Formação Continuada em MATEMÁTICA

Fundação Cecierj/Consórcio CEDERJ

Matemática 3° ano - 1° Bimestre/ 2013

Avaliação da Implementação do Plano de Trabalho I

Análise Combinatória e Introdução à Probabilidade

Tarefa 3: Avaliação da Implementação do Plano de Trabalho I

Cursista: Maurício Jorge Campos Gonçalves

Tutor: Susi Cristine Britto Ferreira

1 – Pontos Positivos

O plano de trabalho foi bem estruturado e bem organizado. Eu destaquei os pontos principais do conteúdo Análise Combinatória e Introdução à Probabilidade e enfatizei esses pontos para os alunos. Dúvidas foram esclarecidas durante as explicações para o entendimento do conteúdo. A ficha resumo das matérias auxiliaram bastante os alunos, pois eles conseguiram generalizar o conteúdo da matéria e identificar os pontos mais importantes para o entendimento da mesma.

2 – Pontos Negativos

O plano de trabalho está bem estruturado e organizado não sendo necessário fazer alguma mudança. Os alunos tiraram bastante proveito do conteúdo Análise Combinatória e Introdução à probabilidade principalmente na análise combinatória onde eles distinguiram corretamente a definição de arranjo simples e combinação simples.

3 – Alterações

Não há necessidade de fazer alterações, pois o plano de trabalho não tem pontos negativos e foi muito bem planejado.

4 – Impressões dos alunos

Os alunos tiveram uma boa impressão do plano, pois as aulas foram atrativas pelo fato da ficha resumo identificar os pontos principais e mais importantes do conteúdo. Isso facilitou o entendimento da matéria, de modo que o aluno pode compreender o conteúdo de forma clara e objetiva. Por exemplo, com relação ao Fatorial, Princípio Fundamental da Contagem, eles entenderam que o princípio multiplicativo auxilia e muito na resolução dos exercícios e isso facilitou a prática dos exercícios. Com relação ao Arranjo Simples e Combinação Simples eles entenderam que no arranjo simples a ordem dos elementos é importante na composição dos números enquanto que na combinação simples a ordem dos números não é importante para a formação dos subconjuntos. E na probabilidade eles compreenderam a definição básica, o significado de eventos favoráveis e eventos possíveis.

Formação Cotinuada em MATEMÁTICA

Fundação Cecierj/Consórcio CEDERJ

Matemática 3° ano - 1° Bimestre/ 2013

PLANO DE TRABALHO

Análise Combinatória e Introdução à Probabilidade

Tarefa 3: Avaliação da Implementação do Plano de Trabalho I

Cursista: Maurício Jorge Campos Gonçalves

Tutor: Susi Cristine Britto Ferreira

S u m á r i o

1 - Introdução

O objetivo deste plano de trabalho e permitir que os alunos percebam, através de assuntos do cotidiano, a utilização da Matemática para resolução de problemas. Transmitir o conhecimento sobre o conteúdo denominado “Análise Combinatória e Probabilidade ” fazendo, sempre que possível, com que os próprios alunos construam o conhecimento e enriqueçam sua “bagagem” através de atividades diferenciadas e exercícios práticos.

É comum a dificuldade por parte de muitos alunos concernentes a interpretação de enunciados e utilização de raciocínio lógico. Por isso, é extremamente importante mostrar em quais áreas da vida e/ou profissões o tema estudado é utilizado e mostrar que eles têm capacidade de aprender e não simplesmente “gravar” como se faz isso ou aquilo. Basta um pouquinho de boa vontade!

O assunto exige conhecimentos sobre Fatorial, Princípio Fundamental da Contagem enfatizando o princípio multiplicativo e o princípio aditivo da contagem, Arranjo Simples, Permutação Simples, Combinação Simples e Introdução à Probabilidade para cálculos de probabilidade de um evento. Por isso, faz-se necessário revisar alguns temas ao longo do caminho, como por exemplo, fatorial para cálculos de arranjos simples e combinações simples, equações envolvendo arranjos e combinações e etc.

1 - Desenvolvimento

ATIVIDADE 1: Fatorial e Princípio Fundamental da Contagem

- Habilidade Relacionada: efetuar cálculos de fatorial e equações fatoriais. Determinar o número de vezes que um acontecimento pode ocorrer de modo diferente sem ter de descrever todos os modos por meio do princípio fundamental da contagem.

- Pré-requisitos: calcular fatorial e utilizar o princípio multiplicativo e o princípio aditivo da contagem na resolução de exercícios.

- Tempo de duração: 400 minutos

- Recursos Educacionais Utilizados: Livro didático, quadro e caneta, RESUMO/EXPLICAÇÕES .

- Organização da Turma: Individual para a apresentação do conteúdo e dupla para realização dos exercícios de fixação.

- Objetivos: efetuar qualquer tipo de cálculo envolvendo fatorial, equações fatoriais e aplicar corretamente o princípio fundamental da contagem com auxílio do princípio multiplicativo e do princípio aditivo da contagem.

