Nazaré Bezerra

Análise Combinatória e Probabilidade

editAedi
Assessoria de Educação a Distância • UFPA

Nazaré Bezerra

Análise Combinatória

e

Probabilidade

1ª Edição

Belém

editAedi
Assessoria de Educação a Distância • UFPA

2018

AUTORA
Maria de Nazaré Carvalho Bezerra

CAPA
Giordanna De Gregoriis

IMAGEM
Alphacoders

EDITORA
EditAedi

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

Bezerra, Maria de Nazaré Carvalho
Análise Combinatória e Probabilidade / Maria de Nazaré Carvalho
Bezerra. Belém: AEDI/UFPA, 2018

ISBN: 978-85-65054-56-0

1. Matemática
2. Análise Combinatória
3. Probabilidade

Conteúdo

Capítulo 1

Princípios de Contagem

Objetivos:

✓ **Apresentar os princípios fundamentais da contagem: Princípio Multiplicativo e Princípio Aditivo.**

1 Introdução

• Em uma sala há 3 homens e 4 mulheres. De quantos modos é possível formar um casal homem-mulher, escolhido dentre as 7 pessoas da sala?
Solução:
Uma das maneiras de responder a essa pergunta é formar o conjunto com todos os casais possíveis e contar quantos são os elementos desse conjunto. Considere

$$H = \{h_1, h_2, h_3\} \quad \text{e} \quad M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\},$$

os conjuntos dos homens e das mulheres da sala, respectivamente. Formar o casal consiste em escolher um elemento em H e posteriormente, um elemento em M. Portanto, o conjunto com todas as possibilidades para o casal é dado por:
$$H \times M = \{(h_1, m_1), (h_1, m_2), (h_1, m_3), (h_1, m_4), (h_2, m_1), (h_2, m_2), (h_2, m_3), (h_2, m_4), (h_3, m_1), (h_3, m_2), (h_3, m_3), (h_3, m_4)\}.$$
Contando agora o número de elementos do produto cartesiano $H \times M$, descobrimos que há 12 maneiras de formar o casal, escolhido dentre as 7 pessoas.

- Difícil? Claro que não. Então, vamos resolver mais um problema, análogo a esse.

• Em uma sala há 313 homens e 424 mulheres. De quantos modos é possível formar um casal homem-mulher, escolhido dentre as 737 pessoas da sala?

- Usar a estratégia anterior? Nem pensar! Nesse caso, a técnica usada acima não é eficiente, pois será uma tarefa enfadonha ter que enumerar todos os elementos do conjunto $H \times M$, para então contá-los.

A **Análise Combinatória** é o ramo da Matemática que fornece as ferramentas necessárias para resolver problemas de contagem. Como origem no estudo de jogos de azar, a Combinatória sofreu intenso desenvolvimento e hoje tem aplicações em diversas áreas.

Em Análise Combinatória trabalhamos com três conceitos básicos:

ARRANJO	PERMUTAÇÃO	COMBINAÇÃO

Vejamos o significado de cada um deles. Considere

$$E = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$$

um conjunto formado por n objetos distintos e k um inteiro, com $1 \leq k \leq n$. Em Combinatória, os questionamentos básicos são:

(i) - De quantos modos podemos fazer uma **escolha ordenada** de k elementos distintos do conjunto E?

(ii) - De quantos modos podemos fazer uma **escolha não ordenada** de k elementos distintos do conjunto E?

No primeiro caso, quando a escolha é ordenada, chamamos de **Arranjo** (simples) de n objetos, tomados k a k, e no segundo caso, quando a escolha não é ordenada, chamamos de **Combinação** dos n objetos, tomados k a k. Em particular, quando $k = n$, o arranjo é chamado **Permutação** dos n objetos.

2 Cardinalidade de um Conjunto Finito

Dado $n \in \{1, 2, 3, ...\}$, denotaremos por I_n o conjunto dos n primeiros números naturais positivos, isto é,

$$I_n := \{1, 2, 3, ..., n\}.$$

Um conjunto A diz-se **finito**, se é vazio ou existe uma bijeção $f : I_n \to A$, para algum natural $n \geq 1$.

Se $f : I_n \to A$ é uma bijeção, então $A = f(A) = \{f(1), f(2), ..., f(n)\}$. Denotando $f(i)$ por a_i, para $i = 1, 2, ..., n$, podemos representar qualquer conjunto finito A com n elementos, por:

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}.$$

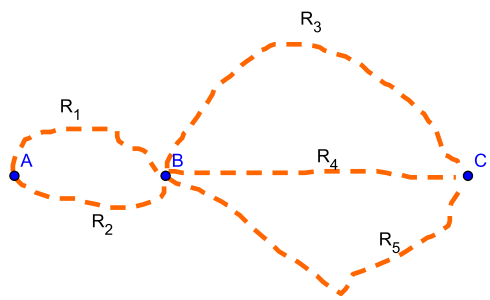
Dizemos que n é o **número de elementos** ou a **cardinalidade** de A. Simbolicamente escrevemos $|A| = n$ (ou $\#A = n$). Se $A = \emptyset$, então dizemos que A tem zero elementos e escrevemos $|A| = 0$.

3 Princípios Básicos da Análise Combinatória

Para o cálculo do número de arranjos, permutações e combinações, a Análise Combinatória usa dois princípios básicos: o **Princípio Multiplicativo** (**P.M.**) e o **Princípio Aditivo** (**P.A.**).

Princípio Multiplicativo (P.M.)

• Há 2 rodovias ligando as cidades A e B e 3 rodovias ligando as cidades B e C.



- Quantas opções de percurso tem uma pessoa que viajará de A a C, passando por B?
Solução:
Considere

$$P = \{R_1, R_2\} \quad \text{e} \quad Q = \{R_3, R_4, R_5\},$$

os conjuntos contendo as rodovias que ligam A a B e B a C, respectivamente. Escolher um trajeto para ir de A a C, consiste em escolher um elemento em P (há 2 possibilidades) e posteriormente um elemento em Q (3 são as possibilidades), ou seja, escolher um elemento do produto cartesiano:

$$P \times Q = \{(R_1, R_3), (R_1, R_4), (R_1, R_5), (R_2, R_3), (R_2, R_4), (R_2, R_5)\}.$$

Portanto, o número de formas distintas de fazer o trajeto é dada pela cardinalidade do produto cartesiano $P \times Q$, isto é,

$$|P \times Q| = |P| \times |Q| = 2 \times 3 = 6.$$

□

Podemos também pensar na solução desse problema de uma maneira mais natural, na qual não seja necessário fazer referência aos conjuntos com as possibilidades de cada etapa. A escolha de um percurso para realizar a viagem pode ser pensada como uma ”tarefa” que a pessoa terá que realizar, tarefa essa composta de duas etapas, devendo ela tomar uma decisão em cada uma dessas etapas, que é a escolha da rodovia dentre as disponíveis. Esquematizando temos:

Tarefa: Escolher um percurso para ir de A a C:

	Etapas da tarefa	Número de Possibilidades
1^a	Escolher uma rodovia para ir de A a B	2
2^a	Escolher uma rodovia para ir de B a C	3

Daí, o número total de possibilidades de executar a tarefa completa, ir de A a C, passando por B, é dado pelo produto dos números de possibilidades de cada etapa. Isso é o que afirma o Princípio Multiplicativo.

Princípio Multiplicativo ou Princípio Fundamental da Contagem

Se uma tarefa (um evento, um acontecimento, etc) é composta de duas etapas sucessivas, sendo que:
· o número de possibilidades de realizar a 1^a etapa é n_1;
· o número de possibilidades de realizar a 2^a etapa é n_2,
então, o número total de possibilidades de executar a tarefa completa é dado pelo produto:

$$n_1 \times n_2.$$

Demonstração: Para a demonstração veja o Apêndice II.

Exercícios Resolvidos 1.

(01) Em uma sala há 313 homens e 424 mulheres. De quantos modos é possível formar um casal homem-mulher, escolhido dentre as 737 pessoas da sala?
Solução:
Nesse caso, a tarefa a ser executada é formar um casal homem-mulher. De quantas etapas é composta essa tarefa? Para formar o casal, basta tão somente selecionar um homem e uma mulher, dentre os existentes na sala. Esquematizando:

Tarefa: Formar um casal homem-mulher, escolhido dentre 313 homens e 424 mulheres.

	Etapas da tarefa	Número de Possibilidades
1^a	Escolher um homem	313
2^a	Escolher uma mulher	424

Pelo Princípio Multiplicativo, o número de modos de executar a tarefa é dado pelo produto: $313 \times 424 = 132.712$. $\square$

(02) Uma sala possui 4 portas. De quantas maneiras uma pessoa pode entrar e sair dessa sala?
Soluçao:
Uma vez identificada a tarefa, analisemos quantas decisões deverão ser tomadas na sua execução, ou seja, quantas são as etapas que compõem a tarefa.

Tarefa: Entrar e sair de uma sala que tem 4 portas:

	Etapas da tarefa	Número de Possibilidades
1^a	Escolher uma porta para entrar	4
2^a	Escolher uma porta para sair	4

Pelo P.M., o número de modos de executar a tarefa é dado por: $4 \times 4 = 16$. □

Podemos estender o Princípio Multiplicativo para tarefas compostas por um número $k \geq 2$ qualquer de etapas.

Extensão do Princípio Multiplicativo

Se uma tarefa compõe-se de k etapas sucessivas $E_1, E_2, ..., E_k$ e há:
· n_1 modos de executar a etapa E_1;
· n_2 modos de executar a etapa E_2;
· n_3 modos de executar a etapa E_3;
⋮
· n_k modos de executar a etapa E_k,
então, o número de possibilidades de executar a tarefa completa é dado pelo produto:

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times ... \times n_k.$$

Exercícios Resolvidos 2.

(01) Quantas opções tem uma pessoa de montar um lanche composto por 1 salgado, 1 suco e 1 fruta, se há 5 opções de salgados, suco em 3 sabores e 2 opções de frutas?

Solução:

Tarefa: Montar o lanche com as opções disponíveis.

	Etapas da tarefa	Número de Possibilidades
1^a	Escolher o salgado	5
2^a	Escolher o suco	3
3^a	Escolher a fruta	2

Pelo P.M., o número de modos de montar o lanche é: $5 \times 3 \times 2 = 30$. □

(02) Quantos são os gabaritos possíveis de um teste de 5 questões de múltipla escolha, com 4 alternativas por questão?

Solução:

Tarefa: Montar o gabarito do teste.

	Etapas da tarefa	Número de Possibilidades
1^a	Escolher a resposta da 1^a questão	4
2^a	Escolher a resposta da 2^a questão	4
3^a	Escolher a resposta da 3^a questão	4
4^a	Escolher a resposta da 4^a questão	4
5^a	Escolher a resposta da 5^a questão	4

Pelo P.M., o total de gabaritos é dado por $4^5 = 1.024$. □

Postura no uso do Princípio Multiplicativo

Para resolver problemas que usam o Princípio Multiplicativo é fundamental a postura adotada por aquele que está resolvendo o problema, a saber:

(1) Colocar-se no lugar da pessoa que deve executar a tarefa;
(2) Dividir a tarefa em etapas mais simples;
(3) Identificar as restrições em cada etapa.

Vejamos resoluções de alguns problemas adotando a postura recomendada acima.

Exercícios Resolvidos 3.

(01) De quantos modos 3 pessoas podem sentar-se, dispondo-se de 5 cadeiras colocadas em fila indiana?
Solução:
Inicialmente vamos identificar a tarefa. Para isso, pergunte:- O que queremos contar? Queremos contar **quantos são os modos de acomodar 3 pessoas, dispondo-se de 5 cadeiras colocadas em fila**. A tarefa é exatamente a execução daquilo que você está querendo saber o total. Vem, então a 1^a observação:

(1) **Coloque-se no lugar da pessoa que deve executar a tarefa**:
Mentalize três pessoas, digamos A, B e C e cinco cadeiras colocadas em fila como abaixo:

$$\underset{c_1}{\_\_}\ \underset{c_2}{\_\_}\ \underset{c_3}{\_\_}\ \underset{c_4}{\_\_}\ \underset{c_5}{\_\_}$$

Veja-se acomodando as três pessoas nessas cadeiras. Como você procederia? Agora, vem a 2^a observação:

(2) **Dividir a tarefa em etapas mais simples**:
Procure pensar de forma ordenada e direta para identificar as decisões a serem tomadas na realização da tarefa. Assim, você estará identificando suas etapas.

- O que deverá ser feito com A? Escolher uma cadeira, dentre as cinco disponíveis, para ela sentar. Feito isso, você irá escolher uma cadeira para B e por fim, dentre as restantes, uma outra para C. Uma vez identificadas as etapas, é hora de passar para a 3^a observação:

(3) **Identificar as restrições de cada etapa:**
Pergunte-se em cada etapa: - Tenho alguma restrição ao executar esta ação? As restrições são de suma importância para que possamos determinar com exatidão o número de possibilidades de cada etapa. Em função dessa recomendação, dorante passaremos a incluir mais uma coluna em nossa tabela de etapas, a coluna *Restrições*. E por questões de espaço, passaremos a denotar apenas por N.P. o Número de Possibilidades.

Colocando todas essas recomendações em uma tabela:

Tarefa: Acomodar A, B e C, usando 5 cadeiras colocadas em fila:

	Etapas da tarefa	Restrições	N.P.
1^a	Escolher 1 cadeira para A sentar	cadeira disponível	5
2^a	Escolher 1 cadeira para B sentar	cadeira disponível	4
3^a	Escolher 1 cadeira para C sentar	cadeira disponível	3

Pelo P.M., o número de modos de executar a tarefa, isto é, acomodar as 5 pessoas, é dado por: $5 \times 4 \times 3 = 60$. $\square$

(02) Quantos são os números naturais de 5 algarismos na base 10?
Solução:
- O que queremos contar? A quantidade de números naturais de 5 algarismos, formados com os dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. E a tarefa? A tarefa não é escrever todos estes números. Coloque-se no lugar da pessoa que deverá construir **apenas um número** com as características pedidas. Ao construí-lo, com o auxílio do Princípio Multiplicativo, você descobrirá quantos são eles.

Tarefa: Escrever um número natural de 5 algarismos, em base 10.
Considere

$$\underset{p_1}{\_\_}\ \underset{p_2}{\_\_}\ \underset{p_3}{\_\_}\ \underset{p_4}{\_\_}\ \underset{p_5}{\_\_}$$

as posições a serem preenchidas para a construção do número.

	Etapas da tarefa	Restrições	N.P.
1^a	Escolher 1 algarismo para a posição p_1	$\neq 0$	9
2^a	Escolher 1 algarismo para a posição p_2	-	10
3^a	Escolher 1 algarismo para a posição p_3	-	10
4^a	Escolher 1 algarismo para a posição p_4	-	10
5^a	Escolher 1 algarismo para a posição p_5	-	10

Total de números que podem ser formados com as características pedidas é dado por $9 \times 10^4 = 90.000$. $\square$

(03) Quantos são os números naturais de 5 algarismos na base 10, que não contém o 2?
Solução:
Tarefa: Escrever um número natural de 5 algarismos em base 10, que não contenha o 2.
Considere

$$\underset{p_1}{\_\_}\ \underset{p_2}{\_\_}\ \underset{p_3}{\_\_}\ \underset{p_4}{\_\_}\ \underset{p_5}{\_\_}$$

o número a ser formado.

	Etapas da tarefa	Restrições	N.P.
1^a	Escolher 1 algarismo para a posição p_1	$\neq 0$ e $\neq 2$	8
2^a	Escolher 1 algarismo para a posição p_2	$\neq 2$	9
3^a	Escolher 1 algarismo para a posição p_3	$\neq 2$	9
4^a	Escolher 1 algarismo para a posição p_4	$\neq 2$	9
5^a	Escolher 1 algarismo para a posição p_5	$\neq 2$	9

Total de números que podem ser formados é $8 \times 9^4 = 52.488$. □

Princípio Aditivo

O Princípio Aditivo determina o número de elementos da união de dois conjuntos finitos. Iniciemos com o caso em que os conjuntos são disjuntos.

Proposição 1. ***(Príncipio Aditivo)*** *Se A e B são conjuntos finitos e disjuntos, então*

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

□

Demonstração: Para a demonstração veja o Apêndice I.

Usando demonstração por indução, podemos estender o resultado acima para uma quantidade finita n qualquer de conjuntos.

Corolário 1. *Sejam $A_1, A_2, .., A_n$ conjuntos finitos, dois a dois disjuntos, isto é, $A_i \cap A_j = \emptyset$, para quaisquer $i \neq j$. Então,*

$$|A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + ... + |A_n|.$$

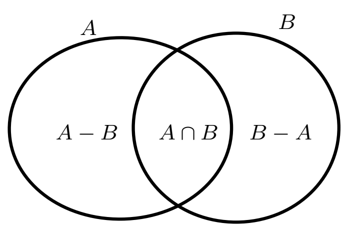
□

A Proposição 15 fornece o número de elementos da união, quando os conjuntos são disjuntos. E se $A \cap B \neq \emptyset$, quantos são os elementos da união $A \cup B$?

Corolário 2. *Se A e B são conjuntos finitos, então*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Demonstração:
Considere A e B conjuntos finitos, com $A \cap B \neq \emptyset$, como no diagrama abaixo:



Claramente, temos que

$$A = (A - B) \cup (A \cap B)$$

sendo essa união disjunta, isto é, $(A-B) \cap (A \cap B) = \emptyset$. Então, pela Proposição 15,

$$|A| = |A - B| + |A \cap B| \Rightarrow |A - B| = |A| - |A \cap B|. \tag{1.1}$$

Por outro lado, também temos:

$$A \cup B = (A - B) \cup B,$$

sendo a união à direita disjunta. Logo, segue da proposição anterior e de (1.1):

$$|A \cup B| = |A - B| + |B| = |A| - |A \cap B| + |B|.$$

Se $A \cap B = \emptyset$, então $|A \cap B| = 0$ e o resultado continua válido. □

Exercícios Resolvidos 4.

(01) Feita uma pesquisa com todos os alunos desta turma, constatou-se que todos fazem pelo menos uma refeição no RU, sendo que 29 disseram que almoçam lá, 24 que jantam e 12 afirmaram que lá fazem as duas refeições. Quantos são os alunos da turma?

Solução:

Considere

U - conjunto dos alunos da turma;

A - conjunto dos alunos da turma que almoçam no RU;

J - conjunto dos alunos da turma que jantam no RU.

Como todos os alunos fazem pelo menos um refeição no RU, segue que

$$U = A \cup J.$$

Pelo Princípio Aditivo:

$$|U| = |A \cup J| = |A| + |J| - |A \cap J| = 29 + 24 - 12 = 41.$$

□

(02) Dos 41 alunos desta turma, 28 disseram que almoçam no RU, 24 que jantam e 12 afirmaram que lá fazem as duas refeições. Quantos alunos da turma não fazem nenhuma das refeições naquele restaurante?

Solução:

Considere:

U - conjunto dos alunos da turma;

X- conjunto dos alunos da turma que fazem alguma refeição no RU;

Claramente, temos:

$$U = X \cup \overline{X}$$

onde $\overline{X}$ é o complementar de X, sendo portanto o conjunto dos alunos que não fazem refeição alguma no RU. Pelo Princípio Aditivo:

$$|U| = |X| + |\overline{X}| - |X \cap \overline{X}| \Rightarrow |\overline{X}| = 41 - |X|.$$

Agora,

$$X = A \cup J$$

onde
A - é conjunto dos alunos que almoçam no RU;
J - é conjunto dos que jantam no RU.

Novamente, pelo Princípio aditivo:

$$|X| = |A| + |J| - |A \cap J| = 28 + 24 - 12 = 40.$$

Portanto, $|\overline{X}| = 41 - 40 = 1.$ □

(03) Uma prova de duas questões foi dada a uma classe de 40 alunos. Desses, 25 acertaram a 1^a questão, 20 acertaram a 2^a e 5 não acertaram questão alguma. Quantos alunos acertaram as duas questões?
Solução:
Vamos considerar U o conjunto dos alunos da sala. Evidentemente, podemos decompor U em dois conjuntos disjuntos:

$$U = X \cup \overline{X}$$

onde
X - é o conjuntos dos alunos que acertaram alguma questão (pelo menos uma) e
$\overline{X}$ - é o complementar de X, isto é, o conjunto dos alunos que não acertaram questão alguma.
Pelo Princípio Aditivo:

$$|U| = |X| + |\overline{X}| \Rightarrow |X| = 40 - 5 = 35.$$

Por outro lado,

$$X = A \cup B$$

onde
A - é o conjuntos dos alunos que acertaram a 1^a questão;
B - é o conjuntos dos alunos que acertaram a 2^a questão.

Novamente, pelo Princípio Aditivo:

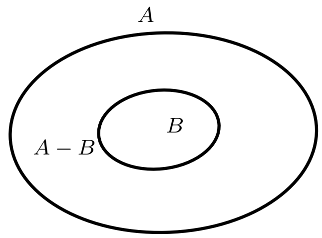
$$|X| = |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \Rightarrow |A \cap B| = 25 + 20 - 35 = 10.$$

□

Proposição 2. *Se A é um conjunto finito e $B \subset A$, então*

$$|B| = |A| - |A - B|$$

Demonstração:
Sejam A e B conjuntos finitos, com $B \subset A$, como a seguir:



Como
$$A = B \cup (A - B),$$
sendo essa união disjunta, segue da Proposição 15, que:
$$|A| = |B| + |A - B| \Rightarrow |B| = |A| - |B - A|.$$
□

Esse resultado é útil quando queremos determinar a cardinalidade de certo conjunto B, porém não sabemos fazê-lo diretamente ou é uma tarefa muito complexa. Podemos então, construir um conjunto $A \supset B$, no qual saibamos calcular $|A|$ e $|A - B|$, daí pela proposição acima, determinamos $|B|$.

Exercícios Resolvidos 5.

(01) Quantos são os números naturais de 5 algarismos na base 10, que contém o algarismo 2?
Solução:
Para determinar esse total, devemos contar os números de 5 algarismos em que o 2 aparece 1 única vez, os que ele aparece 2 vezes, os que aparece 3, 4 e 5 vezes e depois somar os totais de cada caso. Uma tarefa enfadonha. Podemos simplificar esse trabalho, considerando:
A - conjuntos dos números de 5 algarismos na base 10;
B - conjuntos dos números de 5 algarismo na base 10, os quais contém 2.
Obviamente que $B \subset A$, logo pela Proposição 2,
$$|B| = |A| - |A - B|.$$
E o número de elementos desses dois últimos conjuntos podem mais facilmente ser determinados. Como $|A| = 90.000$ e $|A - B| = 52.488$, conforme já resolvidos anteriormente, então,
$|B| = |A| - |B - A| = 90.000 - 52.488 = 37.512.$ □

Lista de Exercícios 1.

(01) Quantos são os números naturais de 4 algarismos significativos (não contém o zero)?

(02) Quantos são os números naturais de 4 algarismos significativos distintos?

(03) Quantos são os números naturais de 4 algarimos que começam por 2?

(04) De uma turma de 30 alunos, determine quantas são as opções que se tem de escolher uma comissão formada por um presidente, um secretário e um tesoureiro, de modo que pessoa alguma ocupe mais de um cargo.

(05) Um professor tem 5 livros distintos para presentear os 3 melhores alunos da turma. Quantas são as opções que ele tem de dar um livro a cada um desses alunos?

(06) Ana vai ao seu guarda-roupa e lá encontra 3 calças e 6 blusas. Sabendo que ela tem apenas 2 pares de sapatos, de quantos modos ela pode montar o "look" do dia: calça-blusa-sapato?

(07) Uma pizzaria vende pizza em três sabores: Mussarela, Calabresa e Quatro Queijos, nos tamanhos: brotinho, grande ou família e nas modalidades: massa fina ou massa grossa. De quantas formas uma pessoa pode montar a sua pizza?

(08) O conjunto A possui 5 elementos e o conjunto B 10 elementos.
(a) Quantas são as funções $f : A \to B$?
(b) Quantas são as funções injetoras $f : A \to B$?

(09) **Teorema:** *Se* $N = p_1^{n_1} p_2^{n_2} ... p_k^{n_k}$ *é a decomposião de um inteiro positivo em fatores primos, então* d *é um divisor positivo de* N *se, e somente se,* $d = p_1^{m_1} p_2^{m_2} ... p_k^{m_k}$*, com* $0 \leq m_i \leq n_i$*, para* $i = 1, 2, .., .n$*.*

Usando o teorema acima e o Princípio Multiplicativo, determine:
(a) o número de divisores positivos de 600;
(b) o número de divisores positivos de 415;
(c) o número de divisores positivos pares de 3.528.

(10) Use o Princípio Multplicativo para mostrar que todo conjunto A com n elementos, possui exatamente 2^n subconjuntos.

(11) Os números de telefones, de um sistema de telefonia, são formados por 9 dígitos, escolhidos dentre 0, 1, 2, ..., 9. Sabendo que o primeiro dígito é sempre 9 e que 0 não pode ser usado nas 2^a e 3^a posições, quantos números de telefones podem ser formados nesse sistema?

(12) De quantas maneiras podemos arrumar 8 torres iguais em um tabuleiro de xadrez (8×8) de modo que não haja duas torres na mesma linha e nem na

mesma coluna?

(13) Dos 30 alunos de uma turma, 15 estão cursando Análise Combinatória, 22 Álgebra, sendo que 12 estão fazendo as duas disciplinas.
(a) Quantos alunos estão cursando Análise Combinátoria ou Álgebra?
(b) Quantos não estão cursando nenhuma das duas disciplinas?
(c) Quantos alunos fazem somente Análise Combinatória?
(d) Quantos fazem somente uma das duas disciplinas?

(14) Sejam A e B subconjuntos de um conjunto universo U. Sabendo que $|U| = 60$, $|A| = 20$, $|B| = 40$ e $|A \cap B| = 10$, calcule:
(a) $|A \cup B|$
(b) $|\overline{A}|$, onde $\overline{A} = U - A$ é o complementar de A;
(c) $|\overline{A \cup B}|$
(d) $|\overline{A} \cap B|$

(15) Quantos são os números naturais de 6 algarismos, que:
(a) não contém o 9?
(b) contém o 9?

(16) Quantos são so números naturais de 4 dígitos, que possuem pelo menos dois dígitos iguais?

Respostas da Lista de Exercícios 1

(01) 6.561
(02) 3.024
(03) 1.000
(04) 24.360
(05) 60
(06) 36
(07) 18
(08.a) 100.000 (08.b) 30.240
(09.a) 24 (09.b) 4 (09.c) 27
(10) **Tarefa:** Construir um subconjunto do conjunto $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$

	Etapas	Restrições	N.P.
1^a	Decidir se a_1 pertencerá ou não ao subconjunto	-	2 (S ou N)
2^a	Decidir se a_2 pertencerá ou não ao subconjunto	-	2 (S ou N)
...	...	...	...
n^a	Decidir se a_n pertencerá ou não ao subconjunto	-	2(S ou N)

Total $= 2 \times 2 \times ... \times 2 = 2^n$.
(11) 81.000.000
(12) 40.320
(13.a) 25 (13.b) 5 (13.c) 3 (13.d) 13
(14.a) 50 (14.b) 40 (14.c) 10 (14.d) 30
(15.a) 472.392 (15.b) 427.608
(16) 4.464

Capítulo 2

Uso do Princípio Multiplicativo

Objetivos:

✓ **Apresentar algumas recomendações no uso do Princípio Multiplicativo**.

