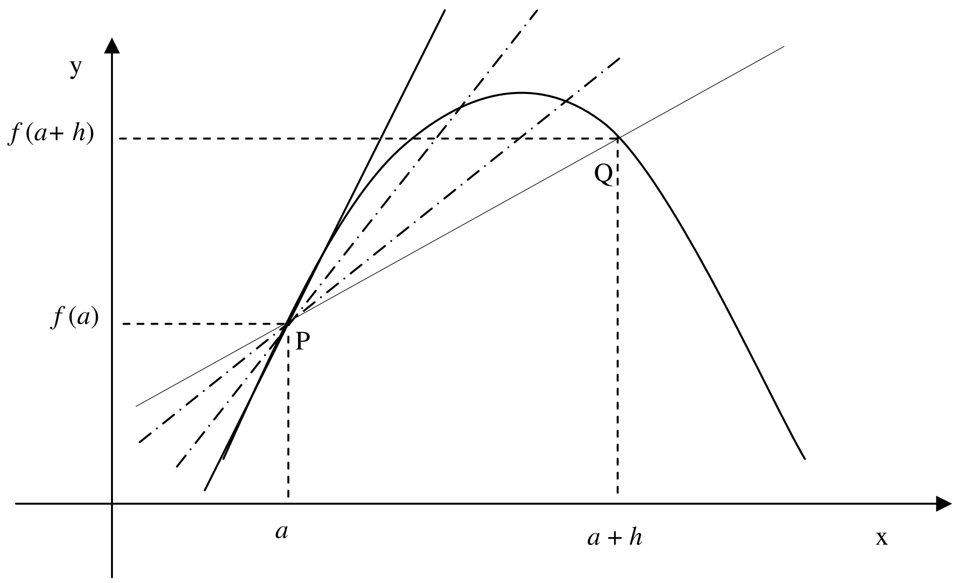
CÁLCULO DIFERENCIAL

Conceito de derivada. Interpretação geométrica

A noção fundamental do Cálculo Diferencial – a derivada – parece ter sido pela primeira vez explicitada no século XVII, pelo matemático francês Pierre de Fermat.



Considere-se uma função f e sejam P e Q dois pontos da curva de coordenadas $(a, f(a))$ e $(a+h, f(a+h))$. O declive da recta que passa por esses dois pontos é dado por

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Define-se tangente a uma curva f num ponto $(a, f(a))$ como a recta cujo declive é o $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

A $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ chama-se **razão incremental**.

Definição:

Seja f uma f. r. v. r.. Chama-se **derivada da função *f* no ponto de abcissa *a*** (representa-se por $\boldsymbol{f'(a)}$) ao limite, caso exista,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Nota: A expressão $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ também pode ser usada para definir derivada da função f no ponto a. Para verificar a equivalência basta fazer $x - a = h$ e efectuar os cálculos.

Nota: Se $f'(a)$ existe, diz-se que ***f* é derivável em *a*** ou que ***f* tem derivada em *a***.

Definição:

Seja f uma f. r. v. r.. Chama-se **derivada à esquerda da função *f* no ponto de abcissa *a*** (representa-se por $\boldsymbol{f'(a^-)}$) ao limite, caso exista,

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Definição:

Seja f uma f. r. v. r.. Chama-se **derivada à direita da função *f* no ponto de abcissa *a*** (representa-se por $\boldsymbol{f'(a^+)}$) ao limite, caso exista,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Teorema:

Uma função f tem derivada no ponto a sse existem e são iguais as derivadas laterais nesse ponto. O valor comum dessas derivadas é a derivada da função no ponto.

Definição:

Uma f. r. v. r. diz-se **derivável num intervalo** $]b,c[$ se é derivável em todos os pontos do intervalo.

Definição:

Uma f. r. v. r. diz-se **derivável num intervalo** $[b,c]$ se é derivável em todos os pontos do intervalo aberto e derivável à direita de b e à esquerda de c.

De modo idêntico define-se função **derivável** em intervalos do tipo $]b,+\infty[$; $]-\infty, c[$; $[b, c[$; $]b, c]$; $[b,+\infty[$ ou $]-\infty, c]$.

Definição:

Uma f. r. v. r. diz-se **derivável** se é derivável em todos os pontos do seu domínio.

Definição:

Seja f uma f. r. v. r.. Chama-se **função derivada de f** (representa-se por f') à função de x, definida para todos os pontos onde existe derivada finita, tal que

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Nota: Para além da notação $f'(x)$ poderão surgir outras notações. Por exemplo:

$$\frac{\mathrm{d}\,(f\,(x))}{\mathrm{d}x} \quad ; \quad \mathrm{D}\,f\,(x) \quad ; \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \quad \text{ou} \quad y'.$$

Exemplos:

Calcule, usando a definição, a função derivada de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = a$, a constante ; **b)** $f(x) = x$; **c)** $f(x) = x^n$;

d) $f(x) = \sqrt{x}$; **e)** $f(x) = \operatorname{sen} x$; **f)** $f(x) = \cos x$.

