UDESC Planalto Norte
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA
CENTRO DE EDUCAÇÃO DO PLANALTO NORTE - CEPLAN

Projeto de Ensino: "Curso de Matemática Básica".

O gênio é composto por
2% de talento e de 98%
de perseverante
aplicação.

(Ludwing Van Beethoven)

Acadêmico:____

SUMÁRIO

1. NÚMEROS E OPERAÇÕES 1
1.1 Introdução 1
1.2 Conjunto dos números Naturais 1
1.3 Conjunto dos números Inteiros 1
1.4 Conjunto dos números Racionais 6
1.5 Conjunto dos números Irracionais 13
1.6 Conjunto dos números Reais 13
Exercícios 13
2. ÁLGEBRA 22
2.1 Introdução 22
2.2 Operações com os polinômios 24
2.3 Produtos notáveis 25
2.4 Fatoração 27
2.5 Frações Algébricas 28
Exercícios 29
3. RADICAIS 36
3.1 Introdução 36
3.2 Propriedades dos radicais 36
3.3 Simplificação de radicais 37
3.4 Operações com os radicais. 37
3.5 Racionalização de denominadores 38
Exercícios 39
4. EQUAÇÕES 43
4.1 Introdução 43
4.2 Equação Polinomial do 1º Grau 44
4.3 Equação Polinomial do 2º Grau 45
Exercícios 50
4.4 Inequações 53
4.5 Inequação do 1º grau 53
4.6 Inequação do 2º grau 55
Exercícios 56
5 TRIGONOMETRIA 57
5.1 Introdução 57
5.2 Ciclo trigonométrico 57
5.3 Funções circulares 58
5.4 Unidades de medidas 59
5.5 Representação gráfica 60
Exercícios 61
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 62

1. NÚMEROS E OPERAÇÕES

1.1 Introdução

A história dos números acompanha a história da civilização humana e a crescente necessidade de resolver os problemas de ordem prática surgidos na vida em comunidade.

Nos tempos primitivos, a contagem de animais deu origem aos números naturais. Com o desenvolvimento do comércio entre os seres humanos, a necessidade de calcular créditos e débitos, deu origem aos números inteiros. Já a divisão de terras pode ter originado os números fracionários.

Com o tempo, para facilitar o estudo, os números foram reunidos em diferentes conjuntos. Para designar cada um dos conjuntos numéricos, usamos uma letra maiúscula convencionada como linguagem universal.

1.2 Conjunto dos números Naturais

São todos os números positivos inclusive o zero.

N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, ...}

1.3 Conjunto dos números Inteiros

São todos os números positivos e negativos inclusive o zero.

Z = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...}

1.3.1. Operações

- **Adição e Subtração:**

Sinais iguais: *Somam-se os valores absolutos e dá-se o sinal comum.*
Sinais diferentes: *Subtraem-se os valores absolutos e dá-se o sinal do maior.*

Exercícios resolvidos:

a) 2 + 4 = 6
b) – 2 – 4 = – 6
c) 5 – 3 = + 2 = 2
d) – 5 + 3 = – 2

e) 2 + 3 – 1 – 2 = 5 – 3 = 2

f) – 1 – 3 + 2 – 4 + 21 – 5 – 32 = 23 – 45 = – 22

Multiplicação e Divisão

Sinais iguais → resposta positiva

Sinais diferentes → resposta negativa

Isto é:

$(+) \cdot (+) = (+)$	$(+) : (+) = (+)$
$(-) \cdot (-) = (+)$	$(-) : (-) = (+)$
$(+) \cdot (-) = (-)$	$(+) : (-) = (-)$
$(-) \cdot (+) = (-)$	$(-) : (+) = (-)$

Exercícios resolvidos:

a) 12 . 3 = 36

b) (-12) . (-3) = 36

c) 2 . (-2) = -4

d) (-2) . 3 = -6

e) 4 : 2 = 2

f) 20 : (- 5) = - 4

g) $\dfrac{-20}{-5} = +4 = 4$

h) $\dfrac{-20}{5} = -4$

Potências

Existe uma forma abreviada de escrever uma multiplicação de fatores iguais. No caso

Expoente

$7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3$

3 fatores iguais a 7

Base

Nessa operação, que é denominada **potenciação**, temos:

★ a **potência**, indica um produto de fatores iguais;

★ a **base**, o fator que se repete;

★ o **expoente**, indica quantas vezes a base se repete como fator.

Assim:

★ $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \quad \therefore \quad 2^3 = 8$

★ $(-1)^4 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1 \quad \therefore \quad (-1)^4 = 1$

CASOS PARTICULARES:

a) A potência de expoente 1 (1º grau) é igual à base:

$a^1 = a \qquad 2^1 = 2$

b) Toda potência de base 1 é igual a 1:

$1^2 = 1$ $\qquad$ $1^{17} = 1$

c) Toda potência de base 0 é igual a 0:

$0^2 = 0$ $\qquad$ $0^9 = 0$

d) Toda potência de *expoente par* é positiva:

$(-2)^4 = 16$ $\qquad$ $2^4 = 16$ $\qquad$ $(-3)^2 = 9$ $\qquad$ $3^2 = 9$

e) Toda potência de *expoente ímpar* mantém o sinal da base:

$3^3 = 27$ $\qquad$ $(-3)^3 = -27$

$(+2)^5 = 32$ $\qquad$ $(-2)^5 = -32$

f) Toda potência de base diferente de zero *e expoente zero* é igual a uma unidade.

$a^0 = 1$, com $a \neq 0$ $\qquad$ $5^0 = 1$ $\qquad$ $(-72)^0 = 1$

Realmente: $\begin{cases} a^4 : a^4 = a^{4-4} = a^0 \\ a^4 : a^4 = 1 \end{cases} \rightarrow a^0 = 1$

g) Toda potência de *expoente negativo* é igual ao **inverso da base**:

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2} \qquad 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$$

$$\left(\frac{5}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{49}{25} \qquad \left(-\frac{1}{7}\right)^{-2} = (-7)^2 = 49$$

h) Toda *potência de base 10*, escrevemos à direita da unidade tantos zeros quantas forem às unidades do expoente.

$10^2 = 100$

$200 = 2 \,.\, 100 = 2 \,.\, 10^2$

$300\,000 = 3 \,.\, 100000 = 3 \,.\, 10^5$

$3 \,.\, 10^8 = 300\,000\,000$

$10^7 = 10\,000\,000$

$4000 = 4 \,.\, 10^3$

Propriedades da Potenciação:

$$\begin{cases} a^m \,.\, a^n = a^{m+n} \\ a^m : a^n = a^{m-n} \text{ (com } a \neq 0) \\ (a^m)^n = a^{m\,.\,n} \\ a^n \,.\, b^n = (a.b)^n \\ \dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n \text{ (com } b \neq 0) \end{cases}$$

1. **Multiplicação de potências de mesma base:**

Mantém-se a base comum e somam-se os expoentes.

Realmente: $2^3 \cdot 2^2 = \underbrace{\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3\text{ vezes}} \cdot \underbrace{2 \cdot 2}_{2\text{ vezes}}}_{5\text{ vezes}} = 2^{3+2} = 2^5$

2. **Divisão de potências de mesma base:**

Mantém-se a base comum e diminuem-se os expoentes.

Realmente: $\dfrac{5^6}{5^4} = \dfrac{\overbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}^{6\text{ vezes}}}{\underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{4\text{ vezes}}} = 5^{6-4} = 5^2$

3. **Multiplicação de potências de mesmo grau:**

Multiplicam-se as bases e conserva-se o expoente comum.

Realmente: $2^2 \cdot 7^2 = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 7 = (2 \cdot 7)^2$

4. **Divisão de potências de mesmo grau:**

Dividem-se as bases e conserva-se o expoente comum.

Realmente: $\dfrac{2^2}{7^2} = \dfrac{2 \cdot 2}{7 \cdot 7} = \dfrac{2}{7} \cdot \dfrac{2}{7} = \left(\dfrac{2}{7}\right)^2$

5. **Potenciação de potência:**

Eleva-se a base ao produto dos expoentes.

Realmente: $\left(2^3\right)^2 = \underbrace{2^3 \cdot 2^3}_{2\text{ vezes}} = 2^{3+3} = 2^6$

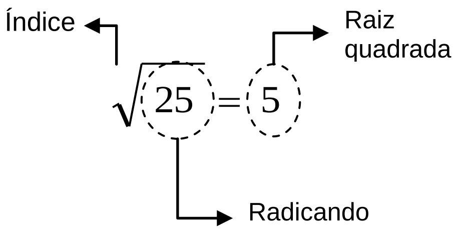
$$\left(2^3\right)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6$$

Radicais

Ao elevar um número ao quadrado significa obter um produto de dois fatores iguais a esse número. Por exemplo:

$$\mathbf{9^2 = 9 \cdot 9 = 81}$$

A operação inversa de elevar ao quadrado é extrair uma raiz quadrada. Dizemos que 9 é uma raiz quadrada de 81 porque 9 . 9 = 81. Representamos a raiz pelo símbolo $\sqrt{\ }$.



Assim:

- ★ $\sqrt{16} = 4$ porque $4^2 = 16$
- ★ $\sqrt[3]{8} = 2$ porque $2^3 = 8$
- ★ $\sqrt[4]{-81} \notin IR$

1.3.2. Expressões numéricas

Para resolver expressões numéricas realizamos primeiro as operações de multiplicação e divisão, na ordem em que estas estiverem indicadas, e depois adições e subtrações. Em expressões que aparecem sinais de reunião: ( ), parênteses, [ ], colchetes e { }, chaves, efetuam-se as operações eliminando-se, na ordem: parênteses, colchetes e chaves, isto é, dos sinais interiores para os exteriores. Quando à frente do sinal da reunião eliminado estiver o sinal negativo, trocam-se todos os sinais dos termos internos.

Exercícios Resolvidos:

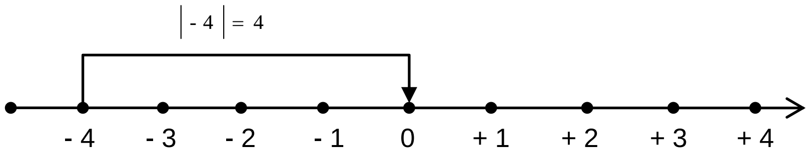
a) 2 + [2 – (**3 + 2**) – 1] =
2 + [2 – **5** – 1] =
2 + [**2 – 6**] =
2 **+** [**- 4**] =
2 – 4 =
- 2

b) 2 + {3 – [1 + (2 – 5 + 4)] + 8 } =
2 + {3 – [1 + (6 – 5)] + 8 } =
2 + {3 – [1 + (+ 1)] + 8 } =
2 + {3 – [1 + 1] + 8 } =
2 + {3 – [+2] + 8 } =
2 + {3 – 2 + 8 } =
2 + {11 – 2 } =
2 + 9 =
11

c) { 2 – [**3 . 4 :** 2 – 2 (**3 – 1**)] } + 1 =
{ 2 – [12 **:** 2 – 2 **.** 2] } + 1 =
{ 2 – [6 – 4] } + 1 =
{ 2 – [+2] } + 1 =
{ 2 – 2 } + 1 =
0 + 1
1

1.3.3 Valor absoluto ou Módulo

Observe a reta numérica, onde estão representados alguns números inteiros:



À distância entre um número e o zero na reta chamamos de *módulo* ou *valor absoluto* do número. Indicamos o módulo de um número pelo símbolo $|\ |$.

Por exemplo, a distância do – 4 até a origem é 4 unidades, ou seja, o módulo do – 4 é 4.

Exercícios Resolvidos:

a) $|-9| = 9$

b) $|+5| = 5$

c) $|0| = 0$

d) $|-4| = 4$

1.4 Conjunto dos números Racionais

São todos os números que podem ser escrito sob a forma de fração $\frac{a}{b}$, com a e $b \in Z$ e $b \neq 0$.

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a,\ b \in Z,\ b \neq 0 \right\}$$

onde

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{numerador}}{\text{denominador}}$$

É mais comum encontrarmos números racionais escritos na forma de número decimal do que na forma de fração.

Observe alguns exemplos:

1.4.1. Decimais exatos

1) $\frac{75}{100} = 0{,}75$ (lê-se: setenta e cinco centésimos)

2) $\frac{9}{2} = 4{,}5$ (lê-se: quatro inteiros e cinco décimos)

3) $-\frac{9}{8} = -1{,}125$ (lê-se: um inteiro e cento e vinte e cinco milésimos negativos)

1.4.2. Decimais infinitos com dízima periódica

4) $\frac{7}{9} = 0{,}7777\ \ldots = 0{,}\overline{7}$

5) $\frac{25}{99} = 0{,}2525\ \ldots = 0{,}\overline{25}$

Geratriz de uma dízima

Dízima periódica, ou simplesmente **dízima**, é a representação decimal aproximada de um número fracionário no qual um ou mais algarismos se repetem indefinidamente a partir de certa ordem decimal.

A fração que dá a origem a uma dízima periódica é chamada **geratriz**.

Veja na atividade seguinte como proceder para encontrar a fração geratriz de uma dízima:

1) Determinar a fração geratriz de 0,7777...?

Resolução

Chamando a dízima de x, escrevemos a equação:

x = 0,7777... ①

Em seguida, multiplicamos ambos os membros da equação por 10, de modo que o período (7) fique à esquerda da vírgula:

10x = 7,777... ②

Subtraindo membro a membro a equação ① da equação ②, obtemos:

$$\begin{array}{rl} 10x = 7{,}777\ldots & ② \\ -\quad x = 0{,}777\ldots & ① \\ \hline 9x = 7 & \\ x = \frac{7}{9} & \end{array}$$

Assim, a fração geratriz da dízima 0,777... é $\frac{7}{9}$.

2) Determinar a fração geratriz de 3,141414...?

Resolução

Chamando a dízima de x, escrevemos a equação:

x = 3,141414... ①

Em seguida, multiplicamos ambos os membros da equação por 100, de modo que o período (14) fique à esquerda da vírgula:

100x = 314,141414... ②

Subtraindo membro a membro a equação ① da equação ②, obtemos:

$$\begin{array}{rl} 100x = 314{,}141414\ldots & ② \\ -\quad x = 3{,}141414\ldots & ① \\ \hline 99x = 311 & \\ x = \frac{311}{99} & \end{array}$$

Assim, a fração geratriz da dízima 3,1414... é $\frac{311}{99}$.

1.4.3 Operações com frações

Adição e Subtração:

FRAÇÕES COM DENOMINADORES IGUAIS

> "Para *adicionar* ou *subtrair* frações com mesmo denominador, devemos adicionar ou subtrair os numeradores e conservar o denominador".

Exercícios Resolvidos:

1) $\frac{5}{6} + \frac{1}{6} - \frac{7}{6} = \frac{5+1-7}{6} = -\frac{1}{6}$

2) Joaquim gasta $\frac{4}{9}$ do seu salário com aluguel e $\frac{1}{9}$ com alimentação.

a) Que fração do salário ela gastou no total?

b) depois de pagas essas despesas, que fração do salário sobrou?

Resolução

a) Adicionando os gastos, temos: $\frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$

b) O salário de Joaquim corresponde a um inteiro $\left[\frac{9}{9} = 1\right]$

$$1 - \frac{5}{9} = \frac{9}{9} - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$$

Portanto, Joaquim gastou $\frac{5}{9}$ do salário e sobraram $\frac{4}{9}$.

1.4.4 Fatoração.

A decomposição de um número em um produto de fatores primos é feita por meio do dispositivo prático que será mostrado nos exemplos a seguir.