- Metodologia Adotada:

Ensinar os alunos a calcular fatorial, resolver equações fatoriais por meio de simplificação de expressões.Verificar com os alunos a resolução de equações fatoriais e a aplicação do princípio fundamental da contagem destacando o princípio multiplicativo e o princípio aditivo da contagem.

Entregar para os alunos uma folha contendo um resumo da matéria apresentada. Nesta folha, será destacada :

1 – Fatorial
2 – Princípio Fundamental da Contagem

FICHA RESUMO

1 – Fatorial

Definição: Ao produto dos números naturais começando em **n** e decrescendo até **1** denominamos de **fatorial de n** e representamos por **n!**.

Segundo tal definição, o **fatorial de 5** é representado por **5!** e lê-se **5 fatorial**.

5! é igual a **5 . 4 . 3 . 2 . 1** que é igual a **120**, assim como **4!** é igual a **4 . 3 . 2 . 1** que é igual a **24**, como **3!** é igual a **3 . 2 . 1** que é igual a **6** e que **2!** é igual a **2 . 1** que é igual a **2**.

Por definição tanto **0!**, quanto **1!** são iguais a **1.**

Abaixo, no final da página, temos uma tabela com os 28 primeiros fatoriais. Repare que apesar do número 27 ser relativamente baixo, o seu fatorial possui 29 dígitos.

Escrevendo um fatorial a partir de um outro fatorial menor

Vimos que **5!** é equivalente a **5 . 4 . 3 . 2 . 1**, mas note que também podemos escrevê-lo de outras formas, em função de fatoriais menores, tais como **4!**, **3!** e **2!**:

1. **5! = 5 . 4!**
2. **5! = 5 . 4 . 3!**
3. **5! = 5 . 4 . 3 . 2!**

Para um fatorial genérico temos:

n! = n . (n - 1)! = n . (n - 1) . (n - 2)! = n . (n - 1) . (n - 2) . (n - 3) . ... . 1!

Observe atentamente os exemplos seguintes:

1. **(n + 3)! = (n + 3) . (n + 2)!**

2. **(n + 3)! = (n + 3) . (n + 2) . (n + 1)!**
3. **(n + 1)! = (n + 1) . n!**

Vamos atribuir a **n** o valor numérico **6**, para termos uma visão mais clara destas sentenças:

1. **9! = 9 . 8!**
2. **9! = 9 . 8 . 7!**
3. **7! = 7 . 6!**

Estes conceitos são utilizados em muitos dos problemas envolvendo fatoriais.

Simplificação envolvendo fatoriais

Observe a fração abaixo:

$$\frac{5!}{3!}$$

Vimos que **5!** é equivalente a **5! = 5 . 4 . 3!**. Então podemos escrever a fração da seguinte forma:

$$\frac{5!}{3!} \Rightarrow \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!}$$

Agora podemos simplificar o **3!** do numerador com o **3!** do denominador. Temos então:

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} \Rightarrow 5 \cdot 4 \Rightarrow 20$$

Veja outros exemplos:

Gerando uma sequência de números compostos consecutivos a partir de um fatorial

Na página onde falamos sobre múltiplos de um número natural foi explicado que se a um número que é múltiplo de **n**, somarmos **n** ou qualquer um dos seus múltiplos, iremos obter como resultado um número que também é múltiplo de **n**.

3! + 2 = 3 . 2 . 1 + 2 = 6 + 2 = 8

3! + 3 = 3 . 2 . 1 + 3 = 6 + 3 = 9

Repare que **8**, resultado da soma de **6** com **2**, é divisível por **2**, assim como **6**. O mesmo ocorrendo com **9**, resultado da soma de **6** com **3**, que também é divisível por **3**.

Como **8** e **9** são múltiplos de algum fator de **3!**, temos que eles formam uma sequência de dois números compostos (não primos) consecutivos a partir do fatorial de três.

3! possui três fatores, mas só podemos considerar os fatores maiores que **1**, por isto só pudemos somar dois e três. Note neste exemplo, que se somássemos **3! + 1**, iríamos obter **7**, que não é um número composto. Sete é um número primo.

Exemplos de problemas envolvendo fatoriais

*Qual deve ser o valor numérico de **n** para que a equação*

***(n + 2)! = 20 . n!** seja verdadeira?*

O primeiro passo na resolução deste problema consiste em escrevermos **(n + 2)!** em função de **n!**, em busca de uma equação que não mais contenha fatoriais:

Conforme explicado na página onde tratamos sobre o cálculo rápido das raízes de equações do segundo grau, podemos resolver rapidamente esta equação respondendo à seguinte pergunta: **Quais são os dois números cuja soma é igual a -3 e cujo produto é igual -18**?

Rapidamente concluímos que as raízes procuradas são **-6** e **3**, mas como não existe fatorial de números negativos, já que eles não pertencem ao conjunto dos números naturais, ficamos apenas com a raiz igual a **3**.

Portanto:

- *O valor numérico de n para que a equação seja verdadeira é igual a 3.*

- *A partir de fatoriais, obtenha uma sequência com sete números compostos consecutivos.*

Como eu devo obter **7** números compostos consecutivos na sequência, eu preciso partir ao menos de **8!**:

8! = 8 . 7 . 6. 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 40320

Como **8!** é igual a **40320**, o primeiro número da sequência será **40320 + 2 = 40322** e o último será **40320 + 8 = 40328**.

