<u>La medición y los errores</u>

(Topografía I- Ing. Agrim. María Eugenia Videla)

Para la determinación y representación de la forma, dimensión y ubicación de una porción de la superficie terrestre, en Topografía, es fundamental la medición de magnitudes. Las mediciones se realizan con un instrumento específico, mediante la aplicación de un método y en determinadas condiciones generales de trabajo.

En el proceso de medición asignamos un valor cuantitativo a una magnitud física. Pero tan importante como la cantidad que medimos son los errores implicados en ese proceso de medición. Como explicaremos a continuación algunos de ellos se pueden corregir, pero siempre quedará un rango de incertidumbre proveniente de causas fortuitas, limitaciones humanas, limitaciones del instrumental utilizado y condiciones generales de trabajo. Estos errores, si bien son inevitables e incorregibles, sí pueden ser estimados. Por lo tanto cada medida estará acompañada por este rango de incertidumbre o precisión que determinará la calidad del resultado.

Resultado= Cantidad medida +/- Calidad de la medida

<u>Clasificación de los errores en la medición:</u>

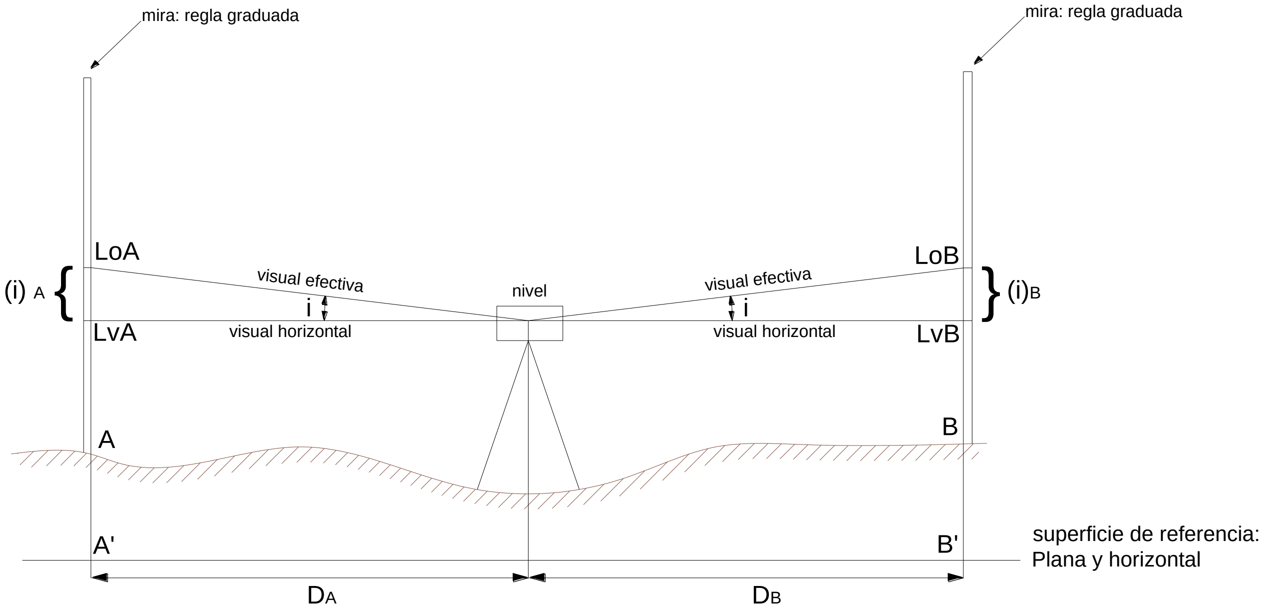
Los errores presentes en los proceso de medición se clasifican en sistemáticos y accidentales.

Fuera de la clasificación de errores se encuentran las equivocaciones, propias del descuido, de la mala aplicación de un método, son errores groseros que deben ser eliminados. Se detectan al reiterar la medición, o al obtener valores absurdos. Se previenen con el cuidado y la atención.