Exercícios resolvidos:

1) 30 = 2 . 3 . 5

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ \hline 1 & 2 \cdot 3 \cdot 5 \rightarrow \text{Fatoração multiplicação} \end{array}$$

2) 45 = $3^2 . 5$

$$\begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ \hline 1 & 3^2 \cdot 5 \end{array}$$

OBS: Número primo é um número que possui apenas dois divisores: o *próprio número* e o *número 1*. Veja os primeiros números primos:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...

1.3.5. Mínimo múltiplo comum (m.m.c.).

O mínimo múltiplo comum de vários números é o menor número divisível por todos eles.

Exercício resolvido:

1) Calcular o m.m.c. (12, 16, 8) = 48

$$\begin{array}{ccc|c} 12, & 16, & 8 & 2 \\ 6 & 8 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 48 \end{array}$$

FRAÇÕES COM DENOMINADORES DIFERENTES

Exercícios Resolvidos

1) $\frac{9}{2} + \frac{5}{6} = \frac{27+5}{6} = \frac{\cancel{32}}{\cancel{6}} \,{:2} = \frac{16}{3}$ mmc (2, 6) = 6

2) $\frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{15+40+12}{60} = \frac{67}{60}$

3) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$

4) $\frac{1}{2} + \frac{5}{6} - \frac{2}{3} = \frac{3}{6} + \frac{5}{6} - \frac{4}{6} = \frac{3+5-4}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

5) Joaquim e Francisco estão pintando um muro. Joaquim já pintou $\frac{3}{4}$ do muro, e Francisco $\frac{1}{8}$.

a) Que parte do muro eles já pintaram no total?

b) Quanto que Joaquim pintou a mais que Francisco?

Resolução

a) $\frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{6+1}{8} = \frac{7}{8}$

b) $\frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{6-1}{8} = \frac{5}{8}$

Portanto, eles pintaram juntos $\frac{7}{8}$ do muro e Joaquim pintou $\frac{5}{8}$ a mais que Francisco.

- **Multiplicação:**

> Para *multiplicar* as frações, devemos multiplicar numeradores com numeradores e denominadores com denominadores.

Exercícios Resolvidos

1) $\left(-\frac{3}{7}\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = +\frac{15}{14}$

2) $4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{3}$

3) $\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{2}{15}$

4) $(-3) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) = -\frac{3}{14}$

Divisão:

Para *dividir* uma fração por outra fração, devemos multiplicar a primeira fração pelo inverso da segunda fração.

Exercícios Resolvidos

Inverter a segunda fração

: 3

1) $-\frac{5}{3} : \left(-\frac{2}{9}\right) = -\frac{5}{3} \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) = +\frac{\cancel{45}}{\cancel{6}} = \frac{15}{2}$

2) $-\frac{1}{3} : 8 = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} = -\frac{1}{24}$

3) $\dfrac{\left(-\frac{2}{3}\right)}{\frac{1}{2}} = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{2}{1} = -\frac{4}{3}$

4) $\dfrac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

Potenciação:

Para calcular a potência de um número fracionário, eleva-se o numerador e o denominador ao expoente da fração.

Exercícios Resolvidos

1) $\left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{9}{25}$

2) $\left(-\frac{3}{4}\right)^3 = -\frac{27}{64}$

3) $\left(\frac{17}{9}\right)^0 = 1$

- **Radiciação:**

Exercícios Resolvidos

1) $\sqrt{\dfrac{9}{25}} = \dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \dfrac{3}{5}$

2) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}} = \dfrac{1}{2}$

3) $\sqrt{-\dfrac{1}{4}} \notin IR$

4) $\sqrt[3]{-\dfrac{1}{8}} = -\dfrac{1}{2}$

1.4.5 Operações com os números decimais:

- **Adição e Subtração:**

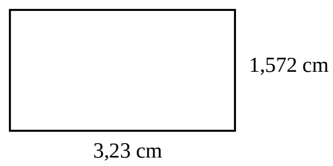
Exercícios Resolvidos

1) 4,32 + 2,3 + 1,429 = 8,049

$$\begin{array}{r} 4,32 \\ +\;2,3 \\ 1,429 \\ \hline 8,049 \end{array}$$

Observe que as parcelas são dispostas de modo que se tenha vírgula sobre vírgula.

2) Calcular o *perímetro* do retângulo abaixo:



P = 3,23 + 3,23 + 1,572 + 1,572 = 9,604 cm

- **Multiplicação:**

Exercícios Resolvidos

1) 7,32 **.** 12,5 = 91,500 = 91,5

```
   7 , 32
 x 12 , 5
 ---------
    3660
   1464
  732
 ---------
   91 , 500
```

2) Calcular a *área* do retângulo abaixo:

1,572 cm

3,23 cm

A = 3,23 **.** 1,572 = 5,07756 cm^2 $\cong$ 5,08 cm^2

- **Divisão:**

Exercícios Resolvidos

1) 56 **:** 3 $\cong$ 18, 6

```
 5 6  | 3
      |-----------
 -3     1 8 , 6 ...
 ----
  2 6
 - 2 4
 -----
    2 0
  - 1 8
  -----
     2 0
```

Na divisão de números inteiros começa-se operar normalmente. Quando o resto for diferente de zero, (como no exemplo ao lado), acrescenta-se zero ao resto e uma vírgula no quociente e começa a divisão novamente.

2) 29 **:** 0,2 =

29,0 **:** 0,2 = 145

```
 2 9 0 | 0 2
       |-----------
 -2      1 4  5
 ----
  0 9
 -  8
 -----
    1 0
  - 1 0
  -----
      0
```

Na divisão de números decimais, antes de operar devemos igualar as casas decimais, completando com zero, como no exemplo ao lado.

1.5 Conjunto dos números Irracionais

É um número que não pode ser escrito sob a forma de fração. Os números irracionais têm infinitos decimais não-periódicos. Encontramos esses números nas raízes não exatas, e no número π (pi).

Por exemplo:

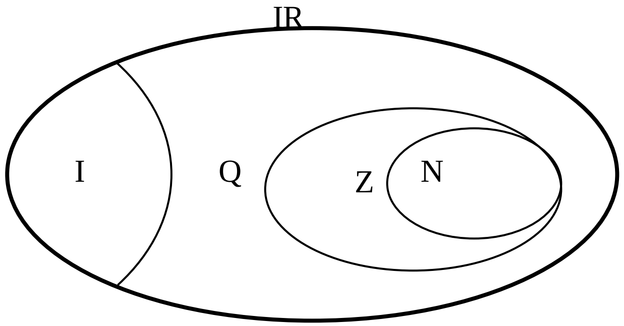
$\sqrt{2}$ = 1,414213562 **...**

π = 3,14159265 **...**

1.6 Conjunto dos números Reais

A união dos conjuntos dos números racionais com o conjunto dos números irracionais constitui o conjunto dos números reais, representado pela letra IR.

Assim, todo número natural é real, do mesmo modo que todo número inteiro ou racional ou irracional também são números reais, como mostra o diagrama.



Exercícios

1) Simplifique as expressões numéricas:

a) 9 + 3 . 2 =

b) 8 . 7 – 18 =

c) 6 . 12 + 6 . 8 =

d) 9 . 15 – 6 .15 =

e) 8 . 3 – 20 + 4 . 2 =

f) 100 – 3 . 24 =

g) 256 – 2 . 72 – 2 . 36 =

h) 9 . 7 – 7 . 9 + 1 =

i) 40 . 8 : 2 =

j) 28 : 4 . 7 =

l) 45 : 5 – 45 : 9 =

m) 48 : 16 + 3 . 2 =

n) 98 : 7 – 6 : 3 =

o) 42 : 6 – 5 =

p) 27 : 3 : 3 : 3 . 10 =

q) 45 – 15 : 5 . 3 =

r) 100 – 0 : 4 . 10 =

s) 0 : 12 + 3 . 9 =

2) Calcule:

a) 9(10 + 2) =

b) 9(2 + 5) – 10(6 – 2) =

c) 54 : (9 . 3 – 3 . 3) + 3 . 1 =

d) 6(42 : 7 – 4) – 0 : 3 =

e) (4 . 8 : 2) : 8 + 2 . 5 =

f) 256 : (32 : 2 : 2 : 2) : 4 =

g) [15 + 2(3 + 4)] =

h) [45 – (3 . 5 – 2)] : 8 =

i) 6[(36 : 9 – 3) . (8 : 2)] : 3 =

j) 6 . 8 + [48 : 12 – 48 : (4 + 12)] =

l) 48 – 2[125 : 5 – (8 – 36 : 6)] : 2 =

m) 100 – {2[25 – (27 : 9 + 24 – 7)]} : 2 =

n) 6{48 : [6 . 6 – (16 : 4 + 8)]5} =

o) 200 : {3[3 . 10 : 30] + (2 . 1)} =

p) {54 + [72 : 2 + (7 . 9 – 6 : 2)] + 3} : 9 =

3) Simplifique as expressões numéricas:

a) $30^2 : [2^3 . 2^2 – (9^2 : 3^2) + 2 . \sqrt{16} - 1] =$

b) $4^4 – [96 : (2^2 . \sqrt{9}) + 8^2 : \sqrt{64}]2^4 =$

c) $\sqrt{16} . 3^3 – [11^2 – (\sqrt{9} . \sqrt{49})1^{100}] + 2^3 =$

d) $12^2 – 12^2 : [(9^2 - \sqrt[3]{1}) : \sqrt{100}]7 =$

e) $6^3 : \sqrt{81} : 2^2 - \sqrt[3]{8} =$

f) $\sqrt[4]{16} [10^3 : 5^2 – (7^2 – 3^2) : \sqrt{100}] : 9 =$

4) Calcule o valor de cada expressão numérica:

a) $\sqrt{4} + \sqrt{81} =$

b) $\sqrt{81 - 72} =$

c) $\sqrt{100} - \sqrt{64} =$

d) $\sqrt{100 - 64} =$

e) $\sqrt{13^2 - 12^2} =$

f) $\sqrt{5^2 - 4^2} =$

g) $\sqrt{5^2 + 12^2} =$

h) $\left(\sqrt{100}\right)^2 =$

i) $3\sqrt{81} - \sqrt{4} =$

j) $\sqrt{52 - 3} + 2\sqrt{64} =$

l) $\sqrt{4^2 + 2^3 + 3^2 + 3^1} =$

m) $\sqrt{100 : 10 - 1} =$

n) $\left(\sqrt{81}\right)^2 =$

o) $-\left(-\sqrt{49}\right)^2 =$

p) $\sqrt{5^2 - 3^2} =$

q) $-\sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} =$

r) $\sqrt{(-10)^2 - (-8)^2} =$

s) $-\sqrt{5^2 - (-4)^2} =$

t) $\sqrt{(-3)^2 - 4(+7)(-4)} =$

5) Simplifique as expressões numéricas:

a) 2 + 3 – 1 =

b) – 2 – 5 + 8 =

c) – 1 – 3 – 8 + 2 – 5 =

d) – 15 + (- 25) – (- 81) =

e) 18 + (- 29) – (+ 45) =

f) 104 – 45 – 28 =

g) (- 73) + (- 98) =

h) + (+ 9 – 5 + 1) – (- 4 – 3 + 2) =

i) – (+ 10 – 20) + (- 40 + 50 – 60) =

6) Calcule:

a) – 8 – (2 + 3) =

b) – 20 – (5 – 1) =

c) – 16 – 9 – (4 + 3) – (-12 + 7) =

d) (- 3 + 6 – 11) – (- 1 2 – 15 + 16) + (17 – 20 + 3) =

e) – (- 8 + 1) – (- 9 – 3) =

f) (-1 – 2 – 3) – (+7 -6 +8) =

g) (-5 + 3 – 10) – (-16 + 8 - 9) =

7) Calcule:

a) o triplo de – 2:

b) o quádruplo de -1:

c) o dobro de – 4 adicionado a – 5:

d) o triplo de + 2 adicionado a – 10:

e) o dobro de – 2 adicionado ao triplo de – 1:

f) o quádruplo de -3 adicionado ao dobro de 12:

8) Efetue as multiplicações:

a) – 2 . 8 =

b) (+ 5) . (- 3) =

c) – 6 . (+ 1,75) =

d) (+ 5) . (- 4) =

e) 10 . (- 9) =

f) (- 1,2) . (-1,5) =

g) 4 . (- 15) =

h) -10 . (+ 10) =

i) (- 0,7) . (+ 0,8) =

j) 100 . 10 =

l) (- 15) . (+ 16) =

m) (- 0,5) . (- 0,5) =

n) 2 . (- 2) . (- 2) =

o) (- 3) . (- 4) . (- 1) =

p) – 1. (+ 5) . (- 10) =

q) (+ 6) . (- 6) . (+ 2) . (- 2) =

r) (- 10) . (- 1) .(+ 4) . (+ 17) . 0 =

9) Calcule os quocientes:

a) 30 : (- 6) =

b) – 50 : (+ 2) =

c) 30 : (+ 5) =

d) – 121 : (- 11) =

e) 20 : (- 20) =

f) – 20 : (- 1) =

g) [(- 16) : (- 2)] : (- 2) =

h) [(- 4) : (- 1)] . [(- 20) : (- 4)] =

i) [(+ 8) : (- 4)] : [(- 20) : (- 10)] =

j) $\dfrac{(+\ 7)\ .\ (-\ 3)}{(-\ 4)\ :\ (+\ 4)} =$

l) $\dfrac{-100\ :(-5):(-5)}{-2.1} =$

m) $\dfrac{(-2)^3-(-5)^3}{(-2)^2+(-2)(-5)+(-5)^2} =$

n) $\dfrac{4}{-2} =$

o) $\dfrac{-8}{2} =$

p) $\dfrac{-20}{-5} =$

q) $\dfrac{(-4).(-1)}{-2} =$

r) $\dfrac{(-1+3-5)\,.\,(2-7)}{-1} =$

s) $\dfrac{(2+3\,.\,4-2\,.\,5-3)}{-1} =$

10) Calcule:

a) a metade de – 80:

b) a terça parte de 60:

c) a quarta parte de – 20:

d) a quinta parte de 100:

e) a metade de -10 multiplicado por 4:

f) o dobro de - 8 dividido por - 4:

g) a terça parte de + 60 dividida por -10:

h) a quarta parte de – 100 adicionada à metade de – 18:

11) Calcule as potências:

a) $1^3 =$

b) $0^4 =$

c) $(-2)^3 =$

d) $(-4)^3 =$

e) $(-2)^4 =$

f) $(-4)^4 =$

g) $2^3 \,.\, 2^5 =$

h) $2 \,.\, 3^{-1} =$

i) $3^5 : 3^4 =$

j) $3^4 : 3^2 \,.\, 3^5 =$

l) $2^4 \,.\, 5^4 =$

m) $(2 \,.\, 3^2)^0 =$

n) $15^3 : 3^3 =$

o) $(-4)^6 : 2^6 =$

p) $(3^3)^2 =$

q) $(-2^2)^5 =$

r) $(-3^3)^2 =$

s) $\dfrac{2}{3^{-4}} =$

t) $(2 \,.\, 3)^3 =$

u) $(3^2 \,.\, 5 \,.\, 2)^{-1} =$

v) $\left(-\dfrac{5}{3}\right)^5 =$

x) $\left(-\dfrac{2}{3^4}\right)^2 =$

z) $4^{-2} =$

12) Calcule:

a) o quadrado de – 9:

b) o cubo de – 1:

c) a quarta potência de – 2:

d) a quinta potência de zero:

e) o quadrado de – 5 adicionado ao cubo de -1:

f) a terça parte do cubo de – 3:

g) o cubo de – 1 multiplicado pelo quadrado de 6:

h) a quarta parte do quadrado de – 6:

13) Use os símbolos de > (maior), < (menor) ou = (igual) e compare as potências:

a) -5^3 ___ $(-5)^3$

b) $(-2)^2$ ___ -2^2

c) -4^3 ___ $(-4)^3$

d) -1^4 ___ $(-1)^4$

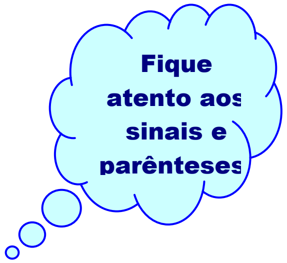
e) $(-3)^2$ ___ $(-3)^3$

f) $(-4)^1$ ___ $(-4)^0$

g) -4^2 ___ $(-2)^3$

h) -5^2 ___ -5^{-2}

i) $\frac{1}{3^{-3}}$ ___ 3^{-3}



14) O produto dos resultados das três expressões representa o número de anos que durou a construção de um castelo. Se ele começou a ser construído no ano 250 a.C., em que ano terminou a construção?