Logo:

- *A sequência 40322, 40323, 40324, 40325, 40326, 40327 e 40328 satisfaz as condições do enunciado.*

Tabela com os fatoriais de 0 a 27

n	n!
0	**1**
1	**1**
2	**2**
3	**6**
4	**24**
5	**120**
6	**720**
7	**5040**
8	**40320**
9	**362880**
10	**3628800**
11	**39916800**
12	**479001600**
13	**6227020800**
14	**87178291200**
15	**1307674368000**
16	**20922789888000**
17	**355687428096000**
18	**6402373705728000**
19	**121645100408832000**
20	**2432902008176640000**
21	**51090942171709440000**
22	**1124000727777607680000**
23	**25852016738884976640000**
24	**620448401733239439360000**
25	**15511210043330985984000000**
26	**403291461126605635584000000**
27	**10888869450418352160768000000**

2 – Princípio Fundamental da Contagem

O Princípio Fundamental da Contagem é o mesmo que a Regra do Produto, um princípio combinatório que indica quantas vezes e as diferentes formas que um acontecimento pode ocorrer.

O acontecimento é formado por dois estágios caracterizados como sucessivos e independentes:

- O **primeiro estágio** pode ocorrer de m modos distintos.
- O **segundo estágio** pode ocorrer de n modos distintos.

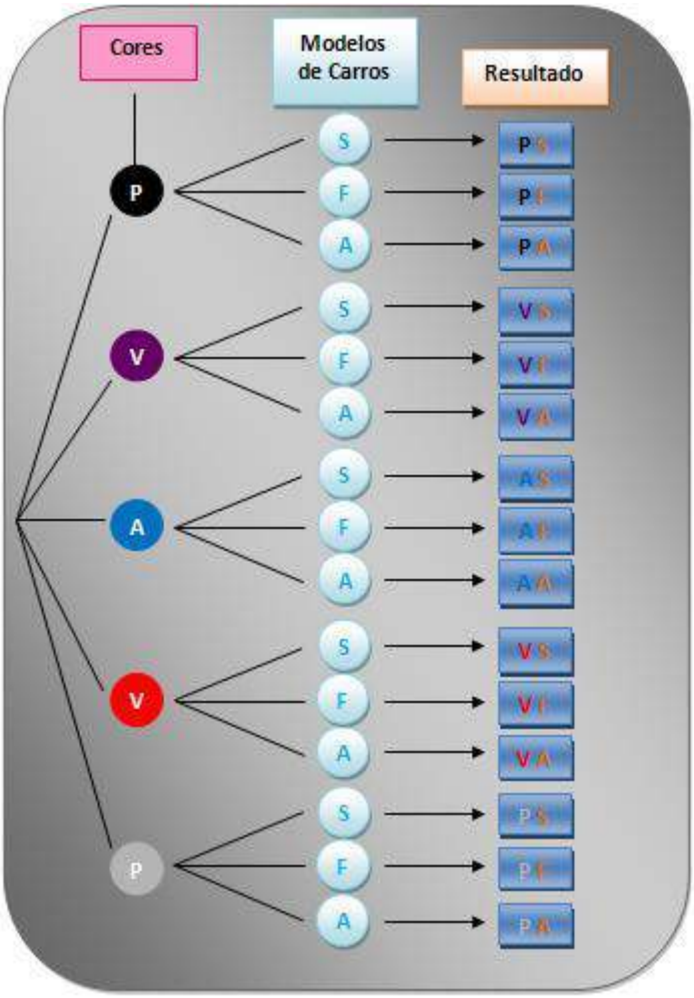
Desse modo, podemos dizer que o número de formas diferente que pode ocorrer em um acontecimento é igual ao produto m . n.
Exemplo:

Alice decidiu comprar um carro novo, e inicialmente ela quer se decidir qual a modelo e a cor do seu novo veículo. Na concessionária onde Alice foi há 3 tipos de modelos que são do interesse dela: Siena, Fox e Astra, sendo que para cada carro há 5 opções de cores: preto, vinho, azul, vermelho e prata.

Qual é o número total de opções que Alice poderá fazer?

Resolução:
Segundo o Principio Fundamental da Contagem, Alice tem 3×5 opções para fazer, ou seja,ela poderá optar por 15 carros diferentes.

Vamos representar as 15 opções na **árvore de possibilidades:**



Generalizações:

Um acontecimento é formado por k estágios sucessivos e independentes, com n_1, n_2, n_3, … , nk possibilidades para cada. O total de maneiras distintas de ocorrer este acontecimento é $n_1 . n_2 . n_3 . \ldots . n_k$.

