ▶ La primera regla de la estrategia es mirar hacia adelante y razonar hacia atrás.
- ▶ Se anticipan las decisiones futuras y se usan para tomar las decisiones previas.
- ▶ En cada nodo del árbol puede ser el turno de tomar una decisión para un jugador.
- ▶ Alguien que toma una decisión en un punto debe tomar en cuenta no solo sus propias decisiones futuras, sino también las de otros.

Resolución de juegos secuenciales

- ▶ Una estrategia es un plan de acción completo en un juego determinado.
- ▶ Para construir una estrategia primero se identifican cada una de las decisiones que debe tomar el jugador.
- ▶ Hay tantas estrategias como combinaciones de alternativas ofrezca el juego, pero solo hay una estrategia que maximiza los objetivos del jugador.

Juegos Simultáneos

- ▶ Los juegos simultáneos son juegos en los que los jugadores mueven simultáneamente o en los que éstos desconocen los movimientos anteriores de otros jugadores.

Juegos de decisión simultánea: Razonamiento circular

- ▶ Cuando las decisiones son de naturaleza simultánea, cada jugador debe actuar bajo condiciones de ignorancia acerca de la decisión de otros. Cuando llega el momento de descubrir qué es lo que hizo el otro, ya es demasiado tarde para cambiar algo.
- ▶ En estos casos, el razonamiento estratégico consiste en ponerse simultáneamente en los pies de uno y del otro, y figurar cuál es la movida más conveniente para ambos.

Juegos de decisión simultánea: Razonamiento circular (2)

- ▶ La clave para ver a través de las estrategias no visibles pero vinculadas proviene de asumir que las acciones de otros jugadores no son inciertas de un modo impersonal, como en el caso de los estados de la naturaleza: a diferencia de la naturaleza, los otros jugadores también tienen intenciones estratégicas.

Reglas de acción en juegos simultáneos

I. Elegir la estrategia dominante.

- ▶ Una estrategia dominante es la que hace que un jugador esté mejor que si hubiera usado cualquier otra estrategia, sin importar cuál haya sido la estrategia elegida por el otro jugador.
- ▶ El término dominancia se refiere a dominancia sobre las otras estrategias disponibles para uno, no a dominancia sobre el oponente.

Reglas de acción en juegos simultáneos (2)

- ▶ Los juegos en que ambas partes tienen una estrategia dominante son los más simples desde un punto de vista estratégico: hay interacción estratégica, pero con un resultado predeterminado.
- ▶ Si un jugador no tiene una estrategia dominante pero el oponente sí la tiene, hay que anticipar que el oponente va a usar esa estrategia y elegir la jugada propia de acuerdo a ese supuesto.

Reglas de acción en juegos simultáneos (3)

2. Eliminar todas las estrategias dominadas bajo consideración, en forma sucesiva a medida que se va simplificando el juego.

- ▶ Cuando se haya reducido el juego a su máximo nivel de simplicidad se debe confrontar el problema de razonamiento circular: lo que es mejor para uno depende de lo que es mejor para el otro y viceversa.

Reglas de acción en juegos simultáneos (4)

3. Cuando se hayan explorado los caminos de buscar estrategias dominantes y eliminar estrategias dominadas, el paso siguiente es **buscar un equilibrio para el juego.**
- ▶ Un **equilibrio** es una situación en que, dado lo que el otro jugador está haciendo, no hay incentivos para cambiar lo que uno está haciendo.
 - ▶ Que un resultado sea un equilibrio no quiere decir que este equilibrio sea necesariamente lo mejor para todos los jugadores.

Reglas de acción en juegos simultáneos (5)

- ▶ Si hay un equilibrio único, hay buenos argumentos para que todos los jugadores lo elijan.
- ▶ Si hay varios equilibrios, se hace necesario establecer una convención mutuamente aceptada para elegir un equilibrio por sobre otros.
- ▶ Si no hay un equilibrio, esto significa que cualquier conducta sistemática por parte de uno puede ser aprovechada por los rivales, e indica que lo más apropiado es volverse imprevisible.

Equilibrios Eficientes e Ineficientes

- ▶ Un equilibrio es eficiente si no hay un resultado alternativo que deje a algunos jugadores mejor y a ninguno peor.
- ▶ Un equilibrio no es eficiente si hay algún otro resultado que todos encuentren preferible.
- ▶ En un juego puede haber tanto equilibrios eficientes como equilibrios ineficientes.
- ▶ Un equilibrio ineficiente puede corresponderse con una conducta perfectamente racional desde el punto de vista individual.

Resolución de juegos con decisiones simultáneas

- ❖ Construir la matriz de pagos
- ❖ Si uno tiene una estrategia dominante, usarla
- ❖ Si uno no tiene una estrategia dominante pero el otro jugador sí la tiene, asumir que la va a emplear y actuar en consecuencia.
- ❖ Si nadie tiene una estrategia dominante, simplificar el problema eliminando las estrategias dominadas.
- ❖ Si no hay estrategias dominantes ni dominadas, buscar un equilibrio .
- ❖ Si no hay un equilibrio en estrategias puras, recurrir a estrategias mixtas

2.5. Algoritmo de Zermelo

Mirar hacia adelante, razonar hacia atrás

- ▶ Para que se pueda aplicar el principio de mirar hacia adelante y razonar hacia atrás, es esencial que las movidas puedan ser observadas por quienes deben elegir luego.
- ▶ La otra condición para aplicar este principio es que las estrategias de cada parte sean irreversibles.
- ▶ Si alguna de estas condiciones no se cumple, desde el punto de vista del razonamiento estratégico el juego es de naturaleza simultánea

Inducción hacia atrás

- ▶ Es el procedimiento de analizar el juego desde el final hacia el principio: desde los conjuntos de información en el final del árbol hasta los conjuntos de información del principio. Permite identificar el Equilibrio de Nash en Estrategias Puras.

Algoritmo de Zermelo

- ▶ “Todo juego en forma extensiva que exhibe información total tiene un equilibrio de Nash que puede descubrirse por inducción hacia atrás. Si cada recompensa es única para cada jugador, esta solución por inducción hacia atrás (empezando por el fin del juego y yendo hacia atrás hasta su inicio) es única”.