1 Recomendações

No capítulo anterior, vimos que a postura adotada na abordagem de problemas que usam o Princípio Multiplicativo é de grande importância para facilitar sua resolução. Veremos agora, mais algumas recomendações no uso desse princípio, sempre visando contornar dificuldades que surjam na resolução do problema.

Começar pelas Restrições

Vamos começar resolvendo o seguinte problema:

• Quantos números naturais de dois algarismos distintos podem ser formados no sistema decimal?
Solução:
Tarefa: Escrever um número natural de dois algarismos distintos usando os dígitos: 0, 1, 2, ..., 8, 9.
Considere

$$\underset{p_1}{\_\_}\ \underset{p_2}{\_\_}$$

o número a ser formado.

	Etapas da tarefa	Restrições	N.P.
1^a	Escolher um algarismo para p_2	-	10
2^a	Escolher um algarismo para p_1	$\neq p_2$ e $\neq 0$	DEPENDE

Observe que o número de possibilidades de executar a 2^a etapa, depende de como foi executada a 1^a. Se a posição p_2 foi preenchida com zero, então restam 9 possibilidades para p_1. Porém, se a posição p_2 foi preenchida com um algarismo diferente de zero, restam 8 possibilidades (excluímos o algarismo já usado e o zero, pois zeros colocado à direita do primeiro algarismo significativo não são contado como dígitos). Poderíamos ter contornado esse problema, simplesmente invertendo a ordem de execução das etapas:

	Etapas da tarefa	Restrições	N.P.
1^a	Escolher um algarismo para p_1	$\neq 0$	9
2^a	Escolher um algarismo para p_2	$\neq p_1$	9

Pelo P.M., o total dos números é dado por: $9 \times 9 = 81$. □

Assim, em resoluções de problemas que usam o Princípio Multiplicativo, devemos seguir a seguinte recomendação:

> *Recomendação 1*:
> **Se existe restrição em alguma etapa, então o número de possibilidades dessa etapa deve ser analisado em primeiro lugar.**

Exercícios Resolvidos 6.

(01) Quantas "palavras" de 4 letras distintas, terminadas em vogal, podem ser formadas com um alfabeto de 26 letras, das quais 5 são vogais?

Solução:

Tarefa: Formar uma palavra de 4 letras distintas, terminada por vogal.

Seja

$$\underset{p_1}{\text{—}}\ \underset{p_2}{\text{—}}\ \underset{p_3}{\text{—}}\ \underset{p_4}{\text{—}}$$

a palavra a ser formada. Analisemos as etapas e suas restrições:

	Etapas da tarefa	Restrições	N.P.
1^a	Escolher uma letra para p_1	-	
2^a	Escolher uma letra para p_2	$\neq p_1$	
3^a	Escolher uma letra para p_3	$\neq p_1, p_2$	
4^a	Escolher uma letra para p_4	vogal e $\neq p_1, p_2, p_3$	

Uma restrição comum a todas as etapas é o uso de letras distintas das já colocadas, porém a 4^a etapa tem uma restrição adicional, a letra escolhida deve ser uma vogal. Vamos então, inverter a ordem das etapas, começando o preenchimento por p_4.

	Etapas da tarefa	Restrições	N.P.
1^a	Escolher uma letra para p_4	vogal	5
2^a	Escolher uma letra para p_3	$\neq p_4$	25
3^a	Escolher uma letra para p_2	$\neq p_4, p_3$	24
4^a	Escolher uma letra para p_1	$\neq p_4, p_3, p_2$	23

Total: $5 \times 25 \times 24 \times 23 = 69.000$. □

Como exercício, tente determinar o número de possibilidades de cada etapa, mantendo a ordem dada na primeira tabela. Veja as dificuldades que surgem.

(02) Quantos números pares, de três algarismos distintos, podemos formar usando apenas os dígitos: 1, 2, 3, 4, 5, 6?
Solução:
Tarefa: Formar um número par, de três algarismos distintos, usando somente os dígitos: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Seja

$$\underset{p_1}{\_\_}\ \underset{p_2}{\_\_}\ \underset{p_3}{\_\_}$$

o número a ser formado.

A tarefa é composta de 3 etapas, que são as escolhas dos números para as posições p_1, p_2 e p_3. Como o número é par, temos uma restrição no preenchimento da posição p_3. Assim, vamos iniciar a tarefa preenchendo esta posição.

	Etapas da tarefa	Restrições	N.P.
1^a	Escolher um algarismo para p_3	deve ser par	3
2^a	Escolher um algarismo para p_2	$\neq p_3$	5
3^a	Escolher um algarismo para p_1	$\neq p_3, p_2$	4

Total: $3 \times 5 \times 4 = 60$. □

Restrição mais Seletiva

Observando a Recomendação 1, vamos resolver a questão abaixo:

• Quantos são os múltiplos de 5, menores que 6.000, formados de 4 algarismos distintos, nos quais não constam nenhum dos dígitos: 0, 1 e 9?
Solução:
Tarefa: Formar um múltiplo de 5, de 4 algarismos distintos, menor que 6.000, usando apenas os dígitos: 2,3,4,5,6,7,8.
Seja

$$\underset{p_1}{\_\_}\ \underset{p_2}{\_\_}\ \underset{p_3}{\_\_}\ \underset{p_4}{\_\_}$$

o número a ser formado. Analisemos as etapas e suas restrições.

	Etapas da tarefa	Restrições	N.P.
1^a	Escolher um número para p_1	< 6	
2^a	Escolher um número para p_2	$\neq p_1$	
3^a	Escolher um número para p_3	$\neq p_1, p_2$	
4^a	Escolher um número para p_4	$\neq p_1, p_2, p_3$ e múltiplo de 5	

Observam-se restrições no preenchimento das posições p_1 e p_4 (estamos desprezando o fato dos dígitos serem distintos, restrição comum a todas as etapas). Nesse caso, por onde começar? A recomendação é:

Recomendação 2:
Se existem restrições em mais de uma etapa, então devemos começar por aquela que é mais seletiva.

Nesse exemplo, vejamos qual restrição é mais seletiva, ou seja, qual tem um número menor de possibilidades. Em p_1, podemos usar quaisquer dos dígitos: 2, 3, 4 ou 5. Já em p_4, temos apenas uma opção, colocar 5. Portanto, essa é mais seletiva. Iniciemos por ela.

	Etapas da tarefa	Restrições	N.P.
1^a	Escolher um número para p_4	múltiplo de 5	1
2^a	Escolher um número para p_1	< 6 e $\neq p_4$	3
3^a	Escolher um número para p_2	$\neq p_1, p_4$	5
4^a	Escolher um número para p_3	$\neq p_1, p_2, p_4$	4

Total: $1 \times 3 \times 5 \times 4 = 60$. □

Exercícios Resolvidos 7.

(01) Ana dispõe de 10 cores, dentre elas as 5 básicas: branco, preto, vermelho, amarelo e azul. Quantas são as opções que Ana tem de pintar uma bandeira composta de 5 listras verticais, cada listra de uma só cor e todas com cores diferentes, sendo que as bordas direita e esquerda devem ser pintadas com as cores básicas e a listra central, com preto ou branco?
Solução:
Tarefa: Pintar uma bandeira de 5 listras, com as restrições dadas.
Seja

$$\overline{}\ \overline{}\ \overline{}\ \overline{}\ \overline{}$$
$$L_1\ L_2\ L_3\ L_4\ L_5$$

as listras da bandeira a serem pintadas. Temos uma restrição comum a todas elas, que é a escolha de cores distintas. Nas listras L_1 e L_5, devemos escolher dentre as 5 cores básicas. Já para L_3, a listra central, temos apenas 2 opções. Então, iniciemos pela mais seletiva.

	Etapas da tarefa	Restrições	N.P.
1^a	Escolher uma cor para L_3	preto ou branco	2
2^a	Escolher uma cor para L_1	cor básica e $\neq L_3$	4
3^a	Escolher uma cor para L_5	cor básica e $\neq L_3, L_1$	3
4^a	Escolher uma cor para L_2	$\neq L_1, L_3, L_5$	7
5^a	Escolher uma cor para L_4	$\neq L_1, L_2, L_3, L_5$	6

Total: $2 \times 4 \times 3 \times 7 \times 6 = 1.008$. □

Dividir o Problema em Casos

• Quantos são os números naturais pares, existentes em base 10, formados de três algarismos distintos?

Solução:
Tarefa: Formar um número par, de 3 de algarismos distintos, usando somente os dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
Seja

$$\overline{}\,\overline{}\,\overline{}$$
$$p_1\ p_2\ p_3$$

o número a ser formado.

Em cada uma das 3 etapas, deve-se escolher um dígito para ser colocado na posição correspondente. À exceção de dígitos distintos, temos a restrição em p_1, não pode ser zero (daí restam 9 opções) e a restição em p_3, que deve ser um número par, onde tem-se menos opções que em p_1. Então, a recomendação anterior nos diz que devemos começar por p_3.

	Etapas da tarefa	Restrições	N.P.
1^a	Escolher um número para p_3	par	5
2^a	Escolher um número para p_1	$\neq 0$ e $\neq p_3$	DEPENDE
3^a	Escolher um número para p_2	$\neq p_3, p_1$	

Embora, tenhamos seguido a recomendação anterior, estamos novamente diante de um impasse, pois colocando zero em p_3, restam 9 possibilidades para p_1. Caso contrário, restam 8. Nesse caso, devemos seguir a próxima recomendação:

> *Recomendação 3*:
> **Se a colocação de um objeto em certa posição, causa dificuldades para a determinação do número de possibilidades em outras posições, então devemos dividir o problema em casos, conforme o objeto ocupe ou não a posição considerada.**

Retornemos ao problema acima. Como a colocação do zero na posição p_3 causa dificuldades em determinar o número de possibilidades em p_1, vamos dividir o problema em casos, conforme zero esteja ou não na posição p_3.

Caso 1: Formar 1 número par, de 3 algarismos distintos, **terminado em 0**

	Etapas da tarefa	Restrições	N.P.
1^a	Escolher um número para p_3	$= 0$	1
2^a	Escolher um número para p_2	$\neq p_3$	9
3^a	Escolher um número para p_1	$\neq p_2, p_3$	8

Total do Caso 1: $1 \times 9 \times 8 = 72$.

Caso 2: Formar 1 número par, de 3 algarismos distintos, **não terminado em 0**

	Etapas da tarefa	Restrições	N.P.
1^a	Escolher um número para p_3	par e $\neq 0$	4
2^a	Escolher um número para p_1	$\neq 0, p_3$	8
3^a	Escolher um número para p_2	$\neq p_1, p_3$	8

Total do Caso 2: $4 \times 8 \times 8 = 256$.

- O que fazemos agora com os totais de cada caso?

Pensemos assim: Considere U o conjunto de todos os números naturais pares, de 3 algarismos distintos, cuja cardinalidade se quer determinar. Se X é o conjunto de todos os números pares de 3 algarismos distintos, **terminados em zero**, então $U = X \cup \overline{X}$, onde $\overline{X}$, o complementar de X, é o conjunto de todos os números pares de 3 algarismos distintos, **não terminados em zero**. Pelo Princípio Aditivo:

$|U| = |X| + |\overline{X}| =$ Total Caso 1 + Total Caso 2 $= 72 + 256 = 328.$ □

Exercícios Resolvidos 8.

(01) Deve-se escolher, dentre os 60 alunos das duas oitavas séries de uma escola, uma comissão composta de presidente, secretário e tesoureio. O presidente deve ser um aluno da $8^a A$ e o tesoureiro, uma mulher. Sabendo que dos 35 alunos da $8^a A$, 19 são homens e a que $8^a B$ tem apenas 10 mulheres, quantas são as opções que se tem de formar essa comissão?
Solução:
A tarefa consiste na escolha da comissão, sendo composta de 3 etapas, que são as escolhas dos membros:

$$\overline{\text{presidente}}\ \overline{\text{secretário}}\ \overline{\text{tesoureiro}}$$

Temos rescrições na escolha do presidente e do tesoureiro, sendo mais seletiva a escolha do tesoureiro, por termos um número menor de possibilidades. No entanto, observa-se que a escolha de uma mulher para tesoureiro, traz dificuldades na determinação do número de opções que teremos na escolha do presidente. Assim, vamos dividir o problema em casos, conforme o tesoureiro seja aluna da $8^a A$ ou $8^a B$.

<u>**Caso 1:** O tesoureiro é uma aluna da **8ªA**:</u>

	Etapas da tarefa	Restrições	N.P.
1^a	Escolher o tesoureiro	aluna da $8^a A$	16
2^a	Escolher o presidente	aluno(a) da $8^a A$ e $\neq$ tesoureiro	34
3^a	Escolher o secretário	$\neq$ tesoureiro, presidente	58

Total do Caso 1: $16 \times 34 \times 58 = 31.552$

<u>**Caso 2:** O tesoureiro é uma aluna da **8ªB**:</u>

	Etapas da tarefa	Restrições	N.P.
1^a	Escolher o tesoureiro	aluna da $8^a B$	10
2^a	Escolher o presidente	aluno(a) da $8^a A$ e $\neq$ tesoureiro	35
3^a	Escolher o secretário	$\neq$ tesoureiro, presidente	58

Total do Caso 2: $10 \times 35 \times 58 = 20.300$

Pelo Princípio Aditivo, total geral: $31.552 + 20.300 = 51.852$. □

(02) De um baralho comum (52 cartas) sacam-se sucessivamente e sem reposição três cartas. Quantas são as extrações nas quais a primeira carta é de copas, a

segunda é um rei e a terceira não é uma dama?
Solução:
Tarefa: Retirar 3 cartas de um baralho, sem reposição, a 1^a sendo de copas, a 2^a um rei e a 3^a, não sendo dama.

	Etapas da tarefa	Restrições	N.P.
1^a	Retirar a primeira carta	de copas	13
2^a	Retirar a segunda carta	um rei	?????
3^a	Retirar a terceira carta	não seja dama	?????

Como a retirada de uma dama ou de um rei na primeira carta causam dificuldades na determinação do número de possibilidades na segunda e terceira retiradas, vamos dividir o problema em casos, conforme a primeira carta seja ou não um rei ou uma dama.

Caso 1: A primeira carta é uma **dama de copas**:

	Etapas da tarefa	Restrições	N.P.
1^a	Retirar a primeira carta	dama de copas	1
2^a	Retirar a segunda carta	um rei	4
3^a	Retirar a terceira carta	não seja dama	47

Total do Caso 1: $1 \times 4 \times 47 = 188$.

Caso 2: A primeira carta é um **rei de copas**:

	Etapas da tarefa	Restrições	N.P.
1^a	Retirar a primeira carta	rei de copas	1
2^a	Retirar a segunda carta	um rei	3
3^a	Retirar a terceira carta	não seja dama	46

Total do Caso 2: $1 \times 3 \times 46 = 138$.

Caso 3: A primeira carta é de copas, **não sendo rei e nem dama**:

Etapas da tarefa	Restrições	N.P.
1^a Retirar a primeira carta	copas, $\neq$ rei e $\neq$ dama	11
2^a Retirar a segunda carta	um rei	4
3^a Retirar a terceira carta	não seja dama	46

Total do caso 3: $11 \times 4 \times 46 = 2.024$.

Pelo Princípio Aditivo, o total geral é dado por: $188 + 138 + 2.024 = 2.350$. $\square$

Lista de Exercícios 2.

(01) Quantos números ímpares, de três algarismos distintos, podemos formar usando somente os dígitos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$?

(02) De um alfabeto de 26 letras, 5 das quais são vogais, quantas são as "palavras" de seis letras distintas, que começam e terminam por vogal?

(03) Quantos são os números de quatro algarismos (não necessariamente distintos) formados com os dígitos 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 que são divisíveis por cinco e menores que 7.000?

(04) Quantos números de sete algarismos distintos podem ser formados com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, de modo que os dois primeiros sejam pares e os três últimos, ímpares?

(05) Chama-se anagrama de uma palavra, qualquer ordenação que se possa formar com as letras dessa palavra. Assim, SETUDO e TESUDO são anagramas da palavra ESTUDO. Quantos são os anagramas da palavra ESTUDO que:
(a) podem ser formados, sem restrições?
(b) começam por vogal?
(c) começam e terminam por vogal?

(06) As placas de automóveis são formadas por 3 letras (escolhidas de um alfabeto composto por 5 vogais e 21 consoantes) seguidas de 4 números. Quantas são as opções que se tem de construir uma placa de automóvel:
(a) sem restrições?
(b) com letras e números todos distintos?
(c) começando por vogal?
(d) começando por vogal e terminando por 0?
(e) formada só por vogal e número pares, sendo letras e números distintos?
(f) formadas só por vogal ou só por números pares, sendo letras e números distintos?
(g) que tem pelo menos uma vogal?
(h) que tem pelo menos um número par?

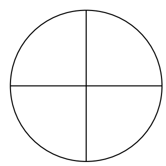
(07) Um professor tem 8 livros distintos, sendo 4 de Geometria e 4 de Álgebra. Esses livros serão doados a 8 alunos, dos quais 3 disseram ter preferência pelos livros de Geometria, 2 pelos de Àlgebra e os demais não tem preferência. De quantos modos o professor poderá fazer a distribuição dos livros, respeitanto as preferências?

(08) Quantos são os números naturais de 4 dígitos distintos, maiores que 5.500?

(09) De um baralho comum (52 cartas) sacam-se sucessivamente e sem reposição duas cartas. Quantas são as extrações nas quais a primeira carta é um rei e a segunda uma carta de paus?

(10) Em uma eleição há 4 canditados a presidente: 3 homens e 1 mulher; 3 candidatos a governador, todos do sexo masculino e 2 mulheres e 4 homens concorrendo ao senado. Determine o número de opções que tem um eleitor de montar o seu voto, escolhendo um presidente, um governador e um senador:
(a) sem restrições;
(b) de modo que todos os escolhidos sejam do sexo masculino;
(c) de modo que dois dos escolhidos sejam do sexo femino;
(d) de modo que apenas um escolhido seja do sexo femino.

(11) Dispondo-se de sete cores, de quantos modos pode-se pintar o círculo abaixo, de modo que cada setor seja pintado de uma só cor e setores adjacentes (com uma linha fronteira comum) não tenham a mesma cor?



(12) Dispondo-se de cinco cores distintas, de quantos modos podemos colorir uma bandeira de quatro listas, cada listra de uma só cor, de modo que a primeira e a quarta listras tenham cores distintas, o mesmo ocorrendo com as listras adjacentes?

Respostas da Lista de Exercícios 2

(01) 36

(02) 5.100.480

(03) 245

(04) 8.640

(05.a) 720

(05.b) 360

(05.c) 144

(06.a) 175.760.000

(06.b) 78.624.000

(06.c) 33.800.000

(06.d) 3.380.000

(06.e) 7.200

(06.f) 2.167.200

(06.g) 83.150.000

(06.h) 164.775.000

(07) 1.728

(08) 2.240

(09) 51

(10.a) 72

(10.b) 36

(10.c) 6

(10.d) 30

(11) 1.302

(12) 260

Capítulo 3

Arrajos e Permutações

Objetivos:

✓ **Definir Arranjo, Permutação e Combinação;**
✓ **Apresentar as fórmulas para o cálculo do Número de Arranjos e de Permutações.**

1 Introdução

Conforme visto no Capítulo 1, dado um conjunto finito

$$E = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$$

com n elementos e um inteiro k, com $1 \leq k \leq n$, duas são as perguntas centrais da Análise Combinatória:
- De quantos modos podemos **fazer uma escolha ordenada** de k elementos distintos de E?
- De quantos modos podemos **fazer uma escolha não ordenada** de k elementos distintos de E?

Suponha

$$E = \{Ana, Bia, Carlos, Duda\}$$

- De quantos modos podemos fazer uma escolha **ordenada** de 2 elementos distintos desse conjunto?

Na escolha ordenada, a ordem dos elementos **é relevante**. Assim

$$(Ana, Bia) \text{ e } (Bia, Ana)$$

são duas escolhas distintas.

Nesse caso, temos as seguintes opções:

$(Ana, Bia), (Bia, Ana), (Ana, Carlos), (Carlos, Ana), (Ana, Duda), (Duda, Ana)$

$(Bia, Carlos), (Carlos, Bia), (Bia, Duda), (Duda, Bia), (Carlos, Duda), (Duda, Carlos)$

No total de 12 escolhas **ordenadas** possíveis.

No caso da escolha ordenada, usaremos a notação de sequência, isto é, relacionaremos os elementos escolhidos entre parênteses, para indicar que a ordem é relevante. Assim, (Ana, Bia) representa uma escolha ordenada de dois elementos de E; $(Carlos, Ana, Duda)$ representa uma escolha ordenada de 3 elementos de E.

- De quantos modos podemos fazer uma escolha **não ordenada** de 2 elementos distintos deste conjunto?

Na escolha não ordenada, a ordem dos elementos é **irrelevante**. Assim, (Ana, Bia) e (Bia, Ana) são consideradas indistinguíveis. Nesse caso, usaremos a notação de conjunto $\{Ana, Bia\}$. Temos as seguintes opções:

$$\begin{array}{c} \{Ana, Bia\}, \quad \{Ana, Carlos\}, \quad \{Ana, Duda\}, \\ \{Bia, Carlos\}, \quad \{Bia, Duda\}, \ \{Carlos, Duda\} \end{array}$$

Totalizando, 6 escolhas **não ordenadas** possíveis.

Quando a escolha **é ordenada**, chamados de **Arranjo** (simples) de n objetos, tomados k a k. Em particular, quando $k = n$, o arranjo é chamado **Permutação** dos n objetos.

Quando a escolha **não é ordenada**, chamamos de **Combinação** (simples) dos n objetos, tomados k a k.

✓ **Exercícios Propostos 1.**

(01) Explique o significado das expressões:
(a) Combinação de 5 elementos, tomados 4 a 4;
(b) Arranjo de 10 elementos, tomados 3 a 3;
(c) Permutação de 10 elementos;
(d) Combinação de 10 elementos, tomados 10 a 10.

(02) Determine em quais das situações a seguir a ordem é relevante (temos um arranjo ou permutação) e em quais a ordem é irrelevante (temos uma combinação):
(a) Escolher 2 pessoas, de um grupo de 5, para compor uma comissão.
(b) Escolher 2 pessoas, de um grupo de 5, para compor uma comissão constituída de presidente e secretário. O presidente terá um salário mensal de $R\$10.000,00$ e o secretário, de $R\$937,00$.
(c) Escolher 4 dentre as 6 frutas abaixo:
{ Abacate, Abacaxi, Banana, Laranja, Maçã, Mamão }
para fazer uma salada de frutas.
(d) Escolher 4 dentre as 6 frutas abaixo:
{ Abacate, Abacaxi, Banana, Laranja, Maçã, Mamão }
para comer ao longo do dia: uma no café da manhã, uma na sobremesa, outra no lanche da tarde e a quarta, na ceia;
(e) Acomodar 7 pessoas em 7 cadeiras colocadas em fila indiana.
(f) Formar um número de 3 algarismos distintos usando somente: 3, 4, 5, 6, 7, 8.
(g) Sacar 05 cartas simultaneamente de um baralho de 52 cartas.
(h) Sacar 05 cartas consecutivas de um baralho de 52 cartas.

2 Cálculo do Número de Arranjos

Usaremos a notação $A_{n,k}$ para representar o número de arranjos (simples) de n elementos, tomados k a k. Nosso objetivo agora é determinar o valor de $A_{n,k}$ para inteiros arbitrários n e k, com $n \geq 1$ e $1 \leq k \leq n$. Para isso, usaremos o Princípio Multiplicativo.

Considere $E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ um conjunto com n objetos e k um inteiro, com $n \geq 1$ e $1 \leq k \leq n$. Nosso objetivo é contar quantas são as opções que temos de **escolher, de forma ordenada**, k elementos distintos de E.

Tarefa: Escolher k objetos distintos, dentre os n de E, e colocá-los na ordem abaixo:

$$\underset{p_1}{\_\_}\ \underset{p_2}{\_\_}\ \underset{p_3}{\_\_}\ ...\ \underset{p_{k-1}}{\_\_\_}\ \underset{p_k}{\_\_}$$

	Etapas da tarefa	Restrições	N.P.
1^a	Escolher 1 elemento para p_1	-	n
2^a	Escolher 1 elemento para p_2	$\neq p_1$	$n-1$
3^a	Escolher 1 elemento para p_3	$\neq p_1, p_2$	$n-2$
..	...	..	...
k^a	Escolher 1 elemento para p_k	$\neq p_1, p_2, ...p_{k-1}$	$n-(k-1)$

Pelo P.M., o número de modos de executar a tarefa é dado por:

$$A_{n,k} = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) \tag{3.1}$$

Usando a definição de fatorial, podemos simplificar a expressão obtida para $A_{n,k}$. Multiplicando (3.1) por $\frac{(n-k)!}{(n-k)!}$, obtemos:

$$A_{n,k} = n(n-1)(n-2)...(n-k+1)\frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Assim, temos que:

$$\boxed{A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Lembrando que dado um inteiro $n \geq 0$, definimos o fatorial de n por:

$$\begin{cases} 0! & = 1 \\ n! & = n(n-1)!, \\ & \text{se n} \geq 1 \end{cases}$$

.

✓ Exercícios Propostos 2.

(01) Calcule e explique o que foi calculado:
(a) $A_{5,3}$
(b) $A_{10,4}$
(c) $A_{8,2}$
(d) $A_{6,5}$

Exercícios Resolvidos 9.

(01) Quantos números de 2 dígitos significativos distintos podem ser formados no sistema decimal?

Solução:

Formar um números de 2 dígitos significativos distintos (excluímos o zero), consiste em escolher e ordenar dois elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, sendo portando um arranjo simples de 9 elementos, tomados 2 a 2, o que pode ser feito por $A_{9,2} = \frac{9!}{7!} = 72$. $\square$

(02) Quantos números naturais de 3 dígitos distintos existem no sistema decimal?

Solução:

Formar um número de 3 dígitos distintos (começados ou não por zero) equivale a escolher e ordenar 3 elementos do conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, sendo portanto um arranjo simples de 10 elementos, tomados 3 a 3, cujo total é dado por $A_{10,3} = \frac{10!}{7!} = 720$. Porém, neste total estão incluídos os começados por zero, que não são considerados números de 3 dígitos. Precisamos então, descontar o total de números dessa formar, já calculado na questão anterior. Portanto, o total de números de 3 dígitos distintos: $720 - 72 = 648$. $\square$

(03) De quantas maneiras uma nutricionista pode montar um cardárpio para consumo diário: café, sobremesa e lanche, usando em cada momento somente uma das frutas: Mamão, maçã, laranja, abacaxi ou pera, de modo que não haja repetição de frutas no mesmo dia?

Solução:

Montar o cardárpio implica em escolher e ordenar 3 dentre as 6 frutas. Isso pode ser feito de $A_{6,3} = \frac{6!}{3!} = 120$ modos. $\square$

3 Permutações

O Arranjo de n elementos, tomando n a n, isto é, quando $k = n$, é chamado de **Permutação** de n elementos. A permutação trata-se pois de uma ordenação de n objetos. Denotaremos por P_n o número de permutação de n elementos. Como $0! = 1$, temos:

$$P_n = A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Portanto,

$$\boxed{P_n = n!}$$

✓ Exercícios Propostos 3.