Exercícios de Fixação

Questão 1

Simplifique a expressão:

$$\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+1)!}$$

Questão 2

(UFF-RJ) O produto 20*18*16*14*...*6*4*2 é equivalente a:

a) $\frac{20!}{2}$

b) $2*10!$

c) $\frac{20!}{2^{10}}$

d) $2^{10}*10!$

e) $\frac{20!}{10!}$

Questão 3

(UA-AM) Simplifique a expressão:

$$\frac{(n+1)!+n!}{(n+2)!}, (n \in N, n \geq 1)$$

Questão 4

Resolva as seguintes equações fatoriais:

a) $\frac{(x+2)!}{x!} = 0$

b) $\frac{x!}{(x-1)!} = 5!$

Questão 5

(PUC-RS) Se $\frac{(n-1)!}{(n+1)!-n!} = \frac{1}{81}$, então n é igual a:

a) 13 b) 11 c) 9 d) 8 e) 6

Questão 6

A quantidade de números inteiros, positivos e ímpares, formados por três algarismos distintos, escolhidos dentre os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, é igual a:

a) 320

b) 332

c) 348

d) 360

e) 384

Questão 7

(ITA–SP)

Quantos números de seis algarismos distintos podemos formar usando os dígitos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, nos quais o 1 e o 2 nunca ocupam posições adjacentes (juntos), mas o 3 e o 4 sempre ocupam posições adjacentes?

a) 144
b) 180
c) 240
d) 288
e) 360

Questão 8

De quantas maneiras 6 pessoas podem sentar-se num banco de 6 lugares de modo que duas delas fiquem sempre juntas, em qualquer ordem?

Questão 9

Um casal e seus quatro filhos vão ser colocados lado a lado para tirar uma foto. Se todos os filhos devem ficar entre os pais, de quantos modos distintos os seis podem posar para tirar a foto?

a) 24
b) 48
c) 96
d) 120
e) 720

Questão 10

(UFJF–MG)

Newton possui 9 livros distintos, sendo 4 de Geometria, 2 de Álgebra e 3 de Análise. O número de maneiras pelas quais Newton pode arrumar esses livros em uma estante, de forma que os livros de mesmo assunto permaneçam juntos, é:

a) 288

b) 296

c) 864

d) 1728

e) 2130

Após as explicações cabíveis, utilizar o livro didático para realização de EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO e ampliação dos conceitos estudados através dos exemplos e das explicações existentes no material.

ATIVIDADE 2 : Arranjo Simples e Permutação Simples

- Habilidade Relacionada: efetuar cálculos de arranjo simples e permutação simples reconhecendo que no arranjo a troca de posição dos elementos de cada grupo indica o aparecimento de elementos diferentes, ou seja, a ordem dos elementos é importante na composição dos elementos.

- Pré-requisitos: efetuar cálculo de arranjo simples e permutação simples.

- Tempo de duração: 400 minutos

- Recursos Educacionais Utilizados: Livro didático, quadro e caneta, RESUMO/EXPLICAÇÕES .

- Organização da Turma: Individual para a apresentação do conteúdo e dupla para realização dos exercícios de fixação e aplicação.

- Objetivos: fazer com que o aluno distingue permutação simples de combinação simples, demonstrando que no arranjo simples a ordem dos elementos é importante e que na combinação esta ordem não é importante para a formação dos subconjuntos. Fazer com que o aluno entenda que todo tipo de permutação é um arranjo.

- Metodologia Adotada:

Após a apresentação dos conceitos essenciais sobre permutação simples e arranjo simples , demonstrar para o aluno que toda permutação é um arranjo e aplicar isso por meio de exercícios de fixação. Mostrar para o aluno a importância do arranjo simples no nosso dia-a-dia e que este conteúdo tem várias aplicações práticas.

Assim, o resumo apresentado nas próximas páginas apresenta observações importantes objetivando facilitar o entendimento sobre o conteúdo. Este resumo visa facilitar o aluno na aprendizagem da matéria.

FICHA RESUMO

1 – Permutação Simples

Podemos considerar a permutação simples como um caso particular de arranjo, onde os elementos formarão agrupamentos que se diferenciarão somente pela ordem. As permutações simples dos elementos P, Q e R são: PQR, PRQ, QPR, QRP, RPQ, RQP. Para determinarmos o número de agrupamentos de uma permutação simples utilizamos a seguinte expressão P = n!.
n! = n*(n-1)*(n-2)*(n-3)*....*3*2*1
Por exemplo, 4! = 4*3*2*1 = 24

Exemplo 1
Quantos anagramas podemos formar com a palavra GATO?
Resolução:
Podemos variar as letras de lugar e formar vários anagramas, formulando um caso de permutação simples.
P = 4! = 24

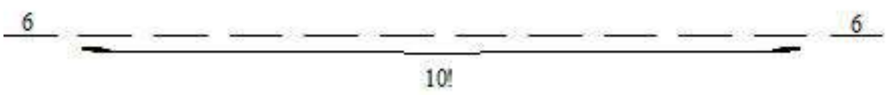
GATO	GAOT	GOAT	GOTA	GTAO	GTOA
AGTO	AGOT	AOGT	AOTG	ATGO	ATOG
TAGO	TAOG	TOAG	TOGA	TGAO	TGOA
OGTA	OGAT	OATG	OAGT	OTAG	OTGA

Exemplo 2
De quantas maneiras distintas podemos organizar as modelos Ana, Carla, Maria, Paula e Silvia para a produção de um álbum de fotografias promocionais?
Resolução:
Note que o princípio a ser utilizado na organização das modelos será o da permutação simples, pois formaremos agrupamentos que se diferenciarão

somente pela ordem dos elementos.
P = n!
P = 5!
P = 5*4*3*2*1
P = 120
Portanto, o número de posições possíveis é 120.

