

Universidad Autónoma de Madrid

Facultad de Ciencias

Departamento de Física Teórica



Universo y Multiverso Cuánticos

Salvador J. Robles Pérez

Director de Tesis:

Pedro F. González Díaz

Consejo Superior de Investigaciones Científicas

Instituto de Física Fundamental

Departamento de Partículas, Campos y Cosmología



Madrid, 2011

Agradecimientos

A Julia,
La Vida, mi continuo renacer
A Pepe,
Su Sacrificio, mi carácter más afable
A Ana J.,
Su Dulzura, mi tolerancia
A Eva,
Su Corazón, mi más fiel admiradora
A Pepe,
Su Valor, mi orgullo
Y a José, Samuel, Miguel y Ana Julia,
Su Alegría, mi Esperanza

A Rafa,
La Sensibilidad, mi sempiterna Amistad
A su familia,
También la mía, mi conciencia social
A Alberto,
Su Nobleza, mi compañero de camino
A Paco,
La Ironía, mis pies en el suelo
Y a Pilar,
Su Sonrisa, mis latidos

A Iñaki,
Valeroso Vizcaíno, mi cuento fabuloso
A Ana,
Su Idealismo, mis molinos

A Alberto,
La Sobriedad, mi lado pragmático
A Prado,
Su Ayuda y Ánimo, mi fuerza
Y, sobretodo, a Pedro,
El viejo Duende, mi joven maestro

Y a todos,
por correr las cortinas del escenario,
Mil gracias.

(S.J.R.P.)

También quiero agradecer al Instituto de Física Fundamental del CSIC, a su personal y en particular a sus directores, Alfredo Tiemblo Ramos y Gerardo Delgado Barrio, por permitirme disfrutar de unos años intensos dedicados a la investigación en un entorno excepcional de calidad intelectual y debate científico. A Yassine Hassouni y a los miembros del Laboratorio de Física Teórica de la Universidad Mohammed V de Rabat, por su cálida acogida y su apoyo a través de diversos proyectos de colaboración. Y de manera singular, quiero agradecer a los profesores Harvey Brown y Simon Saunders, de la Facultad de Filosofía de la Universidad de Oxford, por permitirme asistir al curso Advanced Philosophy of Physics y a los seminarios de su departamento. A todos ellos tengo que agradecerles el haber podido vivir un período lleno de experiencias personales y académicas irrepetibles, que me acompañarán de manera muy especial a lo largo de toda mi vida.

La investigación de la verdad resulta por un lado difícil, por otro fácil. Prueba de ello es que nadie es capaz de alcanzarla adecuadamente, pero tampoco de errarla por completo.

Aristóteles. Metafísica (Libro II)

Índice general

1. Introducción	5
1.1. El paradigma cosmológico contemporáneo: universo en expansión acelerada	5
1.1.1. Datos observacionales	5
1.1.2. Algunos modelos que explican la expansión acelerada	7
1.1.3. Gravedad y cosmología cuánticas	13
1.2. ¿Puede el universo acelerado ser de naturaleza esencialmente cuántica?	16
1.2.1. ¿Qué es cuántico y qué es clásico?	16
1.2.2. ¿Puede el universo como un todo describirse cuánticamente? . .	18
1.2.3. ¿Puede la expansión acelerada del universo ser un efecto cuántico sin análogo clásico?	24
1.3. Introducción a la presente tesis: ¿qué vamos a hacer y por qué?	25
2. Teoría clásica y primera cuantización	29
2.1. Formulación Hamiltoniana del espacio-tiempo con un campo escalar . .	29
2.1.1. La función de ondas del universo. Condiciones de frontera. . . .	32
2.1.2. Régimen semiclásico	36
2.2. Energía oscura y energía fantasma: ejemplo de multiverso clásico. . . .	37
2.3. El multiverso cuántico fantasma: estados entrelazados.	40
2.3.1. La función de ondas	40
2.3.2. Condiciones de frontera. Normalización	44
2.3.3. Estados excitados	47
2.3.4. La matriz densidad de estados	48
2.3.5. Estados entrelazados en el multiverso	49

3. El estado cuántico del multiverso	53
3.1. Introducción al multiverso cuántico	53
3.1.1. Condiciones de frontera en el multiverso	56
3.2. Segunda cuantización	58
3.2.1. Universos unidimensionales	58
3.2.2. Universos homogéneos e isótropos	63
3.3. La función de ondas del multiverso	67
3.3.1. Interpretación de la función de ondas	67
3.3.2. Operadores de creación y destrucción de universos	73
3.3.3. Universos "padre" y universos "bebé"	76
3.4. La matriz densidad de estados: representaciones	80
3.4.1. Representación- ϕ	80
3.4.2. Representación de estados número-aplastados	82
3.4.3. Representación de estados coherentes	84
3.5. Comentarios sobre algunas críticas hechas en relación al multiverso en segunda cuantización	85
4. Estados coherentes en el multiverso	89
4.1. Estados coherentes en primera cuantización	89
4.2. Estados coherentes en segunda cuantización	93
5. Decoherencia en el multiverso	97
5.1. Introducción	97
5.2. Ortogonalidad de las ramas del multiverso	98
5.3. Decoherencia debida a la interacción con el entorno	99
5.3.1. Interacción con un campo escalar con masa	99
5.3.2. Interacción con las fluctuaciones cuánticas de la métrica	104
5.4. Teoría cuántica generalizada en el universo fantasma	113
6. Información cuántica en el multiverso	119
6.1. Violación de las desigualdades clásicas en óptica cuántica	119
6.2. Entrelazamiento cuántico en el multiverso	122

6.2.1.	Universos bebé acelerados y entrelazamiento cuántico	122
6.2.2.	Violación de las desigualdades clásicas en el multiverso	127
6.2.3.	Argumento EPR en el multiverso	130
6.3.	Entrelazamiento y termodinámica cuántica en el multiverso	134
6.3.1.	Termodinámica cuántica	134
6.3.2.	Entropía y energía de entrelazamiento	138
6.3.3.	Universos acelerantes	146
6.3.4.	Universo homogéneo e isótropo con un campo escalar	146

7. Conclusiones **153**

¿Existe el Universo?

Eduardo Punset. Cara a cara con la vida,
la mente y el universo.

Some sort of philosophy is inescapable.

Paul Davies, en "Universe or Multiverse"
(a propósito de los modelos
cosmológicos)

Capítulo 1

Introducción

1.1. El paradigma cosmológico contemporáneo: universo en expansión acelerada

1.1.1. Datos observacionales

A finales de la década de los 90 el análisis de las observaciones astronómicas realizadas por dos equipos independientes, liderados respectivamente por Riess [1] y Perlmutter [2], estableció que el universo actual se expande de forma acelerada, lo que constituye un nuevo paradigma cosmológico. Hay que destacar no obstante la cautela con la que se presentaron dichos resultados. Las observaciones astrofísicas pueden contener fuentes de error importantes. Como ejemplo baste mencionar que tan sólo un año antes Perlmutter [3] concluía, con un buen margen de fiabilidad aunque con cierta incertidumbre en los datos, que éstos apuntaban a un modelo de universo plano con un valor nulo de la constante cosmológica. El propio Perlmutter revisó posteriormente los datos confirmando que tan sólo de haber excluido una supernova (SN1994H), sus datos hubiesen sido compatibles con los resultados que posteriormente establecieron la expansión acelerada del universo.

Estas primeras estimaciones se obtuvieron a partir del estudio de dos conjuntos diferentes de supernovas, en particular de SNe Ia, que presentaban un "redshift" relativamente alto ($z \sim 1$). La única suposición que realizaron en dicho análisis fue la homogeneidad e isotropía del universo, lo que parece bastante aceptable a tenor de las imágenes del universo a gran escala. Ambos equipos analizaron también los posibles errores de sus resultados como son los debidos a la extinción galáctica e intergaláctica, el lenteado gravitacional y la posible existencia de "huecos" (voids). Su conclusión fue

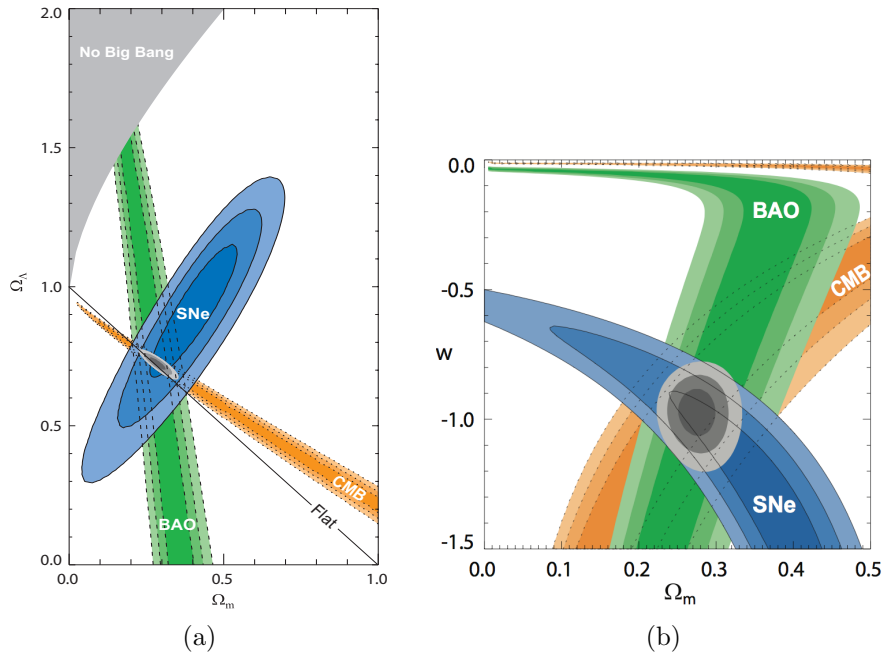


Figura 1.1: Contornos 68.3 %, 95.4 % y 99.7 % del nivel de confianza en el ajuste de (a) Ω_Λ frente a Ω_m , a partir de CMB, BAO y SN (asumiendo $w = -1$); (b) w frente a Ω_m , para un universo plano. Fuente [5]: Kowalski et al. (2008).

que en principio no esperaban grandes variaciones en la interpretación de sus resultados y establecieron dos conclusiones preliminares [1; 2]:

i.- El universo sufre desde una época relativamente cercana ($z \approx 0,73$) una expansión acelerada; es decir, actualmente posee un parámetro de desaceleración negativo.

ii.- Los datos son inconsistentes con un universo geoméricamente plano y una constante cosmológica nula. Además, aunque la geometría del universo no fuera plana, una proporción significativa de la energía del mismo debía ser de carácter repulsivo.

Posteriormente, otros análisis de datos observacionales como el estudio de la edad de los cúmulos galácticos y, sobre todo, el estudio de los picos de las oscilaciones acústicas bariónicas (BAO), vinieron a confirmar lo que los equipos de Riess y Perlmutter habían adelantado. En particular, los datos del WMAP1 (2003) [4] establecieron de forma feaciente que la geometría del universo es plana ($\Omega_t = 1$). Este dato es importante porque junto con el dato de contenido de materia, $\Omega_m \approx 0,3$, obtenido a partir de otras fuentes, indican que la mayor parte de la energía del universo no es de tipo "materia" (visible o no), sino que presenta un carácter repulsivo (bien a través de una constante cosmológica o a través de otra fuente).

Una forma de explicar esta aceleración del universo, además de mediante una constante cosmológica, es con un fluido homogéneo e isótropo que obedece una ecuación de

estado bariotrópica del tipo, $p = w\rho$, siendo p y ρ la presión y la densidad de energía del fluido, respectivamente, y w un parámetro constante (de hecho, $w = -1$ es equivalente a considerar una constante cosmológica). Asumiendo la existencia de este fluido, los valores que pueden establecerse para el parámetro w a partir de las observaciones cubren un rango de valores inquietante. Para obtener una expansión acelerada del universo se necesita que, $w < -\frac{1}{3}$ (con w constante), y desde 2003 hasta la actualidad se ha venido ofreciendo un abanico de valores que podríamos establecer de forma muy general como [6], $-1,48 < w < -0,72$. En concreto, las últimas estimaciones del WMAP7 [7] fijan un valor de w muy próximo a -1 , estableciendo los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} w &= -1,10 \pm 0,14 \quad (\text{WMAP} + \text{BAO} + \text{H}_0) \\ w &= -0,980 \pm 0,053 \quad (\text{WMAP} + \text{BAO} + \text{SNIa}) \\ w &= -0,93 \pm 0,133 \quad (\text{WMAP} + \text{BAO} + \text{H}_0 + \text{SNIa}) \end{aligned}$$

En esta memoria asumiremos las estimaciones de Caldwell [8]:

$$\begin{aligned} w &= -1 \pm 0,1, \\ \Omega_{tot} &= 1 \quad (\text{universo plano}), \\ \Omega_m &= 0,3. \end{aligned}$$

En un futuro próximo, nuevos datos y avances observacionales nos ayudarán a comprender mejor la historia de la expansión del universo, a través principalmente del estudio de nuevas SNIa, de la abundancia de cluster de galaxias, BAO y lenteado débil gravitatorio. Estos son los fenómenos astrofísicos más prometedores a día de hoy, pero como Caldwell también apunta [8], hay sitio para incorporar nuevos tests que puedan proponerse, entre los que cabe mencionar: los tests del sistema solar, el crecimiento de estructuras a gran escala, violaciones de la invariancia Lorentz o la variación de las constantes fundamentales de la naturaleza.

1.1.2. Algunos modelos que explican la expansión acelerada

Está fuera del ámbito de la presente tesis analizar en profundidad la variedad de modelos y teorías, cosmológicas y físicas en general, sobre las que se trabaja en la actualidad para tratar de explicar la actual expansión acelerada del universo ¹. Tan sólo presentaremos un breve resumen de las principales líneas de investigación, por dos motivos: por un lado, tal variedad y profusión de ideas muestra la importancia que dicha expansión acelerada tiene, no sólo en el contexto cosmológico sino en el de la

¹Una revisión de algunas de las principales propuestas puede verse, por ejemplo, en Refs. [8–11].

física teórica en general; y por otro lado, la dificultad de obtener una explicación satisfactoria hace pensar a la comunidad científica que, en principio, alguna consideración fundamental puede esconderse tras este comportamiento del universo.

Cada uno de los modelos presenta peculiaridades propias y, en general, aún cuando puedan estar motivados como soluciones efectivas de teorías más generales y fundamentales, la mayoría pueden considerarse también modelos independientes justificados simplemente por las observaciones. Muy genéricamente se podría hacer la siguiente clasificación:

Teorías en las que la relatividad general no resulta modificada

Estas teorías consideran alguna especie de "materia exótica" que ejerce una presión negativa para explicar la expansión acelerada de nuestro universo.

El más sencillo de estos modelos es el de quintaesencia [8]. En este modelo se considera un campo escalar, Q , con un término cinético canónico y un cierto potencial V (existen diferentes propuestas) que permite que, en sus últimas etapas, el universo se expanda de forma acelerada. De forma efectiva este "fluido" de quintaesencia está caracterizado por una ecuación de estado del tipo, $p_Q = w_Q \rho_Q$, donde $w_Q < -\frac{1}{3}$ es el valor necesario para obtener una expansión acelerada del universo. El mecanismo por el cual se obtiene dicha expansión es esencialmente del tipo "slow-roll", y se requiere por tanto una masa efectiva del campo de quintaesencia mucho menor que el parámetro de Hubble, de manera que el campo varía poco en la escala de tiempo cosmológico y se consigue un régimen para el que, $\dot{Q}^2 \ll V$ ($w \rightarrow -1$). El problema surge al incorporar este campo de quintaesencia en el Modelo Estándar, pues una masa efectiva tan pequeña ($m_Q^{eff} \equiv \sqrt{\partial_{QQ}^2 V} \ll H \approx 10^{-42} GeV$), implica un problema de jerarquía. Algunos de los potenciales propuestos son: el potencial cuadrático ($V \propto Q^2$), del tipo exponencial ($V \propto e^{-\lambda Q}$), del tipo axión ($V \propto 1 + \cos(\frac{Q}{\sigma})$), y otros como el de spinesencia y el "tracker" [8].

Una generalización de los modelos de quintaesencia son los llamados modelos de k-esencia [12]. En estos modelos el término cinético viene dado por una función no lineal de las derivadas temporales del campo escalar. Estos modelos puede justificarse de forma tanto puramente fenomenológica como también a partir de algunos modelos efectivos en las teorías de cuerdas [8].

Como ya se ha mencionado en la sección anterior, las observaciones cosmológicas son compatibles con un valor de $w < -1$. Este régimen viene descrito por los modelos llamados "fantasma" [13]. En éstos el comportamiento del campo escalar está determinado por un Lagrangiano cuyo término de energía cinética es negativo, lo que conlleva

serios problemas teóricos [8; 14]. Esencialmente estos modelos son inestables al no tener su energía limitada inferiormente, lo que produce una cascada continua de gravitones, partículas "normales" (con energía positiva) y de "ghosts" o partículas fantasma (con energía negativa), a menos que se introduzca algún cut-off en la teoría [14; 15]. Además este fluido violaría la condición de energía dominante (DEC), lo que puede asociarse con efectos altamente no-locales, ya que la violación de la DEC se puede interpretar [9; 16] como que la velocidad del fluido sería mayor que la de la luz. Otra característica a destacar de algunos de estos modelos es la existencia de una singularidad futura, llamada "big rip" [13], en la que todos los elementos básicos del universo quedan separados causalmente.

Otro modelo es el del campo taquiónico [10]. En éste se parte de un Lagrangiano que es el producto del potencial por un término cinético no lineal. Su principal ventaja es que de forma efectiva el parámetro w de la ecuación de estado interpola entre los valores 0 y -1 , es decir, este fluido puede representar de manera unificada tanto materia (polvo) como energía oscura.

Por último mencionaremos el gas de Chaplygin [10; 17]. Este fluido viene descrito por una ecuación de estado del tipo $p = -\frac{A}{\rho^\alpha}$, con un valor de α entre 0 y 1. El modelo estuvo motivado inicialmente por las teorías de mundos-brana aunque puede considerarse también desde un punto de vista puramente fenomenológico. Al igual que el fluido taquiónico, su principal ventaja es que puede describir un universo dominado por materia en sus épocas más tempranas y por un "fluido de vacío" en su etapa final.

Modificaciones de la relatividad general

Otra opción diferente consiste en modificar las ecuaciones que describen la gravedad. En ese contexto se incluyen las teorías escalar-tensor y las llamadas teorías $f(R)$. Las primeras provienen de los límites de bajas energías de algunas teorías de cuerdas, y las segundas pueden considerarse incluidas como un caso particular dentro de las teorías escalar-tensor.

Las teorías $f(R)$ consisten esencialmente en sustituir [8] el escalar de Ricci de la acción gravitatoria por una función de éste, conservando por tanto la invariancia Lorentz. No obstante, al ser modificaciones de la gravedad, sus efectos podrían ser detectadas en general en otras medidas astrofísicas. Por ejemplo, una modificación del comportamiento $\frac{1}{r^2}$ de la atracción gravitatoria tendría efectos medibles prácticamente en todos los ámbitos astrofísicos. Además, estas teorías presentan un problema de "matching", o pegado, ya que se requiere una masa efectiva grande en las inmediaciones del sistema solar, y una masa efectiva pequeña a escala extragaláctica. Entre las funciones

que se han propuesto en las teorías $f(R)$ están [8]: $f(R) \propto \frac{1}{R}$, $f(R) \propto R^n$ ($n > 0$) y $f(R) \propto A + \frac{B}{R^n}$.

Existen otras propuestas basadas en modificaciones de la gravedad, como por ejemplo las llamadas teorías de "degravitación", en las que la ecuación de Einstein, $G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$, es remplazada por otra ecuación del tipo, $[1 + F(L^2\Box)] G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$, siendo \Box el D'Alambertiano, $F(x)$ es una función monótonamente decreciente con límites: $F(x) \rightarrow 0$ para $x \rightarrow \infty$, y $F(x) \gg 1$ cuando $x \rightarrow 0$; y L es una escala de distancia ($\sim H_0^{-1}$) a la que presumiblemente la fuerza de la gravedad se haría más débil.

Teorías n -dimensionales (con $n > 4$)

En estos modelos se postula que el universo 4-dimensional que observamos es sólo parte de un espacio mayor, dimensionalmente hablando, y que la evolución de nuestro universo viene dada como resultado de algún tipo de compactificación o reducción dimensional.

En este apartado se incluyen las teorías de mundos-brana y las teorías de cuerdas. Dentro de las primeras, la más popular es la propuesta de Dvali-Gabaladze-Porrati o gravedad DGP [18]. En ésta nuestro universo viene representado por una brana 3+1-dimensional que vive en un "bulk" 5-dimensional. Al considerar los efectos de la gravedad, que vive en el bulk, sobre la brana (en la que se propagan los campos de materia), las ecuaciones de Friedmann resultan modificadas y se obtienen soluciones en las que el universo se expande de forma acelerada en sus últimas etapas. En principio, las teorías de gravedad DGP plantean dos regímenes claramente diferenciados: i) a pequeñas distancias la gravedad inducida en la 4-brana se comporta aproximadamente como lo hace la relatividad general; mientras que a distancias cosmológicas la fuerza gravitacional decae más abruptamente que $\frac{1}{r^2}$. Es decir, DGP induce de forma efectiva una modificación de la gravedad y de este modo, al igual que comentamos en el apartado anterior, sus efectos podrían ser observados a través de correcciones gravitatorias en los fenómenos astrofísicos. Hay que destacar que los modelos DGP más sencillos son consistentes con las observaciones sólo de forma marginal [8], y también necesitan de un "ajuste fino", no resolviendo tampoco el problema de la coincidencia [8].

Como teoría más general y fundamental se encuentran las teorías de cuerdas. En éstas, dependiendo del tipo de reducción dimensional utilizado, se pueden obtener distintas realizaciones del universo 4-dimensional que observamos. Por ejemplo, en las teorías de cuerdas de las que se deriva un espacio-tiempo de tipo de Sitter [19], se obtiene un conjunto discreto de valores para la constante cosmológica. Su valor efectivo podría venir dado por la suma de las contribuciones de cada uno de ellos o a través de

un principio de selección antrópica [9; 10], lo que ayudaría en parte a explicar el valor tan pequeño de la constante cosmológica observada.

El multiverso inflacionario

Este multiverso [20; 21] consiste en la consideración de distintas regiones del espacio-tiempo que, debido a la rápida expansión que sufre el mismo durante la época inflacionaria, quedan separadas causalmente al salir de la inflación. Fluctuaciones cuánticas del inflatón pueden inducir distintos valores de la constante cosmológica en cada una de las regiones. En este escenario, el rango de valores que puede tomar el término cosmológico podría estar limitado por consideraciones de tipo antrópico [22]. Si la constante cosmológica es muy grande en las etapas iniciales del universo, la expansión acelerada del mismo evita el colapso gravitatorio y la formación de galaxias que puedan albergar observadores inteligentes. No obstante el margen que ofrece el principio antrópico parece demasiado grande ya que, $\frac{\Omega_{\Lambda_0}}{\Omega_{M_0}} \leq (1 + z_{gal})^3 \sim 125$, donde z_{gal} (~ 4) es el redshift al que se produce la formación de galaxias [22; 23].

Además, el principio antrópico puede ser ciertamente polémico y difícil de formular en términos operacionales. Para resolver la tautología que se desprende del hecho de que [9] "observadores sólo observarán condiciones que permitan la existencia de observadores", es necesario plantear diferentes alternativas a las que se puedan asignar distintas probabilidades, y medir cuál es la probabilidad de que el mayor número de observadores (observadores 'típicos') observen un cierto valor de Λ . Dicha probabilidad puede expresarse de forma general como [22],

$$d\mathcal{P}(\rho_\Lambda) = \nu(\rho_\Lambda) P_*(\rho_\Lambda) d\rho_\Lambda ,$$

donde $\nu(\rho_\Lambda)$ es el número medio de galaxias que se forman para un determinado valor de la densidad de energía de vacío, ρ_Λ , y $P_*(\rho_\Lambda) d\rho_\Lambda$ es una medida de probabilidad que tiene que venir dada, en principio, por algún elemento de la teoría cosmológica subyacente. No hay consenso sobre el valor de $P_*(\rho_\Lambda)$. Weinberg [24] postuló que podría considerarse constante en el rango de valores que permite la formación de galaxias, pero Garriga y Vilenkin [22] mostraron que dicha suposición es sólo válida para ciertos potenciales y no de forma general.

Cosmología cuántica

En cosmología cuántica el multiverso inflacionario se puede describir a través de una función de ondas que viene dada por una superposición de osciladores cuánticos. Éstos representan cada una de las distintas regiones acausales del espacio-tiempo (o

incluso distintas regiones inconexas del mismo [25]). En tal caso, Hawking propuso [26] para el estado cuántico del multiverso una distribución termalizada donde la máxima probabilidad se obtiene para el valor, $\rho_\Lambda = 0$, invalidando por tanto la conjetura de Weinberg, aunque también los datos observacionales actuales.

No obstante, Barvinsky y Kamenshchik [27–29] han realizado recientemente una nueva propuesta en la que el valor de la constante cosmológica está acotado superior e inferiormente, debido principalmente a los efectos de la radiación en las etapas iniciales del universo. En ese caso se obtienen soluciones de instantones sólo para cierto rango de valores efectivos de Λ , lo que evita las catástrofes infrarroja y ultravioleta, y reproduce la expansión acelerada del universo en sus etapas finales.

Por otro lado, en el formalismo de suma-sobre-historias [30; 31] los distintos valores de la constante cosmológica están asociados a distintas ramas del universo, y la función de ondas del multiverso determina una cierta distribución de probabilidades para dichos valores. Por tanto, dada una función de ondas y un Hamiltoniano que determine la evolución del multiverso se podrían obtener las probabilidades condicionales antrópicas [32] para un cierto valor de la constante cosmológica, dada la condición de existencia de observadores [32].

Coleman también consideró las contribuciones a la energía del vacío gravitatorio que se obtienen como resultado de las fluctuaciones cuánticas del espacio-tiempo [33], y obtuvo una distribución de probabilidades para el valor de la constante cosmológica que resulta aún más picada que la estimación de Hawking en torno al valor $\rho_\Lambda = 0$. No obstante, Coleman no consideró las contribuciones de regiones múltiplemente conexas, lo que modifica las condiciones del vacío gravitatorio [34; 35], dejando así abierta la cuestión de la constante cosmológica.

Por último, se puede considerar, en el contexto de la teoría cuántica de campos en espacios curvos, la creación de partículas asociada al horizonte de eventos que aparece en un universo dominado por una constante cosmológica [36; 37]. Por un lado, se ha propuesto que el tensor de energía-momento asociado a dicha creación de partículas podría compensar de alguna manera el valor efectivo de la constante cosmológica [9]. Por otro lado, se está estudiando si la expansión acelerada del universo podría deberse al entrelazamiento cuántico de los modos, internos y externos al horizonte de eventos, de los campos de materia [38].

Constante cosmológica

Si nos atenemos a los criterios de simplicidad y a los ajustes observacionales, la constante cosmológica nos ofrece la explicación más aceptable para la expansión acele-

rada del universo. En efecto, una constante cosmológica puede obtenerse o justificarse de forma efectiva a partir de todos los modelos que se han presentado anteriormente.

En primer lugar, la constante cosmológica es una constante fundamental de la naturaleza dentro del contexto de la relatividad general [9]. Por otra parte, esta constante puede aparecer de forma efectiva en los modelos de quintaesencia (y en general en los modelos "x"-esencia) como un desplazamiento del potencial con respecto a su mínimo ($V_{min} = 0$). Además, algunos modelos $f(R)$ se comportan a grandes distancias de forma que, fenomenológicamente, son indistinguibles de una constante cosmológica [8]. En las teorías de cuerdas, Λ aparece de forma efectiva al compactificar las dimensiones extra o como superposición de diferentes vacíos en el "landscape". En un escenario de inflación eterna aparece un conjunto de regiones del espacio-tiempo con distintos valores de Λ . Y en las teorías cuánticas la constante cosmológica se puede interpretar como una energía de vacío debida a fluctuaciones cuánticas de los campos de materia o incluso del propio espacio-tiempo [39].

Masa (GeV)	ρ_{Λ} ($\sim M^4 \frac{\text{erg}}{\text{cm}^3}$)
$M_{EW} \sim 200$	$\rho_{\Lambda}^{EW} \sim 3 \cdot 10^{47}$
$M_{QCD} \sim 0,3$	$\rho_{\Lambda}^{QCD} \sim 1,6 \cdot 10^{36}$
$M_{SUSY} \sim 10^3$	$\rho_{\Lambda}^{SUSY} \sim 1,8 \cdot 10^{50}$
$M_{Pl} \sim 10^{18}$	$\rho_{\Lambda}^{Pl} \sim 2 \cdot 10^{110}$
$M_{obs} \sim 10^{-12}$	$\rho_{\Lambda}^{obs} \sim 2 \cdot 10^{-10}$

Tabla 1.1: Masa de la rotura de simetría y densidad de energía del vacío para distintas teorías de campos, y el valor estimado a partir de las observaciones cosmológicas [9].

El principal inconveniente de la constante cosmológica es la discrepancia entre los valores teóricos estimados y el valor inferido a partir de las observaciones astronómicas (ver Tabla 1.1), por lo que se considera que algún mecanismo (alguna simetría) debe cancelar contribuciones importantes de los valores teóricos.

1.1.3. Gravedad y cosmología cuánticas

La búsqueda de una teoría cuántica de la gravedad ha estado plagada de complicaciones, aunque también se puede hablar de algunos éxitos relativos. Ya Einstein, en el contexto de la "vieja" mecánica cuántica, advirtió que la teoría cuántica debería causar alguna modificación en el concepto de espacio-tiempo que él acababa de plantear en su teoría de la relatividad general [40; 41].

En Ref. [41] podemos encontrar una breve revisión histórica de la relación tortuosa entre las dos teorías paradigmáticas de la física del siglo XX: la mecánica cuántica y la relatividad general. De su clasificación en cinco periodos nosotros sólo mencionaremos algunos de los puntos más destacados, principalmente los que se refieren a la formulación utilizada en esta tesis²:

A principio de los años 30, Rosenfeld escribe el primer artículo técnico sobre gravedad cuántica, pero no será hasta finales de los años 40, y sobre todo hasta la década de los 50, cuando se establezcan las primeras bases de una formulación cuántica de la gravedad, a través de los trabajos de Dirac, y su estudio de los sistemas con ligaduras Hamiltonianas (1949-1959), y la aplicación por parte de Misner de la integral de camino de Feynman a la relatividad general (1957). En esas mismas fechas, Wheeler escribe un precioso artículo titulado "On the nature of quantum geometrodynamics" [42], en el que establece de forma heurística que las fluctuaciones cuánticas del espacio-tiempo a distancias del orden de la escala de Planck hacen que el vacío gravitatorio adquiera una estructura "espumosa". De Witt expresa la formulación Hamiltoniana de la relatividad general en 1967 [43], con la ecuación que posteriormente pasará a conocerse como la ecuación de Wheeler-de Witt.

En la década de los 70 y sobre todo en los años 80 se produce un resurgimiento de la mecánica cuántica aplicada a la gravedad, principalmente a través de los trabajos de Bekenstein [44] y Hawking [45] sobre la radiación de agujeros negros y, sobre todo, en 1983 cuando este último, junto con Hartle, calculan la función de ondas del universo [46], utilizando la formulación de integral de camino con una rotación de Wick del tiempo Lorentziano. Para determinar el estado del universo, Hartle y Hawking postulan su famosa condición de contorno de "no-frontera" o de un universo que surge de la "nada", es decir, de un estado en el que el espacio, el tiempo y la materia no existen. Esta condición será posteriormente analizada por Vilenkin [47; 48], quien propondrá como alternativa su condición de tuneleo cuántico, es decir, un universo que surge como consecuencia de un efecto túnel análogo al efecto túnel conocido con anterioridad en la mecánica cuántica de partículas.

La dificultad de obtener predicciones testeables en cosmología dejaron la cuestión de las condiciones de contorno del universo en el límite entre la física y la filosofía. La misma dificultad provocó que la gravedad cuántica Euclídea fuera saludada con cierto escepticismo por parte de la comunidad de físicos y cosmólogos teóricos, con la excepción, principalmente, de Hartle [30; 31], principal proponente de lo que se ha venido a llamar la formulación de "suma-sobre-historias" en cosmología cuántica. Esta formulación desarrolla de forma rigurosa la idea original de Everett y su multiverso cuántico

²Las referencias se pueden encontrar en Ref. [41].

en forma de historias, superpuestas hasta que procesos de decoherencia permitan describir el universo semiclásico que observamos. Cabe mencionar también los trabajos de Coleman [33] y González-Díaz [34; 35] en relación al estado del vacío gravitatorio en el contexto sus fluctuaciones cuánticas y la espuma espacio-temporal.

Por otro lado, hay que mencionar que desde la década de los 70 y, sobre todo, desde los años 80-90 se han venido construyendo las teorías de cuerdas, que parecen ser ofrecer una formulación adecuada de las teorías de gravedad cuántica. También en los últimos años la formulación de la teoría cuántica de lazos [49] ha recibido un especial interés. Asimismo, la gravedad cuántica Euclídea y la formulación de suma-sobre-historias han despertado recientemente un interés renovado. La primera como posible solución al problema de la constante cosmológica y la expansión acelerada del universo [27–29]; y la segunda como marco formal de la interpretación de Everett de la mecánica cuántica [50] y de la argumentación antrópica de Hartle [32].

Viendo las dificultades históricas para combinar la teoría cuántica con la teoría de la relatividad general, también cabe preguntarse si la gravedad debe ser cuantizada, basado en las siguientes razones [40; 51; 52]: i) la idea de unificación de todas las interacciones fundamentales parece requerir que también la gravedad ofrezca una versión cuántica; ii) la dificultad de combinar una teoría cuántica sobre materia-radiación con una formulación clásica del espacio-tiempo genera problemas de renormalización que podrían subsanarse, al menos en parte, con una teoría cuántica de la gravedad [40]; y iii) los teoremas clásicos sobre singularidades [16], que implican el fracaso de las teorías clásicas.

Hasta ahora no hemos hecho una distinción clara entre gravedad y cosmología cuánticas. Esto se debe en parte a que existe una conexión directa entre ambas, como apunta Kiefer³: "debe señalarse que *si* hay que cuantizar la gravedad, entonces la no-separabilidad cinemática de la teoría cuántica demanda que todo el universo sea descrito cuánticamente". Es decir, cualquier sistema cuántico (por ejemplo, una región del espacio-tiempo) está acoplado a su entorno, el cual, a su vez, estará acoplado al suyo, llegándose así en la idea del estado cuántico del universo. De todos modos, si queremos explicar el origen del universo necesitamos de una teoría cuántica de la gravedad, siendo así que la gravedad cuántica puede considerarse la teoría subyacente a la cosmología cuántica.

Ninguna de las propuestas formuladas hasta la fecha constituye de forma definitiva

³"It must be emphasized that *if* gravity is quantized, the kinematical nonseparability of quantum theory demands that the whole universe must be described in quantum terms.", cfr. Ref. [40], p.4.

y satisfactoria una teoría de la gravedad cuántica. Las teorías de cuerdas parecen ser un candidato firme a establecer dicha teoría cuántica de la gravedad. Las formulaciones consistentes de la gravedad cuántica no serían sino su límite efectivo de baja energía. De todas formas, las teorías de cuerdas no han sido formuladas de forma no perturbativa e incluso hay autores que dudan que se pueda hacer [52]. Por otro lado la teoría cuántica de lazos parece haber realizado ciertos progresos [49] para establecerse como una formulación más o menos rigurosa de la gravedad cuántica, aunque a día de hoy esté todavía lejos de poder erigirse como tal. Las formulaciones más clásicas, en sentido histórico, como la gravedad cuántica Euclídea o la suma sobre historias poseen también serios problemas.

Quizá la "irreverente"⁴ expansión acelerada de nuestro universo y las futuras observaciones cosmológicas, cada vez más precisas, puedan ayudarnos a, o bien consolidar o descartar alguna/s de estas formulaciones. O a plantear nuevas ideas que permitan formular una teoría completa de la gravedad cuántica, si es que ésta finalmente requiere ser cuantizada.

1.2. ¿Puede el universo acelerado ser de naturaleza esencialmente cuántica?

1.2.1. ¿Qué es cuántico y qué es clásico?

Algunos de los temas y resultados presentados en esta tesis tienen una conexión directa con los fundamentos de la mecánica cuántica. Por tanto, aún no entrando en profundidad en este conflictivo tema, se hace necesario contextualizar dichos resultados y exponer algunos de estos fundamentos.

Desde los primeros desarrollos de la mecánica cuántica el significado de "lo cuántico" (y por tanto de "lo clásico") ha admitido diversas interpretaciones. La "vieja" mecánica cuántica de Planck, Einstein y Bohr describía fenómenos como la radiación del cuerpo negro y sobre todo experimentos relacionados con la espectroscopía atómica. Los "cuantos" aparecían como las diferencias energéticas entre los niveles discretos del átomo. Posteriormente, Schrödinger, Heisenberg y otros⁵, mostraron como la mecánica cuántica describe también sistemas donde los niveles energéticos son continuos y los posibles resultados se obtienen en términos de probabilidades. Así, a nivel fundamental lo cuántico aparecía más bien asociado a lo probabilístico, a través del principio de

⁴Es el término acuñado por Carroll en Ref. [9], p.36, en inglés, "*the preposterous universe*".

⁵Como es bien sabido, la mecánica cuántica se completó con múltiples contribuciones, como por ejemplo de: Born, Dirac, Pauli, Bohm, etc...

superposición, frente a lo clásico, a lo que se le otorgaba una naturaleza determinista.

Everett llevó al extremo las implicaciones que se derivan del principio de superposición. Eliminó el postulado que establecía el colapso de la función de ondas y la consecuencia fue que todos los resultados posibles de un experimento ocurren realmente, pero cada uno en una "rama" distinta del universo. De este modo, se conservaba el sentido probabilístico de la naturaleza cuántica, aunque ya no de forma fundamental sino como consecuencia del *desconocimiento* del estado del observador. Feynman, por otro lado, desarrolló el formalismo de la integral de camino, en el que la trayectoria clásica de una partícula es sólo una más de todas las posibles, y surge en el límite macroscópico como resultado de procesos de interferencia: constructiva para los "caminos clásicos" y destructiva para los "caminos cuánticos".

Posteriormente, Hartle y otros⁶ desarrollaron la idea de Everett utilizando también el formalismo de la integral de caminos aplicada al propio universo. El resultado es una teoría en la que el espacio-tiempo clásico emerge de una descripción cuántica por efecto de interferencia de las distintas ramas del universo. Pero fue Bell quien proporcionó a la teoría cuántica un nuevo y radical carácter que todavía conserva en nuestros días. Bell analizó en profundidad un experimento (mental) planteado en 1935 por Einstein, Podolski y Rosen (EPR), basado en la propiedad de entrelazamiento de ciertos sistemas cuánticos [55; 56]. Aunque inicialmente el experimento EPR pretendía demostrar la incompletitud de la teoría cuántica, Bell demostró que en realidad lo que ponen de manifiesto estos sistemas entrelazados es su interdependencia local o no local de su descripción cuántica. Lo cuántico se puede identificar desde entonces con esta noción de no localidad.

Luego, ¿qué es lo cuántico en el contexto de la física actual? O, más bien, teniendo en cuenta que la descripción clásica del mundo está incluida en su descripción cuántica, ¿qué es lo cuántico sin análogo clásico?.

En óptica cuántica esto parece estar más claro que en cosmología. Existen sistemas ópticos cuya descripción cuántica predice fenómenos sin una predicción análoga en la teoría clásica. Estos fenómenos, entre los que se encuentran el "antiaplastamiento fotónico", el efecto de "aplastamiento", las violaciones de las desigualdades de Cauchy-Schwarz y las propias violaciones de las desigualdades de Bell, se han comprobado en el laboratorio [57]. Dichos fenómenos vienen descritos por distribuciones que pueden presentar valores negativos lo que no permite la interpretación usual en términos de probabilidades. Se interpretan mejor en términos de información cuántica

⁶Cabe destacar las contribuciones de R. Griffiths, R. Omnès, y sobre todo de M. Gell-Mann [53; 54].

compartida entre los subsistemas que forman el sistema total cuando sus estados están correlacionados o entrelazados⁷.

No obstante, en cosmología cuántica no está tan claro que puedan usarse las mismas interpretaciones. De ser así, ¿qué significaría un estado entrelazado entre dos estados del universo o entre dos universos?, ¿cabría hablar de información compartida entre esos dos universos? Por ejemplo, podría quizá pensarse que el entrelazamiento entre diferentes estados cuánticos del universo puede provocar efectos sin análogo clásico, uno de los cuales podría ser su actual expansión acelerada. Si este fuese el caso podríamos estar viviendo en un universo macroscópico, y por tanto *a priori* clásico, que no obstante sería de naturaleza esencialmente cuántica, alterando la distinción habitual entre lo cuántico (submicroscópico) y lo clásico (macroscópico)⁸.

Por otro lado el entrelazamiento cuántico entre los estados del universo plantea otras diferencias con respecto al mismo fenómeno en óptica cuántica. En ésta dicho fenómeno se asocia normalmente a la propiedad no-local de la teoría cuántica. En el universo, en el que en general no se puede hablar de una distancia espacio-temporal entre estados del universo, el concepto de localidad o no-localidad pierde su significado. En este caso habría que hablar más bien de la independencia o interdependencia cuántica de los estados del universo o, dicho de otro modo, de su *separabilidad*.

1.2.2. ¿Puede el universo como un todo describirse cuánticamente?

Aceptando los argumentos de la sección anterior (ver Sec. 1.1.3) el universo como un todo no sólo puede sino que debe describirse cuánticamente. En ese caso la interpretación de Copenhagen no es válida ya que postula una separación radical entre el sistema observado (cuántico) y el observador o aparato de medida (clásico). Everett estableció una formulación consistente del universo como un todo, donde los estados del observador y del sistema a observar resultan estar correlacionados o, dicho de otra manera, son estados *relativos* el uno con respecto al otro [59]. Dado que el principio de superposición de la mecánica cuántica otorga un cierto criterio de realidad a los elementos de dicha superposición, Everett asumió también la realidad de los distintos estados del observador, es decir, de las distintas ramas del universo.

En esta tesis no entraremos en el difícil problema ontológico de la realidad que pueda otorgarse a las distintas ramas del multiverso cuántico. Parece más prudente

⁷Ver, Cap. 6.

⁸Existen otras indicaciones que hacen pensar que esta distinción podría ser alterada, a través de experimentos cuánticos "mesoscópicos". Ver, por ejemplo, Cap. 6 de la Ref. [58].

asumir la idea de Bell [56], quien no veía la necesidad de otorgar dicha realidad para aceptar el formalismo de Everett (aunque tampoco por ello excluye su validez). No está claro, en el caso del universo, cómo podrían observarse fenómenos de interferencia entre las distintas ramas del multiverso ⁹.

En cualquier caso la formulación de Everett también plantea algunos problemas que han de ser resueltos para dar consistencia a su interpretación. Éstos pueden enunciarse como [60]: el problema de la probabilidad, el problema de las bases "preferidas" y [58] el problema de los resultados de la mecánica cuántica.

El problema de la probabilidad

De forma general Wallace resume el problema de la probabilidad de la siguiente manera [60]: "... puesto que la descripción de Everett de la medida es determinista y ramificada, cómo podríamos reconciliar nosotros dicha descripción con la estocástica que se usa en las aplicaciones prácticas de la mecánica cuántica"¹⁰. Este autor considera además: i) el problema cualitativo, es decir, cómo obtener resultados probabilísticos a partir de una descripción determinista de la mecánica cuántica; y ii) el problema cuantitativo: por qué las probabilidades obtenidas a partir de la teoría de Everett han de ser precisamente las postuladas por Born y no otras.

El primero de estos problemas puede resolverse haciendo una relativización del concepto de probabilidad análoga a la relativización de términos tales como el "aquí" y "ahora" en el contexto de la teoría de la relatividad. En ésta no hay un sentido absoluto del "aquí" ni del "ahora", sino que estos términos adquieren su sentido una vez que se establece un sistema de referencia particular. De forma análoga se puede decir que, en la formulación de estados relativos de la mecánica cuántica, el concepto de probabilidad sólo tiene sentido siempre que se haga referencia al observador. Es decir, en esta formulación no cabe preguntarse: ¿cuál es la probabilidad de un cierto suceso x ? sino, ¿cuál es la probabilidad de que un observador mida el suceso x ?

El problema es sutil dado que esta referencia al observador no es una referencia explícita a ninguno de sus estados en concreto. En la formulación de Everett los estados

⁹Como apunta Schlosshauer [58], una superposición cuántica no puede observarse directamente pero sí sus efectos de interferencia. De poder ser observados fenómenos de interferencia entre los estados cuánticos del universo dichos fenómenos podrían considerarse como una "prueba" de la existencia de esos universos, al menos en la misma medida en que estos efectos de interferencia otorgan un criterio de realidad a los elementos de una superposición de estados en la mecánica cuántica de partículas.

¹⁰"... given that the Everettian description of measurement is a deterministic, branching process, how are we to reconcile that with the stochastic description of measurement used in practical applications of quantum mechanics?", en Ref. [60].

del observador, $|\rangle_o$, y los del sistema a observar, digamos una partícula con estados $|\rangle_p$, están perfectamente correlacionados; luego, si la pregunta es ¿cuál es la probabilidad p de que un observador en el estado $|i\rangle_o$ observe a la partícula en el estado $|\tilde{i}\rangle_p$?, la respuesta será o bien $p = 1$, si esos estados pertenecen a la misma rama del universo, o bien $p = 0$, si pertenecen a ramas distintas, dejando de tener sentido entonces el concepto usual de probabilidad en mecánica cuántica. Por el contrario, la pregunta que sí cabe plantearse en esta formulación es: ¿cuál es la probabilidad de que un observador observe la partícula en el estado $|\tilde{i}\rangle_p$?. Y es precisamente por no conocer a priori el estado del observador por lo que Everett obtiene las probabilidades de Born¹¹.

De este modo, todos los resultados experimentales en la formulación de Everett son "branch-in", o internos a cada rama, y ningún observador puede ser consciente a través de ellos de la estructura de ramas del multiverso¹². Este es un razonamiento que sigue muy de cerca la idea original de Everett ya que, como Saunders apunta: "Everett expresamente requirió que cada uno de los resultados experimentales, distintos e incompatibles, estuviese correlacionado con estados del observador, o aparato de medida, que fueran también distintos e incompatibles."¹³.

El problema que quedaría entonces por resolver tendría un carácter cuantitativo. Saunders ni siquiera considera que éste sea un problema real desde un punto de vista físico pues, según este autor, en una teoría física el ajuste experimental es suficiente para establecer la validez de la asignación de probabilidades [60; 61]. Si uno acepta o no este criterio de validez depende, según Wallace, de la actitud filosófica asumida respecto del concepto de probabilidad¹⁴.

¹¹Es decir, el estado del observador se conoce una vez que se conoce el estado de la partícula a través del proceso de medida o, dicho de otra manera, el proceso de medida determina tanto el estado de la partícula como el correspondiente (correlacionado) del observador.

¹²Este es precisamente uno de los argumentos que utiliza Everett para dar validez "observacional" a su formulación; dice: "[La] ausencia de cualquier efecto de una rama sobre otra implica también que ningún observador podrá conocer proceso de división alguno."; en inglés: "[The] total lack of effect of one branch on another also implies that no observer will ever be aware of any 'splitting' process.", en *Note added in proof*, p. 460, en Ref [59]. No obstante, la diferencia esencial que introduce Everett es que la incertidumbre fundamental que postula la interpretación de Copenhague se transforma en su formulación en una falta de información por parte del observador sobre su propio estado.

¹³Everett expressly required that each of two distinct and incompatible experimental outcomes be correlated with *distinct* and *incompatible* states of the observer, or recording apparatus..", en Ref [61].

¹⁴En particular, de si dicho concepto de probabilidad debe ser establecido de forma fundamental a partir de la teoría, o si puede considerarse tan sólo como una herramienta para describir los fenómenos físicos [60].

El problema de las bases 'preferidas'

Otro problema que aparece en la mecánica cuántica es el llamado 'problema de las bases preferidas'. La interpretación de Born establece que los únicos resultados posibles en la medición de un observable \hat{O} vienen determinados por sus autoestados, y la probabilidad de observar al sistema en cada uno de esos autoestados viene dada por sus amplitudes de probabilidad, aunque no se proporciona ningún criterio para determinar qué operadores pueden o no considerarse observables.

En 1981 Zurek estudió este problema a través de lo que denominó los "estados *pointer*" [62], o estados del aparato de medida. El problema se puede plantear mediante la siguiente batería de preguntas: ¿por qué ciertos operadores pueden considerarse como observables y otros no?, es decir, ¿por qué ciertas bases pueden considerarse representativas de los resultados de una medida (clásica) y otras no?, ¿por qué deben ser ortogonales, si es que efectivamente tienen que serlo? y, ¿qué selecciona estas bases de estados ortogonales?¹⁵. Hartle, en el contexto cosmológico, añade además otra pregunta: ¿qué hace que algunos operadores cuánticos lleguen a ser variables clásicas?

Zurek establece dos propiedades que habremos de exigir a un cierto operador para ser considerado un observable, y a la base de sus autoestados como representativa de los posibles resultados de una medida. Por un lado, exige la ortogonalidad de los autoestados del operador, la cual está asociada a la exclusividad de los resultados, es decir, al hecho de que los estados ortogonales son excluyentes entre sí ya que su producto escalar es nulo y los estados 'pointer' de un aparato de medida están en uno u otro estado pero nunca en una superposición. La segunda condición que exige Zurek es la estabilidad en el tiempo de los estados del aparato de medida que están correlacionados con los estados del sistema a medir. Esta condición se traduce en que el operador \hat{O} debe conmutar con el Hamiltoniano del sistema¹⁶. De este modo, los estados a medir son estacionarios en el tiempo y los estados "pointer" del aparato de medida permiten comparar observaciones realizadas en diferentes instantes de tiempo.

Una vez establecidos estos dos criterios, Zurek analiza los procesos físicos que seleccionan estas bases de autoestados ortogonales, incorporando en el esquema también el entorno en el que dicho proceso tiene lugar. En general, el estado del entorno (por ejemplo, el estado de las partículas del gas que rodea un experimento) sufre rápidos procesos de decoherencia que hacen que en escalas espacio-temporales muy pequeñas,

¹⁵Utilizando el ejemplo conocido del gato de Schrödinger, el problema se puede plantear de la siguiente manera: ¿por qué los estados finales del aparato de medida, es decir, del gato, son: |gato vivo> y |gato muerto>, y no cualquier combinación lineal de esos estados que forme una base ortogonal?.

¹⁶Este autor considera Hamiltonianos no dependientes explícitamente del tiempo, lo que hace que el conmutador corresponda a la derivada temporal del operador \hat{O} .

relativas a las escalas propias del sistema a observar y del aparato de medida, dichos estados sean ortogonales. De este modo llamó 'environment-induced-selection' o 'einselection' al proceso de selección de las bases del aparato de medida. Por tanto, es precisamente el entorno de un experimento el que hace que determinados operadores puedan ser observados clásicamente.

Este esquema no es siempre aplicable ni en física ni en cosmología ¹⁷. En primer lugar, los autoestados del Hamiltoniano para distintos tiempos pueden no ser ortogonales. En una teoría cuántica de campos en un espacio curvo, por ejemplo, este fenómeno se interpreta usualmente como una creación (o destrucción) de partículas. Sin embargo, en cosmología cuántica no está claro si dicho fenómeno podría identificarse con una creación (o destrucción) de universos (ver, Caps. 3 y 6).