$\{(-2) + (-3)(-9) + 4(-5) - [-5.(-1)]\}(-2) - 5$

$[6(-6)(-3) + 100(-1)](-3) + 19$

$\{-100 + (-64)(-2) - (-2)(-2)(-2)(-2) - 1.17\}(-1)$

15) Escreva como uma única potência de base – 3. Depois, efetue a potenciação.

a) $[(-3)^5]^2 : (-3)^8 =$

b) $[(-3)^1]^2(-3)^3 : (-3)^4 =$

c) $(-3)^{10}(-3)^6 : [(-3)^2]^8 =$

d) $(-3)^6 : (-3)^2 : [(-3)^1]^0 =$

e) $\frac{[(-3^8)]^3 : [(-3)^6]^3}{(-3)^0(-3)^3} =$

f) $\frac{(-3)^{10}(-3)^5}{[(-3)^2]^5} =$

16) Determine o mínimo múltiplo comum de 8 e 12.

17) Qual é o mmc do 10 e 18?

18) Calcule as operações com as frações:

a) $\frac{3}{2}+\frac{1}{6}=$

b) $\frac{1}{9}+\frac{4}{12}=$

c) $\frac{5}{6}+\frac{6}{9}=$

d) $\frac{2}{3}+\frac{10}{15}=$

e) $\frac{1}{2}-\frac{2}{9}=$

f) $\frac{5}{6}-\frac{2}{5}=$

g) $\frac{3}{4}-\frac{7}{15}=$

h) $\frac{13}{14}-\frac{5}{7}=$

i) $\frac{1}{12}-\frac{3}{4}+\frac{4}{3}-2=$

j) $\frac{7}{3}+\frac{5}{4}-4=$

19) Determine cada produto e escreva na forma mais simples:

$a)\left(-\frac{8}{6}\right).\left(+\frac{3}{4}\right)=$

$b)\left(-\frac{5}{2}\right).\left(-\frac{10}{7}\right)=$

$c)-6.\left(-\frac{2}{3}\right).\left(+\frac{5}{2}\right)=$

$d)\left(+\frac{3}{4}\right).\left(-\frac{8}{6}\right)=$

$e)\left(-\frac{2}{5}\right).\left(-\frac{7}{10}\right)=$

$f)\ 4.\left[\left(-\frac{4}{3}\right).\left(+\frac{3}{2}\right)\right]=$

g) $\frac{1}{2}.\left(-\frac{3}{5}\right)=$

h) $\left(-\frac{1}{4}\right).\frac{1}{2}=$

i) $-\frac{11}{4}.\left(+\frac{16}{5}\right)=$

j) $-\frac{1}{3}.\frac{2}{5}=$

l) $\left(-\frac{3}{7}\right).\left(+\frac{1}{3}\right).\left(-\frac{2}{5}\right)=$

m) $\left(-\frac{1}{6}\right).\left(-\frac{2}{5}\right)=$

20) Efetue e simplifique se possível:

a) $+\frac{3}{4} : \left(+\frac{9}{2}\right) =$

b) $-\frac{1}{2} : \left(+\frac{1}{8}\right) =$

c) $0{,}5 : \frac{1}{3} =$

d) $-4 : \frac{1}{5} =$

e) $\frac{7}{6} : 2 =$

f) $\left(-\frac{1}{2}\right) : (-2) =$

g) $\dfrac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{3}} =$

h) $\dfrac{-5}{\frac{2}{3}} =$

i) $\dfrac{\frac{13}{3}}{-\frac{9}{4}} =$

d) $\dfrac{1+\frac{1}{3}}{3} =$

e) $\dfrac{1+\dfrac{1+\frac{1}{2}}{2}}{\frac{1}{2}} =$

f) $\dfrac{1+\dfrac{1}{1+1}}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}}} =$

g) $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}} : \left(\frac{9}{17}+1\right) =$

21) Calcule:

a) $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} =$

b) $2 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) : \frac{1}{5} =$

c) $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{4}\right) : \frac{1}{2} =$

22) Efetue as operações (Arme as operações):

a) 2,31 + 4,08 + 3,2 =

b) 4,03 + 200 + 51,2 =

c) 32,4 – 21,3 =

d) 48 – 33,45 =

e) 2,1 . 3,2 =

f) 48,2 . 0,031 =

g) 3,21 . 2,003 =

h) 8,4708 : 3,62 =

i) 682,29 : 0,513 =

j) 2803,5 : 4450 =

l) (FUVEST) $\frac{0,2\ .\ 0,3}{3,2 - 2,0}$ =

m) 0,041 . 21,32 . 401,05 $\cong$

n) 0,0281 : 0,432 $\cong$

o) $\frac{2,31\ .\ 4,82}{5,1} \cong$

p) $\frac{0,021\ .\ 4,32}{0,285} \cong$

23) Qual é a soma do dobro de – 4,75 e o triplo de -1,2?

24) Calcule:

a) o quádruplo de 1,3:

b) o dobro de -5,2:

25) Rafaela apostou que 1,6 **.** (- 0,25) é $-\frac{4}{10}$. Ele ganhou a aposta?

26) Calcule o módulo do resultado de $2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) - 2$.

Respostas:

1) a.15 b.38 c.120 d.45 e.12 f.28 g.40 h.1 i.160 j.49 l.4 m.9 n.12 o.2 p.10 q.36 r.100 s.27

2) a.108 b.23 c.6 d.12 e.12 f.16 g.29 h.4 i.8 j.49 l.25 m. 95 n. 60 o.40 p. 17

3) a.30 b.0 c.16 d.18 e.4 f. 8

4) a.11 b.3 c.2 d.6 e.5 f.3 g.13 h.100 i.25 j.23 l.6 m.3 n.81 o.-49 p.4 q.-5 r.6 s.-3 t.11

5) a.4 b.1 c.-15 d.41 e.-56 f.31 g.-171 h.-4 i.-40

6) a.- 13 b.- 24 c.- 27 d.3 e.19 f.- 15 g.5

7) a.- 6 b.- 4 c.- 13 d.- 4 e.- 7 f.12

8) a.-16 b.-15 c.-10,5 d.-20 e.-90 f.1,8 g.-60 h.-100 i.-0,56 j.1000 l.-240 m.0,25 n. 8 o. -12 p. 50 q.144 r.0

9) a.-5 b.-25 c.6 d.11 e.-1 f.20 g.-4 h.20 i.-1 j.21 l.2 m.3 n.-2 o.-4 p.4 q.-2 r.-12 s.-1

10) a.-40 b.20 c.-5 d.20 e.-20 f.4 g.-2 h.-34

11) a.1 b.0 c.-8 d.-64 e.+16 f.256 g.256 h. $\frac{2}{3}$ i.3 j.2187 l.10000 m.1 n.125 o.64 p.729 q.-1024 r.729 s.162 t.216 u. $\frac{1}{90}$ v. $-\frac{3125}{243}$ x. $\frac{4}{6561}$ z. $\frac{1}{16}$

12) a.81 b.-1 c.16 d.0 e.24 f.-9 g.-36 h.9

13) a.= b.> c.= d.< e.> f.< g.< h.< i.>

14) 1ª.-5 2ª.-5 3ª.5 R.125a.C.

15) a.$(-3)^2 = 9$ b.$(-3)^1 = 3$ c.$(-3)^0 = 1$ d.$(-3)^4 = 81$ e.$(-3)^3 = -27$ f.$(-3)^5 = -243$

16) mmc(8, 12) = 24 **17)** mmc(10, 18) = 90

18) a. $\frac{5}{3}$ b. $\frac{4}{9}$ c. $\frac{3}{2}$ d. $\frac{4}{3}$ e. $\frac{5}{18}$ f. $\frac{13}{30}$ g. $\frac{17}{60}$ h. $\frac{3}{14}$ i. $-\frac{3}{4}$ j. $-\frac{5}{12}$

19) a.-1 b. $\frac{25}{7}$ c.10 d.-1 e. $\frac{7}{25}$ f.-8 g. $-\frac{3}{10}$ h. $-\frac{1}{8}$ i. $-\frac{44}{5}$ j. $-\frac{2}{15}$

l. $\frac{2}{35}$ m. $\frac{1}{15}$

20) a. $\frac{1}{6}$ b.-4 c. $\frac{3}{2}$ d.-20 e. $\frac{7}{12}$ f. $\frac{1}{4}$ g. $\frac{3}{2}$ h. $-\frac{15}{2}$ i. $-\frac{52}{27}$

21) a. $\frac{3}{16}$ b.-4 c. $\frac{5}{3}$ d. $\frac{4}{9}$ e. $\frac{7}{2}$ f. $\frac{9}{10}$ g. $\frac{1}{2}$

22) a.9,59 b.255,23 c.11,1 d.14,55 e.6,72 f.1,4942 g.6,43 h.2,34 i.1,33 j.0,63 l.0,05 m.350,57 n.0,065 o.2,18 p.0,32

23) -13,1 **24)** a.5,2 b.-10,4

25) Sim **26)** $\frac{8}{3}$

2. ÁLGEBRA

2.1 Introdução

A Álgebra é considerada a aritmética simbólica porque emprega letras para representar números.

Observe o retângulo:

A área desse retângulo é A = 3.2 = 6 cm^2. Agora, como representaríamos, algebricamente, a área do retângulo?

De modo geral, representamos por *b* a base do retângulo qualquer e por *h* a sua altura, escrevemos por meio de uma fórmula o cálculo de área:

A = b . h ou A = bh

onde as letras *b* e *h* são chamadas de *variáveis*.

Observe o exemplo:

★ Qual é o número cujo dobro adicionado a 5 dá como resultado 25?

Solução

Representamos o número desconhecido por ***x***, então:

$2 \cdot x + 5 = 25$

$2x = 25 - 5$

$2x = 20$

$x = \frac{20}{2}$

$x = 10$

O valor desconhecido representado pela letra x é chamado de *incógnita* da equação.

Portanto o número desconhecido é o número 10.

Expressões algébricas

Expressões matemáticas formadas por letras ou número e letras são chamadas de expressões algébricas.

Por exemplo: $-7a^2b$

A expressão algébrica $-7a^2b$ é formada por um *termo*, ou seja, um *monômio*.

$-7\,a^2\,b$

Variável ou parte literal: $a^2\,b$

Coeficiente numérico: - 7

Dois ou mais monômios que possuem a mesma parte literal são chamados *monômios ou termos semelhantes*. Por exemplo:

a. $-8a$ e $12a$

b. $3xy^2$ e $\frac{5}{7}xy^2$

c. $-a^2b^3$, $9a^2b^3$ e $11a^2b^3$

Uma expressão algébrica formada por um monômio ou uma soma de monômios chama-se *polinômio*.

Valor Numérico

Valor numérico de uma expressão é o número obtido quando se substituem as variáveis por números e se efetuam as operações indicadas.

Exercício resolvido:

1. Qual é o valor numérico da expressão $x^2 - 5x + 6$ para $x = -3$?

$(-3)^2 - 5.(-3) + 6$

$9 + 15 + 6$

30

2.2 Operações com os polinômios

2.2.1. Adição e Subtração de polinômios.

Somente é possível somar ou subtrair termos semelhantes. Quando estamos adicionando ou subtraindo os termos semelhantes de uma expressão, dissemos que estamos *simplificando* ou *reduzindo* os termos semelhantes. Para isso, repete-se a parte literal e opera-se com os coeficientes.

Exercício resolvido:

a. $3x^2y - 4xy^2 + 7xy^2 + 5x^2y = 8x^2y + 3xy^2$

b. $3x + 7x - x - 10x = -x$

c. $(x^2 - 5x + 6) - (3x^2 + x - 1) = x^2 - 5x + 6 - 3x^2 - x + 1$

$= -2x^2 - 6x + 7$

2.2.2. *Multiplicação de polinômios.*

Multiplicam-se os coeficientes e, a seguir, multiplicam-se as partes literais. Para a multiplicação das partes literais, usamos a propriedade da potência:

$$\mathbf{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$$

Exercícios resolvidos:

a. $(-3a^2y) \cdot (+2ay) = -6a^3y^2$

b. $2x \cdot (5x + 4) = 10x^2 + 8x$

c. $(2x + 1) \cdot (4x - 3) = 8x^2 - 6x + 4x - 3 = 8x^2 - 2x - 3$

Usamos aqui a propriedade *distributiva*

2.2.3. Divisão de polinômios.

1º Caso: *Divisão de monômios.* Divide-se o coeficiente numérico e a parte literal correspondentes. Para dividir as partes literais, usamos a propriedade da potência:

$$\mathbf{a^n : a^m = a^{n-m} \quad (com\ a \neq 0)}$$

Exercícios resolvidos:

a. $(+6x^3) : (-2x) = -3x^2$

b. $(-8a^4b^3c) : (-12a^2b^2c) = \overset{:4}{\frac{-\cancel{8}}{-\cancel{12}}}\, a^2b = \frac{2}{3}\, a^2b$

c. $(+42a^3bx^4) : (+7ax^2) = 6a^2bx^2$

Ao dividirmos um monômio por outro, o quociente obtido nem sempre é um novo monômio. Veja:

$$(-6x) : 2x^2 = \frac{-6x}{2x^2} = -\frac{3}{x}$$

$$\frac{14ay^2}{4a^2y} = \frac{7y}{2a}$$

$$\frac{-3m^5p^2}{-3mp^5} = \frac{m^4}{p^3}$$

★ Esses resultados são expressões fracionárias chamadas de ***frações algébricas***.

2º Caso: *Divisão de polinômio por monômio*:

Divide-se cada termo do polinômio pelo monômio.

Exercícios resolvidos:

a. $(6x^2 + 8x) : (-2x) = -3x - 4$

b. $(9a^2b^2 - ab^3 + 6a^3b^5) : 3ab^2 = 3a - \frac{1}{3}b + 2a^2b^3$

3º Caso: *Divisão de polinômio por polinômio*:

Exercícios resolvidos:

a. $(2x^2 - 5x + 8) : (x - 1) = 2x - 3$ e resto: 5

b. $(9x^2 - 36) : (3x + 6) = 3x - 6$

a)
$$\begin{array}{rl|l} & 2x^2 - 5x + 8 & x - 1 \\ \cline{3-3} & -2x^2 + 2x & 2x - 3 \\ \cline{2-2} & 0 \quad -3x + 8 & \\ & +3x - 3 & \\ \cline{2-2} & 0 + 5 & \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rl|l} & 9x^2 + 0x - 36 & 3x + 6 \\ \cline{3-3} & -9x^2 - 18x & 3x - 6 \\ \cline{2-2} & 0 \quad -18x - 36 & \\ & +18x + 36 & \\ \cline{2-2} & 0 & \end{array}$$

2.3 Produtos notáveis

Existem produtos de polinômio muito importantes no cálculo algébrico, que são conhecidos como *produtos notáveis*. Vele a pena reconhecê-los e resolve-los de forma imediata.