(01) Calcule e explique o que está sendo calculado:
(a) P_4
(b) P_8
(c) P_6

Exercícios Resolvidos 10.

(01) De quantos modos 5 pessoas podem sentar-se em 5 cadeiras colocadas em fila indiana?
Solução:
Trata-se de escolher e ordenar 5 dentre 5, ou seja, uma permutação de 5 elementos, cujo total é dado por $P_5 = 5! = 120$. □

(02) De quantos modos 5 pessoas podem sentar-se em 5 cadeiras em fila indiana, de modo que duas delas, Ana e Bia, fiquem juntas?
Solução:
Suponha $P_1 = Ana$, $P_2 = Bia$, P_3, P_4 e P_5 as 5 pessoas. Um solução é considerar $X = P_1P_2$ (ou $X = P_2P_1$) como se fosse uma só pessoa. O problema passa a ser permutar os símbolos X, P_3, P_4, P_5, o que pode ser feito com as seguintes etapas:

	Etapas da tarefa	Restrições	N.P.
1^a	Permutar X, P_3, P_4, P_5	-	4!
2^a	Permutar P_1, P_2 entre si	-	2!

Total: $= 4! \times 2! = 48$. □

(03) Com a palavra VESTIBULAR, determine:
(a) quantos são os anagramas possíveis:
Solução:
Cada anagrama é uma permutação das 10 letras distintas: V, E, S, T, I, B, U, L, A, R, o que pode ser feito de $P_{10} = 10! = 3.268.800$. □

(b) quantos são os anagramas que começam com as letras V, E, S, nessa ordem:
Solução:

	Etapas da tarefa	Restrições	N.P.
1^a	Escolher uma letra para a 1^a posição	deve ser V	1
2^a	Escolher uma letra para a 2^a posição	deve ser E	1
3^a	Escolher uma letra para a 3^a posição	deve ser S	1
4^a	Permutar as 7 letras restantes nas 7 últimas posições	-	7!

Total $= 1 \times 1 \times 1 \times 7! = 5.040$. □

(c) quantos são os anagramas que começam pelas letras V, E, S, em qualquer ordem;

Solução:

	Etapas da tarefa	Restrições	N.P.
1^a	Permutar as letras V, E, S nas 3 primeiras posições	-	3!
2^a	Permutar as letras T, I, B, U, L, A, R nas 7 posições restantes		7!

Total $= 3! \times 7! = 30.240$. □

(d) quantos são os anagramas que começa com as letras V, E, S, nesta ordem e terminam com as letras L, A, R, em uma ordem qualquer:
Solução:
Considere

$$\underset{p_1}{\_\_}\ \underset{p_2}{\_\_}\ \underset{p_3}{\_\_}\ \underset{p_4}{\_\_}\ \underset{p_5}{\_\_}\ \underset{p_6}{\_\_}\ \underset{p_7}{\_\_}\ \underset{p_8}{\_\_}\ \underset{p_9}{\_\_}\ \underset{p_{10}}{\_\_}$$

o anagrama a ser formado.

	Etapas da tarefa	Restrições	N.P.
1^a	Escolher uma letra para a posição p_1	deve ser V	1
2^a	Escolher uma letra para a posição p_2	deve ser E	1
3^a	Escolher uma letra para a posição p_3	deve ser S	1
4^a	Permutar as letras L, A, R nas posições p_8, p_9, p_{10}	-	3!
5^a	Permutar as letras T, I, B, U nas posições p_4, p_5, p_6, p_7	-	4!

Pelo P. M, total $= 1 \times 1 \times 1 \times 3! \times 4! = 144$. □

Lista de Exercícios 3.

(01) Quantos números naturais de seis dígitos distintos existem no sistema decimal?

(02) Quantos são os arranjos dos dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, tomados 4 a 4, que tem o dígito 1 na primeira posição?

(03) Determine o número de anagramas da palavra CADERNO, que tem:
(a) as letras C, A, D nas três primeiras posições, nessa ordem;
(b) as letras C, A, D, nas três primeiras posições, em qualquer ordem;
(c) as letras C, A, D juntas, nessa ordem;
(d) as letras C, A, D juntas, em qualquer ordem;
(e) a leta C na primeira posição e a letra A na segunda;
(f) a letra C na primeira posição ou a letra A na segunda;
(g) a letra C na primeira posição, ou a letra A na segunda, ou a letra D na terceira posição.

(04) Se A é um conjunto com 7 elementos, quantas são as funções bijetoras $f : A \to A$?

(05) Se A e B são conjuntos com n elementos, quantas são as funções bijetoras $f : A \to B$?

(06) Escrevem-se em ordem crescente todos os números obtidos permutando-se os ímpares: 1, 3, 5, 7, 9.
(a) Quantos são os números escritos?
(b) Que número ocupa a primeira posição?
(c) Que número ocupa a última posição?
(d) Que lugar ocupa o número 57.913?
(e) Qual o número que ocupa a 80^0 posição?

(07) De quantos modos é possível sentar 3 mulheres e 5 homens em 8 cadeiras colocadas em fila indiana:
(a) sem restrições?
(b) de modo que a primeira cadeira seja ocupada por uma mulher?
(c) de modo que a primeira e última cadeiras sejam ocupadas por pessoas do sexo masculino?
(d) de modo que Ana e Carla, duas dessas mulheres, fiquem em cadeiras consecutivas?
(e) de modo que as mulheres fiquem em cadeiras consecutivas?
(f) de modo que os homens fiquem em cadeiras consecutivas?
(g) de modo que pessoas de mesmo sexo fiquem juntas?
(h) de modo que as mulheres fiquem juntas ou os homens fiquem juntos?

(08) De quantos modos é possivel colocar 10 pessoas, $P_1, P_2, ..., P_{10}$ em fila indiana, de modo que P_1 e P_2 fiquem juntas e P_3 e P_4 não fiquem juntas?

(09) De quantos modos podemos colocar em fila indiana 6 homens e 6 mulheres, de modos que homens e mulheres fiquem em posição alternadas?

(10) De quantos modos podemos arrumar em uma prateleira 5 livros de Matemática, 3 de Física e 2 de Química, todos distintos, de modo que livros de um mesmo assunto fiquem juntos?

Respostas da Lista de Exercícios 3

(01) 136.080
(02) 60
(03.a) 24
(03.b) 144
(03.c) 120
(03.d) 720
(03.e) 120
(03.f) 1.320
(03.g) 1.824
(04) 5.040
(05) $n!$
(06.a) 120
(06.b) 13.579
(06.c) 97.531
(06.d) 65^0
(06.e) 73.195
(07.a) 40.320
(07.b) 15.120
(07.c) 14.400
(07.d) 10.080
(07.e) 4.320
(07.f) 2.880
(07.g) 1.440
(07.h) 5.760
(08) 564.480
(09) 1.036.800
(10) 8.640

Capítulo 4

Combinações Simples

Objetivos:

✓ **Apresentar a fórmula para calcular o número de Combinações Simples.**

1 Número Binomial

Definição 1. *Dados inteiros* n *e* k*, com* $n \geq 0$ *e* $0 \leq k \leq n$*, chamamos de* ***Número Binomial de numerador*** n ***e classe*** k*, ao inteiro indicado por* C_n^k*, dado por:*

$$C_n^k := \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

O número binomial C_n^k, pode também ser representado por $C_{n,k}$ ou $\binom{n}{k}$.

Exemplos:

(01) $C_5^3 = \frac{5!}{3!.2!} = 10.$

(02) $C_7^1 = \frac{7!}{1!.6!} = 7.$

(03) $C_n^0 = \frac{n!}{0!.n!} = 1$, para todo inteiro $n \geq 0$.

(04) $C_n^n = \frac{n!}{n!.0!} = 1$, para todo inteiro $n \geq 0$.

(05) $C_{10}^8 = \frac{10!}{8!.2!} = C_{10}^2$. Mais geralmente, temos que:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = C_n^{n-k}.$$

C_n^k e C_n^{n-k} são ditos Números Binomiais Complementares.

Os números binomiais satisfazem uma importante relação, dada na proposição abaixo, conhecida como Relação de Stifel.

C_n^k e C_n^{k+1} são ditos Números Binomiais Consecutivos.

Proposição 3. *(**Relação de Stifel**) Para quaisquer inteiros n e k, com $n \geq 1$ e $0 \leq k \leq n-1$, temos a identidade:*

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} C_n^k + C_n^{k+1} &= \tfrac{n!}{k!(n-k)!} + \tfrac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\ &= \tfrac{n!}{k!(n-k)(n-k-1)!} + \tfrac{n!}{(k+1)k!(n-k-1)!} \\ &= \tfrac{n!}{k!(n-k-1)!}\left[\tfrac{1}{n-k} + \tfrac{1}{k+1}\right] \\ &= \tfrac{n!}{k!(n-k-1)!}\left[\tfrac{n+1}{(k+1)(n-k)}\right] \\ &= \tfrac{(n+1)n!}{(k+1)k!(n-k)(n-k-1)!} = \tfrac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = C_{n+1}^{k+1}. \end{aligned}$$

□

2 Combinações Simples

Vimos no capítulo anterior, que dados um conjunto $E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ com n elementos e um inteiro k, com $1 \leq k \leq n$, cada escolha **não ordenada** de k elementos distintos de E é chamada uma **Combinações Simples dos n objetos, tomados k a k**. Diz-se também ser uma **Combinação Simples de classe k dos objetos $a_1, a_2, .., a_n$.**

Observe que uma combinação simples de n objetos, tomados k a k, nada mais é do que um subconjunto com k elementos, do conjunto contendo os n objetos dados.

Exemplos:

(01) Se $E = \{$ Ana, Bia, Carlos, Lucas $\}$, então

$E_1 = \{$ Ana, Bia $\}$,

$E_2 = \{$ Ana, Lucas $\}$,

$E_3 = \{$ Lucas, Bia $\}$

são combinações de classe 2 dos elementos de E.

(02) Se $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, então

$E_1 = \{3, 6, 7, 9\}$ e

$E_2 = \{0, 3, 4, 8\}$

são exemplos de combinações simples de 10 elementos, tomados 4 a 4.

3 Cálculo do Número de Combinações Simples

Dados um conjunto $E = \{a_1, a_2, .., a_n\}$ com n elementos distintos, nosso objetivo agora é contar quantas são as combinações simples de classe k, dos elementos de E, ou, de modo equivalente, quantos são os subconjuntos de E com k elementos.

Vamos denotar por x esse total. Para determinar o valor de x, usaremos a técnica de *contagem dupla*, a qual consiste em efetuar determinada contagem

de duas maneiras distintas. Considerando que não haverá erro em nenhum dos processos, necessariamente os resultados devem coincidir. Nesse caso, usaremos duas estratégias distintas para determinar o número de arranjo simples de n elementos, tomados k a k, conforme abaixo:
(i) Repetimos o mesmo processo feito no capítulo anterior, onde obtivemos:

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

(ii) Usaremos agora as seguintes etapas para escolher de forma ordenada k objetos de E:

$$\underset{p_1}{\text{—}}\ \underset{p_2}{\text{—}}\ \underset{p_3}{\text{—}} \dots \underset{p_k}{\text{—}}.$$

	Etapas da tarefa	Restrições	N.P.
1^a	Escolher, de forma não ordenada, k elementos do conjunto E	-	x
2^a	Ordenar os k elementos escolhidos nas k posições acima	-	$k!$

Total: $x \times k!$

Como as duas estratégias executaram a mesma tarefa, então devemos ter:

$$\frac{n!}{(n-k)!} = x \times k!$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = C_n^k.$$

Portanto,

O número de Combinações Simples de n objetos, tomados k a k, é dado por:

$$\mathbf{C_n^k} = \frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{k!\,(n-k)!}}.$$

Como cada combinação de n elementos de classe k, nada mais é do que um subconjunto com k de um conjunto com cardinalidade n, podemos enunciar o seguinte resultado.

Proposição 4. *Seja E um conjunto finito com n elementos. Para cada inteiro $0 \leq k \leq n$, existem exatamente*

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

subconjuntos de E com k elementos.

Exemplos:

(01) O conjunto $E = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_{15}\}$ tem exatemente:
(a) $C_{15}^2 = \frac{15!}{2!.13!} = 105$ subconjuntos com 2 elementos;
(b) $C_{15}^8 = \frac{15!}{8!.7!} = 6.435$ subconjuntos com 8 elementos.
(c) $C_{15}^{10} = \frac{15!}{10!.5!} = 3.003$ subconjuntos com 10 elementos;
(d) $C_{15}^1 = \frac{15!}{1!.15!} = 15$ subconjuntos com 1 elementos;
(e) $C_{15}^{15} = \frac{15!}{0!.15!} = 1$ subconjunto com 15 elementos;
(f) $C_{15}^0 = \frac{15!}{0!.15!} = 1$ subconjunto com 0 elementos.

Exercícios Resolvidos 11.

(01) Quantas são as opções que temos de formar uma comissão de 5 membros, escolhidos dentre 8 pessoas?
Solução:
Trata-se de uma escolha, não ordenada, de 5 elementos distintos de um conjunto contendo 8 elementos. Logo, uma combinação simples de classe 5, de 8 objetos, cujo total é dado por $C_8^5 = \frac{8!}{3!(8-5)!} = 56$. □

(02) De uma turma formada por 12 homens e 8 mulheres, dentre eles Ana e Bruno, deseja-se formar uma comissão de 10 membros. Quantas são as opções que temos de escolher os membros para formar esta comissão:
(a) sem restrições?
Solução:
Trata-se simplesmente de escolher, de forma não ordenada, 10 elementos dentre 20, cujo total é dado $C_{20}^{10} = \frac{20!}{10!10!} = 184.756$. □

(b) de modo que sejam escolhidas 5 pessoas de cada sexo?
Solução:
Formamos a comissão executando as seguintes etapas:

	Etapas da tarefa	Restrições	N.P.
1^a	Escolher 5 mulheres dentre 8	-	C_8^5
2^a	Escolher 5 homens dentre 12	-	C_{12}^5

Total : $C_8^5 \times C_{12}^5 = 56 \times 792 = 44.352$. □

(c) de modo que sejam escolhidas 5 pessoas de cada sexo, sendo Ana uma das escolhidas?
Solução:
Descrevendo as etapas temos:

	Etapas da tarefa	Restrições	N.P.
1^a	Escolher Ana para a comissão	-	C_1^1
2^a	Escolher 4 mulheres, dentre as 7 restantes	-	C_7^4
3^a	Escolher os 5 homens, dentre os 12	-	C_{12}^5

Total : $C_1^1 \times C_7^4 \times C_{12}^5 = 1 \times 35 \times 792 = 27.720$. □

(d) escolhendo-se 5 pessoas de cada sexo, dentre elas Ana e Bruno?

Solução:

	Etapas da tarefa	Restrições	N.P.
1^a	Escolher Ana para a comissão	-	C_1^1
2^a	Escolher 4 mulheres, dentre as 7 restantes	-	C_7^4
3^a	Escolher Bruno para a comissão	-	C_1^1
4^a	Escolher 4 homens, dentre os 11 restantes	-	C_{11}^4

Total : $1 \times 35 \times 1 \times 330 = 11.550$.

(e) de modo que sejam escolhidas 5 pessoas de cada sexo, sendo que Ana e Bruno não sejam escolhidos?
Solução:

	Etapas da tarefa	Restrições	N.P.
1^a	Escolher as 5 mulheres	Excluir Ana	C_7^5
2^a	Escolher 5 homens	Excluir Bruno	C_{11}^5

Total : $C_7^5 \times C_{11}^5 = 21 \times 462 = 9.702$. □

(f) de modo que sejam escolhidas 5 pessoas de cada sexo, sendo que se Ana for escolhida, então Bruno não deverá participar?
Solução:
Podemos observar que as únicas comissões que não servem são aquelas em que ambos, Ana e Bruno participam. Assim, devemos excluir do total de comissões encontrado na letra (b), o total das comissões calculadas na letra (d). Portanto, o valor procurado é dado por $44.352 - 11.550 = 32.802$. □

(03) Uma comissão formada por $k+1$ pessoas deve ser escolhida de um grupo formado por n homens e 1 mulher (considere $0 \leq k < n$).
(a) Quantas são as opções que se tem de formar essa comissão?
Solução:
Formar a comissão consiste na escolha não ordenada de $k+1$ elementos de um conjunto de cardinalidade $n+1$, o que pode ser feito de C_{n+1}^{k+1}. □

(b) Quantas são as opções em que a mulher participa?
Solução:
Escolhemos a mulher para a comissão (só há uma maneira de fazer isto) e devemos então escolher as k pessoas restantes, dentre os n homens, o que pode ser feito de C_n^k.

(c) Quantas são as opções em que a mulher não participa?
Solução:
Como a mulher não deve fazer parte da comissão, então as $k+1$ pessoas devem ser escolhidas dentre os n homens, o que pode ser feito de C_n^{k+1}. □

(d) Qual é a relação entre os valores encontrados nas letras (a), (b) e (c)?

Solução:
Considere
U - conjunto de todas as comissões possíveis;
X - conjunto das comissões em que a mulher participa.
Podemos escrever U como a união disjunta:

$$U = X \cup \overline{X}$$

onde $\overline{X}$ é o complementar de X, isto é, o conjunto das comissões em que a mulher não participa.
Pelo Princípio aditivo:

$$|U| = |X \cup \overline{X}| = |X| + |\overline{X}|$$

Usando os valores obtidos nas letras (a), (b) e (c) temos:

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$$

a qual é a relação de Stifel. □

(04) De quantos modos podemos dividir 15 pessoas:
(a) em três grupos: Grupo 1 - torcedores do Paysandu, Grupo 2 - torcedores do Remo e Grupo 3 - torcedores do Águia, com 5 pessoas em cada grupo?
Solução:
Tarefa: Dividir 15 pessoas em 3 grupos nominados, com 5 pessoas em cada um.

	Etapas da tarefa	Restrições	N.P.
1^a	Escolher 5 pessoas, dentre as 15, para o Grupo 1	-	C_{15}^5
2^a	Escolher 5 pessoas, dentre as 10 restantes, para o Grupo 2	-	C_{10}^5
3^a	Escolher 5 pessoas, dentre as 5 restantes, para o Grupo 3	-	C_5^5

Total: $C_{15}^5 \times C_{10}^5 \times C_5^5 = 3.003 \times 252 \times 1 = 756.756$. □

(b) em três grupos, como na letra (a), sendo que os Grupos 1 e 2 deverão ter 6 pessoas cada um?
Solução:
Tarefa: Escolher 6 pessoas para o Grupo 1, 6 para o Grupo 2 e 3 pessoas para o Grupo 3.

	Etapas da tarefa	Restrições	N.P.
1^a	Escolher 6, dentre 15, para o Grupo 1	-	C_{15}^6
2^a	Escolher 6, dentre 9, para o Grupo 2	-	C_9^6
3^a	Escolher 3, dentre 3, para o Grupo 3	-	C_3^3

Total: $C_{15}^6 \times C_9^6 \times C_3^3 = 420.420$. □

(c) em dois grupos, sendo um com 8 pessoas e outro com 7 pessoas?

Solução:
Tarefa: Dividir 15 pessoas em um grupo de 8 e um grupo de 7.

	Etapas da atarefa	Restrições	N.P.
1^a	Escolher 8, dentre 15, para o grupo de 8	-	C_{15}^{8}
2^a	Escolher 7, dentre as 7 restantes, para o grupo de 7	-	C_{7}^{7}

Total $C_{15}^{8} \times C_{7}^{7} = 6.435.$ □

(05) De quantos modos podemos dividir 15 pessoas:
(a) em três grupos, com 5 pessoas em cada um deles?
Solução:
Pensemos: - qual é a diferença dessa questão para a letra (a) da questão anterior? Observe que na questão anterior, os grupos tinham denominações, logo eram distinguíveis. Aqui os grupos são sem denominações, portanto a única distinção entre eles estará em seus participantes. Logo, não podemos usar os mesmos passos da resolução anterior.

Denotaremos por x o valor procurado. Para determinar x, usaremos a técnica de contagem dupla. Nesse caso, usaremos outra estratégia para resolver novamente a letra (a) da questão anterior. Isto nos permitirá determinar o valor de x.
Tarefa: Dividir 15 pessoas em 3 grupos distintos: Grupo 1, 2 e 3, com 5 pessoas em cada um.
Desta feita, executaremos as seguintes etapas.

	Etapas da tarefa	Restrições	N.P.
1^a	Dividir as 15 pessoas em 3 grupos de 5	-	x
2^a	Dentre os grupos formados, escolher o Grupo 1	-	3
3^a	Dentre os grupos restantes, escolher o Grupo 2	-	2
4^a	Dentre os grupos restantes, escolher o Grupo 3	-	1

Total: $x.3!$

Pela letra (a) da questão anterior, esse total é dado por $C_{15}^{5} \times C_{10}^{5} \times C_{5}^{5}$. Como este valor é único, devemos ter:

$$x.3! = C_{15}^{5} \times C_{10}^{5} \times C_{5}^{5} \Rightarrow x = \frac{15!}{(5!)^3 \times 3!}.$$

□

(b) em três grupos, sendo dois deles com 6 pessoas cada um?

Solução:
Observamos aqui que há dois grupos com a mesma quantidade de elementos e esses não tem denominações. Como no caso anterior, suponhamos x o número procurado. Para determinar x usaremos a técnica da contagem dupla, usando outra estratégia para resolver a letra (b) da questão anterior.
Tarefa: Escolher 6 pessoas para o Grupo 1, 6 para o Grupo 2 e 3 pessoas para o Grupo 3.

	Etapas da tarefa	Restrições	N.P.
1^a	Dividir as 15 pessoas em 2 grupos de 6 e 1 grupo de 3	-	x
2^a	Dentre os grupos de 6 formados, escolher o Grupo 1	-	2
3^a	Dentre os grupos de 6 restantes, escolher o Grupo 2	-	1
4^a	Dentre os grupos de 3 formados, escolher o Grupo 3	-	1

Total: $x.2!$.

Usando a contagem obtida na resolução da letra (b) da questão anterior, temos:

$$x.2! = C_{15}^{6} \times C_{9}^{6} \times C_{3}^{3} \Rightarrow x = \frac{15!}{(6!)^2 \times 2! \times 3!}.$$

□

(c) em um grupo de 8 e um grupo de 7?
Solução:
Embora os grupos não tenham denominações, eles se diferenciam por terem número de componentes diferentes. Nesse caso, a resolução é a mesma da letra (c) da questão anterior:

Tarefa: Dividir 15 pessoas em um grupo de 8 e um grupo de 7.

	Etapas da atarefa	Restrições	N.P.
1^a	Escolher 8, dentre 15 para o grupo de 8	-	C_{15}^{8}
2^a	Escolher 7, dentre as 7 restantes, para o grupo de 7	-	C_{7}^{7}

Total $C_{15}^{8} \times C_{7}^{7} = \frac{15!}{8!.7!}$. □

Lista de Exercícios 4.

(01) Calcule e interprete o que está sendo calculado:
(a) C_{12}^{2} (b) C_{8}^{8} (c) C_{6}^{1} (d) C_{n}^{n-1} (e) C_{n}^{n-2} (f) C_{n}^{3}

(02) Uma prova é composta por 10 questões, das quais o aluno deverá escolher 5 para resolver. Quantas são as opções que ele tem de selecionar as 5 questões?

(03) No jogo da Mega-Sena, sorteam-se 6 números do conjunto $\{1, 2, 3, ..., 59, 60\}$, desprezando-se a ordem do sorteio. Quantos são os resultados possíveis no sorteio da Mega-Sena?

(04) Quantos são os jogos de um campeonato, disputados por 15 clubes, no qual todos se enfrentam uma única vez?

(05) Em uma reunião cada pessoa comprimentou todas as demais com um aperto de mão. Se houve ao total 190 apertos de mão, quantas pessoas havia na reunião?

(06) De um grupo de 8 pessoas, quantas são as opções de formar uma comissão:
(a) composta por 5 pessoas?
(b) composta de no mínimo 5 pessoas?

(07) Uma turma de Matemática do PARFOR-UFPA é composta por 8 homens e 13 mulheres. Determine quantas são as opções que se tem de formar uma comissão composta por 6 pessoas, escolhidas dentre os alunos dessa turma, de modo que:
(a) a comissão seja formada sem restrição alguma;
(b) a comissão seja formada só por mulheres;
(c) a comissão seja formada só por homens;
(d) a comissão seja formada por 3 pessoas de cada sexo;
(e) a comissão seja formada por 2 mulheres e 4 homens;
(f) a comissão seja formada com pelo menos 2 mulheres;
(g) Ana e Carlos, dois dos alunos dessa turma, façam parte da comissão;
(h) Ana ou Carlos faça parte da comissão;
(i) Ana faça parte da comissão e Carlos não.
(j) a comissão seja formada por 3 pessoas de cada sexo, sendo que Ana e Carlos façam parte da comissão;
(k) a comissão seja formada por 3 pessoas de cada sexo, sendo que Ana ou Carlos faça parte da comissão;
(l) a comissão seja formada por 3 pessoas de cada sexo, sendo que Ana faça parte e Carlos não.

(08) De quantos modos podemos dividir 12 pessoas:
(a) em três grupos, denominados A, B e C, com 4 pessoas cada um?
(b) em três grupos: A, B e C, sendo A e B com 5 pessoas e C com 2?
(c) em um grupo com 7 pessoas e outro com 5?
(d) em três grupos, com 4 pessoas cada um?
(e) em três grupos, sendo dois deles com 5 pessoas cada um?

(09) De quantos modos podemos ordenar as letras A, B, C, D, E, F, G, de modo ABCD fiquem nesta ordem:
(a) e em posições consecutivas;
(b) mas não necessariamente em posições consecutivas?

(10) Júlia possui 8 pares de sapatos (todos distintos). De quantas modos ela pode selecionar dois sapatos, sem que eles sejam do mesmo par?

(11) Quantos são os números naturais de 4 dígitos distintos, formado somente com os dígitos $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, os quais contém 1 e 2?

(12) Dados 5 pontos, entre os quais quaisquer 3 não são colineares, quantas retas podemos construir com esses 5 pontos?

(13) Em uma circunferência são tomados 8 pontos distintos. Usando somente esses pontos, determine quantas são as opções que se tem de construir:
(a) uma corda nessa circunferência;
(b) um triângulo inscrito nessa circunferência;
(c) um hexágonos inscrito nessa circunferência.

(14) De quantos modos podemos ordenar as letras A,A,A,A,A,A,A,B,B,B,B, de modo que nenhuma das letras $B's$ fiquem juntas?

(15) Quantos são os subconjuntos de $A = \{a_1, a_2, ..., a_{12}\}$ com 7 elementos, em que:
(a) a_1 pertence?
(b) a_1 não pertence?
(c) a_1 e a_2 pertencem?
(d) pelo menos um dos elementos a_1, a_2 pertencem?
(e) exatamente um dos elements a_1, a_2 pertence?