Por otro lado, el esquema de selección por el entorno no es aplicable a un sistema cerrado como el universo en el que no tiene porqué existir un 'entorno' ¹⁸. Dicho entorno se puede establecer en muchos casos. Por ejemplo, se puede demostrar que las ondas gravitatorias vestigio del big bang pueden utilizarse como reservorio para describir los procesos de decoherencia que permiten representar de forma separada los campos de materia-radiación, por un lado, y el espacio-tiempo, por otro [40]. Este esquema asume de antemano una aproximación semiclásica, lo que no está siempre permitido en cosmología desde un punto de vista fundamental. De hecho, el espacio-tiempo semiclásico debe emerger como una propiedad del sistema cuántico a través de otro tipo de proceso de decoherencia.

Hartle propone un tipo de decoherencia, basado en introducir un "coarse-graining" sobre algunas variables del sistema. Este método supone ignorar los valores exactos y precisos de ciertas variables y considerar valores medios promediados sobre ciertos intervalos. A cambio de esta pérdida de información o ignorancia, ciertas propiedades sufren el proceso de decoherencia necesario para ser observadas clásicamente. De este modo, en el formalismo de suma-sobre-historias, los espacio-tiempos semiclásicos emergen como un subconjunto de las ramas decoherentes del universo cuántico. No obstante, dicho formalismo resuelve sólo en parte el problema de las bases "preferidas", pues al no ser estas ramas semiclásicas únicas estamos de nuevo obligados a considerar el sistema en el contexto del multiverso.

¹⁷Los estados coherentes de la óptica cuántica no son ortogonales y representan no obstante los estados más clásicos posibles.

¹⁸El multiverso puede considerarse el "entorno" de un universo particular, pero en ese caso el sistema cerrado es el propio multiverso y éste a su vez no tendría entorno.

El problema de los resultados en mecánica cuántica

Por último debemos mencionar un problema que no suele plantearse como tal en la mayoría de las referencias bibliográficas, pero que Schlosshauer define como "el problema de los resultados". Más concretamente, este autor se pregunta [58]: ¿qué selecciona un resultado particular de todos los posibles en una medida realizada sobre un sistema cuántico? Como hemos visto, los procesos de decoherencia, bien sean debidos a la interacción con el entorno o bien sean debidos a algún tipo de 'coarse-graining', pueden resolver parcialmente la cuestión proporcionando una base de estados preferentes. Pero aún así, el mecanismo por el cual se obtiene un resultado particular de entre todos los estados de dicha base no queda resuelto. En realidad no puede ser resuelto siempre que se asuma el principio de superposición de la mecánica cuántica.

Dicho principio resultaría violado debido a términos no lineales en la ecuación de Schrödinger. Estos términos se plantean en las llamadas "teorías de colapso dinámico" donde se introducen *ad hoc*, aunque en la práctica dichas propuestas no pueden ser comprobadas y, al menos de forma efectiva, el principio de superposición sigue cumpliéndose. Otra propuesta interesante es la de Penrose [63; 64], quien plantea que una formulación cuántica del espacio-tiempo debería introducir términos no lineales en la ecuación de Schrödinger. Esta propuesta necesita en primer lugar una formulación cuántica del espacio-tiempo y sólo afectaría a regímenes experimentales asociados con la gravedad cuántica, presumiblemente a órdenes de magnitud de la escala de Planck, por lo que a día de hoy el principio de superposición, y por tanto la incertidumbre en los resultados de la medida de un sistema cuántico deben ser totalmente asumidos.

Como resumen de esta sección, podemos decir que la teoría cuántica puede y debe aplicarse al universo como un todo. En ese caso, la interpretación de Copenhague no es válida y se hace necesario recurrir a la formulación de 'estados relativos' o de los muchos mundos de Everett [59], la cual ha sido desarrollada de manera más consistente en las formulaciones 'post-Everett' (suma-sobre-historias). No obstante, la ontología (criterios de realidad y existencia) que Everett intrínsecamente adscribe al multiverso cuántico queda como cuestión abierta, al menos en el contexto de la presente memoria. Será el tiempo y los avances tanto teóricos como en las técnicas observacionales en cosmología, y del espacio-tiempo a pequeñas escalas, lo que nos proporcionará criterios para establecer finalmente la validez de dicha ontología.

Por último, hay que comentar brevemente que la idea de multiverso es más general que la asociada con la teoría cuántica. De hecho, el concepto de multiverso se aplica en la actualidad en un amplio abanico de teorías físicas, tanto clásicas como cuánticas [65].

Por ejemplo, en un espacio-tiempo con una geometría plana, y por tanto espacialmente infinito, pero dinámicamente cerrado por la existencia de un horizonte de eventos (ver modelo de inflación eterna en Ref. [21]), se pueden considerar regiones causalmente separadas. Si se supone además que en estas regiones el inflatón induce distintos valores de la constante cosmológica, el resultado es un multiverso de regiones acausales en las que las propiedades del espacio-tiempo son distintas en cada una de ellas. Un modelo de multiverso aparece también en las teorías de mundos-brana (véase el modelo ekpirótico en Ref. [66]) o el propuesto por L. Smolin, producido como consecuencia de un rebote cuántico dentro de un agujero negro [67]; y sobre todo en el *landscape* [68] de las teorías de cuerdas. En éstas, las diferentes compactificaciones o reducciones dimensionales dan lugar a distintos vacíos que a su vez pueden considerarse como generadores de distintas realizaciones del universo. En general, puede decirse que distintas soluciones de las ecuaciones que describen la dinámica del universo, compatibles con las condiciones de frontera, pueden interpretarse como diferentes representaciones del universo, y por tanto describir un cierto tipo de multiverso.

Por tanto, teniendo en cuenta los argumentos dados en esta sección, la respuesta a la pregunta: ¿puede el universo como un todo describirse cuánticamente?, no solo admite una respuesta afirmativa, sino que parecen existir motivos para pensar que el universo como un todo debe describirse cuánticamente. El contexto "natural" de dicha descripción sería el multiverso, el cual lo es no sólo de la cosmología cuántica sino también de muchas de las teorías cosmológicas actuales.

1.2.3. ¿Puede la expansión acelerada del universo ser un efecto cuántico sin análogo clásico?

La expansión acelerada del universo actual podría no admitir una explicación satisfactoria en el marco estricto de la relatividad general. Una salvedad a lo anterior corresponde al caso de que la expansión del universo estuviera determinada por una constante cosmológica, entendida como constante de la naturaleza. No obstante, como ya se ha comentado anteriormente, existen indicios para pensar que, aún en ese caso, dicha constante cosmológica podría ser el resultado efectivo de alguna otra teoría más fundamental.

Si la expansión acelerada estuviese dominada por un cierto fluido desconocido, éste podría no cumplir ciertas condiciones clásicas de energía [16]. Especialmente desconcertante, desde un punto de vista clásico, sería el caso en que dicho fluido fuese de tipo fantasma ($w < -1$ en la ecuación de estado, $p = w\rho$). En ese caso se violarían las llamadas "condición de energía débil" (WEC) y "condición de energía dominante" (DEC).

La violación de la primera (WEC) implicaría que algunos observadores pueden medir un valor negativo de la energía de dicho fluido, mientras que la velocidad del flujo de un fluido que viole la segunda condición (DEC) sería mayor que la velocidad de la luz.

Estas propiedades no se han observado clásicamente. Sin embargo, existen fenómenos cuánticos sin análogo clásico donde estas condiciones no se cumplen. Los estados "aplastados" de la óptica cuántica presentan distribuciones de energía que pueden ser localmente negativas con respecto a la energía del vacío [69] (o "energía del punto cero"), aunque globalmente la energía total resulte siempre positiva. Por otro lado, como ya se ha comentado anteriormente, los estados entrelazados de la mecánica cuántica se asocian usualmente con violaciones de la localidad. Parece además que, en un universo dominado por energía fantasma, los efectos cuánticos llegarían a ser dominantes en las últimas etapas de la evolución del universo [70], y que la consideración de un potencial subcuántico o efectos como el entrelazamiento cuántico podrían originar también un universo acelerado [71].

Otra opción ya comentada es la posibilidad de que las ecuaciones de Einstein deban ser modificadas, o bien que sean sólo el resultado efectivo de alguna teoría más fundamental probablemente de tipo teorías de cuerdas. En tales casos no hablaríamos de un efecto cuántico, en el sentido usual del término, aunque no necesariamente tampoco clásico.

Por tanto, la pregunta del epígrafe es obviamente una pregunta abierta: i) puede ser que la expansión actual del universo esté determinada por una constante fundamental en las ecuaciones de Einstein; ii) puede que dichas ecuaciones resulten modificadas por alguna teoría más fundamental; y iii) también existen indicios para sospechar que la expansión acelerada del universo pueda ser de naturaleza cuántica sin análogo clásico.

1.3. Introducción a la presente tesis: ¿qué vamos a hacer y por qué?

De lo dicho hasta ahora parece deducirse la necesidad de investigar con mayor profundidad y detalle las consecuencias que tiene la aplicación de la teoría cuántica al universo como un todo. Para ello, en esta tesis vamos a considerar un modelo de universo homogéneo e isótropo cuya evolución está dominada por un fluido que satisface una ecuación de estado $p = w\rho$, donde p y ρ son, respectivamente, la presión y la densidad de energía del fluido y w es un parámetro constante, cuyo valor asumiremos próximo a $w = -1$.

Analizaremos principalmente sus propiedades cuánticas ya que la sencillez del mo-

delo nos permite aplicar y desarrollar varios formalismos de la mecánica cuántica. El objetivo será doble: por un lado, estudiaremos la posibilidad de que la actual expansión acelerada del universo pueda deberse a un efecto cuántico sin análogo clásico; y por otro lado, utilizaremos el contexto cosmológico para analizar ciertos aspectos fundamentales de la teoría cuántica.

Así, en primer lugar, en el Capítulo 2, aplicaremos el formalismo de "primera cuantización" a este modelo de universo, obteniendo la función de ondas y la matriz densidad de estados, lo que nos permite representar tanto estados puros como estados mezcla. En particular, presentaremos el modelo de multiverso que se deriva de considerar un fluido de tipo "fantasma" y analizaremos los estados entrelazados que aparecen en este multiverso.

En el Capítulo 3, aplicaremos el formalismo de "segunda cuantización" al modelo anterior. El resultado será la descripción cuántica de un multiverso en el que están permitidos cambios topológicos que vienen descritos por operadores de creación y destrucción de universos de forma análoga a como estos operadores representan la creación y destrucción de partículas en mecánica cuántica.

En el Capítulo 4, utilizaremos el método de las "Álgebras de Heisenberg Generalizadas" (GHA) para obtener los estados coherentes del universo. También los analizaremos en el formalismo de la segunda cuantización, resultando ser en este caso estados "aplastados" sin análogo clásico y cuyo efecto de "aplastamiento" es mayor para universos acelerados que para universos dominados por materia ordinaria.

En el Capítulo 5, desarrollaremos el formalismo de la teoría cuántica generalizada. Analizaremos el concepto de funcional de decoherencia en cosmología cuántica y estudiaremos distintos tipos de decoherencia que se pueden aplicar en el universo. En particular, este formalismo nos permitirá obtener probabilidades para los fenómenos físicos de un universo dominado por energía fantasma, en el que se considera una región acronal en torno a la singularidad futura del "big rip".

En el Capítulo 6, introduciremos aspectos de la teoría de la información cuántica en el multiverso. En particular, analizaremos el entrelazamiento cuántico, la violación de ciertas desigualdades clásicas, en particular la violación de las desigualdades de Bell, y el significado del argumento EPR en el contexto del multiverso. También calcularemos las magnitudes termodinámicas asociadas al entrelazamiento cósmico.

Por último, en el Capítulo 7, presentaremos las conclusiones y algunos comentarios sobre los resultados obtenidos en esta tesis.

A good point of philosophy is to start with something so simple as not to seem worth stating, and to end with something so paradoxical that no one will believe it

Bertrand Russell (citado por J. D. Barrow, en "Universe or Multiverse")

Capítulo 2

Teoría clásica y primera cuantización

2.1. Formulación Hamiltoniana del espacio-tiempo con un campo escalar

Como es bien sabido¹, el punto de partida de la formulación Hamiltoniana del espacio-tiempo es la acción de Einstein-Hilbert. Para una región \mathcal{M} del espacio-tiempo, limitada por una frontera $\partial\mathcal{M}$, que asumimos de tipo espacial, dicha acción viene dada por [40]:

$$S_{EH} = \frac{c^4}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) - \frac{c^4}{8\pi G} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3\vec{x} \sqrt{h} K, \quad (2.1.1)$$

donde c y G son, respectivamente, la velocidad de la luz en el vacío y la constante de la gravitación de Newton; R es el escalar de Ricci asociado a la métrica $g_{\mu\nu}$, g es su determinante y h es el determinante de la métrica h_{ij} inducida en la frontera $\partial\mathcal{M}$. Λ es la constante cosmológica, K es la traza de la segunda forma fundamental o curvatura extrínseca, y $d^4x \equiv dt d\vec{x}$. El contenido material del universo puede representarse en primera aproximación por un campo escalar φ definido sobre la variedad \mathcal{M} . Su acción viene dada por,

$$S_{\varphi} = \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_{\mu} \varphi \partial_{\nu} \varphi - V(\varphi) \right]. \quad (2.1.2)$$

¹En esta tesis nos restringiremos principalmente a un modelo de espacio-tiempo homogéneo e isótropo sobre el que apuntaremos sólo algunas consideraciones de tipo general. Los detalles de la formulación completa pueden encontrarse en la literatura estándar [40; 72–74].

En el caso en que el campo está mínimamente acoplado al espacio-tiempo la acción total es simplemente la suma de la acciones (2.1.1) y (2.1.2), es decir,

$$S_t = S_{EH} + S_\varphi. \quad (2.1.3)$$

Por otro lado, en la formulación Hamiltoniana necesitamos primeramente establecer una variable de tipo tiempo, es decir, necesitamos dividir el espacio-tiempo en espacio y tiempo. Si la topología de la variedad \mathcal{M} es adecuada², esto se puede hacer foliando el espacio-tiempo en superficies de Cauchy (Σ_t) por un lado, lo que nos permite plantear correctamente el problema de valores iniciales, y por otro lado, en una variable de tipo tiempo, t , asociada a la superficie Σ_t .

A partir de esta foliación, la métrica 4-dimensional del espacio-tiempo, $g_{\mu\nu}$, induce en las hipersuperficies espaciales una métrica 3-dimensional, $h_{\mu\nu}$, dada por,

$$g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu, \quad (2.1.4)$$

donde n_μ es un vector ortonormal a Σ_t en cada punto de la hipersuperficie, con $n_\mu n^\mu = -1$. La acción (2.1.1) puede escribirse entonces en términos de la variable tiempo, t , y de la métrica, h_{ij} , y de este modo podemos definir los momentos conjugados a la métrica como, $p_{ij} \equiv \frac{\delta L}{\delta h_{ij}}$, y construir el Hamiltoniano H .

El principio variacional de la acción total, cuando está expresada en términos del Hamiltoniano, proporciona cuatro ligaduras como consecuencia de la invariancia de la acción bajo transformaciones generales de coordenadas. Estas ligaduras son, la ligadura Hamiltoniana,

$$H \equiv 16\pi G G_{abcd} p^{ab} p^{cd} - \frac{\sqrt{h}}{16\pi G} ({}^{(3)}R - 2\Lambda) + \sqrt{h}\rho = 0, \quad (2.1.5)$$

que garantiza la invariancia de la acción con respecto a reparametrizaciones temporales, y las ligaduras del momento

$$H_i \equiv -2D_b p_a^b + \sqrt{h} J_a = 0, \quad (2.1.6)$$

con $i = 1, 2, 3$, que lo hacen con respecto a transformaciones espaciales de coordenadas. En estas ecuaciones, D_a es la derivada covariante en la hipersuperficie espacial, ρ es la densidad de energía del campo escalar ($\rho \equiv T_{\mu\nu} n^\mu n^\nu$), J_a es el "vector de Poynting" ($J_a \equiv h_a^\mu T_{\mu\nu} n^\nu$), y G_{abcd} es la llamada "supermétrica"³ o métrica de De Witt [40; 43], dada por

$$G_{abcd} = \frac{1}{2\sqrt{h}} (h_{ac} h_{bd} + h_{ad} h_{bc} - h_{ab} h_{cd}). \quad (2.1.7)$$

²O en las regiones del espacio-tiempo en las que su topología admita la foliación del espacio-tiempo en espacio y tiempo. Los cambios topológicos se analizarán en el Cap. 3.

³O la métrica del espacio de todas las métricas.

La prescripción canónica [75; 76] para cuantizar la formulación Hamiltoniana del espacio-tiempo consiste en designar las variables de configuración, por ejemplo, las componentes de la métrica inducida y el campo escalar, h_{ij} y φ , respectivamente, y transformar sus momentos conjugados en operadores diferenciales, $p_{ij} \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial h_{ij}}$, y, $p_\varphi \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$. Como resultado, las ligaduras (2.1.5) y (2.1.6) se transforman en ecuaciones diferenciales,

$$\hat{H}(h_{ij}, \varphi, p_{ij}, p_\varphi)\phi(h_{ij}, \varphi) = 0, \quad (2.1.8)$$

$$\hat{H}_i(h_{ij}, \varphi, p_{ij}, p_\varphi)\phi(h_{ij}, \varphi) = 0. \quad (2.1.9)$$

Por analogía con la mecánica cuántica, $\phi(h_{ij}, \varphi)$ es la función de ondas que representa el estado cuántico del universo. La ecuación (2.1.8) es conocida como la ecuación de Wheeler-De Witt, y puede interpretarse como una ecuación de tipo Schrödinger en la que la derivada temporal no aparece como consecuencia de la invariancia de la relatividad general bajo reparametrizaciones temporales.

Existen otras formulaciones para obtener la función de ondas del universo. En particular, comentaremos brevemente algunas de las ventajas e inconvenientes de la formulación Euclídea de la integral de camino. Siguiendo la analogía con la integral de camino de Feynman, Hartle y Hawking [46] proponen que la función de ondas del universo se define en el espacio Euclídeo como [40; 77],

$$\phi(h_{ij}, \varphi) = \sum_{\mathcal{M}} \nu(\mathcal{M}) \int_C dge^{-I(g, \varphi)}, \quad (2.1.10)$$

donde I es la acción Euclídea (es decir, $I \equiv iS$, con S dada por la Eq. (2.1.3) con $t = i\tau$), y C denota la clase de geometrías sobre las que debe realizarse la integral. Esta clase de geometrías viene determinada por las condiciones de frontera que se consideren para el universo. La suma en (2.1.10) debe entenderse formalmente como una suma sobre las diferentes topologías que pueda tener la variedad espacio-temporal, \mathcal{M} , con medida $\nu(\mathcal{M})$ [40].

En general, la integral de camino (2.1.10) no puede calcularse explícitamente por lo que hay que utilizar métodos semiclásicos y elegir un contorno de integración en el plano complejo, lo que puede plantear ciertos problemas [40]. Por otro lado, una de las principales ventajas de esta formulación es que se pueden obtener de forma explícita las correlaciones cuánticas que aparecen entre distintas regiones inconexas del espacio-tiempo [46]. En cambio, en el caso de la ecuación de Wheeler-De Witt, Ec. (2.1.8), estas correlaciones aparecen a través los términos de interacción en el Hamiltoniano entre las diferentes regiones del espacio-tiempo.

2.1.1. La función de ondas del universo. Condiciones de frontera.

Para determinar el estado cuántico del universo debemos imponer ciertas condiciones de frontera en las soluciones de la ecuación de Wheeler-De Witt o establecer el contorno de integración en la integral de camino.

En otros ámbitos de la física, dadas unas condiciones iniciales para un tiempo t_0 y las ecuaciones de evolución del sistema, podemos en principio obtener el estado del sistema para un tiempo posterior, $t > t_0$. En cosmología existen diferencias fundamentales con respecto a este esquema.

En primer lugar, no conocemos las condiciones iniciales del universo sino que precisamente debemos inferirlas a partir de su estado actual. Es más, si el origen del universo es de naturaleza cuántica, ni siquiera podemos hablar de condiciones "iniciales" ya que, desde el punto de vista de la cosmología cuántica, el tiempo es un concepto clásico y, por tanto, términos como "inicial", "final", "pasado" o "futuro" carecen de sentido hasta que no se determine el estado semiclásico del propio espacio-tiempo. Por este motivo resulta más apropiado hablar de condiciones de frontera en vez de condiciones iniciales.

Para un solo universo existen, además, problemas con respecto a la interpretación usual de la función de ondas en mecánica cuántica. En cosmología cuántica: i) no podemos analizar estadísticamente los posibles resultados del estado del universo, ya que observamos un sólo universo⁴; ii) no está claro como el proceso de observación puede determinar también el estado cuántico del propio universo⁵; y iii) no está claro cuál sería el proceso análogo a un proceso de interferencia en mecánica cuántica, y en qué medida podrían afectar estos procesos de "auto-interferencia" a la evolución del universo.

Por todos estos motivos, aún suponiendo que la función de ondas del universo contiene, en principio, toda la información (clásica y cuántica) sobre los parámetros físicos del universo, no está clara ni su interpretación ni cómo obtener dicha información. Ambas cosas están, como veremos en el siguiente apartado, íntimamente relacionadas con las condiciones de frontera que se asuman para el estado del universo. Éstas pasan a tener por tanto un carácter mucho más fundamental de lo que lo tienen las condiciones iniciales en otros sistemas físicos.

⁴Se pueden hacer estimaciones probabilísticas sobre los estados posibles del universo, y considerar que nosotros somos "observadores típicos", suponiendo además que el estado de nuestro universo corresponde a uno de los más probables [78], suposición esta que no está plenamente justificada.

⁵Véase la discusión sobre la interpretación de Everett de la mecánica cuántica en el Cap. 1.

Condiciones de frontera

Debido a algunos de los problemas expuestos anteriormente, puede considerarse que las condiciones de frontera para el estado del universo son de naturaleza esencialmente metafísica. Aún así, existen ciertas restricciones físicas que deben tenerse en cuenta:

i) En primer lugar, las condiciones de frontera deben proporcionar una consistencia general al modelo cosmológico [48].

ii) Deben ser tales que, partiendo de las mismas, seamos capaces de reproducir el comportamiento de nuestro universo; es decir, deben proporcionar una explicación del "origen" clásico del universo, teniendo en cuenta que el propio significado de la palabra "origen" tiene sentido sólo clásicamente⁶.

iii) Por último, también podrían considerarse las "huellas cuánticas" que las condiciones de frontera del universo dejen en su estado actual, especialmente si dicho estado viene descrito por un estado cuántico sin análogo clásico. Además, si el universo posee algún tipo de singularidad futura (por ejemplo, el "big rip"), deberemos establecer condiciones de frontera no sólo para la singularidad inicial del mismo sino también para su singularidad final, y estas últimas dejarán también huella en su estado actual.

Las dos condiciones de frontera usualmente consideradas en cosmología cuántica son las siguientes⁷:

Por un lado, Hawking [82] y, después, Hartle y Hawking [46] plantean como condición de frontera "razonable" que el universo no tenga frontera⁸. En la formulación Euclídea de la integral de camino, definida por la Ec. (2.1.10), esta condición se traduce en que la integración debe hacerse sobre todas las geometrías Euclídeas compactas que sean compatibles con la geometría h_{ij} , inducida en la hipersuperficie Σ_t , sobre la que se quiere calcular la amplitud de probabilidad. En ese caso, no hay una hipersuperficie inicial desde la que propagar la evolución del universo hasta su estado clásico inicial, y el universo tiene su origen por tanto en un punto no singular (en el espacio Euclídeo, ver Fig. 2.1). Esta condición de frontera se interpreta entonces diciendo que el universo se origina de la "nada", donde por "nada" se entiende un estado cuántico del universo donde no existe ni el espacio ni el tiempo (ni por tanto la materia), al menos en el sentido Lorentziano (clásico) de este último término. En la formulación Hamiltoniana

⁶Por ejemplo, se puede suponer que el universo inflacionario tiene su "origen" en un instantón de De Sitter, pero este proceso no es un proceso en el tiempo sino que da lugar precisamente a la "aparición" del tiempo [40].

⁷Para otras condiciones de frontera del universo consideradas hasta ahora, ver por ejemplo las Refs. [79–81].

⁸Textualmente, Hawking se pregunta: "¿qué podría ser más razonable que la condición de frontera del universo fuese que no tuviese frontera?" (cfr. Ref. [83], p. 363).

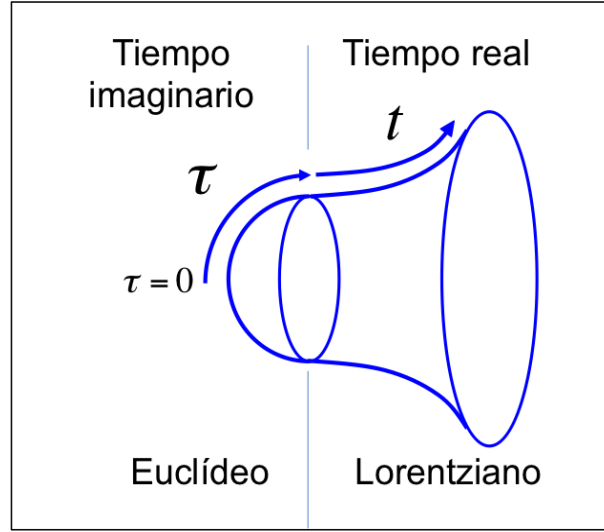


Figura 2.1: Sectores Euclídeo y Lorentziano del espacio-tiempo en la creación del universo. Con la condición de frontera de no-frontera, el universo se origina en el espacio Euclídeo a partir de un punto no singular, para $\tau = 0$.

esta condición equivale a considerar la ecuación de Wheeler-De Witt Euclídea y sus soluciones "clásicas", o instantones, como el origen cuántico del universo.

Por otro lado, Vilenkin [48; 84] propone como condición de frontera para el universo la conocida como de "tuneleo cuántico". Este autor considera las soluciones complejas que corresponden a las ramas semiclásicas del universo, del tipo $\phi \sim e^{\pm i S_c}$, donde S_c es la acción clásica, y considera también la corriente de probabilidad,

$$j \equiv i(\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*), \quad (2.1.11)$$

conservada por el Hamiltoniano (2.1.5), es decir, con $\nabla j = 0$ (ver, Ec. (2.1.8)). La condición de frontera de tuneleo cuántico consiste en elegir la rama del universo que corresponde a los modos salientes del superespacio, es decir, que se asocian con aquellas soluciones que hacen que la corriente (2.1.11) sea positiva. De esta manera, el universo pasa de su sección Euclídea a la Lorentziana a través de un efecto túnel en el que solo sobreviven los modos salientes, mientras que los entrantes son rechazados por la barrera de potencial. Vilenkin considera además que a través de la corriente de probabilidad (2.1.11) puede definirse una variable tiempo de forma consistente, al menos para regiones del espacio-tiempo donde la evolución del universo sea monótonamente creciente o decreciente, por lo que también llama a su condición también "condición de frontera causal" (ver, Fig. 2.2).

La diferencia esencial entre estas dos condiciones de frontera es que para Hawking el ámbito fundamental donde se describe cuánticamente el universo es el espacio Euclídeo.

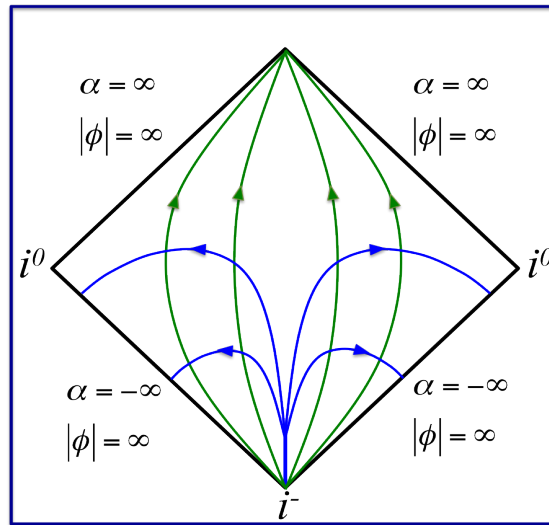


Figura 2.2: Diagrama conforme del minisuperespacio (α, φ) , siendo $\alpha = \ln a$, y φ el campo escalar que representa la materia del universo. Con la condición de frontera de tuneleo cuántico, el flujo de probabilidad es inyectado desde el infinito pasado, i^- , hacia el superespacio. Las líneas de flujo en color azul corresponden a un universo que se expande hasta un punto máximo y luego se contrae; en verde, a un universo en expansión indefinida hasta el infinito futuro, i^+ , en donde el campo escalar no diverge.

Es ahí donde este autor impone las condiciones de frontera a partir de las que se obtienen las componentes Lorentzianas que corresponden a universos clásicos. Vilenkin, por el contrario, aplica sus condiciones de frontera en el sector Lorentziano, del que deriva posteriormente los modos cuánticos del sector Euclídeo [40; 46; 48].

Como hemos dicho al comienzo de este apartado, estas condiciones no son puramente metafísicas sino que podrían tener consecuencias físicas⁹. En particular, pudiera pensarse que la condición de tuneleo cuántico favorece con mayor probabilidad una etapa inflacionaria [40; 48]. Además, como veremos en el capítulo siguiente, estas condiciones de frontera podrían dar lugar a diferentes estados del vacío gravitatorio. Obviamente, estos resultados no son concluyentes. La argumentación de Vilenkin podría ser descartable si el estado de nuestro universo no fuera el más probable ni nosotros fuéramos observadores típicos (ver, nota 4). No está claro, por otra parte, cómo elegir un vacío gravitatorio que corresponda a nuestro universo observable (ver, Sec. 3.2. del capítulo siguiente).

⁹Es interesante la reflexión que hace Vilenkin en el apartado VI de la Ref. [48].

2.1.2. Régimen semiclásico

Como hemos dicho, los sectores Lorentzianos de la función de ondas se corresponden con las soluciones clásicas del universo, mientras que las secciones puramente Euclídeas describen estados de tuneleo cuántico. Más concretamente, el régimen oscilatorio de la función de ondas puede dar como resultado un universo semiclásico en el siguiente sentido: consideremos las soluciones de la ecuación de Wheeler-De Witt del tipo WKB [30],

$$\phi(h_{ij}, \varphi) = \Delta[h_{ij}]e^{\pm iS_c[h_{ij}]} \chi[h_{ij}, \varphi], \quad (2.1.12)$$

donde S_c es la acción clásica para el espacio tiempo, dada por la Ec. (2.1.1), $\Delta[h_{ij}]$ es una función que varía lentamente con h_{ij} , donde "lentamente" quedará definido más adelante, y el factor $\chi[h_{ij}, \varphi]$ contiene toda la dependencia de la función de ondas con el campo escalar φ . Introduciendo la solución (2.1.12) en la ecuación de Wheeler-De Witt, Ec. (2.1.8), se obtiene a orden \hbar^0 la ecuación de Hamilton-Jacobi, con el momento clásico definido como, $p_{ij}^c \equiv \frac{\partial S_c}{\partial h_{ij}}$. A orden \hbar^1 se obtiene,

$$-i\chi[(\nabla_x^2 S_c)\Delta + 2\mathcal{G}_{ijkl} \frac{\delta S_c}{\delta h_{ij}} \frac{\delta \Delta}{\delta h_{kl}}] + \Delta[-2i\mathcal{G}_{ijkl} \frac{\delta S_c}{\delta h_{ij}} \frac{\delta \chi}{\delta h_{kl}} + \sqrt{\hbar} \rho \chi] = 0. \quad (2.1.13)$$

La anulación del primer término constituye el criterio de Hartle para considerar que el factor Δ en (2.1.12) varía lentamente con respecto a la acción clásica gravitatoria, es decir, Δ debe cumplir

$$\mathcal{G}_{ijkl} \frac{\delta}{\delta h_{ij}} (|\Delta|^2 \frac{\delta S_c}{\delta h_{kl}}) = 0. \quad (2.1.14)$$

Esta condición puede interpretarse como la conservación de la corriente de probabilidad dada por la función $|\Delta|^2$ a lo largo de las "trayectorias" clásicas, $p_{kl}^c \equiv \frac{\partial S_c}{\partial h_{kl}}$. Por otro lado, la anulación del segundo término en (2.1.13) puede re-escribirse de la siguiente forma,

$$i \frac{\partial \chi}{\partial \tau} = \sqrt{\hbar} \hat{\rho} \chi, \quad (2.1.15)$$

donde, $\hat{\rho} \equiv \hat{T}_{nn}(\varphi, -i \frac{\delta}{\delta \varphi})$. Es decir, en la aproximación semiclásica se obtiene una ecuación tipo Schrödinger para los campos de materia, φ , con la siguiente variable temporal,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = -2\mathcal{G}_{ijkl} \frac{\delta S_c}{\delta h_{ij}} \frac{\delta}{\delta h_{kl}}. \quad (2.1.16)$$

De esta manera es como las soluciones oscilatorias (Lorentzianas) de la ecuación de Wheeler-De Witt representan el universo semiclásico. En el régimen Euclídeo, las soluciones no pueden identificarse con el espacio semiclásico que observamos.

2.2. Energía oscura y energía fantasma: ejemplo de multiverso clásico.

En esta sección describiremos el modelo analizado en profundidad a lo largo de esta memoria. Éste consiste en un espacio homogéneo e isótropo representado por una métrica de Friedman-Roberson-Walker (FRW),

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + a^2(t)d\Omega_3^2, \quad (2.2.1)$$

donde $N(t)$ es la función lapso, $a(t)$ es el factor de escala y $d\Omega_3^2$ es la métrica en la 3-esfera unidad. La evolución del universo está dominada por un fluido con ecuación de estado $p = w\rho$, siendo p y ρ , la presión y la densidad de energía del fluido, respectivamente. En tal caso, la ligadura Hamiltoniana (2.1.5), para $\Lambda = 0$ y $\kappa = 0$ (geometría espacial plana), puede escribirse como

$$H = N\mathcal{H} = \frac{N}{2} \left(-\frac{2\pi G}{3a} p_a^2 + a^3 \rho \right) = 0, \quad (2.2.2)$$

con, $p_a \equiv -\frac{3}{4\pi G} \frac{a\dot{a}}{N}$. \mathcal{H} es la densidad Hamiltoniana. Esta ecuación, con $N = 1$, corresponde a la ecuación de Friedman,

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho, \quad (2.2.3)$$

donde H es el parámetro de Hubble. Sus soluciones pueden obtenerse haciendo uso de la ecuación cósmica de conservación de la energía,

$$d\rho = -3(p + \rho) \frac{da}{a}. \quad (2.2.4)$$

Integrando (2.2.4) con $p = w\rho$, obtenemos que $\rho = \rho_0 a^{-3(1+w)}$ y usando esta expresión se obtienen las soluciones de la Ec. (2.2.3), dadas generalmente por

$$a(t) = \left(a_0^\beta + \beta \lambda_0 (t - t_0) \right)^{\frac{1}{\beta}}, \quad (2.2.5)$$

con $\beta \neq 0$, siendo $\beta \equiv \frac{3}{2}(1+w)$, y $\lambda_0 \equiv \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \rho_0}$, siendo ρ_0 la densidad de energía actual del fluido. Este modelo representa un universo en expansión acelerada para un valor, $w < -\frac{1}{3}$. En esta tesis, motivados por los datos observacionales, consideraremos más concretamente que, $w = -1 + \frac{2}{3}\beta$, con $|\beta| \ll 1^{10}$. El factor de escala (2.2.5) puede escribirse entonces como,

$$a(t) = (1 + \beta \lambda_0 t)^{\frac{1}{\beta}}, \quad (2.2.6)$$

¹⁰Tomando los valores observacionales asumidos en el Cap. 1, es decir, $-1,1 < w < -0,9$, tendremos, $|\beta| < 0,15$.

donde se ha tomado como límite de integración, $a(t_0 = 0) = 1$. Si $\beta = 0$, entonces $a(t) = e^{\lambda_0 t}$, que corresponde a la evolución de un universo dominado por una constante cosmológica, con $\Lambda = 3\lambda_0^2$ (ver, Fig. 2.3).

Para $\beta \neq 0$ podemos distinguir dos regímenes. En el de quintaesencia, $\beta > 0$, el universo se expande de forma indefinida hasta alcanzar un valor $a(t) \rightarrow \infty$, para $t \rightarrow \infty$, mientras que en este límite la densidad de energía del fluido tiende a cero, $\rho \rightarrow 0$. En cambio, en el régimen de energía fantasma, $\beta < 0$, las soluciones de la ecuación de Friedman pueden escribirse como,

$$a(t) \propto \frac{1}{(t_{br} - t)^{\frac{1}{|\beta|}}}, \quad (2.2.7)$$

donde, $t_{br} \equiv \frac{1}{|\beta|\lambda_0}$, es el tiempo en el que el universo encuentra la singularidad conocida como "big rip", o gran desgarro, donde tanto el factor de escala como la energía del fluido divergen ($\rho \propto a^{2|\beta|}$). Esta singularidad divide el espacio-tiempo en dos partes causalmente separadas. No obstante, antes de alcanzar la singularidad los efectos cuánticos dominan en el universo [70; 85], y por tanto, desde un punto de vista clásico, es más correcto considerar un universo que evoluciona sólo hasta la última hipersuperficie espacial en la que los efectos cuánticos son subdominantes, para $t = t_i$. De igual manera, para la región posterior a la singularidad, sólo tendría sentido considerar clásicamente la región foliable posterior a un cierto tiempo $t = t_f$ (ver, Fig. 2.4).

Además, la naturaleza "exótica" del fluido fantasma¹¹ que domina la evolución del universo en este régimen, induce la formación de agujeros de gusano [86], cuyas gargantas podrían crecer hasta unir la región *I*, anterior al big rip, con la región *II*, posterior a la singularidad (ver Fig. 2.4).

Entonces, o bien porque los efectos cuánticos suavicen la singularidad o bien porque los agujeros de gusano conecten ambas regiones clásicas del espacio-tiempo, debemos considerar también como físicamente admisible la región *II*. Pero en tal caso, sólo los valores [87]

$$w_j = -1 - \frac{1}{3^j}, \quad j = 1, 2, \dots, \infty, \quad (2.2.8)$$

o, $|\beta_j| = \frac{1}{2^j}$, garantizan un valor positivo del factor de escala para $t > t_{br}$ en (2.2.7). Es decir, en el caso de un universo dominado por energía fantasma, el parámetro w de la ecuación de estado del fluido aparece discretizado. Cada uno de los valores w_j en (2.2.8) representa un universo clásico cuya evolución está dada por la ecuación (2.2.7), siendo admisibles, en principio, todos sus valores. Pueden adoptarse dos actitudes frente a este conjunto de valores: i) se puede considerar que sólo uno de ellos representa físicamente al universo, y ii) también se puede considerar que todos ellos son representantes de

¹¹La cual da lugar a una violación de la condición dominante de la energía del fluido fantasma.

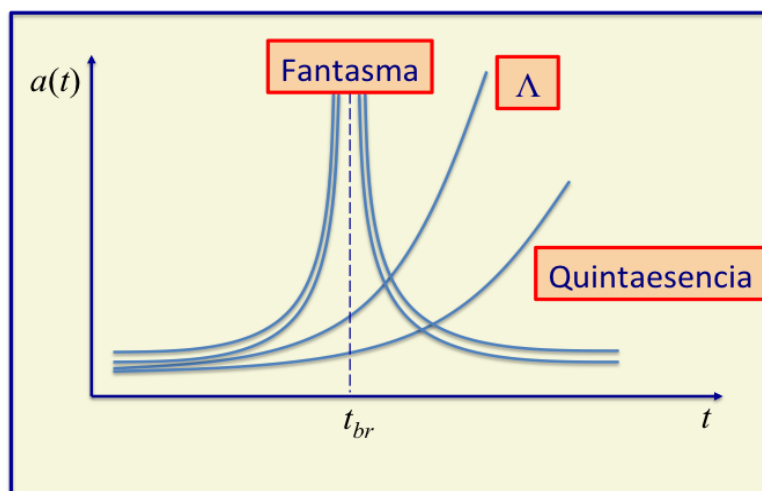


Figura 2.3: Evolución del factor de escala para un universo homogéneo e isótropo dominado por un fluido de: i) quintaesencia ($w > -1$), ii) constante cosmológica ($w = -1$) y iii) energía fantasma ($w < -1$).

distintas realizaciones del universo. En ese caso estaríamos frente a un escenario de multiverso¹² (clásico).

Este multiverso, aunque sólo sea a modo de "modelo de prueba", nos permite analizar ciertos efectos cuánticos que podrían darse entre las distintas ramas del universo. En particular, veremos a continuación que pueden considerarse estados cuánticos entrelazados entre las distintas ramas del universo, lo que hace necesaria una modificación del concepto de localidad (o no-localidad) asociado usualmente con los estados entrelazados.

¹²Los distintos valores de w_j podrían representar también distintos niveles de excitación del fluido fantasma y cada uno de ellos representaría una rama del universo. El estado del universo vendría dado por una superposición de las distintas ramas cuyo resultado final sería un valor efectivo, w_{ef} , del parámetro de la ecuación de estado.

2.3. El multiverso cuántico fantasma: estados entrelazados.

2.3.1. La función de ondas

El estado cuántico del universo viene dado, como ya se ha dicho, por las soluciones de la ecuación de Wheeler-De Witt, que, en el modelo considerado, resulta de transformar la ligadura Hamiltoniana (2.1.2) en un operador diferencial con, $p_a \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial a}$. No obstante, en esta prescripción surge el problema bien conocido en mecánica cuántica del orden de los operadores [40; 88].

Todas las variables clásicas conmutan de forma que es posible cambiar su orden en una ecuación. Cuánticamente, las variables conjugadas no conmutan y existe por tanto una ambigüedad en el orden que ha de elegirse al transformar las variables clásicas en operadores cuánticos. Este problema puede parametrizarse de la siguiente manera [87]: clásicamente,

$$\frac{p_a^2}{a} \equiv a^{-(r+s+1)} p_a a^r p_a a^s, \quad (2.3.1)$$

para cualquier valor de los parámetros r y s . Cuánticamente, sin embargo, las variables conjugadas no conmutan por lo que (2.3.1) se transforma como,

$$\frac{\hat{p}_a^2}{\hat{a}} \rightarrow \frac{1}{\hat{a}} \hat{p}_a^2 - \frac{(1-2\alpha)[\hat{a}, \hat{p}_a]}{\hat{a}^2} \hat{p}_a + \frac{\gamma^2[\hat{a}, \hat{p}_a]^2}{\hat{a}^3}, \quad (2.3.2)$$

donde hemos utilizado que, $[a^l, p_a] = l[a, p_a]a^{l-1}$, y los coeficientes α y γ están relacionados con r y s en (2.3.1) por,

$$r = 1 \mp \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}, \quad s = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}. \quad (2.3.3)$$

Con esta parametrización, la ecuación de Wheeler-De Witt puede escribirse como,

$$\frac{\mathcal{N}\sigma^2}{a^3} \left(a^2 \partial_{aa}^2 + (1-2\alpha)a\partial_a + \gamma^2 + \frac{\omega_0^2}{\hbar^2} a^{2q} \right) \phi(a) = 0, \quad (2.3.4)$$

donde, $\phi(a)$ es la función de ondas del universo, $\sigma^2 \equiv \frac{\pi G \hbar^2}{3}$, $q = 3 - \beta$, con¹³ $|\beta| < 0,15$, y, $\omega_0^2 \equiv \frac{3\rho_0}{2\pi G}$. Algunas elecciones pueden considerarse más "naturales", ya que están asociadas con la conservación de alguna simetría en el superespacio sobre el que está definida la función de ondas del universo¹⁴, o con la hermiticidad del operador

¹³Véase la sección anterior, p.p. 10.

¹⁴Por ejemplo, el criterio utilizado habitualmente es requerir que el término cinético de la ecuación de Wheeler-De Witt se convierta en un operador de "Laplace-Beltrami", invariante bajo transformaciones en el espacio de configuración definido por h_{ij} y el campo φ , véase, por ejemplo, Ref. [40]

Hamiltoniano [89]. No obstante, el problema del orden de los factores no debe tener consecuencias en el régimen semiclásico de la función de ondas [47], ni en un modelo de minisuperespacio como el que estamos considerando, por lo que, salvo que se indique lo contrario, tomaremos la elección usual [40; 47; 89] que corresponde a, $\alpha = \gamma = 0$ en (2.3.4). En tal caso, las soluciones de la ecuación de Wheeler-De Witt (2.3.4) se pueden escribir en términos de funciones de Bessel como,

$$\phi_0(a) = A_0 \mathcal{C}_0(\tilde{\omega}_0 a^q), \quad (2.3.5)$$

donde, $\tilde{\omega}_0 = \frac{\omega_0}{\hbar q}$, A_0 es una constante de normalización, y \mathcal{C}_ν es una de las funciones de Bessel (o de Hankel) de orden cero: \mathcal{J}_0 , \mathcal{Y}_0 y $\mathcal{H}_0^{(1,2)}$.

Para determinar cual de estas funciones describe el estado fundamental, o modo cero, del universo, debemos tener en cuenta ahora las condiciones de frontera a imponer sobre la función de ondas. Estas condiciones de frontera determinarán tanto las condiciones de ortogonalidad de la función de ondas como su interpretación. Para ello es conveniente primero especificar las características del modelo, sus diferencias con respecto a los modelos considerados en las Refs. [46] y [48], y establecer los límites para los cuales es válida la descripción que estamos utilizando.

En primer lugar, en un modelo de universo espacialmente plano dominado por un fluido de quintaesencia o fantasma, cuya evolución está determinada por el Hamiltoniano (2.2.2), y la ecuación de Friedmann (2.2.3), no encontramos ninguna región Euclídea clásicamente prohibida, cuando la métrica degenera como $a \rightarrow 0$. Por tanto, estrictamente hablando, las condiciones de frontera de Hawking y Vilenkin sólo podrían considerarse para un universo espacialmente cerrado. En las etapas más tardías de la evolución, el término de curvatura se haría subdominante y el estado cuántico del universo vendría dado aproximadamente por la función de ondas (2.3.5). Sin embargo, cerca del origen encontraríamos un régimen Euclídeo en la región definida por, $a \leq \frac{1}{\lambda_0^{1+\beta}}$ ¹⁵, y en ese caso, podríamos usar los razonamientos desarrollados en las Refs. [46] y [48].

No obstante, nuestro interés se centra en estudiar las condiciones del universo en su estado de expansión acelerada presente y en su futuro, por lo que mantendremos la consideración de un universo espacialmente plano, lo que además está avalado por los datos observacionales y cuya evolución viene dada por las Ecs. (2.2.2) y (2.2.3).

Por otro lado, los límites de validez para un modelo con geometría espacial cerrada o

¹⁵El caso considerado en las Refs. [46] y [48] corresponde en nuestro caso a $\beta = 0$ y $\lambda_0 = H = \frac{8\pi G}{3} \rho_v$, siendo ρ_v la energía del vacío cuyo valor estaría en torno a la energía de gran unificación (GUT), es decir, $\rho_v = 10^{16}$ GeV.

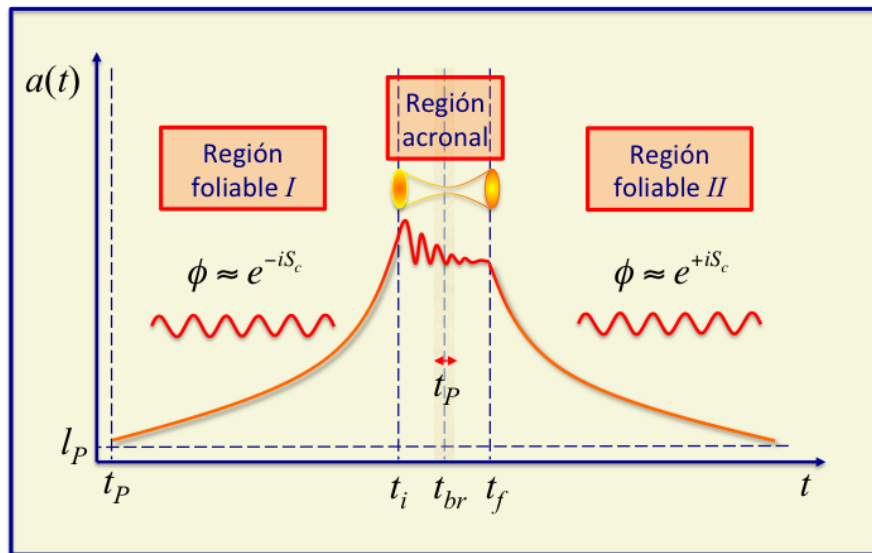


Figura 2.4: Límites de validez del modelo utilizado para el caso de un universo dominado por energía fantasma. En las proximidades del big rip los efectos cuánticos se hacen dominantes y pueden aparecer agujeros de gusano que conecten las regiones *I* y *II*, anterior y posterior a la singularidad, respectivamente.

plana son distintos. Para un universo cerrado, en el origen, la aproximación semiclásica o WKB sigue siendo válida incluso en el régimen Euclídeo, ya que el universo entraría en este régimen presumiblemente a una escala próxima a la de GUT ($\sim 10^{16}\text{GeV}$); es decir, a unos órdenes de magnitud por debajo de la escala de Planck ($m_P \sim 10^{19}\text{GeV}$), donde domina la gravedad cuántica. En un universo plano, por el contrario, no encontramos ningún régimen Euclídeo por lo que el límite de validez del modelo para el origen del universo es la propia escala de Planck.

En los modelos estudiados por Vilenkin y Hawking el universo o bien recolapsa (si está dominado por materia) o bien se expande indefinidamente (si está dominado por una constante cosmológica). En el primer caso, el universo vuelve a entrar en el régimen Euclídeo al final de su evolución futura, y las condiciones que se imponen entonces son las mismas que las que se imponen en el origen. Un universo dominado por un fluido de quintaesencia es un caso particular de un universo que se expande indefinidamente, por lo que se pueden aplicar condiciones análogas a las asumidas por Vilenkin en Ref. [48]¹⁶, ya que el universo no volvería a entrar en ninguna zona clásicamente prohibida.

En cambio, para el caso de un universo dominado por energía fantasma, la singularidad del big rip introduce características nuevas que requieren un tratamiento más cuidadoso. En las proximidades del big rip la energía del fluido diverge mientras que las fluctuaciones cuánticas del espacio-tiempo se hacen dominantes. Por ellos, consideraremos que en el entorno más cercano de la singularidad, en órdenes de magnitud del tiempo de Planck antes y después del big rip, sólo una teoría de la gravedad cuántica puede describir el comportamiento del universo. No obstante, antes de alcanzar esta región (ver, Fig. 2.4), los efectos cuánticos del fluido se harían dominantes, e incluso hemos considerado la posibilidad de que se formen agujeros de gusano que harían de dicha región una zona múltiplemente conexas. En el primer caso, aunque no aparecen regiones clásicamente prohibidas [85], las distintas ramas del universo se superponen y la representación semiclásica pierde validez. En el segundo caso, es decir, si consideramos la existencia de agujeros de gusano que conectan las regiones I y II del universo, la foliación utilizada no es válida y debemos considerar cambios topológicos que puede describirse de forma más natural en un escenario de segunda cuantización (ver, Cap. 3).

Por tanto, consideramos que los límites del modelo para un universo dominado por una energía de tipo fantasma vienen dados por las regiones foliables I y II definidas por, $t_P < t^I < t_i$, y, $t_f < t^{II} < t_*$, respectivamente, siendo t_P el tiempo de Planck y t_*

¹⁶Es preciso tener en cuenta, sin embargo, que la densidad de energía de un fluido de quintaesencia tiende a cero cuanto $t \rightarrow \infty$ ($a \rightarrow \infty$) mientras que para un universo De Sitter la densidad de energía del fluido de vacío viene representada por Λ , y por tanto es constante.

el tiempo en el que el factor de escala vuelve a ser del orden de magnitud de la longitud de Planck cuando $t \rightarrow \infty$ (ver, Fig. 2.4).

Una vez especificadas las características del modelo y establecidos sus límites de validez, podemos analizar ahora las condiciones de frontera que deben imponerse sobre la función de ondas del universo dada por la Ec. (2.3.5).