Exemplo 3
De quantas maneiras distintas podemos colocar em fila indiana seis homens e seis mulheres:
a) em qualquer ordem
Resolução
Podemos organizar as 12 pessoas de forma distinta, portanto utilizamos 12! = 12*11*10*9*8*7*6*5*4*3*2*1 = 479.001.600 possibilidades

b) iniciando com homem e terminando com mulher
Resolução
Ao iniciarmos o agrupamento com homem e terminarmos com mulher teremos:
Seis homens aleatoriamente na primeira posição.
Seis mulheres aleatoriamente na última posição.



P = (6*6) * 10!
P = 36*10!
P = 130.636.800 possibilidades

2 – Arranjo Simples

A análise combinatória estuda dois tipos de agrupamentos: Arranjos e combinações. Sendo que diferem em arranjos simples, combinações simples.

Arranjos são agrupamentos nos quais a ordem dos seus elementos faz a diferença. Por exemplo, os números de três algarismos formados pelos elementos {1, 2 e 3} são:

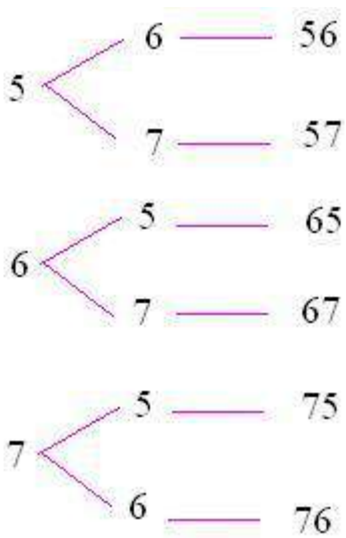
312, 321, 132, 123, 213, 231

Esse agrupamento é um arranjo, pois a ordem dos elementos 1, 2 e 3 diferem. E é considerado simples, pois os elementos não se repetem.

Para que tenhamos arranjos simples é preciso ter um conjunto de elementos distintos com uma quantidade qualquer de elementos, sendo que os arranjos simples formados irão possuir n elementos, sendo que essa quantidade será igual ou menor que a quantidade de elementos do conjunto.

Veja o exemplo abaixo:

Dado o conjunto B = {5,6,7}, veja os possíveis agrupamentos formados com 2 elementos de B.



Então, os agrupamentos formados com 2 elementos do conjunto b são:

56,57,65,67,75,76. Esse agrupamento é formado por arranjos simples pelos elementos do conjunto B.

Nesse exemplo percebemos que é possível formar 6 arranjos, essa quantidade pode ser representada da seguinte forma: $A_{3,2}$ (três elementos distintos formados de dois a dois). Utilizando o processo do princípio fundamental da contagem, calculamos a quantidade de elementos:

$A_{3,2} = 3 . 2 . 1 = 6$

Se em um agrupamento compararmos os arranjos simples formados perceberemos que eles se diferem de duas maneiras diferentes: pela ordem de seus elementos ou pela natureza de seus elementos. Por exemplo:

Se compararmos os arranjos 56 e 65 do exemplo anterior, perceberemos que eles são diferentes pela ordem dos seus elementos.

Se compararmos os arranjos 75 e 76 do exemplo anterior, perceberemos que eles são diferentes pela natureza de seus elementos, pois são diferentes.

Considerando n a quantidade de elementos de um conjunto qualquer e p um número natural menor ou igual a n. p será a classe ou a ordem do arranjo. Indicado da seguinte forma: A n , p

A fórmula geral utilizada no cálculo da quantidade de arranjos simples é:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemplo 1:

Calcule: $A_{7,3}$

$$A_{7,3} = \frac{7!}{(7-3)!}$$

$$A_{7,3} = \frac{7 . 6 . 5 . 4!}{4!}$$

$$A_{7,3} = 7 . 6 . 5$$
$$A_{7,3} = 210$$

Exemplo 2:

Quantas “palavras” (com sentido ou não) de 5 letras distintas podemos formar com as 20 primeiras letras do nosso alfabeto?

Não é necessário montar todas os arranjos possíveis para saber a sua quantidade, basta aplicar a fórmula:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Sendo que o conjunto é formado por 20 elementos (n = 20) que serão unidos de 5 em 5 (p = 5). Substitua a fórmula.

$$A_{20,5} = \frac{20!}{(20-5)!}$$

$$A_{20,5} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15!}{15!}$$

$$A_{20,5} = 1860480$$

Portanto, a quantidade de arranjos formados com as 20 primeiras letras do nosso alfabeto unidas de 5 em 5 é 1860480.

Exercícios de Fixação

1 – (UFSCAR) Calcule o número de anagramas da palavra CLARA em que as letras AR parecem juntas nesta ordem.

a) 9!

b) 8!

c) 2.7!

d) 9! -7!

e) 7!