2.3.1. Quadrado da soma de dois termos:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$
$$= a^2 + ab + ab + b^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$

1º Termo

2º Termo

Quadrado do primeiro termo.	+ o dobro do produto do 1º pelo 2º termo.	+ quadrado do segundo termo

Podemos dizer que:

"O quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro mais duas vezes o produto do primeiro pelo segundo mais o quadrado do segundo."

Exercícios resolvidos:

a. $(2 + x)^2 = 2^2 + 2 \cdot 2.x + x^2 = 4 + 4x + x^2$

b. $(7x + 2y)^2 = 49x^2 + 28xy + 4y^2$

2.3.2. Quadrado da diferença de dois termos:

$$\boxed{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

Podemos dizer que:

"O quadrado da diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro menos duas vezes o produto do primeiro pelo segundo mais o quadrado do segundo."

Exercícios resolvidos:

a. $(x - 3) = x^2 + 2 \cdot x \cdot (-3) + (-3)^2 = x^2 - 6x + 9$

b. $(7x - 2y)^2 = 49x^2 - 28xy + 4y^2$

2.3.3 Produto da soma pela diferença de dois termos:

$$\boxed{(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2}$$

Podemos dizer que:

"O produto da soma de dois termos por sua diferença é igual ao quadrado do primeiro menos o quadrado do segundo."

Exercícios resolvidos:

a. $(1 - \sqrt{3}) \cdot (1 + \sqrt{3}) = 1^2 - (\sqrt{3})^2 = 1 - 3 = -2$

b. $(7x + 2y) \cdot (7x - 2y) = 49x^2 - 4y^2$

2.4 Fatoração

Fatorar um polinômio é escrevê-lo sob a forma de um produto.

★ Fator comum.

1. $ax + bx = x \cdot \left(\frac{ax}{x} + \frac{bx}{x} \right) = x(a + b)$

Na expressão fatorada, **x** é o *fator comum* colocado em evidência.

2. $4c - 18 = 2 \cdot \left(\frac{4c}{2} - \frac{18}{2} \right) = 2(2c - 9)$

Na expressão fatorada, **2** é o *máximo divisor comum* dos coeficientes numéricos 4 e 18, logo é *o fator comum* colocado em evidência.

3. $7ax^3 + x^2 = x^2 \cdot \left(\frac{7ax^3}{x^2} + \frac{x^2}{x^2} \right) = x^2(7ax + 1)$

Na expressão fatorada, $\mathbf{x^2}$ é a parte literal de *menor grau*, logo é *o fator comum* colocado em evidência.

Podemos ter as três situações em uma única expressão. Veja:

4. $8a^5b + 12a^3 = 4a^3(2a^2b + 3)$

5. $4ax^2 + 8a^2x^3 + 2a^3x = 2ax\,(2x + 4ax^2 + a^2)$

★ Fatoração por agrupamento.

1. $ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y)$

$= (x + y)(a + b)$

2. $2mx - 5ny - 2nx + 5my = -n(5y + 2x) + m(2x + 5y)$

$= (5y + 2x)(m - n)$

Na expressão fatorada, os quatro termos não apresentam um fator comum. Logo agrupamos os termos de dois em dois, onde ***a*** é o fator comum do primeiro grupo e ***b*** é o fator comum do segundo grupo. E fatoramos novamente.

★ **Diferença entre dois quadrados.**

1. $a^2 - 9 = (a-3)(a+3)$

$\sqrt{a^2}$ $\sqrt{9}$

2. $16m^2 - 25n^4 = (4m - 5n^2)(4m + 5n^2)$

★ **Trinômio Quadrado Perfeito.**

1. $x^2 + 20x + 100 = (x + 10)^2$

$\sqrt{x^2} = x$ $\sqrt{100}$

Sinal do perfeito

2.x.10 = 20x perfeito

2. $9x^2 - 48xy + 64y^2 = (3x - 8y)^2$

2.5 Frações Algébricas

Uma fração algébrica corresponde ao quociente de duas expressões algébricas. Observe:

$$\frac{x}{y} \qquad \frac{2x+1}{y-4} \qquad \frac{9a^2-7}{a+1}$$

O conjunto dos números reais para os quais o denominador de uma fração algébrica é *diferente de zero* é denominado ***domínio*** ou ***campo de existência*** da fração.

Assim, para a fração $\frac{x^2+y^2}{x-3}$, o *campo de existência* é qualquer número real diferente de 3, já que a fração não tem nenhum significado quando x = 3, pois anula o seu denominador.

Dada uma fração algébrica, vamos considerar que sempre estão excluídos os números reais que, colocados no lugar das letras, anulam o seu denominador. Logo:

★ A fração $\frac{7}{x}$, devemos ter $x \neq 0$.

★ A fração $\frac{x^3+4}{x^2-9}$, devemos ter $x \neq 3$ e $x \neq -3$.

2.5.1. Simplificação de frações Algébricas.

Exercícios resolvidos:

1. $\dfrac{24x^4y^3z}{18x^2y^4} = \dfrac{4x^2z}{3y}$

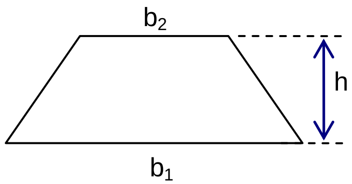
2. $\dfrac{x^2+x}{2x+2} = \dfrac{x(x+1)}{2(x+1)} = \dfrac{x}{2}$

3. $\dfrac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2} = \dfrac{(a+b)(a-b)}{(a-b)^2} = \dfrac{a+b}{a-b}$

Exercícios

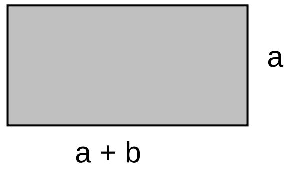
1) Ache o valor numérico da expressão 4x + 2y –3 para x = 5 e y = -2.

2) A área do trapézio da figura é dada pela fórmula $A = \dfrac{(b_1+b_2).h}{2}$, em que b_1 e b_2 representam suas bases e h sua altura.



Determine a área do trapézio, sendo b_1 = 12 cm, b_2 = 8 cm e h = 3,5 cm.

3) Escreva a expressão algébrica que representa a área da figura.

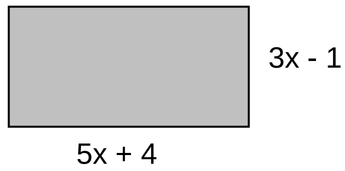


4) Calcule o valor numérico de $9x^3 - x^2 + \frac{1}{3}$ para $x = -\frac{1}{3}$.

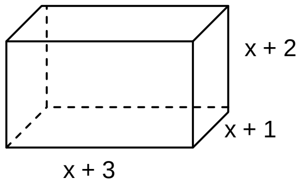
5) Se a expressão algébrica a^3 representa o volume de um cubo de aresta a = 8 cm, qual é o volume desse cubo?

6) Encontre o valor numérico da expressão $\frac{3}{4}(2a+b+c)$ para a = 9, b = 12 e c = - 12.

7) Ache a expressão algébrica que representa a área do retângulo.



8) Que polinômio representa o volume do paralelepípedo?



9) calcule o valor numérico para $x^4 - 8x^3 + x^2 - x$, para:

a) $x = 3$

b) $x = -2$

10) Reduza os termos semelhantes:

a) $(4a - 7) + (-2a + 9) =$

b) $(13x - 1) + (2x - 1) =$

c) $(2x^2 - 3x - 2) + (2x^2 - 5x + 2) =$

d) $(-4y^2 + 5y - 3) + (4y^2 + 3) =$

e) $(8y^3 - 6y^2 + 16y - 1) + (-8y^3 - 6y^2 + 16y - 1) =$

f) $(4y - 2) - (2y + 3) + (-2y + 4) =$

g) $(b^2 - 3b + 2) - (-b^2 + 3b - 2) - (2b^2 - 4b + 1) =$

h) $(4x - 2) - (3x^2 + 7x - 2) + (-x^2 + 1) =$

i) $(x^3 - y^3) + (2x^3 - 4x^2y + xy^2) - (x^3 - 8) =$

11) Efetue as multiplicações:

a) $3x^2 . 4x^3 =$

b) $-2a^4 . 5a =$

c) $6pq^2 . (-2p^3q^2) =$

d) $-ab . (-a^2b^3) =$

e) $3(2x^2 - 5x + 1) =$

f) $-4(a^3 - a^2 + 2a - 3) =$

g) $2x^2(3x^2 - 4x + 5) =$

h) $-a(a^3 - a^2 - 2) =$

i) $\frac{1}{2}x^2y\ (2x^3 - xy + 4y^2) =$

j) $(x^2 - 5x + 6)(x + 3) =$

l) $(2x + 3)(x - 2)(4x - 1) =$

m) $(2x + 1)(4x + 3) =$

n) $(2y - 6)(3y + 5) =$

12) Calcule as divisões:

a) $x^7 : x^2 =$

b) $y^4 : y^2 =$

c) $4n^4 : (-n) =$

d) $-a^6 : (-a^{10}) =$

e) $\frac{b}{-2b^6} =$

f) $\frac{5x^3y^{10}}{10xy^7} =$

g) $\frac{-9n^4p^3}{27n^4p^4} =$

h) $\frac{4a^3b^5}{8b^5a^3} =$

13) Efetue as divisões:

a) $(16x^3 - 4x^2 + 8x) : (-4x) =$

b) $(m^4 - 2m^3 + m^2) : (-m) =$

c) $(a^m - a^{2m} + a^{3m}) : (+a^m) =$

d) $(6a^4b^2 - 9a^3b + ab) : ab =$

e) $(20a^3 - 15a^2 + 30a) : 5a =$

f) $(7m^8 - 14m^6 + 28m^5) : 7m^4 =$

14) Simplifique $\dfrac{(2x+8)(x^3-6x^2)}{2x^2}$.

15) Efetue $[(y^2 - 2y + 4)(y + 2) + (y^2 + 2y + 4)(y - 2)] : y^2$.

16) Calcule:

a) $(x^2 - 7x + 10) : (x - 2) =$

b) $(2y^2 - 3y - 2) : (y - 2) =$

c) $(2n^2 - 5n + 7) : (n - 3) =$

d) $(10a^2 - 3a - 7) : (a - 1) =$

e) $(x^2 - 81) : (x + 9) =$

f) $(81 - 18y + y^2) : (-y + 9) =$

g) $(k^3 - 3k^2 + 3k - 2) : (k - 1) =$

h) $(8b^3 + 12b^2 + 6b + 1) : (2b + 1) =$

17) Determine $\dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 - 4x + 4}$.

18) Efetue:

a) $(x + y)^2 =$

b) $(a + 3)^2 =$

c) $(5x + 2)^2 =$

d) $(-3 + 4x)^2 =$

e) $(2x + y)^2 =$

f) $(5a + 2b)^2 =$

g) $(3a + 4b)^2 =$

h) $(x - 5)^2 =$

i) $(2a - 7)^2 =$

j) $(6x - 2y)^2 =$

l) $(11x - y)^2 =$

m) $(a - 3)^2 =$

19) Fatore as expressões algébricas:

a) $5x + 5y =$

b) $ba - bc =$

c) $7a + 7b - 7c =$

d) $8x - 10y =$

e) $27m + 3n =$

f) $\dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{4}y =$

g) $\dfrac{2}{5}b - \dfrac{8}{3}bx =$

h) $\frac{6}{5}x + \frac{12}{15}y =$

i) $24x^2 - 8x^3 =$

j) $a^3m^4 - 3a^2m^3 + \frac{1}{2}a^2m =$

l) $5x^3 + 5ax^6 =$

m) $12a^3b^4 - 16b^3a^4 =$

n) $14x^2y - 21x^3z =$

o) $8a^5b + 12a^3 =$

20) Fatore a expressão $2ax + 2bx + ay + by$.

21) Fatore os polinômios:

a) $4x^2 + 36x + 81 =$

b) $16 - 40x + 25x^2 =$

c) $1 - 20y + 100y^2 =$

d) $121x^2 - 25 =$

e) $64x^2 - 36y^2 =$

f) $\frac{4a^2}{25} - \frac{b^2}{49} =$

g) $49x^2 + 42xy + 9y^2 =$

h) $m^2n^2 - 2mn + 1 =$

i) $\frac{x^2}{4} - \frac{9y^2}{25} =$

22) Fatore:

a) $3x^2 + 30x + 75 =$

b) $-3ax^2 + 18ax - 27a =$

c) $\frac{-5y^2m}{4} + \frac{45x^2m}{16} =$

d) $1000 - 10x^2 =$

e) $3x^2 - 27 =$

23) Qual é a expressão fatorada de $5m + 5n - m^2 - 2mn - n^2$?

24) Simplifique as frações algébricas:

a) $\frac{x^2 + 6x + 9}{2x + 6} =$

b) $\frac{36x^2 - 9y^2}{36x^2 + 36xy + 9y^2} =$

c) $\frac{5x - 15}{x^2 - 9} =$

d) $\frac{14m^2 + 28mn + 14n^2}{7m^2 - 7n^2} =$

e) $\dfrac{-12x^2y}{6xy-8y+2y^2}=$

f) $\dfrac{3a^2-3}{a+1}=$

g) $\dfrac{9x^2-1}{9x-3}=$

h) $\dfrac{ab-4b}{3b^2}=$

i) $\dfrac{3ax+6a}{6ax^2-24a}=$

j) $\dfrac{3x^3-12x}{6x+12}=$

l) $\dfrac{8d^3-8dm^2}{5d^3-5dm^2}=$

25) Qual é a forma mais simples de escrever a fração $\dfrac{a^3-a^2}{4a^2-4a}$?

26) Simplifique $\dfrac{x^2-a^2}{x^2-2ax+a^2}$.

27) Qual é o domínio da fração:

a) $\dfrac{3x}{x-8}$

b) $\dfrac{5x+1}{4x-1}$

c) $\dfrac{a+1}{-4+a^2}$

28) Efetue:

a) $\dfrac{9ax}{y}+\dfrac{2ax}{y}+\dfrac{3ax}{y}=$

b) $\dfrac{y-1}{a+3}-\dfrac{y+5}{a+3}=$

c) $\dfrac{2}{5x}+\dfrac{3}{4y}-\dfrac{1}{2x}=$

d) $\dfrac{1}{2a}+5a=$

29) Obtenha o valor da expressão $(\sqrt{3}-2)^2+(2\sqrt{3}+1)^2$.

30) Efetue as operações e simplifique se possível:

a) $\sqrt{\dfrac{9x^3}{x-y}\cdot\dfrac{x}{x-y}}=$

b) $\sqrt{\dfrac{4x}{x+y}\cdot\dfrac{xy^2}{x+y}}=$

c) $\dfrac{x+3}{x^2-x} : \dfrac{x^2-9}{x^2-3x} =$

d) $\dfrac{x^2}{xy-y^2} \cdot \dfrac{x^2-y^2}{x^2+xy} =$

e) $\dfrac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2} =$

f) $\dfrac{x^2-10x+25}{4x+8} : \dfrac{x^2-25}{x^2+7x+10} =$

g) $\dfrac{3a-3b+ax-bx}{a^3+a-a^2-1} \cdot \dfrac{a^2+1}{a-b} =$

h) $\dfrac{4a^2+4ab+b^2}{ab} : \dfrac{4a^2b+2ab^2}{2(a-b)} =$

31) Efetue a expressão $\left(a+\dfrac{b-a}{1+ab}\right) : \left(1-\dfrac{ab-a^2}{1+ab}\right)$ e simplifique se possível.