Respostas da Lista de Exercícios 4

(01.a) 66	(01.b) 1	(01.c) 6	(01.d) n	(01.e) $\frac{n(n-1)}{2}$	(01.f) $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$
(02) 252	(03) 50.063.860	(04) 105	(05) 20		
(06.a) 56	(06.b) 93				
(07.a) 54.264	(07.b) 1.716	(07.c) 28	(07.d) 16.016	(07.e) 5.460	(07.f) 53.508
(07.g) 3.876	(07.h) 27.132	(07.i) 11.628	(07.j) 1.386	(07.k) 8.316	(07.l) 2.310
(08.a) 34.650	(08.b) 16.632	(08.c) 792	(08.d) 5.775	(08.e) 8.316	
(09.a) 24	(09.b) 210				
(10) 112	(11) 144	(12) 10			
(13.a) 28	(13.b) 56	(13.c) 28			
(14) 70					
(15.a) 462	(15.b) 330	(15.c) 252	(15.d) 672	(15.e) 420	

Capítulo 5

Permutações Circulares

Objetivos:

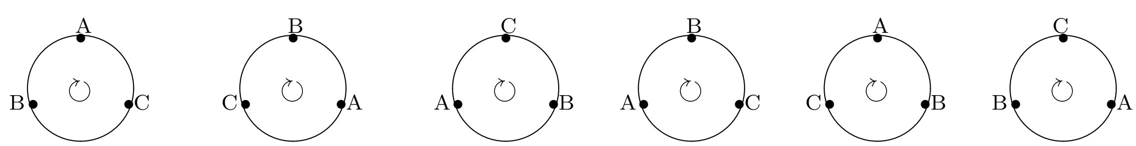
✓ **Definir Permutações Circulares**
✓ **Apresentar a fórmula para o cálculo do número de permutações circulares.**

1 Introdução

Considerando A, B e C três crianças, determine:
• De quantos modos podemos formar uma fila com essas 3 crianças?
Solução:
Já vimos que existem $3! = 6$ modos de permutar (formar uma fila com) essas crianças, as quais são:

$$ACB - BAC - CBA - BCA - ABC - CAB$$

• De quantos modos podemos formar uma roda de ciranda com essas crianças?
Solução:
Podemos colocar cada uma das 6 filas acima em torno de um círculo, como representados abaixo, onde colocamos a primeira pessoa da fila no ponto mais ao norte e distribuimos a fila no sentido horário:



Nas permutações simples é relevante a posição que cada objeto ocupa, por exemplo, as filas

$$ACB - BAC - CBA$$

são distintas, pois A ocupa em cada delas, uma posição diferente. Porém, nas permutações circulares, o que importa é a **posição relativa** dos objetos entre si. Assim, nas disposições acima, vemos que:
(i) Nos três primeiros círculos, os quais podemos descrever, respectivamente,

como:

$$(ACB), \quad (BAC), \quad (CBA)$$

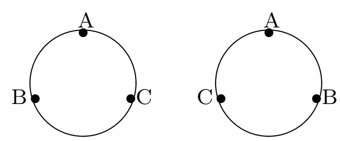
as pessoas ocupam a mesma disposição no círculo:
· à direta de A está B e à sua esquerda, C;
· à direta de B está C e à sua esquerda, A;
· à direta de C está A e à sua esquerda, B.
E qualquer uma dessas permutações pode ser obtida da outra por rotação.

(ii) Nos três últimos círculos, descritos respectivamente, como:

$$(BCA), \quad (ABC), \quad (CAB)$$

as pessoas também ocupam a mesma disposição, distinta das três primeiras:
· à direta de A está C e à sua esquerda, B;
· à direta de B está A e à sua esquerda, C;
· à direta de C está B e à sua esquerda, A.
E também, quaisquer uma das três permutações pode ser obtida da outra por meio de uma rotação.

Desta forma, consideramos que temos apenas duas maneiras distintas de dispor as três crianças em uma roda:



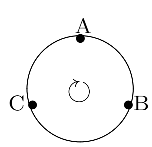
Nesta aula, veremos como contar o número de permutações circulares de n objetos distintos.

2 Definição

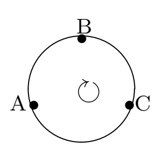
Definição 2. *Chama-se **Permutação Circular** de n objetos distintos, qualquer disposição desses n objetos em torno de um círculo, colocados em lugares igualmente espaçados.*

Duas permutações circulares são ditas **indistinguíveis** quando uma pode ser obtida da outra por meio de uma rotação. Permutações circulares indistinguíveis são contadas como uma só.

Exemplos:
(01) As permutações circulares abaixo:



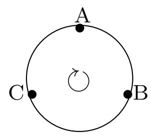
(ABC)



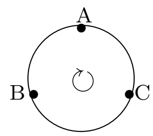
(BCA)

são indistinguíveis, pois coincidem por rotação. São contadas como uma só.

(02) As permutações circulares (ABC) e (ACB)



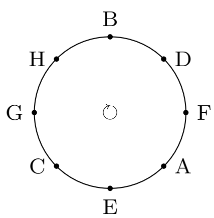
(ABC)



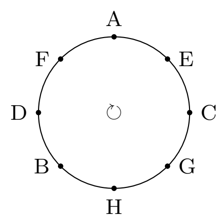
(ACB)

são distintas, pois não coincidem por rotação.

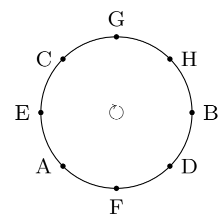
(03) As permutações circulares abaixo:



$(BDFAECGH)$



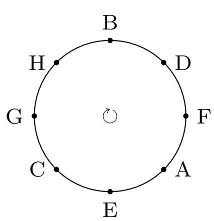
$(AECGHBDF)$



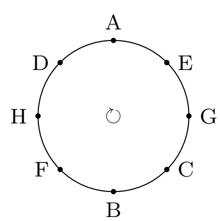
$(GHBDFAEC)$

são insdistinguíveis, pois coincidem por rotação. Logo, são contadas como uma só.

(04) As permutações circulares abaixo:



$(BDFAECGH)$



$(AEGCBFHD)$

não coincidem, qualquer que seja a rotação, logo são distintas.

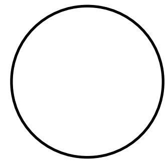
3 Número de Permutações Circulares

Denotaremos por PC_n o número de permutações circulares de n objetos. Nosso objetivo agora é determinar PC_n, para um inteiro $n \geq 1$ qualquer.

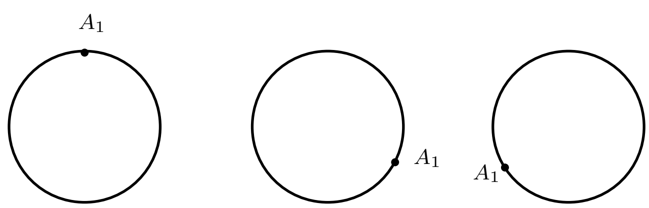
Exercícios Resolvidos 12.

(01) Determine:
(a) PC_1

Solução:
Considere a tarefa de colocar A_1 no círculo abaixo:



Lembrando, que não é relevante o lugar que a pessoa (ou o objeto) ocupa no círculo, mas sim sua posição relativa, ou seja, sua posição em relação aos demais elementos no círculo. Nesse caso, como A_1 é único, só há uma possibilidade de colocá-lo no círculo. Em qualquer lugar que o coloquemos, ele é o único elemento no círculo. Observe que todas as permutações abaixo coincidem por rotação.

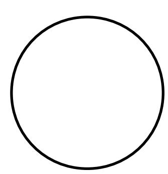


Escrevemos (A_1) para representar esta permutação. E temos que,

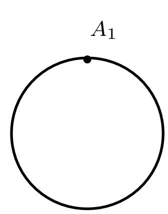
$$PC_1 = 1.$$

$\square$

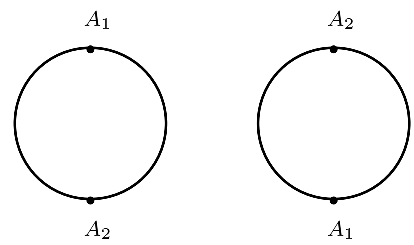
(b) PC_2
Solução:
Considere a tarefa de colocar A_1 e A_2 no círculo abaixo:



Inicialmente colocamos A_1 no círculo, havendo para isso uma única possibilidade, como visto na leta (a).



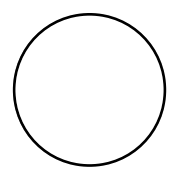
A 2^a etapa consiste em colocar A_2 no círculo, de modo que A_1 e A_2 fiquem em lugares igualmente espaçados. Também só temos uma possibilidade para isso. Observe que as permutações circulares abaixo coincidem por rotação:



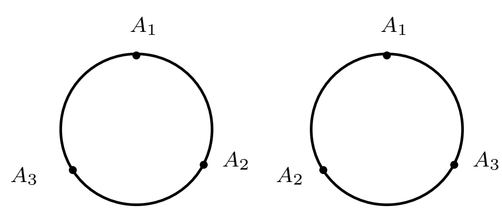
$$(A_1A_2) = (A_2A_1).$$

Assim, $PC_2 = 1$. □

(c) PC_3
Solução:
Tarefa:: colocar A_1, A_2 e A_3 no círculo abaixo:



Etapas:
1^a Colocar A_1 no círculo: só há 1 possibilidade;
2^a Colocar A_2 no círculo: só há 1 possibilidade;
3^a Colocar A_3 no círculo, de modo que os 3 fiquem igualmente espaçados: temos 2 possibilidades para isso, como abaixo:

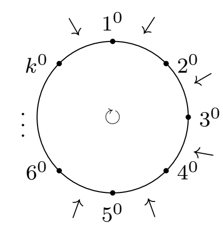


$$(A_1A_2A_3) \neq (A_1A_3A_2).$$

Pelo P.M, $PC_3 = 1 \times 1 \times 2 = 2$. □

Generalizando, vamos determinar PC_n, para $n \geq 1$ arbitrário. Para tal, coloquemo-nos no lugar da pessoa que deve *montar uma permutação circular* com n elementos, isto é, colocar n objetos distintos, A_1, $A_2, A_3, ..., A_n$, em torno de um círculo, de modo que fiquem igualmente espaçados. Temos n etapas na execução da tarefa, que correspondem à escolha de um lugar no círculo, para cada um dos n elementos.

Antes, observamos que para todo inteiro $k \geq 2$, se existem k elementos em torno de um círculo, então existem k possibilidades de colocarmos mais um elemento nesse círculo, já que esse pode ser colocado, entre 1^0 e 2^0, entre 2^0 e 3^0, entre 3^0 e 4^0, ..., entre k^0 e 1^0, conforme indicado com a seta ($\leftarrow$) no círculo abaixo (estamos escolhendo um elemento qualquer do círculo e, a partir desse, enumerando-os em ordem crescente e no sentido horário).



Colocando as n etapas em uma tabela, temos:

Etapas da tarefa	Restrições	N.P.
1^a Colocar A_1 no círculo	-	1
2^a Colocar A_2 no círculo	-	1
3^a Colocar A_3 no círculo	-	2
4^a Colocar A_4 no círculo	-	3
5^a Colocar A_5 no círculo	-	4
$\vdots$		$\vdots$
n^a Colocar A_n no círculo	-	$(n-1)$

Total: $1 \times 1 \times 2 \times 3 \times ... \times (n-1) = (n-1)!$. □

Portanto,

O número de Permutações Circulares de n objetos distintos é dado por:

$$\mathbf{PC_n = (n-1)!}$$

Exercícios Resolvidos 13.

(01) Considere um grupo de 8 crianças, sendo 5 meninos e 3 meninas. De quantos modos podemos formar uma roda de ciranda com essas crianças:

(a) sem restrições?

Solução:

O problema consiste em forma uma permutação circular com 8 elementos, cujo total é dado por $PC_8 = 7! = 5.040$. □

(b) de modo que dois meninos, previamente determinados, fiquem juntos?

Solução:

Considere $H_1, H_2, ..., H_5$ os meninos, M_1, M_2, M_3 as meninas, sendo H_1 e H_2 os

meninos que devem ficar juntos.
Considerando $X = H_2H_1$, em alguma ordem escolhida, como um elemento só, o problema transforma-se em formar uma permutação circular com 7 elementos.
Temos assim as seguintes etapas:

	Etapas da tarefa	Restrições	N.P.
1^a	Escolher uma ordem para os 2 meninos H_1, H_2	-	$2!$
1^a	Formar uma permutação circular com $X, H_3, H_4, H_5, M_1, M_2, M_3$	-	$PC_7 = 6!$

Total: $2! \times 6! = 1.440$. □

(c) de modo que pessoas de mesmo sexo fiquem em posições consecutivas?
Solução:
Como na questão anterior, vamos considerar $X = H_1H_2H_3H_4H_5$ o grupo dos meninos e $Y = M_1M_2M_3$ o grupo das meninas, ambos ordenados previamente, como um único elemento. O problema transforma-se em formar uma permutação circular com 2 elementos.

	Etapas da tarefa	Restrições	N.P.
1^a	Escolher uma ordem para os 5 meninos	-	$5!$
2^a	Escolher uma ordem para as 3 meninass	-	$3!$
1^a	Formar uma permutação circular com X e Y	-	$PC_2 = 1!$

Total $= 5! \times 3! \times 1 = 720$. □

(d) de modo a não haver duas mulheres adjacentes?
Solução:

	Etapas da tarefa	Restrições	N.P.
1^a	Colocar os meninos no círculo	-	$PC_5 = 4!$
2^a	Escolher um lugar para M_1	-	5
3^a	Escolher um lugar para M_2	não poder ser ao lado de M_1	4
4^a	Escolher um lugar para M_3	não poder ser ao lado de M_1 e nem M_2	3

Total: $4! \times 5 \times 4 \times 3 = 1.440$. □

(e) De modo que Antônio e Ana, duas dessas crianças, fiquem juntos, porém Luiz e Júlia, que também estão entre os oito, não fiquem juntos?
Solução:
Considere $H_1 =$ Antônio, $H_2 =$ Luiz, H_3, H_4, H_5 os meninos e $M_1 =$ Ana, $M_2 =$ Júlia, M_3 as meninas e $X = H_1M_1$, em uma ordem previamente escolhida.
Executemos as seguintes etapas:

	Etapas da tarefa	Restrições	N.P.
1^a	Escolher uma ordem para M_1, H_1	-	$2!$
2^a	Formar uma permutação circular com $X, H_2, H_3, H_4, H_5, M_3$	-	$PC_6 = 5!$
3^a	Escolher um lugar para M_2	não ao lado de H_1	4

Total: $2! \times 5! \times 4 = 960$.

Outra solução é contar todas as permutações circulares em que H_1, M_1 ficam juntos e desse total, excluir o número das permutações em que H_2 e M_2 estão juntos. Fazendo isso, obtemos: $1.440 - 480 = 960$. □

Lista de Exercícios 5.

(01) De quantos modos 10 pessoas podem sentar-se em torno de uma mesa circular?

(02) Considere um grupo formado por 6 meninos e 6 meninas. De quantos modos podemos formar uma roda de ciranda com este grupo:
(a) sem restrições?
(b) de modo que três dessas crianças, Ana, Bia e André, fiquem juntas?
(c) de modo que duas dessas crianças, Ana e André, não fiquem juntas?
(d) de modo que os meninos fiquem juntos?
(e) de modo que pessoas de mesmo sexo não fiquem juntas?

(03) De quantos modos pode-se formar uma roda com m meninos e m meninas, de modo que meninos e meninas fiquem em posições alternadas?

(04) Quantas são as opções que se tem de dividir uma turma formada por 12 pessoas, em 4 grupos, com 3 pessoas cada um, e em seguida acomodás-las em torno de uma mesa circular, de modo que as pessoas de um mesmo grupo, fiquem em posições consecutivas?

(05) Seis casais amigos: Toninho e Anita, Bruno e Bia, Carlos e Cláudia, Divaldo e Duda, Euládio e Eva, Falso e Verdadeira, resolveram sair para curtir a noite. Inicialmente foram ao Parque de Nazaré brincar na roda gigante e depois, a um restaurante para jantar.
(a) De quantos modos esses 6 casais podem sentar-se em uma roda gigante de seis bancos, com dois lugares cada um, ficando cada casal (marido-mulher) em um banco?
(b) De quantos modos esses doze amigos podem ocupar os seis bancos de uma roda gigante, que tem dois lugares em cada banco?
(c) No parque, Verdadeira teve um desentendimento com seu esposo, de modo que no restaurante não deseja ficar perto dele. De quantas maneiras esses seis casais podem sentar-se em torno de uma mesa circular, de modo que Verdadeira fique o mais afastada possível de Falso?
(d) De quantas maneiras os seis casais poderão sentar-se em torno de uma mesa circular, de modo que, pelo menos duas mulheres fiquem sempre juntas?
(e) As mulheres resolveram aproveitar o jantar para atualizar as fofocas. De quantas maneiras os casais poderão sentar-se em torno de uma mesa circular, de modo que as mulheres fiquem sempre juntas e Verdadeira não fique ao lado de Falso?

Respostas da Lista de Exercícios 5

(01) 362.880

(02.a) 39.916.800

(02.b) 2.177.280

(02.c) 32.659.200

(02.d) 518.400

(02.e) 86.400

(03) $(m-1)!m!$

(04) 119.750.400

(05.a) 7.680

(05.b) 79.833.600

(05.c) 3.628.800

(05.d) 39.830.400

(05.e) 489.600

Capítulo 6

Permutações com Repetições

Objetivos:

✓ **Definir Permutações com Repetições**
✓ **Apresentar a fórmula para o cálculo do número de Permutações com Repetições.**

1 Introdução

• Quantas são os anagramas da palavra ANA?
Solução:
Pelo cálculo das permutaçoes simples, temos $3! = 6$ anagramas. Representando por A_1 e A_2 as duas letras $A's$, esses 6 anagramas são:

1 - A_1NA_2
2 - A_2NA_1
3 - NA_1A_2
4 - NA_2A_1
5 - A_1A_2N
6 - A_2A_1N

Entretanto, observamos que não temos 6 anagramas distintos, isto porque, quanto permutamos entre si as duas letras A's, obtemos o mesmo anagrama. Assim, nessa contagem cada anagrama foi contado 2! vezes. Vejamos como efetuar corretamente esse cálculo, evitanto contar o mesmo anagrama mais de uma vez. Para isso, usaremos o Princípio Multiplicativo:

Tarefa: Formar uma palavra de três letras, usando as letras: A, N, A.

$$\overline{p_1}\ \overline{p_2}\ \overline{p_3}$$

	Etapas da tarefa	possibilidades
1^a	Escolher 2 posições, dentre as 3 acima, para colocar as duas letras A's	$C_{3,2}$
2^a	Escolher 1 posição, dentre 1 restante, para colocar a letra N	$C_{1,1}$

Pelo P.M., total $= C_{3,2} \times C_{1,1} = 3$.

Exercícios Resolvidos 14.

(01) Quantas são os anagramas da palavra CURURU?
Solução:
Tarefa: Formar 1 anagrama com as letras: U, U, U, C, R, R.

$$\underset{p_1}{\_\_}\ \underset{p_2}{\_\_}\ \underset{p_3}{\_\_}\ \underset{p_4}{\_\_}\ \underset{p_5}{\_\_}\ \underset{p_6}{\_\_}$$

	Etapas da tarefa	Possibilidades
1^a	Escolher 3 posições, dentre as 6, para colocar as 3 letras U's	$C_{6,3}$
2^a	Escolher 2 posições, dentre as 3 restantes, para colocar as 2 letras R's	$C_{3,2}$
3^a	Escolher 1 posição, dentre 1 restante, para colocar a letra C	$C_{1,1}$

Assim, o total é dado por:

$$= C_{6,3} \times C_{3,2} \times C_{1,1} = \frac{6!}{3!.3!}.\frac{3!}{2!.1!}.\frac{1!}{1!.0!} = \frac{6!}{3!.2!.1!} = 60. \qquad \square$$

(02) Quantos são os anagramas da palavra OTORRINOLARINGOLOGISTA?
Solução:
Tarefa: Formar uma paralavra com as letras: O, O, O, O, O, T, T, R, R, R, I, I, I, N, N, L, L, A, A, G, G, S:

$$\underset{p_1}{\_\_}\ \underset{p_2}{\_\_}\ \underset{p_3}{\_\_}\ \underset{p_4}{\_\_}\ \underset{p_5}{\_\_}\ \underset{p_6}{\_\_}\ \underset{p_7}{\_\_}\ \underset{p_8}{\_\_}\ \underset{p_9}{\_\_}\ \underset{p_{10}}{\_\_}\ \underset{p_{11}}{\_\_}\ \underset{p_{12}}{\_\_}\ \underset{p_{13}}{\_\_}\ \underset{p_{14}}{\_\_}\ \underset{p_{15}}{\_\_}\ \underset{p_{16}}{\_\_}\ \underset{p_{17}}{\_\_}\ \underset{p_{18}}{\_\_}\ \underset{p_{19}}{\_\_}\ \underset{p_{20}}{\_\_}\ \underset{p_{21}}{\_\_}\ \underset{p_{22}}{\_\_}$$

	Etapas da tarefa	possibilidades
1^a	Escolher 5 posições, dentre 22, para colocar as letras O's	C_{22}^5
2^a	Escolher 2 posições, dentre 17, para colocar as letras T's	C_{17}^2
3^a	Escolher 3 posições, dentre 15, para colocar as letras Rs	C_{15}^3
4^a	Escolher 3 posições, dentre 12, para colocar as letras I's	C_{12}^3
5^a	Escolher 2 posições, dentre 9, para colocar as letras N's	C_9^2
6^a	Escolher 2 posições, dentre 7, para colocar as letras L's	C_7^2
7^a	Escolher 2 posições, dentre 5, para colocar as letras A's	C_5^2
8^a	Escolher 2 posições, dentre 3, para colocar as letras G's	C_3^2
9^a	Escolher 1 posição, dentre 1, para colocar a letra S	C_1^1

Pelo, P.M., total: $= C_{22}^5 \times C_{17}^2 \times C_{15}^3 \times C_{12}^3 \times C_9^2 \times C_7^2 \times C_5^2 \times C_3^2 \times C_1^1$

$$= \frac{22!}{5!.17!}.\frac{17!}{2!.15!}.\frac{15!}{3!.12!}\frac{12!}{3!.9!}.\frac{9!}{2!.7!}.\frac{7!}{2!.5!}.\frac{5!}{2!.3!}.\frac{3!}{2!.1}$$

$$= \frac{22!}{5!.3!^2.2!^5}. \qquad \square$$

2 Número de Permutações com Repetições

Generalizando, vamos procurar responder a seguinte questão:

- De quantos modos podemos ordenar os n objetos abaixo?

$$\underbrace{A_1A_1...A_1}_{n_1\times}\underbrace{A_2A_2...A_2}_{n_2\times}\underbrace{A_3A_3...A_3}_{n_3\times}....\underbrace{A_kA_k...A_k}_{n_k\times}$$

Ou seja, n_1 objetos A_1, n_2 objetos A_2, n_3 objetos A_3, ..., n_k objetos A_k, com $n_1+n_2+...+n_k=n$.

Usaremos a notação $P_n^{n_1,n_2,...,n_k}$ para representar o número de possibilidades de ordenar esses n objetos. Para determinar esse valor, usaremos o princípio multiplicativo, como fizemos nos exemplos acima.

Considere

$$\frac{}{p_1}\ \frac{}{p_2}\ \frac{}{p_3}\ ...\ \frac{}{p_{n-1}}\ \frac{}{p_n}$$

os n espaços, nos quais serão colocados os n objetos.

	Etapas da tarefa	Possibilidades
1^a	Escolher n_1 posições, dentre n, para colocar A_1	$C_n^{n_1}$
2^a	Escolher n_2 posições, dentre $n-n_1$, para colocar A_2	$C_{n-n_1}^{n_2}$
3^a	Escolher n_3 posições, dentre $n-(n_1+n_2)$, para colocar A_3	$C_{n-n_1-n_2}^{n_3}$
...	...	..
n_k^a	Escolher n_k posições, dentre n_k restantes, para colocar A_k	$C_{n_k}^{n_k}$

Pelo princípio multiplicativo, temos:

$$P_n^{n_1,n_2,...,n_k}=C_n^{n_1}\times C_{n-n_1}^{n_2}\times C_{n-n_1-n_2}^{n_3}\times...\times C_{n_k}^{n_k}$$

$$=\tfrac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\cdot\tfrac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\cdot\tfrac{(n-n_1-n_2)!}{n_2!.(n-n_1-n_2-n3)!}\cdot\quad...\quad\cdot\tfrac{n_k!}{n_k!(n_k-n_k)!}$$

$$=\tfrac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}.$$

Assim,

$$\boxed{P_n^{n_1,n_2,..,n_k}=\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\,...\,n_k!}.}$$

Exercícios Resolvidos 15.

(01) Considerando a palavra GARRAFA.

(a) Quantos são os anagramas?

Solução:

Trata-se de permutar 7 letras, com repetições de 2 R's e 3 A's, cujo total é dado por $P_7^{2,3}=\frac{7!}{3!2!}=420.$ $\square$

(b) Quantos são os anagramas que começam por A?

Solução:
Tarefa: Formar um anagrama da palavra GARRAFA começando por A

	Etapas da tarefa	Restrições	Possibilidades
1^a	Escolher 1 letra para a 1^a posição	deve ser A	1
2^a	Permutar as demais letras: G, A, A, R, R, F	-	$P_6^{2,2}$

Pelo P.M., total $= \frac{6!}{2!.2!} = 180$. □

(02) Quantos são os anagramas da palavra SOSSEGO, que começam por consoante?
Solução:
SOSSEGO tem apenas duas consoantes, e de acordo com a consoante escolhida para a primeira posição, temos contagens distintas para as demais posições. Assim, vamos dividir o problema em dois casos:
Caso 1: - Anagramas começados por S:
Tarefa: Formar uma paralavra com as letras S, S, S, O, O, E, G, começando por S

	Etapas da tarefa	Restrições	Possibilidades
1^a	Escolher uma letra para a 1^a posição	deve ser S	1
2^a	Permutar as letras restantes: S, S, O, O, E, G	-	$P_6^{2,2}$

Total do Caso 1: 180.

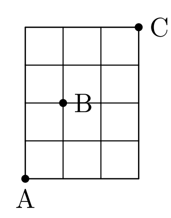
Caso 2: - Anagramas começados por G:
Tarefa: Formar uma paralavra com as letras S, S, S, O, O, E, G, começando por G

	Etapas da tarefa	Restrições	Possibilidades
1	Escolher uma letra para a 1^a posição	deve ser G	1
2	Permurtar as letras restantes: S, S, S, O, O, E	-	$P_6^{3,2}$

Total do Caso 2: 60.

Total de anagramas= Caso 1 + Caso 2 = 240. □

(03) A figura abaixo representa 9 ruas que se cortam perpendicularmente, sendo 5 horizontais e 4 verticais.



Quantos são os trajetos mínimos possíveis que uma pessoa pode percorrer:
(a) do ponto A ao ponto C?
Solução:
Para percorrer um trajeto mínimo, a pessoa tem sempre que deslocar-se para a direita ou para cima. Se representarmos por:
H - um deslocamento horizontal (entre duas ruas verticais adjacentes),
V - um deslocamento vertical (entre duas ruas horizontais adjacentes),

então, cada percurso mínimo de A a C é uma ordenação das letras:

$$H\ H\ H\ V\ V\ V\ V$$

o que pode ser feito de $P_7^{4,3} = 35$ modos. $\square$

(b) do ponto A ao ponto C, passando por B?
Nesse caso a tarefa é composta de duas etapas:

	Etapas da tarefa	Restrições	Possibilidades
1^a	Escolher um caminho para ir de A a B (HVV)	-	$P_3^2 = 3$
2^a	Escolher um caminho para ir de B a C (HHVV)	-	$P_4^{2,2} = 6$

Total: $3 \times 6 = 18$. $\square$

(c) do ponto A ao ponto C, sem passar por B?
Basta excluir do total de possibilidades para ir de A e C, os caminhos que passam por B. Assim, total $= 35 - 18 = 17$. $\square$

Lista de Exercícios 6.