<u>Errores sistemáticos:</u> son atribuibles al instrumental, al método utilizado o a las condiciones de medición. Se pueden manifestar en todas las observaciones o ser errores sistemáticos intermitentes. Su principal característica es que **hay una ley física que describe su comportamiento**, si ésta se conoce, se puede cuantificar su influencia en las mediciones y por lo tanto corregir las mismas. Si se desconoce la ley física que describe el error, se debe tener precaución (por ejemplo: “efecto multipath” en medición con GPS: no estacionarse cerca de superficies reflectantes que puedan desviar la señal emitida por el satélite). Esta clase de errores afectan la exactitud en la medición, es decir, alejan el valor observado del valor real de la magnitud.

Los errores sistemáticos pueden ser constantes o variables, los constantes mantienen un valor fijo para el error en el proceso de medición, los variables son aquellos que varían en el proceso de medición.

Un ejemplo de error sistemático constante es el error de inclinación del nivel (i=ángulo formado por el eje de colimación del instrumento y la horizontal) es un ángulo fijo, su influencia en las observaciones sobre la mira viene dada por (i)= tan i. d. En este caso tenemos un error sistemático que es angular, y la influencia en las lecturas que es lineal. La influencia de este error en la medición dependerá del valor angular del error y de la distancia a la que se encuentra la mira. Notar la diferencia entre el error, propio del instrumento, y la influencia del error en la observación (se denota entre paréntesis). (Ver dibujo pág. siguiente)



Donde Lo= lectura observada, Lv= lectura verdadera, A'/B'= proyección del punto A/B sobre el plano horizontal.

Un ejemplo de error sistemático variable es la dilatación de una cinta metálica expuesta a diferentes temperaturas. En un mismo proceso de medición puede variar la temperatura sobre la cinta, dependiendo del horario del día y de la exposición o no al sol. Por lo tanto el error producido por el estiramiento o contracción de la cinta será variable, en función de la temperatura de la cinta en el momento de la medición.

Otros ejemplos de errores sistemáticos: una cinta métrica cuyo inicio no sea el 0m (error instrumental), una balanza que pese 1kg de más (error instrumental), la desviación que sufre la visual al atravesar capas de distinta densidad en la atmósfera (error propio del método), medir en tramos una magnitud lineal sin alinearse (error en el método), etc.

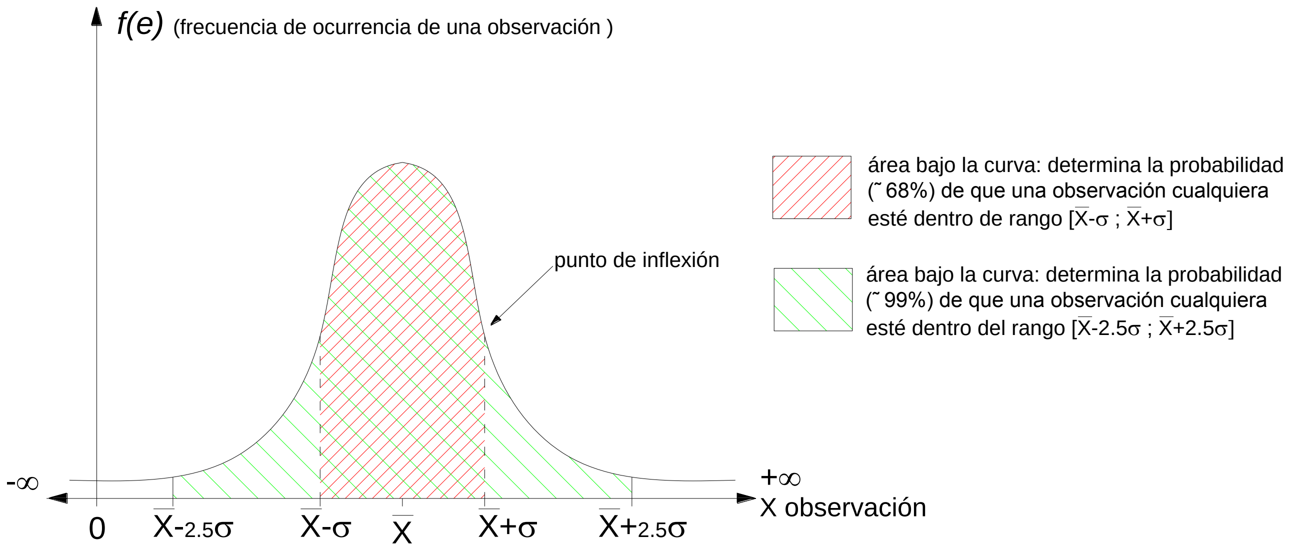
Los errores sistemáticos, dependiendo de su origen, se pueden tratar de 3 formas:

1) Cuantificado el error y conocida su ley de influencia en las mediciones, se podrán así corregir las mismas.
2) Calibrar el instrumento.
3) Utilizar un método operativo que me permita eliminar la influencia del error en el valor buscado.

Errores accidentales: una vez corregidos o tratados los errores sistemáticos, aún quedan los errores llamados accidentales, son errores inevitables que dependerán directamente de las condiciones en las que se trabaje (viento, neblina, reverberación, etc.), del operador (limitaciones propias del ser humano) y también del instrumental y método utilizado (por ejemplo, un nivel con mayor aumento, nos permitirá hacer una mejor estimación en la lectura). Son errores aleatorios, sin una ley que los describa, por lo tanto, **no se pueden corregir o eliminar,** pero existen métodos probabilísticos que nos permiten estimarlos y minimizar su influencia en los resultados.

Campana de Gauss:

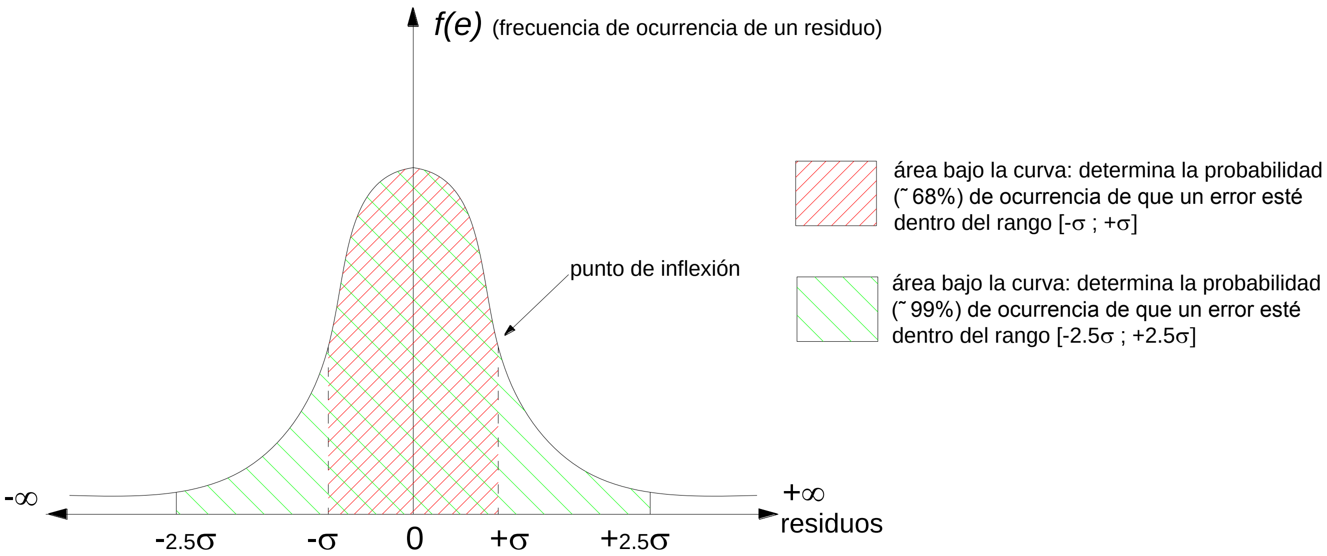
Los errores accidentales responden a una distribución normal, es decir que la distribución de probabilidad que describe sus comportamientos tiene las siguientes características:



Si se realizaran n observaciones (n tendiendo a ∞) de una misma magnitud en igualdad de condiciones, obtendremos muchos valores que se repetirán, algunos con más y otros con menos frecuencia. Éste gráfico muestra los valores arrojados en el proceso de medición (X=abscisas), en función de las frecuencias de ocurrencia de dichos valores (*f*(x)= ordenadas).

u=promedio o media aritmética de las observaciones

Si a cada valor de las abscisas se le restase *u* la campana se ubicaría simétrica respecto del eje *f* y obtendríamos la distribución de los residuos.