2 – (Unitau) O número de anagramas da palavra BIOCIÊNCIAS que terminam com as letras AS, nesta ordem é:

a) 9!

b) 11!

c) 9!/(3! 2!)

d) 11!/2!

e) 11!/3!

3 – Determine o número de permutações simples de 5 elementos distintos.

4 – De quantas maneiras diferentes podemos organizar quatro DVDs em uma prateleira?

5 – Determine o número de anagramas da palavra SAULO que começam por vogal.

6 - Deseja-se pintar uma bandeira, com 7 faixas verticais, dispondo de 3 cores, sem que se tenha duas faixas consecutivas da mesma cor. De quantas maneiras isto é possível?

7 - Em uma urna de sorteio de prêmios existem dez bolas enumeradas de 0 a 9. Determine o número de possibilidades existentes num sorteio cujo prêmio é formado por uma sequência de 6 algarismos.

8 - Em uma empresa, quinze funcionários se candidataram para as vagas de diretor e vice-diretor financeiro. Eles serão escolhidos através do voto individual dos membros do conselho da empresa. Vamos determinar de quantas maneiras distintas essa escolha pode ser feita.

9 - Um número de telefone é formado por 8 algarismos. Determine quantos números de telefone podemos formar com algarismos diferentes, que comecem com 2 e terminem com 8.

2							8

2							8

10 - Uma família é composta por seis pessoas (pai, mãe e quatro filhos) que nasceram em meses diferentes do ano. Calcule as sequências dos possíveis meses de nascimento dos membros dessa família.

Após as explicações cabíveis, utilizar o livro didático para realização de EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO e ampliação dos conceitos estudados através dos exemplos e das explicações existentes no material.

ATIVIDADE 3: Combinação Simples e Introdução à Probabilidade

- Habilidade Relacionada: efetuar cálculos de combinação simples e probabilidade de um evento destacando a diferença básica entre combinação simples e arranjo simples . Em probabilidade reconhecer que a probabilidade de um evento é $P(a) = n(a)/n(u)$, ou seja, o número de eventos favoráveis dividido pelo número de eventos possíveis.

- Pré-requisitos: conhecimentos básicos combinação simples e probabilidade.

- Tempo de duração: 400 minutos.

- Recursos Educacionais Utilizados: Livro didático, quadro e caneta, RESUMO/EXPLICAÇÕES.

- Organização da Turma: Individual para a apresentação do conteúdo e dupla para realização dos exercícios de fixação e exercícios complementares.

- Objetivos: fazer com que o aluno consiga resolver situações do dia-a-dia que envolvam cálculo de combinações simples . Estimular o raciocínio lógico do aluno no sentido do mesmo calcular a probabilidade de um evento e por meio deste cálculo ele consiga visualizar o que é evento favorável e o que é evento possível.

- Metodologia Adotada:

Ensinar os alunos a resolver situações do dia-a-dia que envolvam cálculo de combinações simples por meio de exercícios de fixação e exercícios de aplicação. Fazer com que os alunos efetuem cálculo da probabilidade de um evento e que neste cálculo eles conseguem visualizar a diferença entre evento favorável e eventos possíveis.

FICHA RESUMO

1 – Combinação Simples

Dado o conjunto $\{a_1, a_2, a_3, \dots a_n\}$, com n objetos distintos, podemos formar subconjuntos com p elementos. Cada subconjunto com i elementos é chamado **combinação simples**.

Representamos por $C_{n,\ p}$, o numero de combinações de n objetos tomados p a p. Por exemplo:

- As combinações simples de 3 dos 4 objetos a1, a2, a3, a4 são:

$\{a_1, a_2, a_3\}$, $\{a_1, a_2, a_4\}$, $\{a_1, a_3, a_4\}$, $\{a_2, a_3, a_4\}$

Assim: $C_{4,\ 3}$

Analisando essa resposta: a escolha do 1° elemento da combinação pode ser feita de 4 modos; a do 2°, de 3 modos e a do 3°, de 2 modos. A resposta parece ser 4 x 3 x 2 = 24. Entretanto, se pensarmos em uma combinação, por exemplo:

$\{a_1, a_2, a_3\}$

Verificamos que as combinações: $\{a_1, a_2, a_3\}$, $\{a_1, a_3, a_2\}$ e $\{a_2, a_1, a_3\}$ etc. são idênticas e
foram contadas como se fossem diferentes. Portanto na resposta 24 estamos contando cada combinação uma vez para cada ordem de escrever seus elementos.

Como em cada combinação os elementos podem ser escritos em P3 = 3! = 6, cada combinação foi contada 6 vezes. Logo a resposta é 24/6 = 4
Genericamente temos:

$$C_{n,p} = \frac{n(n-1)\ldots(n-p-1)}{p!} \quad ,0 \le p \le n$$

Multiplicando o numerador e o denominador por (n – p)! temos:

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)} \quad ,0 \le p \le n$$

Observações:

1. n ≥ p ;

2. Como nas combinações simples os argumentos são subconjuntos, a ordem dos elementos não altera os agrupamentos;

3. Nos problemas que envolvem arranjos simples, a ordem dos elementos interessa na formação dos agrupamentos, enquanto, na combinação isso não importa.