2.3.2. Condiciones de frontera. Normalización

Si suponemos la condición de "no-frontera" de Hartle y Hawking, el universo surge de un punto no singular (en el espacio Euclídeo) y aparece en la región Lorentziana con una función de ondas para valores reales. Estas condiciones se traducen en que la función de ondas es finita para $a \rightarrow 0$, o más concretamente para, $a \rightarrow l_P$, y se cumplen si elegimos para la función \mathcal{C}_ν en (2.3.5) la función de Bessel de primera clase, \mathcal{J}_0 . De este modo, los límites asintóticos de la función de ondas del universo, Ec. (2.3.5), resultan ser¹⁷,

$$\phi_0(a) \sim \text{cte} \quad , \text{ para } a \rightarrow 0 \quad (a \sim l_P), \quad (2.3.6)$$

$$\phi_0(a) \sim a^{-\frac{q}{2}} \cos(\tilde{\omega}_0 a^q - \frac{\pi}{4}) \quad , \text{ para } a \rightarrow \infty. \quad (2.3.7)$$

La solución (2.3.7) coincide en el límite semiclásico con la propuesta de Hawking [40; 46],

$$\phi_{HH}(a, \varphi) \sim \frac{e^{\frac{1}{3V(\varphi)}}}{(a^2 V(\varphi) - 1)^{\frac{1}{4}}} \cos\left(\frac{(a^2 V(\varphi))^{\frac{3}{2}}}{3V(\varphi)} - \frac{\pi}{4}\right),$$

cuando $a^2 V \gg 1$, ya que en el caso que consideramos aquí $V \propto \rho \sim a^{-2\beta}$, con $\beta = \frac{3}{2}(1+w)$, luego $a^3 V^{\frac{1}{2}} \sim a^q$, con $q = 3 - \beta$, definido así en (2.3.4)¹⁸.

En el caso de la condición de tuneleo cuántico, tenemos dos posibilidades para elegir la función \mathcal{C}_0 en (2.3.5), que vienen dadas por las funciones de Hankel, $\mathcal{H}_0^{(1)}(x)$ y $\mathcal{H}_0^{(2)}(x)$, cuyos límites asintóticos son,

$$\mathcal{H}_0^{(1,2)}(\tilde{\omega}_0 a^q) \sim a^{-\frac{q}{2}} e^{\pm i(\tilde{\omega}_0 a^q - \frac{\pi}{4})} \quad , \text{ para } a \rightarrow \infty, \quad (2.3.8)$$

donde el signo $+$ en la exponencial corresponde a $\mathcal{H}_0^{(1)}$ y el signo $-$ a $\mathcal{H}_0^{(2)}$. Estas soluciones asintóticas corresponden a las ramas semiclásicas, $e^{\pm \frac{i}{\hbar} S_c}$, donde $S_c = \frac{\omega_0}{q} a^q$,

¹⁷Podemos imponer que en vez de alcanzar un valor constante cuando $a \rightarrow 0$, el límite de la función de ondas sea cero eligiendo un valor $\alpha \neq 0$ en la Ec. (2.3.4), cumpliendo así las llamadas condiciones de frontera de De Witt [40].

¹⁸El prefactor de ϕ_{HH} coincide también con el de ϕ_0 para una elección particular del valor α en (2.3.4).

y el prefactor en (2.3.8), $\Delta = a^{-\frac{q}{2}}$, cumple el criterio de Hartle ya que la ecuación (2.1.14) resulta ser en este caso,

$$\frac{1}{a} \partial_a \left(\frac{1}{a^q} \partial_a S_c \right) \sim \frac{1}{a^3} \rightarrow 0. \quad (2.3.9)$$

Además, teniendo en cuenta que el operador momento viene dado por, $\hat{p}_a \phi(a) \equiv -i\hbar \partial_a \phi(a)$, y que, $p_a^c = -a\dot{a}$, resulta que el signo negativo en (2.3.8) corresponde a un universo en expansión mientras que el positivo corresponde a un universo que se contrae. *Grosso modo*, estas soluciones corresponderían a los modos de frecuencia positiva y negativa en una teoría de tipo Klein-Gordon¹⁹. La corriente de probabilidad,

$$j = \frac{i}{2} (\phi^*(a) \partial_a \phi(a) - \phi(a) \partial_a \phi^*(a)), \quad (2.3.10)$$

es positiva para las ramas $\phi \approx C e^{-iS_c}$ y negativa para las ramas $\phi \approx C e^{+iS_c}$. Las primeras corresponden con lo que Vilenkin denomina los modos salientes del superspacio (del minisuperspacio en nuestro caso), y las segundas a los modos entrantes. Por eso, imponiendo la condición causal de Vilenkin, según la cual la corriente de probabilidad (2.3.10) es inyectada al minisuperspacio desde el infinito pasado (ver, Fig. (2.2)), debemos elegir para la ecuación de ondas (2.3.5) que representa un universo dominado por un fluido de quintaesencia la función de Hankel, $\mathcal{H}_0^{(2)}(x)$, que corresponde a una rama en expansión del universo.

Para un universo dominado por energía fantasma, como hemos dicho anteriormente, la singularidad del big rip divide el espacio-tiempo en dos regiones clásicamente separadas (ver, Figs. (2.4) y (2.5)). La región *I* corresponde a un universo en expansión mientras que en la región *II* el universo se está contrayendo. Por tanto, en este caso, imponiendo las condiciones de frontera de tuneleo cuántico, debemos elegir para la función de ondas del universo fantasma la función,

$$\phi_0^I(a) = A_0^I \mathcal{H}_0^{(2)}(\tilde{\omega}_0 a^q), \quad (2.3.11)$$

para la región *I*, anterior al big rip, y

$$\phi_0^{II}(a) = A_0^{II} \mathcal{H}_0^{(1)}(\tilde{\omega}_0 a^q), \quad (2.3.12)$$

para la región *II*, posterior a la singularidad. La función de ondas dada por le Ec. (2.3.11) coincide con la obtenida por Vilenkin en la Ref. [48] para un universo dominado por una constante cosmológica²⁰. Por otro lado, hay que destacar que estas funciones

¹⁹Aunque esta identificación es ambigua e incluso no puede establecerse en el caso general del superspacio [74].

²⁰Con $\beta = 0$, y por tanto, $q = 3$ en (2.3.11).

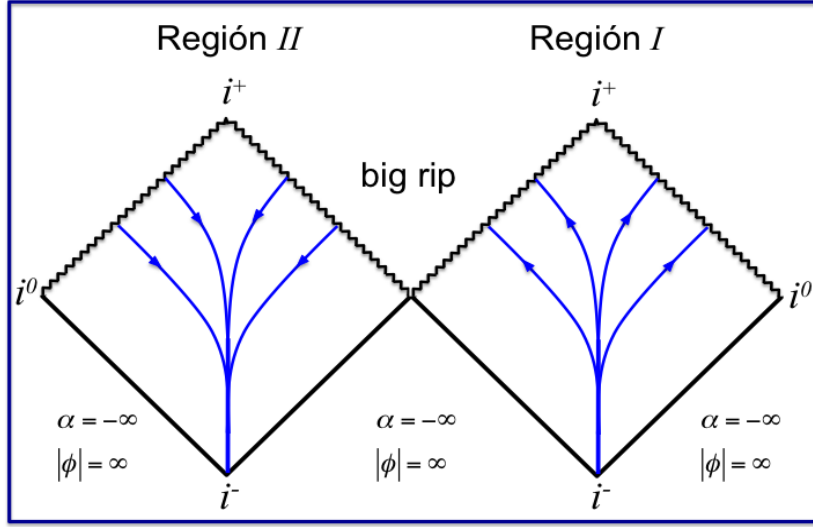


Figura 2.5: En el caso de un universo dominado por energía fantasma, el flujo de probabilidad fluye desde el origen del universo hasta el big rip, en la región *I*, anterior a la singularidad, y desde ésta hasta un tiempo t infinito ($a \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow -\infty$) para la región *II*, posterior al big rip.

divergen cuando $a \rightarrow 0$. En opinión de Vilenkin, "esto no es necesariamente un problema serio" (cfr. Ref. [48], p. 3562), ya que su interpretación de la función de ondas del universo no requiere una normalización sobre todo el espacio de configuración, sino tan sólo sobre la región Lorentziana del espacio-tiempo.

Condiciones de normalización

El valor de la constante de normalización, A_0 , en (2.3.5) depende del producto escalar que se considere. En el caso de la función de onda obtenida a partir de la condición de tuneleo cuántico, Ecs. (2.3.11) y (2.3.12), podemos utilizar la siguiente definición para el producto escalar,

$$(\phi_1, \phi_2) = -ia(\phi_1 \partial_a \phi_2^* - \phi_2^* \partial_a \phi_1). \quad (2.3.13)$$

De este modo, se obtiene para la constante A_0 en las Ecs. (2.3.11) y (2.3.12) el valor $|A_0|^2 = \frac{\pi}{4q}$. Por otro lado, en el caso de la función de ondas obtenida a partir de la condición de no-frontera, no podemos utilizar el producto escalar dado por la Ec. (2.3.13), ya que al ser una función real este producto escalar es nulo. Hawking propone

en cambio utilizar el producto escalar usual de la mecánica cuántica, es decir,

$$(\phi_1, \phi_2) = \int_{l_P}^{\infty} d\mu(a) \phi_1 \phi_2^*, \quad (2.3.14)$$

donde $d\mu(a)$ es la medida de la integral regularizada con un valor mínimo del factor de escala del orden de la longitud de Planck, l_P . En este caso, con $d\mu(a) = \frac{da}{a}$, resulta²¹ [90]

$$(\phi_0, \phi_0) = \lim_{k,l \rightarrow 0} (\phi_k, \phi_l) \sim \frac{A_0^2}{q} \ln\left(\frac{2}{\tilde{\omega}_0 l_P^q}\right) + \mathcal{O}(k \pm l). \quad (2.3.15)$$

2.3.3. Estados excitados

Una vez normalizadas las funciones de onda, dadas por las Ecs. (2.3.11) y (2.3.12) describen, dentro de los límites de aplicabilidad del modelo, es decir, fuera de la región acausal que rodea el big rip y fuera del origen del universo, su estado fundamental. Sin embargo, ni el estado fundamental ni ningún otro estado puro representa el estado cuántico más general del universo, que vendría dado por un estado mezcla. Para calcular dicho estado mezcla necesitamos conocer los autoestados del Hamiltoniano (2.3.4). Consideremos para ello un valor de la función lapso, $N = a^3$ en la Ec. (2.3.4), entonces las autofunciones del Hamiltoniano vienen dadas por,

$$\hat{H} \phi_n(a) = \beta_n^2 \phi_n(a), \quad (2.3.16)$$

con, $\beta_n^2 = q^2 n^2$, y

$$\phi_n(a) = A_n \mathcal{C}_n(\tilde{\omega}_0 a^q), \quad (2.3.17)$$

donde, A_n es la constante de normalización para cada modo, y \mathcal{C}_n es una de las funciones de Bessel de orden n : $\mathcal{H}_n^{(1,2)}(x)$, si imponemos las condiciones de frontera de tuneleo cuántico, y $\mathcal{J}_n(x)$ con las condición de frontera de no-frontera. Consideramos ahora estas últimas y el producto escalar dado por la ecuación (2.3.14), con $l_p \rightarrow 0$. Entonces, con $A_0^2 = q \ln^{-1} \frac{2}{\tilde{\omega}_0 l_P^q}$, y $A_n^2 = 2qn$, para $n \neq 0$, como constantes de normalización en (2.3.17), obtenemos las siguientes relaciones de ortogonalidad [90; 91]

$$\begin{aligned} (\phi_n, \phi_n) &= 1, & \forall n, \\ (\phi_n, \phi_m) &= 0, & |n - m| \text{ par}, \\ (\phi_n, \phi_m) &= \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(n-m-1)} \sqrt{nm}}{n^2 - m^2}, & |n - m| \text{ impar}, \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

²¹Con un valor de la medida, $d\mu(a) = a^{\frac{1}{2}(q-2)} da$, se puede realizar la integral en (2.3.14) sin necesidad de ninguna regularización para el modo cero [90]. La elección considerada, $d\mu(a) = \frac{da}{a}$, es no obstante recomendable para el desarrollo posterior que vamos a realizar.

Estas relaciones sugieren una división del espacio de Hilbert en dos subespacios, correspondientes a combinaciones lineales de los modos pares e impares de los autoestados del Hamiltonianos, es decir,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-, \quad (2.3.19)$$

con,

$$\phi_+(a) \in \mathcal{H}_+ \Rightarrow \phi_+(a) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} \phi_{2n}(a) \otimes \chi_+ \quad (2.3.20)$$

$$\phi_-(a) \in \mathcal{H}_- \Rightarrow \phi_-(a) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n+1} \phi_{2n+1}(a) \otimes \chi_-, \quad (2.3.21)$$

siendo las C_n constantes, y χ_{\pm} dos vectores ortogonales auxiliares tales que, $\chi_+ \equiv (1, 0)$ y $\chi_- \equiv (0, 1)$. En ese caso, con una extensión del producto escalar (2.3.14), dada por

$$(\phi, \tilde{\phi}) = \lim_{l_p \rightarrow 0} \int_{l_p}^{\infty} \frac{da}{a} \phi^\dagger(a) \tilde{\phi}(a) = \lim_{l_p \rightarrow 0} \int_{l_p}^{\infty} \frac{da}{a} \left(\phi_+(a) \tilde{\phi}_+(a) + \phi_-(a) \tilde{\phi}_-(a) \right), \quad (2.3.22)$$

obtenemos una base ortonormal, $\tilde{\phi}_n \equiv \{\phi_{2n}, \phi_{2n+1}\}$, en la que poder expresar el estado cuántico del universo.

2.3.4. La matriz densidad de estados

Como se ha dicho en la sección anterior, el estado cuántico más general del universo no viene dado por una función de ondas, que representa un estado puro, sino por una matriz densidad de estados que puede representar tanto estados puros como estados mezcla [92; 93]. Se pueden utilizar distintas representaciones para dicha matriz densidad de estados²². Supongamos que utilizamos la base $\tilde{\phi}_n \equiv \{\phi_{2n}, \phi_{2n+1}\}$, obtenida en el apartado anterior, y consideremos la matriz densidad de estados definida por [87],

$$\rho(a', a) \equiv \int_0^{\infty} dT K(a', T; a, 0), \quad (2.3.23)$$

donde, $K(a', T; a, 0) \equiv \langle a' | e^{\frac{i}{\hbar} HT} | a \rangle$, es el propagador de Schrödinger. La integración sobre la variable T en (2.3.23) representa la invariancia del estado del universo con respecto a la diferencia temporal entre dos hipersuperficies espaciales definidas por sus factores de escala, a y a' , respectivamente. En ese caso, con la división del espacio de soluciones definida en la sección anterior, Ecs. (2.3.19-2.3.21), el propagador se puede escribir como,

$$K(a', T; a, 0) = \sum_n \langle a' | e^{\frac{i}{\hbar} HT} (|\phi_n^+\rangle \langle \phi_n^+| + |\phi_n^-\rangle \langle \phi_n^-|) | a \rangle, \quad (2.3.24)$$

²²En el siguiente capítulo utilizaremos de forma más específica distintas representaciones de la matriz densidad de estados.

$$= \sum_n e^{\frac{i}{\hbar} q^2 n^2 T} (\phi_n^+(a') \phi_n^+(a) + \phi_n^-(a') \phi_n^-(a)). \quad (2.3.25)$$

Utilizando una rotación de Wick, $T \rightarrow i\tilde{T}$, para hacer convergente la integral en la matriz densidad de estados, obtenemos

$$\rho(a', a) = A \sum_n \frac{1}{q^2 n^2 + \epsilon_0^2} (\phi_n^+(a') \phi_n^+(a) + \phi_n^-(a') \phi_n^-(a)), \quad (2.3.26)$$

donde A es una constante de normalización y hemos introducido el parámetro ϵ_0 , que representa una cierta energía mínima del orden de la masa de Planck, para evitar la divergencia de la matriz densidad de estados con respecto al modo cero. La matriz densidad de estados dada por la Ec. (2.3.26) representa un estado mezcla de estados entrelazados entre los modos pares e impares de los autoestados del Hamiltoniano. En el siguiente apartado analizaremos las consecuencias que un estado entrelazado tendría en el contexto del multiverso fantasma.

2.3.5. Estados entrelazados en el multiverso

Un caso especialmente interesante es aquel en el los modos excitados del Hamiltoniano, Ec. (2.3.4), vienen dados por,

$$H\phi_n(a) = -\epsilon_0^2 n^2 \phi_n(a), \quad (2.3.27)$$

donde $\epsilon_0^2 \equiv \frac{3}{2\pi G}$. Para simplificar los cálculos utilizaremos unidades en las que $\epsilon_0 = 1$. Este problema de autovalores puede considerarse como un caso particular de un universo homogéneo e isótropo, dominado por un fluido fantasma, en el que además consideramos un campo escalar sin masa, φ . En ese caso, la ecuación de Wheeler-De Witt, para un valor $N = a^3$, viene dada por

$$(a^2 \partial_{aa}^2 + a \partial_a + \tilde{\omega}_0^2 a^{2q} - \partial_{\varphi\varphi}^2) \phi(a, \varphi) = 0, \quad (2.3.28)$$

donde,

$$\phi(a, \varphi) = e^{\pm i n \varphi} \phi_n(a). \quad (2.3.29)$$

Si consideramos las condiciones de frontera de tuneleo cuántico, las soluciones de la Ec. (2.3.27) vendrán dadas por funciones de Hankel, $\mathcal{H}_\nu^{(2)}$ y $\mathcal{H}_\nu^{(1)}$, para las ramas en expansión y contracción del universo antes y después del big rip, respectivamente. Con la ayuda del campo auxiliar φ , podemos definir el siguiente producto escalar,

$$(\phi, \psi) \equiv -i \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi a (\phi \partial_a \psi^* - \psi^* \partial \phi). \quad (2.3.30)$$

Por analogía con una teoría cuántica de campos en un espacio curvo [37], podemos elegir los signos de la exponencial en (2.3.30) de manera que definimos los modos salientes del superespacio como,

$$u_n = \sqrt{\frac{\pi}{4q}} e^{\frac{\pi n}{2q}} e^{in\phi} \mathcal{H}_{\frac{in}{q}}^{(2)}(\tilde{\omega}_0 a^q), \quad (2.3.31)$$

cumpléndose las siguientes relaciones de ortogonalidad,

$$(u_n, u_m) = \delta_{nm}, \quad (u_n^*, u_m^*) = -\delta_{nm}, \quad (u_n, u_m^*) = 0, \quad (2.3.32)$$

y la función de ondas del universo puede escribirse como,

$$\phi(a, \varphi) = \sum_n b_n^I u_n(a, \varphi) + b_n^{II} u_n^*(a, \varphi), \quad (2.3.33)$$

donde, por ahora, b_n^I y b_n^{II} son dos amplitudes dadas por constantes complejas. Esta forma de la función de ondas es fácilmente reconocible por su desarrollo en función de los modos del campo y sus complejos conjugados. Los modos de frecuencia positiva corresponden a universos en expansión y los de frecuencia negativa a universos en contracción. El proceso de segunda cuantización, que será tratado en el capítulo siguiente, consistirá precisamente en pasar de la expresión (2.3.33) a su versión cuántica, convirtiendo las amplitudes b_n^I y b_n^{II} en operadores, es decir, $b_n^I \rightarrow \hat{b}_n$ y $b_n^{II} \rightarrow \hat{b}_n^\dagger$, siendo, \hat{b}_n^\dagger y \hat{b}_n , los operadores de creación y destrucción de universos (o de modos del universo).

Por ahora consideramos b_n^I y b_n^{II} como constantes en la función de ondas dada por la Ec. (2.3.33), para un universo dominado por un fluido de tipo fantasma en el que la singularidad del big rip divide el espacio-tiempo en dos regiones causalmente separadas. Si consideramos que clásicamente la singularidad debe ser eliminada por no ser físicamente admisible, entonces obtenemos dos regiones clásicamente independientes. Hay que puntualizar que en ese caso también estamos suponiendo que los agujeros de gusano que se forman en las inmediaciones del big rip sólo conectan partes de la misma región del espacio-tiempo, es decir, nacen y mueren en la región I o en la II , respectivamente. De este modo, podemos no tenerlos en cuenta en el análisis que vamos a hacer a continuación.

Consideremos además el multiverso fantasma que resulta de la discretización del parámetro de la ecuación de estado, w , dada por la Ec. (2.2.8) [87],

$$w_j = -1 - \frac{1}{3j}, \quad j = 1, 2, \dots \infty.$$

Cada uno de los valores de j puede interpretarse como describiendo cada una de las distintas realizaciones del universo en este multiverso fantasma. En tal caso, si consideramos dos de estos universos, j y k , el estado cuántico del multiverso viene dado por,

$$\phi = b_{j,n}^I b_{k,m}^I u_{j,n}^I u_{k,m}^I + b_{j,n}^{II} b_{k,m}^{II} u_{j,n}^{II} u_{k,m}^{II}, \quad (2.3.34)$$

donde u^I y u^{II} representan universos semiclásicos en expansión y contracción, antes y después del big rip, respectivamente. Todos ellos cumplen el criterio de Hartle, dado por las Ecs. (2.1.14) y (2.3.10), y de este modo las distintas evoluciones de sus correspondientes factores de escala están correlacionadas entre sí. Por tanto, teniendo en cuenta las relaciones de ortogonalidad dadas por las ecuaciones (2.3.32), no pueden aparecer términos del tipo $u_{j,n}^I u_{k,m}^{II}$, y por tanto el estado cuántico del multiverso debe ser necesariamente un estado entrelazado, dado por (2.3.34). Este razonamiento puede generalizarse fácilmente al número infinito de universos en el multiverso fantasma, definido por la discretización w_j . En ese caso, conociendo el estado de una de las ramas de dicho multiverso conoceríamos inmediatamente el estado de todas las demás ramas del mismo. Esto se puede interpretar como una extensión del argumento EPR en cosmología. Dicho argumento está asociado usualmente a los efectos no-locales de la teoría cuántica. Sin embargo, entre los universos del multiverso fantasma no existe espacio-tiempo, por lo que carece de sentido en este caso hablar de localidad o no-localidad, siempre que por estos términos nos refiramos a distancias, bien de tipo tiempo bien de tipo espacio, definidos en un espacio-tiempo común. Más bien, en el caso del multiverso, este fenómeno de entrelazamiento está relacionado con la independencia o interdependencia cuántica de los estados del multiverso.

Señalaremos finalmente que las condiciones de frontera pueden tener consecuencias apreciables en el modelo considerado en esta sección. Si hubiésemos aplicado las condiciones de frontera de 'no-frontera', los modos de la función de ondas del universo vendrían dados por funciones de Bessel de primera clase, $\mathcal{J}_{in}(\tilde{\omega}_0 a^q)$. Las dos condiciones de frontera, de "no-frontera" y de "tuneleo cuántico"²³ corresponden a modos distintos de la función de ondas que, en un escenario de segunda cuantización, darán lugar a distintos estados no equivalentes a lo que sería el estado de "la nada", de igual manera que los modos análogos representan estados no equivalentes del vacío, $|0\rangle$, en una teoría cuántica de campos²³. Los modos correspondientes a una y otra condición de frontera estarían, en ese caso, relacionados por coeficientes de Bogoliugov. En una teoría cuántica de campos se plantea la cuestión de cuál de ellos puede representar un estado "en algún sentido privilegiado" (cfr. Ref. [37], p. 126). En el caso del multiverso, especialmente cuando tratemos en el capítulo siguiente el estado cuántico del vacío gravitatorio a través de lo que se llaman "universos bebé", podremos hacernos una pregunta análoga.

²³Ver, por ejemplo, los modos de un campo escalar que resultan en un universo de Milne, descritos en la Ref. [37], pp. 124-129.

[...] hemos descubierto que el estudio de las partículas está muy relacionado con el del Universo concebido como un todo. Lo grande sigue, en la práctica, el mismo conjunto de reglas de lo pequeño.

Sheldon L. Glashow, en "Cara a cara con la vida, la mente y el universo".

Capítulo 3

El estado cuántico del multiverso

3.1. Introducción al multiverso cuántico

Como hemos visto en el capítulo anterior, la función de ondas del universo determina su estado cuántico, o al menos el de una región del mismo que admita la foliación del espacio-tiempo en espacio y tiempo. Clásicamente, parece consistente pensar en un espacio-tiempo con una topología dada ya que los cambios de topología están normalmente asociados con singularidades y con curvas temporales cerradas [40]. Sin embargo, desde el punto de vista cuántico, es necesario describir espacios-tiempos más generales con diferentes topologías. De hecho, en el espacio Euclídeo, que como hemos visto en el capítulo anterior está asociado a regímenes puramente cuánticos, deben considerarse también otras topologías [25; 94].

Los cambios topológicos fueron sugeridos por primera vez en el contexto de la radiación emitida por un agujero negro y en el del vacío gravitatorio. En el primer caso, Hawking [95] recurrió a agujeros de gusano Euclídeos para explicar la conservación de la energía en el proceso de evaporación de un agujero negro, en el que las antipartículas absorbidas por el mismo no se perdían en el proceso de evaporación sino que viajaban a través del agujero de gusano saliendo en otro agujero negro hecho de antimateria. En el segundo caso, Wheeler ya demostró [42] de forma heurística que a la escala de Planck las fluctuaciones cuánticas del espacio-tiempo son del orden de la propia métrica clásica, lo que hace que debamos considerar la contribución de diferentes regiones inconexas del espacio-tiempo, del orden de la longitud de Planck, que pueden venir descritas por diferentes geometrías (ver también, Refs. [25; 94–96]).

Por tanto, desde el punto de vista cuántico, es necesario describir los cambios topológicos. En la formulación de la integral de camino, esto se hace explícitamente calculando la función de ondas como una suma de las funciones de ondas correspon-

dientes a cada una de las diferentes topologías (ver, Ec. (2.1.10)). En la formulación Hamiltoniana no es evidente como describir los cambios topológicos y hay que recurrir a un proceso de segunda cuantización análogo al procedimiento de segunda cuantización utilizado frecuentemente en una teoría cuántica de campos. En ésta, el resultado es una formulación en la que hay que considerar un sistema formado por un conjunto de partículas en el que éstas se crean y se destruyen. Análogamente, en el caso de la función de ondas del universo, el resultado será una formulación del multiverso en la que se contempla también la creación y destrucción de universos, entendidos éstos como regiones inconexas del espacio-tiempo.

No obstante, como ya dijimos en el Cap. 1, el contexto del multiverso es mucho más general que el exclusivamente adscrito a la teoría cuántica (ver, Ref. [65]). Aún así, la idea del multiverso suscita aún cierto escepticismo entre parte de la comunidad científica. Las críticas al concepto del multiverso pueden referirse a dos aspectos del mismo:

i) Por un lado, el concepto de universo ha sido generalmente asociado de forma implícita a la idea de "el todo". En ese sentido, el problema del multiverso puede considerarse de naturaleza semántica y radica en especificar concretamente qué entendemos por un sólo universo, para posteriormente considerar la posibilidad de existencia de múltiples universos. Por ejemplo, en el multiverso inflacionario [21], podemos considerar un espacio geoméricamente plano, y por tanto espacialmente infinito, pero que debido al efecto de una constante cosmológica aparece, para un observador dado, un horizonte de eventos más allá del cual no puede transmitir información clásica alguna. En ese caso, podemos considerar que cada una de las regiones causalmente inconexas del espacio-tiempo representa un universo aislado, y al conjunto de todas esas regiones un multiverso.

Otros tipos de multiverso como el de Everett, formado por todas las ramas cuánticas del universo, pueden suscitar un mayor recelo a la hora de adscribir una existencia *real* a cada una de estas ramas. No obstante, es importante señalar que un escepticismo análogo ha recorrido frecuentemente la historia de la cosmología. Como ejemplo, baste citar a Giordano Bruno en el s. XVI y su teoría de los muchos mundos [97], donde por el término "mundo" Bruno se refería a lo que hoy entendemos como sistemas solares, o el caso de los "universos isla" de Alexander von Humbolt en el s. XIX, quien se refería así a lo que por aquel entonces se denominaban *estrellas nebulosas*, algunas de las cuales hoy conocemos como galaxias¹.

¹El filósofo prusiano Immanuel Kant (1724-1804) interpretó estas estrellas nebulosas como sistemas de estrellas que, en el s.XVIII, bien podían considerarse "mundos" independientes. Además, sostuvo

Es necesario precisar que las distintas ramas cuánticas del universo también pueden considerarse simplemente como la representación matemática de un único universo físico, y por tanto el multiverso cuántico se relacionaría *sólo* con una cuestión de representación matemática. En este sentido, el propio Everett subrayó la diferencia que existe entre el concepto de *sistema físico* y el de los *estados del sistema*². Sin embargo, en esta memoria utilizaremos indistintamente los términos "universos" y "estados del universo" para designar un conjunto de universos.

ii) Por otro lado, el concepto de multiverso también puede ser criticado desde el punto de vista de lo que podríamos denominar "la metafísica del multiverso". Es decir, del hecho de si distintos universos, sea cual sea el significado particular del término universo en cada una de las teorías cosmológicas o algunos de sus efectos pueden o no ser observados desde nuestro propio universo. En este sentido debe destacarse que: *a)* para estudiar si tales efectos pueden ser observados es necesario precisamente considerar el contexto del multiverso, y *b)* aunque distintos universos puedan estar clásicamente separados, desde el punto de vista de la cosmología cuántica parece admisible considerar las posibles correlaciones que puedan darse entre ellos, y que puedan tener efectos observables.

Por ejemplo, la densidad de energía del vacío gravitatorio puede considerarse como el resultado de las distintas contribuciones de las regiones inconexas del espacio-tiempo de una escala de longitud del orden de la longitud de Planck, que virtualmente se desgajan del propio universo padre. Las condiciones de dicho vacío gravitatorio pueden inducir una pérdida de coherencia cuántica en los estados de los campos de materia que se propagan en el espacio-tiempo [35], siendo por tanto efectos en principio medibles. Por otro lado, la energía del vacío gravitatorio podría ser el resultado del entrelazamiento cuántico entre diferentes estados del universo y, por tanto, en este caso el multiverso podría tener también consecuencias observables en la expansión de cada uno de sus universos.

Precisamente, para poder dar cabida a todas estas cuestiones debemos considerar el contexto del multiverso. Más concretamente, en este capítulo usaremos el multiverso formado por diferentes regiones inconexas del espacio-tiempo, y por tanto, clásicamente

la idea de la existencia de habitantes en los planetas que circundaran las estrellas de estas nebulosas. Posteriormente, en 1850, Alexander von Humbolt llamaría a estas nebulosas "universos isla" (ver, Ref. [98]).

²Refiriéndose al estado del observador, y por tanto también al estado del universo (ver la descripción de la interpretación de Everett desarrollada en el Cap. 1., Everett dice: "... sólo existe un sistema físico que representa al observador, aún así no existe un único estado del observador...", (cfr. Ref. [59], p. 459)

acausales, cada una de las cuales viene descrita cuánticamente por un oscilador. En los siguientes capítulos analizaremos las posibles correlaciones que puedan aparecer entre los distintos osciladores cuánticos.

3.1.1. Condiciones de frontera en el multiverso

El multiverso invalida el concepto de universo como sistema cerrado, y pasa a ser él mismo el sistema cerrado a considerar, en el sentido de que no existe reservorio fuera del multiverso. Esto obliga a una revisión de las condiciones de frontera de su función de ondas.

Por un lado, para cada universo particular se pueden seguir considerando las condiciones de frontera de Hawking y Vilenkin para la función de ondas de cada uno de los universos. La condición de Vilenkin cobra incluso mayor sentido en el contexto del multiverso, donde los procesos de tuneo cuántico deben considerarse de forma "natural". En el caso de la condición de frontera de "no-frontera", el estado de vacío del multiverso sigue también refiriéndose a un estado en el que no existe ni el espacio-tiempo ni la materia, y por tanto coincide con el concepto de "nada" que Hawking y Vilenkin utilizan al interpretar sus condiciones de frontera.

Por otro lado, el multiverso añade características propias. Por ejemplo, en el contexto del multiverso pueden considerarse las correlaciones cuánticas entre los distintos estados del universo o universos. También se pueden considerar, en principio, canales de comunicación cuántica asociados a los estados entrelazados del universo, e incluso canales "clásicos" a través de la formación de agujeros de gusano que podrían unir distintos universos. Pero, sobre todo, el multiverso nos obliga a describir un sistema físico en términos no-espacio-temporales, ya que entre universos no hay necesariamente un espacio-tiempo común. Parece entonces más apropiado tratar el conjunto de universos de forma análoga a como se estudian los sistemas de partículas, de forma estadística. En particular, trataremos de describir el estado del multiverso en términos análogos a una descripción termodinámica.

No obstante, hay que señalar importantes diferencias en esta analogía. Por ejemplo, el concepto de temperatura que está relacionado en termodinámica clásica con la velocidad de las partículas que forman un gas no puede aplicarse en el caso del multiverso. Más bien, la analogía de conceptos termodinámicos como temperatura o entropía deberá establecerse de forma más general con una teoría generalizada de la información cuántica, donde estas variables se calculen en función del estado cuántico del sistema sin, a priori, establecer una relación espacio-temporal en las propiedades de dicho estado cuántico.

Como resumen, podemos decir que el concepto de multiverso no sólo generaliza el de universo sino que, incluso, en algún sentido se puede considerar su *antítesis*, ya que invalida su principal característica de sistema cerrado sin reservorio externo. Además, las correlaciones entre universos podrían añadir una física, poco estudiada todavía, que permitiría quizá explicar la expansión acelerada de nuestro universo. Usando la terminología de los primeros filósofos griegos, se podría decir que de la lucha (*polemós*) entre la tesis y su antítesis, es decir, entre el concepto de universo y el de multiverso, podrá quizá surgir parte de la física que explique la expansión actual del universo.

No obstante, cada uno de los universos sigue siendo un sistema aislado en términos espacio-temporales, y esto hace necesario recurrir a un tipo de descripción no-espacio-temporal para el estado del multiverso. El contexto apropiado parece ser entonces su descripción termodinámica, considerada ésta dentro de una teoría general de la información cuántica [99–102], donde las correlaciones y los canales de comunicación cuánticos se describan de forma natural.

Para realizar esto, primero debemos obtener la función de ondas del multiverso y establecer después sus condiciones de frontera. Éstas pueden formularse de manera análoga a como se hacen para un sólo universo. Por ejemplo, en la Sec. 3.2.2 utilizaremos la condición de frontera de que el estado del multiverso sea tal que no existan universos para un valor nulo del factor de escala³. Pero, como hemos dicho, el multiverso añade características de tipo estadístico al conjunto de universos y, por tanto, su condición de frontera también podrá establecerse a partir de la conservación de alguna de sus propiedades termodinámicas como pueden ser: el análogo de la energía ($E_t = 0$), el análogo de la temperatura ($T_t = \text{cte}$), o el análogo de la entropía ($S_t = 0$)⁴.

³Es decir, que no exista ni el espacio-tiempo ni la materia en el estado *inicial* del multiverso. Este estado vendrá representado por el estado puro, $|0\rangle \equiv \prod_k |0_k\rangle$, siendo k los distintos modos del estado del universo.

⁴Por ejemplo, como se verá en el Cap. 6, podemos imponer que el estado del multiverso venga dado por estados puros entrelazados de pares de universos. En ese caso, la entropía total del multiverso es nula y el estado del multiverso es estable (es decir, sin *flecha del tiempo* termodinámica). Sin embargo, la entropía para el estado de cada uno de los universos individuales, obtenida a través de la traza parcial, es distinta de cero y por tanto los universos y sus factores de escala pueden evolucionar debido a las correlaciones con su par, dentro del contexto del multiverso. Un razonamiento análogo se puede realizar con el análogo de la energía en el multiverso y en cada uno de los universos individuales entrelazados con su par.

3.2. Segunda cuantización

3.2.1. Universos unidimensionales

La idea básica de la segunda cuantización⁵ de la función de ondas del universo consiste esencialmente en tratar esta función de ondas como un campo, y formular el multiverso como una teoría cuántica de campos en el superespacio. Esto se puede hacer interpretando la ecuación de Wheeler-DeWitt como una ecuación de tipo Klein-Gordon, y entonces proceder como se hace usualmente en una teoría cuántica de campos. La principal diferencia es que en el caso del multiverso, el "campo" a cuantizar, es decir, la función de ondas de un universo particular, no depende del espacio ni del tiempo sino de la geometría del espacio-tiempo y de los campos de materia, así que lo primero que debemos hacer es identificar alguna de las variables del espacio de configuración con la variable tiempo que vamos a asumir en el proceso de cuantización.

No está nada claro que esto pueda hacerse en general en el superespacio [103], aunque sí puede hacerse en modelos más sencillos, por lo que describiremos el proceso general en este tipo de casos. En esta sección lo haremos para universos unidimensionales⁶ y en la siguiente para universos homogéneos e isotrópicos.

Consideremos por tanto un modelo de universos unidimensionales (1 dimensión temporal y 0 dimensiones espaciales). En ese caso, cada universo viene representado por un punto, y dado que vamos a permitir cambios topológicos, el multiverso estará descrito por un conjunto de puntos. Para cada universo unidimensional consideramos también campos de materia, que en este tipo de universos sólo dependerán obviamente de la variable temporal. La acción total para cada uno de estos universos viene dada por,

$$S = \int_{\tau_0}^{\tau_f} d\tau \left(\frac{1}{N} G_{\mu\nu} \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu - Nm^2 \right), \quad (3.2.1)$$

donde \dot{X}^μ , $\mu = 1, \dots, D$ representan D campos de materia, $G_{\mu\nu}$ es la supermétrica del superespacio y N es la función lapso. En la Ec. (3.2.1) hemos elegido por simplicidad un término constante para el potencial. Los momentos conjugados canónicos vienen dados por, $P_\mu = \frac{1}{N} G_{\mu\nu} \dot{X}^\nu$, y por tanto la densidad Hamiltoniana resulta ser,

$$\mathcal{H} = G^{\mu\nu} P_\mu P_\nu + m^2. \quad (3.2.2)$$

⁵En la literatura estándar [103] suele denominarse "tercera" cuantización, debido a que la función de ondas del universo depende de los campos de materia que, a su vez, pueden estar descritos en el formalismo usual de segunda cuantización en la teoría de partículas. Sin embargo, el nombre "tercera cuantización" puede dar lugar a confusión en el sentido de que formalmente este procedimiento es análogo al de segunda cuantización. Por este motivo, utilizaremos en esta memoria el nombre de "segunda cuantización".

⁶Seguiremos básicamente el procedimiento descrito en Ref. [103].

Primera Cuantización	Segunda Cuantización
Partícula	Universo
Vértice de interacción	Cambio de topología
Campo de materia/radiación	Función de ondas del universo
Espacio-tiempo	Superespacio
Laplaciano	Operador de Wheeler-De Witt
Vacío	Nada ('void')

Figura 3.1: Cuadro comparativo entre la segunda cuantización en partículas y en el universo [103].

Siguiendo el procedimiento canónico de cuantización, los momentos clásicos se transforman como, $\hat{P}_\mu \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial X^\mu}$, y la ligadura Hamiltoniana, $H = 0$ (con, $H \equiv N\mathcal{H}$), se convierte en una ecuación diferencial, $\hat{H}\phi = 0$, que es la ecuación de Wheeler-DeWitt en el modelo que estamos considerando. En ese caso, la función de ondas $\phi \equiv \phi(X^\mu)$, representa cuánticamente un universo unidimensional en un esquema de primera cuantización, como el utilizado en el Cap. 2.

Para cuantizar nuevamente esta teoría, partimos primero de la acción cuyo principio variacional da como resultado la ecuación de Wheeler-DeWitt. Esta acción estará dada por

$$\begin{aligned}
{}^2S &= \frac{1}{2} \int d^D X \sqrt{-G} \phi H \phi \\
&= \frac{1}{2} \int d^D X \sqrt{-G} (G^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + m^2 \phi^2), \tag{3.2.3}
\end{aligned}$$

donde $G \equiv \det G_{\mu\nu}$. Puede comprobarse que la variación de la acción (3.2.3) con respecto a ϕ da como resultado la ecuación de Wheeler-De Witt y, por tanto, toda la información de la primera cuantización del universo también está incluida en la acción (3.2.3) y en el formalismo de segunda cuantización [103].

Una vez establecida la acción para la formulación de la segunda cuantización, podemos aplicar el formalismo usual de la teoría de partículas pero para un sistema de universos. Por ejemplo, la función de Green Euclídea a tres puntos puede definirse en

el multiverso como [103],

$$G_E(X_1^\mu, X_2^\mu, X_3^\mu) = -\lambda \int d^D X_0^\mu \sqrt{G} G_E(X_1^\mu, X_0^\mu) G_E(X_2^\mu, X_0^\mu) G_E(X_3^\mu, X_0^\mu), \quad (3.2.4)$$

donde λ es una constante de acoplo y $G_E(X_i^\mu, X_0^\mu)$ es la función de Green Euclídea a dos puntos, es decir,

$$G_E(X_i^\mu, X_f^\mu) = \int \mathcal{D}\phi \phi(X_i^\mu) \phi(X_f^\mu) e^{-S_E[\phi]}, \quad (3.2.5)$$

siendo $S_E[\phi]$ la versión Euclídea de la acción (3.2.3) para este esquema de interacción,

$$S_E = \frac{1}{2} \int d^D X^\mu \sqrt{G} \left(G^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{3} \phi^3 \right). \quad (3.2.6)$$

De este modo, el formalismo de segunda cuantización permite describir un sistema de universos interactuantes. Por ejemplo, el propagador dado por la Ec.(3.2.4) representaría la bifurcación de un universo en dos (ver, Fig. 3.2).

También podemos definir una función de ondas para el multiverso, $\Psi[\phi(X^i), X^0]$, donde X^0 es el campo que tomamos como variable tiempo y, $i = 1, \dots, D - 1$. Esta función de ondas viene dada por las soluciones de la ecuación de Schrödinger (en segunda cuantización),

$$H|\Psi\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial X^0} |\Psi\rangle, \quad (3.2.7)$$

donde H es el Hamiltoniano en segunda cuantización (no confundir con el Hamiltoniano de la primera cuantización dado por la Ec. (3.2.2)). En segunda cuantización, el Hamiltoniano se construye a partir de la acción (3.2.3), a partir de la cual definimos los momentos conjugados a la función de ondas de un solo universo⁷,

$$P_\phi \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\phi}} = \sqrt{-G} G^{0\nu} \nabla_\nu \phi, \quad (3.2.8)$$

donde, $\dot{\phi} \equiv \frac{\partial \phi}{\partial X^0}$ (o, de forma covariante, $P_\phi^\mu \equiv \frac{\delta^3 \mathcal{L}}{\delta \nabla_\mu \phi} = \sqrt{-G} G^{\mu\nu} \nabla_\nu \phi$). La función de ondas del multiverso dada por la Ec. (3.2.7) puede interpretarse de la siguiente manera: sea, $\{|N\rangle\}_{N=1,2,\dots}$, una base ortonormal de estados número, entonces

$$|\Psi\rangle = \sum_N \Psi(X^0) |N\rangle, \quad (3.2.9)$$

con $\Psi(X^0) \equiv \Psi(X^0, \phi(X^i))$, puede interpretarse como amplitud de probabilidad de N universos para el valor de la variable *tiempo* X^0 , o la probabilidad de N universos con un valor del campo X^0 [103].

⁷Hay que recordar que en la segunda cuantización la variable de configuración es la función de ondas de la primera cuantización, es decir, la función de ondas de un sólo universo.

Este formalismo de segunda cuantización para universos unidimensionales puede adaptarse a algunos casos más realistas que pueden describir nuestro propio universo [103]. Desde ese punto de vista, nuestro universo sería simplemente un universo más de entre todos los posibles tipos de universos dentro del multiverso. No obstante, en alguna aproximación debemos recuperar la descripción de un sólo universo que represente nuestro propio universo. Éste consiste en una región del espacio-tiempo del orden de la longitud de Hubble. Este tipo de universos se denominan "universos padre" [103]. Por otro lado, dentro de uno de estos universos padre también podemos considerar las fluctuaciones cuánticas de su métrica, cuyas contribuciones a la función de ondas se hacen, a la escala de Planck, del orden de la propia métrica clásica [42; 96]. Estas pequeñas regiones del tamaño de la escala de Planck pueden desgajarse virtualmente del espacio-tiempo padre, y se las denomina "universos bebé" [103].

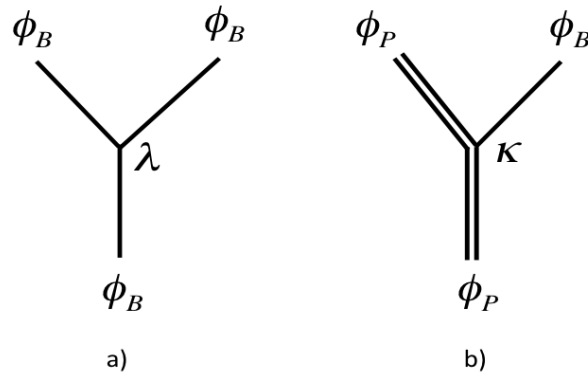


Figura 3.2: Las líneas dobles y simples representan los propagadores para universos padres y bebés, respectivamente: a) la bifurcación de un universo bebé; b) la nucleación de un universo bebé en el espacio-tiempo de un universo padre.

Las fluctuaciones cuánticas del vacío gravitatorio pueden tener consecuencias en el universo padre. Por ejemplo, estas fluctuaciones pueden considerarse como la fuente de la energía del vacío gravitatorio, representado de forma efectiva por una constante cosmológica Λ . En ese caso, debemos considerar que el universo padre se propaga en un plasma de universos bebés (ver, Fig. 3.3). En el esquema de segunda cuantización, esto se describe de la siguiente manera: sean, ϕ_p and ϕ_b , las funciones de onda de un universo padre y uno bebé, respectivamente. La acción para cada universo viene dada por la Ec. (3.2.1), con masas m_p y m_b , respectivamente. Además, consideramos que la diferencia de escala entre las masas de un universo padre y la de los universos bebés es

muy grande, es decir, $m_p \gg m_b$, y por tanto, las posibles transiciones de un universo bebé a un universo padre están suprimidas exponencialmente. Sin embargo, también pueden plantearse diagramas de Feynman como el representado en la Fig. 3.2. En ese caso, la acción que representa a un universo padre propagándose en un plasma de universos bebés vendría dada por,

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int dX \left(-(\nabla\phi_p)^2 + m_p^2\phi_p^2 - (\nabla\phi_b)^2 + m_b^2\phi_b^2 + \kappa\phi_p^2\phi_b + \frac{\lambda}{3}\phi_b^3 \right). \quad (3.2.10)$$

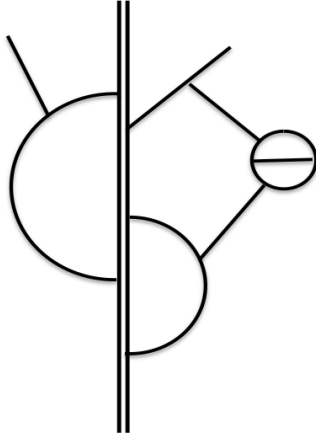


Figura 3.3: Diagrama esquemático de un universo padre propagándose en un plasma de universos bebé.

Por supuesto, los universos bebé, es decir, las fluctuaciones cuánticas de la métrica del espacio-tiempo, no son observables directamente en el universo padre, pero sí sus efectos, y resulta más apropiado considerar una acción híbrida [103] en la que consideramos la función de ondas del universo padre, ϕ_p , en el esquema de primera cuantización, mientras que representamos los universos bebés como operadores, $\hat{\phi}_b$, en el formalismo de segunda cuantización. En ese caso, podemos considerar los universos bebés como diminutas partículas (de "espacio-tiempo") del tamaño de la longitud de Planck, que virtualmente se crean y destruyen continuamente en el espacio-tiempo del universo padre. El resultado efectivo en la acción del universo padre es un término de potencial que tiene en cuenta los efectos de dicho plasma de universos bebé. Podemos considerar que la acción efectiva de la interacción es de la forma [103],

$$S_I = \int d\tau \mathcal{N} \sum_i \mathcal{L}_i(\tau, \vec{x}) \phi_b^i, \quad (3.2.11)$$

donde el índice i etiqueta los diferentes modos de universos bebés que pueden considerarse, es decir, las diferentes especies de universos bebés presentes en la espuma

espacio-temporal, y $\mathcal{L}_i(\tau, \vec{x})$ es el operador de inserción que indica el punto efectivo de nucleación del universo bebé en el espacio-tiempo del universo padre.