Derivabilidade e continuidade

Teorema:

Toda a função que admite derivada finita num ponto é contínua nesse ponto.

Exemplo:

Seja $f(x) = |x+1|$. Estude a função quanto à continuidade e diferenciabilidade no ponto de abcissa -1.

OBSERVAÇÃO: O recíproco deste teorema é FALSO.

Regras de derivação

Teorema:

A derivada de uma constante é igual a zero.

Teorema:

A derivada da função identidade é igual a um.

Teorema:

Sejam f e g duas f. r. v. r. que admitem derivada no respectivo domínio, então:

1. $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$;

2. $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$;

3. $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}$.

Teorema:

Sejam f e g duas f. r. v. r. que admitem derivadas nos respectivos domínios. A derivada da função composta $h(x) = (f \circ g)(x)$ é dada por:

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Teorema:

Se f tiver derivada no seu domínio, então $\left([f(x)]^n\right)' = n[f(x)]^{n-1} f'(x)$, n inteiro positivo.

Observação: Esta regra é ainda válida para potências de expoente racional.

Exemplos:

Calcule : **a)** $\left[\operatorname{sen}^3(x)\right]'$; **b)** $\left[\sqrt[n]{f(x)}\right]'$.

Teorema:

Se f é uma f. r. v. r. invertível, com derivada finita e não nula no seu domínio, então a sua inversa é também derivável com derivada dada por:

$$\left[f^{-1}(y)\right]' = \frac{1}{f'(x)}, \text{ com } y = f(x).$$

Exemplos:

Calcule as derivadas das seguintes funções:

a) $\operatorname{arc\,sen}(x)$; **b)** $\arccos(x)$;

c) $\arctan(x)$; **d)** $\operatorname{arc\,cotg}(x)$.

Derivada da função implícita

Na função implícita a variável y é definida como uma função de x, por meio de uma equação que envolve as duas variáveis:

$$F(x, y) = 0.$$

Diz-se que a equação indicada define y como função implícita de x.

Exemplos:

a) $x\,y = 1$; **b)** $x^2 + y^2 = 1$.

A técnica de derivação da função implícita consiste em derivar ambos os membros da equação em ordem a x, considerando sempre y como uma função de x.

Exemplos:

a) Derivar $x^2\,y^3$, supondo $y = f(x)$.

b) Determinar o coeficiente angular da tangente ao gráfico de $y^4 + 3y - 4x^3 = 5x + 1$, no ponto **P**$(1,-2)$.

Nota:

Supõe-se que a equação define implicitamente uma função diferenciável f, tal que $y = f(x)$.

Derivada de funções definidas de forma paramétrica

Consideremos uma função definida pelas equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} .$$

Supondo que ϕ e ψ são deriváveis e que $x = \phi(t)$ admite inversa $t = \varphi(x)$, igualmente derivável, podemos considerar $y = f(x)$, como a composta de $y = \psi(t)$ com $t = \varphi(x)$.

Usando a regra de derivação da função composta:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \psi'(t)\,\varphi'(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} \quad \text{ou seja} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} .$$

Exemplo:

Calcular a derivada da função $y = f(x)$ definida pelas equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = a + r\cos\theta \\ y = b + r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \text{, com } \theta \in [0,2\pi[.$$

Nota: Estas equações definem uma circunferência de raio r e centro em (a,b).

Derivadas sucessivas

Seja f uma função que admite derivada de primeira ordem. Esta derivada conduz a uma nova função: f'.

Se, por sua vez, esta nova função admite derivada, obtemos uma derivada de segunda ordem que se representa por f''.

Da mesma forma a terceira derivada, se existir, representa-se por f''' e assim sucessivamente.

$(\cdots)$

Após n derivações sucessivas (n inteiro positivo) obtém-se a derivada de ordem n de f que se representa por $f^{(n)}$.

Podemos usar as seguintes notações:

- $f'(x)$; $\dfrac{\mathrm{d}(f(x))}{\mathrm{d}x}$; $Df(x)$; $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$; ou y', para a primeira derivada;

- $f''(x)$; $\dfrac{\mathrm{d}^2(f(x))}{\mathrm{d}x^2}$; $D^2 f(x)$; $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ ou y'', para a segunda derivada;

$(\cdots)$

- $f^{(n)}(x)$; $\dfrac{\mathrm{d}^n(f(x))}{\mathrm{d}x^n}$; $D^n f(x)$; $\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$ ou $y^{(n)}$, para a n-ésima derivada.

Exemplos:

a)Calcular a segunda derivada da função paramétrica atrás definida .

b)Determinar uma expressão geral para a n–ésima derivada da função $\log(x)$.