(01) Quantos são os anagramas da palavra TARTARUGA?

(02) Considerando a palavra BARREIRA.
(a) Quantos são os anagramas?
(b) Quantos são os anagramas que começam por vogal?
(c) Quantos são os anagramas que começam por consoante?

(03) Considerando a palava TACACANACUIA.
(a) Quantos são os anagramas?
(b) Quantos são os anagramas que começam por A?
(c) Quantos são os anagramas que começam por C e terminam por A?
(e) Quantos são os anagramas que começam por consoante?

(04) Em base binária, todos os números são representados usando-se apenas os dígitos 0 e 1. Quantos números distintos pode-se formar, em base binária:
(a) com cinco $0's$ e cinco $1's$?
(b) com oito $0's$ e dois $1's$?

(05) Quantos números de nove algarismos podem ser formado, permutando-se os números 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4?

(06) Quantas são as opções que temos de colocar 8 bolinhas ($\bullet$) e 6 barras ($|$) em sequência?

(07) De quantas formas podemos ordenar os símbolos

$$\underbrace{\bullet\bullet\bullet\ldots\bullet}_{p\times}\underbrace{|\,|\,|\ldots|}_{(n-1)\times},$$

isto é, p bolinhas e $n-1$ barras?

(08) Em 10 lançamentos de uma moeda, ocorreram 7 caras. Quantas são as possíveis sequências de cara (k) e coroa (c), que podem ser observadas nessa situação?

(09) Uma urna contém 8 bolas vermelhas e 3 pretas. Elas são extraídas uma a uma, sem reposição. Quantas sequência de cores podemos observar?

(10) De quantos modos podemos colocar em fila 5 professores de Matemática, 5 de Física e 3 de Química, se professores de mesma disciplina forem considerados indistinguíveis?

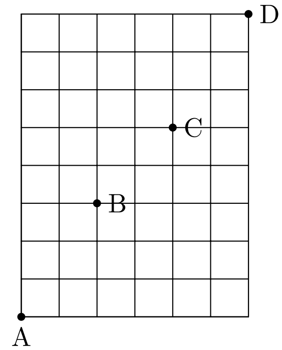
(11) Quantas são as permutações dos dígitos 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5 , nas quais os números ímpares estão sempre em ordem crescente?

(12) Com os algarismos 1, 2, 4, 4, 4, 5, 9, 9:

(a) Quantos números podem ser formados?
(b) Quantos números maiores que 40.000.000 podem ser formados?
(c) Quantos números pares, maiores que 90.000.000, podem ser formados?

(13) Uma urna contém 3 bolas brancas, 2 pretas e 2 vermelhas. Retiram-se, sucessivamente e sem reposição, 5 bolas dessa caixa. Quantas são as possíveis sequências de cores para as bolas retiradas?

(14) A figura abaixo representa 16 ruas que se cortam perpendicularmente, sendo 9 horizontais e 7 verticais.



Quantos são os trajetos mínimos possíveis que uma pessoa pode percorrer:
(a) do ponto A ao ponto D?
(b) do ponto A ao ponto D, passando por B?
(c) do ponto A ao ponto D, passando por B e C?
(d) do ponto A ao ponto D, passando por B ou C?
(e) do ponto A ao ponto D, passando por B e não passando por C?

Respostas da Lista de Exercícios 6

(01) 15.120				
(02.a) 3.360	(02.b) 1.680	(02.c) 1.680		
(03.a) 665.280	(03.b) 277.200	(03.c) 75.600	(03.d) 6.720	(03.e) 277.200
(04.a) 252	(04.b) 45			
(05) 1.260				
(06) 3.003				
(07) $P^{p,n-1}_{n+p-1} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} = C^p_{p+n-1}$				
(08) 120				
(09) 165				
(10) 72.072				
(11) 210				
(12a.) 3.360	(12.b) 2.520	(12.c) 480		
(13) 130				
(14.a) 3.003	(14.b) 1.260	(14.c) 600	(14.d) 1.920	(14.e) 660

Capítulo 7

Combinações Completas

Objetivos:

✓ **Definir Combinações com Repetições**
✓ **Determinar a fórmula para calcular o número de Combinações com Repetições.**

1 Introdução

• Suponha que você vai à feira e lá estão à venda estes quatro tipos de frutas:

(a) Quantas são as opções que você tem de comprar 3 frutas **distintas**, escolhidas dentre esses quatro tipos?
Solução:
Trata-se de uma combinação simples de 4 elementos, tomados 3 a 3, cujo total é dado por $C_4^3 = 4$. Sendo essas 4 opções:
{ Mamão, Caju, Goiaba}, { Mamão, Caju, Manga },
{ Mamão, Goiaba, Manga } e { Caju, Goiaba, Manga }.

(b) Quantas são as opções que você tem de comprar 3 frutas, **não necessariamente distintas**, escolhidas dentre esses quatro tipos?
Solução:
Agora, além das 4 opções anteriores, temos também as seguintes opções:
{ Mamão, Mamão, Mamão}, { Mamão, Mamão, Caju },
{ Mamão, Mamão, Goiaba }, { Mamão, Mamão, Manga },
{ Caju, Caju, Caju }, { Caju, Caju, Mamão },
{ Caju, Caju, Goiaba }, { Caju, Caju, Manga },
{ Goiaba, Goiaba, Goiaba }, { Goiaba, Goiaba, Mamão },
{ Goiaba, Goiaba, Caju }, { Goiaba, Goiaba, Manga },
{ Manga, Manga, Manga }, { Manga, Manga, Mamão },

{ Manga, Manga, Caju } e { Manga, Manga, Goiaba }.

Totalizando: 4 + 16 = 20. □

Vejamos, como podemos chegar a esse total, sem a necessidade de relacionarmos todas as opções. Considere:
x_1 - número de mamãos que serão comprados;
x_2 - número de cajus que serão comprados ;
x_3 - número de goiabas que serão compradas;
x_4 - número de mangas que serão compradas.

Como serão compradas apenas 3 frutas, então

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3,$$

com x_1, x_2, x_3, x_4 números inteiros não negativos.

Assim, haverá tantas possibilidades de comprar as 3 frutas, quantas são as soluções inteiras não negativas da equação acima. Neste capítulo, aprenderemos a contar o número de soluções inteiras não negativas dessas equações e aplicá-las no cálculo das combinações com repetições.

2 Equações lineares com coeficientes unitários

Uma equação da forma

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = p$$

onde $n \geq 1$ e p são números naturais é chamada **equação linear com coeficientes unitários**.

Toda n-upla $\beta = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ de números inteiros tal

$$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = p$$

é uma solução inteira da equação. Se para todo i, $\alpha_i \geq 0$, dizemos que β é uma solução *inteira não negativa* e se $\alpha_i > 0$, então diz-se que β é uma solução *inteira positiva*.

Vejamos agora como contar quantas são as soluçõe inteiras não negativas ou positivas de uma equação linear com coeficientes unitários.

Número de soluções inteiras não negativas

Considere a equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3.$$

Usando uma bolinha (•) para representar a unidade, uma barra (|) para a vírgula e suprimindo os parênteses, vejamos como ficam a representação de algumas soluções dessa equação:

$$\begin{array}{rcl}
(1,1,0,1) & = & \bullet|\bullet|\ \ |\bullet \\
(0,0,3,0) & = & |\ \ |\bullet\bullet\bullet| \\
(0,1,0,2) & = & |\bullet|\ \ |\bullet\bullet \\
(3,0,0,0) & = & \bullet\bullet\bullet|\ \ |\ \ |
\end{array}$$

Com essa convenção, observa-se que cada solução inteira não negativa da equação, corresponde a uma ordenação dos símbolos:

$$\bullet\bullet\bullet\quad |\quad |\quad |$$

Reciprocamente, a cada ordenação das 3 bolinhas e 3 barras acima, fica associada uma única solução da equação. Por exemplo:

$$\begin{array}{lcl}
|\bullet\bullet|\ \ |\bullet & = & (0,2,0,1) \\
|\ \ |\ \ |\bullet\bullet\bullet & = & (0,0,0,3) \\
|\bullet|\bullet|\bullet & = & (0,1,1,1)
\end{array}$$

Isso porque, existe uma correspondência biunívoca entre as soluções inteiras não negativas da equação e as permutações dos 6 símbolos: $\bullet\ \bullet\ \bullet\quad |\quad |\quad |$. Assim, a equação tem tantas soluções inteiras não negativas quantas são as permutações desses símbolos, cujo total é dado por $P_6^{3,3} = C_6^3 = \frac{6!}{3!3!} = 20$. □

Considerando agora a equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10.$$

Usando a mesma convenção anterior, as soluções $(2,3,5)$, $(3,0,7)$, $(2,8,0)$ e $(0,5,5)$ dessa equação são representadas por:

$$\begin{array}{rcl}
(2,3,5) & = & \bullet\bullet|\bullet\bullet\bullet|\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet \\
(3,0,7) & = & \bullet\bullet\bullet|\ \ |\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet \\
(2,8,0) & = & \bullet\bullet|\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet| \\
(0,5,5) & = & |\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet|\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet
\end{array}$$

Cada uma dessas soluções corresponde a uma ordenação de 10 bolinhas ($\bullet$) e 2 barras ($|$), portanto uma ordenação de 12 símbolos, com repetições de 10 e 2, havendo um total de $P_{12}^{10,2} = \frac{12!}{10!2!} = 66$ soluções.

A proposição abaixo generaliza esses resultados.

Proposição 5. *O número de soluções inteiras* ***não negativas*** *da equação linear*

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = p$$

é dado por:

$$P_{p+n-1}^{p,n-1} = \frac{(p+n-1)!}{p!\,(n-1)!}.$$

Demonstração:
Cada solução corresponde a uma ordenação de p bolinhas (cada $\bullet$ representa 1 unidade) e $n-1$ barras (cada $|$ representa uma vírgula e para separar n variáveis, usa-se $n-1$ vírgulas). Assim, existem tantas soluções inteiras e não negativas quantas são as permutações desses $p+n-1$ símbolos, com repetições de p e $n-1$, o que é dado por:

$$P_{n+p-1}^{p,n-1} = \frac{(n+p-1)!}{p!\,(n-1)!} = C_{p+n-1}^{p}.$$

$\square$

Exercícios Resolvidos 16.

(01) Determine o número de soluções inteiras não negativas da equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4.$$

Solução:
Para obter uma solução, devemos permutar 4 bolinhas e 3 traços, logo existem $P_7^{4,3} = \frac{7!}{4!3!} = 35$ soluções inteiras não negativas. $\square$

(02) Determine o número de soluções inteiras não negativas da inequação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 < 5.$$

Vejamos duas formas distintas de resolver esse problema.
Solução 1:
Observe que $(1,1,1,1), (0,2,0,1), (0,1,1,0), (1,0,0,0)$ e $(0,0,0,0)$ são todas soluções dessa inequação, pois em todos os casos a soma das coordenadas da 4-upla é um inteiro estritamente menor que 5. Assim, devemos contar quantas são as soluções inteiras não negativas das equações:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = p, \quad \text{para } p \in \{0,1,2,3,4\}.$$

Vejamos quantas soluções tem cada uma dessas equações.
(i) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$:
Tem 35 soluções, conforme resolvido na questão anterior.

(ii) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$:
Essa equação tem $P_6^{3,3} = 20$ soluções, conforme Proposição 5.

(iii) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$:
A qual tem $P_5^{2,3} = 10$ soluções.

(iv) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$:
Com $P_4^{1,3} = 4$ soluções.

(v) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$;
A qual tem $P_3^{0,3} = 1$ solução.

Logo, o total de soluções é dado por $35 + 20 + 10 + 4 + 1 = 70$. □

Soluções 2
Suponha $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ uma solução inteira não negativa da inequação. Então

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 < 5 \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \leq 4.$$

Considere β o inteiro definido por:

$$\beta := 4 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4.)$$

Como $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \leq 4$, então $\beta \geq 0$ e

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \beta = 4$$

$$\Downarrow$$

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta)$ é uma solução inteira não negativa da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 4. \tag{7.1}$$

Reciprocamente, se $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ é uma solução inteira não negativa da equação (7.1), então

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 4 \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 4 - \alpha_5 < 5.$$

Logo, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ é uma solução da inequação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 < 5$.

Portanto, a inequação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 < 5 \tag{7.2}$$

e a equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 4 \tag{7.3}$$

tem o mesmo número de soluções inteiras não negativas. Usando a Proposição 5, determinamos o número de soluções da equação (7.3), cujo total é dado por $P_8^{4,4} = \frac{8!}{4!4!} = 70$.

Observe que, não estamos dizendo que (7.2) e (7.3) tem as mesmas soluções, e sim que existe uma bijeção entre seus Conjuntos Solução, ou seja, a toda solução da primeira corresponde uma solução da segunda e vice-versa. Por exemplo, à solução $(0, 1, 1, 0)$ de (7.2) corresponde a solução $(0, 1, 1, 0, 2)$ da equação (7.3). E à solução $(1, 1, 1, 1, 0)$ de (7.3) está associada a solução $(1, 1, 1, 1)$ da inequação (7.2). □

(03) Determine o número de soluções inteiras não negativas da inequação:

$$x_1 + x_2 + x_3 < 10$$

Solução:
Usando o mesmo argumento da questão anterior, conclui-se que a inequação

$$x_1 + x_2 + x_3 < 10$$

tem o mesmo número de soluções inteiras não negativas da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9,$$

cujo total é dado por $P_{12}^{9,3} = 220$. □

Número de soluções positivas

• Quantas são as soluções inteiras **positivas** da equação abaixo:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10. \tag{7.4}$$

Já vimos que essa equação tem 66 soluções inteiras **não negativas**. Agora, estamos interessados em contar somente as soluções **positivas**, ou seja, ternos de inteiros $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ para os quais

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 10 \tag{7.5}$$

e $\alpha_i \geq 1$, para todo i. Assim, soluções tais como $(10, 0, 0), (0, 2, 8)$ não serão consideradas.

Observe que se $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ é uma solução inteira e **positiva** da equação, então

$$\alpha_1 \geq 1, \quad \alpha_2 \geq 1, \quad \alpha_3 \geq 1,$$

logo,

$$\alpha_1 - 1 \geq 0, \quad \alpha_2 - 1 \geq 0, \quad \alpha_3 - 1 \geq 0.$$

E de (7.5), segue que:

$$(\alpha_1 - 1) + (\alpha_2 - 1) + (\alpha_2 - 1) = 7.$$

Assim, o terno $(\alpha_1 - 1, \alpha_2 - 1, \alpha_3 - 1)$ é uma solução **não negativa** da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7. \tag{7.6}$$

Reciprocamente, se $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ é uma solução inteira **não negativa** da equação (7.6), então

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 7$$

com $\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_3 \geq 0$. Segue, então que

$$\alpha_1 + 1 \geq 1, \quad \alpha_2 + 1 \geq 1, \quad \alpha_3 + 1 \geq 1$$

e

$$(\alpha_1 + 1) + (\alpha_2 + 1) + (\alpha_2 + 1) = 10.$$

Logo, $(\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1, \alpha_3 + 1)$ é uma solução inteira **positiva** da equação (7.5).

Concluímos assim que, existe uma correspondência biunívoca entre as soluções inteiras **positivas** da equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

e as soluções inteiras **não negativas** da equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7.$$

Logo, podemos determinar o número de soluções **positivas** da primeira, calculando o número de soluções **não negativas** da segunda, cujo total é dado por $P_9^{7,2} = 36$, conforme Proposição 5. □

A próxima proposição generaliza o que fizemos acima.

Proposição 6. *Sejam n e p naturais com $p \geq n$. O número de soluções inteiras **positivas** da equação*

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = p$$

é dado por:

$$P_{p-1}^{n-1,p-n} = \frac{(p-1)!}{(n-1)!\,(p-n)!}.$$

Demonstração:
Considere

$$S_1 = \{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^* \mid \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = p\}$$

o conjunto das soluções inteiras **positivas** da equação $\mathbf{x_1 + x_2 + ... + x_n = p}$
e

$$S_2 = \{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+ \mid \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = p - n\}$$

o conjunto das soluções inteiras **não negativas** da equação $\mathbf{x_1 + x_2 + ... + x_n = p - n}$.

Vamos mostrar que existe uma bijeção entre S_1 e S_2, logo $|S_1| = |S_2|$.

Seja $\beta = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in S_1 \Rightarrow \alpha_i \geq 1$ para todo i e

$$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = p$$

$$\Downarrow$$

$$(\alpha_1 - 1) + (\alpha_2 - 1) + ... + (\alpha_n - 1) = p - n.$$

Como $\alpha_i - 1 \geq 0$, para todo i, então $(\alpha_1 - 1, \alpha_2 - 1, ..., \alpha_n - 1) \in S_2$.

Reciprocamente, se $\beta = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in S_2$, então $\alpha_i \geq 0$, para todo i e

$$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = p - n \Rightarrow (\alpha_1 + 1) + (\alpha_2 + 1) + ...(\alpha_n + 1) = p.$$

Como $\alpha_i + 1 \geq 1$, segue que $(\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1, ..., \alpha_n + 1) \in S_1$.

Assim, as aplicações:

$$\begin{array}{cccc} f: & S_1 & \rightarrow & S_2 \\ & (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) & \rightarrow & (\alpha_1 - 1, \alpha_2 - 1, ..., \alpha_n - 1) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{cccc} g: & S_2 & \rightarrow & S_1 \\ & (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) & \rightarrow & (\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1, ..., \alpha_n + 1) \end{array}$$

estão bem definidas e são a inversa uma da outra, uma vez que:
(i) Para todo $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_2) \in S_1$;
$g(f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)) = g(\alpha_1 - 1, \alpha_2 - 1, ..., \alpha_n - 1) = (\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n) \Rightarrow g \circ f = I_{S_1}$;

(ii) Para todo $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_2) \in S_2$;
$f(g(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)) = f(\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1, ..., \alpha_n + 1) = (\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n) \Rightarrow f \circ g = I_{S_2}$.

Dessa bijeção e da Propoposição 5, segue que:

$$|S_1| = |S_2| = P_{p-1}^{n-1, p-n} = \frac{(p-1)!}{(n-1)!\,(p-n)!}.$$

□

Exercícios Resolvidos 17.

(01) Determine o número de soluções inteiras positivas da equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15.$$

Solução:
Nesse caso, $n = 5$ e $p = 15$. Pela Proposição 6, o número de soluções inteiras positivas dessa equação é igual ao número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$, cujo total é dado por $P_{14}^{10,4} = 1.001$. □

(02) Quantas são as soluções inteiras da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 30$, com $x_1 \geq 2$, $x_2 \geq 3$ e $x_3 \geq 4$?
Solução:
Como $x_1 \geq 2$, $x_2 \geq 3$ e $x_3 \geq 4$, então $x_1 - 2 \geq 0$, $x_2 - 3 \geq 0$ e $x_3 - 4 \geq 0$. Definindo y_1, y_2 e y_3 por:

$$y_1 := x_1 - 2, \quad y_2 := x_2 - 3, \quad y_3 := x_3 - 4$$

e substituindo esses valores na equação dada:

$$(y_1 + 2) + (y_2 + 3) + (y_3 + 4) = 30$$

o problema recai em encontrar o número de soluções inteiras não negativas da equação:

$$y_1 + y_2 + y_3 = 21,$$

cujo total é dada por $P_{23}^{21,2} = \frac{23!}{21!.2!} = 253$. □

3 Combinações com Repetições

Definição 3. *Chama-se* ***Combinação Completa*** *ou* ***Combinação com Repetição****, de classe p de n objetos, a toda escolha não ordenado de p objetos, distintos ou não, dentre n objetos distintos dados.*

Exemplos:
(01) Para o conjunto $\{A, B, C, D\}$, temos que:

$$\{A, B, C\},\ \{A, A, B\},\ \{A, A, A\} \text{ e } \{B, C, C\}$$

são algumas combinações completas, de classe 3 das 4 letras dadas;

(02) Dado $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$:

$$\{1, 2, 3, 8\},\ \{1, 1, 5, 6\},\ \{1, 1, 1, 7\} \ \text{ e } \ \{1, 1, 1, 1\}$$

são algumas escolhas não ordenadas de 4 objetos, distintos ou não, dos 8 números dados, logo uma combinação completa de classe 4, dos 8 objetos.

A próxima proposição diz quantas são as combinações completas de classe p, de n objetos distintos.

Proposição 7. *O número de combinação completas de classe p de n objetos distintos, denotado por CR_n^p, é dado por:*

$$CR_n^p = P_{p+n-1}^{p,(n-1)} = \frac{(n+p-1)!}{p!\,(n-1)!}.$$

Demonstração:
Sejam

$$A_1, A_2, ..., A_n$$

n objetos distintos, dos quais queremos escolher p, com possíveis repetições. Considere:
x_1 - a quantidade de objetos do tipo A_1 que serão escolhidas;
x_2 - a quantidade de objetos do tipo A_2 que serão escolhidas;
$\vdots$
x_p - a quantidade de objetos do tipo A_p que serão escolhidas.

Como serão escolhidos p objetos, então

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = p. \tag{7.7}$$

E como podemos ou não escolher quaisquer um desses objetos, segue que

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \quad ..., \quad x_n \geq 0.$$

Assim, o problema recai em determinar o número de soluções inteiras não negativas da equação (7.7), cujo total é dado por:

$$P_{p+n-1}^{p,(n-1)} = \frac{(p+n-1)!}{p!\,(n-1)!}.$$

□

Exercícios Resolvidos 18.

(01) Em uma lanchonete que vende suco em 3 sabores, de quantas maneiras pode-se fazer um pedido de 8 sucos:
(a) sem restrições?
Solução:
Considere $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ o conjunto com os 3 sabores oferecidos. Como a ordem da escolha é irrelevante e um mesmo sabor pode ser escolhido mais de uma vez, trata-se de uma combinação com repetição de classe 8, de 3 elementos distintos, cujo total é dado por $CR_8^3 = P_{10}^{8,2} = 45$ opções.

Lembrando, que podemos chegar a esse resultado resolvendo a questão diretamente, não sendo necessário memorizar a fórmula dada na Proposição 7. Para isso, basta considerar:
x_1 - número de sucos do sabor s_1 que serão pedidos;
x_2 - número de sucos do sabor s_2 que serão pedidos;
x_3 - número de sucos do sabor s_3 que serão pedidos.
Então,

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8$$

e como podemos ou não escolher quaisquer dos sabores, $x_i \geq 0$, para $i = 1, 2, 3$. Assim, a solução do problema corresponde ao número de soluções inteiras **não negativas** da equação acima, cujo é dado por $P_{10}^{8,2} = 45$. □

(b) de modo que cada sabor seja escolhido pelo menos uma vez?
Solução:
Usando as mesmas variáveis da letra (a), obtemos também a quação:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8.$$

A particularidade aqui, é que cada sabor tem que ser escolhido pelo menos uma vez, então

$$x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 1 \ \text{ e } \ x_3 \geq 1.$$

Assim, buscamos o número de soluções inteiras **positivas** da equação acima, cujo total e dado por $P_7^{5,2} = 21$. □

(c) todos os sabores sejam escolhidos pelo menos uma vez e um dos sabores, previamente determinado, seja escolhido pelo menos duas vezes?
Solução:
Vamos supor s_1 o sabor que deve ser escolhido pelo menos duas vezes.
Como nas letras (a) e (b) obtemos a equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8$$

com $x_1 \geq 2$, $x_2 \geq 1$, $x_3 \geq 1$. Fazendo

$$y_1 = x_1 - 2, \quad y_2 = x_2 - 1, \quad y_3 = x_3 - 1$$

e substituindo na equação acima, tem-se:

$$(y_1 + 2) + (y_2 + 1) + (y_3 + 1) = 8 \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = 4,$$

com $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$. Sendo, o número de soluções não negativas dessa última equação dado por $P_6^{4,2} = 15$. □

(02) De quantos modos podemos distribuir 18 livros iguais em três caixas diferentes, sem nenhuma restrição?
Solução:
Considerando,
x_1 - quantidades de livros que serão colocados na caixa 1;
x_2 - quantidades de livros que serão colocados na caixa 2;
x_3 - quantidades de livros que serão colocados na caixa 3.
Então,

$$x_1 + x_2 + x_3 = 18,$$

com $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$.

Assim, existem tantas maneiras de distribuir os livros quantas são as soluções inteiras não negativas da equação acima, cujo total é dado por $P_{20}^{18,2} = 190$. □

(03) Use as técnicas de contagem para determinar o número de peças de um dominó comum.
Solução:
Para determinar o número de peças vamos nos colocar no lugar da pessoa que vai montar uma peça.
Tarefa: Montar uma peça de dominó.

	Etapas da tarefa	Possibilidades
1	Escolher dois números, distintos ou não, no conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$CR_7^2 = P_8^{2,6}$

Total: $P_8^{2,6} = 28$. □

(04) De quantos modos é possível acomodar 5 pessoas em 3 bancos, sabendo que cada banco cabe no máximo 4 pessoas?
Solução:
Sejam b_1, b_2, b_3 os bancos, p_1, p_2, p_3, p_4 e p_5 as pessoas e
x_1 - número de pessoas que sentarão no banco b_1;
x_2 - número de pessoas que sentarão no banco b_2;
x_3 - número de pessoas que sentarão no banco b_3;
Então,

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

com $0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 4$. Essa equação tem $P_7^{5,2} = 21$ soluções inteiras não negativas. Desse total, devemos excluir as soluções $(5, 0, 0), (0, 5, 0)$ e $(0, 0, 5)$, pois devemos ter $x_i \leq 4$, para todo i, uma vez que em cada banco cabem no máximo 4 pessoas. Assim, existem 18 modos de escolher 5 lugares nos 3 bancos para acomodar as pessoas. E, uma vez escolhidos os lugares, as 5 pessoas podem ser colocados de 5! modos nesses lugares. Assim, o total é dado por $18 \times 5! = 2.160$. □

(05) Quantos são os anagramas da palavra CURURU que não tem duas letras U juntas?

Solução:

Nossa tarefa é formar um anagrama com as letras C,U,U,U,R,R com as características pedidas. Podemos dividir essa tarefa em 3 etapas:

1^a **Etapa**: - Colocar as letras U's: só há 1 possibilidade para isso;

Uma vez colocadas as letras $U's$, as letras restantes deverão ser colocadas nos espaços abaixo:

$$\underset{p_1}{—}U\underset{p_2}{—}U\underset{p_3}{—}U\underset{p_4}{—}$$

2^a **Etapa:** Escolher 3 posições, dentre as acima, para colocar as demais letras: suponha x o número de possibilidades dessa etapa.

3^a **Etapa:** Permutar as letra C, R, R nos espaços escolhidos na etapa anterior: há $P_3^2 = 3$ possibilidades.

Pelo Princípicio Multiplicativo: total $= 1 \times x \times 3$.