3.2.2. Universos homogéneos e isótropos

Consideremos ahora el formalismo de segunda cuantización para un modelo más realista de universo, y tomemos el caso de un espacio-tiempo homogéneo e isótropo con un campo escalar que represente la materia, $\varphi \equiv \varphi(t)$. En ese caso, la acción en primera cuantización puede escribirse como [40],

$$S = \int dt \left[\frac{1}{2N} \mathcal{G}_{AB}(q) \dot{q}^A \dot{q}^B - N \mathcal{U}(q) \right], \quad (3.2.12)$$

donde, N es nuevamente la función lapso, y $q^A = \{a, \varphi\}$, siendo $a \equiv a(t)$ el factor de escala. La minisupermétrica está dada entonces por [40],

$$\mathcal{G}_{AB}(a) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sigma^2} a & 0 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}, \quad (3.2.13)$$

con, $\sigma^2 = 4\pi G$, siendo G la constante gravitatoria de Newton. El término de potencial en (3.2.12) es [40],

$$\mathcal{U}(q) = -\frac{1}{2\sigma^2} \kappa a + \frac{1}{2\sigma^2} \Lambda a^3 + a^3 V(\varphi), \quad (3.2.14)$$

donde, $\kappa = -1, 0, 1$, corresponde a una sección espacial hiperbólica, plana o cerrada, respectivamente, Λ es la constante cosmológica y $V(\varphi)$ es el potencial correspondiente al campo escalar, φ . En este caso, resulta evidente a partir de la signatura de la minisupermétrica (3.2.13), que podemos utilizar el factor de escala como variable temporal. Por tanto, podemos aplicar el procedimiento de segunda cuantización de forma análoga a como lo hemos hecho para el caso de universos unidimensionales. Los momentos canónicos y el Hamiltoniano, respectivamente, resultan ser

$$p_A \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_A} = \frac{1}{N} \mathcal{G}_{AB} \dot{q}^B, \quad (3.2.15)$$

$$H = N \left[\frac{1}{2} \mathcal{G}^{AB} p_{AP} p_{B} + \mathcal{U}(q) \right] = N \mathcal{H}. \quad (3.2.16)$$

Al igual que antes, la ligadura Hamiltoniana, $\frac{\delta H}{\delta N} = 0$, se convierte en $\hat{\mathcal{H}}\phi = 0$, donde $\phi \equiv \phi(a, \varphi)$ es la función de ondas de un sólo universo. La acción en segunda cuantización cuyo principio variacional da como resultado la ecuación de Wheeler-De Witt es,

$${}^2S = \frac{1}{2} \int da \left(\frac{1}{2} \mathcal{G}^{AB} \nabla_A \phi \nabla_B \phi + \mathcal{U} \phi^2 \right). \quad (3.2.17)$$

La ecuación de Wheeler-De Witt puede interpretarse entonces como una ecuación de ondas para el campo ϕ y, de este modo, podemos aplicar en el multiverso algunos de los desarrollos usados normalmente en una teoría cuántica de campos. Por ejemplo, utilizando el cambio de variable, $\alpha \equiv \ln a$, la ecuación de Wheeler-De Witt se puede escribir como [40],

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = \mathcal{J}(\alpha, \varphi)\phi. \quad (3.2.18)$$

Esta ecuación puede interpretarse como la ecuación de ondas para un campo de radiación *propagándose sobre la "nada"* (void) (ver, Fig. 3.1), donde el campo es ahora la función de ondas del universo, $\phi \equiv \phi(\alpha, \varphi)$. En la Ec. (3.2.18), el término fuente [104], $\mathcal{J}(\alpha, \varphi)$, toma la forma [40]

$$\mathcal{J}(\alpha, \varphi) = \frac{e^{4\alpha}}{\hbar^2} \left(\left(\frac{\Lambda}{3} + V(\varphi) \right) e^{2\alpha} - \kappa \right). \quad (3.2.19)$$

Ahora podemos expandir la función de ondas del multiverso en términos de los modos *libres*, es decir, los modos para los cuales $\mathcal{J} = 0$,

$$\phi(\alpha, \varphi) = \sum_k b_k e^{-i\omega_k \alpha + ik\varphi} + \text{c.c.}, \quad (3.2.20)$$

y el procedimiento de segunda cuantización consistirá entonces en convertir la función de ondas del universo en un operador, $\hat{\phi}$, a través de los operadores de creación y aniquilación del modo k , \hat{b}_k^\dagger y \hat{b}_k , definidos como

$$\hat{b}_k = \sqrt{\frac{\omega_k}{2\hbar}} \left(\hat{\phi} + \frac{i}{\omega_k} \hat{p}_\phi \right), \quad (3.2.21)$$

$$\hat{b}_k^\dagger = \sqrt{\frac{\omega_k}{2\hbar}} \left(\hat{\phi} - \frac{i}{\omega_k} \hat{p}_\phi \right), \quad (3.2.22)$$

Así, podemos interpretar formalmente el sistema descrito por la ecuación (3.2.18) como el campo de radiación emitida por una distribución de corriente clásica dada por \mathcal{J} . Siguiendo esta analogía, el Hamiltoniano que describe la interacción entre el campo ϕ y la corriente \mathcal{J} podrá escribirse como [104],

$$\mathcal{V}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi \mathcal{J}(\alpha, \varphi)\phi(\alpha, \varphi). \quad (3.2.23)$$

Por tanto, en la representación de interacción, el estado cuántico del multiverso evoluciona con el factor de escala hacia un estado coherente definido por,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} |\Psi_I(\alpha)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \int^\alpha \mathcal{V}(\alpha') d\alpha'} |\Psi_I(0)\rangle, \quad (3.2.24)$$

donde [104],

$$e^{-\frac{i}{\hbar} \int^\alpha \mathcal{V}(\alpha') d\alpha'} = \prod_k e^{\beta_k \hat{b}_k^\dagger - \beta_k^* \hat{b}_k}, \quad (3.2.25)$$

con

$$\beta_k(\alpha) = \int^\alpha d\alpha' \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi \mathcal{J}(\alpha, \varphi) e^{i\omega_k \alpha - ik\varphi}. \quad (3.2.26)$$

Tomemos ahora como condición de frontera para el estado inicial del multiverso que no exista ni espacio-tiempo ni materia cuando el factor de escala degenera, es decir, que no exista "nada". Esto es lo que Strominger llama el *vacío* (void) [103], $|0\rangle \equiv \prod_k |0_k\rangle$. En ese caso, el estado del multiverso descrito por la Ec. (3.2.18) se transforma, a medida que el factor de escala crece, en un estado coherente dado por,

$$|\Psi(\alpha)\rangle = \prod_k e^{\beta_k \hat{b}_k^\dagger - \beta_k^* \hat{b}_k} |0\rangle_k. \quad (3.2.27)$$

Este es un ejemplo de como podemos tratar formalmente la analogía entre la segunda cuantización del campo electromagnético y de la función de ondas del universo, al menos en el caso de universos homogéneos e isótropos. La expansión de la función de ondas en ondas planas dada por la Ec. (3.2.20) puede no ser siempre la más apropiada. Por ejemplo, el término dado por la Ec. (3.2.23) diverge para los potenciales usuales de tipo fantasma ($\propto e^{-\lambda\varphi}$). En ese caso, resulta más apropiado utilizar una descomposición de modos análoga a la que se utiliza en una teoría cuántica de campos en un espacio curvo, en vez de usar los modos libres de un espacio (minisuperespacio) plano, lo que veremos en el siguiente apartado.

Universo dominado por un fluido con un campo escalar sin masa

Un caso especialmente interesante es el que ya se ha comentado en el capítulo anterior (ver, Sec. 2.3.4), cuando la ecuación de Wheeler-De Witt se corresponde con la Ec. (2.3.27). En ese caso, los modos de la función de ondas del universo vienen dados en términos de funciones de Bessel. Dependiendo de las condiciones de frontera elegidas, podemos obtener dos conjuntos completos de modos ortogonales bajo el producto escalar definido por la Ec. (2.3.30). Si imponemos la condición de tuneo cuántico, los modos normalizados vendrán dados por las Ecs. (2.3.31) y (2.3.33), es decir,

$$\Phi(a, \varphi) = \sum_n b_n^I u_n(a, \varphi) + b_n^{II} u_n^*(a, \varphi),$$

con,

$$u_n = \sqrt{\frac{\pi}{4q}} e^{\frac{\pi n}{2q}} e^{in\varphi} \mathcal{H}_{\frac{in}{q}}^{(2)}(\tilde{\omega}_0 a^q).$$

Si, por otro lado, imponemos para cada uno de los universos la condición de frontera de "no-frontera", entonces los modos resultan,

$$\bar{u}_n = \left(\frac{2q}{\pi} \sinh \frac{n\pi}{q} \right)^{-\frac{1}{2}} e^{in\varphi} \mathcal{J}_{-\frac{in}{q}}(\tilde{\omega}_0 a^q). \quad (3.2.28)$$

Estos dos conjuntos de modos están relacionados por coeficientes de Bogoliugov, α_n y β_n , es decir,

$$\bar{u}_n = \alpha_n u_n + \beta_n u_n^*, \quad (3.2.29)$$

donde α_n y β_n resultan ser,

$$\alpha_n = e^{\frac{\pi n}{q}} \beta_n, \quad \beta_n = \left(\frac{e^{-\frac{\pi n}{q}}}{2 \sinh \frac{\pi n}{q}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.2.30)$$

Por tanto, si consideramos que estos modos describen el estado de un conjunto de universos bebés, los estados correspondientes al vacío gravitatorio son diferentes según se elija la condición de frontera de tuneleo cuántico, $|0_n\rangle$, o la de no-frontera, $|\bar{0}_n\rangle$, y se definen respectivamente mediante,

$$\hat{b}_n |0_n\rangle = 0, \quad \hat{\bar{b}}_n |\bar{0}_n\rangle = 0, \quad (3.2.31)$$

donde \hat{b}_n y $\hat{\bar{b}}_n$ son los operadores de aniquilación de universos para el modo n en cada una de las representaciones. El operador número, $\hat{N}_n \equiv \hat{b}_n^\dagger \hat{b}_n$, definido para los modos de la función de onda del universo con la condición de frontera de no-frontera, calculado para el vacío de los modos definidos por el tuneleo cuántico resulta ser,

$$\langle 0_n | \hat{N}_n | 0_n \rangle = |\beta_n|^2 = \frac{1}{e^{\frac{2\pi \varepsilon_0 n}{q}} - 1}, \quad (3.2.32)$$

que corresponde a una distribución térmica con una temperatura dada por,

$$T \equiv \frac{q}{2\pi}, \quad (3.2.33)$$

con $q = \frac{3}{2}(1-w)$. Si además consideramos el multiverso fantasma que aparece como consecuencia de la discretización del parámetro w en la ecuación de estado del fluido, w_j definido por la Ec. (2.2.8), obtenemos entonces una temperatura distinta en cada universo dada por,

$$T_j \equiv \frac{3}{2\pi} \left(1 + \frac{1}{6j} \right); \quad j = 1, 2, \dots, \infty. \quad (3.2.34)$$

Este caso es análogo al analizado en Ref. [37], para un universo de Milne, dentro del contexto de la teoría cuántica de campos en espacios curvos. Si seguimos la analogía, los modos \bar{u}_n corresponderían con los modos de frecuencia positiva respecto del vacío

conforme, $|\bar{0}_n\rangle$, mientras que los modos u_n corresponderían a los modos de frecuencia positiva con respecto al vacío adiabático, dado por $|0\rangle$. De cualquier manera, en el caso del multiverso no está claro en general cuál de los dos vacíos correspondería a un observador "inercial" (en el caso estudiado en Ref. [37], un observador inercial no detecta partículas en el vacío adiabático y sí por tanto en el vacío conforme), ya que el espacio de configuración sobre el que están definidos los modos no es en este caso el espacio-tiempo sino el superespacio.

3.3. La función de ondas del multiverso

3.3.1. Interpretación de la función de ondas

Consideremos ahora el multiverso cuántico formado por universos homogéneos e isotrópicos cuya evolución está dominada por un fluido perfecto con ecuación de estado, $p = w\rho$, con w constante, y siendo p y ρ la presión y la densidad de energía del fluido, respectivamente. Éstas vienen dadas por,

$$\rho = \frac{1}{2N^2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi), \quad (3.3.1)$$

$$p = \frac{1}{2N^2}\dot{\varphi}^2 - V(\varphi). \quad (3.3.2)$$

En ese caso, utilizando la ecuación de la conservación de la energía cósmica, Ec. (2.2.4), la ligadura Hamiltoniana dada por la Ec. (3.2.16) puede escribirse como,

$$H = p_a^2 - \frac{\Lambda}{3}a^4 + \kappa a^2 - \rho_0 a^{-3w+1} = 0, \quad (3.3.3)$$

que es en realidad la ecuación de Friedmann, con $p_a \equiv -\frac{3}{4\pi G}a\dot{a}$. Aplicando el procedimiento de cuantización canónica, $\hat{p}_a \rightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial a}$, $\hat{H}\phi = 0$, la ecuación de Wheeler-De Witt puede escribirse como,

$$\ddot{\phi} + \omega^2(a)\phi = 0, \quad (3.3.4)$$

donde, $\phi \equiv \phi(a)$, es la función de ondas del universo. La Ec. (3.3.4) puede interpretarse como la ecuación *clásica* de un oscilador armónico, con una frecuencia dependiente del tiempo, $\omega(a)$, dada por [105]

$$\omega(a) = \frac{1}{\hbar}\sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}a^4 - \kappa c^2 a^2 + \rho_0 a^{-3w+1}}. \quad (3.3.5)$$

La correspondiente acción en segunda cuantización, cuyo principio variacional da como resultado la ecuación de Wheeler-De Witt (3.3.4), es

$${}^2S = \frac{1}{2} \int da \left(\dot{\phi}^2 - \omega^2(a)\phi^2 \right), \quad (3.3.6)$$

que corresponde, como hemos dicho, a la acción de un oscilador armónico en el que el factor de escala $a(t)$ juega el papel de la variable tiempo.

En ese caso, el estado cuántico del multiverso puede obtenerse a partir de las soluciones de la siguiente ecuación de tipo Schrödinger,

$$H|\Psi\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial a}|\Psi\rangle, \quad (3.3.7)$$

donde

$$H = \frac{1}{2}p_\phi^2 + \frac{\omega^2(a)}{2}\phi^2, \quad (3.3.8)$$

y p_ϕ es el momento conjugado a la función de ondas del universo en primera cuantización, $\phi(a)$. La frecuencia $\omega(a)$ está dada por la Ec. (3.3.5). De forma análoga a como se hizo para el caso de universos unidimensionales, el significado de la función de ondas del multiverso formado por universos homogéneos e isótropos, $|\Psi\rangle$, dada por la solución de la ecuación de Schrödinger (3.3.7), es el siguiente [103]: supongamos que descomponemos $|\Psi\rangle$ en una base ortonormal, $\{|N\rangle\}_{N=0,1,\dots}$, para algún valor del factor de escala a_0 ; en ese caso

$$|\Psi\rangle = \sum_N \Psi_N(a_0)|N\rangle. \quad (3.3.9)$$

Entonces, $\Psi_N(a_0)$ es la amplitud de probabilidad para N universos con un valor del factor de escala a_0 .

La Ec. (3.3.7) es la ecuación de Schrödinger para un oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo. Este escenario ha sido ampliamente estudiados en el contexto usual de la mecánica cuántica [106–112], y podemos utilizar formalmente los mismos métodos para obtener en nuestro caso el estado cuántico del multiverso. En particular, usando el método de los invariantes desarrollado por Lewis and Riesenfeld [106], las soluciones de la ecuación (3.3.7) pueden expresarse en función de los autoestados de un operador auxiliar, I , que es invariante bajo la evolución del universo determinada por el Hamiltoniano H , es decir, es un operador invariante frente a cambios en el valor del factor de escala, con: $\frac{dI}{da} = i\hbar\frac{\partial I}{\partial a} - [H, I] = 0$. Esta condición implica que, $i\hbar\frac{\partial}{\partial a}I|\rangle = HI|\rangle$, siendo $|\rangle$ un vector de Schrödinger. Por tanto, la acción del operador invariante I sobre un vector de Schrödinger da como resultado otro vector de Schrödinger. Además, con unas fases apropiadas para los autovectores del operador I , podemos hacer que dichos autovectores sean también solución de la ecuación de Schrödinger (3.3.7), obteniendo por tanto una base ortonormal para el espacio de sus soluciones.

En el multiverso, supondremos la existencia de un operador hermítico I de la forma siguiente, $I = \frac{1}{2}[\alpha\phi^2 + \beta p_\phi^2 + \gamma\{\phi, p_\phi\}_+]$. En ese caso, los coeficientes α , β y γ , deben satisfacer una serie de ecuaciones para hacer que el operador I sea invariante bajo

cambios en el valor del factor de escala, con $\frac{dI}{da} = 0$. Resolviendo estas ecuaciones, se obtiene que [106], $I = \frac{1}{2}[(\frac{1}{R^2})\phi^2 + (Rp_\phi - \dot{R}\phi)^2]$, donde $R \equiv R(a)$ es una función que satisface la siguiente ecuación auxiliar [106],

$$\ddot{R} + \omega^2(a)R - \frac{1}{R^3} = 0. \quad (3.3.10)$$

Las soluciones de esta ecuación se pueden obtener en función de las soluciones de la ecuación de Wheeler-De Witt, $\ddot{\phi} + \omega^2(a)\phi = 0$. De hecho, sean $\phi_1(a)$ y $\phi_2(a)$ dos soluciones independientes de dicha ecuación, entonces

$$R(a) \equiv \sqrt{\phi_1^2(a) + \phi_2^2(a)}, \quad (3.3.11)$$

es solución de la Ec. (3.3.10). Para el caso de un universo plano, dominado por un fluido de quintaesencia o fantasma, estas soluciones vienen dadas por [105]

$$\phi_1(a) = \sqrt{\frac{\pi a}{2q}} \mathcal{J}_{\frac{1}{2q}}(\omega_0 a^q), \quad \phi_2(a) = \sqrt{\frac{\pi a}{2q}} \mathcal{Y}_{\frac{1}{2q}}(\omega_0 a^q), \quad (3.3.12)$$

donde $\mathcal{J}_n(x)$ y $\mathcal{Y}_n(x)$ son las funciones de Bessel de primera y segunda clase, respectivamente⁸. En ese caso, la transformación unitaria U_ω , dada por [107; 110]

$$U_\omega(\phi, a) = e^{-\frac{i}{2\hbar} \dot{R} \phi^2}, \quad (3.3.13)$$

transforma el Hamiltoniano del oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo (3.3.8) en el de un oscilador armónico con masa y frecuencia constantes, es decir,

$$H = U_\omega^\dagger H_0 U_\omega, \quad (3.3.14)$$

donde hemos introducido el siguiente cambio de variable $\psi \equiv \frac{\phi}{R}$ y $H_0 = \frac{1}{2}(p_\psi^2 + \psi^2)$ es el Hamiltoniano del oscilador armónico para $m = \omega = 1$. Por tanto, las amplitudes de probabilidad para el caso que estamos considerando, es decir, dependiente del factor de escala y dado por Ec. (3.3.9), pueden escribirse como

$$\Psi_N(a) \equiv \Psi_N(\phi, a) = \frac{1}{\sqrt{R(a)}} U_\omega^\dagger \Psi_N^0(\psi) \Big|_{\psi=\frac{\phi}{R}}, \quad (3.3.15)$$

donde $\frac{1}{\sqrt{R(a)}}$ es un factor de normalización, y $\Psi_N^0(\psi)$ son las autofunciones del oscilador armónico con frecuencia y masa constante, es decir, $H_0 \Psi_N^0 = \hbar(N + \frac{1}{2})\Psi_N^0$. Por tanto, la solución general de la ecuación de Schrödinger (3.3.7) se puede escribir como,

$$\Psi(\phi, a) = \sum_N C_N e^{i\alpha_N(a)} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi \hbar 2^N N! R}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2\hbar} (\dot{R} + \frac{i}{R^2}) \phi^2} H_N\left(\frac{\phi}{R\sqrt{\hbar}}\right) \quad (3.3.16)$$

⁸Hemos elegido estas funciones de Bessel para asegurar el carácter real de la función $R(a)$, y por tanto la unitariedad del operador U_ω en (3.3.13).

donde $H_N(x)$ es el polinomio de Hermite de orden N , y $\alpha_N \equiv \alpha_N(a)$ es una fase que viene dada por [106; 107],

$$\alpha_N(a) = -(N + \frac{1}{2}) \int_0^a \frac{da'}{R^2(a')}. \quad (3.3.17)$$

Hay que destacar que estas fases están bien definidas ya que los ceros de las funciones de Bessel, \mathcal{J}_n y \mathcal{Y}_n no coinciden, y por tanto la función $R(a)$ no se anula para ningún valor del factor de escala. Los autoestados número, $|N, a\rangle$, del operador I forman una base ortonormal del espacio de soluciones de la ecuación de Schrödinger, y por tanto las autofunciones $\Psi_N(\phi, a)$ en la Ec. (3.3.9), pueden interpretarse como las amplitudes de probabilidad para N universos con un valor del factor de escala a , para las cuales su función de ondas en primera cuantización viene dada por ϕ .

La frecuencia del oscilador armónico que representa el estado cuántico del multiverso, $\omega(a)$ contiene, además de la información de la primera cuantización, también la información correspondiente a la evolución clásica de cada uno de los universos, y por tanto determina el tipo de expansión que sufre cada uno de ellos (ver, Ec. (3.3.3), con $p_a = -\frac{3}{4\pi G}a\dot{a}$). Por ejemplo, consideremos el caso de un universo de De Sitter plano, que experimenta una evolución exponencial de su factor de escala. Las soluciones de la Ec. (3.3.3), con $\kappa = 0$ y $\rho_0 = 0$, vienen dadas por, $a(t) = a_0 e^{\pm\omega_0 t}$, donde $\omega_0 = \sqrt{\frac{c^2\Lambda}{3}}$. La rama positiva corresponde a la expansión exponencial del espacio de De Sitter plano, mientras que considerando también la rama negativa, o con $\kappa = 1$ en la Ec. (3.3.3), obtenemos la evolución para un espacio de De Sitter cerrado [113], es decir, $a(t) = a_0 \cosh \omega_0 t$. Además, respecto del tiempo conforme, $\eta = \int \frac{dt}{a(t)}$, el factor de escala resulta ser, $a(\eta) = \frac{a_0}{\cos \eta}$, que puede interpretarse como el que corresponde a la métrica bidimensional de un warp drive cósmico [114]. También podemos considerar un espacio-tiempo de anti-De Sitter, con $\Lambda < 0$. En este caso, obtenemos como solución para el factor de escala la solución, $a(t) = a_0 \cos \omega_0 t$, que en términos del tiempo conforme resulta ser, $a(\eta) = \frac{a_0}{\cosh \omega_0 \eta}$. Como último ejemplo, el universo bebé cerrado de Tolman-Hawking utilizado en la Ref. [114] corresponde a los valores, $\kappa = 1$, $\Lambda = 0$ y $\rho_0 = 0$, en la Ec. (3.3.3).

De este modo, a través de los diferentes valores de la frecuencia $\omega(a)$, pueden representarse distintos tipos de universos en el formalismo de segunda cuantización del multiverso. En tal caso, si consideramos el multiverso formado por las diferentes regiones inconexas del espacio-tiempo cuya evolución puede estar dominada por distintos tipos de fluidos, entonces el estado más general puede escribirse como una combinación lineal de productos de funciones del tipo de la Ec. (3.3.16), es decir,

$$\Psi_m = \Psi_{N_1}^{\omega_1}(\phi_1) \Psi_{N_2}^{\omega_2}(\phi_2) \cdots \Psi_{N_n}^{\omega_n}(\phi_n), \quad (3.3.18)$$

donde N_i es el número de universos del tipo i , que están representados por una función de onda (en primera cuantización) ϕ_i . La evolución clásica de cada universo está dominada por un fluido que viene determinado por el valor de la frecuencia $\omega_i(a)$.

Además, las funciones de onda obtenidas en la primera cuantización, ϕ , poseen un régimen semi-clásico bien definido, ya que todas ellas cumplen la condición de Hartle (ver, Ecs. (2.1.14) y (2.3.10)) y, de ese modo, el estado cuántico del multiverso dado por la Ec. (3.3.18) puede representar también un multiverso de espacios semiclásicos homogéneos e isótropos como el nuestro. También hay que destacar que, a diferencia de la función de ondas de la primera cuantización, en la que el estado del universo en general no puede definirse correctamente si existen singularidades cósmicas [115], el estado obtenido en la segunda cuantización dado por la Ec. (3.3.18) está bien definido, ya que no existen singularidades espacio-temporales en el multiverso cuántico.

Por tanto, como resumen, podemos concluir que la función de ondas dada por la Ec. (3.3.18) representa cuánticamente el estado más general de un multiverso formado por universos homogéneos e isótropos cuya evolución está dominada por un cierto fluido con ecuación de estado, $p = w\rho$. El tipo concreto de fluido viene determinado por tanto por el valor del parámetro w , y por la forma funcional de la frecuencia $\omega(a) \equiv \omega_0 a^{q-1}$, a través del parámetro $q \equiv \frac{3}{2}(1-w)$. De todos modos, distintas soluciones de la ecuación de Schrödinger para diferentes contenidos de materia en cada uno de los universos están relacionadas, como hemos visto, por transformaciones unitarias. En ese sentido, el estado del multiverso es invariante respecto del tipo particular de fluido considerado en cada uno de los universos, es decir, todos los estados corresponden al mismo rayo y se diferencian sólo en el valor de su fase.

Además, también pueden considerarse otros potenciales más generales así como geometrías cerradas o hipérbolicas. Las soluciones de la ecuación de Schrödinger, y por tanto la expresión analítica para la función $R(a)$, es en general más difícil de calcular. Sin embargo, el razonamiento utilizado anteriormente sigue siendo aplicable, independientemente de que estas soluciones puedan encontrarse de forma analítica o numérica. El hecho es que las soluciones que se obtienen para el oscilador armónico en esos casos están también relacionadas por transformaciones unitarias⁹ con los autoestados del oscilador armónico con masa y frecuencia constantes. Por tanto, puede decirse que el estado general del multiverso cuántico formado por universos homogéneos e isótropos, dominados por distintos tipos de fluidos y geometrías puede escribirse como,

$$|\tilde{\Psi}\rangle = \sum_{\vec{N}} C_{\vec{N}} |N_{1\omega_1} N_{2\omega_2} \dots\rangle, \quad (3.3.19)$$

⁹Siempre que dichas soluciones existan y sean reales, de manera que el operador U_ω siga siendo unitario.

donde $N_{i\omega_i}$ es el número de universos del tipo i que se corresponden con potenciales determinados a partir de las frecuencias $\omega_i(a)$.

Por otro lado, para un valor general de la función lapso, $N \equiv N(a)$, la ligadura Hamiltoniana, $H\phi = 0$ (con, $H = N\mathcal{H}$), se transforma en la siguiente ecuación de Wheeler-De Witt,

$$\frac{N}{a}\ddot{\phi}(a) + \omega_0^2 N a^{2q-3}\phi(a) = 0. \quad (3.3.20)$$

Realizando el cambio de variable, $u \equiv u(a)$, definido por, $du = \sqrt{\frac{a}{N}}da$, la Ec. (3.3.20) se puede escribir como la ecuación de un oscilador armónico amortiguado, dada por

$$\partial_{uu}^2\phi(u) + \frac{m'}{m}\partial_u\phi(u) + \omega^2(u)\phi(u) = 0, \quad (3.3.21)$$

con $m' \equiv \partial_u m$, y

$$\omega^2(u) = (\omega_0^2 N a^{2q-3})_{|a=u(u)}, \quad (3.3.22)$$

$$m(u) = \left(\sqrt{\frac{a}{N}}\right)_{|a=u(u)}. \quad (3.3.23)$$

La función lapso entra por tanto en el término de masa de la ecuación del oscilador que representa el estado cuántico del multiverso. Este estado corresponde al de un oscilador armónico amortiguado con masa y frecuencia dependientes del factor de escala, con un Hamiltoniano dado por

$$H = \frac{1}{2m}p_\phi^2 + \frac{m\omega^2}{2}\phi^2. \quad (3.3.24)$$

El Hamiltoniano (3.3.24) genera la ecuación de Wheeler-DeWitt (3.3.21) a través de las ecuaciones de Heisenberg, $\phi' = i[H, \phi]$ y $p'_\phi = i[H, p_\phi]$, donde $x' \equiv \frac{\partial x}{\partial u}$. No obstante, mediante la siguiente transformación canónica

$$\xi = \sqrt{m}\phi, \quad (3.3.25)$$

$$p_\xi = \frac{1}{\sqrt{m}}\left(p_\phi - \frac{m'}{2}\phi\right), \quad (3.3.26)$$

el Hamiltoniano (3.3.24) se transforma como,

$$\tilde{H} = \frac{1}{2}p_\xi^2 + \frac{\Omega^2(u)}{2}\xi^2, \quad (3.3.27)$$

y recuperamos el Hamiltoniano de un oscilador armónico con masa $m = 1$, dado por la Ec. (3.3.8), con un nuevo valor de la frecuencia dado por [108],

$$\Omega^2(u) = \omega^2(u) - \left(\frac{\gamma^2(u)}{4} + \frac{\gamma'(u)}{2}\right), \quad (3.3.28)$$

siendo, $\gamma(u) \equiv \frac{d}{du} \ln m(u)$, y, $\gamma' \equiv \frac{d\gamma}{du}$. Para el tiempo conforme, $N = a$ en las Ecs. (3.3.22) y (3.3.23), $\gamma = 0$, y por tanto recuperamos los resultados anteriores, con $m = 1$ y $\Omega(a) = \omega(a) = \omega_0 a^{q-1}$.

De este modo, los estados del oscilador armónico con diferentes masas y frecuencias dependientes del tiempo están finalmente relacionados con los estados del oscilador armónico para una masa y frecuencia constantes a través de transformaciones unitarias. Por tanto, el estado del multiverso también es invariante respecto del valor elegido de la función lapso, es decir, es invariante bajo las reparametrizaciones temporales realizadas en cada uno de los universos, como era de esperar.

3.3.2. Operadores de creación y destrucción de universos

El operador invariante I , utilizado en la sección anterior, puede escribirse en función de los siguientes operadores de creación y aniquilación,

$$b(a) = \sqrt{\frac{1}{2\hbar}} \left(\frac{\phi}{R} + i(Rp_\phi - \dot{R}\phi) \right), \quad (3.3.29)$$

$$b^\dagger(a) = \sqrt{\frac{1}{2\hbar}} \left(\frac{\phi}{R} - i(Rp_\phi - \dot{R}\phi) \right), \quad (3.3.30)$$

o en el caso de que consideramos un oscilador armónico con un término de masa dependiente del factor de escala,

$$b(a) = \sqrt{\frac{1}{2\hbar}} \left(\frac{\sqrt{m}}{R} \phi + i \left(\frac{R}{\sqrt{m}} p_\phi - \partial_a (R\sqrt{m}) \phi \right) \right), \quad (3.3.31)$$

$$b^\dagger(a) = \sqrt{\frac{1}{2\hbar}} \left(\frac{\sqrt{m}}{R} \phi - i \left(\frac{R}{\sqrt{m}} p_\phi - \partial_a (R\sqrt{m}) \phi \right) \right), \quad (3.3.32)$$

con $m \equiv \sqrt{\frac{a}{N}}$, y $R \equiv R(a)$ dado por la Ec. (3.3.11). En ese caso, resulta $I = \hbar(b^\dagger b + \frac{1}{2})$. Los operadores definidos por las Ecs. (3.3.29) y (3.3.30), aplicados sobre los autoestados del operador I , $|N, a\rangle$, cumplen las relaciones usuales

$$b(a)|N, a\rangle = \sqrt{N}|N-1, a\rangle, \quad (3.3.33)$$

$$b^\dagger(a)|N, a\rangle = \sqrt{N+1}|N+1, a\rangle, \quad (3.3.34)$$

$$b^\dagger(a)b(a)|N, a\rangle = N|N, a\rangle, \quad (3.3.35)$$

con, $I|N, a\rangle = \hbar(N + \frac{1}{2})|N, a\rangle$. Por tanto, los autovalores del operador I son invariantes bajo transformaciones del factor de escala. Es decir, si el estado $|N, a\rangle$ representa el estado cuántico del multiverso, entonces el número de universos en el multiverso, N , permanece constante a lo largo de la evolución del factor de escala.

Como hemos dicho, los autoestados del Hamiltoniano de un oscilador armónico con una frecuencia dependiente del factor de escala están relacionados por una transformación unitaria con los correspondientes estados del caso estático, $m = \omega = 1$. De igual manera, los operadores de creación y destrucción (3.3.29) y (3.3.30) están también relacionados con los operadores, $b_0^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\phi - ip_\phi)$ y $b_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\phi + ip_\phi)$, a través de la siguiente relación,

$$b(a) = \mu_0 b_0 + \nu b_0^\dagger, \quad (3.3.36)$$

$$b^\dagger(a) = \mu_0^* b_0^\dagger + \nu^* b_0, \quad (3.3.37)$$

donde,

$$\mu_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} + R - i\dot{R} \right), \quad (3.3.38)$$

$$\nu_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} - R - i\dot{R} \right), \quad (3.3.39)$$

con, $|\mu_0|^2 - |\nu_0|^2 = 1$, es decir, están relacionados por una transformación de "aplastamiento". En general, todas las transformaciones que relacionan los operadores de creación y destrucción de los modos de un oscilador armónico con valores generales de la masa y la frecuencia vienen dadas por transformaciones de este tipo. Las transformaciones de aplastamiento son transformaciones unitarias y por tanto los autoestados de diferentes osciladores armónicos están relacionados unitariamente. Consideremos el caso más general en el que los operadores de creación y destrucción vengan dados por las Ecs. (3.3.31) y (3.3.32), para dos valores distintos de la masa y de la frecuencia, es decir, con $m_1(a)$, $m_2(a)$, $\omega_1(a)$ y $\omega_2(a)$, y por tanto con, $R_1(a)$ y $R_2(a)$. En ese caso, se puede comprobar que

$$b_2(a) = \mu b_1 + \nu b_1^\dagger, \quad (3.3.40)$$

$$b_2^\dagger(a) = \mu^* b_1^\dagger + \nu^* b_1, \quad (3.3.41)$$

donde,

$$\mu = \frac{1}{2} (f_+(a) + ig(a)), \quad (3.3.42)$$

$$\nu = \frac{1}{2} (f_-(a) + ig(a)), \quad (3.3.43)$$

con,

$$f_\pm(a) = \frac{R_1 \sqrt{m_2}}{R_2 \sqrt{m_1}} \pm \frac{R_2 \sqrt{m_1}}{R_1 \sqrt{m_2}}, \quad (3.3.44)$$

$$g(a) = \frac{R_2}{\sqrt{m_2}} \partial_a (R_1 \sqrt{m_1}) - \frac{R_1}{\sqrt{m_1}} \partial_a (R_2 \sqrt{m_2}), \quad (3.3.45)$$

cumpléndose que, $|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1$, es decir, como hemos dicho, los operadores b_1, b_1^\dagger y b_2, b_2^\dagger se relacionan mediante una transformación de aplastamiento.

Los autoestados del operador I forman una base ortonormal del espacio de soluciones de la ecuación de Schrödinger con la que se describe el estado cuántico del multiverso. Los autovalores de dichos estados son invariantes frente a reparametrizaciones del factor de escala, y por tanto pueden considerarse como representaciones del número de universos del multiverso. De este modo, los operadores (3.3.29) y (3.3.30) pueden interpretarse como los operadores de creación y aniquilación de los universos que constituyen el multiverso.

No obstante, los autoestados del operador invariante $I, |N, a\rangle$, no son autoestados del Hamiltoniano dado por la Ec. (3.3.8) (excepto en el caso $w = \frac{1}{3}$) y, por tanto, no son soluciones estacionarias del estado cuántico del multiverso. De hecho, en términos de los operadores de creación y destrucción de universos (3.3.29) y (3.3.30), el Hamiltoniano (3.3.8) resulta ser [105]:

$$H = \hbar \left[\beta_- b^2 + \beta_+ b^{\dagger 2} + \beta_0 \left(b^\dagger b + \frac{1}{2} \right) \right], \quad (3.3.46)$$

donde

$$\beta_+^* = \beta_- = \frac{1}{4} \left\{ \left(\dot{R} - \frac{i}{R} \right)^2 + \omega^2 R^2 \right\}, \quad (3.3.47)$$

$$\beta_0 = \frac{1}{2} \left(\dot{R}^2 + \frac{1}{R^2} + \omega^2 R^2 \right). \quad (3.3.48)$$

Los términos cuadráticos en b^\dagger y b en el Hamiltoniano (3.3.46) hacen que el estado cuántico del multiverso se transforme a lo largo de su evolución en un estado aplastado [69; 91]. Como veremos en el capítulo siguiente, el efecto de aplastamiento es más severo para los estados de un multiverso que esté formado por universos cuya expansión sea de tipo acelerado [91]. Esto podría estar relacionado con la naturaleza cuántica de los universos que forman este multiverso [91; 114], en el sentido de que los estados aplastados son considerados usualmente como estados cuánticos sin análogo clásico [57; 69].

Este efecto de aplastamiento se hace nulo para multiversos formados por universos dominados por radiación, es decir, para un valor $w = \frac{1}{3}$. En ese caso, el estado del multiverso evoluciona hacia un estado coherente convencional. Los estados coherentes son normalmente considerados como los estados más clásicos posibles, lo que también puede hacerse en el multiverso, ya que para el valor $w = \frac{1}{3}$ la función de ondas de un sólo universo se convierte en una onda plana cuyo argumento es la acción clásica, es decir, $\phi_{rad}(a) = e^{\pm \frac{i}{\hbar} S_c(a)}$, con $S_c(a) = \omega_0 a$. En tal caso, se satisfacen tanto la ecuación

de Hamilton-Jacobi como la ecuación clásica del movimiento para el factor de escala (ver, Ref. [116]), y la distribución de momentos se convierte en una delta centrada en el momento clásico [116]; esto es, $\phi_{rad}(p) = \delta(p - p_c)$, siendo $p_c = \omega_0$ el momento clásico. En ese sentido, ϕ_{rad} representa un universo clásico y los estados coherentes pueden asociarse con un multiverso compuesto de universos clásicos (ver, Refs. [90; 91]).

Por último, cabe destacar que en óptica cuántica los estados aplastados se denominan también estados coherentes de dos fotones [117; 118]. Esto es así porque podemos definir operadores de creación y destrucción de pares de fotones, de manera que el Hamiltoniano recupera la forma, $H = \hbar\omega(B^\dagger B + \frac{1}{2})$. En el multiverso, estos operadores B y B^\dagger , vienen dados por

$$B(a) = \cosh r b + e^{-i\frac{\theta}{2}} \sinh r b^\dagger, \quad (3.3.49)$$

$$B^\dagger(a) = \cosh r b^\dagger + e^{i\frac{\theta}{2}} \sinh r b, \quad (3.3.50)$$

con

$$\sinh 2r = \frac{2|\beta_\pm|}{\omega}, \quad (3.3.51)$$

$$\cosh 2r = \frac{\beta_0}{\omega}, \quad (3.3.52)$$

$$\theta = i \ln \frac{\beta_+}{\beta_-}, \quad (3.3.53)$$

donde β_\pm y β_0 vienen dados en función de $R(a)$ por las Ecs. (3.3.47) y (3.3.48). En función de los operadores B y B^\dagger , el Hamiltoniano (3.3.46) resulta ser, $H = \hbar\omega(B^\dagger B + \frac{1}{2})$, con $\omega \equiv \omega(a)$ dado como siempre por, $\omega(a) = \omega_0 a^{q-1}$. De este modo, puede interpretarse que las correlaciones entre los estados del universo, dadas por los términos no diagonales del Hamiltoniano, desaparecen en el multiverso cuando los universos son considerados en pares. No obstante, tomados individualmente, los pares de universos componen un estado entrelazado del que podemos estudiar propiedades como su energía o su entropía de entrelazamiento¹⁰. Además, estas correlaciones entre universos individuales evolucionan con el factor de escala, siendo distintas para universos macroscópicos o para fluctuaciones del vacío gravitatorio, lo que analizaremos en la siguiente sección.

3.3.3. Universos "padre" y universos "bebé"

Para analizar físicamente el estado cuántico obtenido en las secciones precedentes, debemos detenernos a analizar el papel que juega el factor de escala como variable del

¹⁰Esto se hará en el Cap. 6. de esta memoria.

multiverso cuántico que estamos considerando. Por un lado, como ya se ha mencionado en relación con la ecuación de Schrödinger en segunda cuantización, el factor de escala juega el papel de la variable temporal. Pero, por otro lado, también hay que tener en cuenta que el factor de escala es una relación de las medidas espaciales para distintos tiempos, dentro de un universo dado, y también entre distintos universos cuando pueda establecerse alguna relación de tipo espacial.

En este último sentido, pueden distinguirse dos tipos de universos. Por un lado, podemos considerar universos macroscópicos como el nuestro, es decir, con un tamaño del orden de magnitud de la longitud de Hubble de nuestro propio universo, l_H . Este tipo de universos se denominan universos padre [103]. Por otro lado, podemos considerar regiones inconexas del espacio-tiempo del tamaño de la longitud de Planck, l_P , debidas a las fluctuaciones de la métrica del universo padre, otorgando al vacío gravitatorio de una estructura llamada "espuma espacio-temporal" [42; 96; 119]. En los dos casos nos referimos a medidas relativas entre el tamaño de los universos, que vienen dadas en función de los valores de sus respectivos factores de escala, $a_p \sim l_H$, para universos padres, y $a_b \sim l_P$, para universos bebés. Estos valores del factor de escala toman como referencia el valor $a_0 \sim 1$, que podría interpretarse como representante de nuestro entorno local¹¹, es decir, en realidad estamos considerando, $\frac{a_p}{a_0} \sim l_H$ y $\frac{a_b}{a_0} \sim l_P$, con $a_0 \sim 1$.

Por otro lado, como hemos dicho en la sección anterior, salvo para el caso de un multiverso formado por universos dominados por radiación, para los cuales $w = \frac{1}{3}$, el estado del multiverso viene dado por un estado aplastado o, equivalentemente, por un estado coherente para un par de universos entrelazados. No obstante, estas correlaciones son distintas si los universos que forman el multiverso son universos padre o universos bebé.

Consideremos primero el caso de los universos macroscópicos o universos padre. Utilizando las expansiones asintóticas de las funciones de Bessel para argumentos grandes, es decir, para valores grandes del factor de escala, en las Ecs. (3.3.11) y (3.3.12), resulta que, $R(a) \approx \omega^{-\frac{1}{2}}(a)$, con $\omega(a) = \omega_0 a^{q-1}$, y por tanto los coeficientes β_{\pm} y β_0 en el Hamiltoniano (3.3.46) se comportan asintóticamente como [105],

$$\beta_+^* = \beta_- \approx \frac{i(q-1)}{4a} \rightarrow 0, \quad (3.3.54)$$

$$\beta_0 \rightarrow \omega(a). \quad (3.3.55)$$

¹¹Hay que notar que un valor $a \sim 1$ convierte la métrica de FRW de forma efectiva en la métrica de Minkowski.

En este caso, el Hamiltoniano (3.3.46) adquiere la expresión usual para el Hamiltoniano de un oscilador armónico en función de sus autoestados, $N \equiv b^\dagger b$, que representan el número de universos en el multiverso, con una frecuencia dependiente del factor de escala dada por $\omega(a)$. Equivalentemente, se puede comprobar que en este caso, $r \rightarrow 0$ en la definición de los operadores B y B^\dagger , dadas por la Ec. (3.3.49), y por tanto, estos operadores de pares de universos degeneran en los operadores de un sólo universo. De este modo, las correlaciones cuánticas entre los estados número desaparecen y por tanto, estos estados constituyen una buena representación para el estado del multiverso. En particular, para valores grandes del factor de escala (es decir, $\frac{a}{\hbar} \gg 1$), se puede considerar apropiada la aproximación de un único universo, para el cual $\langle N \rangle \equiv 1$. Obviamente, esta aproximación es consistente con el universo observado, y por tanto necesaria para describir nuestro propio universo.

Por otro lado, si consideramos las pequeñas regiones inconexas del espacio-tiempo, es decir, si consideramos el caso de los universos bebé virtuales, debemos tomar los límites asintóticos de las funciones de Bessel para valores muy pequeños del factor de escala, del orden de la longitud de Planck, en las Ecs. (3.3.11) and (3.3.12). En ese caso, $\phi_1 \rightarrow 0$ y $\phi_2 \rightarrow \nu_0^{-\frac{1}{2}}$, y por tanto, $R \rightarrow \nu_0^{-\frac{1}{2}}$ y $\dot{R} \rightarrow 0$ para $q > 0$ ($w < 1$). De este modo, a partir de las Ecs. (3.3.47) y (3.3.48), se obtiene que los coeficientes β_\pm y β_0 pueden aproximarse como [105],

$$\beta_+^* = \beta_- \rightarrow -\frac{\nu_0}{4}, \quad (3.3.56)$$

$$\beta_0 \rightarrow \frac{\nu_0}{2}, \quad (3.3.57)$$

donde ν_0 es un parámetro constante el cual viene dado, para $q \neq 1$, por

$$\nu_0 = \frac{\pi(2q)^{\frac{q-1}{q}}}{\Gamma^2(\frac{1}{2q})} \left(\frac{\omega_0}{\hbar}\right)^{\frac{1}{q}}. \quad (3.3.58)$$

Para $q = 1$ ($w = \frac{1}{3}$), el valor de ν_0 coincide con $\hbar^{-1}\omega_0$, y en ese caso $\beta_\pm = 0$ en el Hamiltoniano (3.3.46), y no hay efecto de aplastamiento, como ya se ha mencionado anteriormente. Sin embargo, si consideramos que las fluctuaciones cuánticas del vacío gravitatorio están dominadas por universos bebé cerrados, o planos pero dominados por una constante cosmológica (lo que los hace dinámicamente cerrados), entonces los valores del parámetro w son, respectivamente, $w = -\frac{1}{3}$ y $w = -1$, y en ese caso los valores de β_+ and β_- en el Hamiltoniano (3.3.46) hacen que aparezca un alto grado de correlación en el estado cuántico del vacío gravitatorio. Esto quiere decir que las correlaciones cuánticas deben jugar un papel importante en el vacío gravitatorio formado por esta espuma espacio-temporal de universos bebés virtuales. También significa que los estados números que corresponden a universos individuales no son una representación apropiada para el vacío gravitatorio, sino que éste viene mejor descrito por

estados aplastados. Esto ya fue destacado por Grishchuck y Sidorov, quienes demostraron [120] que las ondas gravitatorias que se forman en el vacío gravitatorio evolucionan de manera que se convierten en estados aplastados.

Por otro lado, las correlaciones entre los estados cuánticos del vacío gravitatorio podrían tener consecuencias observables, al menos en principio, ya que un estado gravitatorio aplastado induce una pérdida de coherencia cuántica en los estados de la materia que se propaga por el espacio tiempo (al menos lo hace en el estado de vacío de los campos materiales [34; 35]). El debate sobre si el estado de vacío induce o no esta pérdida de coherencia (ver, Refs. [33–35]), se puede analizar de manera equivalente en términos de si los universos bebé se crean en pares o individualmente. En el primer caso, se induce una pérdida de coherencia cuántica [34; 35], mientras que en el segundo caso no [33]. En el modelo que estamos considerando en esta tesis puede interpretarse, a partir de la expresión del Hamiltoniano dada por la Ec. (3.3.46), que existe siempre una contribución no nula de nucleación de pares de universos, conectados al espacio-tiempo padre mediante agujeros de gusano Euclídeos doblemente conexos [34] y, por tanto, la pérdida de coherencia cuántica del estado de vacío de los campos de materia parece ser inevitable.

Otra característica a destacar es que la energía del vacío gravitatorio, en este modelo de multiverso formado por universos bebé descritos en segunda cuantización, no es nula cuando el factor de escala degenera, sino que retiene un valor marginal dado por, $E = \frac{\hbar\omega_0}{2}$. Esta es una característica bien conocida del vacío cuántico, donde las fluctuaciones proporcionan una energía al estado de vacío distinta de cero, lo que no tiene análogo clásico, en este caso para el vacío gravitatorio.

Por último, podemos considerar la cuestión de *dónde* y *cuándo* se crean los universos en el multiverso cuántico. En el formalismo de segunda cuantización, como se comentó en la Sec. 3.2.1, se puede usar un esquema de interacción para describir la espuma espacio-temporal de un universo padre. En dicho esquema, el universo padre viene representado por su función de ondas en primera cuantización, mientras que las fluctuaciones del espacio-tiempo se representan por operadores de creación y destrucción de universos bebés, de forma análoga a como actuarían estos operadores en el caso de diminutas partículas (de "espacio-tiempo"). En este esquema, se obtiene de forma efectiva un operador de inserción [103], $\mathcal{L}_i(t, r)$ (ver, Ec. (3.2.11)), que determina los puntos del espacio-tiempo en los que los universos bebés se nuclean, y el Hamiltoniano de interacción que resulta se puede escribir como, $H_{int} = \sum_i f_i(t, r)g(b_i^\dagger, b_i)$, donde el índice i se corresponde con las diferentes especies de universos bebés que se consideren presentes en la espuma espacio-temporal, y la función $f_i(t, r)$ determina el punto de

nucleación.

Sin embargo, en el caso de un multiverso formado por universos padres, en el que no tiene porqué existir necesariamente un espacio-tiempo común, la cuestión planteada en el párrafo anterior resulta equívoca, ya que tanto el espacio como el tiempo son propiedades que están bien definidas sólo dentro de un propio universo, y no por tanto *fuera* del universo. De hecho, en general, el espacio de Hilbert que corresponde a un multiverso formado por universos padres no puede describirse en términos espacio-temporales sino, más bien, en términos estadísticos. En ese caso, los pares de universos correlacionados se crearían en puntos de este espacio estadístico general descrito en una cierta base del espacio de Hilbert.

3.4. La matriz densidad de estados: representaciones

3.4.1. Representación- ϕ

El estado cuántico más general que puede describir el universo no es un estado puro definido por una función de ondas sino, en general, un estado mezcla descrito en términos del operador matriz densidad de estados [58; 89; 93], ρ , cuya dependencia con respecto al factor de escala viene dada en el formalismo de segunda cuantización por una ecuación de tipo Schrödinger, $\frac{\partial}{\partial a}\langle\rho\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle[H, \rho]\rangle$. Por tanto, consideremos el estado cuántico general de un multiverso formado por regiones del espacio-tiempo con una geometría espacial plana, dominados por un fluido con ecuación de estado $p = w\rho$, en la representación definida por el valor de la función de ondas de la primera cuantización, es decir, en la representación de la *coordenada* ϕ . En ese caso, teniendo en cuenta la expresión del Hamiltoniano dada por la Ec. (3.3.8), la ecuación de Schrödinger para la matriz densidad de estados puede escribirse como [105],

$$\frac{\partial\rho(\phi, \phi', a)}{\partial a} = \frac{i}{\hbar} \left(-\frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} - \frac{\partial^2}{\partial\phi'^2} \right) + \frac{\omega^2(a)}{2} (\phi^2 - \phi'^2) \right) \rho(\phi, \phi', a), \quad (3.4.1)$$

que puede resolverse utilizando el siguiente ansatz gaussiano,

$$\rho(\phi, \phi', a) = e^{-A(a)(\phi+\phi')^2 - iB(a)(\phi^2 - \phi'^2) - N(a)}. \quad (3.4.2)$$

Introduciendo la Ec. (3.4.2) en la ecuación de Schrödinger (3.4.1), se obtienen las siguientes ecuaciones para los coeficientes A , B y N ,

$$\dot{A} = -4\hbar BA, \quad (3.4.3)$$

$$\dot{N} = 2\hbar B, \quad (3.4.4)$$

$$\dot{B} = -2\hbar B^2 - \frac{\omega^2}{2\hbar}. \quad (3.4.5)$$

La última de estas ecuaciones puede transformarse realmente en la ecuación de Wheeler-De Witt mediante el siguiente cambio de variable: $x = e^{2\hbar \int B da}$ (es decir, $B = \frac{1}{2\hbar} \frac{\dot{x}}{x}$). En tal caso, la Ec. (3.4.5) resulta ser, $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, cuyas soluciones están dadas por la Ec. (3.3.12). Por tanto, el estado cuántico del multiverso puede expresarse en función de dos valores de la función de ondas obtenida en primera cuantización, ϕ y ϕ' respectivamente, como

$$\rho(\phi, \phi', a) = \frac{C_0}{\phi_0} e^{-\frac{\pi C_0^2}{4\phi_0^2} (\phi + \phi')^2 - \frac{i}{2\hbar} \frac{\phi_0}{\phi_0} (\phi^2 - \phi'^2)}, \quad (3.4.6)$$

donde, $\phi_0 \equiv \phi_0(a) = A_0 \phi_1(a) + B_0 \phi_2(a)$, es la solución general de la ecuación de Wheeler-De Witt, A_0 y B_0 son dos constantes a determinar por las condiciones de frontera, y las constantes de integración se han elegido de tal manera que se cumpla el criterio de normalización, $\int d\phi |\rho(\phi, \phi, a)| = 1$, $\forall a$. La traza de la matriz densidad de estados dada por la Ec. (3.4.6) no presenta divergencias en el límite, $\phi_0 \rightarrow 0$, se anula para un valor infinito del factor de escala, evitando así posibles singularidades cósmicas, y también satisface las condiciones de frontera consideradas en el Cap. 2 para cada uno de los universos, ya que éstas son satisfechas a su vez por las funciones de onda $\phi_1(a)$ y $\phi_2(a)$. El estado del multiverso está por tanto bien definido por la Ec. (3.4.6), y por tanto los elementos diagonales, $|\rho(\phi, \phi, a)|$, pueden interpretarse como una distribución de probabilidades que, para un valor dado de ϕ , está centrado y picado en torno a la solución de la ecuación de Wheeler-De Witt, $\phi_0(a)$, para la cual, $|\rho(\phi, \phi, a)|$ es un máximo, es decir, $\partial_{\phi_0} \rho(\phi, a)|_{\phi_0=\phi} = 0$. Hay que destacar que el estado del multiverso representado por la matriz densidad de estados (3.4.6) evita las singularidades cósmicas, tanto para $a = 0$ como para $a = \infty$, ya que reproduce un valor nulo para la probabilidad de alcanzar ambos extremos.

Por último, veamos como se describen en el formalismo de segunda cuantización los cambios topológicos que pueden darse cuando el espacio-tiempo contiene singularidades cosmológicas, mediante la creación y destrucción de universos. Consideremos el caso de un universo dominado por una energía de tipo fantasma, en el que la singularidad del big rip separa el espacio-tiempo en dos zonas causalmente inconexas, antes y después de la singularidad. En el contexto del multiverso, este modelo puede describirse considerando dos universos, cada uno de los cuales tiene un estado cuántico bien definido por la Ec. (3.4.6), sin ningún comportamiento singular. La transición de un universo simplemente conexo como sería el universo dominado por materia a otro doblemente conexo, como

sería el universo fantasma puede describirse de forma análoga a como se describe en una teoría de partículas el proceso mediante el cual una partícula decae a un estado de dos partículas.