2– Introdução à Probabilidade

Inicialmente para falarmos sobre probabilidade devemos definir o que é um evento aleatório.

• **Evento aleatório** é aquele que pode ser re-executado várias vezes, sempre nas mesmas condições, e se obtém resultados diferentes, que estão previstos dentro dos possíveis resultados para este experimento, isto ocorre devido ao acaso, não podemos ter a absoluta certeza do resultado de cada um destes eventos.

Exemplos:

I) Lançar uma moeda para cima e observar a face que irá ficar virada para cima após a queda.
II) Escolhermos um aluno dentre os 30 alunos de uma classe.

• Agora iremos definir **espaço amostral** (Ώ) que é o conjunto de todos os eventos possíveis de um determinado evento aleatório.

Exemplos:

I) Lançar uma moeda para cima e observar a face que irá ficar virada para cima após a queda. O espaço amostral é Cara ou Coroa.
II) De uma urna com 10 bolas vermelhas (v) e 5 bolas brancas (b) retirarmos 2 bolas. O espaço amostral é v,v ou v.b ou b.v ou b,b.

Deve-se relatar que existem espaços amostrais infinitos que não serão tratados aqui.

• **Evento (n)**: é um dos subconjunto de um espaço amostral, é escolhido um dos possíveis eventos dentro do espaço amostral.

Exemplo: Um dado é lançado, e é observada a face de cima.
O espaço amostral é { 1, 2, 3, 4, 5, 6}

a- Ocorrência de um número par. Assim o evento é { 2, 4, 6}.
b- Ocorrência de um número primo. Assim o evento é { 2, 3, 5}.
c- Ocorrência de um número ímpar maior que 3. Assim o evento é {5}.
d- Ocorrência de um número primo maior que 5. Assim o evento é { }.

Consequência importante se definirmos o espaço amostral com n elementos, teremos sempre uma quantidade 2^n de eventos possíveis, com a existência sempre do conjunto vazio { }.

Para definirmos probabilidade agora iremos utilizar os fatos descritos acima, assim sendo, probabilidade é o número associado à possibilidade de ocorrência de um determinado evento aleatório, escolhido, dentro dos de um espaço amostral.

$P(n) = \frac{n}{\Omega}$, sendo sempre n e Ω a quantidade de elementos do evento e do espaço amostral respectivamente.

Exemplo: Um dado é lançado, e é observada a face de cima.
O espaço amostral é { 1, 2, 3, 4, 5, 6}

a- probabilidade de ocorrência de um número par.
Evento: { 2, 4, 6} , sendo n = 3 e Ω = 6 temos que:

$$P(n) = \frac{n}{\Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\%$$

b- probabilidade de ocorrência de um número ímpar maior que 3.
Assim o evento é {5}, sendo n = 1 e Ω = 6 temos que:

$$P(n) = \frac{n}{\Omega} = \frac{1}{6} \cong 17\%\,.$$

Probabilidade de um Evento Complementar

Para entendermos o que é um evento complementar, vamos imaginar a seguinte situação:

No lançamento de um dado sabemos que o espaço amostral é composto de 6 eventos. Partindo desse lançamento, vamos considerar somente os eventos com valores das faces menores que 5, dados por 1, 2, 3, 4, totalizando 4 eventos. Nessa situação temos que o evento complementar é dado pelos números 5 e 6.

A união do evento em questão com o evento complementar forma o espaço amostral e a intersecção dos dois eventos forma um conjunto vazio. Veja um exemplo baseado nessas condições:

Exemplo 1

No lançamento simultâneo de dois dados, vamos determinar a probabilidade de não sair soma 4.

No lançamento de dois dados temos o espaço amostral de 36 elementos. Considerando os eventos em que a soma seja quatro, temos: {(1, 3), (3, 1), (2, 2)}. Probabilidade de sair soma quatro é igual a: 3 em 36, que corresponde a 3/36 = 1/12. Para determinarmos a probabilidade de não sair soma quatro realizamos o seguinte cálculo:

$$P = 1 - \frac{1}{12}$$

$$P = \frac{12 - 1}{12}$$

$$P = \frac{11}{12}$$

Na expressão, temos que o valor 1 refere-se ao espaço amostral (100%). Temos que a probabilidade de não sair soma quatro no lançamento de dois dados é de 11/12.

Exemplo 2

No lançamento de um dado perfeito, qual é a probabilidade de não sair o número 6.

Probabilidade de não sair o número 6 = 1/6

$$P = 1 - \frac{1}{6}$$

$$P = \frac{6 - 1}{6}$$

$$P = \frac{5}{6}$$

A probabilidade de não sair o 6 é de 5/6.

Exercícios de Fixação

Questão 1

Um time de futebol é composto de 11 jogadores, sendo 1 goleiro, 4 zagueiros, 4 meio campistas e 2 atacantes. Considerando-se que o técnico dispõe de 3 goleiros, 8 zagueiros, 10 meio campistas e 6 atacantes, determine o número de maneiras possíveis que esse time pode ser formado.