Resta determinar o valor de x. Para isso, considere:

x_1 - números de letras a serem colocadas na posição p_1;

x_2 - números de letras a serem colocadas na posição p_2;

x_3 - números de letras a serem colocadas na posição p_3;

x_4 - números de letras a serem colocadas na posição p_4;

Como 3 são as letras, então

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3.$$

E como não pode haver duas letras $U's$ juntas, devemos ter $x_2 \geq 1$ e $x_3 \geq 1$, e para as demais variáveis $x_1 \geq 0$ e $x_4 \geq 0$. Fazendo $y_2 = x_2 + 1$ e $y_3 = x_3 + 1$ e substituíndo na equação acima, recaímos no problema de determinar o número de soluções inteiras não negativas da equação

$$x_1 + y_2 + y_3 + x_4 = 1$$

que é dado por $P_4^3 = 4$.

Assim, $x = 4$ e o total de anagramas é dado por $1 \times 4 \times 3 = 12$. $\square$

Solução 2:

Podemos também construir o anagrama, efetuando as seguintes etapas:

1^a **Etapa:** Permutar as letras C, R, R: há $P_3^2 = 3$ possibilidades

Para cada uma dessas 3 ordenações, as letras $U's$ deverão ser colocadas nos espaços abaixo:

$$-C - R - R-$$

2^a **Etapa:**- Escolher 3, dentre os 4 espaços acima, para colocar as 3 letras U's: há $C_4^3 = 4$ possibilidades

Pelo P.M., o total de anagramas é dado por: $3 \times 4 = 12$. $\square$

Lista de Exercícios 7.

(01) Determine o número de soluções inteiras não negativas de cada uma das equações abaixo:
(a) $x_1 + x_2 + x_3 = 15$;
(b) $x_1 + x_2 + ... + x_8 = 12$;
(c) $x_1 + x_2 + ... + x_{10} = 20$.

(02) Determine o número de soluções inteiras positivas de cada uma das equações abaixo:
(a) $x_1 + x_2 + x_3 = 15$;
(b) $x_1 + x_2 + ... + x_8 = 12$;
(c) $x_1 + x_2 + ... + x_{10} = 20$.

(03) Determine o número de soluções inteiras não negativas de cada uma das inequações abaixo:
(a) $x_1 + x_2 + x_3 < 15$;
(b) $x_1 + x_2 + ... + x_8 < 12$;
(c) $x_1 + x_2 + ... + x_{10} \leq 20$.

(04) Determine o número de soluções inteiras da equação $x + y + z + w = 8$:
(a) com $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ e $w \geq 0$.
(b) com $x \geq 1$, $y \geq 1$, $z \geq 1$ e $w \geq 1$.
(c) com $x \geq 2$, $y \geq 4$, $z \geq 1$ e $w \geq 0$.
(d) com $x \geq 2$, $y \geq 1$, $z \geq 2$ e $w \geq 3$.

(05) Quantas opções se tem de dividir 12 bombons entre 7 crianças:
(a) sem restrições?
(b) de modo que todas recebam pelo menos um bombom?
(c) de modo que Arthur, uma das sete crianças, receba exatamente 3 bombons?
(d) de modo que Arthur, uma das sete crianças, receba pelo menos 3 bombons?

(06) 84, 2613, 6501 são exemplos de alguns inteiros cuja soma dos algarismos é igual a 12. Quantos números inteiros entre 1 e 10.000 tem soma dos algarimos igual a 12?

(07) Uma pizzaria vende pizza em 3 sabores: Calabresa, Portuguesa e Quatro Queijos. De quantas formas uma pessoa pode comprar 5 pizzas?

(08) Um supermercado tem 5 marcas diferentes de sabão em pó. De quantas formas uma pessoa pode comprar 10 caixas de sabão, levando pelo menos uma caixa de cada marca?

(09) Uma sorveteria vende sorvetes em 7 sabores. De quantas formas uma pessoa pode fazer o pedido de 7 sorvetes?

(10) De quantos modos podem ser pintados 6 objetos iguais, usando 3 cores diferentes?

(11) Um fotógrafo vai fotografar a Casa das Onze Janelas, exibindo sete modelos nas janelas. De quantas maneiras ele pode distribuir as 7 modelos nas 11 janelas, sabendo que cada janela cabe no máximo 5 pessoas?

Respostas da Lista de Exercícios 7

(01.a) 136	(01.b) 50.388	(01.c) 10.015.005	
(02.a) 91	(02.b) 330	(02.c) 92.378	
(03.a) 680	(03.b) 75.582	(03.c) 30.045.015	
(04.a) 165	(04.b) 35	(04.c) 4	(04.d) 1
(05.a) 18.564	(05.b) 462	(05.c) 2.002	(05.d) 5.005

(06) 415
(07) 21
(08) 126
(09) 1.716
(10) 28
(11) 97.408.080

Capítulo 8

Princípio da Inclusão-Exclusão

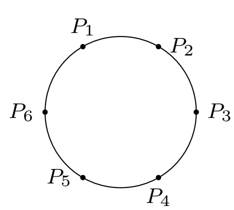
Objetivos:

✓ **Apresentar o Princípio da Inclusão-Exclusão**

1 Introdução

Faremos agora a extensão do Princípio Aditivo, visto no Capítulo 1, para um número finito qualquer de conjuntos, disjuntos ou não. Vamos iniciar, analisando a resolução da questão abaixo:

• Seis pessoas estão sentadas em torno de uma mesa circular. Quantas opções elas tem de trocar de lugar, de modo que cada pessoa passe a ter, à sua esquerda, uma pessoa diferente da atual?
Solução:
Consideremos $P_1, P_2, ..., P_6$ as seis pessoas, disposta no círculo como abaixo.



Percorrendo o círculo no sentido horário (↻) umas das formas de representar a permutação acima é:

$$(P_1P_2P_3P_4P_5P_6)$$

e nela temos que, à esquerda de P_j está P_{j+1}, para $j = 1, 2, .., 5$ e à esquerda de P_6 está P_1.

Já sabemos que existem $PC_6 = 5! = 120$ modos de dispor seis pessoas em um círculo. Assim, se denotarmos por Ω o conjunto de todas as permutações circulares das seis pessoas, então $|\Omega| = 120$. Desse total, devemos excluir todas as permutações em que temos quaisquer um dos pares abaixo, nesta ordem:

$$P_1P_2 \qquad P_2P_3 \qquad P_3P_4 \qquad P_4P_5 \qquad P_5P_6 \qquad P_6P_1$$

Se considerarmos:
$A_1 = \{\alpha \in \Omega \mid P_1P_2$ estão juntos nessa ordem $\}$;
$A_2 = \{\alpha \in \Omega \mid P_2P_3$ estão juntos nessa ordem $\}$;
$\vdots$
$A_6 = \{\alpha \in \Omega \mid P_6P_1$ estão juntos nessa ordem $\}$,

o problema recai em determinar quantos são os elementos de Ω que não pertencem a nenhum dos subconjuntos acima, ou seja, pertencem a **exatamente 0** dos conjunto $A_1, A_2, ..., A_6$. Vejamos a teoria que nos ensina a fazer esta contagem. Antes porém, vamos introduzir algumas notações que serão necessárias.

2 Notações

Dados inteiros n e p, com $n \geq 1$ e $1 \leq p \leq n$, definimos o conjunto:

$$X_{n,p} := \{(i_1, i_2, ..., i_p) \in \mathbb{Z}^p \mid 1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_p \leq n\} \tag{8.1}$$

Exemplos:
(01) $X_{3,2} = \{(i_1, i_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leq i_1 < i_2 \leq 3\} = \{(1,2), (1,3), (2,3)\} \Rightarrow |X_{3,2}| = 3$;
(02) $X_{5,1} = \{i_1 \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq i_1 \leq 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow |X_{5,1}| = 5$;
(03) $X_{4,3} = \{(i_1, i_2, i_3) \in \mathbb{Z}^3 \mid 1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 4\} = \{(1,2,3), (1,2,4), (1,3,4), (2,3,4)\}$
$\Rightarrow |X_{4,3}| = 4$;
(04) $X_{5,4} = \{(i_1, i_2, i_3, i_4) \in \mathbb{Z}^4 \mid 1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq 5\}$
$= \{(1,2,3,4), (1,2,3,5), (1,2,4,5), (1,3,4,5), (2,3,4,5)\} \Rightarrow |X_{5,4}| = 5$.

A próxima proposição determina a cardinalidade do conjunto $X_{n,p}$, para n e p arbitrários.

Proposição 8. *Dados inteiros positivos n e p, com $1 \leq p \leq n$, o conjunto*

$$X_{n,p} := \{(i_1, i_2, ..., i_p) \in \mathbb{Z}^p \mid 1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_p \leq n\}.$$

tem exatamente C_n^p elementos.

Demonstração:
Para determinar $|X_{n,p}|$, vamos construir um elemento desse conjunto. Para tal executamos as seguintes etapas:

	Etapas da tarefa	Restrições	N.P.
1^a	Escolher p elementos distintos em $\{1, 2, ..., n\}$	-	C_n^p
2^a	Construir a p-upla com os números escolhidos na etapa anterior	em ordem crescente	1

Pelo Princípio Multiplicativo, $|X_{n,p}| = C_n^p$. $\square$

Sejam A_1, A_2, ..., A_n subconjuntos de um mesmo conjunto Ω. Para cada inteiro $p = 1, 2, 3, ..., n$, definimos o inteiro S_p, como segue:

$$S_p = \sum_{(i_1, i_2, .., i_p) \in X_{n,p}} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_p}| \tag{8.2}$$

onde $X_{n,p}$ é o conjunto definido em (8.1). Para $p = 0$, definimos $S_0 = |\Omega|$.

Observe que o somatório em (18.3) tem como índice os elementos de $X_{n,p}$. Assim, o número de parcelas desse somatório é $|X_n, p| = C_n^p$, conforme Proposição 8.

Exemplos:
(01) Usando a definição de S_p, vejamos o desenvolvimento dos somatórios abaixo:
(a) S_2, para $A_1, A_2, A_3 \subset \Omega$:
Por definição, $S_2 = \sum_{(i_1,i_2) \in X_{3,2}} |A_{i_1} \cap A_{i_2}|$ e conforme visto no exemplo anterior, $X_{3,2} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$. Assim,

$$S_2 = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|.$$

$\square$

(b) S_1, para $A_1, A_2, ..., A_5 \subset \Omega$:
$S_1 = \sum_{i_1 \in X_{5,1}} |A_{i_1}|$ e como $X_{5,1} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, então,

$$S_5 = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| + |A_5|.$$

$\square$

(c) S_3, para $A_1, A_3, A_3, A_4 \subset \Omega$:

$$S_3 = \sum_{(i_1,i_2,i_3) \in X_{4,3}} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|.$$

$\square$

(04) S_4, para $A_1, A_3, A_3, A_4, A_5 \subset \Omega$:

$$S_4 = \sum_{(i_1,i_2,i_3,i_4) \in X_{5,4}} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{i_4}|$$

$$\Downarrow$$

$$S_4 = |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| \cap |A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5|.$$

3 Princípio da Inclusão-Exclusão

Lema 1. *Sejam $A_1, A_2, ..., A_n$ subconjuntos de um conjunto Ω. Para cada inteiro $p = 0, 1, 2, ..., n$, o número de elementos de Ω que pertencem a* ***exatamente*** *p*

desses subconjuntos é dado por:

$$a_p := \sum_{k=0}^{n-p} (-1)^k \, C_{p+k}^k \, S_{p+k}$$

onde S_{p+k} é como definido em (18.3) para todo $p+k \geq 1$ e $S_0 = |\Omega|$.

Demonstração: Para a demonstração veja o Apêndice III.

Exercícios Resolvidos 19.

• Seis pessoas estão sentadas em torno de uma mesa circular. Quantas são as opções que elas tem de trocar de lugar, de modo que cada pessoa passe a ter, à sua esquerda, uma pessoa diferente da atual?

Solução:

Considerando Ω o conjunto de todas as permutações circulares das seis pessoas, já vimos que a resposta desse problema é o número de elementos de Ω que pertencem a **exatamente zero** dos subconjuntos A_1, A_2,...,A_6, definidos na Introdução do capítulo. Pelo Lema 1, este número é dado por:

$$a_0 = \sum_{k=0}^{6-0} (-1)^k \, C_{0+k}^k \, S_{0+k} = \sum_{k=0}^{6} (-1)^k S_k = S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 - S_5 + S_6.$$

Resta então, determinar o valor de S_k, para $0 \leq k \leq 6$.

(i) $S_0 = |\Omega| = PC_6 = 5!$;

(ii) $S_1 = \sum_{i_1 \in X_{6,1}} |A_{i_1}| = |A_1| + |A_2| + ... + |A_6|$.
Como $|A_1| = |A_2| = ... = |A_8|$, vamos determinar $|A_1|$.
$|A_1|$ = número de permutações circulares em que P_1P_2 ficam juntas nesta ordem. Isso equivale a fazer uma permutação circular de $X = P_1P_2,\ P_3, P_4, P_5, P_6$ - que pode ser feito de $PC_5 = 4!$. Assim, $S_1 = C_6^1 \times 4!$;

(iii) $S_2 = \sum_{(i_1,i_2) \in X_{6,2}} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + ... + |A_5 \cap A_6|$.
Como $|A_{i_1} \cap A_{i_2}|$ é a mesma para quaisquer $1 \leq i_1 < i_2 \leq 6$, vamos determinar $|A_1 \cap A_2|$.
$|A_1 \cap A_2|$ = total de permutações circulares em que $X = P_1P_2$ e $Y = P_3P_4$ ficam juntas e nesta ordem, o qual é dado pelo número de permutações circulares de $Z = P_1P_2P_3, P_4, P_5, P_6$, que pode ser feito de $PC_4 = 3!$. E como $|X_{6,2}| = C_6^2$, então, $S_2 = C_6^2 \times 3!$.
Continuando com um raciocínio análogo obtemos:
(iv) $S_3 = C_6^3 \times 2!$;
(v) $S_4 = C_6^4 \times 1!$;
(vi) $S_5 = C_6^5 \times 0!$;
(vii) $S_6 = C_6^6 \times 0!$.
Assim,

$$a_0 = C_6^0 \times 5! - C_6^1 \times 4! + C_6^2 \times 3! - C_6^3 \times 2! + C_6^4 \times 1! - C_6^5 \times 0! + C_6^6 \times 0! = 36.$$

□

(02) Determine o número de inteiros compreendidos entre 1 e 1.000, inclusive, que são divisíveis por exatamente p dos números primos: 2, 3, 5 e 7, para $p \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Solução:

Consideremos:

$\Omega = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 1.000\}$;

$A_1 = \{x \in \Omega \mid 2 \text{ divide } x\} = \{2k \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq k \leq 500\}$;

$A_2 = \{x \in \Omega \mid 3 \text{ divide } x\} = \{3k \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq k \leq 333\}$;

$A_3 = \{x \in \Omega \mid 5 \text{ divide } x\} = \{5k \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq k \leq 200\}$;

$A_4 = \{x \in \Omega \mid 7 \text{ divide } x\} = \{7k \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq k \leq 142\}$.

Queremos determinar quantos são os elementos de Ω que pertencem a exatamente p dos subconjuntos A_1, A_2, A_3, A_4. Usando o Lema 1, este total é dado por:

$$a_p = \sum_{k=0}^{4-p} (-1)^k \, C_{p+k}^k \, S_{p+k}.$$

Inicialmente, vamos calcular S_0, S_1, S_2, S_3, S_4.

$\cdot \; S_0 = |\Omega| = 1.000$;

$\cdot \; S_1 = \sum_{1 \leq i_i \leq 4} |A_{i_i}| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| = 500 + 333 + 200 + 142 = 1.175$;

$\cdot \; S_2 = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 4} |A_{i_1} \cap A_{i_2}|$

$\quad = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4|$.

Agora,

$A_1 \cap A_2 = \{6k \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq 6k \leq 1.000\} = \{6k \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq k \leq 166\} \Rightarrow |A_1 \cap A_2| = 166$;

$A_1 \cap A_3 = \{10k \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq k \leq 100\} \Rightarrow |A_1 \cap A_3| = 100$;

$A_1 \cap A_4 = \{14k \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq k \leq 71\} \Rightarrow |A_1 \cap A_4| = 71$;

$A_2 \cap A_3 = \{15k \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq k \leq 66\} \Rightarrow |A_2 \cap A_4| = 66$;

$A_2 \cap A_4 = \{21k \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq k \leq 47\} \Rightarrow |A_2 \cap A_4| = 47$;

$A_3 \cap A_4 = \{35k \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq k \leq 28\} \Rightarrow |A_3 \cap A_4| = 28$;

Assim, $S_2 = 166 + 100 + 71 + 66 + 47 + 28 = 478$;

$\cdot \; S_3 = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 4} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}|$

$\quad = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|$

Agora,

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{30k \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq k \leq 33\} \Rightarrow |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 33$.

$A_1 \cap A_2 \cap A_4 = \{42k \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq k \leq 23\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid 42 \mid x\} \Rightarrow |A_1 \cap A_2 \cap A_4| = 23$.

$A_1 \cap A_3 \cap A_4 = \{70k \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq k \leq 14\} \Rightarrow |A_1 \cap A_3 \cap A_4| = 14$.

$A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \{105k \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq k \leq 9\} \Longrightarrow |A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 9.$

Daí, $S_3 = 33 + 23 + 14 + 9 = 79$;

$\cdot\ S_4 = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq 4} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_4| = |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 4,$
pois, $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \{210k \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq k \leq 4\}$.

De posse desses valores, podemos agora calcular a_p, para cada valor de p pedido:

(i) $p = 0$:
$a_0 = \sum_{k=0}^{4-0} (-1)^k C_{0+k}^k S_{0+k} = S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 = 1.000 - 1.175 + 478 - 79 + 4 = 228.$

(ii) $p = 1$:
$a_1 = \sum_{k=0}^{4-1} (-1)^k C_{1+k}^k S_{1+k} = C_1^0 S_1 - C_2^1 S_2 + C_3^2 S_3 - C_4^3 S_4 = 1.175 - 2 \times 478 + 3 \times 79 - 4 \times 4 = 440.$

(iii) $p = 2$
$a_2 = \sum_{k=0}^{4-2} (-1)^k C_{2+k}^k S_{2+k} = C_2^0 S_2 - C_3^1 S_3 + C_4^2 S_4 = 478 - 3 \times 79 + 6 \times 4 = 265.$

(iv) $p = 3$
$a_3 = \sum_{k=0}^{4-3} (-1)^k C_{3+k}^k S_{3+k} = C_3^0 S_3 - C_4^1 S_4 = 79 - 4 \times 4 = 63.$

(v) $p = 4$
$a_4 = \sum_{k=0}^{4-4} (-1)^k . C_{4+k}^k S_{4+k} = C_4^0 S_4 = 4.$ □

Agora vamos procurar responder a seguinte pergunta:

• Quantos são os inteiros compreendidos entre 1 e 1.000, inclusive, que são divisíveis por **pelo menos** dois dos números primos 2, 3, 5 e 7?

Neste caso devemos contar todos os elementos de Ω que são divisíveis por exatamente 2, ou exatamente 3 ou exatamente 4 dos inteiros dados, ou seja, todos os elementos de Ω que pertencem a exatamente p dos subconjuntos A_1, A_2, A_3, A_4 definidos acima, para $p = 2, 3, 4$. Pelo Lema 1, esse valor será dado por:

$$a_2 + a_3 + a_4 = 332.$$

Vejamos, no lema a seguir, como calcular mais facilmente esse valor, sem a necessidade de calcular cada um dos a_i.

Lema 2. *Sejam $A_1, A_2, ..., A_n$ subconjuntos de um conjunto Ω. Para cada inteiro $p = 1, 2, ..., n$, o número de elementos de Ω que pertencem a **pelo menos** p destes subconjuntos é dado por:*

$$b_p := \sum_{k=0}^{n-p} (-1)^k \, C_{p+k-1}^k \, S_{p+k}.$$

Demonstração: Para a demonstração veja o Apêndice III.

Exercícios Resolvidos 20.

(01) Quantos são os inteiros compreendidos entre 1 e 1.000 que são divisíveis por **pelo menos** dois dos números primos 2, 3, 5 e 7?

Solução:
Vamos resolver novamente essa questão, usando agora o Lema 2. Com as mesmas notações da questão 02 do Exercicio 19, segue que:
$b_2 = \sum_{k=0}^{2}(-1)^k\, C_{1+k}^{k}\, S_{2+k} = C_1^0 S_2 - C_2^1 S_3 + C_3^2 S_4 = 1\times 478 - 2\times 79 + 3\times 4 = 332.$
□

Estamos agora em condições de mostrar a generalização do Princípio Aditivo.

Teorema 1. *Para todo número inteiro $n \geq 2$, o número de elementos da união $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ é dado por:*

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} S_k, \tag{8.3}$$

onde S_k é como definido em (18.3).

Demonstração:
$x \in A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$, se x pertencer a pelo menos um dos conjuntos A_i, logo, pela Lema 2:

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = b_1 = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_k^k S_{1+k} = S_1 - S_2 + S_3 + ... + (-1)^{n-1} S_n.$$

□

Exercícios Resolvidos 21.

(01) Quantos são os anagramas da palavra INCLUSÃO que tem ou I na primeira posição, ou N na segunda, ou C na terceira, ou L na quarta posição?
Solução:
Considere

$$\underset{p_1}{\_}\ \underset{p_2}{\_}\ \underset{p_3}{\_}\ \underset{p_4}{\_}\ \underset{p_5}{\_}\ \underset{p_6}{\_}\ \underset{p_7}{\_}\ \underset{p_8}{\_}$$

o anagrama a ser formado, Ω o conjunto de todos os anagramas possíveis e
$A_1 = \{\alpha \in \Omega \mid \alpha \text{ que tem I em } p_1\}$;
$A_2 = \{\alpha \in \Omega \mid \alpha \text{ que tem N em } p_2\}$;
$A_3 = \{\alpha \in \Omega \mid \alpha \text{ que tem C em } p_3\}$;
$A_4 = \{\alpha \in \Omega \mid \alpha \text{ que tem L em } p_4\}$.
Facilmente, obtem-se que:
$|A_{i_1}| = 7!$, $|A_{i_1} \cap A_{i_2}| = 6!$, $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| = 5!$ e $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{i_4}| = 4!$, quaisquer que sejam os índices $i_1, i_2, i_3, i_4 \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Pelo princípio da inclusão-exclusão, segue que:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cap A_3 \cup A_4| = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 = C_4^1 \times 7! - C_4^2 \times 6! + C_4^3 \times 5! - C_4^4 \times 4! = 16.296.$$

□

(02) Para a palavra TACACA, determine:
(a) Quantos são os anagramas?
Solução:
Considerando Ω o conjunto de todos os anagramas da palavra TACACA, então $|\Omega| = P_6^{3,2} = 60$. □

(b) Quantos são os anagramas que tem as letras C's juntas?
Solução:
Vamos considerar $A_1 = \{p \in \Omega \mid p \text{ tem as letras CC juntas }\}$. Fazendo X=CC, então $|A_1|$ é dada pelo número de anagramas que podemos formar com letras X, T, A, A, A. Portanto, $|A_2| = P_5^3 = \frac{5!}{3!} = 20$. □

(c) Quantos são os anagramas que não tem letras A's adjacentes?
Solução:
Para determinar este número, vejamos como construir um anagrama com essas características.

1a. Etapa: Permutar as letras T, C, C: há $P_3^2 = 3$ possibilidades;

Para cada uma das 3 ordenações possíveis, as letras A,A,A poderão ser colocadas nas 4 posições, como abaixo:

$$\underset{p_1}{—}T\underset{p_2}{—}C\underset{p_3}{—}C\underset{p_4}{—}$$

2^a **Etapa**: Escolher 3, dentre as 4 posições, para colocar as letras A,A,A: há $C_4^3 = 4$ possibilidades.

Portanto, o total de anagramas que as letras A's não ficam adjacentes é $3 \times 4 = 12$. □

(d) Quantos são os anagramas que tem letras A's juntas?
Solução:
Aqui devem ser contados anagramas tais como CTAAAC, em que as três letras A's estão juntas e também anagramas como ACTAAC, em que apenas duas delas estão juntas. Não sendo essa contagem tão imediata como na letra (b). Porém, se considerarmos, $A_2 = \{p \in \Omega \mid p \text{ tem letras A's juntas }\}$ então, usando a letra (c), temos: $|A_2| = 60 - 12 = 48$. □

(e) Quantas são os anagramas nos quais não há letras iguais adjacentes?
Solução:
Considerando Ω, A_1 e A_2 os conjuntos definidos nas letras (a), (b) e (d), respectivamente, então buscamos o número de elementos de Ω que pertencem a exatamente zeros dos conjuntos A_1, A_2, o qual é dado por:

$$a_0 = \sum_{k=0}^{2} (-1)^k C_k^k S_k = S_0 - S_1 + S_2.$$

Das letras anteriormente resolvidas, já temos que:
$S_0 = |\Omega| = 60$; $S_1 = |A_1| + |A_2| = 20 + 48 = 68$. Resta determinar $S_2 = |A_1 \cap A_2|$.
$A_1 \cap A_2 = \{p \in \Omega \mid p \text{ tem CC juntas e AA juntas ou AAA juntas)} \}$.

$|A_1 \cap A_2| = |A_1|$ - nr. de anagramas que tem CC juntas e não tem A's juntas.

Vejamos como construir um anagrama desse último tipo.

Etapa 1: Permutar as letras T e X = CC: há $P_2 = 2!$ possibilidades;

Considere uma das duas possibilidades acima:

$$\underset{p_1}{—}T\underset{p_2}{—}CC\underset{p_3}{—}$$

Etapa 2: Escolher 3 posições, dentre as 3 acima, para colocar as 3 letras A,A,A: há $C_3^3 = 1$ possibilidades.

Pelo princípio multiplicativo, esse total é dado $2 \times 1 = 2$.
Assim, $S_2 = |A_1 \cap A_2| = 20 - 2 = 18$. Portanto,

$a_0 = S_0 - S_1 + S_2 = |\Omega| - (|A_1| + |A_2|) + (A_1 \cap A_2|) = 60 - (20 + 48) + 18 = 10.$

□

(02) Sejam $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ e $B = \{b_1, b_2, ..., b_p\}$ conjuntos finitos.
(a) Quantas são as funções $f : A \to B$?
Solução:
Tarefa: Construir uma função de A em B.

	Etapas da tarefa	Restrições	Possib.
1	Escolher uma imagem para a_1		p
2	Escolher uma imagem para a_2		p
3	Escolher uma imagem para a_3		p
..	...		
n	Escolher uma imagem para a_n		p

Pelo P. M., o total de funções $f : A \to B$ é p^n. □

(b) Quantas são as funções $f : A \to B$ injetoras (supondo $n \leq p$)?
Solução:
Tarefa: Construir uma função de A em B injetora.