3.4.2. Representación de estados número-aplastados

Consideremos ahora la representación de estados números definidos por las relaciones dadas en las Ecs. (3.3.33-3.3.35). Como ya se ha visto en la sección anterior, para universos padre con un valor del factor de escala del orden de la longitud de Hubble de nuestro universo, o equivalentemente en el límite semi-clásico, para el que también $\frac{a}{\hbar} \rightarrow \infty$, esta representación diagonaliza el Hamiltoniano H , debido a que los coeficientes β_{\pm} en la Ec.(3.3.46) se anulan. En tal caso, la dependencia de la matriz densidad con respecto al factor de escala, $\rho = \sum_{N,M} P_{NM} |N, a\rangle \langle M, a|$, está dada por la ecuación diferencial para los elementos de la matriz, $i\dot{P}_{NM} = \beta_0(M - N)P_{NM}$, donde como venimos haciendo usualmente en esta memoria, el punto denota la derivada con respecto al factor de escala. Tenemos las siguientes soluciones

$$P_{NM}(a) = e^{-i(M-N) \int^a da' \beta_0(a')} P_{NM}(0), \quad (3.4.7)$$

donde $\beta_0(a)$ está definida por la Ec. (3.3.48), con $\beta_0(a) \approx \omega(a) = \frac{\omega_0 a^{q-1}}{\hbar}$ para valores grandes del factor de escala. Por tanto, los elementos diagonales se mantienen constantes con respecto a la evolución del factor de escala. Por ejemplo, para el estado inicial puro dado por $P_N = \delta_{1N}$, que representa un sólo universo, no aparecen elementos no-diagonales en su representación cuando el factor de escala crece y, por tanto, una vez considerado un sólo universo padre, las transiciones a otros números de universos están asintóticamente prohibidas a lo largo de su evolución posterior.

También podemos utilizar la representación diagonal del Hamiltoniano (3.3.8) para obtener las soluciones de la ecuación de Schrödinger, $\frac{\partial}{\partial a} \langle \rho \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [H, \rho] \rangle$, definida a partir de los siguientes operadores de aniquilación y creación,

$$b_{\omega}(a) = \sqrt{\frac{\omega(a)}{2\hbar}} \left(\phi + \frac{i}{\omega(a)} p_{\phi} \right), \quad (3.4.8)$$

$$b_{\omega}^{\dagger}(a) = \sqrt{\frac{\omega(a)}{2\hbar}} \left(\phi - \frac{i}{\omega(a)} p_{\phi} \right), \quad (3.4.9)$$

con, $\omega(a) = \frac{\omega_0}{\hbar} a^{q-1}$. En esta representación el Hamiltoniano resulta ser diagonal $H = \hbar\omega(b_{\omega}^{\dagger}b_{\omega} + \frac{1}{2})$. Los operadores de creación y aniquilación dados por las Ecs. (3.4.8) y (3.4.9) se relacionan con los operadores de creación y destrucción del oscilador armónico con frecuencia y masa constantes, b_0 and b_0^{\dagger} , a través de las siguientes relaciones,

$$b_{\omega} = \mu_{\omega} b_0 + \nu_{\omega} b_0^{\dagger}, \quad (3.4.10)$$

$$b_{\omega}^{\dagger} = \mu_{\omega}^* b_0^{\dagger} + \nu_{\omega}^* b_0, \quad (3.4.11)$$

donde,

$$\mu_{\omega} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\omega} + \frac{1}{\sqrt{\omega}} \right), \quad (3.4.12)$$

$$\nu_{\omega} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\omega} - \frac{1}{\sqrt{\omega}} \right), \quad (3.4.13)$$

con $\mu_{\omega}^2 - \nu_{\omega}^2 = 1$. En ese caso, los estados número $|N_{\omega}, a\rangle$ están relacionados con los estados número de los modos de frecuencia constante, $|N_0\rangle$, por

$$|N_{\omega}, a\rangle = S_{\omega}(\varepsilon_{\omega})|N_0\rangle, \quad (3.4.14)$$

donde el operador de aplastamiento, $S_{\omega}(\varepsilon_{\omega})$, viene definido como

$$S_{\omega}(\varepsilon_{\omega}) \equiv e^{\frac{1}{2}\varepsilon_{\omega}(b_0^2 - b_0^{\dagger 2})}. \quad (3.4.15)$$

ε_{ω} es el parámetro de aplastamiento que está relacionado con los parámetros definidos en las Ecs. (3.4.12) y (3.4.13) mediante las relaciones, $\mu_{\omega} = \cosh \varepsilon_{\omega}$ y $\nu_{\omega} = \sinh \varepsilon_{\omega}$. Para que estos estados satisfagan la ecuación de Schrödinger, tenemos que añadirles unas fases que se pueden obtener por el mismo procedimiento iterativo usado en Ref. [106]. De este modo, los autoestados del Hamiltoniano que satisfacen la ecuación de Schrödinger resultan finalmente,

$$|\tilde{N}_{\omega}, a\rangle = e^{i(N+\frac{1}{2})\Omega(a)}|N_{\omega}, a\rangle, \quad (3.4.16)$$

donde,

$$\Omega(a) = \int^a \omega(a') da' = \frac{\omega_0}{\hbar q} a^q = \frac{\omega(a)}{q} a. \quad (3.4.17)$$

Además, las transformaciones de aplastamiento son transformaciones unitarias ya que, $S^{\dagger}(\varepsilon) = S^{-1}(\varepsilon) = S(-\varepsilon)$, y por tanto preservan las relaciones de ortogonalidad entre los estados números para un modo dado. De esta forma, los autoestados del Hamiltoniano, $|\tilde{N}_{\omega}\rangle$, forman también una base ortonormal para el espacio de soluciones.

La matriz densidad de estados puede obtenerse resolviendo la ecuación de Schrödinger en la representación de los autoestados del Hamiltoniano, $|\tilde{N}_{\omega}, a\rangle$, en términos de la cual el operador densidad se escribe como, $\rho = \sum_{N,M} P_{NM}^{\omega} |\tilde{N}_{\omega}, a\rangle \langle \tilde{M}_{\omega}, a|$. Las soluciones vienen por tanto dadas por,

$$P_{NM}^{\omega}(a) = e^{-i(M-N) \int^a da' \omega(a')} P_{NM}^{\omega}(0), \quad (3.4.18)$$

con un valor constante de los elementos diagonales. Utilizando otra representación número, podemos re-expresar la matriz densidad de estados en términos de operadores

de aplastamiento. Por ejemplo, en función de los estados número para una frecuencia unidad, $|N_0\rangle$, los elementos de la matriz densidad de estados vienen dados por,

$$\begin{aligned} P_{IJ}^0(a) &\equiv \langle I_0 | \rho | J_0 \rangle \\ &= \sum_{N,M} P_{NM}^\omega(a) \langle I_0 | S_\omega(\varepsilon_\omega) | N_0 \rangle \langle M_0 | S_\omega^\dagger(\varepsilon_\omega) | J_0 \rangle, \end{aligned} \quad (3.4.19)$$

aunque estos elementos de la matriz ya no son trivialmente calculables.

3.4.3. Representación de estados coherentes

En este apartado consideraremos la representación P [104; 121] del estado cuántico del multiverso en términos de los estados coherentes. Éstos pueden definirse en función de los autoestados del Hamiltoniano como,

$$|\alpha, a\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\alpha^N}{\sqrt{N!}} e^{i(N+\frac{1}{2})\Omega(a)} |N_\omega, a\rangle, \quad (3.4.20)$$

donde $\alpha = x + iy$ es una variable compleja y $\Omega(a)$ satisface la Ec. (3.4.17). Los estados coherentes (3.4.20) son los autoestados del operador de aniquilación para el modo de frecuencia ω , con autovalores dependientes del factor de escala, los cuales pueden escribirse en la forma:

$$b_\omega(a)|\alpha, a\rangle = e^{i\Omega(a)}\alpha|\alpha, a\rangle. \quad (3.4.21)$$

En la representación $P(\alpha)$, la acción del operador de creación sobre un estado coherente (3.4.20) viene dada por [104; 121],

$$b_\omega^\dagger|\alpha, a\rangle = e^{-i\Omega(a)}\frac{\partial}{\partial\alpha}|\alpha, a\rangle, \quad (3.4.22)$$

y la matriz densidad de estados puede escribirse como,

$$\rho(a) = \int d^2\alpha |\alpha, a\rangle\langle\alpha, a| e^{-|\alpha|^2} P_\omega(\alpha, a), \quad (3.4.23)$$

donde los estados $|\alpha, a\rangle \equiv e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} |\alpha, a\rangle$ son los llamados estados coherentes de Bargmann [104; 121]. De este modo, introduciendo la Ec. (3.4.23) en la ecuación de Schrödinger, $\partial_a \rho = \frac{i}{\hbar} [H, \rho]$, obtenemos una ecuación diferencial para la función $P(\alpha, a)$,

$$\frac{\partial}{\partial a} P_\omega(\alpha, a) = -i\omega(a) \left(\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \alpha^* \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \right) P_\omega(\alpha, a). \quad (3.4.24)$$

Esta ecuación puede resolverse fácilmente mediante el cambio $\alpha = x + iy$, y sus soluciones pueden escribirse como,

$$P_\omega(\alpha, a) = C_1 P_1(\alpha, a) + C_2 P_2(\alpha, a). \quad (3.4.25)$$

C_1 y C_2 son dos constantes de integración a determinar por las condiciones de frontera y $P_1(\alpha, a)$ y $P_2(\alpha, a)$ son dos soluciones independientes de la ecuación maestra (3.4.24), dadas por

$$P_1(\alpha, a) = \frac{i}{2} (e^{-i\Omega(a)}\alpha - e^{i\Omega(a)}\alpha^*), \quad (3.4.26)$$

$$P_2(\alpha, a) = \frac{1}{2} (e^{-i\Omega(a)}\alpha + e^{i\Omega(a)}\alpha^*), \quad (3.4.27)$$

estando $\Omega(a)$ dado por la Ec. (3.4.17) mientras que las constantes de integración se han elegido de tal manera que aseguren el valor real de la función P_ω . Las Ecs. (3.4.26) y (3.4.27) recuerdan la forma del operador que representa el potencial vector, $\vec{A}_{EM}(x, t)$, en el formalismo usual de segunda cuantización del campo electromagnético [122; 123]. De este modo, la Ec. (3.4.25) puede interpretarse como un campo oscilante del modo dependiente del factor de escala, $\Omega(a)$, aunque el campo cuantizado es en este caso la función de ondas de un universo.

También se pueden encontrar otras soluciones a la Ec. (3.4.24). Por ejemplo, expandiendo en serie la función P_ω , es decir, haciendo $P_\omega = \sum_n (A_n \alpha^n + B_n \alpha^{*n})$, la solución puede escribirse entonces como,

$$P_\omega(\alpha, a) = \text{Re} \left(\frac{1}{1 \pm e^{-i\Omega(a)}\alpha} \right) P_\omega(0, 0),$$

donde $\Omega(a)$ está dado por la Ec. (3.4.17) y las constantes de integración se han elegido nuevamente de tal modo que garanticen el valor real de la función P_ω .

3.5. Comentarios sobre algunas críticas hechas en relación al multiverso en segunda cuantización

El formalismo de segunda cuantización ha recibido ciertas críticas (ver, Ref. [124], y las referencias que allí aparecen). Por un lado, Vilenkin objetó que para describir cambios topológicos en un contexto 4-dimensional, era preciso usar un número infinito de campos y de tipos de interacción, los cuales tuvieran en cuenta todos los espacio-tiempos múltiplemente conexos que pueden considerarse en general.

Sin embargo, hay que destacar que una variedad múltiplemente conexa se puede convertir en una simplemente conexa cortándola con un número finito de hipersuperficies [25], y que este argumento se puede aplicar también al caso de un espacio-tiempo 4-dimensional. De esta forma, Hawking señaló [25] que el estado cuántico del universo estaría dado en tal caso por un conjunto de osciladores, una idea que ya resultaba muy próxima a un escenario de multiverso. En el formalismo de segunda cuantización, por

otro lado, la función de onda que representa cada una de las regiones inconexas del espacio-tiempo podría estar dada por un oscilador armónico. En tal caso, este formalismo proporciona un procedimiento tratable para estudiar un multiverso formado por regiones inconexas, al menos en el caso de que éstas posean ciertas simetrías tales como la homogeneidad e isotropía.

Otra de las objeciones expuestas por Vilenkin en la Ref. [124] se refería a la interpretación de la creación de universos en el formalismo de segunda cuantización. Este autor objetó que la interpretación usual en términos de estados $|in\rangle$ y $|out\rangle$, correspondientes a los estados $|N = 0\rangle$ y $|N = 1\rangle$, respectivamente, siendo N el número de universos, no se ajusta al significado de creación de un universo a partir de la nada, propuesto por él mismo unos años antes [47; 113]. El estado $|in\rangle$ correspondería, según este autor, al estado de la "nada" cuando el factor de escala se hace nulo, mientras que el estado $|out\rangle$ describiría un único universo para un valor grande del factor de escala, es decir, cuando $a \rightarrow \infty$. Sin embargo, como ya destacase el propio Vilenkin [124], el factor de escala no puede en general utilizarse como variable temporal al no ser monótona. Además, tomar el valor particular del factor de escala como variable temporal no es más que considerar un reparametrización particular del tiempo, $a = a(t)$, y sería de esperar que el número de universos no dependiese de la elección particular de un sistema de referencia dentro de un universo.

Sin embargo, en la Sec. 3.3.2 se ha propuesto que el estado número que define apropiadamente el número de universos viene representado por los estados de Lewis a través de la Ec. (3.3.35) y, de ese modo, el número de universos en todo el multiverso es invariante respecto del factor de escala, es decir, $N \neq N(a)$. Además, el concepto de universos creados de la nada sigue teniendo sentido en este caso ya que el estado del vacío del multiverso, es decir, el estado del *void*, sigue representando la ausencia de espacio, tiempo y materia, que es realmente el significado al que Vilenkin se refería cuando utilizaba el término "nada".

Por último, en la Ref. [26], Hawking consideró que en un contexto de inflación eterna debería aparecer una estructura tipo mosaico formado por regiones termalizadas causalmente desconexas con diferentes valores efectivos de las constantes de acoplo, con una cierta distribución de probabilidad para cada uno de sus valores. De todos modos, no está nada claro que el estado general del multiverso deba ser de tipo térmico ya que, a diferencia del modelo inflacionario, no está garantizada la existencia de un espacio-tiempo común en el caso general del multiverso cuántico.

With the advent of quantum theory in the early twentieth century, [the] straightforward bijectivism between the physical world and its mathematical representation in the theory came to a sudden end.

Maximilian Schlosshauer. Decoherence and the quantum-to-classical transition.

Capítulo 4

Estados coherentes en el multiverso

4.1. Estados coherentes en primera cuantización

En el capítulo anterior hemos utilizado la representación de estados coherentes para obtener la matriz densidad de estados que describe el estado cuántico del multiverso. En este capítulo analizaremos con más profundidad la expresión particular de dichos estados coherentes tanto en primera cuantización, que describiremos en esta sección, donde utilizaremos el método de las Álgebras Generalizadas de Heisenberg (GHA), como en segunda cuantización, donde analizaremos las propiedades de aplastamiento en función del tipo de universos que formen el multiverso.

Para obtener los estados coherentes del multiverso en primera cuantización utilizaremos los estados obtenidos en el Cap. 2, dados por la Ec. (2.3.17). En ese caso, podemos utilizar el llamado método de las álgebras generalizadas de Heisenberg (GHA), tal y como está descrito en las Refs. [125–127]. Su principal ventaja es que, aunque los estados coherentes están definidos como los autoestados de operador de aniquilación, el método GHA nos permite obtener estos estados coherentes sin conocer la expresión explícita de dicho operador de aniquilación, lo que es especialmente conveniente para nuestro desarrollo del estado cuántico del multiverso en primera cuantización obtenido en el Cap. 2.

Describiremos brevemente el método, para lo cual consideramos el siguiente álgebra generalizado [125; 126],

$$HA^\dagger = A^\dagger f(H) \quad (4.1.1)$$

$$AH = f(H)A \quad (4.1.2)$$

$$[A^\dagger, A] = H - f(H), \quad (4.1.3)$$

donde A , A^\dagger y H son los generadores del álgebra, y $f(x)$ es la función característica

del sistema [125; 126]. H es el Hamiltoniano del sistema considerado, con autoestados dados por

$$H|n\rangle = \mu_n|n\rangle, \quad (4.1.4)$$

y A^\dagger y A son una generalización de los operadores usuales de creación y aniquilación,

$$A^\dagger|n\rangle = N_n|n+1\rangle \quad (4.1.5)$$

$$A|n\rangle = N_{n-1}|n-1\rangle, \quad (4.1.6)$$

donde, $N_n^2 = \mu_{n+1}$. En nuestro caso, con los autovalores del Hamiltoniano dados por la Ec. (2.3.16), $\mu_{n+1} = \beta_{n+1}^2 = q^2(n+1)^2$. El uso de este álgebra generalizado añade una parametrización a través de la función característica $f(H)$, que permite cubrir un rango de distintos potenciales para un sistema dado. El álgebra usual de Heisenberg se recupera para el valor de f dado por [126], $f(x) = 1 + x$, en las Ecs. (4.1.1-4.1.3).

En el caso del álgebra generalizada, definida por las Ecs. (4.1.1-4.1.3), los estados coherentes $|z\rangle$ se definen como los autoestados del operador de aniquilación generalizado, es decir,

$$A|z\rangle = z|z\rangle, \quad (4.1.7)$$

donde z es un número complejo. En el caso del multiverso, con el Hamiltoniano dado por la Ec. (2.3.16), podemos fácilmente encontrar la función característica $f(x)$ a través de la relación de recurrencia, $\mu_{n+1} = f(\mu_n)$ [125], obteniendo

$$\mu_{n+1} = (\sqrt{\mu_n} + q)^2 \equiv f(\mu_n). \quad (4.1.8)$$

El espectro del Hamiltoniano (2.3.16) es similar al espectro de una partícula libre en un pozo de potencial cuadrado, y por tanto podemos realizar los cálculos de forma paralela a ese caso [126]. De este modo, la expresión para los estados coherentes puede escribirse como,

$$|z\rangle = N(z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{N_{n-1}!} |n\rangle, \quad (4.1.9)$$

donde $N(z)$ es una función de normalización dependiente de la variable z , y

$$N_{n-1}! = q^n n!, \quad (4.1.10)$$

con $N_{-1}! \equiv 1$. Los estados coherentes en el multiverso pueden escribirse entonces como,

$$|z\rangle = N(z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{q^n n!} |n\rangle = D(A^\dagger)|0\rangle, \quad (4.1.11)$$

donde el operador desplazamiento, $D(A^\dagger)$, viene formalmente dado por la siguiente expresión,

$$D(A^\dagger) = N(z) \mathcal{I}_0 \left(2\sqrt{\frac{zA^\dagger}{q^2}} \right), \quad (4.1.12)$$

siendo \mathcal{I}_0 la función de Bessel modificada de primera clase y orden cero, cuyo valor en la Ec. (4.1.12) está dado por su desarrollo en serie. En el espacio de configuración, las funciones de onda correspondientes a los estados coherentes (4.1.11) pueden expresarse en términos del factor de escala, a , y la variable z , como

$$\langle a|z\rangle = \varphi_z(a) \equiv \varphi(a, z) = N(z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} \phi_n(a), \quad (4.1.13)$$

donde $\phi_n(a)$ es la función de ondas del universo dada por la Ec. (2.3.17), $\varphi(a, z)$ es un funcional para las trayectorias, $a(t)$, y la variable z se ha re-escalado de manera que, $\frac{z}{q} \rightarrow z$.

Para obtener estados coherentes normalizados, resulta más fácil usar una base ortonormal de los autoestados del Hamiltoniano, lo que puede hacerse dividiendo el espacio de Hilbert en dos subespacios, correspondientes a los modos pares e impares, respectivamente (ver, Ecs. (2.3.19-2.3.21)). En ese caso, podemos obtener los que se denominan estados coherentes vectoriales [128]. La función de normalización, $N(z)$, en la Ec. (4.1.11) resulta entonces dada por [90; 91], $N^{-1}(z) = \sqrt{\mathcal{I}_0(2|z|)}$, y los estados coherentes para el multiverso pueden escribirse como,

$$|z\rangle = (\mathcal{I}_0(2|z|))^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} \tilde{\phi}_n(a), \quad (4.1.14)$$

y de este modo, estos estados coherentes reúnen las condiciones necesarias para formar un conjunto de estados coherentes de Klauder [90; 91; 126] (KCS), es decir: i) están normalizados, ii) son continuos en la variable z , y iii) forman una base completa del espacio de Hilbert [91].

Por otro lado, estas funciones de onda de los estados coherentes satisfacen las condiciones de contorno en la medida que éstas son también satisfechas por las autofunciones del Hamiltoniano. Cuando el factor de escala tiende a cero, usando las expansiones asintóticas de las funciones de Bessel, obtenemos

$$\varphi(z, a) \approx \frac{1}{\sqrt{\mathcal{I}_0(2|z|)}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n (\tilde{\omega}_0 a^q)^n}{n! 2^n n!} = \frac{\mathcal{I}_0\left(\sqrt{2\tilde{\omega}_0}|z|a^q\right)}{\sqrt{\mathcal{I}_0(2|z|)}}, \quad (4.1.15)$$

que son funciones regulares en este límite. En el límite opuesto, cuando el factor de escala es muy grande, también se cumplen las condiciones de contorno. Este límite coincide también con el límite semi-clásico, para el que podemos considerar $\hbar \rightarrow 0$. En ambos casos, los límites asintóticos de las funciones de Bessel son iguales y las autofunciones del Hamiltoniano vienen dadas por,

$$\phi_n(a) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\tilde{\omega}_0 a^q}} \cos\left(\tilde{\omega}_0 a^q - \frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{4}\right). \quad (4.1.16)$$

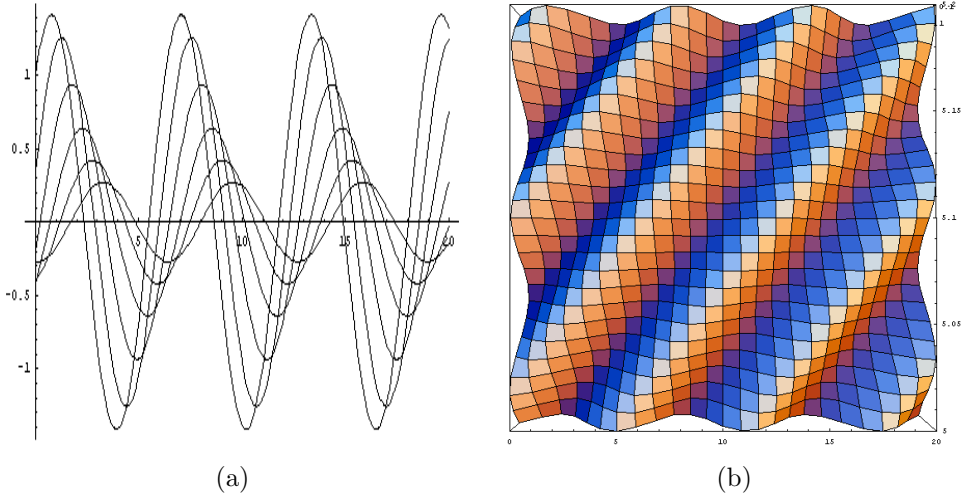


Figura 4.1: a) El numerador de la Ec. (4.1.19) para diferentes valores del parámetro z ($0, 1, \dots$); b) El funcional de ondas para los estados coherentes dado por la Ec. (4.1.19), en el que aparecen una serie de máximos para $|z_k| = S_c(a) - \arctan\left(\frac{2S_c(a)-1}{2S_c(a)+1}\right) + 2k\pi$.

En ese caso, los estados coherentes pueden escribirse como,

$$\varphi(z, a) \approx \frac{1}{\sqrt{\mathcal{I}_0(2|z|)}} \sqrt{\frac{2}{\pi\tilde{\omega}_0 a^q}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} \cos\left(\tilde{\omega}_0 a^q - \frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{4}\right) \quad (4.1.17)$$

$$= \frac{\cos(|z| - \tilde{\omega}_0 a^q) - \sin(|z| - \tilde{\omega}_0 a^q)}{\sqrt{\pi\tilde{\omega}_0 a^q \mathcal{I}_0(2|z|)}} \rightarrow 0, \quad (4.1.18)$$

para valores grandes del factor de escala. Dado que la acción clásica en este modelo viene dada por, $S_c = \tilde{\omega}_0 a^q$, resulta que la función $\varphi(z, a)$ puede escribirse también como,

$$\varphi(z, a) \approx \frac{\cos(|z| - S_c(a)) - \sin(|z| - S_c(a))}{\sqrt{\pi S_c(a) \mathcal{I}_0(2|z|)}} \rightarrow 0 \quad (a \rightarrow \infty). \quad (4.1.19)$$

De esta manera, se obtienen las expresiones correspondientes a los estados coherentes en el espacio de configuración, obtenidas usando el método GHA para el modelo considerado. Estos estados coherentes satisfacen las condiciones de contorno en ambos límites, para valores grandes y pequeños del factor de escala. El límite semi-clásico coincide precisamente con el primero de esos límites, cumpliendo por tanto el criterio de Hartle [30; 87; 90]. Esto sucede esencialmente porque, para cualquier valor de la variable $|z|$, las Ecs. (4.1.17) and (4.1.19) son funciones oscilatorias cuyo argumento corresponde precisamente con la acción clásica, con un prefactor que tiende a cero a medida que el factor de escala se hace infinito (ver, Ecs. (2.1.14) y (2.3.10)).

4.2. Estados coherentes en segunda cuantización

En el tratamiento del multiverso en segunda cuantización es incluso más fácil obtener los estados coherentes ya que podemos hacer uso de toda la maquinaria usual para calcularlos, en particular, tenemos los autoestados número del Hamiltoniano, los autoestados número del operador invariante, I , y sobre todo, las expresiones explícitas de sus operadores de aniquilación. Para el multiverso descrito por el Hamiltoniano (3.3.8), podemos definir los siguientes estados coherentes [107],

$$|\alpha, a\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\alpha^N}{\sqrt{N!}} e^{i\alpha_N(a)} |N, a\rangle, \quad (4.2.1)$$

donde los estados número de Lewis y sus fases, $|N, a\rangle$ y $\alpha_N(a)$, vienen dados por las Ecs. (3.3.15) y (3.3.17), respectivamente. Estos estados coherentes son autoestados del operador de aniquilación, $b(a)$, dado por la Ec. (3.3.29), es decir

$$b(a)|\alpha, a\rangle = \alpha(a)|\alpha, a\rangle, \quad (4.2.2)$$

donde, $\alpha(a) = e^{2i\alpha_0(a)}$. Los operadores de creación y aniquilación, $b(a)$ y $b^\dagger(a)$, están relacionados con los de los modos de frecuencia constante, b_0 y b_0^\dagger , a través de la transformación de aplastamiento dada por las Ecs. (3.3.36-3.3.37) y, por tanto, los estados coherentes del multiverso resultan ser estados aplastados [69]. La incertidumbre en la función de ondas de la primera cuantización y en su momento conjugado vienen de hecho dados por [90; 107; 117],

$$(\Delta\phi)^2 = \frac{\hbar}{2\omega_0} |\mu - \nu|^2, \quad (4.2.3)$$

$$(\Delta p_\phi)^2 = \frac{\hbar\omega_0}{2} |\mu + \nu|^2. \quad (4.2.4)$$

La evolución de estas incertidumbres con respecto al factor de escala está representada en las Figs. 4.2 - 4.3 para diferentes valores del parámetro w , donde se puede apreciar que el efecto de aplastamiento es mayor cuanto más se aleja w del valor $\frac{1}{3}$, para el que el efecto de aplastamiento desaparece y, $(\Delta\phi)^2 = (\Delta p_\phi)^2 = \Delta\phi\Delta p_\phi = \frac{1}{2}$. Por tanto, el efecto de aplastamiento resulta ser mayor para multiversos formados por universos acelerantes.

Como dijimos en la introducción, los estados aplastados están asociados usualmente a efectos cuánticos sin análogo clásico en la medida [57] en que están descritos por distribuciones no clásicas (que presentan valores negativos) y que pueden violar las desigualdades de Bell. Esta última característica está asociada, en el contexto de la óptica cuántica, con la característica no-local de la teoría cuántica. Sin embargo, en el

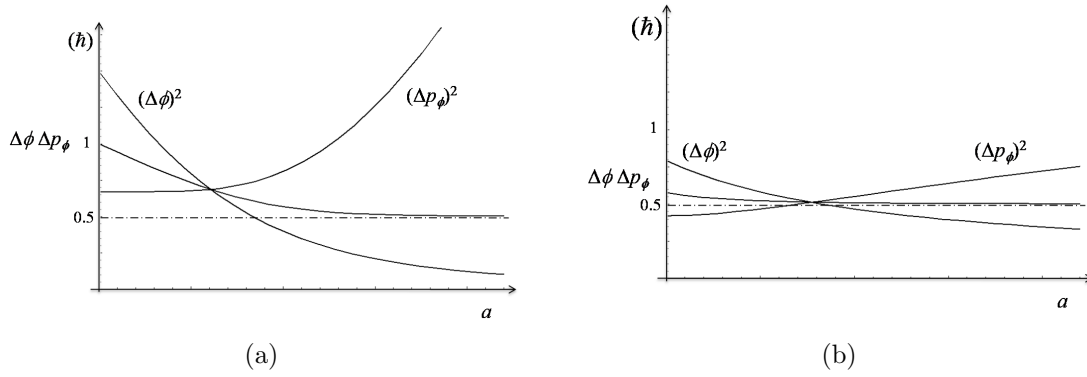


Figura 4.2: $(\Delta\phi)^2$, $(\Delta p_\phi)^2$ and $\Delta\phi\Delta p_\phi$, para un valor: (a) $w = -1$ (universo dominado por energía de vacío); y (b) $w = 0$ (universo dominado por materia-polvo).

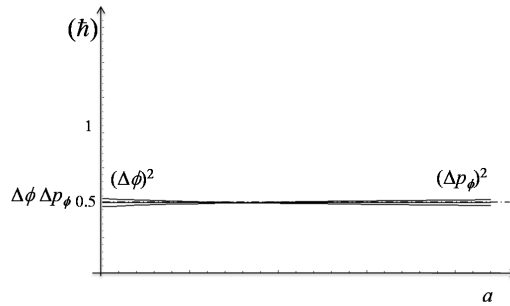


Figura 4.3: $(\Delta\phi)^2$, $(\Delta p_\phi)^2$ and $\Delta\phi\Delta p_\phi$, para el valor $w = 0,3$ (universo dominado por radiación; para el valor, $w = \frac{1}{3}$, el efecto de aplastamiento desaparece y, $(\Delta\phi)^2 = (\Delta p_\phi)^2 = \Delta\phi\Delta p_\phi = \frac{1}{2}$).

contexto del multiverso cuántico, en el que el concepto de localidad o no-localidad no puede aplicarse en general, debemos más bien asociar estos estados aplastados con la independencia o interdependencia de los estados cuánticos del universo, es decir, con su separabilidad. Resulta por ello adecuado interpretar que los universos acelerados, los cuales en este formalismo de segunda cuantización vienen dados por estados aplastados, no pueden considerarse como sistemas aislados sino como estados correlacionados en pares en el contexto del multiverso, siendo por tanto de naturaleza esencialmente cuántica, independientemente de que dichos estados presenten regímenes semi-clásicos válidos en el límite, $\hbar \rightarrow 0$.

*When does a physical system display 'dynamical law'?
Quantum theory has a very short answer to this question,
viz. at the absolute zero of temperature.*

Erwin Schrödinger. What is Life?

Capítulo 5

Decoherencia en el multiverso

5.1. Introducción

El principio de superposición de la mecánica cuántica establece que si ϕ_1 y ϕ_2 son dos estados que pueden representar cuánticamente al universo, entonces cualquier combinación lineal $c_1\phi_1 + c_2\phi_2$, siendo c_1 y c_2 dos constantes, también puede representar su estado cuántico. De todas estas combinaciones, necesitamos explorar cuáles sobreviven a lo largo de la evolución del universo y, en particular, los estados que representan un universo clásico.

Además del principio de superposición, otro de los pilares de la mecánica cuántica es la asignación de probabilidades a cada una de las ramas cuánticas. Clásicamente, si $p(A)$ y $p(B)$ son las probabilidades de dos sucesos A y B , la probabilidad de que ocurra uno u otro suceso viene dada por la suma de estas probabilidades, es decir, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$. Esto no sucede de forma general en mecánica cuántica debido a la interferencia que aparece entre las amplitudes de probabilidad correspondiente a distintas ramas cuánticas, de forma que la asignación clásica de probabilidades sólo puede establecerse cuando dichos términos de interferencia se anulan o son despreciables. La pérdida de estos efectos de interferencia entre las distintas ramas cuánticas es lo que llamamos decoherencia.

El fenómeno de decoherencia está relacionado con la separabilidad de los subsistemas que componen un sistema físico. Como ya dijimos en la introducción de esta memoria, el universo debe describirse cuánticamente como un todo y su resolución en subsistemas, entre los cuales nos encontramos nosotros mismos y todos los objetos macroscópicos que observamos, es posible debido a los fenómenos de decoherencia que eliminan las correlaciones entre sus estados cuánticos, y que permiten de este modo describir los objetos macroscópicos como entidades individuales.

Estos fenómenos de decoherencia pueden deberse a diversos factores. Como veremos en la siguiente sección, dependen de la ortogonalidad de los estados que representan cada una de las ramas cuánticas. Esta ortogonalidad puede estar originada por la interacción del sistema a describir con el medio que lo rodea. Por ejemplo, en un experimento realizado con objetos macroscópicos en un laboratorio, las interacciones del sistema a estudiar con el gas que lo circunda dan lugar a procesos de decoherencia muy efectivos que permiten describir clásicamente el experimento.

En ese ejemplo, el gas es un sistema externo al propio experimento. Sin embargo, en el universo como un todo no existen elementos externos¹. En ese caso, la decoherencia entre las distintas ramas del universo puede venir dada mediante lo que se denomina un "coarse-graining", o una descripción no detallada de todos sus grados de libertad. La pérdida de información que se produce al describir el universo de forma no completamente detallada, como ocurre en el experimento del laboratorio al ignorar los grados de libertad del gas, permite describir ciertas propiedades del universo de manera clásica. En particular, a través de este proceso de decoherencia se obtiene la descripción clásica del universo que observamos.

En las siguientes secciones estudiaremos algunos de los procesos de decoherencia que pueden establecerse en el multiverso cuántico. Todos ellos pueden suceder de manera conjunta y depende de su efectividad que dominen o no en el proceso final de decoherencia entre las distintas ramas del multiverso.

5.2. Ortogonalidad de las ramas del multiverso

Como hemos dicho, la pérdida de correlación cuántica entre las distintas ramas del universo depende de la ortogonalidad de sus estados. Por ejemplo, sean ϕ_1 y ϕ_2 dos amplitudes de probabilidad que representan dos estados cuánticos del universo. En ese caso, el estado cuántico, ϕ , dado por $\phi = \phi_1 + \phi_2$, también puede representar el estado del universo. La probabilidad asociada al estado ϕ , en la formulación usual de la mecánica cuántica, viene dada por

$$p(\phi) = \langle \phi | \phi \rangle = p(\phi_1) + p(\phi_2) + 2\text{Re}\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle. \quad (5.2.1)$$

El último término representa la interferencia entre las ramas ϕ_1 y ϕ_2 . Si estos estados son ortogonales, las ramas pierden su correlación cuántica y pueden considerarse ramas independientes en el sentido de la regla clásica de probabilidad. También puede

¹Salvo que consideremos un multiverso, y en tal caso es el multiverso el que no tiene elementos externos con los que interactuar.

interpretarse que los estados que representan las amplitudes de probabilidad ϕ_1 y ϕ_2 no comparten información.

En el modelo de universo estudiado en el Cap. 2, la ramas en expansión y en contracción del universo vienen dada por las funciones de Hankel $\mathcal{H}_0^{(2)}(\tilde{\omega}_0 a^q)$ y $\mathcal{H}_0^{(1)}(\tilde{\omega}_0 a^q)$, respectivamente. Con el producto escalar definido por la Ec. (2.3.30), estas ramas son ortogonales y por tanto no aparecen términos de interferencia en la asignación de probabilidades asociadas a estos estados. Sin embargo, el estado fundamental del universo con la condición de contorno de no-frontera, viene dado por la función de Bessel, $\mathcal{J}_0(\tilde{\omega}_0 a^q)$ (ver, Sec. 2.3.2), que puede interpretarse como la combinación lineal de un universo que se expande y uno que se contrae, ya que $\mathcal{J}_0 = \frac{1}{2}(\mathcal{H}_0^{(1)} + \mathcal{H}_0^{(2)})$.

El solapamiento de dos funciones de onda correspondientes a distintos modos excitados del universo, ϕ_n y ϕ_m , dados por la Ec. (2.3.17), decae también a medida que la diferencia entre sus respectivos números cuánticos es mayor, ya que, $\langle \phi_n | \phi_m \rangle \sim \frac{\sqrt{nm}}{|n-m|^2}$ (ver, Ecs. (2.3.18)). Por tanto, el solapamiento de dos funciones de onda correspondientes a dos estados excitados es menor para números cuánticos n y m muy distantes entre sí.

Con respecto a las ramas cuánticas correspondientes al estado fundamental del universo para distintos valores del factor de escala, necesitamos un mecanismo de interacción entre los grados de libertad del universo que permita la decoherencia de dichas ramas, y su descripción semiclásica.

5.3. Decoherencia debida a la interacción con el entorno

5.3.1. Interacción con un campo escalar con masa

Si no consideramos el contexto del multiverso, el universo es un sistema cerrado que no tiene un entorno externo con el que interaccionar. Sin embargo, en la práctica muchos de sus grados de libertad internos son desconocidos y pueden considerarse, al igual que ocurre en un laboratorio con los estados del gas circundante a un experimento, como el sistema con el que interacciona dando lugar a procesos de decoherencia que, en particular, permiten una descripción clásica del universo.

Por ejemplo, en las Refs. [40; 129; 130] se utilizan los modos inhomogéneos de un campo escalar para obtener la matriz densidad de estados reducida para dos valores distintos del factor de escala, a y a' . Estos modos inhomogéneos se acoplan a la métrica del espacio-tiempo (ver, Ref. [131]), que se considera semiclásicamente. El resultado es

que las ramas en expansión y en contracción del universo se desacoplan rápidamente, en términos de diferencias entre los valores de escala. De este modo, en el régimen semiclásico, el universo se encuentra o bien en un estado de expansión o bien en su estado de contracción, pero no en una superposición de ambos.

Consideremos el modelo de universo homogéneo e isótropo dominado por un cierto fluido, desarrollado en el Cap. 2, con un campo escalar con masa m . En el régimen semiclásico, la función de ondas del universo para las ramas en expansión y en contracción viene dada por (ver, Sec. (2.1.2)),

$$\Phi(a, \varphi) = C(a)e^{\pm iS(a)}\chi(a, \varphi), \quad (5.3.1)$$

donde, $S(a) = \frac{\omega_0}{q}a^q$ es la acción clásica, y $C(a) = a^{-\frac{q}{2}}$ es el prefactor de las funciones de Bessel en su límite asintótico para grandes valores del factor de escala (ver, Ec. (2.3.8)). En la aproximación semiclásica, el espacio tiempo se condiera clásico y la función $\chi(a, \varphi)$ satisface la siguiente ecuación de Schrödinger [129; 130],

$$\frac{1}{2a^3} \left(-\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + m^2 a^6 \right) \chi = i \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad (5.3.2)$$

donde el tiempo t está definido en función del factor de escala a través de la ecuación de movimiento clásica, $a\dot{a} = \pm\omega_0 a^{q-1}$ (es decir, $p_a^c \equiv \frac{\partial S_c}{\partial a}$), donde el signo negativo corresponde a la rama en contracción del universo y el signo positivo a la rama en expansión. Siguiendo las referencias citadas, buscamos soluciones Gaussianas de la Ec. (5.3.2), es decir,

$$\chi = A(a)e^{-B(a)\varphi^2}. \quad (5.3.3)$$

Introduciendo la Ec. (5.3.3) en la Ec. (5.3.2), obtenemos dos ecuaciones diferenciales para los coeficientes $A(a)$ y $B(a)$,

$$ia^3 \frac{\partial A}{\partial t} = -BA, \quad (5.3.4)$$

$$-2ia^3 \frac{\partial B}{\partial t} = 4B^2 + m^2 a^6. \quad (5.3.5)$$

La condición de normalización, $(\chi, \chi) = 1$, con $(\chi, \chi) \equiv \int d\varphi \chi \chi^*$, nos fija el valor de A en función de B salvo por una fase, es decir,

$$A = \pi^{-\frac{1}{4}} (B + B^*)^{\frac{1}{4}} e^{i\alpha(t)}, \quad (5.3.6)$$

con la condición de que la parte real de la función B sea positiva, y la fase α se puede obtener a partir de la Ec. (5.3.4). La Ec. (5.3.5) se puede resolver mediante el siguiente cambio de variable,

$$B = \pm i \frac{\omega_0}{2} a^{q+1} \frac{\dot{x}}{x}, \quad (5.3.7)$$

donde el signo positivo corresponde a las soluciones para la rama en expansión del universo y el negativo para la rama en contracción y $\dot{x} \equiv \frac{\partial x}{\partial a}$ (recordando que, $\frac{\partial}{\partial t} = \dot{a} \frac{\partial}{\partial a}$, con \dot{a} dado por la ecuación clásica de evolución). En función de la variable x , la Ec. (5.3.5) puede escribirse como,

$$a^2 \ddot{x} + (1+q)a\dot{x} - \frac{m^2}{\omega_0^2} a^{2(3-q)}x = 0. \quad (5.3.8)$$

Si $w = -1$, es decir, para un universo dominado por una constante cosmológica, $q = 3$ y las soluciones de la Ec. (5.3.8) pueden escribirse como,

$$x = a^{-\frac{3}{2}} (c_1 a^{k_1} + c_2 a^{-k_1}), \quad (5.3.9)$$

con, $k_1 = \frac{3}{2} \sqrt{1 + \frac{4m^2}{9\omega_0^2}} \approx \frac{3}{2}$. Eligiendo las constantes c_1 y c_2 de manera que se cumpla la condición, $B + B^* > 0$, el valor de la función $B(a)$ puede aproximarse, en el límite semiclásico, como

$$B_0^\pm \approx \frac{\omega_0}{2} \left(3 \pm i \frac{m^2}{3\omega_0^2} a^3 \right), \quad (5.3.10)$$

donde, nuevamente, el signo positivo corresponde a la solución de la función χ para la rama en expansión del universo, y el negativo para la rama en contracción.

Para el régimen de quintaesencia, $w > -1$, las soluciones de la Ec. (5.3.8) pueden escribirse en términos de las funciones de Bessel modificadas de orden ν , \mathcal{K}_ν y \mathcal{I}_ν , como

$$(B_Q^-)^* = B_Q^+ = \frac{\omega_0 a^q}{2} \left(-i \frac{q}{2} + \beta \lambda a^\beta \frac{-\mathcal{I}'_\nu + i\mathcal{K}'_\nu}{\mathcal{I}_\nu - i\mathcal{K}_\nu} \right), \quad (5.3.11)$$

donde, $q = \frac{3}{2}(1-w) = 3 - \beta$ (con, $\beta > 0$), $\lambda = \frac{m}{\omega_0 |\beta|}$, $2\nu = 1 + \frac{3}{|\beta|}$, y, $\mathcal{C}'_\nu \equiv \frac{\partial \mathcal{C}_\nu(u)}{\partial u}$, con $u \equiv \lambda a^\beta$. Teniendo en cuenta los límites asintóticos de las funciones de Bessel modificadas para valores grandes de sus argumentos, las soluciones (5.3.11) pueden escribirse en el límite semiclásico como,

$$(B_Q^-)^* = B_Q^+ \approx \frac{\omega_0}{2} \left(i \frac{m}{\omega_0} + \pi(3 + 2|\beta|) a^{-\beta} e^{-2\lambda a^\beta} \right). \quad (5.3.12)$$

Para el régimen de energía fantasma, $w < -1$ y $\beta < 0$, las funciones B_F^\pm resultan ser,

$$(B_F^-)^* = B_F^+ = \frac{\omega_0 a^q}{2} \left(-i \frac{q}{2} + |\beta| \frac{\lambda}{a^{|\beta|}} \frac{-\mathcal{I}'_\nu - i\mathcal{K}'_\nu}{\mathcal{I}_\nu + i\mathcal{K}_\nu} \right), \quad (5.3.13)$$

que, teniendo ahora en cuenta el límite asintótico de las funciones de Bessel modificadas para valores pequeños de sus argumentos ($u = \lambda a^{-|\beta|}$), se pueden aproximar en el límite semiclásico como,

$$(B_F^-)^* = B_F^+ \approx \frac{\omega_0}{2} (-2iqa^q + c_0), \quad (5.3.14)$$

con $q = 3 + |\beta|$, y siendo c_0 una constante positiva dada por, $c_0 = 4|\beta| \frac{\lambda^{2\nu}}{\Gamma^2(\nu)2^{2\nu}}$.

Con estos valores de las funciones $A(a)$ y $B(a)$ en la función $\chi(a, \varphi)$, dada por la Ec. (5.3.3), podemos calcular la matriz densidad de estados reducida que resulta de integrar los modos correspondientes al campo escalar para cada rama del universo, es decir,

$$\rho_r(a, a') = \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi \chi^*(a, \varphi) \chi(a', \varphi). \quad (5.3.15)$$

En función de los valores de A y B , ρ_r resulta ser [129]

$$\rho_r(a, a') = e^{-i(\alpha(a) - \alpha(a'))} \left[\frac{(B(a) + B^*(a))(B(a') + B^*(a'))}{(B^*(a) + B(a'))^2} \right]^{\frac{1}{4}}. \quad (5.3.16)$$

Para el caso, $w = -1$, sin tener en cuenta las fases $\alpha(a)$ y $\alpha(a')$, la Ec. (5.3.16) puede aproximarse en el límite semiclásico como,

$$\rho_r(a, a') \approx \frac{1}{\sqrt{1 \mp \frac{im^2}{18\omega_0^2}(a^3 - a'^3)}}. \quad (5.3.17)$$

Para valores próximos a su diagonal, para los cuales $a \approx a'$, la matriz reducida es de orden unidad. En cambio, para valores $a \gg a'$, los elementos de la matriz decaen como, $|\rho_r| \sim a^{-\frac{3}{2}}$. Es decir, el proceso de decoherencia entre distintos valores del factor de escala dentro de las ramas semiclásicas del universo resulta ser efectivo para grandes valores del factor de escala, como era de esperar.

En el régimen de quintaesencia este proceso de decoherencia resulta aún más efectivo. La matriz reducida (5.3.16) puede aproximarse como,

$$\rho_r(a, a') \approx \sqrt{c} \left[\frac{(aa')^{3-\beta} e^{-2\lambda(a^\beta - a'^\beta)}}{\left(\mp i \frac{m}{2}(a^3 - a'^3) + \frac{c}{2}(a^{3-\beta} e^{-2\lambda a^\beta} + a'^{3-\beta} e^{-2\lambda a'^\beta}) \right)^2} \right]^{\frac{1}{4}}. \quad (5.3.18)$$

Para los valores de la diagonal, $\rho_r(a, a) \approx 1$, mientras que para valores muy diferentes de los factores de escala, $a \gg a'$, resulta

$$|\rho_r(a, a')| \sim \left(\frac{a'}{a} \right)^{\frac{q}{2}} a^{-\beta} e^{-\lambda a^\beta} \rightarrow 0 \quad (a \gg 1) \quad (5.3.19)$$

Por último, en el régimen de energía fantasma, $w < -1$ y $\beta < 0$, para valores grandes del factor de escala, pero previos a la región acronal que rodea el big rip, es decir, donde la aproximación semiclásica $\phi \sim C e^{\pm S_c}$ sigue siendo válida, la matriz reducida resulta:

$$\rho_r(a, a') \approx \frac{1}{\sqrt{1 \pm i \frac{q}{c_0}(a^q - a'^q)}}, \quad (5.3.20)$$

que para valores $a \gg a'$, decae como $|\rho_r| \sim a^{-\frac{q}{2}}$. Cuando el universo entra en la región que rodea al big rip, la aproximación semiclásica deja de ser válida y el estado del universo viene dado por una superposición de estados [85], lo que muestra la naturaleza cuántica del estado del universo en esta región [70; 85].

Por tanto, podemos concluir que el proceso de decoherencia debido a la interacción del espacio-tiempo con un campo escalar con masa, considerado en este apartado, resulta efectivo para cada una de las ramas (en contracción o en expansión) semiclásicas del universo, en todos los casos considerados.

Este proceso de decoherencia también resulta ser efectivo para eliminar las interacciones entre las ramas en contracción y en expansión del universo. Como ocurre con el estado del universo dado por la condición de no-frontera, el estado del universo puede venir dado por una superposición de las ramas semiclásicas en expansión y en contracción, es decir,

$$\phi(a) \approx C(a)e^{-iS_c(a)}\chi^+(a, \varphi) + C^*(a)e^{iS_c(a)}\chi^-(a, \varphi), \quad (5.3.21)$$

con, $\chi^+ = (\chi^-)^*$. En este caso, aparecen cuatro términos en la matriz densidad de estados reducida [129]. Los términos ρ_{11} y ρ_{22} , correspondientes a cada una de las ramas en expansión y en contracción, respectivamente, vienen dados por las expresiones calculadas anteriormente (Ecs. (5.3.17, 5.3.18, 5.3.20)). Los términos cruzados, correspondientes a los términos de interferencia entre las diferentes ramas vienen dados por

$$(\rho_{21})^* = \rho_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi \chi^+(a, \varphi)(\chi^-(a', \varphi))^*, \quad (5.3.22)$$

que resultan ser [129],

$$\rho_{12}(a, a') \propto \left[\frac{(B^+(a) + \bar{B}^+(a))(B^-(a') + \bar{B}^-(a'))}{(B^+(a) + \bar{B}^-(a'))^2} \right]^{\frac{1}{4}}, \quad (5.3.23)$$

donde, $\bar{B} \equiv B^*$. En este caso, incluso para valores similares de los factores de escala, $a \approx a'$, los elementos de la matriz reducida, ρ_{12} y ρ_{21} , tienden a cero a medida que el factor de escala crece en el régimen semiclásico. Por ejemplo, para el régimen de energía fantasma, ρ_{12} resulta

$$\rho_{12} \approx \frac{1}{\sqrt{1 - i\frac{q}{c_0}(a^q + a'^q)}}, \quad (5.3.24)$$

y, por tanto, los valores de su diagonal,

$$|\rho_{12}(a, a)| \approx a^{-\frac{q}{2}}. \quad (5.3.25)$$

Por tanto, el proceso de decoherencia debido al acoplamiento de un campo escalar con masa resulta efectivo para eliminar los efectos de coherencia cuántica entre las distintas ramas semiclásicas del universo, en contracción y en expansión, respectivamente, y también para eliminar los que afectan a una misma rama. En el caso de considerar un campo escalar inhomogéneo sin masa [129; 130], estos procesos de decoherencia resultan ser aún más efectivos, ya que los solapamientos de las funciones de onda decaen de manera exponencial como consecuencia de integrar todos los modos inhomogéneos del campo escalar. En un universo con geometría espacial plana, como el utilizado en este apartado, el modelo utilizado en la Ref. [129] no puede aplicarse directamente ya que estos modos inhomogéneos del campo se acoplan al término de curvatura [131], que en el caso de un universo plano es nulo. De todos modos, el término de masa del campo escalar también se acopla al espacio-tiempo y, como hemos visto, este modelo también resulta efectivo para producir los efectos de decoherencia necesarios para desacoplar las distintas ramas del universo y los diferentes valores del factor de escala en una misma rama, en el régimen semiclásico.