32) Encontre o valor numérico da expressão $\left(x+\dfrac{y-x}{1+xy}\right) : \left(1+\dfrac{x^2-xy}{1+xy}\right)$, para x = $\sqrt{17}$ e y = 53.

RESPOSTAS:

1) 13 2) 35 cm^2 3) a(a + b) 4) $-\frac{1}{9}$ 5)512 cm^3

6) $\frac{27}{2}$ 7) $15x^2 + 7x - 4$ 8) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ 9) a.-129 b. 86

10) a. 2a + 2 b. 15x – 2 c. $4x^2 - 8x$ d. 5y e. $-12y^2 + 32y - 2$
f. -1 g. -2b + 3 h. $-4x^2 - 3x + 1$ i. $2x^3 - 4x^2y + xy^2 - y^3 + 8$

11) a. $12x^5$ b. $-10a^5$ c. $-12p^4q^4$ d. a^3b^4 e. $6x^2 - 15x + 3$
f. $-4a^3 + 4a^2 - 8a + 12$ g. $6x^4 - 8x^3 + 10x^2$ h. $-a^4 + a^3 + 2a$
i. $x^5y - \frac{1}{2}x^3y^2 + 2x^2y^3$ j. $x^3 - 2x^2 - 9x + 18$ l. $8x^3 - 6x^2 - 23x + 6$
m. $8x^2 + 10x + 3$ n. $6y^2 - 8y - 30$

12) a. x^5 b. y^2 c. $-4n^3$ d. $\frac{1}{a^4}$ e. $-\frac{1}{2b^5}$ f. $\frac{1x^2y^3}{2}$ g. $-\frac{1}{3p}$ h. $\frac{1}{2}$

13) a. $-4x^2 + x - 2$ b. $-m^3 + 2m^2 - m$ c. $1 - a^m + a^{2m}$
d. $6a^3b - 9a^2 + 1$ e. $4a^2 - 3a + 6$ f. $m^4 - 2m^2 + 4m$

14) $x^2 - 2x - 24$ 15) 2y

16) a. x – 5 b. 2y + 1 c. 2n + 1, resto: 10 d. 10a + 7
e. x – 9 f. –y + 9 g. $k^2 - 2k + 1$, resto: -1 h. $4b^2 + 4b + 1$

17) x - 2

18) a. $x^2 + 2xy + y^2$ b. $a^2 + 6a + 9$ c. $25x^2 + 20x + 4$
d. $9 - 24x + 16x^2$ e. $4x^2 + 4xy + y^2$ f. $25a^2 + 20ab + 4b^2$
g. $9a^2 + 24ab + 16b^2$ h. $x^2 - 10x + 25$

19) a. 5(x + y) b. b(a – c) c. 7(a + b – c) d. 2(4x – 5y) e. 3(9m + n)

f. $\frac{1}{4}(x+y)$ **g.** $b\left(\frac{2}{5}-\frac{8}{3}x\right)$ **h.** $\frac{6}{5}\left(x+\frac{2}{3}y\right)$ **i.** $8x^2(3-x)$

j. $a^2m(am^3-3m^2+\frac{1}{2})$ **l.** $5x^3(1+ax^3)$ **m.** $4a^3b^3(3b-4a)$ **n.** $7x^2(2y-3xz)$

o. $4a^3(2a^2b+3)$

20) $(a+b)(2x+y)$

21) **a.** $(2x+9)^2$ **b.** $(4-5x)^2$ **c.** $(1-10y)^2$ **d.** $(11x-5)(11x+5)$

e. $(8x-6y)(8x+6y)$ **f.** $\left(\frac{2a}{5}+\frac{b}{7}\right)\left(\frac{2a}{5}-\frac{b}{7}\right)$ **g.** $(7x+3y)^2$ **h.** $(mn-1)^2$

i. $\left(\frac{x}{2}-\frac{3y}{5}\right)\left(\frac{x}{2}+\frac{3y}{5}\right)$

22) **a.** $3(x+5)^2$ **b.** $-3a(x-3)^2$ **c.** $-5m\left(\frac{y}{2}+\frac{3x}{4}\right)\left(\frac{y}{2}-\frac{3x}{4}\right)$

d. $10(10-x)(10+x)$ **e.** $3(x-3)(x+3)$

23) $(m+n)(5-m-n)$

24) **a.** $\frac{x+3}{2}$ **b.** $\frac{2x-y}{2x+y}$ **c.** $\frac{5}{x+3}$ **d.** $\frac{2(m+n)}{m-n}$ **e.** $\frac{-6x^2}{3x-4+y}$ **f.** $3(a-1)$

g. $\frac{3x+1}{3}$ **h.** $\frac{a-4}{3b}$ **i.** $\frac{1}{2x-4}$ **j.** $\frac{x(x-2)}{2}$ **l.** $\frac{8}{5}$

25) $\frac{a}{4}$ **26)** $\frac{x+a}{x-a}$

27) **a.** $\Re$ - [8] **b.** $\Re - \left[\frac{1}{4}\right]$ **c.** $\Re$ - [-2 ou +2]

28) **a.** $\frac{14ax}{y}$ **b.** $-\frac{6}{a+3}$ **c.** $\frac{15x-2y}{20xy}$ **d.** $\frac{1+10a^2}{2a}$

29) 20

30) **a.** $\frac{3x^2}{x-y}$ **b.** $\frac{2xy}{x+y}$ **c.** $\frac{1}{x-1}$ **d.** $\frac{x}{y}$ **e.** $\frac{a-b}{a+b}$ **f.** $\frac{x-5}{4}$ **g.** $\frac{3+x}{a-1}$ **h.** $\frac{a-b}{a^2b^2}$

31) b **32)** 53

3. RADICAIS

3.1 Introdução

De modo geral podemos escrever:

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \quad \Leftrightarrow \quad b^n = a \qquad n \in N^* \text{ e } n \geq 2.}$$

onde

$$\boxed{\overset{\text{índice}}{n}\sqrt{\underset{\text{radicando}}{a}} = \underset{\text{raiz}}{b}}$$

índice

raiz

radicando

3.2 Propriedades dos radicais

★ $\sqrt[n]{a^n} = a$

$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad 4^3 = 64$

★ $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$

$\sqrt{5x^2} = \sqrt{5}.\sqrt{x^2} = x\sqrt{5}$

★ $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

$\dfrac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\dfrac{24}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

$\sqrt{\dfrac{4}{5}} = \dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

★ $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:p]{a^{m:p}}$

$\sqrt[8]{x^6} = \sqrt[8:2]{x^{6:2}} = \sqrt[4]{x^3}$

★ $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$

$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8} = 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

$\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{3}}} = \sqrt[24]{3}$

Multiplicam-se os índices e conserva-se o radicando.

★ $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

$10^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{10^1} = \sqrt{10}$

$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$

$9^{0,5} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$

Expoente fracionário:

Uma potência com expoente fracionário pode ser convertida numa raiz, cujo radicando é a base, o índice é o denominador do expoente, sendo o numerador o expoente do radicando.

★ $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p = \sqrt[n]{a^{m \cdot p}}$

$\left(\sqrt{7}\right)^2 = \sqrt{7^2} = 7$

$\left(\sqrt[4]{3}\right)^3 = \sqrt[4]{3^3} = \sqrt[4]{27}$

$\left(\sqrt[5]{2^2 \cdot 3}\right)^2 = \sqrt[5]{\left(2^2 \cdot 3\right)^2} = \sqrt[5]{2^4 \cdot 3^2}$

Potenciação de radicais:

Eleva-se o radicando à potência indicada e conserva-se o índice.

3.3 Simplificação de radicais

Simplificar um radical significa obter uma expressão mais simples equivalente ao radical dado. Para isso utilizamos as propriedades já citadas. Observe:

Fatoramos: $12 = 2^2.3$

$$\sqrt{12\ x^3} = \sqrt{2^2.3.x^2.x^1} = \sqrt{2^2}.\sqrt{3}.\sqrt{x^2}.\sqrt{x} = 2x\sqrt{3x}$$

Aplicamos *o produto de potências de mesma base* para extrair fatores do radicando.

Exercícios resolvidos:

a) $\sqrt{(x+5)^3} = \sqrt{(x+5)^2.(x+5)} = (x+5)\sqrt{(x+5)}$

b) $\sqrt{180\ x^5} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5.x^2.x^2.x} = 2 \cdot 3.x.x\ \sqrt{5x} = 6x^2\sqrt{5x}$

c) $\sqrt[4]{3^8} = \sqrt[4]{3^4.3^4} = 3^2 = 9$

Reciprocamente, para introduzir um fator no radical, *multiplica-se o expoente do fator pelo índice do radical*. Observe:

1. $3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2}$

2. $6x^2.\sqrt{5x} = \sqrt{6^2.(x^2)^2.5x} = \sqrt{180\ x^5}$

3.4 Operações com os radicais.

3.4.1. Adição e subtração de radicais semelhantes

Radicais de mesmo *índice* e mesmo *radicando* são semelhantes. Na adição e subtração de radicais semelhantes, operam-se os coeficientes e conserva-se o radical. Observe:

Coeficientes

$$11\sqrt{5x} - 7\sqrt{5x} + \sqrt{5x} = (11 - 7 + 1)\sqrt{5x} = 5\sqrt{5x}$$

Exercícios resolvidos:

a) $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 10\sqrt{2} = 8\sqrt{2} - 10\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$

b) $3\sqrt[3]{2} + 6\sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} = 9\sqrt[3]{2} - 6\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$

3.4.2. Multiplicação e divisão de radicais de mesmo índice

Multiplicam-se ou dividem-se os radicandos e os coeficientes entre si e dá-se ao produto ou quociente *o índice comum*. Observe:

$$\boxed{\sqrt[3]{5x}\ .\ (-2y.\sqrt[3]{4x^2})\ .\ y\sqrt[3]{x} = -2y^2.\sqrt[3]{20x^4}}$$

Exercícios resolvidos:

a) $\sqrt{2}.\sqrt{3} = \sqrt{2.3} = \sqrt{6}$

b) $\dfrac{-4\sqrt{6}}{8\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{2}.\sqrt{\dfrac{6}{2}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) $(-2a.\sqrt[4]{3})\ .\ 3a\sqrt[4]{5}\ .\ (-a.\sqrt[4]{2}) = 6a^3.\sqrt[4]{30}$

d) $\dfrac{\sqrt[4]{5}.\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{2}} = \dfrac{\sqrt[4]{15}}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\dfrac{15}{2}}$

3.5 Racionalização de denominadores

A fração $\dfrac{5}{\sqrt{3}}$ tem no seu denominador um *número irracional.* A racionalização de denominadores consiste na obtenção de uma fração com denominador racional, equivalente. A essa transformação, damos o nome de *racionalização de denominadores*.

Para racionalizar o denominador de uma fração devemos multiplicar os termos dessa fração por uma expressão com radical, denominado *fator racionalizante*, de modo a obter uma nova fração equivalente com denominador sem radical.

1º Caso: O denominador é um radical de índice 2. Neste caso, o *fator racionalizante* é o próprio radical do denominador. Observe:

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.\overbrace{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}}^{\text{Fator racionalizante}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{5}}{5}}$$

Exercícios resolvidos:

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} . \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{9}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

b) $\dfrac{-7}{2\sqrt{3}} = \dfrac{-7}{2\sqrt{3}} . \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{-7\sqrt{3}}{2\sqrt{9}} = \dfrac{-7\sqrt{3}}{2 . 3} = \dfrac{-7\sqrt{3}}{6}$

c) $\dfrac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{6}} = \dfrac{2\sqrt{2} . \sqrt{6}}{5\sqrt{6} . \sqrt{6}} = \dfrac{2\sqrt{12}}{5\sqrt{36}} = \dfrac{2\sqrt{12}}{5 . 6} = \dfrac{2\sqrt{12}}{30} = \dfrac{\sqrt{12}}{15}$

2º Caso: O denominador é uma soma ou diferença de dois termos em que um deles, ou ambos, são radicais. Neste caso, o fator racionalizante será *a expressão conjugada do denominador*, onde a expressão conjugada de **a + b** é **a – b**. Observe:

O fator racionalizante é
a expressão conjugada
do denominador.

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{5-2} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$$

$$\sqrt{5}+\sqrt{2} \rightarrow \sqrt{5}-\sqrt{2}$$

Na racionalização aparecerá no denominador um produto notável do tipo (a + b)(a – b) = a² - b². Por exemplo:

1. $(5 + 3x)(5 - 3x) = 5^2 - (3x)^2 = 25 - 9x^2$

2. $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{5}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = 5 - 2 = 3$

Exercício resolvido:

a) $\dfrac{5}{2+\sqrt{3}} = \dfrac{5}{2+\sqrt{3}} . \dfrac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \dfrac{5 . \left(2-\sqrt{3}\right)}{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \dfrac{5. \left(2-\sqrt{3}\right)}{4-3} = \dfrac{5\left(2-\sqrt{3}\right)}{1} = 5\left(2-\sqrt{3}\right)$

Exercícios

1) Decomponha o radicando em fatores primos e simplifique os radicais:

a) $\sqrt[8]{64} =$

b) $\sqrt{288} =$

c) $\sqrt[3]{40} =$

d) $-5\sqrt{320} =$

e) $\sqrt{\dfrac{16x^6y^4}{xy}} =$

f) $\sqrt[3]{a^4b^3c^7} =$

g) $\sqrt[3]{9a^6b^4} =$

h) $2\sqrt[3]{\dfrac{a^4b^3}{16x^4}} =$

2) Calcule:

a) $\sqrt{5} - 2\sqrt{5} + 10\sqrt{5} =$

b) $\sqrt{32} + 3\sqrt{2} - \sqrt{8} =$

c) $3\sqrt{3} + \sqrt{3} =$

d) $-12\sqrt[3]{5} - 8\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5} =$

e) $\sqrt{32} - 2\sqrt{12} - \sqrt{75} + 3\sqrt{72} =$

f) $3\sqrt{8a} - 5\sqrt{2a} + 2\sqrt{32a} - \sqrt{128a} =$

3) Efetue:

a) $\sqrt{3} \,.\, \sqrt{6} =$

b) $\left(-\sqrt[3]{2}\right).\left(-\sqrt[3]{4}\right) =$

c) $\dfrac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[4]{2}} =$

d) $\sqrt[5]{\dfrac{x^4}{y^3}} \,.\, \sqrt[5]{\dfrac{2x}{y^2}} =$

e) $6\sqrt[3]{ab} \,.\, 2\sqrt[3]{a^2b^2} \,.\, 5\sqrt[3]{a^5b^7} =$

f) $(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1) =$

g) $\left(\sqrt{7} + \sqrt{8}\right)\left(\sqrt{7} - \sqrt{8}\right) =$

h) $\left(2\sqrt{3} - 5\right)\left(2\sqrt{3} + 5\right) =$

i) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^6 =$

j) $\left(\sqrt[3]{2 \,.\, 3^2}\right)^2 =$

l) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}} =$

m) $\sqrt{\sqrt[3]{2}} =$

n) $\dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x + 2}} =$

o) $\dfrac{48\sqrt{x^2y}}{6\sqrt{xy}} =$

4) Dar a resposta sob forma de radical, das expressões seguintes:

a) $2^{\frac{3}{4}} =$

b) $2^{-\frac{1}{2}} =$

c) $\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} =$

d) $\left(\sqrt{2}\ .\ \sqrt{3}\right)^{\frac{1}{6}} =$

e) $5^{-\frac{2}{3}} =$

5) Racionalizar o denominador das frações seguintes:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{7}} =$

b) $\dfrac{3}{\sqrt{7}} =$

c) $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} =$

d) $\dfrac{2}{\sqrt{5} - 2} =$

e) $\dfrac{5}{4 - \sqrt{11}} =$

f) $\dfrac{6}{\sqrt{2} + 1} =$

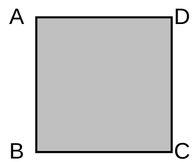
g) $\dfrac{9}{3\sqrt{3} - 2} =$

6) Encontre o valo numérico da expressão $2x^2 - 4x$, para $x = 4\sqrt{2} + 1$.