Questão 2

Em uma sala de aula existem 12 alunas, onde uma delas chama-se Carla, e 8 alunos, onde um deles atende pelo nome de Luiz. Deseja-se formar comissões de 5 alunas e 4 alunos. Determine o número de comissões, onde simultaneamente participam Carla e Luiz.

Questão 3

Um pesquisador científico precisa escolher três cobaias, num grupo de oito cobaias. Determine o número de maneiras que ele pode realizar a escolha.

Questão 4

No jogo de basquetebol, cada time entra em quadra com cinco jogadores. Considerando-se que um time para disputar um campeonato necessita de pelo menos 12 jogadores, e que desses, 2 são titulares absolutos, determine o número de equipes que o técnico poderá formar com o restante dos jogadores, sendo que eles atuam em qualquer posição.

Questão 5

Numa urna existem apenas 6 bolas vermelhas e 4 bolas azuis. As bolas vermelhas são numeradas de 1 a 6 e as azuis, se 1 a 4. Retirando, aleatoriamente, uma bola dessa urna, verificar se os eventos "bola vermelha" e "número par" são independentes.

Questão 6

(UNI- RIO) As probabilidades de três jogadores marcarem um gol cobrando pênalti são, respectivamente, 1/2, 2/5, e 5/6. Se cada um bater um único pênalti, a probabilidade de todos errarem é igual a:

a) 3%
b) 5%
c) 17%
d) 20%
e) 25%

Questão 7

Sabendo-se que a probabilidade de que um animal adquira certa enfermidade, no decurso de cada mês, é igual a 30%, a probabilidade de que um animal sadio venha a contrair a doença só no 3° mês é igual a:

a) 21%
b) 49%
c) 6,3%
d) 14,7%
e) 26%

Questão 8

A probabilidade de um atirador acertar um alvo em um único tiro é 0,2. Com apenas 4 tiros, qual a probabilidade de esse atirador acertar o alvo só duas vezes?

Questão 9

Uma urna contém 3 bolas numeradas de 1 a 3 e outra urna com 5 bolas numeradas de 1 a 5. Ao retirar-se aleatoriamente uma bola de cada uma, a probabilidade da soma dos pontos ser maior do que 4 é:

a) 3/5
b) 2;5
c) 1/2
d) 1/3
e) 2/3

Questão 10

Cada dia em que uma pessoa joga numa loteria, ela tem uma probabilidade de ganhar igual a 1/1000, independentemente dos resultados anteriores.

a) Se ela jogar 30 dias, qual a probabilidade de ganhar ao menos uma vez?

b) Qual o número mínimo de dias em que ele deverá jogar para que a probabilidade de que ela ganhe ao menos uma vez seja maior do que 0,3%?

Após as explicações cabíveis, utilizar o livro didático para realização de EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO e ampliação dos conceitos estudados através dos exemplos e das explicações existentes no material.

3 – Avaliação

No decorre do desenvolvimento das atividades, o professor poderá analisar até que ponto os alunos integraram e deram sentido as informações, através das aulas didáticas, dos Exercícios de Fixação realizados ao longo das aulas. Propor um trabalho em equipe (dois tempos de 50 minutos cada para organização e apresentação dos grupos), conforme o seguinte:

- separar a turma em grupos de cinco alunos, sortear dentre 10 questões do livro (ainda não realizadas em sala), uma para cada grupo;

- definir a pontuação da atividade e um dia para realização do trabalho e indicar sites que contenham problemas com resoluções detalhadas para que os alunos possam ampliar ainda mais seus conhecimentos sobre o assunto;

- cada grupo deve solucionar seu problema e escolher um ou dois integrantes para apresentar a resolução detalhada no quadro para os demais alunos da turma na data marcada e na ordem já definida pelo professor;

Também é importante a aplicação de avaliação individual e escrita com duração de 100 minutos para investigação da capacidade de utilização de conhecimentos adquiridos, de Fatorial, Princípio Fundamental da Contagem, Permutação Simples, Arranjo Simples, Combinação Simples e Introdução à Probabilidade.

4 – FONTES DE PESQUISA

- ✓ Brasil: roteiros de ação. Fundação Cecierj/Consórcio Cederj . Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 3º ano do Ensino Médio – 4º bimestre. Rio de Janeiro, 2012

- ✓ MATEMÁTICA ENSINO MÉDIO, 3º Ano/ Kátia Stocco Smole & Maria Diniz – 6º Edição – São Paulo: Editora Saraiva 2010.

- ✓ Colégio Web: Disponível em: <www.colegioweb.com.br> Acesso em 18/02/2013.

- ✓ Mundo Vestibular: disponível em: <www.mundovestibular.com.br> Acesso em 18/02/2013

- ✓ Infoescola. Disponível em : <www.infoescola.com/matematica> Acesso em 18/02/2013.

- ✓ Pense Vestibular. Disponível em:<www.pensevestibular.com.br> Acesso em 18/02/2013.

- ✓ Brasil Escola. Disponível em <www.brasilescola.com.br> Acesso em 18/02/2103.

.