5.3.2. Interacción con las fluctuaciones cuánticas de la métrica

En el formalismo de segunda cuantización podemos representar las fluctuaciones cuánticas de la métrica de un universo padre como un plasma de universos bebé. En ese caso, el universo padre se propaga en dicho plasma a lo largo de su evolución. La interacción del universo padre con las fluctuaciones cuánticas de su métrica da lugar a fenómenos de decoherencia entre las diferentes ramas del universo padre.

Consideremos un esquema de interacción en el formalismo de segunda cuantización, con un Hamiltoniano total dado por,

$$H_t = H_P + H_\varepsilon + H_{int}, \quad (5.3.26)$$

donde H_P es el Hamiltoniano correspondiente al universo padre, H_ε es el correspondiente al conjunto de universos bebé, y H_{int} es el Hamiltoniano de interacción. Como hemos visto en el Cap. 3, el Hamiltoniano que representa la evolución de un universo padre en segunda cuantización viene dado por el Hamiltoniano de un oscilador armónico con frecuencia dependiente del factor de escala,

$$H_P = \frac{1}{2}P_\Phi^2 + \frac{\Omega^2(a)}{2}\Phi^2, \quad (5.3.27)$$

con $\Omega(a) = \Omega_0 a^{q-1}$ y $q = \frac{3}{2}(1 - w)$. El Hamiltoniano correspondiente al conjunto de universos bebé, que consideraremos el reservorio del universo padre en este esquema

de interacción, viene dado por,

$$H_\varepsilon = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} p_{\phi_i}^2 + \frac{\omega_i^2}{2} \phi_i^2, \quad (5.3.28)$$

donde ω_i es una frecuencia constante, cuyo valor depende de las propiedades de los agujeros de gusano Euclídeos que conectan los universos bebé con el espacio-tiempo del universo padre, y el índice i etiqueta las posibles especies de universos bebé existentes en el plasma. Supondremos que el valor de la frecuencia ω_i es pequeña con respecto al valor de la frecuencia Ω_0 del universo padre, debido a la supresión exponencial de las fluctuaciones cuánticas del vacío gravitatorio. Por último, el Hamiltoniano de interacción, H_{int} , puede escribirse como,

$$H_{int} = \sum_i \lambda_i \Phi_P \otimes f(\phi_i), \quad (5.3.29)$$

donde λ_i es la constante de acoplamiento entre el campo que representa al universo padre y el que representa a los universos bebé de cada especie. La función $f(\phi_i)$ depende del tipo de interacción que se considere entre el universo padre y los universos bebé. Por ejemplo, en el caso considerado por Coleman [33; 132] y otros [133], en el que los universos bebé se crean de forma individual, $f(\phi_i) = \phi_i$, mientras que para el caso considerado por González-Díaz [34; 35], donde los universos bebé se crean en pares, $f(\phi_i) = \phi_i^2$. En general, $f(\phi_i)$ puede ser una función complicada de su argumento, y estos dos casos pueden considerarse como los primeros términos de su desarrollo en serie.

En el desarrollo siguiente, consideraremos una interacción de tipo lineal, es decir, $f(\phi_i) = \phi_i$. Siguiendo el formalismo utilizado en óptica cuántica para un esquema de interacción [58; 104; 121; 134], la matriz densidad de estados reducida, en la imagen de interacción, se puede escribir como²

$$\partial_a \rho_P^I = -\frac{1}{\hbar^2} \text{Tr}_b \int_{a_0}^a da' [H_{int}(a), [H_{int}(a'), \rho_t(a')]], \quad (5.3.30)$$

donde Tr_b significa la traza parcial sobre los grados de libertad correspondientes a los universos bebé y, $\rho_t = \rho_P \otimes \rho_b$, es la matriz densidad de estados de todo el sistema. En la aproximación de Born-Markov, $\rho_t(a') \approx \rho_P(a') \otimes \rho_b$, y, $\rho_P(a') \approx \rho_P(a)$, lo cual quiere decir que las correlaciones entre el universo padre y los universos bebé no son muy grandes, lo que está justificado si consideramos un tipo de interacción débil ($\lambda \ll 1$). En ese caso, el estado del plasma de universos bebé no varía significativamente en el intervalo en que se está considerando la interacción³, y el estado del universo padre es

²Más un término proporcional a $[H_{int}, \rho]$ que, con el tipo de interacción lineal considerado, es nulo.

³Es decir, en el intervalo que va desde a_0 hasta a , con, $(a - a_0) \ll a_0$.

local con respecto al factor de escala. En esta aproximación y con el tipo de interacción considerado, la Ec. (5.3.30) se puede escribir como

$$\partial_a \rho_P^I = - \sum_i \frac{\lambda_i^2}{\hbar^2} \int_{a_0}^a da' \{ \langle \phi_i(a) \phi_i(a') \rangle_b F(\Phi, \rho_P^I) + \langle \phi_i(a') \phi_i(a) \rangle_b G(\Phi, \rho_P^I) \}, \quad (5.3.31)$$

donde $\langle \rangle_b$ representa la traza sobre el estado de los universos bebé, y

$$F(\Phi, \rho_P^I) = \Phi(a) \Phi(a') \rho_P^I(a) - \Phi(a') \rho_P^I(a) \Phi(a) \quad (5.3.32)$$

$$G(\Phi, \rho_P^I) = \rho_P^I(a) \Phi(a') \Phi(a) - \Phi(a) \rho_P^I(a) \Phi(a'). \quad (5.3.33)$$

En la imagen de Schrödinger,

$$\partial_a \rho_P(a) = -\frac{i}{\hbar} [H_P, \rho_P(a)] + U_P^{-1}(a) (\partial_a \rho_P^I(a)) U_P(a), \quad (5.3.34)$$

donde $U_P(a)$ es el operador de evolución correspondiente al Hamiltoniano del universo padre, H_P , y por tanto, $U_P^{-1}(a) \Phi(a) U_P(a) = \Phi$, y, $U_P^{-1}(a) \Phi(a') U_P(a) = \Phi(a' - a)$. En este caso, la ecuación maestra (5.3.31) se puede escribir como [58],

$$\partial_a \rho_P(a) = -\frac{i}{\hbar} [H_P, \rho_P(a)] - \sum_i \frac{\lambda_i^2}{\hbar^2} \{ [\Phi, \mathcal{D}_i(a - a_0) \rho_P(a)] + [\rho_P(a) \mathcal{C}_i(a - a_0), \Phi] \}, \quad (5.3.35)$$

con,

$$\mathcal{D}_i(a - a_0) = \int_{a_0}^a da' \langle \phi_i(a) \phi_i(a') \rangle_b \Phi(a' - a), \quad (5.3.36)$$

$$\mathcal{C}_i(a - a_0) = \int_{a_0}^a da' \langle \phi_i(a') \phi_i(a) \rangle_b \Phi(a' - a). \quad (5.3.37)$$

Cuando integramos los grados de libertad de los universos bebé, la función de correlación puede escribirse como

$$\langle \phi_i(a) \phi_i(a') \rangle_b = \nu_i(a, a') - i\eta_i(a, a'), \quad (5.3.38)$$

y, $\langle \phi_i(a') \phi_i(a) \rangle_b = (\langle \phi_i(a) \phi_i(a') \rangle_b)^*$. La función de ondas del universo padre, en la representación de Heisenberg, está dada por

$$\Phi(u) = A(u) \Phi + B(u) P_\Phi, \quad (5.3.39)$$

donde, $u \equiv a - a_0$, y las funciones $A(u)$ y $B(u)$ satisfacen la ecuación de Wheeler-DeWitt (3.3.4) con la condición de contorno: $A(0) = 1$, $\dot{A}(0) = 0$, $B(0) = 0$ y $\dot{B}(0) = 1$. En ese caso, la ecuación maestra del estado del universo padre, Ec. (5.3.35), se puede escribir como [58]

$$\partial_a \rho_P = -\frac{i}{\hbar} [\tilde{H}_P, \rho_P] - i\gamma[\Phi, \{P_\Phi, \rho_P\}] - D[\Phi, [\Phi, \rho_P]] - f[\Phi, [P_\Phi, \rho_P]], \quad (5.3.40)$$

donde, $\tilde{H}_P \equiv H_P + \frac{\tilde{\Omega}}{2}\Phi^2$, es el Hamiltoniano perturbado con un nuevo valor de la frecuencia desplazado con respecto del valor inicial $\Omega(a)$. Este "desplazamiento Lamb" está dado por

$$\tilde{\Omega}(a) = -\frac{2}{\hbar} \int_{a_0}^a da' \eta(a', a) A(a' - a). \quad (5.3.41)$$

El coeficiente de disipación [58], $\gamma(a)$, por

$$\gamma(a) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_{a_0}^a da' \eta(a', a) B(a' - a), \quad (5.3.42)$$

el coeficiente de difusión normal [58], $D(a)$, por

$$D(a) = \frac{1}{\hbar^2} \int_{a_0}^a da' \nu(a', a) A(a' - a), \quad (5.3.43)$$

y el coeficiente de difusión anómala por,

$$f(a) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_{a_0}^a da' \nu(a', a) B(a' - a). \quad (5.3.44)$$

En mecánica cuántica, el coeficiente de difusión normal D nos da una medida de la longitud de decoherencia de un paquete Gaussiano [58]. En el caso del universo, este coeficiente nos proporciona por tanto una medida de la efectividad del proceso de decoherencia entre dos ramas del universo, Φ y Φ' , debido a la interacción con las fluctuaciones del vacío gravitacional.

Consideremos ahora las funciones de onda para el universo padre y los universos bebé. Estas últimas vienen dadas por las soluciones correspondientes a un oscilador armónico con frecuencia constante. En términos de los operadores de creación y destrucción, b_i^\dagger y b_i , se pueden escribir como

$$\phi_i(a) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_i}} \left(e^{-i\omega_i(a-a_0)} b_i + e^{i\omega_i(a-a_0)} b_i^\dagger \right), \quad (5.3.45)$$

donde hemos supuesto que el factor de escala del universo bebé es mucho menor que el del universo padre, es decir, que, $a_b \approx \varepsilon a_p \equiv \varepsilon a$, con un valor pequeño del parámetro ε , que hemos absorbido en el valor de ω_i (es decir, $\omega_i \rightarrow \omega_i \varepsilon$). En ese caso, la función de correlación resulta venir dada por

$$\begin{aligned} \langle \phi_i(a) \phi(a') \rangle_b &= \\ &= \frac{\hbar}{2\omega_i} \left(e^{-i\omega_i(a-a')} \langle b_i b_i^\dagger \rangle_b + e^{i\omega_i(a-a')} \langle b_i^\dagger b_i \rangle_b + e^{-i\omega_i(a+a'-2a_0)} \langle b_i^2 \rangle_b + e^{i\omega_i(a+a'-2a_0)} \langle (b_i^\dagger)^2 \rangle_b \right). \end{aligned} \quad (5.3.46)$$

En el caso de un baño térmico de universos bebé, $\langle b_i^2 \rangle_b = \langle (b_i^\dagger)^2 \rangle_b = 0$ y $\langle b_i^\dagger b_i \rangle_b = N_i(T) = \langle b_i b_i^\dagger \rangle_b - 1$, con

$$N_i(T) = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega_i}{k_B T}} - 1}.$$

El kernel de ruido, $\nu(a, a')$, y el kernel de disipación, $\eta(a, a')$, pueden escribirse entonces como [58]

$$\nu(a - a') = \sum_i \frac{\hbar \lambda_i^2}{2\omega_i} (2N_i + 1) \cos \omega_i(a - a'), \quad (5.3.47)$$

$$= \int_0^\infty d\omega J(\omega) \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \cos \omega(a - a'),$$

$$\eta(a - a') = \sum_i \frac{\hbar \lambda_i^2}{2\omega_i} \sin \omega_i(a - a'), \quad (5.3.48)$$

$$= \int_0^\infty d\omega J(\omega) \sin \omega(a - a'),$$

donde, $J(\omega) \equiv \sum_i \frac{\hbar \lambda_i^2}{2\omega_i} \delta(\omega - \omega_i)$, es la densidad espectral de universos bebé en la espuma espacio-temporal. Por otro lado, la función de ondas del universo padre está dada por la Ec. (5.3.39), con

$$A(u) = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2q}} \sqrt{\frac{\pi c_0 u}{2q}} \mathcal{J}_{-\frac{1}{2q}}\left(\frac{\Omega_0 u^q}{q\hbar}\right), \quad (5.3.49)$$

$$B(u) = \sqrt{\frac{\pi u}{2qc_0}} \mathcal{J}_{\frac{1}{2q}}\left(\frac{\Omega_0 u^q}{q\hbar}\right), \quad (5.3.50)$$

donde c_0 es una constante dada por, $c_0 = 2q\pi\Gamma^{-1}(\frac{1}{2q})(\frac{\Omega_0}{2q\hbar})^{\frac{1}{q}}$, siendo \mathcal{J}_n la función de Bessel de primera clase y orden n . Como hemos dicho anteriormente, en la aproximación de Born-Markov consideramos cambios pequeños en el factor de escala del universo padre; en ese caso, $a - a_0 \ll 1$ y $|a' - a| \ll 1$, y así, $A(a - a') \approx 1$ y $B(a - a') \approx (a - a')$. Por tanto,

$$\tilde{\Omega}(a) \approx -\frac{2}{\hbar} \int_{a_0}^a da' \eta(a', a) \approx -\frac{c_1}{\hbar} (a - a_0)^2, \quad (5.3.51)$$

$$\gamma(a) \approx -\frac{1}{\hbar^2} \int_{a_0}^a da' \eta(a', a)(a' - a) \approx \frac{c_1(a - a_0)^3}{3\hbar^2}, \quad (5.3.52)$$

$$D(a) \approx \frac{1}{\hbar^2} \int_{a_0}^a da' \nu(a', a) \approx \frac{c_2}{\hbar^2} (a - a_0), \quad (5.3.53)$$

$$f(a) \approx -\frac{1}{\hbar^2} \int_{a_0}^a da' \nu(a', a)(a' - a) \approx \frac{c_2(a - a_0)^2}{4\hbar^2}, \quad (5.3.54)$$

donde,

$$c_1 = \int_0^\infty d\omega \omega J(\omega), \quad (5.3.55)$$

$$c_2 = \int_0^\infty d\omega J(\omega) \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right), \quad (5.3.56)$$

son dos constantes que dependen de un cut-off que podemos introducir para tener en cuenta la contribución de todas las especies de universos bebé en la espuma espacio-temporal. La densidad espectral $J(\omega)$ reúne la información relativa a las propiedades del entorno [58], pudiéndose considerar otras funciones más generales de las usadas en las Ecs. (5.3.47-5.3.48). Es de esperar que la presencia de universos bebé en la espuma espacio temporal esté suprimida exponencialmente para grandes valores de la energía del universo bebé. Por tanto, podemos considerar la siguiente función para la densidad espectral del baño de universos bebé, $J(\omega) = J_0 \omega e^{-\frac{\omega}{\lambda}}$, donde J_0 y λ son dos constantes; la última de ellas puede interpretarse como una energía de corte para las fluctuaciones del vacío. En ese caso, $c_1 = 2J_0\lambda^3$, no depende de la temperatura del baño de universos bebé, es decir, no depende del número de fluctuaciones, y $c_2 = 2J_0\lambda T$, en el límite $\frac{\omega}{T} \ll 1$, es proporcional a la temperatura.

En el caso de un vacío aplastado, los términos que aparecen en la función de correlación (5.3.46) vienen dados por

$$\langle b_i^\dagger b_i \rangle = \sinh^2 r_i \equiv \tilde{N}_i, \quad (5.3.57)$$

$$\langle b_i b_i^\dagger \rangle = \cosh^2 r_i \equiv \tilde{N}_i + 1, \quad (5.3.58)$$

$$\langle b_i^2 \rangle = -\frac{1}{2} e^{i\theta_i} \sinh 2r_i, \quad (5.3.59)$$

$$\langle (b_i^\dagger)^2 \rangle = -\frac{1}{2} e^{-i\theta_i} \sinh 2r_i, \quad (5.3.60)$$

donde r_i y θ_i son los parámetros de aplastamiento. Los dos primeros términos son de forma equivalentes al caso del vacío térmico con un número efectivo de cuantos dado por, $\tilde{N}_i \equiv \sinh^2 r_i$. El kernel de disipación, $\eta(a, a')$, resulta ser el mismo que en el caso térmico, dado por la Ec. (5.3.48). Por tanto, el desplazamiento Lamb, $\tilde{\Omega}(a)$, y el coeficiente de disipación $\gamma(a)$ están dados por las Ecs. (5.3.51) y (5.3.52). Sin embargo, el estado aplastado del vacío introduce nuevos términos en el kernel de ruido, $\nu(a, a')$, que viene dado por

$$\nu_s(a - a') = \sum_i \frac{\hbar \lambda_i^2}{2\omega_i} \{ (2\tilde{N}_i + 1) \cos \omega_i(a - a') \quad (5.3.61)$$

$$- \sinh 2r_i \cos(\omega_i(a + a' - 2a_0) - \theta_i) \}. \quad (5.3.62)$$

El factor de decoherencia, $D(a)$, resulta ser

$$D(a) \approx \frac{c_2^s}{\hbar^2} (a - a_0), \quad (5.3.63)$$

con

$$c_2^s = \int_0^\infty d\omega J(\omega) (\cosh 2r(\omega) - \sinh 2r(\omega) \cos \theta(\omega)), \quad (5.3.64)$$

donde hemos considerado que los parámetros de aplastamiento r y θ son en general distintos para las diferentes especies de universos bebé. En el caso de la mecánica cuántica [58], el factor de decoherencia D mide la decoherencia de un paquete de ondas Gaussiano entre dos posiciones espaciales, x y x' , con un tiempo de decoherencia dado por [58], $\tau_D = \frac{1}{D(x-x')^2}$. En el caso del universo, Φ y Φ' representan diferentes ramas del universo padre, y la variable temporal en el formalismo de segunda cuantización es el factor de escala. De este modo, podemos estimar una escala de decoherencia entre las diferentes ramas del universo padre mediante, $a_D \sim \frac{1}{D(a)(\Phi-\Phi')^2}$, con $D(a)$ dado por la Ec. (5.3.53) en el caso de un vacío térmico, o dado por la Ec. (5.3.63) para el vacío aplastado. Para la rama en expansión del universo, el factor de decoherencia crece con el factor de escala y la escala de decoherencia se hace más pequeña, lo que significa que la interferencia cuántica entre las distintas ramas del universo es significativa sólo en escalas muy pequeñas, presumiblemente del orden de la longitud de Planck.

Por otro lado, el desplazamiento Lamb dado por la Ec. (5.3.51) puede interpretarse como un desplazamiento de la energía del vacío. Por ejemplo, para un universo dominado por energía de vacío la frecuencia inicial es, $\Omega(a) = \frac{\Omega_0}{\hbar}(a - a_0)^2$, donde Ω_0^2 es proporcional a la densidad de energía del vacío, es decir $\Omega_0^2 \propto \Lambda$, siendo Λ el valor de la constante cosmológica. Debido a la interacción con el plasma de universos bebé, la frecuencia efectiva del Hamiltoniano del universo padre resulta modificada, obteniendo

$$\Omega_{eff} = \Omega(a) + \tilde{\Omega}(a) = \frac{\Omega_0 - c_1}{\hbar}(a - a_0)^2.$$

Por tanto, la interacción de un universo padre con las fluctuaciones de su vacío gravitacional proporciona un mecanismo por el cual la constante cosmológica efectiva resulta menor, con un nuevo valor dado por $\Lambda_{eff} = (\Omega_0 - c_1)^2 < \Lambda_0$.

Magnitudes termodinámicas

Si suponemos que, $(a - a_0) \equiv \Delta a \ll 1$, y despreciamos términos no lineales, entonces podemos considerar solamente el coeficiente $D(\Delta a)$ en la ecuación maestra de la matriz densidad de estados (5.3.40). En ese caso, en el espacio de configuración de las funciones del universo padre, la ecuación maestra (5.3.40) resulta,

$$\partial_a \rho_P(\Phi, \Phi', a) = \left\{ -\frac{i}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \Phi'^2} - \frac{\partial^2}{\partial \Phi^2} \right) - \frac{i\Omega^2(a)}{2} (\Phi^2 - \Phi'^2) - D(a)(\Phi - \Phi')^2 \right\} \rho_P(\Phi, \Phi', a), \quad (5.3.65)$$

con, $D(a) \approx D_0(a - a_0)$, $D_0 = \frac{c_2}{\hbar^2}$, y $\Omega(a) \approx \Omega_{ef}(a_0) = \frac{\Omega_0 - c_1}{\hbar} a_0^q$. Esta ecuación puede resolverse mediante un ansatz Gaussiano [58; 134],

$$\rho(\Phi, \Phi', a) = e^{-A(a)(\Phi - \Phi')^2 - iB(a)(\Phi^2 - \Phi'^2) - C(a)(\Phi + \Phi')^2 - N(a)}, \quad (5.3.66)$$

donde los coeficientes $A(a)$, $B(a)$ y $C(a)$ satisfacen las siguientes ecuaciones diferenciales [134] (N es un factor de normalización),

$$\dot{A} = 4AB + D(a), \quad (5.3.67)$$

$$\dot{B} = 2B^2 - 8AC + \frac{1}{2}\Omega^2, \quad (5.3.68)$$

$$\dot{C} = 4BC. \quad (5.3.69)$$

Por ejemplo, consideremos que el universo viene inicialmente descrito por el estado separable siguiente [58],

$$\rho(\Phi, \Phi', a_0) = \left(\frac{1}{2\pi b^2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\Phi^2 + \Phi'^2}{4b^2}}. \quad (5.3.70)$$

En ese caso, las condiciones iniciales para los coeficientes $A(a)$, $B(a)$ y $C(a)$ son, $A(a_0) = C(a_0) = \frac{1}{8b^2}$, y $B(a_0) = 0$. En la aproximación, $\Delta a \ll 1$, y despreciando órdenes superiores a (Δa) , se obtiene (ver, Ap. A2 de la Ref. [134])

$$A(a - a_0) \approx \frac{1}{8}(1 + 16C_0(a - a_0)), \quad (5.3.71)$$

$$B(a - a_0) \approx \frac{C_0}{\Omega_0^2}(a - a_0), \quad (5.3.72)$$

$$C(a - a_0) \approx \frac{1}{8}, \quad (5.3.73)$$

donde, $C_0 = \Omega_0^4 - \frac{D_0}{8}$ (con, $b = 1$). Con estos coeficientes podemos obtener las propiedades termodinámicas del universo padre. Por ejemplo, la *pureza* del estado, ζ , viene dada por [58]

$$\zeta(a - a_0) = \sqrt{\frac{C(a)}{A(a)}} \approx \frac{1}{\sqrt{1 + 16C_0(a - a_0)}}. \quad (5.3.74)$$

La entropía lineal [134], $S_{lin} \equiv \text{Tr}(\rho - \rho^2)$, resulta ser

$$S_{lin} = 1 - \zeta \approx 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 16C_0(a - a_0)}}, \quad (5.3.75)$$

y la entropía del universo padre, que inicialmente es cero debido a que hemos considerado un estado puro como estado inicial (ver, Eq. (5.3.70)), crece debido a la interacción con el plasma de universos bebé como,

$$S = -\frac{1}{p_0}(p_0 \ln p_0 + q_0 \ln q_0), \quad (5.3.76)$$

donde [134],

$$p_0 = \frac{2\zeta}{1 + \zeta}, \quad (5.3.77)$$

$$q_0 = \frac{1 - \zeta}{1 + \zeta}. \quad (5.3.78)$$

La entropía lineal y la entropía, dadas por las Ecs. (5.3.75) y (5.3.75), respectivamente, están representadas en la Fig. (5.1). La interacción entre el universo padre y el plasma de universos bebé, hace evolucionar el estado del universo desde un estado puro a un estado mezcla. Esto significa que existe una pérdida de información del estado del universo padre como consecuencia de la interacción con las fluctuaciones del espacio-tiempo a lo largo de su evolución. Esta pérdida de información hace que las diferentes ramas del universo pierdan su coherencia cuántica y, junto con otros procesos de decoherencia, hacen que el universo pueda describirse en términos semiclásicos. No obstante, es importante destacar que la pérdida de información obtenida en este caso aparece como resultado de integrar los grados de libertad de los universos bebé. El sistema total, compuesto por el universo padre y el plasma de universos bebé, mantiene sin embargo toda la información del sistema a lo largo de la evolución del universo.

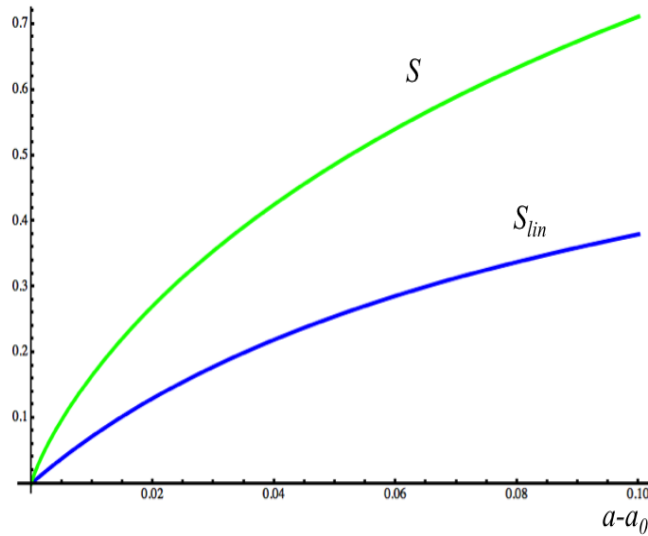


Figura 5.1: Entropía y entropía lineal del estado de un universo padre que interacciona con un plasma de universos bebé.

Cabe destacar que los resultados presentados en esta sección corresponden al caso de una interacción de tipo lineal entre el universo padre y el plasma de universos bebé, representado por un estado de tipo térmico. También se pueden analizar otros casos siguiendo el mismo procedimiento utilizado en esta sección. Por ejemplo, se puede plantear el esquema de interacción con una interacción del tipo, $H_{int} = \lambda \phi_b^2 \Phi_P$, lo que añadiría un término lineal en λ en la ecuación maestra (5.3.30), y modificaría las funciones de correlación en las integrales (5.3.36-5.3.37). También se puede plantear

el esquema de interacción de un universo padre con respecto a otros universos padres dentro del multiverso cuántico. En ese caso, las expansiones asintóticas de las funciones de Bessel en las funciones de correlación corresponderían a sus límites para argumentos grandes, que resultan ser de tipo oscilatorio. Por último, el formalismo de segunda cuantización también nos permite la posibilidad de analizar los procesos de decoherencia (o de coherencia) que puedan aparecer dentro del propio plasma de universos bebé, tanto en un estado de tipo térmico como en un estado de tipo aplastado, como el originalmente propuesto por Sidorov y Grishchuk [120]. Por tanto, el formalismo de segunda cuantización aporta la posibilidad de estudiar diversos escenarios de multiversos de forma relativamente sencilla, ya que su analogía formal con el formalismo usual de la óptica cuántica nos permite utilizar todas las herramientas desarrolladas en esta última.

5.4. Teoría cuántica generalizada en el universo fantasma

Como dijimos en el Cap. 2, al analizar el estado cuántico de un universo dominado por energía fantasma, la existencia de la región acronal que rodea a la singularidad del big rip no permite la foliación del espacio-tiempo en dicha región. De este modo, no es posible definir ni el estado cuántico del universo ni los campos de materia en una hipersuperficie espacial definida, en la formulación utilizada en el Cap. 2, por el valor del factor de escala, a . Además, la evolución del universo a lo largo de esta región acronal es no-unitaria [115] debido a la presencia de curvas temporales cerradas (CTC) [86], y, en ese caso, carece de sentido definir las probabilidades de una cierta alternativa α a través de su estado $|\psi(\sigma_a)\rangle$ como, $p(\alpha; \sigma_a) = \|P_\alpha|\psi(\sigma_a)\rangle\|^2$, donde P_α es el proyector del estado del sistema sobre la alternativa α , a medir en la hipersuperficie σ determinada por el valor del factor de escala a . Para que dicha asignación de probabilidades tuviera sentido, debería cumplirse que, $\sum_\alpha p(\alpha; a) = 1$, a lo largo de la evolución del universo. Sin embargo, bajo la evolución de un operador no-unitario, X , entre las hipersuperficies definidas por los valores a y a' , antes y después del big rip, respectivamente, tenemos que, $\sum_\alpha p(\alpha; a') = \langle\psi_\alpha(a)|X^\dagger X|\psi_\alpha(a)\rangle \neq 1$.

Por tanto, para describir cuánticamente todo el universo fantasma, cuando consideramos la existencia de agujeros de gusano que conectan las zonas anterior y posterior a la singularidad, necesitamos una generalización de la formulación ordinaria de la cosmología cuántica, y de su asignación de probabilidades.

La formulación de suma-sobre-historias [30; 31; 53] permite describir cuánticamente

un universo con regiones acronales [115], siempre que éstas estén espacial o temporalmente acotadas.

Consideremos esta formulación en un universo homogéneo e isótropo dominado por energía fantasma. Éste consiste en dos regiones del espacio-tiempo, anterior y posterior a la singularidad, que son foliables por una familia de hipersuperficies definidas por el valor del factor de escala, $\Sigma(a)$, y una región intermedia poblada de curvas temporales cerradas (ver, Fig. (2.4)). El funcional de decoherencia, $D(\alpha, \alpha')$, para dos alternativas α y α' , se define, en la formulación de suma-sobre-historias, como [87; 115]

$$D(\alpha', \alpha) = N \text{Tr} [P_{\alpha'_p}^p(\Sigma_p) \dots P_{\alpha'_{k+1}}^{k+1}(\Sigma_{k+1}) X P_{\alpha'_k}^k(\Sigma_k) \dots P_{\alpha'_1}^1(\Sigma_1) \rho P_{\alpha_1}^1(\Sigma_1) \dots P_{\alpha_k}^k(\Sigma_k) X^\dagger P_{\alpha_{k+1}}^{k+1}(\Sigma_{k+1}) \dots P_{\alpha_p}^p(\Sigma_p)], \quad (5.4.1)$$

donde los proyectores P_α forman una base, $\{P_{\alpha_p}\}$, que corresponde a un conjunto de alternativas exclusivas ($P_\alpha P_\beta = \delta_{\alpha\beta}$) y exhaustivas ($\sum_\alpha P_\alpha = \text{Id}$), y que están definidas en una hipersuperficie $\Sigma_k \equiv \Sigma(a_k)$. Las variables α_j denotan secuencias particulares de alternativas de tipo "coarse-graining", $\{\alpha\} = \alpha_1, \dots, \alpha_j$, que describen distintas historias del universo (distintas ramas del universo, en la interpretación de Everett). El conjunto exhaustivo de historias consiste entonces en todas las posibles secuencias $\{\alpha\}$.

La función ρ es la matriz densidad de estados que cumple las condiciones de frontera en una hipersuperficie espacial inicial, $\Sigma_0 \equiv \Sigma(a_0)$. Si el estado del universo en dicha hipersuperficie espacial viene dado por un estado puro, la matriz densidad de estados se escribe, en primera cuantización, como, $\rho(a_0, a'_0) = \phi(a_0)\phi(a'_0)$, donde $\phi(a_0)$ y $\phi(a'_0)$ son las funciones de onda del universo para dos valores, a_0 y a'_0 , del factor de escala. En segunda cuantización, $\rho(\Phi, \Phi', a_0) = \Phi\Phi'$, donde Φ y Φ' son las funciones de onda para el estado del universo. En el caso de que el estado del universo venga descrito por un estado mezcla, la matriz densidad de estados podría venir dada por alguna de las expresiones obtenidas en los capítulos anteriores (ver, Ecs. (2.3.26, 3.4.6, 3.4.7, 3.4.23), o en la sección anterior (ver, Ec. (5.3.66)).

En la Ec. (5.4.1), X es un operador de evolución generalizado que puede definirse en término de una matriz no unitaria X_s que reemplaza la matriz usual de evolución unitaria, U , del funcional de decoherencia para el caso de los espacio-tiempos que son completamente foliables (ver, Refs. [30; 31]). El operador de evolución X puede definirse como,

$$X = U(\Sigma_f, \Sigma_\infty)^{-1} X_s U(\Sigma_i, \Sigma_0), \quad (5.4.2)$$

en donde Σ_0 y Σ_∞ son las hipersuperficies iniciales y finales, esta última considerada en el infinito (es decir, para $t \rightarrow \infty$, $a \rightarrow 0$, ver, Fig. (2.4)), y Σ_i y Σ_f son la última y primera hipersuperficie correspondientes a las regiones foliables del espacio-tiempo,

antes y después de la singularidad, respectivamente. El factor de normalización N , en la Ec. (5.4.1), está dado por [115]

$$N = [\text{Tr}(X\rho X^\dagger)]^{-1}. \quad (5.4.3)$$

En ese caso, se puede demostrar [115] que el funcional generalizado de decoherencia, dado por la Ec. (5.4.1) es normalizable y hermítico, sus elementos diagonales son positivos, y satisface el principio de superposición siempre que [30; 31; 115],

$$D(\bar{\alpha}', \bar{\alpha}) = \sum_{\alpha' \in \bar{\alpha}'} \sum_{\alpha \in \bar{\alpha}} D(\alpha', \alpha)$$

para todos los "coarse grainings" $\{\bar{\alpha}\}$ de $\{\alpha\}$. De este modo, el funcional de decoherencia (5.4.1) permite asignar de manera consistente probabilidades a las diferentes alternativas, $\{\alpha\}$.

En la formulación de suma-sobre-historias, la asignación de probabilidades sólo puede establecerse para alternativas que han perdido su coherencia cuántica y cuyas medidas, por lo tanto, pueden considerarse independientes unas de las otras. Esta probabilidad, $p(\alpha)$, viene dada para dichas alternativas por el funcional de decoherencia a través de la relación $D(\alpha', \alpha) \approx \delta_{\alpha'\alpha} p(\alpha)$. Las probabilidades $p(\alpha)$, así definidas, sustituyen, en esta formulación, a la noción de estado del universo en nuestro modelo de universo dominado por energía fantasma.

En ese caso, estamos interesados en establecer, a partir de la Ec. (5.4.1), la probabilidad $p(\alpha, \Sigma; t_0, a)$ de un conjunto de alternativas para valores particulares de, t_0 , $a_0 \equiv a(t_0)$ y $P_\alpha [B(t_0, a)]$, que en nuestro modelo homogéneo e isótropo distinguen sólo valores del factor de escala en una región, $B(t_0, a)$, de una hipersuperficie Σ , que está separada espacialmente de la zona que no puede ser foliada, alrededor de la singularidad. La expresión general para la probabilidad $p(t_0, a)$ que se obtiene a partir del funcional de decoherencia (5.4.1) es,

$$\begin{aligned} p(\alpha, \Sigma'; t_0, a) &\equiv p(\alpha, \Sigma''; t_0, a) \\ &= N \text{Tr} \{ X P_\alpha [B(t_0, a)] \rho P_\alpha [B(t_0, a)] X^\dagger \} \\ &\equiv N \text{Tr} \{ P_\alpha [B(t_0, a)] X \rho X^\dagger P_\alpha [B(t_0, a)] \}, \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

donde en el último paso se ha tenido en cuenta que la región $B(t_0, a)$ está separada por una distancia de tipo espacio de la región acausal, y por tanto, $[X, P_\alpha] = 0$. Por último, la cantidad

$$p(\alpha, \Sigma') \equiv p(\alpha, \Sigma'') = \int_0^\infty dt_0 \int_0^\infty da p(\alpha, \Sigma^{(v)}; t_0, a), \quad (5.4.5)$$

donde el índice (v) indica ' o a ', para una hipersuperficie antes y después de la singularidad, respectivamente. La Ec. (5.4.5) es la expresión más general para la probabilidad de un conjunto de alternativas que distinguen el valor del factor de escala en secciones espaciales que están separadas de la región que rodea al big rip. Como hemos dicho, estas probabilidades sustituyen a la idea de estado del universo, para el caso del multiverso dominado por energía fantasma.

Una característica a destacar es que, debido a la no-unitariedad del operador de evolución en las proximidades del big rip, representado en la Ec. (5.4.4) por el operador no-unitario X , las probabilidades para un conjunto de alternativas, dadas por la Ec. (5.4.5), definidas en una región local de una hipersuperficie dada, por ejemplo, las probabilidades para experimentos realizados en las proximidades de nuestra galaxia, dependerían del estado del universo en la región que rodea la singularidad. Es decir, en espacio-tiempos con regiones acronales futuras, las probabilidades para sucesos en el presente dependerían del estado del universo en la región acronal futura [115], de la misma manera que las probabilidades para eventos pasados⁴ dependen del estado actual del universo. De hecho, por la propiedad cíclica de la traza, la Ec. (5.4.4) puede escribirse como,

$$p(\alpha, \Sigma'; t_0, a) = N \text{Tr} \{ \rho_f P_\alpha [B(t_0, a)] \rho P_\alpha [B(t_0, a)] \}. \quad (5.4.6)$$

donde la matriz densidad, ρ_f , viene dada en función del operador no unitario X , como $\rho_f = X X^\dagger$. Esto significaría que experimentos locales (en los alrededores del sistema solar o de la Galaxia), podrían proporcionar diferentes resultados dependiendo de si dicha región acronal existe en nuestro futuro. Teóricamente, esta sería una forma de comprobar la existencia de dichas regiones singulares en el futuro de nuestro universo, si éste está dominado finalmente por una energía de tipo fantasma, y también de medir propiedades globales del universo a partir de experimentos locales. De todas formas, la dependencia de estos experimentos locales con respecto a la existencia de dicha región singular futura es previsiblemente de un orden de magnitud tal que, en la práctica, dichos efectos serían difícilmente observables.

⁴Por contraposición a la predicción de eventos futuros basados en el estado presente del universo, Hartle llama "retrodicción" al análisis de las probabilidades para eventos pasados a partir del estado actual del universo. Ver, Ref. [30].

Durante siglos los físicos han pensado que la materia es la sustancia primitiva, la base de las teorías físicas. Yo creo que ahora existe un movimiento que concibe la información como la magnitud primaria y la materia como algo que emerge de un entendimiento correcto de la información [...], aunque de momento sólo podemos hacer conjeturas, porque todavía no lo comprendemos del todo.

Paul Davies, en "Cara a cara con la vida, la mente y el universo"

Capítulo 6

Información cuántica en el multiverso

6.1. Violación de las desigualdades clásicas en óptica cuántica

En óptica cuántica existen estados que violan ciertas desigualdades que se satisfacen en la descripción clásica de los fenómenos que representan, lo que indica que la teoría clásica no puede describir todos los fenómenos ópticos¹. Estos fenómenos sin análogo clásico, entre los que cabe destacar [57]: el antiapelonamiento fotónico, la violación de la desigualdad de Cauchy-Schwartz y la violación de las desigualdades de Bell, permiten analizar las características fundamentales de la teoría cuántica y sus elementos diferenciadores con respecto a la descripción clásica.

Lo que se viola en estos experimentos de óptica cuántica son una serie de presupuestos que se consideran clásicos (onda electromagnética), y esto induce la consideración de otros presupuestos que se consideran cuánticos (fotón).

Por ejemplo, el dispositivo experimental típico utilizado para medir la violación de la desigualdad clásica $g^{(2)}(0) \geq 1$ (apelonamiento fotónico), está representado en la Fig. 6.1. Clásicamente, el haz de luz incidente es dividido en dos haces idénticos y la medida de, $\frac{\langle I_{A1} I_{A2} \rangle}{\langle I_{A1} \rangle \langle I_{A2} \rangle}$, es una medida de $g^{(2)}(0)$ (ver, Ref. [57]). Cuánticamente, sin embargo, el fotón no se divide en dos fotones al alcanzar el espejo semireflectante, sino que o bien toma el camino 1 o bien toma el camino 2. El hecho de considerar que el fotón no es dividido en dos, como ocurriría con un haz clásico de luz (una onda electro-

¹Por teoría clásica entendemos una teoría donde los procesos causales, descritos mediante interacciones, son procesos fundamentalmente locales en el espacio-tiempo.

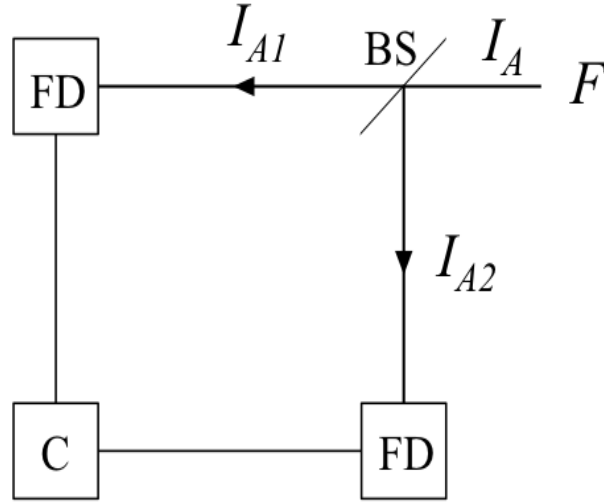


Figura 6.1: Dispositivo experimental para comprobar el efecto de antiapotonamiento fotónico [57]: BS, desdoblador de haz ('beam splitter'); F, Fuente de luz; FD, fotodetector; C, correlador.

magnética), otorga al fotón un criterio de realidad como ente individual e indivisible. Esta característica corpuscular del fotón se pone también de manifiesto en el efecto fotoeléctrico, y es de hecho el postulado que Einstein utilizó para describir correctamente este efecto y que puede establecerse como el origen de la mecánica cuántica.

Sin embargo, este carácter corpuscular no implica que podamos interpretar los fotones como partículas clásicas. Tanto en estos experimentos como en los de autointerferencia de tipo rendija de Young con partículas materiales, el concepto de partícula como ente individual, independiente y localizado en una determinada región del espacio-tiempo puede ser confuso. Más bien, el concepto cuántico de partícula debe ser interpretado, en general, como una propiedad global del campo que describen, y cuya localización y la independencia de sus propiedades depende de la *separabilidad* de sus estados con respecto al estado del resto del universo.

Por otro lado, la violación de las desigualdades clásicas está asociada con distribuciones de probabilidad negativas, ya que si

$$\langle I \rangle = \int P(I) I dI, \quad (6.1.1)$$

con $P(I)$ siendo una función positiva, entonces se cumple que

$$g^{(2)}(0) \equiv \frac{\langle I^2 \rangle}{\langle I \rangle^2} = 1 + \frac{1}{\langle I \rangle^2} \int dI P(I) (I - \langle I \rangle)^2 \geq 1. \quad (6.1.2)$$

Para obtener un resultado $g^{(2)}(0) < 1$ (antiapletonamiento fotónico), $P(I)$ debe ser una función negativa para algún valor de I . Otro ejemplo es la violación de la desigualdad de Cauchy-Schwartz por parte de los estados aplastados de la óptica cuántica [57].

Más importante aún es la violación por parte de algunos estados cuánticos de las desigualdades de Bell [56]. Bell derivó una desigualdad² que debe cumplir cualquier teoría local de variables ocultas. La violación de esta desigualdad se ha comprobado experimentalmente en óptica cuántica, lo que muestra precisamente el carácter no-clásico de la teoría. Los estados aplastados de óptica cuántica también pueden violar esta desigualdad cuando el parámetro de aplastamiento r es pequeño [57]. Cuando el parámetro de aplastamiento supera un cierto límite, la violación de las desigualdades de Bell desaparece. Esto sucede porque el número efectivo de fotones aumenta con el parámetro de aplastamiento ($\langle N_e \rangle = \sinh^2 r$) y, por tanto, las correlaciones puramente cuánticas del par inicial de fotones desaparecen. El campo electromagnético puede describirse entonces como dos haces de luz clásicos, con intensidades $I_1 = I_2$.

Una vez analizadas las violaciones de las desigualdades clásicas en óptica cuántica, podemos preguntarnos acerca de efectos similares en el multiverso y si, de producirse las correspondientes violaciones por parte de algunos estados, éstas pueden interpretarse en términos análogos a como se interpretan en óptica cuántica. En particular, la violación de las desigualdades clásicas en el multiverso podría asociarse al carácter "corpúscular" del universo. Esto parece evidente en el estado $N = 1$ del oscilador armónico que representa, en el modelo de segunda cuantización, el estado del universo, pero, ¿qué ocurre entonces con el estado $N = 2$? ¿puede interpretarse como el estado correspondiente a un par de universos? De ser así, ¿deben entonces considerarse correlaciones cuánticas entre los estados del multiverso que produzcan algún efecto observable en cada uno de los universos individuales? En las siguientes secciones extenderemos la analogía formal entre el campo electromagnético y la función de ondas del universo en segunda cuantización, y analizaremos estas y otras preguntas relacionadas.

²Posteriormente, se han derivado más desigualdades del mismo tipo, son las llamadas desigualdades de CHSH (ver, por ejemplo, Refs. [99; 100; 100; 104]). Una derivación sencilla de estas desigualdades puede encontrarse en la Ref. [104], en la que se muestra como su violación está también relacionada con la negatividad de las distribuciones de probabilidad.

6.2. Entrelazamiento cuántico en el multiverso

6.2.1. Universos bebé acelerados y entrelazamiento cuántico

Los estados aplastados, que como hemos visto en la sección anterior no tienen análogo clásico, aparecen también en la descripción del espacio-tiempo. Grishchuk y Sidorov demostraron [120] que las ondas gravitacionales generadas por una perturbación del vacío gravitatorio evolucionan de forma que se transforman en estados aplastados. Por otro lado, Coleman y otros [33; 132; 133] analizaron si las fluctuaciones cuánticas del espacio-tiempo podían o no inducir una pérdida de coherencia cuántica en los campos de materia. Estos autores consideraron que las fluctuaciones del espacio-tiempo venían descritas en términos de agujeros de gusano Euclídeos que están presentes en la espuma espacio-temporal del vacío gravitatorio [42; 96], concluyendo que la creación de agujeros de gusano simplemente conexos no induce tal pérdida de coherencia cuántica en el sector de los campos de materia. Sin embargo, González-Díaz demostró [34; 35] que si se consideran agujeros de gusano Euclídeos múltiplemente conexos, que en alguna medida también deben estar presentes en la espuma espacio-temporal, el estado del vacío gravitatorio induce también un estado de tipo aplastado en el vacío de los campos de materia, con la consiguiente pérdida de coherencia cuántica en dicho sector y la violación de las desigualdades clásicas.

Este debate sobre la pérdida o no de coherencia cuántica inducida en los campos de materia por el estado cuántico del vacío gravitatorio se puede analizar también en el esquema de creación de universos bebé en segunda cuantización, desarrollado en el Cap. 3. Como ya se comentó entonces, el efecto del plasma de universos bebé³ en el estado del vacío gravitatorio del universo padre viene dado por un operador de inserción, que define los puntos del espacio-tiempo del universo padre donde los universos bebé se nuclean. El Hamiltoniano de interacción puede escribirse de forma general como,

$$H_I(\varphi, \phi_B) = \sum_i f_i(\varphi) B_i(b_i, b_i^\dagger), \quad (6.2.1)$$

donde, φ representa los campos de materia, $f_i(\varphi)$ es una función de acoplo de los campos de materia con el espacio-tiempo, ϕ_B es el campo cuantizado correspondiente a los universos bebé, siendo b_i and b_i^\dagger sus operadores de aniquilación y creación, respectivamente, y la suma se extiende sobre todas las especies de universos bebé que pueden considerarse en la espuma espacio-temporal (lo que está relacionado con las diferentes

³La creación de agujeros de gusano Euclídeos y la de universos bebé está directamente relacionada ya que los segundos se corresponden con el sector Lorenziano de los primeros. Es decir, los agujeros de gusano Euclídeos conectan el espacio-tiempo del universo padre con los universos bebé.

especies de agujeros de gusano Euclídeos que pueden formarse). La pérdida de coherencia cuántica, así como el aplastamiento del estado de vacío del sector de los campos de materia, dependen crucialmente de la forma del operador de inserción, B_i .

En las Refs. [33; 132; 133] se establece que el operador de inserción para agujeros de gusano simplemente conexos, con un universo bebé en cada extremo del agujero de gusano, es de la forma

$$B_i = b_i^\dagger + b_i. \quad (6.2.2)$$

En ese caso, no se produce ninguna pérdida de coherencia cuántica en el sector de los campos de materia. Se puede demostrar que los términos lineales de los operadores de Fock no producen estados aplastados del vacío ni otros estados con correlaciones cuánticas⁴, ya que estos estados cuánticos sin análogo clásico están asociados con términos cuadráticos o superiores de estos operadores [57]. A diferencia del argumento de Coleman, en las Refs. [34; 35] se consideran agujeros de gusano Euclídeos multiplemente conexos, con dos o más universos bebé en los extremos de cada uno de ellos, que sí inducen la creación de estados aplastados en el vacío gravitatorio y la pérdida de coherencia cuántica para el sector de los campos de materia. Por ejemplo, para agujeros de gusano Euclídeos doblemente conexos, el operador de inserción puede aproximarse, hasta orden 2 en el parámetro β , como [34; 35],

$$B_i^{DC} \approx \beta \left((b_i^\dagger)^2 + b_i^2 \right) - 2\beta^2 \left(b_i^\dagger b_i + \frac{1}{4} \right), \quad (6.2.3)$$

y, en tal caso⁵ aparecen correlaciones cuánticas y la interacción de los campos de materia con el vacío gravitatorio aplasta el estado de vacío de los campos de materia, lo que se traduce en una pérdida de coherencia cuántica de estos últimos [34; 35].

Respecto del posible estado no-clásico para universos padre de tipo acelerante como nuestro propio universo, la cuestión es más difícil de analizar. Parece que podría establecerse una cierta relación entre universos acelerantes y universos bebé que, de confirmarse, podría considerarse como un indicio de que la existencia de este tipo de universos podría estar asociada a efectos cosmológicos cuánticos sin análogo clásico. Aún así, esta relación debe tomarse únicamente como un posible indicio del carácter no-clásico de los universos macroscópicos acelerantes.

Consideremos un universo bebé de Tolman-Hawking [135; 136], que corresponde al sector Lorentziano de un agujero de gusano Euclídeo, y viene representado por un

⁴En general, estos términos lineales de los operadores de Fock producen estados coherentes (usuales).

⁵Nótese la similitud de los términos cuadráticos en el Hamiltoniano de interacción con el Hamiltoniano de un oscilador paramétrico degenerado en óptica cuántica [104; 121].

espacio-tiempo espacialmente cerrado descrito por la métrica,

$$ds^2 = a^2(\eta)(-d\eta^2 + d\Omega_3^2), \quad (6.2.4)$$

donde $\eta = \int dt/a(t)$ es el tiempo conforme, $d\Omega_3^2$ es la métrica unidad en la 3-esfera, y $a(\eta)$ es el factor de escala dado por,

$$a_b(\eta) = R_0 \cos \eta, \quad (6.2.5)$$

siendo R_0 el radio máximo del universo bebé y $a_b(t) = \sqrt{R_0^2 - t^2}$.

Por otro lado, la métrica de un "warp-drive" bidimensional puede expresarse en términos del tiempo conforme de manera explícitamente cosmológica como la métrica (6.2.4), con [137–139],

$$a_w(\eta) = \frac{R'_0}{\cos \eta}, \quad (6.2.6)$$

donde R'_0 es el radio máximo del espacio local de tipo de Sitter cerrado. Por tanto, se puede establecer una simetría dual, $a \rightarrow \frac{1}{a}$, entre un warp-drive bidimensional, con métrica dada por la Ec. (6.2.5), y un universo bebé de Tolman-Hawking bidimensional con la métrica dada por la Ec. (6.2.6).