7) Calcule o valor da expressão $4y^{\frac{3}{4}}$, para y = 16.

8) Calcule o valor da expressão $10a^{-\frac{1}{4}}$, para a = 625.

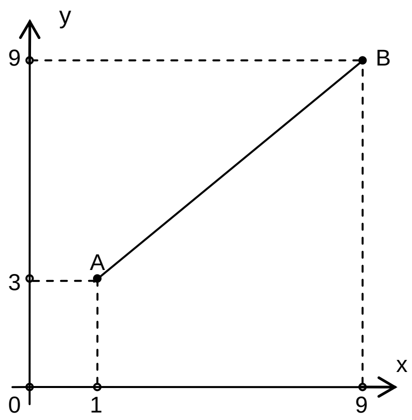
9) Um encanador quer colocar um cano condutor de água ligando os pontos A e C do terreno quadrangular indicado na figura. Sabendo que a área do terreno é de 484 m^2, quantos reais o encanador gastará na compra do cano, se o metro custa R$ 5,00.



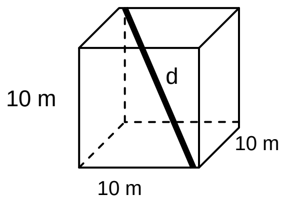
10) Quanto mede a diagonal do quadrado de lado $\sqrt{5}$ cm?
(Sugestão: Use o teorema de Pitágoras)

11) Qual é a altura de um triângulo eqüilátero de lado igual a $\sqrt{3}$ cm?
(Sugestão: Use o teorema de Pitágoras)

12) Qual é a distância entre os pontos A(1, 3) e B(9, 9)?



13) O cubo é um prisma em que todas as faces são quadradas. Determine a medida da diagonal do cubo da figura dada abaixo.



Respostas:

1) a. $\sqrt[4]{2^3}$ **b.** $12\sqrt{2}$ **c.** $2\sqrt[3]{5}$ **d.** $-40\sqrt{5}$ **e.** $4x^2y\sqrt{xy}$ **f.** $abc^2\sqrt[3]{ac}$

g. $a^2b\sqrt[3]{9b}$ **h.** $\frac{ab}{x}\sqrt[3]{\frac{a}{2x}}$

2) a. $9\sqrt{5}$ **b.** $5\sqrt{2}$ **c.** $4\sqrt{3}$ **d.** $-19\sqrt[3]{5}$ **e.** $22\sqrt{2}-9\sqrt{3}$ **f.** $\sqrt{2a}$

3) a. $3\sqrt{2}$ **b. 2 c.** $\sqrt{2}$ **d.** $\frac{x}{y}\sqrt[5]{2}$ **e.** $60a^2b^3\sqrt[3]{a^2b}$ **f. 4 g. -1 h. -13**

i. 4 j. $3\sqrt[3]{12}$ **l.** $\sqrt[9]{3}$ **m.** $\sqrt[6]{2}$ **n.** $\sqrt{x-2}$ **o. 8** $\sqrt{x}$

4) a. $\sqrt[4]{2^3}$ **b.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **c.** $\sqrt[4]{2}$ **d.** $\sqrt[12]{6}$ **e.** $\frac{1}{\sqrt[3]{25}}$

5) a. $\frac{\sqrt{7}}{7}$ **b.** $\frac{3\sqrt{7}}{7}$ **c.** $\frac{\sqrt{6}}{4}$ **d.** $2.(\sqrt{5}+2)$ **e. (** $4+\sqrt{11}$ **)**

f. $6(\sqrt{2}-1)$ **g.** $\frac{9(3\sqrt{3}+2)}{23}$ **6) 62**

7) 32 **8) 2** **9) R$ 155,56** **10) d =** $\sqrt{10}$ **cm**

11) h = $\frac{3}{2}$ **cm** **12) d = 10 unid.** **13) d =** $10\sqrt{3}$ cm

4. EQUAÇÕES

4.1 Introdução

Um breve relato sobre a história das Equações.

As equações foram introduzidas pelo conselheiro do rei da França, Henrique IV, o francês *François Viète*, nascido em 1540. Através da matemática *Viète* decifrava códigos secretos que era mensagens escritas com a substituição de letras por numerais. Desta forma *Viète* teve uma idéia simples mas genial: fez o contrário, ou seja, usou letras para representar os números nas equações.

O sinal de igualdade foi introduzido por *Robert Recorde* (matemático inglês) que escreveu em um de seus livros que para ele não existiam duas coisas mais parecidas que duas retas paralelas. Um outro matemático inglês, *Thomas Harriot*, gostou da idéia de seu colega e começou a desenhar duas retas para representar que duas quantidades são iguais. Observe:

$$400 \text{ cm} \;=\!=\!=\; 4 \text{ m}$$

Assim, diminuiu-se um pouco este sinal, =, passando a usá-lo nas equações de *Viète*.

Até o surgimento deste sistema de notação as equações eram expressas em palavras e eram resolvidas com muita dificuldade. A notação de *Viète* significou o passo mais decisivo e fundamental para construção do verdadeiro idioma da Álgebra: as equações. Por isso, *Fraçois Viète* é conhecido como o Pai da Álgebra.

Podemos dizer que equação é uma igualdade entre duas expressões algébricas. Observe:

$2x - 1 = x + 3$	$4a^3 - a^2 + 3a - 2 = 0$	$2y^2 - 5y = 0$
Equação Polinomial do 1º Grau na incógnita **x**.	Equação Polinomial do 3º Grau na incógnita **a**.	Equação Polinomial do 2º Grau na incógnita **y**.

> **Incógnita**: Quantidade desconhecida de uma equação ou de um problema; aquilo que é desconhecido e se procura saber; enigma; mistério.
>
> *(Dicionário Silveira Bueno – Editora LISA)*

Os termos localizados à esquerda do sinal de igualdade formam o *1º membro* da equação, e os localizados à direita formam o *2º membro*. Observe:

$$\underbrace{2x - 1}_{1^{\circ}\ \text{membro}} = \underbrace{x + 3}_{2^{\circ}\ \text{membro}}$$

O valor atribuído à incógnita **x** para esta equação que torna verdadeira a igualdade é x = 4. Logo o 4 é a solução da equação, denominado *raízes da equação*.

4.2 Equação Polinomial do 1º Grau

Denomina-se *equação do 1º Grau* na incógnita **x**, toda equação da forma:

ax + b = 0 , com a e b $\in$ IR e a $\neq$ 0

4.2.1. Solução da equação polinomial do 1º Grau.

Resolver uma equação do 1º Grau significa determinar a suas raízes. Observe:

Exercícios resolvidos:

a) 2x - 1 = x + 3

2x – x = 3 + 1

x = 4 S = { 4 }

b) 2(- 3 – y) + 4 = y + 6

- 6 – 2y + 4 = y – 6

- 2y – y = + 6 - 4 + 6

- 3y = + 8 **. (- 1)**

3y = - 8

$y = -\frac{8}{3}$ S = $\left\{-\frac{8}{3}\right\}$

c) $\frac{3x - 2}{2} - \frac{3x + 1}{3} = \frac{4x - 6}{5}$

m.m.c. (2, 3, 5) = 30

$$\frac{15.(3x - 2) - 10.(3x + 1) = 6.(4x - 6)}{30}$$

15(3x – 2) – 10(3x + 1) = 6(4x – 6)

45x – 30 – 30x – 10 = 24x – 36

45x – 30x – 24x = - 36 + 30 + 10

-9x = 4 **.(- 1)**

$x = -\frac{4}{9}$ S = $\left\{-\frac{4}{9}\right\}$

VERIFICAÇÃO OU "PROVA REAL"

Substitui-se a raiz encontrada em cada um dos membros da equação dada. Os valores numéricos devem ser iguais. Observe:

2**x** - 1 = **x** + 3

2 . **4** – 1 = **4** + 3

8 – 1 = 7

7 = 7

Logo a solução para x = 4 é verdadeira.

d) Qual é o número cujo dobro aumentado de 9 é igual ao seu quádruplo diminuído de 21?

Representamos o número desconhecido por x. Então,

2x + 9 = 4x – 21

2x – 4x = - 21 – 9

- 2x = - 30 .(- 1)

2x = 30

$x = \frac{30}{2}$

x = 15 S = {15}

e) Um litro do vinho A custa R$ 6,00, e o litro do tipo B, R$ 4,80. Quantos litros de vinho A se deve misturar a 100 litros de vinho B para se obter um vinho C, que custe R$ 5,50 o litro?

	A	B	C
Preço por litro (R$)	6,00	4,80	5,50
Volume (em Litros)	x	100	100 + x

6 . x + 4,8 . 100 = 5,5 . (100 + x)

6x + 480 = 550 + 5,5x

6x – 5,5x = 550 – 480

0,5x = 70

$x = \frac{70}{0{,}5}$

x = 140

Logo, devem-se misturar 140 litros do vinho A.

4.3 Equação Polinomial do 2º Grau

Denomina-se *equação do 2º Grau* na incógnita **x**, toda equação da forma:

$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, com a, b e c $\in$ IR e a $\neq$ 0

Nas equações escritas na forma $ax^2 + bx + c = 0$, chamamos de a, b e c de *coeficientes*. E a equação está na forma reduzida.

Observe:

★ $x^2 - 5x + 6 = 0$ a = 1, b = - 5 e c = 6

★ $7x^2 - x = 0$ a = 7, b = 1 e c = 0

★ $x^2 - 36 = 0$ a = 1, b = 0 e c = - 36

4.3.1. Solução de Equações de 2º Grau

Resolver uma equação do 2º Grau significa determinar as suas raízes. Observe os casos:

1º Caso. Se b = 0 e c = 0, dizemos que a equação é incompleta. Observe:

$$\mathbf{a\,x^2 = 0}$$

Exercício resolvido:

1) $3\,x^2 = 0$

$x^2 = \frac{0}{3}$

$x = 0$ S = {0}

2º caso: Se c = 0 e b $\neq$ 0, dizemos que a equação é incompleta. Observe:

$$\mathbf{a\,x^2 + bx = 0}$$

Exercício resolvido:

1) $3\,x^2 - 12\,x = 0$

$x \cdot (3\,x - 12) = 0$

$x' = 0$ ou $3\,x - 12 = 0$

$3\,x = 12$

$x'' = 4$ S = {0, 4}

3º caso: Se b = 0 e c $\neq$ 0, dizemos que a equação é incompleta. Observe:

$$\mathbf{ax^2 + c = 0}$$

Exercício resolvido:

1) $x^2 - 4 = 0$

$x^2 = 4$

$x = \pm\sqrt{4}$

$x' = 2$ ou $x'' = -2$ $S = \{-2, 2\}$

4º caso: Se $b \neq 0$ e $c \neq 0$, dizemos que a equação é completa. Observe:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

A resolução da *equação completa* de 2º grau é obtida através de uma fórmula que foi demonstrado por Bhaskara, matemático hindu nascido em 1114. Por meio dela sabemos que o valor da incógnita satisfaz a igualdade:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2a}$$

Denominamos *discriminante* o radicando $b^2 - 4.a.c$ que é representado pela letra grega Δ (delta). Assim, $\Delta = b^2 - 4.a.c$

Podemos escrever a fórmula de Bhaskara como: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

De acordo com o discriminante, temos três casos a considerar:

$\Delta > 0 \rightarrow$ têm-se duas raízes reais e *diferentes;*

$\Delta = 0 \rightarrow$ têm-se duas raízes reais e *iguais*;

$\Delta < 0 \rightarrow$ têm-se duas raízes *imaginárias*.

OBS: Nunca teremos a = 0, pois se houver, não existirá a equação de segundo grau visto que o x^2 seria anulado.

Exercício resolvido:

1) $x^2 - 9x + 20 = 0$

$a = 1$
$b = -9$
$c = 20$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4.1.20}}{2.1}$$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 80}}{2}$$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$x = \frac{9 \pm 1}{2} \qquad x' = \frac{9+1}{2} = \frac{10}{2} = 5 \qquad x'' = \frac{9-1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$S = \{4, 5\}$

4.3.2. Relação entre os Coeficientes e as Raízes.

Essas relações permitem obter a soma e o produto das raízes sem resolver a equação. Denominamos essas relações de *Girard*.

★ Soma das raízes (S) $\rightarrow$ **S** = x’ + x”

★ Produto das raízes (P) $\rightarrow$ **P** = x’ . x”

Logo, a equação será $\rightarrow$ ax^2 **- S**x + **P** = 0

Importante: Esta relação só é verdadeira para a = 1.

Exercícios resolvidos:

1) Se x’ = 4 e x” = 5 a equação será:

S = 4 + 5 = 9

P = 4 . 5 = 20

Logo a equação será $x^2 - 9x + 20 = 0$

2) Se $x^2 - 8x - 9 = 0$, as raízes da equação serão:

S = 9 – 1 = 8

P = 9 . (-1) = -9

Logo as raízes serão x’ = -1 e x” = 9

4.3.3. Fatorando um trinômio do 2º Grau

Podemos expressar um trinômio do 2º Grau $ax^2 + bx + c$, com a $\neq 0$, como um produto de binômios. Para fatorar, basta encontrar as raízes da equação.

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a.(x - x').(x - x'')}$$

Exercícios resolvidos:

1. Fatorar o trinômio do 2º Grau $x^2 - 7x + 10$.

As raízes da equação $x^2 - 7x + 10 = 0$ pela relação SP são:

S = 2 + 5 = 7

P = 2 . 5 = 10

Logo x’ = 2 e x” = 5. Como a = 1, temos a seguinte fatoração:

1.(x – 2)(x – 5) = (x – 2)(x – 5)

2. Fatorar o trinômio $2x^2 - 5x - 3$.

As raízes da equação $2x^2 - 5x - 3 = 0$ pela fórmula de Bhaskara são:

x’ = 3 e x” = $-\frac{1}{2}$ e como a = 2, temos a seguinte fatoração:

$$2.(x-3)\left(x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 2.(x-3)\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

4.3.4. Equações Irracionais

Uma equação é denominada irracional quando apresenta incógnita sob radical ou incógnita com expoente fracionário.

Resolução de uma equação irracional

Durante o processo de solução de uma equação irracional com índice do radical igual a 2 (ou outro qualquer) é necessário elevar ao quadrado (ou em caso de expoente diferente de 2, eleva-se ao que se fizer necessário) ambos os membros da equação. Esta operação pode provocar o aparecimento de raízes estranhas, isto é, valores que realmente não verificam a equação original. Este fato obriga que toda raiz obtida *deve* ser substituída na equação original verificando a igualdade.

Exercícios Resolvidos:

1) Determinar as raízes da equação: $\sqrt{x-5}-4=0$.

$$\sqrt{x-5}=4$$
$$\left(\sqrt{x-5}\right)^2=4^2$$
$$x-5=16$$
$$x=21$$

Verificação:

$$\sqrt{21-5}-4=0$$
$$\sqrt{16}-4=0$$
$$0=0$$

Logo, S = {21}

2) Determinar as raízes da equação: $\sqrt{x+4}-2=x$.

$$\sqrt{x+4}=x+2$$
$$\left(\sqrt{x+4}\right)^2=(x+2)^2$$
$$x+4=x^2+4x+4$$
$$x^2+3x=0$$

As raízes da equação do 2º grau são:

$$x(x+3)=0 \quad e \quad x+3=0$$
$$x'=0 \qquad x''=-3$$

Verificando as raízes na equação irracional:

$$\sqrt{x+4}-2=x$$

Para x' = 0

$$\sqrt{0+4}-2=0$$
$$2-2=0$$
$$0=0$$

Para x" = - 3

$$\sqrt{-3+4}-2=-3$$
$$\sqrt{1}-2=-3$$
$$1-2\neq-3$$
$$-1\neq-3$$

Observe que apenas x = 0 verifica a igualdade, assim a raiz da equação original é S = {0}.