De la siguiente distribución se desprenden los siguientes postulados:

-Son igualmente probables los errores positivos como negativos.

-Son más frecuentes los errores pequeños que los grandes.

-Los errores varían entre –∞ y +∞.

- +/-σ puntos de inflexión de la curva.

Precisión en la medición:

La precisión se refiere al grado de dispersión o concordancia de un conjunto de valores obtenidos de mediciones repetidas de una misma magnitud realizadas en igualdad de condiciones. Cuanto menor es la dispersión entre las observaciones, mayor es la precisión. Esta precisión dependerá principalmente del instrumental y el método utilizado. Por ejemplo, no es lo mismo medir la hipotenusa de triángulo rectángulo, en forma directa con una cinta graduada al milímetro, que medir los otros dos lados con cinta graduada al centímetro, y calcular luego el lado en cuestión. En el primer caso tenemos un instrumental más preciso (por tener mejor apreciación) y él método de medición (directa) hace que los errores no se propaguen como en el segundo caso. Además del instrumental y el método, la precisión en una medición cualquiera también dependerá del contexto o las condiciones generales en las que se realiza el trabajo.

Tener en cuenta que para poder analizar de forma probabilística el comportamiento de los errores accidentales en las mediciones, las observaciones deben estar libres de influencias de errores sistemáticos, ya que algunos de éstos errores no afectan de modo constante a cada observación (ej. la temperatura a una cinta metálica).

Aplicación de la teoría de errores a mediciones reiteradas de una misma magnitudes en igualdad de condiciones:

Si tenemos una serie de mediciones realizadas con el mismo instrumental, método, condiciones, etc., o sea, de igual precisión, tendremos que el valor más probable de la serie, es la media aritmética:

$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$

Para estimar el grado de variabilidad entre las mediciones, recurrimos al desvío estándar o error medio cuadrático. Es un valor que caracteriza la precisión de **cada medición**, dentro de una serie de mediciones dadas en las mismas condiciones, con el mismo método, instrumental, etc.

Error medio cuadrático:

Por definición:

$$\lim_{n \to \infty} \quad [e]^2/n$$

En la práctica se utilizan los residuos: $\sigma = \sqrt{\frac{\sum \mathrm{Vi}^2}{\mathrm{n}-1}}$

Cuando n → ∞ , el e_{mc} tiende a una constante que caracteriza la precisión de cada observación realizada en determinas condiciones (instrumental/método/condiciones generales), o sea que éste no depende de n. Si queremos mejorar la precisión al medir, debemos cambiar el método de medición, el instrumental con el que trabajamos, las condiciones, etc.

Error medio de la media:

Es la precisión con la cual se calculó la media o promedio.

Según la ley de propagación de errores (ver errores en mediciones indirectas)

$\sigma_{x_m} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$

El error medio de la media (calidad o precisión con que se calculo el promedio) está en función del número de observaciones y de la precisión de cada una de ellas. O sea, si aumento el número de observaciones, estoy mejorando la calidad del promedio, pero la precisión con la que realizo cada medición no varía.

Resumen: ¿para qué realizamos varias mediciones de una misma magnitud?

En primer lugar la importancia de reiterar las observaciones de una misma magnitud radica en la posibilidad de equivocarnos, leer o escribir mal un número por ejemplo, por lo tanto al realizar 1 ó 2 mediciones más estaríamos garantizando que podremos descartar una eventual equivocación.