	Etapas da tarefa	Restrições	Possib.
1	Escolher uma imagem para a_1		p
2	Escolher uma imagem para a_2	$\notin \{f(a_1)\}$	$p - 1$
3	Escolher uma imagem para a_3	$\notin \{f(a_1), f(a_2)\}$	$p - 2$
...	...		...
n	Escolher uma imagem para a_n	$\notin \{f(a_1), ..., f(a_{n-1})\}$	$p - (n - 1)$

$\therefore$ O número de funções $f : A \to B = p(p-1)(p-2)...(p-n+1) = A_{n,p}$. □

(c) Quantas são as funções $f : A \to B$ que não são sobrejetoras?
Solução:
$f : A \to B$ não é sobrejetora se existe $b \in B$, tal que $b \notin Imf$. Então considerando:
$A_1 = \{f : A \to B \mid b_1 \notin Imf\}$;

$A_2 = \{f : A \to B \mid b_2 \notin Imf\};$

$\vdots$

$A_p = \{f : A \to B \mid b_p \notin Imf\};$

A função $f : A \to B$ não é sobrejetora, se $f \in (A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_p)$. Logo, existem tantas funções $f : A \to B$ não sobrejetoras, quantos são os elementos da união $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_p$, cuja cardinalidade é dada por:

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 ... \cup A_p| &= S_1 - S_2 + S_3 + ... + (-1)^{p-1} S_p \\ &= C_p^1 (p-1)^n - C_p^2 (p-2)^n + C_p^3 (p-3)^n + ... + (-1)^{p-1} C_p^n (p-p)^n \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} C_p^k (p-k)^n.\end{aligned}$$

□

(d) Quantas são as funções $f : A \to B$ que são sobrejetoras?

Solução:

Sejam

$\Omega = \{f : A \to B \mid f \text{ é função }\};$

$X = \{f \in \Omega \mid f \text{ é não é sobrejetora }\}.$

Então o total procurado é dado por:

$$|\Omega| - |X| = p^n - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} C_p^k (p-k)^n = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_p^k (p-k)^n.$$

□

Lista de Exercícios 8.

(01) Considerando o conjunto $X_{n,p}$ definido em (8.1), determine $X_{n,p}$ e sua cardinalidade $|X_{n,p}|$, para cada um dos valores abaixo:
(a) $X_{6,5}$;
(b) $X_{6,3}$;
(c) $X_{7,5}$.

(02) Considerendo o inteiro S_p definido em (18.3), expresse todas as parcelas de:
(a) S_5 para $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 \subset \Omega$;
(b) S_3 para $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \subset \Omega$;
(c) S_5 para $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7 \subset \Omega$;
(d) S_{12} para $A_1, A_2, ..., A_{11}, A_{12} \subset \Omega$.

(03) Usando a_p definido no Lema 1, expresse todas as parcelas de a_p, em função de $|\Omega|$ e a cardinalidade das interseções dos A_i, para cada um dos valores abaixo:
(a) a_0, para $n = 6$;
(b) a_5, para $n = 7$;
(c) a_9, para $n = 9$.

(04) Usando b_p definido no Lema 2, em função de $|\Omega|$ e a cardinalidade das intersções dos A_i, para cada um dos valores abaixo:
(a) b_1, para $n = 6$;
(b) b_7, para $n = 8$.

(05) Usando o Teorema 1, expresse a cardinalidade da união, em função das cardinalidades dos conjuntos A_i e interseções desses.
(a) $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$;
(b) $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$.

(06) Determine o número de inteiros m, com $1 \leq m \leq 5000$, que:
(a) não são divisíveis por nenhum dos inteiros 3, 5, 6;
(b) são divisíveis por exatamente um dos inteiros 3, 5, 6;
(c) são divisíveis por exatamente dois dos inteiros 3, 5, 6;
(d) são divisíveis por todos os três inteiros 3, 5, 6;
(e) são divisíveis por pelo menos dois dos inteiros 3, 5, 6.

(07) Considerando a palavra MAMADEIRA, determine o número de anagramas:
(a) que podem ser construídos, sem restrições;
(b) que tem as letras M's juntas;
(c) que não tem letras A's juntas;
(d) que tem letras A's adjacentes;
(e) que não tem letras iguais adjacentes.

(08) Uma comissão de oito pessoas será escolhida dentre 7 alunos do curso de

Matemática, 4 de Física, 6 de Química e 3 de Estatística. Quantas são as opções que se tem de formar a comissão, de modo que nenhum dos cursos tenha exatamente dois representantes?

(009) Uma quadrilha formada de n casais homem-mulher, entra em uma quadra junina em fila indiana conforme abaixo:

$$H_1\, M_1\, H_2\, M_2 \ldots H_n\, M_n$$

onde H_i, M_i indica o casal Homem $\times$ mulher. Durante a apresentação os casais trocam várias vezes de par. Quantas são as permutações possíveis nas quais nenhuma mulher ocupa a mesma posição que tinha na entrada?

(10) Considerando o conjunto $I_7 = \{1, 2, 3, ..., 7\}$, determine o número de funções bijetoras $f : I_7 \to I_7$, nas quais $f(i) \neq i$, para todo $i = 1, 2, ..., 7$.

Respostas da Lista de Exercícios 8

(01.a) $X_{6,5} = \{(1,2,3,4,5),(1,2,3,4,6),(1,2,3,5,6),(1,2,4,5,6),(1,3,4,5,6),(2,3,4,5,6)\}$;
$|X_{6,5}| = C_6^5 = 6.$

(01.b) $X_{6,3} = \{(1,2,3),(1,2,4),(1,2,5),(1,2,6),(1,3,4),(1,3,5),(1,3,6),(1,4,5),(1,4,6),(1,5,6),$
$(2,3,4),(2,3,5),(2,3,6),(2,4,5),(2,4,6),(2,5,6),(3,4,5),(3,4,6),(3,5,6),(4,5,6)\}$
$|X_{6,3}| = C_6^3 = 20.$

(01.c) $X_{7,5} = \{(1,2,3,4,5),(1,2,3,4,6),(1,2,3,4,7),(1,2,3,5,6),(1,2,3,5,7),(1,2,3,6,7),(1,2,4,5,6),$
$(1,2,4,5,7),(1,2,4,6,7),(1,2,5,6,7),(1,3,4,5,6),(1,3,4,5,7),(1,3,4,6,7),(1,3,5,6,7),$
$(1,4,5,6,7),(2,3,4,5,6),(2,3,4,5,7),(2,3,4,6,7),(2,3,5,6,7),(2,4,5,6,7),(3,4,5,6,7)\}.$
$|X_{7,5}| = C_7^5 = 21.$

(02.a) $S_5 = |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_6| +$
$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_6| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6| +$
$|A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6|.$

(02.b) $S_3 = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_2 \cap A_5| + |A_1 \cap A_2 \cap A_6| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| +$
$|A_1 \cap A_3 \cap A_5| + |A_1 \cap A_3 \cap A_6| + |A_1 \cap A_4 \cap A_5| + |A_1 \cap A_4 \cap A_6| + |A_1 \cap A_5 \cap A_6| +$
$|A_2 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_5| + |A_2 \cap A_3 \cap A_6| + |A_2 \cap A_4 \cap A_5| + |A_2 \cap A_4 \cap A_6| +$
$|A_2 \cap A_5 \cap A_6| + |A_3 \cap A_4 \cap A_5| + |A_3 \cap A_4 \cap A_6| + |A_3 \cap A_5 \cap A_6| + |A_4 \cap A_5 \cap A_6|.$

(02.c) $S_5 = |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_6| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_7| +$
$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_6| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_6 \cap A_7| +$
$|A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_7| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_6 \cap A_7| +$
$|A_1 \cap A_2 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_7| +$
$|A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_6 \cap A_7| + |A_1 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7| + |A_1 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7| +$
$|A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_7| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_6 \cap A_7| +$
$|A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7| + |A_2 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7| + |A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7|.$

(02.d) $S_{12} = |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7 \cap A_8 \cap A_9 \cap A_{10} \cap A_{11} \cap A_{12}|.$

(03.a) $a_0 = |\Omega| - (|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| + |A_5| + |A_6|)$
$+(|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_1 \cap A_5| + |A_1 \cap A_6| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| +$
$|A_2 \cap A_5| + |A_2 \cap A_6| + |A_3 \cap A_4| + |A_3 \cap A_5| + |A_3 \cap A_6| + |A_4 \cap A_5| + |A_4 \cap A_6| + |A_5 \cap A_6|)$
$-(|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_2 \cap A_5| + |A_1 \cap A_2 \cap A_6| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| +$
$|A_1 \cap A_3 \cap A_5| + |A_1 \cap A_3 \cap A_6| + |A_1 \cap A_4 \cap A_5| + |A_1 \cap A_4 \cap A_6| + |A_1 \cap A_5 \cap A_6| +$
$|A_2 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_5| + |A_2 \cap A_3 \cap A_6| + |A_2 \cap A_4 \cap A_5| + |A_2 \cap A_4 \cap A_6| +$
$|A_2 \cap A_5 \cap A_6| + |A_3 \cap A_4 \cap A_5| + |A_3 \cap A_4 \cap A_6| + |A_3 \cap A_5 \cap A_6| + |A_4 \cap A_5 \cap A_6|)$
$+(|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_6| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5| +$
$|A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_6| + |A_1 \cap A_2 \cap A_5 \cap A_6| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_6| +$
$|A_1 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_6| + |A_1 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_6| +$
$+|A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_6| + |A_2 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6| + |A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6|)$
$-[|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_6| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_6| +$
$|A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6|]$
$+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6|.$

(03.b) $a_5 = (|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_6| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_7| +$
$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_6| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_6 \cap A_7| +$
$|A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_7| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_6 \cap A_7| +$
$|A_1 \cap A_2 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_7| +$
$|A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_6 \cap A_7| + |A_1 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7| + |A_1 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7| +$
$|A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_7| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_6 \cap A_7| +$
$|A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7| + |A_2 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7| + |A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7|)$
$-6 \times (|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_7| +$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_6 \cap A_7| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7|+$$
$$|A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7|+$$
$$|A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7|) + 21 \times |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7|.$$

(03.c) $S_9 = |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7 \cap A_8 \cap A_9|$.

(04.a) $b_1 = (|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| + |A_5|)$
$$-(|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_1 \cap A_5| + |A_1 \cap A_6|+$$
$$|A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_2 \cap A_5| + |A_2 \cap A_6| + |A_3 \cap A_4|+$$
$$|A_3 \cap A_5| + |A_3 \cap A_6| + |A_4 \cap A_5| + |A_4 \cap A_6| + |A_5 \cap A_6|)$$
$$+(|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_2 \cap A_5| + |A_1 \cap A_2 \cap A_6|+$$
$$|A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_5| + |A_1 \cap A_3 \cap A_6| + |A_1 \cap A_4 \cap A_5|+$$
$$|A_1 \cap A_4 \cap A_6| + |A_1 \cap A_5 \cap A_6| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_5|+$$
$$|A_2 \cap A_3 \cap A_6| + |A_2 \cap A_4 \cap A_5| + |A_2 \cap A_4 \cap A_6| + |A_2 \cap A_5 \cap A_6|+$$
$$|A_3 \cap A_4 \cap A_5| + |A_3 \cap A_4 \cap A_6| + |A_3 \cap A_5 \cap A_6| + |A_4 \cap A_5 \cap A_6|)$$
$$-(|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_6|+$$
$$|A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_6| + |A_1 \cap A_2 \cap A_5 \cap A_6|+$$
$$|A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_6| + |A_1 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_6|+$$
$$|A_1 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_6|+$$
$$|A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_6| + |A_2 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6| + |A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6|)$$
$$+(|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_6| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_6|+$$
$$|A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6|)$$
$$-|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6|.$$

(04.b) $b_7 = (|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_8|+$
$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_7 \cap A_8| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_6 \cap A_7 \cap A_8|+$$
$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7 \cap A_8| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7 \cap A_8|+$$
$$|A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7 \cap A_8| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7 \cap A_8|)$$
$$-7 \times |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7 \cap A_8|.$$

(05.a) $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = b_1 = (|A_1|+|A_2|+|A_3|)-(|A_1 \cap A_2|+|A_1 \cap A_3|+|A_2 \cap A_3|)+|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$.

(05.b) $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = b_1 = (|A_1|+|A_2|+|A_3|+|A_4|) - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4|+$
$$|A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4|)$$
$$+(|A_1 \cap A_2 \cap A_3|+|A_1 \cap A_2 \cap A_4|+|A_1 \cap A_3 \cap A_4|+|A_2 \cap A_3 \cap A_4|)$$
$$-|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$$

(06.a) 2.666

(06.b) 1.668

(06.c) 583

(06.d) 83

(06.e) 666

(07.a) 30.240

(07.b) 6.720

(07.c) 12.600

(07.d) 17.640

(07.e) 10.200

(08) 29.454

(09) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_{2n}^k (2n-k)!$

(10) 1.854

Capítulo 9

Permutações Caóticas

Objetivos:

✓ **Definir Permutações Caóticas**
✓ **Apresentar a fórmula para o cálculo do número de permutações caóticas de n elementos**

1 Introdução

• Um grupo de quatro pessoas decide brincar de amigo oculto. Pelas regras do jogo, cada um troca exatamente um presente com um amigo oculto, que não pode ser ele próprio. De quantas maneiras os presentes podem ser trocados?
Solução:
Considere $A = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ o conjunto das quatro pessoas. Observe que cada sorteio para a determinação do amigo oculto corresponde a uma função bijetora:

$$\begin{aligned} f : A &\to A \\ p_j &\to f(p_j) \end{aligned}$$

onde $f(p_j)$ é o amigo oculto de p_j, para $j = 1, 2, 3, 4$. Logo, existem $4! = 24$ formas dos amigos fazerem o sorteio dos nomes. Porém, estão incluídas aí, as funções em que temos $f(p_j) = p_j$, para algum $p_j \in A$, ou seja, alguém tira a si próprio no sorteio, o que não é permido pelas regras do jogo. Precisamos então, excluir do total acima, esses casos. Como contar quantos são eles?
Considerando:
$\Omega = \{f : A \to A \mid f \text{ é bijetora }\}$;
$A_1 = \{f \in \Omega \mid f(p_1) = p_1\}$;
$A_2 = \{f \in \Omega \mid f(p_2) = p_2\}$;
$A_3 = \{f \in \Omega \mid f(p_3) = p_3\}$;
$A_4 = \{f \in \Omega \mid f(p_4) = p_4\}$.

O problema recai em determinar o número de elementos de Ω que pertecem a exatamente zeros dos subconjuntos A_1, A_2, A_3, A_4. Pelo Lema 1, esse total é dado por:

$$a_0 = \sum_{k=0}^{4-0} (-1)^k C_{0+k}^k S_{0+k} = S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + S_4.$$

Resta calcular S_k, para $k = 0, 1, 2, 3, 4$.
(i) $S_0 = |\Omega| = 4!$;
(ii) $S_1 = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| = C_4^1 \times 3! = 4 \times 3! = 4!$,
pois $|A_i| = 3!$, para qualquer $1 \leq i \leq 4$, já que trata-se de permutar 4 elementos fixando um deles;
(iii) $S_2 = \sum_{(i_1,i_2)\in X_{4,2}} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| = C_4^2 \times 2! = \frac{4!}{2!}$,
pois $|A_i \cap A_j| = 2!$, para quaisquer $(i_1, i_2) \in X_{4,2}$, já que trata-se de permutar 4 elementos, mantendo 2 deles fixos;
(iv) $S_3 = \sum_{(i_1,i_2,i_3)\in X_{4,3}} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| = C_4^3 \times 1! = \frac{4!}{3!}$,
pois $|A_i \cap A_j \cap A_k| = 1!$, para quaisquer $(i_1, i_2, i_3) \in X_{4,3}$, uma vez que trata-se de permutar 4 elementos, mantendo 3 deles fixos;
(v) $S_4 = \sum_{(i_1,i_2,i_3,i_4)\in X_{4,4}} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{i_4}| = |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 1! = \frac{4!}{4!}$.

Assim,

$$a_0 = S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 = 4! - 4! + \frac{4!}{2!} - \frac{4!}{3!} + \frac{4!}{4!} = 4! \times [\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}] = 9.$$

$\therefore$ Existem 9 modos dos quatro amigos trocarem presentes entre si. $\square$

Neste capítulo, vamos generalizar o que foi feito acima, determinando o número de Permutações Caóticas de n elementos, para $n \geq 1$ arbitrário.

2 Ponto Fixo

Definição 4. *Dada uma função $f : A \to A$, dizemos que $a \in A$ é um* ***ponto fixo*** *de f, se $f(a) = a$.*

Exemplos:
(01) Na função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida por $f(n) = n$ (função identidade), n é ponto fixo de f, para todo $n \in \mathbb{N}$;

(02) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com regra $f(x) = 3x^2$, tem 0 e $\frac{1}{3}$ como pontos fixos;

(03) Seja $f : I_3 \to I_3$ a função:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \quad \text{domínio} \\ \leftarrow \quad \text{imagens} \end{array}$$

Como $f(3) = 3$, diz-se que 3 é um ponto fixo de f.

(04) A função $f : I_6 \to I_6$ dada por:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \quad \text{domínio} \\ \leftarrow \quad \text{imagens} \end{array}$$

tem 4 e 6 como pontos fixos.

(05) Seja $f : I_6 \to I_6$ definida por:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{ll} \leftarrow & \text{domínio} \\ \leftarrow & \text{imagens} \end{array}$$

Como $f(i) \neq i$, para todo $i \in I_6$, f não tem pontos fixos.

3 Permutação Caótica

Definição 5. *Dizemos que uma função bijetora $f : I_n \to I_n$ é uma **permutação caótica** de n elementos, se f não tem ponto fixo, isto é, $f(i) \neq i$, para todo $i = 1, 2, ..., n$.*

Exemplos:
(01) A função

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

é uma permutação caótica de quatro elementos, ao passo que

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

não, uma vez que $g(4) = 4$.

(02) A função $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 5 & 10 & 2 & 1 & 7 & 6 & 9 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ é uma permutação caótica de dez elementos, pois é uma bijeção de I_{10}, sem pontos fixos.

(03) O conjunto das permutações de $I_3 = \{1, 2, 3\}$ é dado por:

$$S_3 = \{f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$
$$f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, f_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\}$$

sendo,

$$\left\{f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right\}$$

o conjunto das permutações caóticas.

4 Cálculo do Número de Permutações Caóticas

Denotaremos por D_n o número das permutações caóticas de I_n. A próxima proposição determina o valor de D_n.

Proposição 9. *Para todo inteiro $n \geq 1$, há exatamente*

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

permutações caóticas de $I_n = \{1, 2, ..., n\}$.

Demonstração:
Seja

$$\Omega = \{f : I_n \to I_n \mid f \text{ é bijetora }\},$$

o conjunto de todas as bijeções de I_n. Para cada $i = 1, 2, ..., n$, definamos A_i como o subconjunto de Ω, formado por todas as bijeções que tem i como ponto fixo, isto é,

$$A_i = \{f \in \Omega \mid f(i) = i\}.$$

Da Definição 5, $f \in \Omega$ é uma permutação caótica, se f não tem ponto fixo, ou seja, se f não pertencer a nenhum dos n subconjuntos $A_1, A_2, ..., A_n$. Portanto, D_n é o número de elementos de Ω que pertencem a **exatamente zeros** dos conjuntos $A_1, A_2, ...A_n$. Pelo Lema 1, D_n é dado por:

$$D_n = a_0 = \sum_{k=0}^{n-0} (-1)^k C_{0+k}^{k} S_{0+k} = S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + ... + (-1)^n S_n,$$

Calculando S_k, para $k = 0, 1, 2, ..., n$, temos:
· $S_0 = |\Omega| = n!$ - número de permutações de n elementos;
· $S_1 = \sum_{1 \leq i_1 \leq n} |A_i| = C_n^1 \times (n-1)! = n \times (n-1)! = n!$;
pois $|A_i|$ é o número de bijeções de I_n com 1 ponto fixo;
· $S_2 = \sum_{(i_1, i_2) \in X_{n,2}} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| = C_n^2 \times (n-2)! = \frac{n!}{2!}$;
já que para quaisquer $(i_1, i_2) \in X_{n,2}$, $f \in A_{i_1} \cap A_{i_2}$ é uma permutação de n elementos, com dois deles fixos;
· $S_3 = \sum_{(i_1, i_2, i_3) \in X_{n,3}} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| = C_n^3 \times (n-3)! = \frac{n!}{3!}$;
$\vdots$
· $S_n = \sum_{(i_1, i_2, ..., i_n) \in X_{n,n}} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap .... \cap A_{i_n}| = C_n^n \times (n-n)! = \frac{n!}{n!}$.
Assim,

$$D_n = S_0 - S_1 + S_2 - ... + (-1)^n S_n = n! - n! + \frac{n!}{2!} - ... + \frac{n!}{n!} = n![\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + (-1)^n \frac{1}{n!}].$$

ou seja,

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}.$$

□

Exemplos:
(01) Resolva novamente o exercício proposto no início do capítulo, usando o resultado da Proposição 9.
Solução:
O número de modos que os 4 amigos tem de trocar presentes entre si, respeitadas

as restrições, correspondem ao número de permutações caóticas de I_4, o qual é dado por:

$$D_4 = 4! \sum_{k=0}^{4} (-1)^k \frac{1}{k!} = 24 \times [1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}] = 9.$$

$\square$

O valor obtido para D_n na Proposição 9, requer muitos cálculos quando n é grande. Vejamos uma maneira indireta de chegarmos ao mesmo resultado.

Lema 3. *Para todo inteiro $n \geq 1$, tem-se que:*

$$\left| D_n - \frac{n!}{e} \right| < \frac{1}{2}.$$

onde $e = 2,718281828...$ é o número neperiano.

Demonstração:
Seja n um inteiro positivo. Então,
(i) se $n = 1$
$D_1 = 1! \sum_{k=0}^{1} (-1)^k \frac{1}{k!} = 1 - 1 = 0$ e $\frac{1!}{e} = 0,367...$
Logo,

$$|D_1 - \frac{1!}{e}| = 0,367.. < \frac{1}{2}.$$

Portanto, o resultado é válido para $n = 1$.
(ii) se $n = 2$
$D_2 = 2! \sum_{k=0}^{2} (-1)^k \frac{1}{k!} = 2 \times [1 - 1 + \frac{1}{2}] = 1$ e $\frac{2!}{e} = 0,735....$
Assim,

$$|D_2 - \frac{2!}{e}| = 0,265.. < \frac{1}{2}.$$

Valendo também para $n = 2$.
(iii) se $n > 2$
Usando a Série de Taylor da função exponencial em torno do ponto $x = 0$, para todo número real x, tem-se:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$$

Em particular, para $x = -1$, temos:

$$e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!}.$$

Logo,

$$\left| D_n - \frac{n!}{e} \right| = n! \left| \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!} - e^{-1} \right| = n! \left| \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \right| = n! \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \right|.$$

Usando a desigualdade triangular, segue que:

$$\left| D_n - \frac{n!}{e} \right| = n! \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \right| \leq n! \sum_{k=n+1}^{\infty} \left| (-1)^k \frac{1}{k!} \right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!}.$$

Desenvolvendo esse último somatório, obtemos:

$$D_n \leq \frac{n!}{(n+1)!} + \frac{n!}{(n+2)!} + \frac{n!}{(n+3)!} + ... = \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + ...$$

Como $\frac{1}{(n+k)} \leq \frac{1}{n+1}$, para todo $k \geq 1$, segue que:

$$D_n \leq \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + ... \leq \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + ...$$

Fazendo $r = \frac{1}{n+1}$, a soma acima fica:

$$D_n \leq r(1 + r + r^2 + r^3 + ...)$$

Como $1 + r + r^2 + r^3 + ... = \frac{1}{1-r}$, pois trata-se da série geométrica com razão $0 < r < 1$. Portanto, para todo $n > 2$,

$$D_n \leq \frac{r}{1-r} = \frac{1}{n} < \frac{1}{2}.$$

De (i), (ii) e (iii), segue que para qualquer inteiro $n \geq 1$, $|D_n - \frac{n!}{e}| < \frac{1}{2}$. □

Fazendo $a = \frac{n!}{e} - \frac{1}{2}$ e $b = \frac{n!}{e} + \frac{1}{2}$, então $|b - a| = 1$, logo $(a, b) \cap \mathbb{Z}$ é um conjunto que tem no máximo um elemento. Como D_n é um número inteiro, e pelo lema acima,

$$|D_n - \frac{n!}{e}| < \frac{1}{2} \Rightarrow a < D_n < b \Rightarrow D_n \in (a, b) \cap \mathbb{Z}.$$

Portanto D_n é o único inteiro no intervalo (a, b). Logo, não existe nenhum inteiro k, tal que

$$|k - \frac{n!}{e}| < |D_n - \frac{n!}{2}|.$$

Concluímos assim que D_n é o inteiro mais próximo do número real $\frac{n!}{e}$, conforme enunciado na proposição abaixo.

Proposição 10. *Para todo inteiro $n \geq 1$, D_n - o número das permutações caóticas de I_n - é o inteiro mais próximo de $\frac{n!}{e}$.*

Exemplos

Usando a Proposição 10, temos:

(01) $D_4 = 9$, pois esse é o inteiro mais próximo de $\frac{4!}{e} = 8,829106$;

(02) $D_6 = 265$, por ser o inteiro mais próximo de $\frac{6!}{e} = 264,8731$;

(03) Como $\frac{7!}{e} = 1.854,1123$, então $D_7 = 1.854$.

Exercícios Resolvidos 22.

(01) Oito pessoas foram colocadas em fila indiana. Quantas são as opções que elas tem de mudar de lugar na fila, de modo que nenhuma delas fiquem na mesma posição que encontra-se atualmente?

Solução:

Cada nova fila formada, com a condição que pessoa alguma permaneça em seu lugar de origem, é uma permutação caótica de oito elementos, logo esse total é dado por $D_8 = 14.833$. □

(02) Todo semestre a Faculdade de Matemática divulga o ranking dos 10 primeiros colocados no curso (alunos com maior CRG). Suponha que do primeiro para o segundo semestre de 2018 não ocorram entradas e nem saídas dos alunos desse ranking, mas apenas mudança na classicação dos mesmos.

(a) Quantas são as divulgações possíveis para o ranking do segundo semestre de 2018, nas quais os três primeiros colocados, e somente esses, permaneçam com a mesma classificação do semestre anterior?

Solução:

Considere

$$\frac{A}{1^0}\ \frac{B}{2^0}\ \frac{C}{3^0}\ \frac{D}{4^0}\ \frac{E}{5^0}\ \frac{F}{6^0}\ \frac{G}{7^0}\ \frac{H}{8^0}\ \frac{I}{9^0}\ \frac{J}{10^0} \tag{9.1}$$

o ranking do primeiro semestre de 2018. Vejamos como montar um nova listagem, com as condições pedidas.

Tarefa: Permutar os 10 elementos acima, de modo que somente os 3 primeiros permaneçam em seu lugar original

	Etapas da tarefa	Restrições	N.P.
1^a	Escolher o 1^0 colocado	mesmo do ranking anterior	1
2^a	Escolher o 2^0 colocado	mesmo do ranking anterior	1
3^a	Escolher o 3^0 colocado	mesmo do ranking anterior	1
4^a	Selecionar os 7 últimos colocados	mesmos 7 do ranking anterior, mas em posição diferente da atual	D_7

Total: $1 \times D_7 = 1.584$. □

(b) Quantos são as listagens possíveis, em que exatamente três alunos permanecem com a mesma classificação do semestre anterior?

Solução:

A diferença da letra (a), é que aqui devemos antes selecionar os alunos que deverão permanecer com a mesma classificação.