Exercícios

1) Resolver as seguintes equações do 1º Grau:

a) $4x = 8$

b) $-5x = 10$

c) $7 + x = 8$

d) $3 - 2x = -7$

e) $16 + 4x - 4 = x + 12$

f) $8 + 7x - 13 = x - 27 - 5x$

g) $\frac{2x}{3} = \frac{3}{4}$

h) $\frac{1}{4} = \frac{3x}{10}$

i) $9x + 2 - (4x + 5) = 4x + 3$

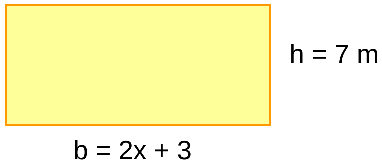
j) $3.(2 - x) - 5.(7 - 2x) = 10 - 4x + 5$

l) $\frac{x-2}{3} - \frac{12-x}{2} = \frac{5x-36}{4} - 1$

m) $\frac{5x+3}{8} - \frac{3-4x}{3} + \frac{x}{2} = \frac{31}{2} - \frac{9-5x}{6}$

2) Resolva a equação literal 5x – 3a = 2x + 11a na incógnita x.

3) A área A de um retângulo é dada pela equação A = b . h, em que b é a medida da base e h é a medida da altura. Se o retângulo tem 91 m^2 de área, qual a medida, em metros, da base b?



4) Calcule x de modo que $\frac{3x}{x+2} + \frac{4}{x+2} = -3$.

5) Resolva as equações:

a) $\frac{2}{y} + \frac{9}{2y} = -\frac{13}{4}$

b) $\frac{4}{b} + \frac{2}{3} = 2$

c) $10 - \frac{5}{x} = 15$

6) Determinar as raízes das seguintes equações quadráticas:

a) $x^2 - 7x + 6 = 0$

b) $x^2 + 3x - 28 = 0$

c) $3x^2 - 5x + 2 = 0$

d) $16x^2 + 16x + 3 = 0$

e) $4x^2 - 16 = 0$

f) $2x^2 - 18 = 0$

g) $3x^2 = 5x$

h) $2x^2 + 8x = 0$

i) $(2x - 3)^2 = (4x - 3)^2$

j) $x(x - 1) = x(2x - 1) - 18$

7) Use a relação do SP e determinar mentalmente as raízes das equações:

a) $x^2 - 6x + 5 = 0$

b) $x^2 + 2x - 15 = 0$

c) $x^2 - 4x - 12 = 0$

d) $x^2 - 10x + 21 = 0$

e) $x^2 + 5x - 50 = 0$

8) Fatore os trinômios:

a) $x^2 - 6x + 8 =$

b) $y^2 - 2y - 8 =$

c) $x^2 + 7x + 6 =$

d) $3x^2 - 12x + 9 =$

e) $4y^2 - 3y - 10 =$

f) $9x^2 - 12x + 4 =$

9) Resolva as equações:

a) $6(x - 10) = 0$

b) $-9(1 - 4y) = 0$

c) $(4x - 8)(x + 1) = 0$

d) $(3 - y)(3 + y) = 0$

e) $\left(m + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{m}{2} - 1\right) = 0$

f) $y(2y - 3)(y - 8) = 0$

g) $(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$

h) $(m + 4)(m^2 - 9) = 0$

i) $3(x - 2)^2 = 12$

10) Resolva as equações incompletas:

a) $x^2 + 9x = 0$

b) $y^2 - 7y = 0$

c) $-8x^2 + 2x = 0$

d) $\frac{x^2}{4} + \frac{3x}{2} = 0$

e) $2y^2 - 32 = 0$

f) $3x^2 - 4 = 0$

g) $2x^2 - \frac{1}{50} = 0$

11) Resolva as equações irracionais:

a) $x^{\frac{1}{2}} - 4 = 0$

b) $\sqrt{x+1} - 2 = 0$

c) $x - 2x^{\frac{1}{2}} = 15$

d) $x - \sqrt{9 - x^2} = 3$

e) $\sqrt{\sqrt{5x+1}} = 3$

f) $\sqrt{2x-1} - \sqrt{x-1} = 0$

g) $\sqrt{x+9} - \sqrt{x} = \sqrt{x-15}$

h) $\sqrt{2\sqrt{x-5}} = \sqrt{13-x}$

12) Simplifique as frações algébricas:

a) $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1} =$

b) $\frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + x - 6} =$

c) $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4} =$

d) $\frac{x^2 - 5x}{3x^2 - 18x + 15} =$

e) $\frac{x^2 - 8x + 15}{2x^2 - 4x - 6} =$

f) $\frac{-x^2 + 7x - 12}{x^2 - 8x + 16} =$

13) Quais são as raízes da equação biquadrada $4x^4 - 9x^2 + 2 = 0$?

Respostas:

1) a. {2} b. {-2} c. {1} d. {5} e. {0} f. {-1} g. $\left\{\frac{9}{8}\right\}$ h. $\left\{\frac{5}{6}\right\}$ i. {6}

j . {4} l. {8} m. {9}

2) $\left\{\frac{14a}{3}\right\}$ **3)** b = 13m **4)** $\left\{-\frac{5}{3}\right\}$

5) a. {- 2} b. {3} c. {-1}

6) a. {1, 6} b. {-7, 4} c. $\left\{\frac{2}{3}, 1\right\}$ d. $\left\{-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right\}$ e. {-2, 2} f. {-3, 3}

g. $\left\{0, \frac{5}{3}\right\}$ h. {-4, 0} i. {-1, 0} j. $\left\{-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\right\}$

7) a. {1, 5} b. {-5, 3} c. {-2, 6} d. {3, 7} e. {-10, 5}

8) a. (x – 4)(x – 2) b. (y – 4)(y + 2) c. (x + 1)(x + 6) d. 3(x – 3)(x – 1)

e. 4(y – 2)$\left(y + \frac{5}{4}\right)$ f. 9$\left(x - \frac{2}{3}\right)^2$

9) a.{10} b. $\left\{\frac{1}{4}\right\}$ c. {-1, 2} d. {-3, 3} e. $\left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$ f. $\left\{0, \frac{3}{2}, 8\right\}$

g. {1, 2, 3} h. {-4, -3, 3} i. {0, 4}

10) a. {-9, 0} b. {0, 7} c. {0, $\frac{1}{4}$} d. {-6, 0} e. {-4, 4} f. $\left\{-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right\}$ g. $\left\{-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right\}$

11) a. S = {16} b. S = {3} c. S = {25} d. S = {3} e. S = {16} f. ∅

g. S = {16} h. {9}

12) a. $\frac{x-1}{x+1}$ b. $\frac{x+5}{x+3}$ c. $\frac{x-2}{x+2}$ d. $\frac{x}{3(x-1)}$ e. $\frac{x-5}{2(x+1)}$ f. $\frac{3-x}{x-4}$

13) S = $\left\{\pm\sqrt{2}, \pm\frac{1}{2}\right\}$

4.4 Inequações

4.4.1 Introdução

Uma inequação é uma sentença matemática aberta expressa por uma desigualdade.

Os símbolos de desigualdades são:

a ≠ b (**a** é diferente de **b**)
a > b (**a** é maior do que **b**)
a < b (**a** é menor do que **b**)
a ≥ b (**a** é maior ou igual a **b**)
a ≤ b (**a** é menor ou igual a **b**)

Estes símbolos de desigualdade permitem uma comparação entre duas grandezas.

4.5 Inequação do 1º grau

Inequação do 1º grau é uma desigualdade condicionada em que a incógnita é de 1º grau. Podem ser escritas nas seguintes formas:

ax + b < 0　　　　ax + b > 0

ax + b ≤ 0　　　　ax + b ≥ 0, com a e b ∈ IR e a ≠ 0.

Resolver uma inequação do 1º Grau significa encontrar todos os números que tornem a inequação verdadeira.

Por exemplo, vamos determinar o conjunto solução da inequação $3x + 2 < 8$.

$$\underbrace{3x + 2}_{1^{\circ}\ membro} < \underbrace{8}_{2^{\circ}\ membro}$$

$3x + 2 < 8$

$3x < 8 - 2$

$3x < 6$

$x < \frac{6}{3}$

$x < 2$

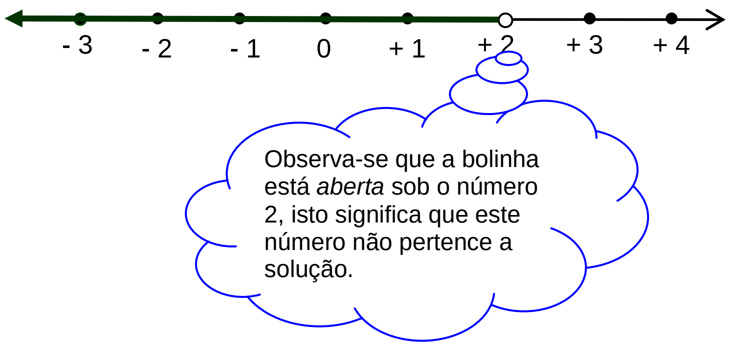
Verificação:
$x = 1$
$3x + 2 < 8$
$3 \,.\, 1 + 2 < 8$
$5 < 8$ (**V**)

Verificação:
$x = 0$
$3x + 2 < 8$
$3 \,.\, 0 + 2 < 8$
$2 < 8$ (**V**)

Observa-se que as soluções são satisfeitas para os números menores que 2.

logo, $S = \{ x \in IR \mid x < 2\}$

Geometricamente, essa solução é representada na reta real da seguinte forma:



Exercício resolvido:

1) $-5x + 6 \geq 3(1 - x) + 9$

$-5x + 6 \geq 3 - 3x + 9$

$-5x + 3x \geq 3 + 9 - 6$

$-2x \geq 6 \quad \mathbf{.\,(-1)}$

$2x \leq -6$

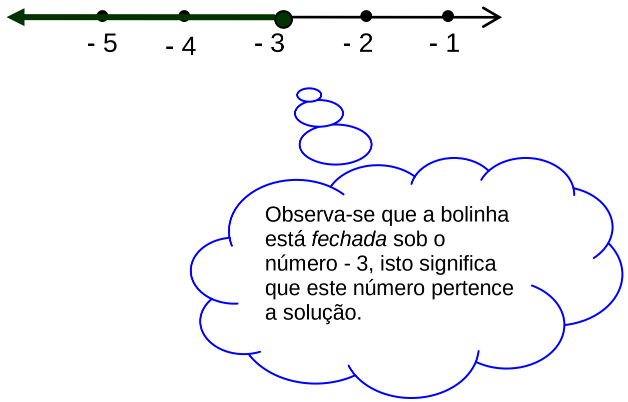
$x \leq \frac{-6}{2}$

$x \leq -3$

Sempre que multiplicar ou dividir a inequação por um número negativo, *inverte-se* o sinal da desigualdade.

$S = \{ x \in IR \mid x \leq -3\}$

Geometricamente a solução será:



4.6 Inequação do 2º grau

As inequações do 2º Grau na variável *x* podem ser escritas nas seguintes formas:

$ax^2 + bx + c \geq 0$,

$ax^2 + bx + c > 0$,

$ax^2 + bx + c \leq 0$ e

$ax^2 + bx + c < 0$, com a, b, e c $\in$ IR e $a \neq 0$.

Para resolver uma inequação do 2º Grau devemos proceder do seguinte modo:

★ Realizar um estudo do sinal da função $y = ax^2 + bx + c$;

★ Determinar os valores de *x* que atendam a desigualdade da inequação.

Exercício resolvido:

1) Resolver a inequação $x^2 - 5x + 4 \geq 0$.

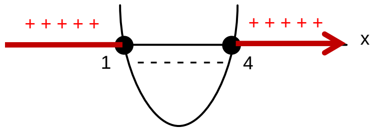
Solução:

i) As raízes da equação são x' = 4 e x" = 1;

ii) Traçar um esboço do gráfico e fazer o estudo do sinal;

iii) Como o sinal de desigualdade é $\geq$, temos *bolinha fechada*;

iv) Como o sinal de desigualdade é $\geq$, ou seja, maior ou igual, queremos os sinais positivos;



S = { x $\in$ IR | x $\leq$ 1 ou x $\geq$ 4}

2) Resolver a inequação $x^2 - 5x + 4 < 0$.

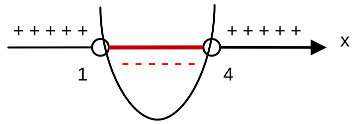
Solução:

i) As raízes da equação são x' = 4 e x" = 1;

ii) Traçar um esboço do gráfico e fazer o estudo do sinal;

iii) Como o sinal de desigualdade é <, temos *bolinha aberta*;

iv) Como o sinal de desigualdade é <, ou seja, menor, queremos os sinais negativos;



S = { x $\in$ IR | 1 < x < 4}

Exercícios

1) Resolver as seguintes inequações do 1º Grau:

a) $2(x+1)+3x > 5-7x$

b) $\frac{2}{5}x - \frac{1}{2} \geq \frac{4x}{5} - 1$

c) $\frac{7x}{3} - 7 \leq x + \frac{2}{3}$

d) $5x - 2(x+2) \geq 1 - (3-4x)$

e) $\frac{3(x+1)}{2} - \frac{x-1}{4} \leq \frac{1}{2}$

f) $\frac{5(3x+1)}{2} - \frac{3x}{4} > \frac{5(1-3x)}{8} + \frac{18}{3}$

g) $\frac{x-1}{3} + \frac{4(1-x)}{2} > \frac{x}{4} + \frac{2-x}{6}$

2) Determine o conjunto solução das inequações:

a) $x^2 - 3x \geq 0$

b) $-2x^2 - 10x \leq 0$

c) $-x^2 + 16 > 0$

d) $2x^2 - 16 < 0$

e) $x^2 - 5x + 6 > 0$

f) $x^2 + 5x + 4 \leq 0$

g) $\frac{x^2-4}{3} - \frac{x-2}{2} \leq 0$

h) $(2x-5)(x-4) - 7 \geq (x-2)(x-3)$

i) $4x^2 + (x+2)^2 < 1$

3) Determine os valores inteiros de x que satisfazem a inequação

$4x(x-1)(3-x)\left(\frac{x}{2}+1\right) > 0$.

Respostas:

1) **a**. $\{x \in \Re \mid x > \frac{1}{4}\}$ b. $\{x \in \Re \mid x \leq \frac{5}{4}\}$ c. $\{x \in \Re \mid x \leq \frac{23}{4}\}$

d. $\{x \in \Re \mid x \leq -2\}$ e. $\{x \in \Re \mid x \leq -1\}$ f. $\{x \in \Re \mid x > \frac{11}{23}\}$

g. $\{x \in \Re \mid x < \frac{16}{21}\}$

2) a. $\{x \in \Re \mid x \leq 0 \text{ ou } x \geq 3\}$ b. $\{x \in \Re \mid x \leq -5 \text{ ou } x \geq 0\}$

c. $\{x \in \Re \mid -4 < x < 4\}$ d. $\{x \in \Re \mid -2\sqrt{2} < x < 2\sqrt{2}\}$

e. $\{x \in \Re \mid x < 2 \text{ ou } x > 3\}$ f. $\{x \in \Re \mid -4 \leq x \leq -1\}$

g. $\{x \in \Re \mid -\frac{1}{2} \leq x \leq 2\}$ h. $\{x \in \Re \mid x \leq 1 \text{ ou } x \geq 7\}$ i. $\varnothing$

3) $x = -1$ ou $x = 2$

5 TRIGONOMETRIA

5.1 Introdução

Considere um triângulo retângulo, o lado oposto ao ângulo reto é chamado de hipotenusa e os outros dois lados perpendiculares são os catetos.