Cuando se nos encomienda un trabajo, se nos estipula la precisión o tolerancia requerida para el mismo, en base a ello, elegimos el instrumental y un método de medición que nos garantice, en teoría, resultados dentro de la tolerancia impuesta. Aún así hay errores inevitables y de distribución aleatoria, errores accidentales, que intervienen en toda medición. Entonces, para conocer en aproximación la precisión efectiva con la que hemos trabajado, recurrimos a la sobreabundancia de observaciones, la que nos permite conocer el grado de dispersión entre las mismas y el promedio, es decir, la precisión con la que se midió. La sobreabundancia es un requerimiento imprescindible para analizar la precisión con que medimos.

Además, la sobreabundancia de observaciones nos permite obtener un promedio más preciso, esto se debe a que los errores accidentales (inevitables) que afectan las mediciones, lo hacen aleatoriamente tanto en forma positiva como negativa, por lo tanto al realizar el promedio de "n" observaciones, los errores positivos cometidos en determinadas mediciones se compensarán parcialmente con los negativos de otras, por lo tanto la precisión que acompañará a ese promedio será mejor cuantas más observaciones realice. Tener en cuenta que se puede mejorar la precisión del resultado final (promedio) aumentando el número de observaciones, pero tiene sentido hasta cierto punto, ya que resulta absurdo querer llegar al mm midiendo con una regla graduada cada 10cm, o sea que se debe recurrir a otro método o instrumental que garantice mejor calidad. Debe haber una concordancia entre la graduación del instrumento de medición y la precisión buscada.

Errores en mediciones indirectas:

Las mediciones indirectas son aquellas en las que la observación de una magnitud no se hace de manera directa, sino que se determina mediante una función o fórmula matemática que vincula variables que sí se determinan experimentalmente de manera directa. Por ejemplo el área de un rectángulo se determina mediante una función que vincula 2 variables: lado1 y lado 2, medidos éstos en forma directa.

Área del rectángulo: lado1 x lado2

Los errores en las determinaciones indirectas dependerán del valor y la precisión que tengan las variables y la fórmula que las vincula, vienen dados por la fórmula de propagación de errores.

Si A= f(X,Y,Z,..) es una función que vincula a las variables independientes (ninguna es combinación lineal de las restantes) X,Y,Z,.., éstas de posible determinación experimental, y f(X,Y,Z, ..) es continua en los valores que adopten las variables $(x, y, z, ..)$, entonces σA=+/-$\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 .\sigma_x{}^2+\left(\frac{\partial y}{\partial y}\right)^2 .\sigma_y{}^2+.\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 .\sigma_z{}^2+\cdots+\left(\frac{\partial y}{\partial n}\right)^2 .\sigma_n{}^2}$

Ejemplo: si quisiéramos conocer la precisión del promedio de un grupo de mediciones realizadas en igualdad de condiciones (misma calidad)

$\bar{X}$=$\frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n}{n}$ donde $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n$ tendrán la misma precisión, o sea que

$\boldsymbol{\sigma_{x_1}}$=$\boldsymbol{\sigma_{x_2}}$=$\boldsymbol{\sigma_{x_3}}$=⋯=$\boldsymbol{\sigma_{x_n}}$=$\boldsymbol{\sigma_x}$ por lo tanto,

σ$\bar{X}$=+/-$\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x1}\right)^2 .\sigma_x{}^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x2}\right)^2 .\sigma_x{}^2+.\left(\frac{\partial y}{\partial x3}\right)^2 .\sigma_x{}^2+\cdots+\left(\frac{\partial y}{\partial xn}\right)^2 .\sigma_x{}^2}$

σ$\bar{X}$=+/-$\sqrt{n.\left(\frac{1}{n}\right)^2 .\sigma_x{}^2}$

σ$\bar{X}$=+/-$\sqrt{n.\left(\frac{1}{n}\right)^2 .\sigma_x{}^2}$

σ$\bar{X}$= $\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$

Observemos que en este caso la precisión del cálculo indirecto es mejor que la precisión de las variables. En otros casos la propagación de errores hace que éstos se acumulen.