Esta simetría entre un warp-drive bidimensional, que posee características de un universo acelerado de tipo de Sitter [138; 139], y un universo bebé de Tolman-Hawking recuerda a la forma de la dualidad T existente en las teorías de cuerdas. En éstas, existe una simetría entre el radio de curvatura R y el "radio dual" [40], $R_D \equiv \frac{\alpha'}{R}$, que relaciona los sectores del universo correspondientes a valores grandes y pequeños del radio de curvatura. Si esta simetría puede aplicarse a la relación entre universos macroscópicos acelerantes y a universos bebé como el de Tolman-Hawking, entonces los efectos cuánticos sin análogo clásico asociados a la creación de los universos bebé podrían también asociarse a la existencia de universos acelerantes.

Otro caso de universo bebé que también es equivalente a la métrica de un warp-drive bidimensional es el universo bebé axiónico de Giddings-Strominger [140], cuya métrica viene dada por la Ec. (6.2.4), con

$$a_{GS} = R_0^{GS} \cos^{\frac{1}{2}}(2\eta). \quad (6.2.7)$$

Existe también una solución tal que [114],

$$a_d = \frac{R_0^d}{\cos^{\frac{1}{2}}(2\eta)}, \quad (6.2.8)$$

cuyo factor de escala en función del tiempo de Robertson-Walker viene dado en función de integrales elípticas,

$$a(t) = R_0^{dnc} \left(\frac{\sqrt{2t}}{R_0^d} \right), \quad (6.2.9)$$

con $0 < t < R_0^d \frac{K(1/\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$ y $K(x)$ es la integral elíptica completa de primera clase, y no es una de las funciones elípticas de Jacobi [141]. Con una redefinición del tiempo [114]

$$\theta = \sqrt{2} \int dt dc \left(\frac{\sqrt{2}t}{R_0^d} \right), \quad (6.2.10)$$

la métrica (6.2.4), con (6.2.8), se puede escribir finalmente como [114],

$$ds^2 = -d\theta^2 + R_0^{d2} \cosh^2 \frac{\theta}{R_0^d} d\rho^2, \quad (6.2.11)$$

con $0 < \theta < \infty$, y puede ser interpretada también como la métrica de un warp-drive bidimensional [137–139], y por tanto establecer las mismas conclusiones que en el caso de la relación entre los universos bebé de Tolman-Hawking y los universos macroscópicos acelerados.

De forma más general, consideremos las soluciones para un universo homogéneo e isótropo, espacialmente cerrado y dominado por un fluido con ecuación de estado $p = w\rho$, siendo w un parámetro constante. En ese caso, a partir de la ecuación de conservación de la energía cósmica, $d\rho = -3(p + \rho)\frac{da}{a}$, obtenemos, en función del tiempo conforme η , las siguientes soluciones [142]

$$\eta - \eta_0 = \pm \int \frac{da}{a\sqrt{\lambda_0^2 a^{2\alpha} - 1}} = \pm \frac{1}{\alpha} \arccos \frac{1}{\lambda_0 a^\alpha}, \quad (6.2.12)$$

siendo λ_0 una constante y, $-2\alpha = 1 + 3w \neq 0$. Los universos que resultan de estas soluciones cosmológicas pueden describirse entonces por la métrica (6.2.4), con un factor de escala dado por

$$a(\eta) = R_0^\alpha \cos^{-\frac{1}{\alpha}}(\alpha\eta), \quad (6.2.13)$$

con $R_0^\alpha \equiv \lambda_0^{-\frac{1}{\alpha}}$. Como casos particulares, tendríamos, para los valores $\alpha = \pm 1$ ($w = -1$ y $w = \frac{1}{3}$, respectivamente), el universos bebé de Tolman-Hawking (6.2.5) y su dual (6.2.6), y para el universo bebé de Giddings-Strominger, Ec. (6.2.7) y su dual (6.2.8), los valores $\alpha = \pm 2$ ($w = 1$ y $w = -\frac{5}{3}$, respectivamente). Otro valor interesante es, $\alpha = \pm \frac{1}{2}$, que corresponde a $w = -\frac{2}{3}$ (universo dominado por un fluido de tipo quintaesencia), que puede identificarse con un agujero de gusano Euclídeo cuyo factor de escala en el sector Lorentziano (universo bebé) viene dado por [114],

$$a(\eta) = M \cos^2(\eta/2). \quad (6.2.14)$$

Por tanto, la dualidad $a \rightarrow \frac{1}{a}$, que corresponde a un cambio de signo, $\alpha \rightarrow -\alpha$, en la Ec. (6.2.13), podría ser un indicio de que los universos acelerantes, para los que $\alpha > 0$, son duales a la creación de universos bebé con $\alpha < 0$, y por tanto ser de naturaleza

esencialmente cuántica en el sentido de que los estados correspondientes a pares de universos bebé violan las desigualdades clásicas⁶ [34; 35; 114].

Otro indicio en favor de la naturaleza cuántica de los universos bebé acelerantes podría obtenerse también a partir de su formulación Hamiltoniana Euclídea. Consideremos un universo homogéneo e isótropo con geometría espacial cerrada, cuyas soluciones clásicas vienen dadas por la Ec. (6.2.12). Cuánticamente, el Hamiltoniano Euclídeo en primera cuantización (ecuación de Wheeler-De Witt Euclídea) viene dado, en el gauge conforme, por

$$H_e = \frac{1}{2}p_e^2 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}\rho_0 a^{2(q-1)}, \quad (6.2.15)$$

donde $p_e \equiv i\dot{a}$, es el momento Euclídeo conjugado al factor de escala. Para universos cerrados sin fluido ($\rho_0 = 0$), el Hamiltoniano (6.2.15) corresponde al Hamiltoniano de un oscilador armónico con frecuencia unidad. En ese caso, en términos de los operadores de creación y destrucción de universos bebé cerrados, b y b^\dagger , el Hamiltoniano (6.2.15) adquiere su forma usual, $H = b^\dagger b + \frac{1}{2}$. En cambio, para valores $w < -\frac{1}{3}$ ($q > 2$), los cuales implican una violación de la condición débil de la energía ($\rho + 3p > 0$), el Hamiltoniano puede escribirse en función de los mismos operadores como

$$H = b^\dagger b + f(b, b^\dagger), \quad (6.2.16)$$

donde $f(b, b^\dagger)$ es una función polinómica de orden mayor que 2. Hamiltonianos con términos de este tipo están asociados en óptica cuántica con la generación de estados cuánticos sin análogo clásico. Extendiendo el mismo razonamiento a la generación de universos bebé, puede sugerirse que la creación de universos bebé acelerantes conlleva también efectos cuánticos sin análogo clásico. En particular, para un espacio de de Sitter, el Hamiltoniano (6.2.15) resulta ser el de un oscilador anarmónico, el cual presenta correlaciones de alto grado y violaciones de las desigualdades clásicas [143].

En cualquier caso, la extensión de los efectos cuánticos sin análogo clásico a universos macroscópicos solo puede considerarse como una propuesta que permita sospechar de una relación entre universos acelerantes y efectos puramente cuánticos. El propio significado de las violaciones de Bell resulta confuso para universos macroscópicos. Estas desigualdades están relacionadas con correlaciones cuánticas entre las medidas de dos subsistemas. Sin embargo, en un universo macroscópico el observador es un elemento interno al universo, y por tanto tales medidas no pueden realizarse⁷ sino, en el

⁶En la siguiente sección estudiaremos en mayor profundidad este fenómeno.

⁷Un observador solo podría obtener medidas de su propio universo.

mejor de los casos, sólo inferirse.

En las siguientes secciones aplicaremos el formalismo utilizado en óptica cuántica al estado cuántico del multiverso en segunda cuantización, y analizaremos hasta qué punto esta aplicación puede ser válida y pueden extraerse conclusiones análogas a las obtenidas en óptica cuántica.

6.2.2. Violación de las desigualdades clásicas en el multiverso

Similitudes y diferencias entre la óptica cuántica y el multiverso

Los estados aplastados en óptica cuántica pueden asociarse con efectos cuánticos sin análogo clásico en el sentido de que violan ciertas desigualdades clásicas. Como hemos visto en la Sec. 6.1, la violación de las desigualdades clásicas en óptica cuántica puede asociarse con la individualidad del fotón y con la no-localidad de su estado. En último extremo, esta no-clasicidad está relacionada con una característica fundamental de la teoría cuántica: con su postulado de complementariedad, por el que los sistemas cuánticos pueden presentar propiedades corpusculares u ondulatorias dependiendo del dispositivo experimental que se utilice para observarlos.

Por otro lado, a lo largo de esta memoria hemos visto que el estado cuántico del multiverso puede venir dado, en segunda cuantización, por un estado aplastado. De este modo, podría inferirse que el estado cuántico del multiverso puede corresponder también, en general, al de un estado no-clásico. Sin embargo, el concepto de localidad o no-localidad pierde su sentido en el contexto del multiverso, en el que no tiene que existir necesariamente un espacio-tiempo común, y se transforma en el concepto de independencia o interdependencia de sus estados cuánticos, es decir, en su no-separabilidad. De este modo, la no-clasicidad de los estados cuánticos del multiverso y la complementariedad de la teoría cuántica aplicada al multiverso, nos permite considerar universos individuales cuyos estados cuánticos puedan no ser independientes y estar correlacionados.

La diferencia crucial entre el concepto de fotón y el de universo, desde el punto de vista de la analogía formal que estamos asumiendo en esta memoria, está en su medida experimental. En el caso del fotón el observador es un elemento externo al propio fotón, mientras que en el caso del universo el observador es un elemento interno. Esto permite que podamos considerar y medir (o estimar) el número de fotones de la radiación electromagnética mientras que, por el contrario, no podemos observar más universo que el nuestro propio. Este hecho descartaría como físicamente admisible el estudio del multiverso. Sin embargo, si la creación de universos se produce en pares

cuyos estados están correlacionados, entonces pueden considerarse los efectos que las correlaciones cuánticas pueden inducir en el estado de cada uno de los universos individuales. Estos efectos, entre los que cabría destacar el entrelazamiento de los estados de dos universos, podrían dar lugar, por ejemplo, a una energía de vacío que tuviese consecuencias predecibles y observables en la evolución del universo.

Por tanto, aunque las diferencias entre los estados de la óptica cuántica y los del multiverso son ciertamente notables, el estudio de los estados cuánticos sin análogo clásico como los estados entrelazados en el multiverso está justificado por dos motivos principalmente: por un lado, podrían proporcionar mecanismos para explicar la evolución del universo y, en particular, explicar el valor tan bajo de la energía de vacío de nuestro universo actual; por otro lado, podrían arrojar luz sobre conceptos fundamentales en la teoría cuántica como son el de la complementariedad, el problema de la representación o la descripción termodinámica de un sistema cuántico cerrado.

Violaciones de las desigualdades clásicas en el multiverso

Como vimos en el Cap. 3, las distintas representaciones del estado cuántico del multiverso están relacionadas en el formalismo de segunda cuantización mediante transformaciones de aplastamiento. El problema en el multiverso surge al determinar qué representación es la más apropiada para describir su estado cuántico. En el Cap. 4, relacionamos el análogo en el multiverso de los estados de Lewis con los estados del oscilador armónico de frecuencia unidad. Éstos no dependen del valor del factor de escala y pueden considerarse, en general, una representación adecuada para describir el estado del multiverso. En este apartado consideraremos dicha relación y las violaciones de las desigualdades clásicas con respecto al valor del factor de escala y al tipo de fluido que domina la evolución del universo.

La relación entre ambas representaciones está dada por la transformación de aplastamiento definida por las Ecs. (3.3.36-3.3.39),

$$b(a) = \mu_0 b_0 + \nu_0 b_0^\dagger, \quad (6.2.17)$$

$$b^\dagger(a) = \mu_0^* b_0^\dagger + \nu_0^* b_0, \quad (6.2.18)$$

donde,

$$\mu_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} + R - i\dot{R} \right), \quad (6.2.19)$$

$$\nu_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} - R - i\dot{R} \right), \quad (6.2.20)$$

con, $|\mu_0|^2 - |\nu_0|^2 = 1$, donde b y b^\dagger son los operadores de aniquilación y creación de los

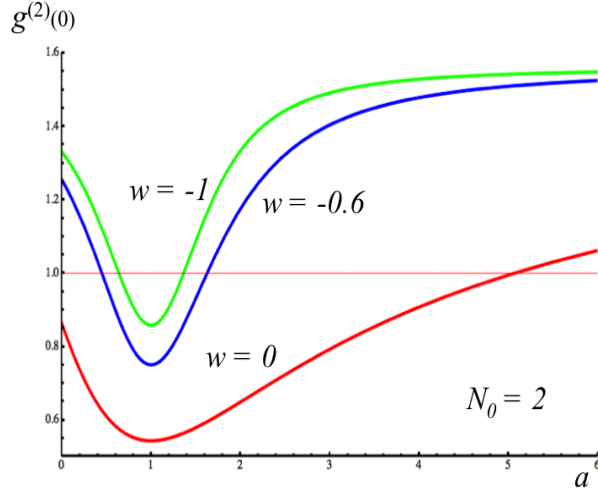


Figura 6.2: Análogo al efecto de antiapetonamiento, Ec. (6.2.21); para distintos valores del parámetro w en la ecuación de estado del fluido que domina la expansión del universo.

estados de Lewis, $|N, a\rangle$, y b_0 y b_0^\dagger son los de aniquilación y creación de los estados del oscilador armónico de frecuencia unidad, $|N\rangle$.

En tal caso, la función de correlación de segundo grado, $g^{(2)}(0)$, resulta ser,

$$g^{(2)}(0) = 1 + \frac{14x^4 + 9x^2 - 2}{25x^4 + 20x^2 + 4}, \quad (6.2.21)$$

con, $x \equiv |\nu_0|$. La función (6.2.21) está representada en la Fig. 6.2 para distintos valores del parámetro w y para $N_0 = 2$. Para valores cercanos a $a = 1$, $N = |\nu_0|^2 \approx 2$, y la función de correlación toma valores menores de la unidad (ver, Fig. 6.2). Para valores grandes y pequeños del factor de escala, el efecto desaparece. Este resultado es consistente pues la representación $|N\rangle$ es equivalente, salvo fases, a la representación $|N, a\rangle$ para un valor $a = 1$. Este hecho pone de manifiesto la alta dependencia de las violaciones de las desigualdades clásicas de la representación utilizada para caracterizar el estado cuántico del multiverso.

La violación de la desigualdad de Cauchy-Schwartz, como se ha visto en la Sec. 6.1, es violada para todo valor distinto de cero del parámetro de aplastamiento. Por tanto, los estados aplastados dados por las relaciones (6.2.17-6.2.18), en su versión no degenerada, también violan esta desigualdad para un valor $a \neq 0$.

Más importante es la violación de las desigualdades de Bell. La violación de dicha

igualdad se produce cuando [57],

$$C = \frac{\langle b_1^\dagger b_1 b_2^\dagger b_2 \rangle}{\langle b_1^\dagger b_1 b_2^\dagger b_2 \rangle + \langle (b_1^\dagger)^2 b_1^2 \rangle} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (6.2.22)$$

lo que implica que,

$$\frac{\langle (b_1^\dagger)^2 b_1^2 \rangle}{\langle b_1^\dagger b_1 b_2^\dagger b_2 \rangle} \leq \sqrt{2} - 1. \quad (6.2.23)$$

En el caso del multiverso, a partir de las relaciones (6.2.17-6.2.18), obtenemos

$$\langle (b_1^\dagger)^2 b_1^2 \rangle = N^2(6x^4 + 6x^2 + 1) + N(6x^4 + 2x^2 - 1) + 2x^4, \quad (6.2.24)$$

$$\langle b_1^\dagger b_1 b_2^\dagger b_2 \rangle = N^2(6x^4 + 6x^2 + 1) + N(6x^4 + 4x^2) + x^2(2x^2 + 1), \quad (6.2.25)$$

donde, $x \equiv |\nu| = \sinh r$, y hemos considerado $N_1 = N_2 \equiv N$. Para el vacío inicial, $r = 0$ y $N = 0$, $C = 1 > 0,7$, lo que implica una máxima violación de las desigualdades de Bell [57]. Para $N = 1$, es decir, para un par de universos entrelazados, resulta

$$C = \frac{14x^4 + 11x^2 + 1}{28x^4 + 19x^2 + 1}, \quad (6.2.26)$$

lo que implica una violación de las desigualdades de Bell ($C \geq 0,7$) para, $0 < \sinh r < 0,31$, es decir, para valores pequeños del parámetro de aplastamiento. En la Fig. 6.3, está representada la violación de las desigualdades de Bell para el caso de universos bebé y universos padre (ver, Sec. 6.3.2), para distintos valores del parámetro w .

6.2.3. Argumento EPR en el multiverso

La analogía formal de los estados aplastados del multiverso y de la óptica cuántica nos permite considerar también en el multiverso la existencia de estados con correlaciones cuánticas. Estos estados sirvieron en los comienzos del desarrollo de la mecánica cuántica para plantear experimentos como el propuesto por Einstein, Rosen y Podolski en 1935 [55], que en un principio se plantearon como una prueba de la incompletitud de la mecánica cuántica y que posteriormente se han comprobado como elementos fundamentales para la comprensión de la teoría cuántica. En esta sección revisaremos los argumentos del experimento EPR, y las consecuencias de una posible implementación en el multiverso.

Como hemos dicho, Einstein, Rosen y Podolski plantearon en 1935 un experimento mental por el que pretendían demostrar la incompletitud de la teoría cuántica⁸. Su propuesta original consideraba dos partículas cuyos estados cuánticos correspondientes

⁸Puede verse también en las Refs. [56; 99; 100; 104; 121]

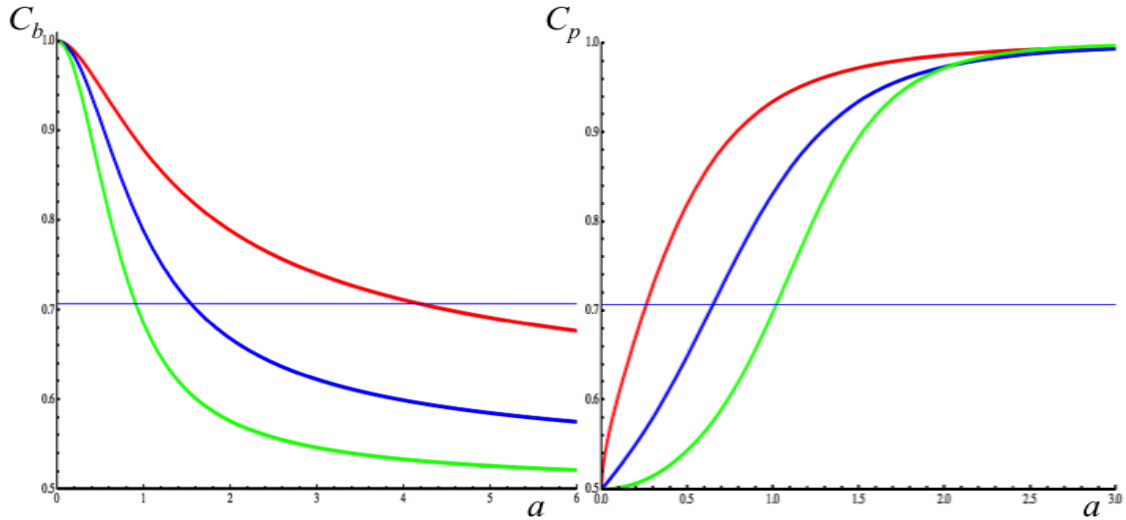


Figura 6.3: Violaciones de la desigualdad de Bell, Ec. (6.2.22): (a) para universos bebé, Ec. (6.3.41); (b) para universos padre, Ec. (6.3.42); para distintos valores del parámetro w .

al momento y a la posición estaban correlacionados. Equivalente, el experimento EPR se puede plantear con cualquier otro par de variables correlacionadas entre las dos partículas cuyos operadores cuánticos no conmuten, como los correspondientes al espín de una partícula. Siguiendo el razonamiento EPR, parecería que a la misma "realidad física" se le pueden asignar dos estados diferentes. Por ejemplo, midiendo el espín de una de las partículas en la dirección z , conocemos el espín de la otra partícula en esa misma dirección. Desde el punto de vista de las teorías realistas, esto nos lleva a pensar que las dos partículas estaban en ese estado antes de la medición pero, por otro lado, el observador podría haber decidido medir el espín en otra dirección, por ejemplo, la dirección x , por lo que, siguiendo el mismo razonamiento, podríamos asignarles ese otro estado a las partículas. El hecho de que a la misma realidad física se le puedan asignar dos estados diferentes constituía, para EPR, una prueba de la incompletitud de la mecánica cuántica.

Se puede demostrar utilizando el formalismo de la matriz densidad de estados que ambos estados poseen la misma representación. Aún así, el argumento EPR abrió el debate sobre la posible incompletitud de la mecánica cuántica, lo que dio lugar a proponer la posible existencia de unas variables ocultas locales⁹ que permitieran otorgar

⁹También se han establecido teorías de variables ocultas globales, el caso más conocido pueden ser las ondas piloto de De Broglie (ver también el ejemplo propuesto en Ref. [104], Cap. 18). Sin embargo, esta característica no-local ya está contenida en la propia mecánica cuántica. Las teorías de variables ocultas globales afrontan más bien otro problema, el del carácter epistemológico u ontológico de las relaciones de incertidumbre de la mecánica cuántica.

a un estado cuántico un cierto criterio de realidad independientemente de las medidas que se realicen sobre la partícula.

Bell demostró [56] que el experimento EPR, más que demostrar la incompletitud de la mecánica cuántica, lo que pone de manifiesto es precisamente su carácter no-local. Existen estados correlacionados de dos partículas, como los estados aplastados vistos en la sección anterior, en los que conociendo el estado cuántico de una de ellas nos permite conocer el estado de la otra, independientemente de la distancia que separe a las partículas. Esta característica no-local de los estados de la mecánica cuántica permite plantear experimentos como el de teleportación (ver, por ejemplo, las Refs. [99; 100; 144]), mediante el cual el estado de una partícula es transmitido desde un emisor (Alice) a un receptor (Bob) utilizando estados entrelazados de partículas, separadas entre sí una distancia arbitraria. Esto no supone una violación del principio de la relatividad ya que para poder transmitir la información contenida en el estado de las partículas, Alice y Bob necesitan compartir un canal clásico de comunicación, por lo que la información nunca es recibida en un tiempo inferior al que correspondería si fuese transmitida a la velocidad de la luz.

En el multiverso se pueden plantear también estados entrelazados y, por tanto, seguir los argumentos dados por EPR y por Bell, con ciertas matizaciones.

En primer lugar, los estados entrelazados del multiverso, como los que corresponden a un multiverso dominado por energía fantasma (véase, Sec. 2.3), o los considerados en este capítulo, indican que, admitiendo la existencia de universos cuyos estados están correlacionados, conociendo el estado de uno de ellos, es decir, conociendo por ejemplo el estado de nuestro propio universo, permite conocer el estado cuántico de otros universos. Sin embargo, estos estados entrelazados del universo como un todo no permitirían, en principio, ningún proceso de teleportación ya que, a diferencia de lo que ocurre en un protocolo típico de teleportación entre estados del fotón, los estados del universo no son "manipulables". Aún así, es de esperar que el estado correlacionado de un par de universos induzca un estado entrelazado también entre los campos de materia y radiación correspondientes a cada uno de los universos. De hecho, utilizando el modelo de la Sec. (3.2), en el que consideramos un universo homogéneo e isótropo con un campo escalar, los modos positivos y negativos del campo escalar, asociados con las ramas en expansión y contracción del universo, respectivamente, están correlacionados (ver, también, Sec. 6.3.4).

El caso paradigmático de un proceso de teleportación en el multiverso podría darse en un universo dominado por energía fantasma. En éste, la singularidad del big rip separa las dos ramas en expansión y en contracción del universo, anterior y posterior a la singularidad, respectivamente. Utilizando los campos de materia correlacionados

a uno y otro lado de la singularidad, podría establecerse un protocolo de teleportación utilizando como canales clásicos de comunicación agujeros de gusano que, como dijimos en el Cap. 2, pueden crecer en las proximidades del big rip debido al carácter "exótico" de la energía fantasma, y conectar ambas regiones, anterior y posterior a la singularidad. Evidentemente, este es tan sólo un ejemplo hipotético de como la existencia de estados entrelazados entre universos (o entre distintas regiones del universo) podría plantear fenómenos extravagantes, debido a la naturaleza no-local (o no-separable) de los estados de la teoría cuántica.

Otro aspecto relacionado con los estados correlacionados del multiverso, más allá de la plausible implementación de un protocolo de teleportación, es el que se refiere a la no-localidad de dichos estados. En este sentido, hay que destacar que en el multiverso cuántico no tiene por qué existir, en general, un espacio-tiempo común a todos los universos, por lo que el concepto de localidad o no-localidad pierde su sentido. Lo que pone de manifiesto la existencia de estados correlacionados en el multiverso es más bien la independencia o interdependencia de estos estados, es decir, con la *no-separabilidad* de los estados cuánticos entrelazados correspondientes a dos universos. Esta no-separabilidad podría producir efectos observables en cada uno de los universos individuales, como una energía de entrelazamiento (ver, Sec. 6.3), por lo que podrían ser considerados procesos fundamentales en la evolución del universo.

No obstante, también podría objetarse que esta no-separabilidad de los estados del multiverso corresponde a una elección incorrecta de los subespacios, \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 , del espacio de Hilbert total \mathcal{H} que corresponde a la descripción del multiverso. Es decir, que \mathcal{H} no puede escribirse como un producto directo, $\mathcal{H} \neq \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, o que, en cualquier caso, esta separación de los subespacios es solo una ayuda matemática para obtener de forma más sencilla los estados de \mathcal{H} que corresponden a un solo universo.

Esta es evidentemente una posibilidad que hay que tener en cuenta en la descripción cuántica del multiverso considerada en esta memoria. Sin embargo, el argumento análogo con respecto al campo electromagnético sería decir que un par de fotones, cuyos estados están entrelazados, son sólo una manera útil de representar el campo electromagnético, dado clásicamente por una onda electromagnética y sus modos normales. Sin embargo, como hemos visto en la sección anterior, la violación en óptica cuántica de las desigualdades clásicas parece indicar el carácter corpuscular del fotón y su existencia como entidad autónoma, aunque no por ello independiente.

Esta característica de complementariedad de la mecánica cuántica, trasladada al caso del multiverso, también nos permite otorgar un cierto criterio de realidad a los estados entrelazados del multiverso, y considerar diferentes universos con características propias, como por ejemplo la existencia de observadores distinguibles (o, "autodistin-

guibles”, o conscientes), en los que algunas de sus características puedan estar correlacionadas. En las secciones siguientes haremos uso de este argumento para calcular las magnitudes termodinámicas de entrelazamiento de dos universos cuyos estados están correlacionados.

6.3. Entrelazamiento y termodinámica cuántica en el multiverso

6.3.1. Termodinámica cuántica

Dado un sistema físico cuyo estado cuántico está representado por una matriz densidad de estados ρ , y su dinámica determinada por un Hamiltoniano H , podemos definir las cantidades termodinámicas siguientes [102; 145]

$$E(a) = \text{Tr}(\rho(a)H(a)), \quad (6.3.1)$$

$$Q(a) = \int^a \text{Tr} \left(\frac{d\rho(a')}{da'} H(a') \right) da', \quad (6.3.2)$$

$$W(a) = \int^a \text{Tr} \left(\rho(a') \frac{dH(a')}{da'} \right) da', \quad (6.3.3)$$

donde $\text{Tr}(\hat{O})$ indica la traza del operador \hat{O} , y en el caso del multiverso, como es habitual a lo largo de la presente memoria, la variable tiempo ha sido sustituida por el factor de escala, que es la variable que juega el papel de variable temporal en el formalismo de segunda cuantización. Con estas definiciones, E es el análogo de la energía, Q el del calor y W el del trabajo, cumpliéndose el primer principio de la termodinámica,

$$dE = dW + dQ. \quad (6.3.4)$$

La entropía cuántica se define a través de la fórmula de von Neumann como,

$$S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \ln \rho), \quad (6.3.5)$$

donde la función logarítmica de un operador debe entenderse por su desarrollo en serie, con lo que

$$S(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{l=0}^k (-1)^l \binom{k}{l} \text{Tr}(\rho^{l+1}) = -\sum_i \lambda_i \ln \lambda_i, \quad (6.3.6)$$

siendo λ_i los autovalores de la matriz densidad de estados, y $0 \ln 0 \equiv 0$. Si el estado cuántico viene representado por un estado puro, entonces la matriz densidad de estados es un proyector, $\rho^n = \rho$, y $\lambda_i = \delta_{ij}$, para algún valor j , por lo que la entropía es nula.

Por otro lado, la entropía y la energía son invariantes bajo una evolución unitaria del multiverso. Utilizando la propiedad cíclica de la traza, la entropía puede escribirse como,

$$S(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{l=0}^k (-1)^l \binom{k}{l} \text{Tr} \left(\mathcal{U}_S^\dagger(a) \rho_0^{l+1} \mathcal{U}_S(a) \right) = S(\rho_0), \quad (6.3.7)$$

y de forma análoga para el caso de la energía E . Esto sucede, no obstante, siempre que no consideremos términos disipativos como los considerados en el Cap. 5, donde el estado puro del universo se transformaba en un estado mezcla debido a su interacción con las fluctuaciones cuánticas de su propia métrica, y la evolución dejaba de ser unitaria.

Hay que destacar que esta invariancia no es necesariamente aplicable a las funciones correspondientes al calor, Q , y al trabajo, W . Supongamos dos representaciones, A y B , relacionadas por una transformación unitaria \mathcal{U} , de manera que, $\rho_B = \mathcal{U} \rho_A \mathcal{U}^\dagger$ y $H_B = \mathcal{U} H_A \mathcal{U}^\dagger$, entonces, se cumple que $E_A = E_B$ y $S_A = S_B$. Sin embargo,

$$dQ_A(a) + dW_A(a) = \text{Tr} \left(\frac{\partial \rho_A}{\partial a} H_A \right) + \text{Tr} \left(\rho_A \frac{\partial H_A}{\partial a} \right) \quad (6.3.8)$$

$$= \text{Tr} \left(\frac{\partial \rho_B}{\partial a} H_B \right) + \text{Tr} \left(\rho_B \frac{\partial H_B}{\partial a} \right) = dQ_B(a) + dW_B(a), \quad (6.3.9)$$

donde se ha utilizado que, $\dot{\mathcal{U}} \mathcal{U}^\dagger = -\mathcal{U} \dot{\mathcal{U}}^\dagger$. En general, si $\mathcal{U} \equiv \mathcal{U}(a)$, no tiene por qué cumplirse que, $dQ_A = dQ_B$ y $dW_A = dW_B$, aunque se sigue cumpliendo el primer principio de la termodinámica, es decir, $dE = dQ_A + dW_A = dQ_B + dW_B$.

En la variación de la entropía pueden distinguirse dos términos, uno debido a la variación del calor, y el cambio debido al resto de procesos, y viene dada por¹⁰ [40; 145]

$$\frac{dS}{da} = \frac{1}{T} \frac{dQ}{da} + \sigma(a), \quad (6.3.10)$$

donde el segundo término, $\sigma(a)$, se denomina "producción de entropía" [145]. El segundo principio de la termodinámica establece que bajo cualquier proceso adiabático, la entropía del sistema no puede decrecer, lo que es equivalente a establecer que

$$\sigma(a) \geq 0. \quad (6.3.11)$$

Hay que señalar que, aunque formalmente podamos definir las cantidades termodinámicas dadas por las Ecs. (6.3.1-6.3.3) y (6.3.5) de manera análoga a como se hace

¹⁰En la Ref. [40], la variación de la entropía se expresa como: $\frac{dS}{dt} = \left(\frac{dS}{dt}\right)_{\text{ext}} + \left(\frac{dS}{dt}\right)_{\text{int}}$, con $\left(\frac{dS}{dt}\right)_{\text{ext}} = \frac{\delta Q}{T}$, siendo T la temperatura, y $\left(\frac{dS}{dt}\right)_{\text{int}} \geq 0$, que obviamente equivale a las expresiones (6.3.10-6.3.11). Sin embargo, hay que destacar que en el caso de un sistema cerrado como el que estamos considerando, los términos "externo" e "interno" carecen de sentido, pues todas las variables son variables internas del sistema.

en para un sistema abierto, su interpretación para un sistema cerrado como el multiverso es diferente. En el multiverso, el calor Q y el trabajo W no pueden entenderse como formas de intercambiar energía con ningún reservorio puesto que, en el caso considerado en esta sección, no existe tal reservorio¹¹. Del mismo modo, el análogo a la temperatura T no representa la temperatura de ningún reservorio, sino que todas las variables termodinámicas de un sistema cerrado deben considerarse como propiedades internas del sistema.

Consideremos ahora el estado del multiverso y sus propiedades termodinámicas, que dependerán de las condiciones de frontera que se establezcan para el multiverso. Supongamos como tal condición de frontera el siguiente estado térmico,

$$\rho = \frac{1}{Z} \sum_N e^{-\frac{\hbar\omega(a)}{T}(N+\frac{1}{2})} |N, a\rangle \langle N, a|, \quad (6.3.12)$$

donde, $Z^{-1} \equiv 2 \sinh \frac{\hbar\omega(a)}{2T}$, y $\omega(a) = \frac{\omega_0}{\hbar} a^{q-1}$ es la frecuencia del Hamiltoniano que determina la evolución del multiverso. En ese caso, las cantidades termodinámicas involucradas en el primer principio de la termodinámica (6.3.4) resultan,

$$E(a) = \frac{\hbar\omega(a)}{2} \coth \frac{\hbar\omega(a)}{2T}, \quad (6.3.13)$$

$$Q(a) = T \left(\frac{\hbar\omega(a)}{2T} \coth \frac{\hbar\omega(a)}{2T} - \ln \sinh \frac{\hbar\omega(a)}{2T} \right), \quad (6.3.14)$$

$$W(a) = T \ln \sinh \frac{\hbar\omega(a)}{2T}, \quad (6.3.15)$$

de donde se comprueba que, $E = Q + W$ y $dE = dQ + dW$. En este caso, aparece un término de producción de calor, Q , debido a la dependencia de la frecuencia con respecto al factor de escala. Por tanto, la variación de la entropía no es nula, y viene dada por

$$S = \frac{\hbar\omega(a)}{2T} \coth \frac{\hbar\omega(a)}{2T} - \ln \sinh \frac{\hbar\omega(a)}{2T} - \ln 2, \quad (6.3.16)$$

cuya variación,

$$dS = -\frac{\hbar^2 \omega \dot{\omega}}{4T^2} \frac{1}{\sinh^2 \frac{\hbar\omega(a)}{2T}}, \quad (6.3.17)$$

¹¹En el multiverso pueden considerarse distintos tipos de reservorio. Por un lado, en un universo formado por universos padre, todos los universos menos uno pueden considerarse un reservorio para el universo individual cuya termodinámica se quiera analizar. Para un universo padre aislado, el plasma de universos bebé que representa las fluctuaciones cuánticas de su propio espacio-tiempo, como vimos en el Cap. 5, también se puede considerar un reservorio para las propiedades termodinámicas del universo padre. Sin embargo, lo que queremos destacar en este punto es que las cantidades dadas por las Ecs. ((6.3.1-6.3.5)) pueden definirse también para un sólo universo, considerado éste como un sistema completamente cerrado sin reservorio alguno. En ese caso, la interpretación usual del calor y el trabajo en términos de intercambio de energía con un reservorio no pueden establecerse. Es decir, en un sistema cerrado, todas sus propiedades termodinámicas son propiedades *internas* del sistema.

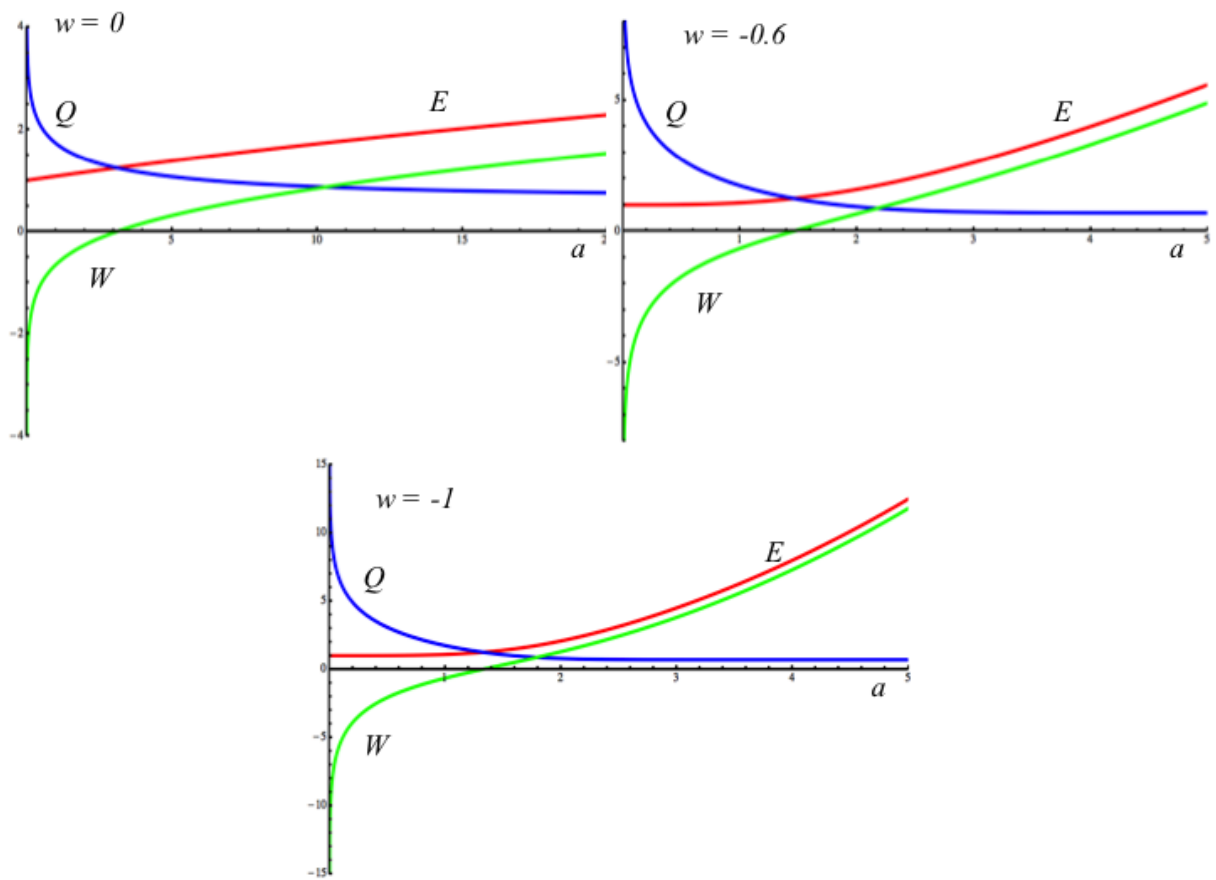


Figura 6.4: Energía E , calor Q y trabajo W , Ecs. (6.3.13-6.3.15), para distintos valores del parámetro w . El primer principio de la termodinámica se cumple en todos los casos, es decir, $E = Q + W$.

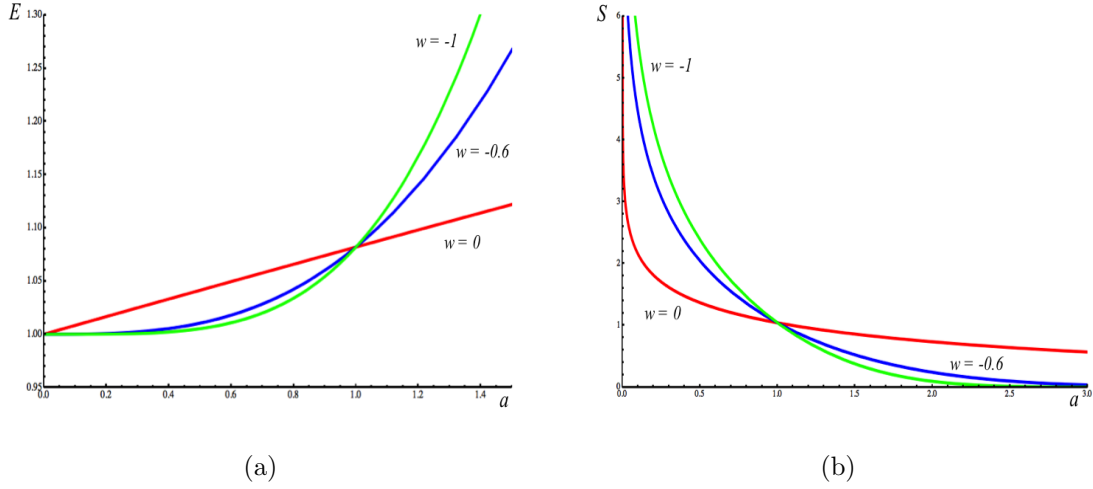


Figura 6.5: (a) Energía y (b) entropía del universo para distintos valores del parámetro w . La entropía disminuye con el factor de escala, aún así el segundo principio de la termodinámica no se viola al no ser un proceso adiabático y ser la producción de entropía nula.

resulta negativa. Sin embargo, el segundo principio de la termodinámica no se viola, ya que dicha variación corresponde precisamente a la variación del calor (dividido por la temperatura T), y la producción de entropía es nula,

$$\sigma = \frac{dS}{da} - \frac{1}{T} \frac{dQ}{da} \equiv 0. \quad (6.3.18)$$

Las magnitudes termodinámicas involucradas en el primer principio de la termodinámica están representadas en la Fig. 6.4 para distintos valores del parámetro w . La entropía, representada en la Fig. 6.5, decrece con el valor del factor de escala. Aún así, el segundo principio de la termodinámica también se cumple ya que el proceso no es adiabático y la producción de entropía es nula.

6.3.2. Entropía y energía de entrelazamiento

Como dijimos en la Sec. 6.1, las violaciones de las desigualdades clásicas por parte de algunos estados cuánticos del multiverso podrían asociarse, por analogía de la violación de las mismas desigualdades en óptica cuántica, al carácter corpuscular e individual, aunque no necesariamente independiente, de los distintos universos en el multiverso. Estas violaciones permiten otorgar en óptica cuántica un cierto criterio de realidad al fotón. Aunque las diferencias entre ambos casos son, obviamente, muy importantes, en esta sección consideraremos también la posibilidad de otorgar cierto criterio de realidad

a los estados compuestos del multiverso caracterizados por dos o más universos.

Hay que destacar que "el entrelazamiento depende crucialmente de la elección de los modos del oscilador" (Cfr., Ref. [99], p. 88), es decir, de la representación elegida. En esta sección utilizaremos dos representaciones de referencia: la representación de los universos bebé, que caracterizaría la evolución de las fluctuaciones cuánticas del espacio-tiempo; y la representación de los universos padre, que nos proporcionará información sobre las propiedades termodinámicas de entrelazamiento de universos macroscópicos como el nuestro.

En ambos casos, las relaciones de aplastamiento nos permitirán escribir el estado compuesto del multiverso como,

$$\rho(a) = \mathcal{U}_S^\dagger(a)|0_1 0_2\rangle\langle 0_1 0_2| \mathcal{U}_S(a), \quad (6.3.19)$$

donde,

$$\mathcal{U}_S(a) = e^{r(a)e^{i\theta}b_1b_2 - r(a)e^{-i\theta}b_1^\dagger b_2^\dagger}, \quad (6.3.20)$$

siendo r y θ los parámetros de aplastamiento. En el estado compuesto (6.3.19), hemos considerado como condición de frontera un estado puro formado por la composición del estado fundamental de cada uno de los universos, en sus respectivos espacios de Hilbert. De este modo, obtendremos primero todas las propiedades termodinámicas de entrelazamiento en términos de los parámetros de entrelazamiento, r y θ . Después, calcularemos los valores de estos parámetros para cada uno de los casos así como sus propiedades termodinámicas.

La matriz densidad de estados reducida para cada uno de los universos individuales viene dada por

$$\rho_{(1,2)} \equiv \text{Tr}_{(2,1)}\rho = \sum_{N_{(2,1)}=0}^{\infty} \langle N_{(2,1)}|\rho|N_{(2,1)}\rangle. \quad (6.3.21)$$

Como la interacción es simétrica respecto de los universos 1 y 2, consideremos sólo uno de ellos. La matriz densidad de estados reducida se puede escribir como,

$$\rho_2 = \sum_{N_1=0}^{\infty} \langle N_1|\mathcal{U}_S^\dagger|0_1\rangle\langle 0_2|\langle 0_1|\mathcal{U}_S|N_1\rangle. \quad (6.3.22)$$

Haciendo uso del teorema de desentrelazamiento [],

$$\mathcal{U}_S^\dagger(a) = e^{\Gamma(a)e^{i\theta}b_1^\dagger b_2^\dagger} e^{-g(a)(b_1^\dagger b_1 + b_2^\dagger b_2 + 1)} e^{-e^{-i\theta}\Gamma(a)b_1 b_2}, \quad (6.3.23)$$

donde,

$$\Gamma(a) = \tanh r(a) \quad , \quad g(a) = \ln \cosh r(a), \quad (6.3.24)$$

obtenemos que el estado de cada uno de los universos individuales está representado por un estado de tipo térmico dado por,

$$\rho_2(a) = e^{-2g(a)} \sum_{N=0}^{\infty} e^{2N \ln \Gamma(a)} |N\rangle \langle N| = \frac{1}{\cosh^2 r} \sum_{N=0}^{\infty} (\tanh^2 r)^N |N\rangle \langle N|, \quad (6.3.25)$$

donde, $|N\rangle \equiv |N\rangle_2$ (la expresión para ρ_1 sería la misma que para ρ_2 con $|N\rangle \equiv |N\rangle_1$). Este estado se puede comparar con un estado del tipo

$$\rho(a) = \frac{1}{Z} \sum_{N=0}^{\infty} e^{-\frac{\Omega(a)}{T(a)}(N+\frac{1}{2})} |N\rangle \langle N|, \quad (6.3.26)$$

con $Z^{-1} = 2 \sinh \frac{\Omega}{2T}$. Esto quiere decir que, para cada valor a_0 del factor de escala, la distribución de estados viene dada por una distribución de tipo térmico. Por tanto, ambos universos del par entrelazado están en equilibrio térmico a una temperatura dada por,

$$T \equiv T(a) = \frac{\Omega(a)}{2 \ln \frac{1}{\Gamma(a)}}. \quad (6.3.27)$$

Una vez obtenida la matriz densidad de estados reducida para cada uno de los universos individuales que forman el par, podemos calcular sus magnitudes termodinámicas. La entropía de entrelazamiento, definida como

$$S_{ent} = -\text{Tr}(\rho_{1,2} \ln \rho_{1,2}), \quad (6.3.28)$$

resulta ser

$$S_{ent}(a) = \cosh^2 r \ln \cosh^2 r - \sinh^2 r \ln \sinh^2 r. \quad (6.3.29)$$

La entropía de entrelazamiento (6.3.29) es una función monótonamente creciente con respecto del parámetro r y está representada en la Fig. 6.6. El segundo principio de la termodinámica cuántica, dado por la Ec. (6.3.11), se satisface ya que la variación de la entropía de entrelazamiento es consecuencia de la producción de calor Q , y la producción de entropía σ es nula (como corresponde a un sistema cerrado en el que no se consideran elementos disipativos). Esto puede comprobarse calculando el resto de magnitudes termodinámicas, es decir, la energía, el trabajo y el calor.

La energía del estado ρ_1 ($= E(\rho_2)$) resulta ser,

$$E_1(a) = \text{Tr} \rho_1 H_1 = \Omega(\sinh^2 r + \frac{1}{2}) = \Omega(\langle \hat{N}(a) \rangle + \frac{1}{2}), \quad (6.3.30)$$

donde hemos utilizado el Hamiltoniano que resulta de la comparación de las Ecs. (6.3.25) y (6.3.26), es decir, $H_1 \equiv \Omega(b_1^\dagger b_1 + \frac{1}{2})$. La variación de trabajo y de calor vienen dadas en ese caso por,

$$dW_1 = \text{Tr}(\rho_1 \frac{dH_1}{da}) = \dot{\Omega}(\sinh^2 r + \frac{1}{2}), \quad (6.3.31)$$

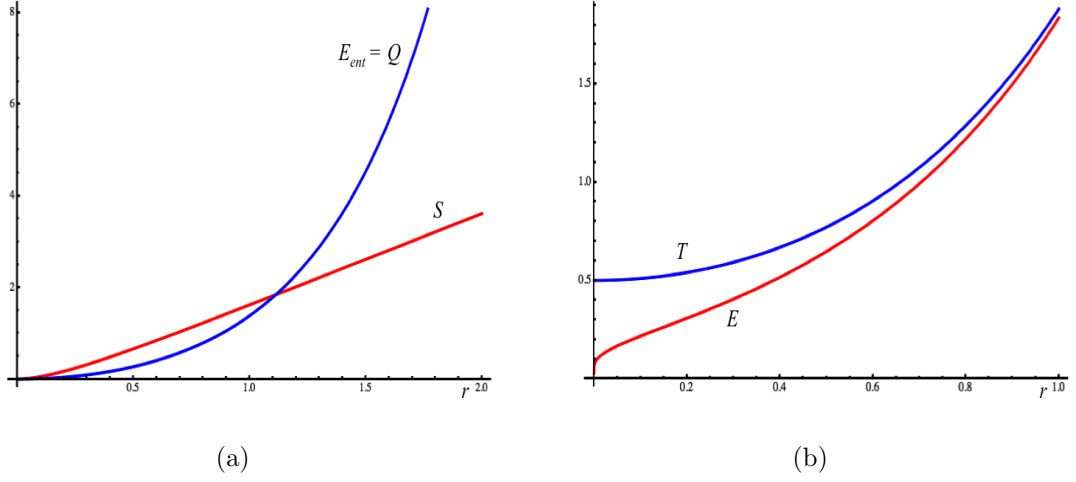


Figura 6.6: (a) Energía de entrelazamiento ($\equiv Q$) y entropía de entrelazamiento y (b) Temperatura de entrelazamiento y energía (E), con respecto al valor del parámetro de entrelazamiento.

$$dQ_1 = \text{Tr}\left(\frac{d\rho_1}{da} H_1\right) = \Omega r \sinh 2r, \quad (6.3.32)$$

de donde se puede comprobar que, $dE_1 = dW_1 + dQ_1$. A partir de la última expresión, Ec. (6.3.32), y de la Ec. (6.3.29), se puede comprobar también que la producción de entropía es nula, ya que

$$\sigma = \frac{dS_{ent}}{da} - \frac{1}{T} \frac{dQ}{da} = 0, \quad (6.3.33)$$

con $T = \frac{\Omega}{2} \ln^{-1} \frac{1}{r}$, definida por la Ec. (6.3.27). Por otro lado, comparando la expresión (6.3.33) con la formulación del segundo principio de la termodinámica para sistemas entrelazados (ver, Refs. [38; 146]),

$$dE_{ent} = T dS_{ent}, \quad (6.3.34)$$

se puede establecer que la energía de entrelazamiento viene dada por

$$dE_{ent} = dQ = \Omega \sinh 2r dr. \quad (6.3.35)$$

Las magnitudes termodinámicas de entrelazamiento están representadas, en función del parámetro de entrelazamiento r , en la Fig. 6.6.