Na figura 1:

- $\overline{BC}$ é a hipotenusa
- $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são os catetos
- α é o ângulo agudo

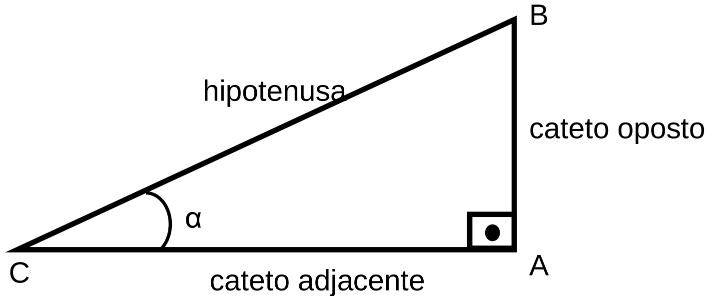


Figura 1. Nomenclatura do triângulo retângulo

O lado oposto ao ângulo agudo tomado como referencia é chamado de *cateto oposto* e cateto que está sobre um dos lados desse ângulo chama-se *cateto adjacente*, como mostra a figura 1.

Relações trigonométricas no triângulo retângulo

$$sen\ \alpha = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$$

$$cos\ \alpha = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}$$

$$tg\ \alpha = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$$

5.2 Ciclo trigonométrico

Circunferência orientada

Em trigonometria, convencionou-se estabelecer sentido positivo o sentido anti-horário e o sentido negativo o sentido horário.

A circunferência orientada de centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas de raio um (r = 1) é denominada circunferência trigonométrica. Ver figura 2.

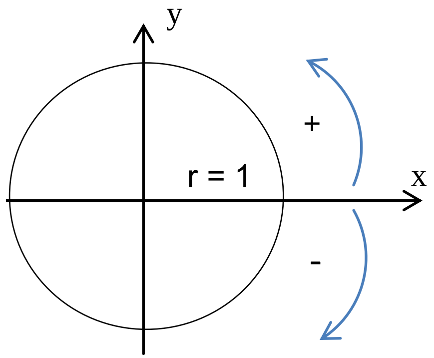


Figura 2. Circunferência trigonométrica.

As retas x e y, eixos do sistema de coordenadas cartesianas, dividem a circunferência trigonométrica em quatro partes iguais, chamadas quadrantes, como mostra a figura 3.

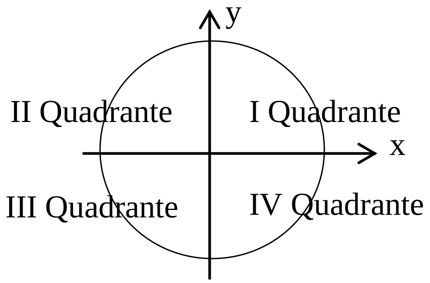


Figura 3. Nomenclatura dos quadrantes.

5.3 Funções circulares

Consideramos o ciclo trigonométrico no qual marcamos o ponto M, que é imagem, no ciclo do número real θ, conforme indica a figura 4.

i) Definimos como seno do ângulo θ, a ordenada do ponto M, e indicamos:

$$sen\,\theta = \overline{OM''}$$

ii) Definimos como cosseno do ângulo θ, a abscissa do ponto M, e indicamos:

$$\cos\theta = \overline{OM'}$$

iii) Definimos como tangente do ângulo θ, a medida do segmento $\overline{AT}$·, e indicamos:

$$tg\,\theta = \overline{AT}$$

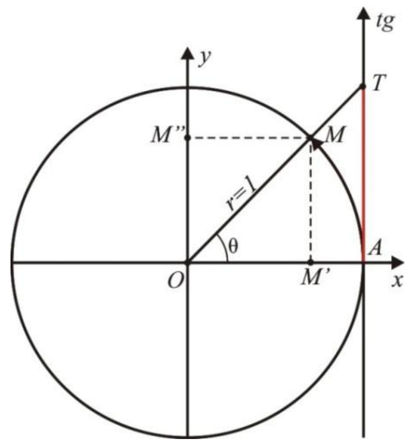


Figura 4. Funções circulares no ciclo trigonométrico.

Algumas razões trigonométricas fundamentais

	30^o	45^o	60^o
sen α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

5.4 Unidades de medidas

Grau:

Um grau é definido como a medida do ângulo central subtendido por um arco igual a $\frac{1}{360}$ da circunferência que contém o arco, como mostra a figura 5.

Símbolo: Grau (^{o})

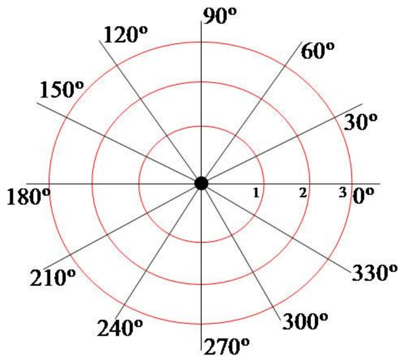


Figura 5. Alguns ângulos do ciclo trigonométrico

Radianos:

O radiano (símbolo: rad) é definido como a medida de um ângulo central subtendido por um arco igual ao raio da circunferência que contém o arco.

Relação entre as unidades:

Graus	Radianos
0	0
90^o	$\frac{\pi}{2}$
180^o	π
270^o	$\frac{3\pi}{2}$
360^o	2π

A figura 6 mostra o ciclo trigonométrico relacionando as medidas dos arcos em graus e radianos com as medidas do seno e do cosseno.

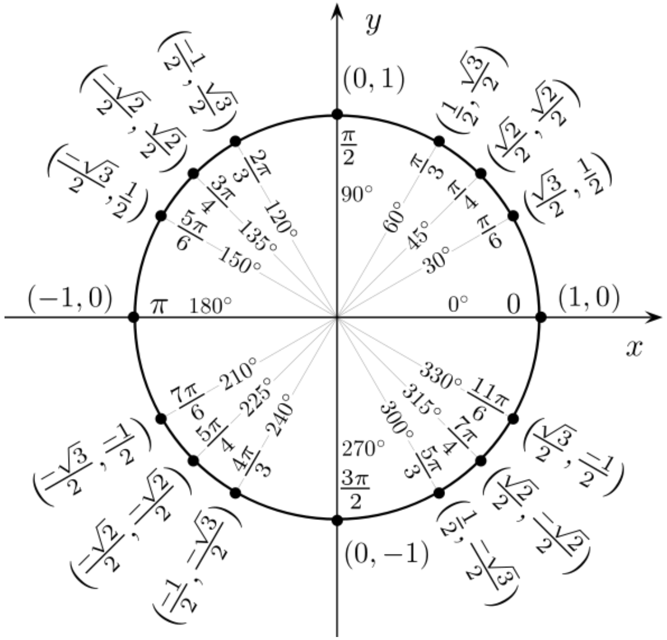
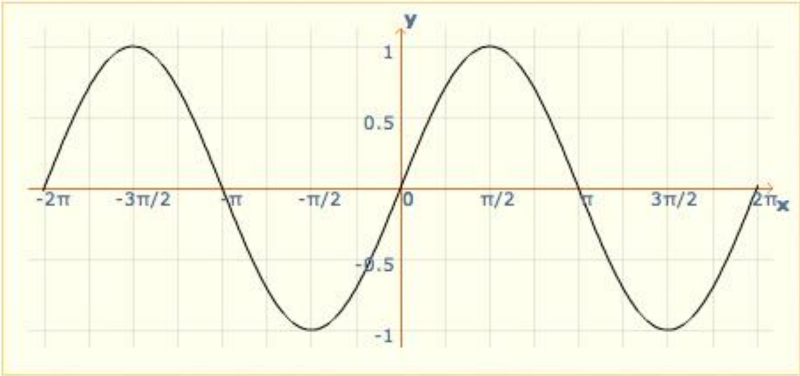


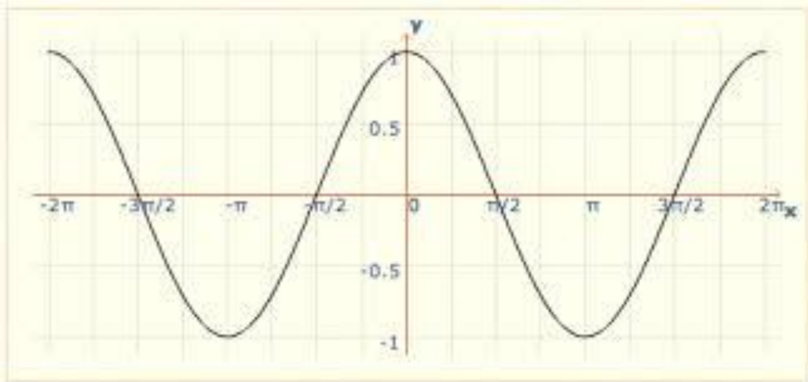
Figura 6. Alguns ângulos em graus e radianos no ciclo trigonométrico

5.5 Representação gráfica

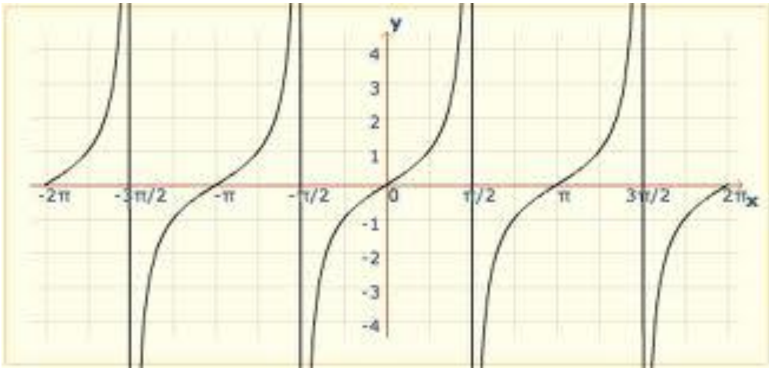
Seno



Cosseno

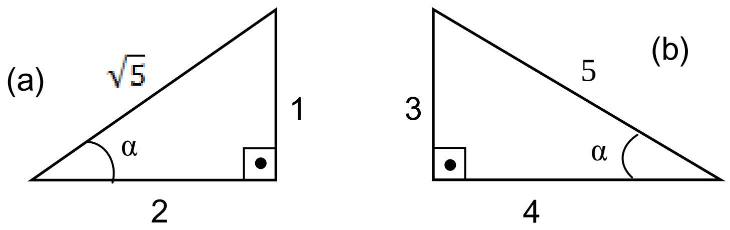


Tangente

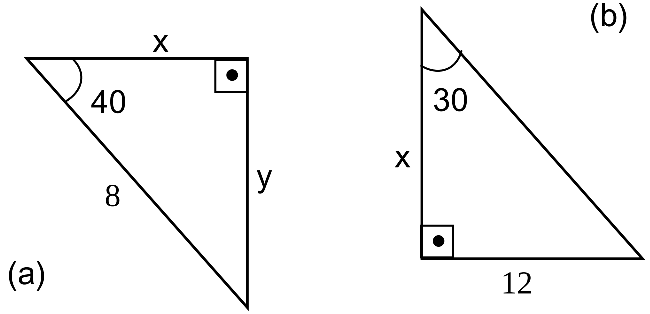


Exercícios

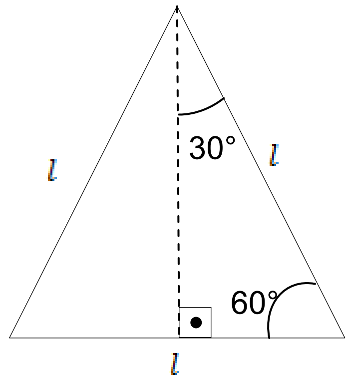
1) Calcule $sen\,\alpha,\ \cos\alpha\ \ e\ \ tg\,\alpha$.



2) Calcule o valor de x e y no triangulo dado abaixo.



3) Considere o triângulo equilátero e calcule as medidas de $sen\,30°, \cos 30°, tg\,30°,\ \ sen\,60°,\ \cos 60°\ e\ tg\,60°$.



4) Expresse em radianos:
   a) 60^o
   b) 210^o
   c) 350^o
   d) 150^o
   e) 12^o
   f) 2^o

5) Expresse em graus:
   a) $\frac{10\pi}{9}$
   b) $\frac{11\pi}{18}$
   c) $\frac{\pi}{9}$
   d) $\frac{\pi}{20}$
   e) $\frac{4}{3}\pi$
   f) $\frac{3}{5}\pi$

6) Quantas voltas completas dá o ângulo abaixo e em que quadrante o ângulo se situa:
   a) 1810^o b) $\frac{25\pi}{4}$ c) -1200^o

7) Construa o gráfico das seguintes funções, no intervalo $[\,0, 2\pi]$. Identifique o Domínio e a Imagem.

a) $y = 3sen\,x$

b) $y = sen\ 2x$
c) $y = \cos 6x$
d) $y = -\cos x$

8) Determine o valor das seguintes funções:
a) $sen\ 900°$
b) $sen\ (-2130°)$
c) $sen\ 765°$
d) $\cos 6\pi$
e) $\cos 11\pi$
f) $\cos\frac{7\pi}{2}$
g) $tg\ (-540°)$
h) $tg\ \frac{13\pi}{3}$
i) $tg\ 1500°$

Respostas:

1) $a.\ sen\ \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5},\ \cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5},\ tg\ \alpha = \frac{1}{2}$
$b.\ sen\ \alpha = \frac{3}{5},\ \cos\alpha = \frac{4}{5},\ tg\ \alpha = \frac{3}{4}$
2) $a.\ x = 6{,}08\ e\ y = 5{,}12$
$b.\ x = 20{,}6$
3) Ver tabela das razões trigonométricas
4) $a.\frac{\pi}{3}\quad b.\frac{7\pi}{6}\quad c.\frac{35\pi}{18}\quad d.\frac{5\pi}{6}\quad e.\frac{\pi}{15}\quad f.\frac{\pi}{90}$
5) $a.200°\quad b.110°\quad c.20°\quad d.9°\quad e.240°\quad f.108°$
6) a. 5 voltas/ IQ b. 3voltas/ IQ c. 3voltas/ IIIQ
8) a. 0 b. $\frac{1}{2}$ c. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d. 1 e. -1 f. 0 g. 0 h. $\sqrt{3}$ i. $\sqrt{3}$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BONJORNO, José Roberto, et al. **Matemática: fazendo a diferença**. 1. ed. São Paulo: FTD, v.1, v.2, v.3 e v.4, 2006.

GUELLI, Oscar. **Matemática: uma aventura do pensamento**. 8. ed. São Paulo: Àtica, v.1, v.2, v.3 e v.4, 1999.

DI PIERRO NETTO, Scipione. **Matemática: conceito e história**. 6. ed. São Paulo: Scipione, v.4, 1998.

SOUZA, Maria Helena & SPINELLI, Walter. **Matemática**. São Paulo: Ativa, v.6, 1999.

GIOVANNI, José Ruy & BONJORNO, José Roberto. **Matemática: Uma nova abordagem.** São Paulo: FTD, v.1, 2000.