Universos bebé

En el caso de los universos bebé, como vimos en el Cap. 3, sus estados están representados por un oscilador armónico con una frecuencia mínima dada¹² por la Ec. (3.3.58),

$$\Omega_0 = \frac{\pi(2q)^{\frac{q-1}{q}}}{\Gamma^2(\frac{1}{2q})} \left(\frac{\omega_0}{\hbar}\right)^{\frac{1}{q}}. \quad (6.3.36)$$

En ese caso, los estados de Lewis, que son soluciones de la ecuación de Schrödinger, y los estados correspondientes a los universos bebé están relacionados por la siguiente transformación de aplastamiento,

$$b(a) = \mu_b b_b + \nu_b b_b^\dagger, \quad (6.3.37)$$

$$b^\dagger(a) = \mu_b^* b_b^\dagger + \nu_b^* b_b, \quad (6.3.38)$$

con,

$$\mu_b = \frac{1}{2\sqrt{\Omega_0}} \left(\frac{1}{R} + \Omega_0 R - i\dot{R}\right), \quad (6.3.39)$$

$$\nu_b = \frac{1}{2\sqrt{\Omega_0}} \left(\frac{1}{R} - \Omega_0 R - i\dot{R}\right). \quad (6.3.40)$$

En tal caso, considerando que los estados de Lewis, para valores pequeños del factor de escala, corresponden al estado entrelazado de dos universos bebé, podemos utilizar las fórmulas de esta sección para calcular las propiedades termodinámicas de entrelazamiento de cada uno de los universos bebé, con un parámetro de entrelazamiento dado por

$$r = \text{Arcsinh}|\nu_b|, \quad (6.3.41)$$

y una frecuencia constante, $\Omega \equiv \Omega_0$, dada por la Ec. (6.3.36). El parámetro de entrelazamiento, r , y las magnitudes termodinámicas de entrelazamiento están representadas en las Figs. 6.7-6.8. Hay que destacar que, debido a que la frecuencia Ω_0 es constante, el trabajo W es nulo y, por tanto, $E = Q$. Esta energía coincide con la energía de entrelazamiento, que aumenta a medida que aumenta el tamaño de las fluctuaciones cuánticas del espacio-tiempo, representadas en el modelo de segunda cuantización por los universos bebé.

Universos padre

Para universos padre, por el contrario, los modos normales vienen dados por los de un oscilador armónico cuya frecuencia coincide con la frecuencia propia del Ha-

¹²Utilizamos aquí el cambio de notación ν_0 por Ω_0 para no confundir esta frecuencia con el parámetro de aplastamiento ν .

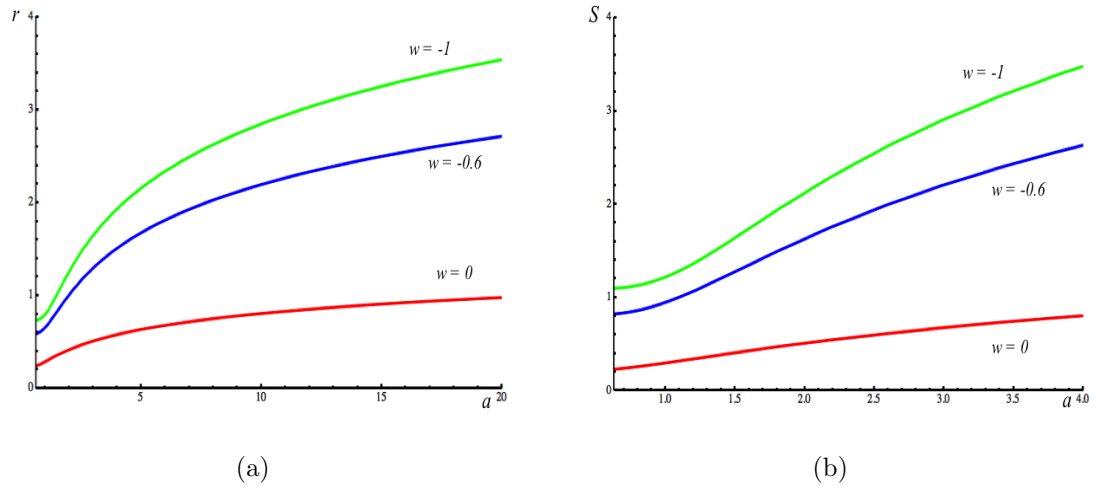


Figura 6.7: Parámetro de entrelazamiento, r , y entropía de entrelazamiento en función del factor de escala para universos bebé, para distintos valores del parámetro w .

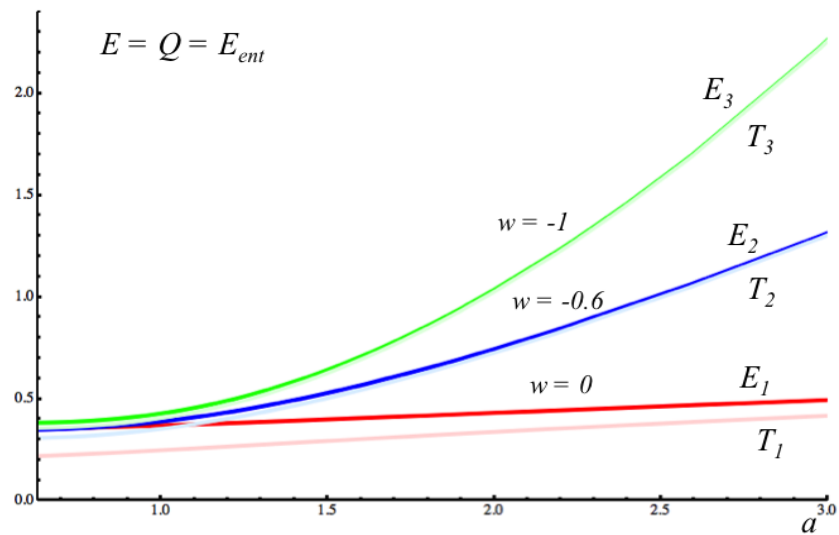


Figura 6.8: Energía de entrelazamiento y temperatura de entrelazamiento para universos bebé en función del valor del factor de escala, para distintos valores del parámetro w .

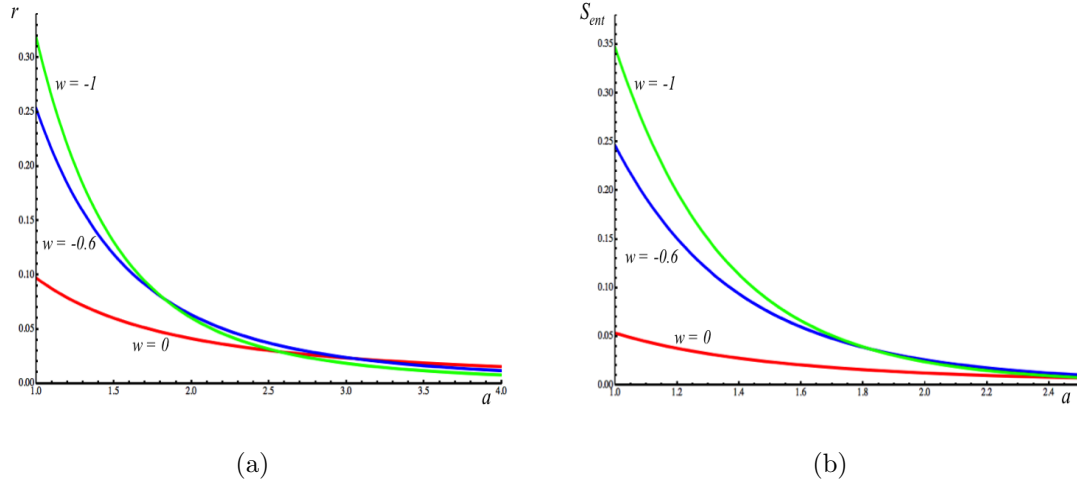


Figura 6.9: Parámetro de entrelazamiento, r , y entropía de entrelazamiento en función del factor de escala para universos padre, para distintos valores del parámetro w .

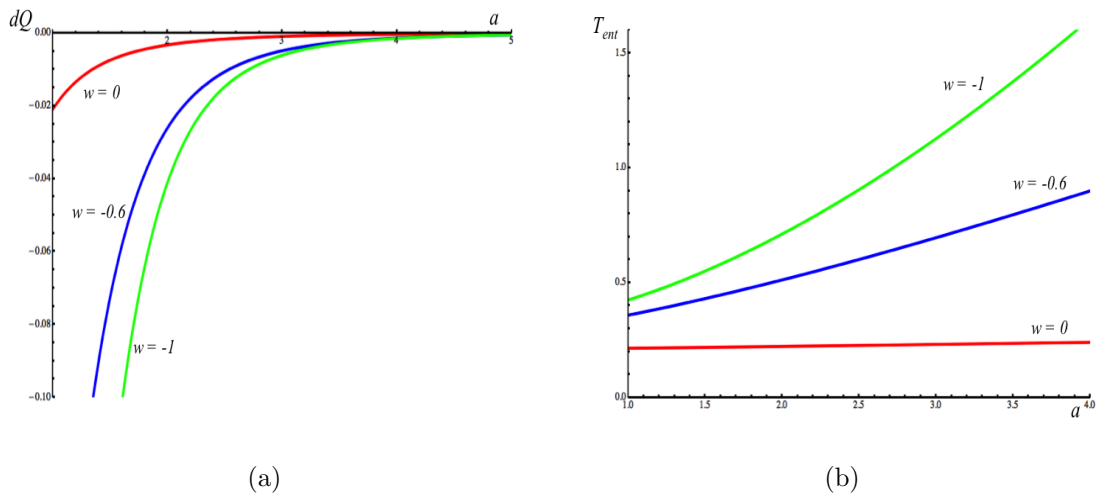


Figura 6.10: (a) Variación de la energía de entrelazamiento y (b) temperatura de entrelazamiento para distintos valores del parámetro w .

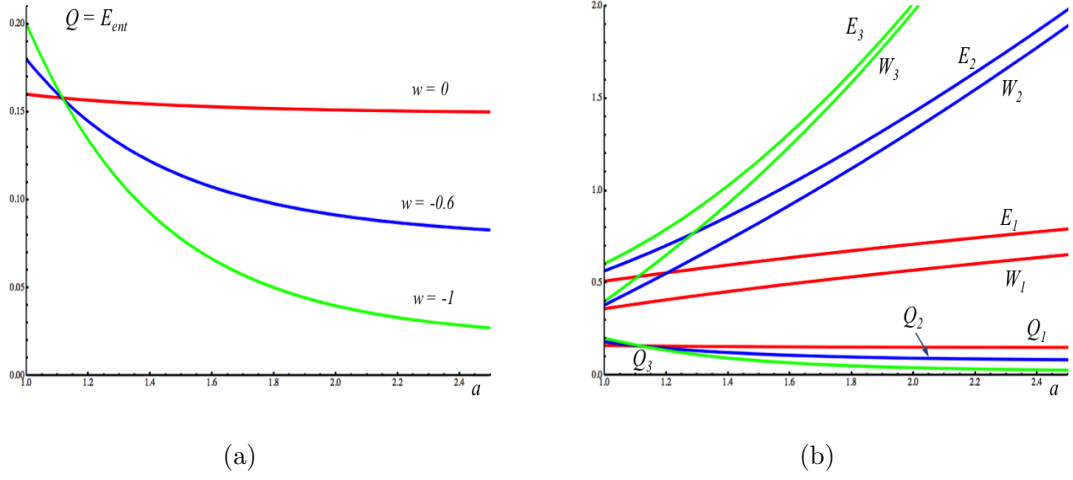


Figura 6.11: (a) Energía de entrelazamiento y (b) magnitudes termodinámicas involucradas en el primer principio de la termodinámica, para distintos valores del parámetro w .

miltoniano, es decir, $\Omega \equiv \omega(a) = \frac{\omega_0}{h} a^{q-1}$. En este caso, los estados de Lewis están relacionados con los modos de un universo padre mediante la siguiente transformación de aplastamiento,

$$b(a) = \mu_p b_p + \nu_p b_p^\dagger, \quad (6.3.42)$$

$$b^\dagger(a) = \mu_p^* b_p^\dagger + \nu_p^* b_p, \quad (6.3.43)$$

con,

$$\mu_p = \frac{1}{2\sqrt{\omega(a)}} \left(\frac{1}{R} + \omega(a)R - i\dot{R} \right), \quad (6.3.44)$$

$$\nu_p = \frac{1}{2\sqrt{\omega(a)}} \left(\frac{1}{R} - \omega(a)R - i\dot{R} \right). \quad (6.3.45)$$

En el caso de universos padre, el entrelazamiento decae a medida que aumenta el factor de escala. Sus propiedades termodinámicas de entrelazamiento están representadas en las Figs. 6.9-6.11. En este caso, la energía de entrelazamiento ($E_{ent} \equiv Q$, representada en la Fig. 6.11), decae con el valor del factor de escala. Por tanto, el entrelazamiento de dos universos podría generar un mecanismo por el que la energía del vacío del universo fuese grande en las primeras etapas del universo, lo que se requiere en los modelos inflacionarios, y por el contrario, un valor muy pequeño en las etapas más tardías de un universo en expansión, como sugieren actualmente los datos observacionales.

6.3.3. Universos acelerantes

Como dijimos en los Caps. 2 y 3, los límites de validez de este modelo se sitúan en un valor del factor de escala del orden de la longitud de Planck, cuando el factor de escala degenera, y antes de la zona acronal que rodea al big rip, para universos dominados por energía fantasma, en la que el universo vuelve a entrar en un régimen puramente cuántico y la foliación utilizada deja de ser válida. Entre estos valores, la aproximación semiclassical es válida y por tanto podemos estudiar las variables termodinámicas obtenidas en esta sección en función del tiempo cósmico. Para ellos, debemos sustituir el valor del factor de escala por el valor en función del tiempo que se obtiene como resultado de resolver la ecuación de Friedmann (2.2.3). Sus soluciones vienen dadas por la Ec. (2.2.6) del Cap. 2,

$$a(t) = (1 + \beta\lambda_0 t)^{\frac{1}{\beta}},$$

con, $\beta = \frac{3}{2}(1 + w)$, para $w \neq -1$, y $a(t) = e^{\lambda_0 t}$ para $w = -1$. Sustituyendo el valor del factor de escala en función del tiempo cósmico en las expresiones termodinámicas de entrelazamiento para universos padre obtenemos las gráficas representadas en las Figs. 6.12-6.13. Éstas están caracterizadas, en los casos de universos dominados por energía fantasma ($w < -1$), por la singularidad del big rip, donde las propiedades termodinámicas divergen, como era de esperar. La región *II*, posterior a la singularidad, es simétrica a la región *I*, anterior al big rip. Para el resto de valores del parámetro w , las propiedades termodinámicas de entrelazamiento son las esperadas para un factor de escala que aumenta indefinidamente con el tiempo y, por tanto, un parámetro de entrelazamiento que decae monótonamente con el tiempo cósmico.

6.3.4. Universo homogéneo e isótropo con un campo escalar

Como se vio en los Caps. 2 y 3, la función de ondas del multiverso puede escribirse en términos de funciones de Bessel (ver, Secs. 2.3.5 y 3.2.2). Las condiciones de frontera de no-frontera y de tuneleo cuántico, propuestas por Hartle-Hawking y Vilenkin, respectivamente, determinan dos conjuntos de modos diferentes en los que representar la función de ondas del multiverso. En la Sec. 3.2.2, llamamos \bar{u}_n y u_n , respectivamente, a estos dos conjuntos de modos normales, que están relacionados por la transformación de aplastamiento dada por las Ecs. (3.2.29-3.2.30),

$$\bar{u}_n = \alpha_n u_n + \beta u_n^*,$$

con,

$$\alpha_n = e^{\frac{\pi n}{q}} \beta_n, \quad \beta_n = \left(\frac{e^{-\frac{\pi n}{q}}}{2 \sinh \frac{\pi n}{q}} \right)^{\frac{1}{2}},$$

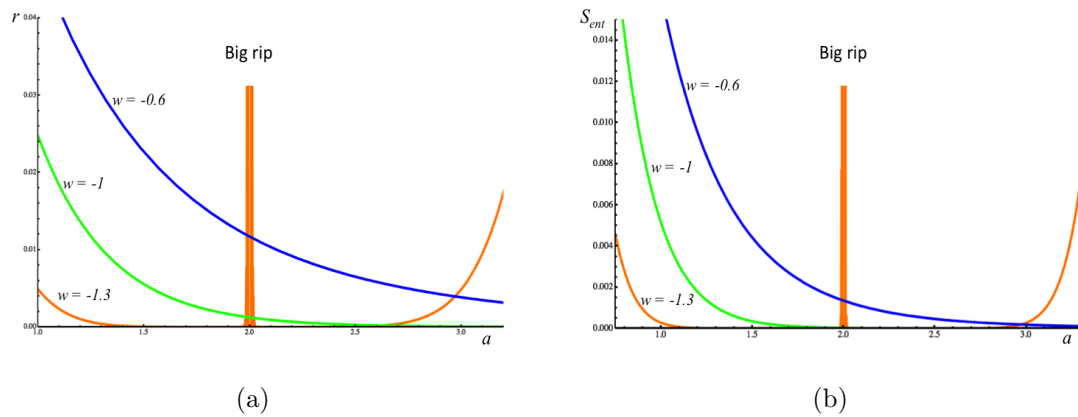


Figura 6.12: Parámetro de entrelazamiento y entropía de entrelazamiento para universos padre en función del tiempo cósmico, para distintos valores del parámetro w . En la singularidad del big rip, las magnitudes termodinámicas divergen y el modelo deja de ser válido.

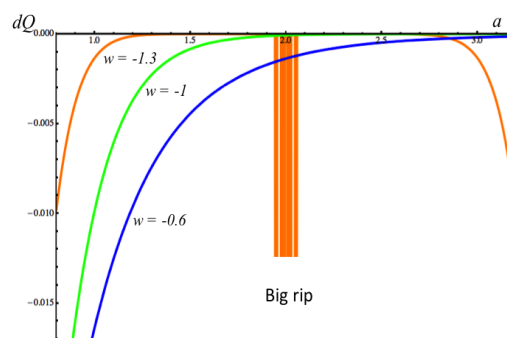


Figura 6.13: Variación de la energía de entrelazamiento ($\equiv dQ$), para distintos valores del parámetro w .

por tanto con, $|\alpha_n|^2 - |\beta_n|^2 = 1$. De este modo podemos definir dos vacíos para el campo que describe en segunda cuantización el estado cuántico del multiverso, $|0_n\rangle$ y $|\bar{0}_n\rangle$, respectivamente, definidos como (Ec. (3.2.31))

$$\hat{b}_n|0_n\rangle = 0 \quad , \quad \hat{\bar{b}}_n|\bar{0}_n\rangle = 0.$$

Siguiendo la analogía formal con una teoría cuántica de campos en espacios curvos, estos estados del vacío se pueden relacionar como [147]

$$|\bar{0}_{k,-k}\rangle = \frac{1}{|\alpha_k|} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\beta_k}{\alpha_k}\right)^n |n_k, n_{-k}\rangle, \quad (6.3.46)$$

donde los modos k y $-k$ corresponden en el caso del multiverso a las ramas en expansión y contracción del universo, respectivamente. El estado dado por la Ec. (6.3.46) representa un estado entrelazado de los estados cuánticos correspondientes a dichas ramas.

Consideremos, por ejemplo, un universo dominado por energía fantasma en el que las ramas en expansión y contracción están separadas causalmente por la singularidad del big rip. En ese caso, el estado cuántico correspondiente a las regiones anterior y posterior a la singularidad viene dado por la matriz de estados reducida que resulta de trazar los grados de libertad de la región complementaria. De este modo, si el estado inicial del universo corresponde al vacío $|\bar{0}_{k,-k}\rangle$, obtenemos que

$$\rho = |\bar{0}_{k,-k}\rangle\langle\bar{0}_{k,-k}| = \frac{1}{|\alpha_k|^2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \left(\frac{\beta_k}{\alpha_k}\right)^{n+m} |n_k, n_{-k}\rangle\langle m_k, m_{-k}|, \quad (6.3.47)$$

y por tanto la matriz densidad de estados reducida para la región I (anterior a la singularidad),

$$\rho_r = \frac{1}{|\alpha_k|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\beta_k}{\alpha_k}\right)^{2n} |n_k\rangle\langle n_k| = \frac{1}{\cosh^2 r_k} \sum_{n=0}^{\infty} (\tanh^2 r_k)^n |n_k\rangle\langle n_k|, \quad (6.3.48)$$

representa un estado térmico, cuya temperatura viene dada por la Ec. (6.3.27),

$$T = \frac{k}{2 \ln \frac{|\alpha_k|}{|\beta_k|}} = \frac{q}{2\pi}, \quad (6.3.49)$$

que coincide con el valor obtenido en el Cap. 3 (ver, Ec. (3.2.33)). Una vez obtenida la matriz densidad de estados reducida podemos calcular, con las ecuaciones desarrolladas en la Sec. 6.3.2, las magnitudes termodinámicas correspondientes a este estado térmico. La entropía de entrelazamiento, Ec. (6.3.29), resulta

$$S_{ent} = |\alpha_k|^2 \ln |\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2 \ln |\beta_k|^2 = \frac{\pi k}{q} \coth \frac{\pi k}{q} - \ln \left(2 \sinh \frac{\pi k}{q} \right), \quad (6.3.50)$$

que coincide con la Ec. (6.3.18), con $\Omega_k = k$ y $T = \frac{q}{2\pi}$. Aplicando las fórmulas (6.3.14-6.3.15), puede comprobarse que, $Q = TS_{ent}$, y la energía y el trabajo resultan,

$$E = \frac{k}{2} \operatorname{cotanh} \frac{\pi k}{q}, \quad (6.3.51)$$

$$W = \frac{q}{2\pi} \ln \sinh \frac{\pi k}{q}. \quad (6.3.52)$$

Dada una temperatura constante, la variación de la entropía con respecto al modo k del campo escalar resulta (Ec. (6.3.17)),

$$\frac{dS}{dk} = -\frac{\pi^2 k}{q^2} \frac{1}{\sinh^2 \frac{\pi k}{q}} = \frac{1}{T} \frac{dQ}{dk}. \quad (6.3.53)$$

La producción de entropía, σ , es por tanto nula. En tal caso, podemos identificar la energía de entrelazamiento con el calor Q , es decir,

$$E_{ent} = Q = \frac{k}{2} \operatorname{cotanh} \frac{\pi k}{q} - \frac{q}{2\pi} \ln \left(2 \sinh \frac{\pi k}{q} \right), \quad (6.3.54)$$

con, $q = \frac{3}{2}(1 - w)$, donde w es la constante de proporcionalidad de la ecuación de estado del fluido que domina la expansión del universo¹³, es decir, $p = w\rho$, siendo p y ρ la presión y la densidad de energía del fluido, respectivamente. En la Fig. 6.14 está representada la energía de entrelazamiento para distintos valores del parámetro w .

Un posible mecanismo por el cual el universo presente un valor alto de la energía de vacío en sus primeras etapas evolutivas y una energía muy pequeña en sus últimas etapas podría darse a través del entrelazamiento entre distintas ramas del universo. En ese caso, sería de esperar que el universo tuviese su origen en un modo bajo del campo escalar ($k \ll 1$), y que éste fuese decayendo hacia valores más altos del modo k a medida que el universo evoluciona.

¹³No hay que confundir el fluido que domina la expansión del universo, con ecuación de estado $p = w\rho$, con el campo escalar auxiliar φ al que corresponden los modos $\pm k$.

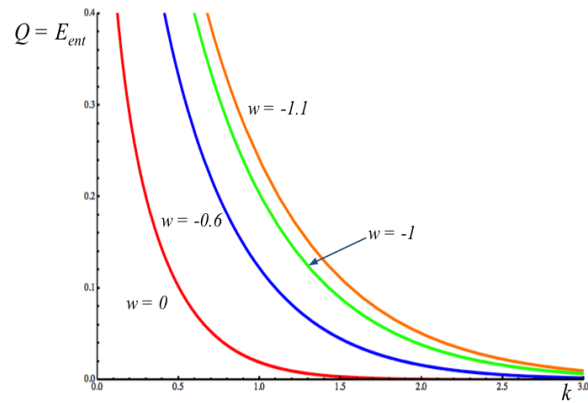


Figura 6.14: Energía de entrelazamiento con respecto al valor del modo k del campo escalar, para distintos valores del parámetro w de la ecuación de estado del fluido que domina la expansión del universo.

The issue of testability underlies the question of whether multiverse proposals are really scientific.

George Ellis, en "Universe or Multiverse"

Capítulo 7

Conclusiones

Si consideramos la singularidad del big rip como físicamente inadmisibles; sustrayéndola por tanto del espacio-tiempo, el estado cuántico del multiverso viene dado por un estado entrelazado entre los estados correspondientes a las regiones anterior y posterior al big rip. De este modo, podemos establecer que en el contexto del multiverso cuántico deben existir estados entrelazados así como otros estados cuánticos sin análogo clásico.

La singularidad futura puede evitarse debido a la existencia de agujeros de gusano que conecten las regiones anterior y posterior al big rip. El modelo canónico deja de ser válido en la región acronal (no-foliable) que se forma alrededor del big rip, y la descripción cuántica del modelo en este caso debe realizarse de acuerdo con los presupuestos de la teoría cuántica generalizada, en general descrita en términos de suma-sobre-historias, donde es posible definir las probabilidades de manera consistente.

El estado cuántico del multiverso puede expresarse en función de los estados de un oscilador armónico en el formalismo de segunda cuantización, aunque su interpretación depende de la representación que se elija. Nosotros hemos elegido la definida por los estados de Lewis ya que en esta representación el número total de universos permanece constante a lo largo de la evolución interna de cada uno de los universos.

En el formalismo de segunda cuantización, las fluctuaciones cuánticas del espacio-tiempo pueden describirse, en primera aproximación, como un plasma de universos bebé que se crean y destruyen virtualmente en el vacío gravitatorio. Hemos demostrado que esta espuma espacio-temporal viene representada por un conjunto de osciladores armónicos con frecuencia constante, cuyo valor depende de las propiedades de los agujeros de gusano Euclídeos que conectan los universos bebé con el espacio-tiempo del universo padre.

El multiverso formado por universos padre viene representado por un oscilador

armónico cuya frecuencia varía con el factor de escala. Dicha variación depende del contenido de materia y radiación de cada uno de los universos. Los estados correspondientes a distintos contenidos energéticos en el universo, así como los correspondientes a distintos valores de la función lapso, están relacionados mediante transformaciones unitarias de aplastamiento. El estado cuántico del multiverso resulta ser por ello invariante frente al contenido material y frente a las reparametrizaciones temporales en cada uno de los universos.

Hemos extendido el formalismo de interacción de la óptica cuántica al caso de interacción entre un universo padre y las fluctuaciones cuánticas de su espacio-tiempo, viéndose que: 1) las distintas ramas del universo sufren un proceso de decoherencia por el que podemos describir clásicamente el universo aislado que observamos, y 2) la entropía del universo padre aumenta, evolucionando el universo hacia un estado mezcla o de mayor mezcla.

En la representación de Lewis, el estado del universo viene dado por un estado aplastado. El efecto de aplastamiento es mayor para universos bebé y desaparece asintóticamente para universos padre a medida que el factor de escala aumenta. También es mayor para universos acelerados que para universos dominados por polvo o radiación. Para universos bebé, la aproximación adiabática no es válida y el estado aplastado del multiverso puede interpretarse, a lo largo de la expansión del universo padre, como una creación efectiva de fluctuaciones del espacio-tiempo. Para universos padre, sin embargo, las correlaciones cuánticas entre sus estados tienden a desaparecer, la aproximación adiabática es válida y el aplastamiento del estado del universo no puede interpretarse en términos de creación de universos, quedando asintóticamente suprimidas las transiciones a otro número de universos.

Si la existencia de estados aplastados en el multiverso implicara una violación de las desigualdades de Bell, entonces los conceptos de localidad y no-localidad deben ser extendidos a los de independencia o interdependencia de los estados cuánticos del universo, es decir, al de la separabilidad de dichos estados, ya que el multiverso cuántico no posee un espacio-tiempo común.

Consideramos la existencia en el multiverso de pares de universos cuyos estados correlacionan cuánticamente entre sí a los dos miembros de cada par. Hemos calculado las propiedades termodinámicas de entrelazamiento de cada uno de los universos, resultando que éstos permanecen en equilibrio térmico a lo largo de su evolución con una temperatura de entrelazamiento que depende del factor de escala.

La evolución de la temperatura y la energía de entrelazamiento depende del tipo de

universos considerados. Para universos bebé, la energía de entrelazamiento aumenta a medida que el universo padre se expande, como corresponde a la creación efectiva de un número mayor de fluctuaciones cuánticas del espacio-tiempo. Para universos padre, la temperatura y la energía de entrelazamiento disminuyen a medida que el factor de escala crece. De este modo, la densidad de energía de cada universo es relativamente grande en sus primeras etapas; como sería de esperar en una etapa inflacionaria. En cambio, en las etapas más evolucionadas del universo la energía de entrelazamiento es muy pequeña, como corresponde al valor actual observado de la constante cosmológica.

La energía de entrelazamiento entre los modos positivos y negativos de un campo escalar cósmico marca una pauta similar para la variación de la energía de vacío cuando el campo escalar parte de uno de sus modos más bajos, evolucionando hacia modos más altos con la expansión de los universos.

Como conclusión final, puede decirse que la teoría cuántica puede y debe aplicarse al universo como un todo. El contexto natural es en ese caso el del multiverso cuántico, en el que deben revisarse conceptos tan fundamentales de la teoría como el de complementariedad y el de no-localidad.

El concepto de no-localidad debe extenderse al de interdependencia cuántica de los estados correspondientes a las distintas regiones del espacio-tiempo, incluso en el caso en el que estas regiones estén separadas causalmente desde un punto de vista clásico. Esto hace necesario extender el concepto clásico de causalidad, quizá a través de una noción de causa común que, en el caso del multiverso, equivaldría a una premisa (pre-supuesto) de causalidad holística que se extienda más allá del propio universo.

El concepto de complementariedad en el multiverso implica la consideración de procesos de interferencia o autointerferencia entre distintos universos o ramas del universo, que darían lugar a fenómenos observables en cada uno de los universos. Dichos procesos podrían inducir una modificación de las propiedades termodinámicas de tales universos mediante: i) el entrelazamiento mutuo entre universos, ii) por una modificación de las propiedades de la radiación cósmica, originada por su entrelazamiento con el vacío gravitatorio del propio universo o a través del entrelazamiento cuántico con los campos de materia y radiación de otro universo entrelazado al mismo.

La observación de dichos fenómenos de interferencia eliminaría del concepto de multiverso su mayor controversia: la imposibilidad de observación de otras ramas del universo.

El desarrollo de una teoría de la información cuántica y el estudio del entrelazamiento cuántico en el multiverso, además de ayudarnos a entender de manera más

exhaustiva los fundamentos de la teoría cuántica, podría abrir un abanico de nuevos fenómenos cósmicos sin análogo clásico, entre los que podrían estar la expansión acelerada del universo y otros aún por descubrir.

Bibliografía

- [1] A. G. Riess *et al.*, “Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant,” *Astrophys. J.* **116** (1998) 1009–1038.
- [2] S. Perlmutter *et al.*, “Measurements of omega and lambda from 42 high-redshift supernovae,” *Astrophys. J.* **517** (1999) 565–586.
- [3] S. Perlmutter *et al.*, “Measurements of the cosmological parameters omega and lambda from the first seven supernovae at z greater than 0.35,” *Astrophys. J.* **483** (1997) 565–581.
- [4] D. N. Spergel *et al.*, “First year wilkinson microwave anisotropy probe (WMAP) observations: Determination of cosmological parameters,” *Astrophys. J.* **148** (2003) 175–194, [astro-ph/0302209](#).
- [5] M. Kowalski *et al.*, “Improved cosmological constraints from new, old and combined supernova datasets,” *Astrophys. J.* **686** (2008) 749–778, [0804.4142](#).
- [6] J. L. Tonry *et al.*, “Cosmological results from high-z supernovae,” *Astrophys. J.* **594** (2003) 1–24, [astro-ph/0305008](#).
- [7] E. Komatsu *et al.*, “Seven-year wilkinson microwave anisotropy probe (WMAP) observations: Cosmological interpretation,” *Astrophys. J. Suppl.* **686** (2011) 749–778, [1001.4538](#).
- [8] R. R. Caldwell and M. Kamionkowski, “The physics of cosmic acceleration,” *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **59** (2009) 397–429.
- [9] S. M. Carroll, “The cosmological constant,” *Living Rev. Rel.* **4** (2000) 1, [astro-ph/0004075v2](#).
- [10] E. J. Copeland *et al.*, “Dynamics of dark energy,” *Int. J. Mod. Phys. D* **15** (2006) 1753–1936, [hep-th/0603057](#).
- [11] L. Amendola and S. Tsujikawa, *Dark Energy*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2010.
- [12] C. Armendariz-Picon *et al.*, “A dynamical solution to the problem of a small

- cosmological constant and late-time cosmic acceleration,” *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000) 4438–4441, [astro-ph/0004134](#).
- [13] R. R. Caldwell, “A phantom menace? cosmological consequences of a dark energy component with super-negative equation of state,” *Phys. Lett. B* **545** (2002) 23, [astro-ph/9908168](#).
- [14] S. M. Carroll *et al.*, “Can the dark energy equation-of-state parameter w be less than -1 ?” *Phys. Rev. D* **68** (2003) 023509, [astro-ph/0301273](#).
- [15] J. M. Cline *et al.*, “The phantom menaced: constraints on low-energy effective ghosts,” *Phys. Rev. D* **70** (2004) 043543, [arXiv:hep-ph/0311312v4](#).
- [16] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The large scale structure of space-time*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1973.
- [17] M. C. Bento *et al.*, “Generalized chaplygin gas, accelerated expansion and dark energy-matter unification,” *Phys. Rev. D* **66** (2002) 043507, [gr-qc/0202064](#).
- [18] G. Dvali *et al.*, “4d gravity on a brane in 5d minkowski space,” *Phys. Lett. B* **485** (2000) 208–214.
- [19] R. Bousso and J. Polchinski, “Quantization of four-form fluxes and dynamical neutralization of the cosmological constant,” *JHEP* **0006** (2000) 006, [arXiv:hep-th/0004134v3](#).
- [20] A. Linde, “Chaotic inflation,” *Phys. Lett. B* **129** (1983) 177.
- [21] A. Linde, “The inflationary multiverse,” in *Universe or Multiverse*, B. Carr, ed., ch. 8. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2007.
- [22] J. Garriga and A. Vilenkin, “On likely values of the cosmological constant,” *Phys. Rev. D* **61** (2000) 083502, [astro-ph/9908115](#).
- [23] A. Vilenkin, “Predictions from quantum cosmology,” *Phys. Rev. Lett.* **74** (1995) 846–849.
- [24] S. Weinberg, “Anthropic bound on the cosmological constant,” *Phys. Rev. Lett.* **59** (1987) 2607.
- [25] S. W. Hawking, “Wormholes and non-simply connected manifolds,” in *Quantum Cosmology and Baby Universes*, S. Coleman, J. B. Hartle, T. Piran, and S. Weinberg, eds., vol. 7. World Scientific, London, UK, 1990.
- [26] S. W. Hawking and T. Hertog, “Populating the landscape: A top-down approach,” *Phys. Rev. D* **73** (2006) 123527.
- [27] A. O. Barvinsky and A. Y. Kamenshchik, “Cosmological landscape from nothing: Some like it hot,” *JCAP* **0609** (2006) 014, [hep-th/0605132](#).

- [28] A. O. Barvinsky and A. Y. Kamenshchik, “Cosmological landscape and euclidean quantum gravity,” *J. Phys. A* **40** (2007) 7043–7048, [hep-th/0701201](#).
- [29] A. O. Barvinsky, “Why there is something rather than nothing (out of everything)?,” *Phys. Rev. Lett.* **99** (2007) 071301, [0704.0083](#).
- [30] J. B. Hartle, “The quantum mechanics of cosmology,” in *Quantum Cosmology and Baby Universes*, S. Coleman, J. B. Hartle, T. Piran, and S. Weinberg, eds., vol. 7. World Scientific, London, UK, 1990.
- [31] J. B. Hartle, “Spacetime quantum mechanics and the quantum mechanics of spacetime,” in *Gravitation and Quantization: Proceedings of the 1992 Les Houches Summer School*, B. Julia and J. Zinn-Justin, eds. North Holland, Amsterdam, 1995. [gr-qc/9304006](#).
- [32] J. B. Hartle, *Anthropic reasoning and quantum cosmology*, ch. 18. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2007.
- [33] S. Coleman, “Black holes as red herrings: Topological fluctuations and the loss of quantum coherence,” *Nucl. Phys. B* **307** (1988) 867.
- [34] P. F. González-Díaz, “Nonclassical states in quantum gravity,” *Phys. Lett. B* **293** (1992) 294.
- [35] P. F. González-Díaz, “Regaining quantum incoherence for matter fields,” *Phys. Rev. D* **45** (1992) 499.
- [36] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, “Cosmological event horizons, thermodynamics, and particle creation,” *Phys. Rev. D* **15** (1977) 2738.
- [37] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *Quantum fields in curved space*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1982.
- [38] J.-W. Lee *et al.*, “Dark energy from vacuum entanglement,” *JCAP* **0708** (2007) 005, [hep-th/0701199](#).
- [39] Y. B. Zeldovich, “Cosmological constant and elementary particles,” *JETP letters* **6** (1967) 316–317.
- [40] C. Kiefer, *Quantum gravity*. Oxford University Press, Oxford, UK, 2007.
- [41] C. Rovelli, “Notes for a brief history of quantum gravity,” in *9th Marcel Grossmann Meeting*. 2000. [gr-qc/0006061](#).
- [42] J. A. Wheeler, “On the nature of quantum geometrodynamics,” *Ann. Phys.* **2** (1957) 604–614.
- [43] B. S. De Witt, “Quantum theory of gravity. I. the canonical theory,” *Phys. Rev.* **160** (1967) 1113–1148.

- [44] J. D. Bekenstein, “Black holes and entropy,” *Phys. Rev. D* **7** (1973) 2333–2346.
- [45] S. W. Hawking, “Black holes and thermodynamics,” *Phys. Rev. D* **13** (1976) 191–197.
- [46] J. B. Hartle and S. W. Hawking, “Wave function of the universe,” *Phys. Rev. D* **28** (1983) 2960.
- [47] A. Vilenkin, “Quantum creation of universes,” *Phys. Rev. D* **30** (1984) 509–511.
- [48] A. Vilenkin, “Boundary conditions in quantum cosmology,” *Phys. Rev. D* **33** (1986) 3560–3569.
- [49] C. Rovelli, “Loop quantum gravity,” *Liv. Rev. Rel.* **11** (2008) 5.
- [50] S. Saunders, J. Barret, A. Kent, and D. Wallace, eds., *Many Worlds? Everett, Quantum Theory & Reality*. Oxford University Press, Oxford, UK, 2010.
- [51] S. Carlip, “Quantum gravity: a progress report,” *Rept. Prog. Phys.* **64** (2001) 885, [gr-qc/0108040](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0108040).
- [52] R. P. Woodard, “How far are we from the quantum theory of gravity?,” *UFIFT-QG* **06** (2009) , 0907.4238.
- [53] M. Gell-Mann and J. B. Hartle, “Quantum mechanics in the light of quantum cosmology,” in *Complexity, Entropy and the physics of Information*, W. H. Zurek, ed. Addison-Wesley, Reading, USA, 1990.
- [54] M. Gell-Mann and J. B. Hartle, “Classical equations for quantum systems,” *Phys. Rev. D* **47** (1993) 3345–3382, [gr-qg/9210010](https://arxiv.org/abs/gr-qg/9210010).
- [55] A. Einstein *et al.*, “Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?,” *Phys. Rev.* **47** (1935) 777–780.
- [56] J. S. Bell, *Speakable and unspeakable in quantum mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1987.
- [57] M. D. Reid and D. F. Walls, “Violations of classical inequalities in quantum optics,” *Phys. Rev. A* **34** (1986) 1260–1276.
- [58] M. Schlosshauer, *Decoherence and the quantum-to-classical transition*. Springer, Berlin, Germany, 2007.
- [59] H. Everett, “relative state” formulation of quantum mechanics,” *Rev. Mod. Phys.* **29** (1957) no. 454-462, .
- [60] D. Wallace, “Quantum probability and decision theory, revisited,” <http://philsci-archive.pitt.edu/885/> (2002) .
- [61] S. Saunders, “Time, quantum mechanics, and probability,” *Synthese* **114** (1998)

- 373–404.
- [62] W. H. Zurek, “Pointer basis of quantum apparatus: Into what mixture does the wave packet collapse?,” *Phys. Rev. D* **24** (1981) 1516–1525.
- [63] R. Penrose, “Gravity and state vector reduction,” in *Quantum concepts in space and time*, R. Penrose and C. J. Isham, eds. Oxford University Press, Oxford, UK, 1985.
- [64] R. Penrose, “On gravity role in quantum state reduction,” in *Physics meets philosophy at the Planck scale*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2001.
- [65] B. Carr *et al.*, eds., *Universe or Multiverse*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2007.
- [66] P. J. Steinhard and N. Turok, “Cosmic evolution in a cyclic universe,” *Phys. Rev. D* **65** (2002) 126003, [hep-th/0111098](#).
- [67] L. Smolin, *The life of the cosmos*. Oxford University Press, Oxford, UK, 2003.
- [68] L. Susskind, “The anthropic landscape of string theory,” [hep-th/0302219](#).
- [69] D. F. Walls, “Squeezed states of light,” *Nature* **306** (1986) 141–146.
- [70] S. Nojiri and S. D. Odintsov, “Final state and thermodynamics of a dark energy universe,” *Phys. Rev. D* **70** (2004) 103522.
- [71] A. Rozas-Fernández, *Cosmic models and holography*. C/4906, Facultad de Ciencias, UAM, 2011.
- [72] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*. W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1970.
- [73] R. M. Wald, *General Relativity*. The University of Chicago Press, Chicago, USA, 1984.
- [74] D. L. Wiltshire, “An introduction to quantum cosmology,” [gr-qc/0101003](#).
- [75] P. A. M. Dirac, “Lectures on quantum mechanics,” in *Belfer Graduate School of Science Monographs Series*, no. 2. Belfer Graduate School of Science, NY, USA, 1964.
- [76] H.-J. Matschull, “Dirac’s canonical quantization programme,” [quant-ph/9606031](#).
- [77] S. W. Hawking, “The quantum state of the universe,” *Nucl. Phys. B* **239** (1984) 257–276.
- [78] A. Vilenkin, “Unambiguous probabilities in an eternally inflating universe,”

- Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 5501–5504, arXiv:hep-th/9806185v2.
- [79] R. Penrose, *General Relativity: An Einstein Centenary Survey*, ch. 12. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1979.
- [80] A. Linde, “Eternally existing self-reproducing chaotic inflationary universe,” *Phys. Lett. B* **175** (1986) no. 4, 395–400.
- [81] J. R. I. Gott and L.-X. Li, “Can the universe create itself?,” *Phys. Rev. D* **58** (1998) 023501.
- [82] S. W. Hawking, “The boundary conditions of the universe,” *Astrophysical Cosmology, 563-72. Vatican City: Pontificia Academiae Scientiarum* (1982) .
- [83] S. W. Hawking, “Quantum cosmology,” in *Relativity, groups and topology II, Les Houches, Session XL, 1983*, B. S. De Witt and R. Stora, eds. Elsevier Science Publishers B. V., 1984.
- [84] A. Vilenkin, “Quantum cosmology and the initial state of the universe,” *Phys. Rev. D* **37** (1988) 888–897.
- [85] M. P. Dabrowski *et al.*, “Quantum phantom cosmology,” *Phys. Rev. D* **74** (2006) 044022.
- [86] P. F. González-Díaz, “Wormholes and ringholes in a dark-energy universe,” *Phys. Rev. D* **68** (2003) 084016.
- [87] P. F. González-Díaz and S. Robles-Pérez, “Quantum theory of an accelerating universe,” *Int. J. Mod. Phys. D* **17** (2008) 1213–1228, 0709.4038.
- [88] R. Steigl and F. Hinterleitner, “Factor ordering in standard quantum cosmology,” *Class. Quant. Grav.* **23** (2006) 3879–3894, gr-qc/0511149.
- [89] S. W. Hawking and D. N. Page, “Operator ordering and the flatness of the universe,” *Nucl. Phys. B* **264** (1986) 185–196.
- [90] S. Robles-Pérez *et al.*, “Coherent states in quantum cosmology,” in *Proceedings of the 1st National Meeting on Theoretical Physics, Fes, Morocco. 2007.* 0709.3302.
- [91] S. Robles-Pérez *et al.*, “Coherent states in the quantum multiverse,” *Phys. Lett. B* **683** (2010) 1–6, 0909.3063.
- [92] S. W. Hawking, “The density matrix of the universe,” *Phys. Scripta* **T15** (1987) 151–153.
- [93] D. N. Page, “Density matrix of the universe,” *Phys. Rev. D* **34** (1986) 2267–2271.

- [94] S. W. Hawking, “Wormholes in spacetime,” *Phys. Rev. D* **37** (1988) 904–910.
- [95] S. W. Hawking, “Spectrum of wormholes,” *Phys. Rev. D* **42** (1990) 2655–2663.
- [96] S. W. Hawking, “Spacetime foam,” *Nucl. Phys. B* **144** (1978) 349–362.
- [97] D. W. Singer, *Giordano Bruno, His Life and Thought, With Annotated translation of His Work - On the infinite Universe and Worlds (1584)*. Schuman, NY, USA, 1950.
- [98] A. Rioja and J. Ordoñez, *Teorías del universo*. Síntesis, Madrid, Spain, 2006.
- [99] V. Vedral, *Introduction to quantum information science*. Oxford University Press, Oxford, UK, 2006.
- [100] G. Jaeger, *Quantum information*. Springer, Berlin, Germany, 2007.
- [101] A. Ben-Naim, *A farewell to entropy: statistical thermodynamics based on information*. World Scientific, London, UK, 2008.
- [102] J. Gemmer *et al.*, *Quantum thermodynamics*. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 2009.
- [103] A. Strominger, “Baby universes,” in *Quantum Cosmology and Baby Universes*, S. Coleman, J. B. Hartle, T. Piran, and S. Weinberg, eds., vol. 7. World Scientific, London, UK, 1990.
- [104] M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Quantum optics*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1997.
- [105] S. Robles-Pérez and P. F. González-Díaz, “Quantum state of the multiverse,” *Phys. Rev. D* **81** (2010) 083529, [arXiv:1005.2147v1](https://arxiv.org/abs/1005.2147v1).
- [106] H. R. Lewis and W. B. Riesenfeld, “An exact quantum theory of the time-dependent harmonic oscillator and of a charged particle in a time-dependent electromagnetic field,” *J. Math. Phys.* **10** (1969) 1458–1473.
- [107] I. A. Pedrosa, “Comment on “coherent states for the time-dependent harmonic oscillator”,” *Phys. Rev. D* **36** (1987) 1279.
- [108] C. M. A. Dantas *et al.*, “Harmonic oscillator with time-dependent mass and frequency and a perturbative potential,” *Phys. Rev. A* **45** (1992) 1320.
- [109] D. Sheng *et al.*, “Quantum harmonic oscillator with time-dependent mass and frequency,” *Int. J. Theor. Phys.* **34** (1995) 355–368.
- [110] D.-Y. Song, “Unitary relation between a harmonic oscillator of time-dependent frequency and a simple harmonic oscillator with and without an inverse-square potential,” *Phys. Rev. A* **62** (2000) 014103.

-
- [111] T. J. Park, “Canonical transformations for time-dependent harmonic oscillators,” *Bull. Korean Chem. Soc.* **25** (2004) no. 285-288, .
- [112] D. G. Vergel and J. S. Villaseñor, “The time-dependent quantum harmonic oscillator revisited: Applications to quantum field theory,” *Ann. Phys.* **324** (2009) 1360.
- [113] A. Vilenkin, “Creation of universes from nothing,” *Phys. Lett. B* **117** (1982) 25–28.
- [114] P. F. González-Díaz and S. Robles-Pérez, “The entangled accelerating universe,” *Phys. Lett. B* **679** (2009) 298–301.
- [115] J. B. Hartle, “Unitarity and causality in generalized quantum mechanics for nonchronal spacetimes,” *Phys. Rev. D* **49** (1994) 6543–6555.
- [116] J. J. Halliwell, “Correlations in the wave function of the universe,” *Phys. Rev. D* **36** (1987) 3626–3640.
- [117] H. P. Yuen, “Generalized coherent states and the statistics of two-photon lasers,” *Phys. Lett. A* **51** (1975) 1–2.
- [118] H. P. Yuen, “Two-photon coherent states of the radiation field,” *Phys. Rev. A* **13** (1976) 2226–2243.
- [119] L. J. Garay, “Thermal properties of space-time foam,” *Phys. Rev. D* **58** (1998) 124015.
- [120] L. P. Grishchuk and Y. V. Sidorov, “Squeezed quantum states of relic gravitons and primordial density fluctuations,” *Phys. Rev. D* **42** (1990) 3413–3421.
- [121] D. F. Walls and G. J. Milburn, *Quantum optics*. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 2008.
- [122] R. J. Glauber, “The quantum theory of optical coherence,” *Phys. Rev.* **130** (1963) 2529.
- [123] R. J. Glauber, “Coherent and incoherent states of the radiation field,” *Phys. Rev.* **131** (1963) 2766.
- [124] A. Vilenkin, “Approaches to quantum cosmology,” *Phys. Rev. D* **50** (1994) 2581–2594.
- [125] E. M. F. Curado and M. A. Rego-Monteiro, “Multi-parametric deformed heisenberg algebras: a route to complexity,” *J. Phys. A* **34** (2001) 3253.
- [126] Y. Hassouni *et al.*, “Construction of coherent states for physical algebraic systems,” *Phys. Rev. A* **71** (2005) 022104.

- [127] C. Quesne, “New q-deformed coherent states with an explicitly known resolution of unity,” *J. Phys. A* **35** (2002) 9213.
- [128] S. Twareque-Ali *et al.*, “Vector coherent states from plancherel’s theorem, clifford algebras and matrix domains,” math-ph/0311042.
- [129] J. J. Halliwell, “Decoherence in quantum cosmology,” *Phys. Rev. D* **39** (1989) 2912–2923.
- [130] C. Kiefer, “Decoherence in quantum electrodynamics and quantum gravity,” *Phys. Rev. D* **46** (1992) 1658–1670.
- [131] J. J. Halliwell and S. W. Hawking, “Origin of structure in the universe,” *Phys. Rev. D* **31** (1985) 1777–1791.
- [132] S. Coleman, “Why there is nothing rather than something? a theory of the cosmological constant,” *Nucl. Phys. B* **310** (1988) 643–668.
- [133] S. B. Giddings and A. Strominger, “Loss of incoherence and determination of coupling constants in quantum gravity,” *Nucl. Phys. B* **207** (1988) 854–866.
- [134] E. Joos *et al.*, *Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory*. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 2003.
- [135] P. F. González-Díaz, “On the Tolman-Hawking wormhole,” *Phys. Rev. D* **40** (1989) no. 12, 4184–4185.
- [136] P. F. González-Díaz, “What is really being lost in wormholes?,” *Phys. Rev. D* **42** (1990) no. 12, 3983–3996.
- [137] P. F. González-Díaz, “Warp drive space-time,” *Phys. Rev. D* **62** (2000) 044005–044012.
- [138] P. F. González-Díaz, “Superluminal warp drive,” *Phys. Lett. B* **653** (2007) 129–133.
- [139] P. F. González-Díaz, “Superluminal warp drive and dark energy,” *Phys. Lett. B* **657** (2007) 15–19.
- [140] S. B. Giddings and A. Strominger, “Axion-induced topology change in quantum gravity and string theory,” *Nucl. Phys. B* **306** (1988) 890–907.
- [141] M. Abramovitz and I. A. Stegun, eds., *Handbook of Mathematical Functions*. NBS, 1972.
- [142] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*. Elsevier, Oxford, UK, 1975.
- [143] J.-S. Wang *et al.*, “High order squeezed states of anharmonic oscillators,” *Int.*

- J. Theor. Phys.* **39** (2000) no. 11, 2583–2593.
- [144] M. B. Plenio and V. Vedral, “Teleportation, entanglement and thermodynamics in the quantum world,” *Comtemp. Phys.* **39** (1998) 431–446.
- [145] R. Alicki *et al.*, “Thermodynamics of quantum informational systems - hamiltonian description,” *Open Syst. Inf. Dyn.* **11** (2004) 205–217.
- [146] S. Mukohyama, “Comments on entanglement entropy,” *Phys. Rev. D* **58** (1998) 104023.
- [147] V. F. Mukhanov and S. Winitzki, *Quantum Effects in Gravity*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2007.