Tarefa: Permutar os 10 elementos acima, de modo que exatamente 3 deles permanecem em seu lugar original

	Etapas da tarefa	Restrições	N.P.
1^a	Escolher 3, dentros os 10, para permanecerem com a mesma classificação do ranking anterior	-	C_{10}^3
2^a	Construir uma permutação caótica com os 7 restantes	-	D_7

Total: $120 \times 1.584 = 190.080$. □

(02) Uma empresa tem sete estagiárias. Cada uma delas deve cumprir três horas de trabalho semanais, sendo duas horas no turno da manhã e uma no turno

da tarde. De quantas maneiras o Recursos Humanos pode montar a agenda de trabalho semanal (segunda a domingo) desses estagiárias, de modo que todas cumpram as três horas semanais, trabalhando diariamente apenas em um turno?
Solução:
Considere A, B, C, D, E, F, G as estagiárias. Nossa tarefa é montar a agenda semanal. Para cumprir as 3 horas semanais, sem trabalhar em mais de um turno no mesmo dia, cada uma deve estagiar duas horas pela manhã em algum dos setes dias e uma hora à tarde, em um dia distinto deste. Começamos montando a agenda do turna da manhã. Uma vez montada esta agenda, montaremos a agenda do turno da tarde, de modo a que não haja repetição de pessoa.
(I) Montar a agenda do turno da Manhã:

	Etapas da tarefa	Restrições	N.P.
1^a	Escolher 1 pessoa para domingo	-	7
2^a	Escolher 1 pessoa para segunda	não selecionada ainda	6
2^a	Escolher 1 pessoa para terça	não selecionada ainda	5
$\vdots$			
7^a	Escolher 1 pessoa para sábado	não selecionada ainda	1

Total de opções de montar o turno da Manhã: $7! = 5.040$

(II) Montar a agenda do turno da tarde:
Tomemos uma das 5.040 opções do turno da manhã. Por exemplo:

$$\begin{array}{lccccccc} Dom & Seg & Ter & Qua & Qui & Sex & Sab & \\ \text{Manhã:} & A & B & C & D & E & F & G \end{array}$$

Como nenhuma pessoa pode trabalhar em mais de um turno no mesmo dia, devemos permutar as 7 pessoas de modo que nenhuma delas permaneça em sua posição original, por exemplo:

$$\begin{array}{lccccccc} & Dom & Seg & Ter & Qua & Qui & Sex & Sab \\ \text{Manhã:} & A & B & C & D & E & F & G \\ \text{Tarde:} & G & A & D & E & C & B & F \end{array}$$

ou seja, devemos construir uma permutação caótica de 7 elementos, o que pode ser feito de $D_7 = 1.854$ modos.

Pelo princípio multiplicativo, existem $P_7 \times D_7 = 5.050 \times 1.854 = 9.344.160$ modos de montar a agenda semanal. $\square$

Lista de Exercícios 9.

(01) Usando a Proposição 9, calcule:
(a) D_5;
(b) D_9;
(c) D_{12}.

(02) Usando a Proposição 10, calcule:
(a) D_{10};
(b) D_{11}.

(03) Em um grupo de oito amigos, quantas são as opções que eles tem de trocar de presente na brincadeira de amigo oculto?

(04) Em um grupo de oito amigos, quantas são as opções que eles tem de trocar de presente na brincadeira de amigo oculto, se ficou acertado que um determinado casal trocará de presentes em si?

(05) Quantas são os anagramas da palavra VESTIBULAR, em que nenhuma letra fica em sua posição original?

(06) Quantos são os anagramas da palavra TUCUPI, em que somente as letras repetidas ficam em sua posição original?

(07) Sete casais estão sentados em torno de uma mesa circular, com cada homem sentado à esquerda de sua esposa. De quantos modos as mulheres podem mudar de lugar, de modo que nenhuma delas fique à direita de seu esposo?

(08) Doze pessoas foram colocadas em fila indiana. Quantas são as opções que elas tem de mudar de lugar na fila, de modo que:
(a) nenhuma delas fique na mesma posição em que estava inicialmente?
(b) apenas a primeira e última pessoas permaneçam na mesma posição?
(c) apenas duas delas, permaneçam na mesma posição?
(d) nenhuma das pessoas que ocupam as posições pares, permaneça em sua posição original?
(e) a primeira metada troca livremente de lugar, mas permanece nos 5 primeiros lugares da fila e a segunda medade, também troca de lugar, com a condição que nenhuma delas fique na mesma posição?

Respostas da Lista de Exercícios 9

(01.a) $D_5 = 5![\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}] = 44.$
(01.b) $D_9 = 9![\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} - \frac{1}{9!}] = 133.496.$
(01.c) $D_{12} = 12![\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} - \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!} - \frac{1}{11!} + \frac{1}{12!}] = 176.214.841$
(02.a) $\frac{10!}{e} = 1.334.960,916 \Rightarrow D_{10} = 1.334.961;$
(02.b) $\frac{11!}{e} = 14.684.570,08 \Rightarrow D_{11} = 14.684.570.$
(03) $D_9 = 14.833$
(04) $D_6 = 265$
(05) $D_{10} = 1.334.961;$
(06) 9
(07) 1.854
(08.a) 176.214.841
(08.b) 1.334.961
(08.c) 667.485
(08.d) 24.024
(08.e) 216

Capítulo 10

Princípio de Dirichlet

Objetivos:

✓ **Apresentar o Princípio das Gavetas**
✓ **Mostrar aplicações do Princípio das Gavetas.**

1 Introdução

• Ana e seus doze amigos resolveram que farão uma festinha, cada vez que um do grupo fizer aniversário. Porém, combinaram que havendo mais de um aniversário em um mesmo mês, farão uma só festa para comemorar os aniversariantes do mês. Prove que, no decorrer do ano, haverá pelo menos uma festa para mais de um aniversariante.
Solução:
Para resolver esse problema, vamos pensar assim: Considere um armário contendo 12 gavetas, uma para cada mês do ano: Jan, Fev, ..., Dez. Dentro de cada gaveta colocamos os nomes das pessoas que fazem aniversário naquele mês. Como temos 13 pessoas no grupo e apenas 12 gavetas, então necessariamente, pelo menos uma das gavetas terá que guardar dois nomes e portanto, naquele mês, a festa será para comemorar mais de um aniversário. $\square$

2 Princípio das Gavetas

Usamos na resolução do problema acima, uma ferramenta chamada *Princípio das Gavetas de Dirichlet*, o qual foi utilizado pela primeira vez em 1834, pelo matemático alemão Johann Dirichlet (1805-1859).

Princípio das Gavetas de Dirichlet

Se $n+1$ objetos forem colocados em no máximo n gavetas, então pelo menos uma das gavetas deverá conter dois ou mais objetos.

Demonstração:
Para justificar a afirmação acima, vamos usar redução ao absurdo, isto é, vamos supor que temos a hipótese, mas não a tese. Assim, suponhamos que $n+1$ objetos são guardados em no máximo n gavetas, porém cada uma das n gavetas receba no máximo 1 objeto.

Como guardamos todos os $n+1$ objetos nas n gavetas $G_1, G_2, ...G_n$, então tem-se que:

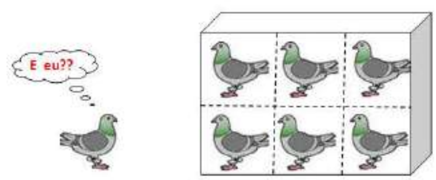
$$\begin{array}{lllllllll} \text{Total de objetos} & = & \text{total de } G_1 & + & \text{total de } G_2 & + & ... & + & \text{total de } G_n \\ & \leq & 1 & + & 1 & + & .... & + & 1 \quad = n. \end{array}$$

Como $n+1$ é o total de objetos, obtemos daí que $n+1 \leq n$, um absurdo. Logo, pelo menos uma das gavetas deverá guardar 2 ou mais objetos. $\square$

Esse princípio é também conhecido como *Princípio da Casa de Pombos*, como enunciado abaixo.

Princípio das Casas de Pombos

Se $n+1$ pombos forem colocados em no máximo n casas, então pelo menos uma casa deverá conter dois ou mais pombos.



Colocando 7 pombos em 6 casas

3 Aplicações do Princípio das Gavetas

Vejamos a seguir, por meio de alguns exercícios, a aplicação do Princípio das Gavetas.

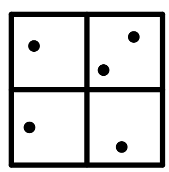
Exercícios Resolvidos 23.

(01) Em uma prova objetiva com 10 questões, as possíveis notas são 0, 1, ..., 10. Mostre que, se 15 alunos fizeram essa prova, então pelo menos 2 deles tirarão a mesma nota.
Solução:
Imaginemos que, uma vez corrigidas as provas, as mesmas são guardadas em onze gavetas, denominadas de $G_0, G_1, ..., G_{10}$, que correspondem às possíveis notas da prova. Na pior das hipóteses, suponha que as primeiras 11 provas corrigidas tenham todas notas distintas. Até então, há uma prova em cada uma das 11

gavetas. Ao corrigir a 12^a prova, necessariamente essa prova deverá ser colocada em uma das 11 gavetas, havendo portando pelo menos 2 alunos com a mesma nota. □

(02) Uma caixa contém canetas de três cores: azuis, vermelhas e pretas. Qual o número mínimo de canetas que devemos retirar dessa caixa, para garantir que tiramos duas canetas da mesma cor?
Solução:
Imaginemos 3 gavetas, denominadas de: 1-Azul, 2-Vermelha, 3-Preta. Você vai retirando canetas da caixa e colocando-as nas gavetas correspondente à cor da caneta retirada. É possível tirar até 3 canetas, todas de cores distintas. Nesse caso, após a terceira retirada, cada gaveta conterá 1 caneta. Mas, a quarta caneta retirada deverá ser guardada em uma das 3 gavetas, fazendo com que esssa gaveta fique com 2 canetas. Assim, a quantidade mínima é 4 canetas. □

(03) Escolhem-se ao acaso 5 pontos sobre a superfície de um quadrado de lado 2. Mostre que pelo menos um dos segmentos que eles determinam tem comprimento menor ou igual a $\sqrt{2}$.
Solução:
Sejam $P_1, P_2, ..., P_5$ os pontos tomados sobre o quadrado. Dividamos o quadrado de lado 2, em quatro quadrados de lado 1. Então os 5 pontos acima devem ser "guardados" nos 4 quadrados. Pelo princípio das Gavetas, pelo menos dois deles ficarão no mesmo quadrado.



Agora, observe que dados dois pontos quaisquer em um quadrado de lado unitário a maior distância possível é a diagonal que é $\sqrt{2}$. □

(04) Dado um natural n, considere o conjunto $I_{2n} = \{1, 2, 3, .., 2n\}$. Mostre que escolhendo ao acaso $n+1$ elementos neste conjunto, há dois números em que um deles divide o outro.
Solução:
Observamos que todo inteiro positivo m pode ser escrito na forma $m = 2^{\alpha}.q$, onde $\alpha \geq 0$ e q é um inteiro ímpar. Em particular, se $m \in I_{2n}$, então $q \in \{1, 3, 5, ..., 2n-1\}$. Assim, tomando $n+1$ elementos:

$$m_1 = 2^{\alpha_1} q_1, \quad m_2 = 2^{\alpha_2}.q_2, \quad ..., \quad m_{n+1} = 2^{\alpha_{n+1}}.q_{n+1} \in I_{2n},$$

com $q_1, q_2, ..., q_{n+1} \in \{1, 3, 5, ..., 2n-1\}$, o qual tem n elementos. Logo, devem existir q_i, q_j com $q_i = q_j$. Suponha $\alpha_i \leq \alpha_j$, então

$$m_j = 2^{\alpha_j}.q_j = 2^{\alpha_i}.q_i.2^{\alpha_j - \alpha_i} = m_i.2^{\alpha_j - \alpha_i} \Rightarrow m_i \mid m_j.$$

Analogamente, se $\alpha_j < \alpha_i$, então $m_j \mid m_i$. □

(05) Mostre que em um grupo de 40 pessoas, pelo menos 4 delas tem o mesmo signo.
Solução:
Considere $G_1, G_2, ..., G_{12}$ doze gavetas, correspondento aos signos. Colocar-se-á o nome de cada uma das 40 pessoas na gaveta correspondente ao seu signo. Se ao distribuirmos as primeiras 36 pessoas existir uma das gavetas com 4 ou mais pessoas, a demonstração está encerrada. Caso contrário, cada gaveta conterá exatamente 3 pessoas. Logo, ao tomarmos a 37^a pessoas, esta deverá ser colocada em uma das 12 gavetas. Assim, essa gaveta conterá 4 pessoas, sendo essas do mesmo signo. $\square$

Lista de Exercícios 10.

(01) Prove que em um grupo de 14 pessoas, pelo menos 2 delas tem o mesmo signo.

(02) Uma empresa paga apenas 4 valores saláriais: $R\$1.000,00$, $R\$3.000,00$, $R\$5.000,00$ e $R\$10.000,00$. Mostre que, entre os seus 45 funcionários, pelo menos 12 ganham o mesmo salário.

(03) Uma granja tem 60 galinhas. Sabendo que cada galinha coloca no máximo 25 ovos por mês, prove que existem pelo menos 3 galinhas que colocam a mesma quantidade de ovos no mês.

(04) A comissão organizadora de um congresso dividiu os 75 professores presentes em 8 grupos, de acordo com a disciplina ministrada pelo professor. Sabendo que cada um deles ministra uma única disciplina, mostre que haverá pelo menos um grupo como no mínimo 10 professores.

(05) Um grupo de 6 estagiários foi designado para rever 50 processos e cada processo deveria ser revisto por apenas um dos estagiários. No final do trabalho, todos os estagiários trabalharam e todos os processos foram revistos. É corretor afirmar que nenhum estariário revisou mais do que 8 processos? Justifique.

(06) Uma turma de 50 alunos fez uma prova, cujas possíveis notas são 0, 1, 2, ..., 10. Prove que pelo menos 5 pessoas tiraram a mesma nota.

(07) Uma caixa contém meias de 5 cores. Quantos meias devem ser retirados, ao acaso, dessa caixa para ter a certeza de tirar duas meias da mesma cor?

(08) Qual o número mínimo de pessoas que deve haver em um grupo para que possamos garantir que nele haja pelo menos 5 pessoas do mesmo signo?

Capítulo 11

Triângulo de Pascal

Objetivos:

✓ **Apresentar o Triângulo de Pascal**
✓ **Estudar propriedades do Triângulo de Pascal.**

1 A Construção

• Construa um "triângulo", formado de números naturais, com as características abaixo:

(I) Suas linhas e colunas são numeradas de cima para baixo e da esquerda para a direita, respectivamente, começando ambas em 0 (zero). O elemento na linha n e coluna k, será denotado por T_n^k.

$$
\begin{array}{llccccccc}
 & & \text{coluna} & \text{coluna} & \text{coluna} & ... & \text{coluna} & \\
 & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & ... & \downarrow & ... \\
 & & 0 & 1 & 2 & ... & k & \\
\text{linha} \rightarrow & 0 & & & & & & \\
\text{linha} \rightarrow & 1 & & & & & & \\
\text{linha} \rightarrow & 2 & & & & & & \\
\quad\vdots & & & & & & & \\
\text{linha} \rightarrow & n & & & & ... & T_n^k & ... \\
\quad\vdots & & & & & & &
\end{array}
$$

(II) A linha zero tem um único elemento;

(III) Cada linha tem um elemento a mais que a linha anterior, de modo para todo n, a n-ésima linha tem $n+1$ elementos;

(IV) Para todo n e todo k, o elemento T_n^k é dado por:

$$T_n^k := C_n^k.$$

(V) O triângulo tem infinitas linhas.

Solução:
Juntando todas as informações acima, obtemos a estrutura abaixo:

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
C_0^0 \\
C_1^0 & C_1^1 \\
C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 \\
C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 \\
C_4^0 & C_4^1 & C_4^2 & C_4^3 & C_4^4 \\
C_5^0 & C_5^1 & C_5^2 & C_5^3 & C_5^4 & C_5^5 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
C_n^0 & C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & C_n^4 & C_n^5 & ... & C_n^k & ... & C_n^{n-1} & C_n^n \\
C_{n+1}^0 & C_{n+1}^1 & C_{n+1}^2 & C_{n+1}^3 & C_{n+1}^4 & C_{n+1}^5 & ... & C_{n+1}^k & ... & C_{n+1}^{n-1} & C_{n+1}^n & C_{n+1}^{n+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

A estrutura assim construído é chamado **Triângulo de Pascal**. Ele foi descoberto pelo matemático chinês Yang Hui (1238-1298) e 500 anos depois, suas propriedades foram estudas pelo matemático francês Blaise Plascal.

Calculando C_n^k para cada um dos valores no triângulo, podemos visualizar os valores numéricos do Triângulo de Pascal.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

2 Propriedades do Triângulo de Pascal

Como o Triângulo de Pascal é construído a partir dos números binomias, usando as propriedades desses números, vistas no Capítulo 4, seguem algumas propriedades do Triângulo de Pascal.

1 - Relação de Stifel

Somando dois elementos consecutivos de uma mesma linha, obtemos o elemento situado na linha seguinte e na coluna corresponde à coluna da parcela que fica

mais à direita.
Em linguagem simbólica, para todo $n \geq 0$ e todo $0 \leq k \leq n-1$, tem-se:

$$\boxed{T_n^k + T_n^{k+1} = T_{n+1}^{k+1}}$$

Demonstração:
Usando a definição de T_n^k e a relação de Stifel temos:

$$T_n^k + T_n^{k+1} := \underbrace{C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}}_{\text{Relação de Stifel}} := T_{n+1}^{k+1}.$$

$\square$

A Relação de Stifel nos permite construir rapidamente o Triângulo de Pascal, sem a necessidade de calcularmos os números binomias C_n^k. E de posse do triângulo, podemos usá-lo para determinar os valores dos números binomiais, já que $T_n^k = C_n^k$.

Exemplos:
(01) O triângulo acima foi rapidamente construído usando a Relação de Stifel. A partir dele, vê-se que $T_6^2 = 2$ e $T_7^3 = 35$. Então, pode-se deduzir que $C_6^2 = 15$ e $C_7^3 = 35$.

2 - Igualdade de Elementos Equidistantes

Em cada linha, os elementos equidistantes dos extremos são iguais.
Em linguagem simbólica, para todo $n \geq 0$ e todo $0 \leq k \leq n$:

$$\boxed{T_n^k = T_n^{n-k}}$$

Demonstração:
Tomando um elemento genérico T_n^k no triângulo, esse encontra-se $k+1$ unidades distantes do 1^0 elemento dessa linha. Logo, o elemento, nessa linha, que também está à mesma distância do outro extremo, ou seja, $k+1$ unidades do último elemento, está na coluna $n-k$.

$$\underbrace{T_n^0 \quad T_n^1 \quad T_n^2 \quad ... \quad T_n^k}_{k+1 \text{ elementos}} \quad ... \quad \underbrace{T_n^{n-k} \quad T_n^{n-k+1} \quad ... \quad T_n^{n-1} \quad T_n^n}_{k+1 \text{ elementos}}$$

$$\underbrace{\uparrow \qquad\qquad \uparrow}_{\text{equidistantes dos extremos}}$$

A propriedade afirma que $T_n^k = T_n^{n-k}$. De fato, como números binomiais complementares são iguais, temos:

$$T_n^k := \underbrace{C_n^k = C_n^{n-k}}_{\text{nr. binomiais complementares}} := T_n^{n-k}.$$

$\square$

Exemplos:
(01) Segue dessa propriedade que $T_{10}^7 = T_{10}^3$;
(02) Como são equidistantes dos extremos, temos as seguintes igualdades na 8^a linha do Triângulo de Pascal: $T_8^0 = T_8^8$, $T_8^1 = T_8^7$, $T_8^2 = T_8^6$ e $T_8^3 = T_8^5$.

3 - Teorema das Linhas

Para qualquer $n = 0, 1, 2, ...,$ *a soma dos elementos da* n*-ésima linha é igual a* 2^n, ou seja,

$$\boxed{T_n^0 + T_n^1 + T_n^2 + ... + T_n^n = 2^n}$$

Demonstração:
Como $T_n^k = C_n^k$, a propridade diz que:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n.$$

Já vimos que, se A é um conjunto com n elementos, então:
(i) o número de subconjuntos de A com k elementos é dado por C_n^k;
(ii) A tem um total de 2^n subconjuntos.

Ora, para determinar o número de subconjuntos de A, somamos todos os subconjuntos de A com 0, 1, 2, ... e n elementos. Então, juntando as informações (i) e (ii) acima, temos:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n.$$

$\square$

Exemplos:
(01) $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 2^5 = 32$;
(02) Mesmo não conhecendo os elementos da 12^a linha do Triângulo de Pascal, por essa propriedade, sabemos que somando todos eles obtemos $2^{12} = 4.096$;
(03) $C_{10}^0 + C_{10}^1 + C_{10}^3 + C_{10}^4 + ... + C_{10}^{10} = 979$.
De fato, pela Teorema das Linhas, temos:
$C_{10}^0 + C_{10}^1 + C_{10}^2 + C_{10}^3 + C_{10}^4 + ... + C_{10}^{10} = 2^{10} \Rightarrow$
$C_{10}^0 + C_{10}^1 + C_{10}^3 + C_{10}^4 + ... + C_{10}^{10} = 1.024 - C_{10}^2 = 979$.

4 - Teorema das Colunas

A soma dos elementos de uma coluna, começando no primero elemento da coluna e parando em uma linha qualquer, é igual ao elemento que está na linha imediatamente abaixo e na coluna imediatamente à direita, ou seja,

$$\boxed{T_k^k + T_{k+1}^k + T_{k+2}^k + \dots\dots + T_{k+p}^k = T_{k+p+1}^{k+1}}$$

Demonstração:
Pela relação de Stifel (Propriedade 1), cada um dos elementos da coluna $k+1$, podem ser escritos como uma soma. Assim,

$$\begin{aligned} T_{k+1}^{k+1} &= T_k^k + T_k^{k+1} \\ T_{k+2}^{k+1} &= T_{k+1}^k + T_{k+1}^{k+1} \\ T_{k+3}^{k+1} &= T_{k+2}^k + T_{k+2}^{k+1} \\ &\vdots \\ T_{k+p}^{k+1} &= T_{k+p-1}^k + T_{k+p-1}^{k+1} \\ T_{k+p+1}^{k+1} &= T_{k+p}^k + T_{k+p}^{k+1} \end{aligned}$$

Somando agora, termo a termo, e cancelando os termos iguais, que aparecem em membros opostos, obtemos:

$$T_{k+p+1}^{k+1} = T_k^k + T_k^{k+1} + T_{k+1}^k + T_{k+2}^k + \dots + T_{k+p-1}^k + T_{k+p}^k.$$

Pela construção do triângulo, o elemento T_k^{k+1} não existe, logo vamos assumir $T_k^{k+1} = 0$. Assim,

$$T_{k+p+1}^{k+1} = T_k^k + T_{k+1}^k + T_{k+2}^k + \dots + T_{k+p}^k.$$

que em notação de número binomial fica:

$$C_k^k + C_{k+1}^k + C_{k+2}^k + \dots + C_{k+p}^k = C_{k+p+1}^{k+1}.$$

□

Exemplos:
(01) Pela Teorema das Colunas, $C_3^3 + C_4^3 + C_5^3 + C_6^3 = C_7^4 = 35$;
(02) $C_7^7 + C_8^7 + C_9^7 + C_{11}^7 = 375$.
De fato, pelo Teorema das Colunas,

$$C_7^7 + C_8^7 + C_9^7 + C_{10}^7 + C_{11}^7 = C_{12}^8 \Rightarrow C_7^7 + C_8^7 + C_9^7 + C_{11}^7 = 495 - C_{10}^7 = 375.$$

5 - Teorema das Diagonais

A soma dos elementos de uma diagonal qualquer (parelas à hipotenusa), começando no primeiro elemento e parando em uma linha qualquer, é igual ao elemento que está logo abaixo da parcela da soma que corresponde a última linha tomada no triângulo, ou seja,

$$\boxed{T_n^0+T_{n+1}^1+T_{n+2}^2+...+T_{n+k}^k = T_{n+k+1}^k.}$$

Demonstração:
$T_n^0 + T_{n+1}^1 + T_{n+2}^2 + ... + T_{n+k}^k$
$= T_n^n + T_{n+1}^n + T_{n+2}^n + ... + T_{n+k}^n$ - pela propriedade 2, $T_{n+k}^k = T_{n+k}^n, \forall k$.
$= T_{n+k+1}^{n+1}$ - pelo Teorema das Colunas
$= T_{n+k+1}^k$ - Propriedade 2.
Em linguagem de número binomial, a propriedade diz que:

$$C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + ... + C_{n+k}^k = C_{n+k+1}^k.$$

Exemplos:
(01) Pela Teorema das Diagonais, $C_5^0 + C_6^1 + C_7^2 + C_8^3 = C_9^3 = 84$.
(02) $C_7^0 + C_8^1 + C_9^2 + C_{10}^3 + C_{11}^4 + C_{12}^5 + C_{13}^6 = C_{14}^6 = 3.003$.

Lista de Exercícios 11.

(01) Fazendo uso da Propriedade 1 - Relação de Stifel, construa as 15 primeiras linhas do Triângulo de Pascal e usando o triângulo construído, determine:
(a) C_8^4;
(b) C_{12}^7;
(c) C_{13}^9;
(d) C_{15}^{12}.

(02) Use as propriedades do Triângulo de Pascal para calcular:
(a) $C_5^3 + C_5^4$;
(b) $C_{10}^7 + C_{10}^6$;
(c) $C_{20}^4 + C_{20}^3$.

(03) Sabendo que $T_{16}^4 = 1.820$, em que coluna da linha 16, encontra-se outro elemento com esse mesmo valor? Justifique.

(04) Usando o Teorema das Linhas calcule:
(a) $C_7^0 + C_7^1 + C_7^2 + C_7^3 + C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7$;
(b) $C_8^0 + C_8^2 + C_8^3 + C_8^5 + C_8^6 + C_8^7 + C_8^8$;
(c) $C_6^0 + C_6^2 + C_6^4 + C_6^6$.

(05) Usando o Teorema das Colunas, calcule:
(a) $C_3^3 + C_4^3 + C_5^3 + C_6^3$;
(b) $C_5^5 + C_6^5 + C_7^5 + C_8^5 + C_9^5 + C_{10}^5$;
(c) $C_8^7 + C_9^7 + C_{10}^7 + C_{11}^7 + C_{12}^7$;
(d) $C_7^6 + C_8^6 + C_{10}^6 + C_{11}^6 + C_{12}^6$.

(06) Usando o Teorema das Diagonais, calcule:
(a) $C_5^0 + C_8^3 + C_9^4 + C_6^1 + C_7^2$;
(b) $C_8^5 + C_4^1 + C_7^4 + C_5^2 + C_{10}^7 + C_6^3 + C_9^6 + C_3^0$;
(c) $C_4^1 + C_5^2 + C_6^3 + C_8^5 + C_9^6 + C_{10}^7$;

(07) Mostre que no Triângulo de Pascal, temos:
(i) $T_n^k < T_n^{k+1}$, se $k < \frac{n-1}{2}$ e
(ii) $T_n^k > T_n^{k+1}$, se $k > \frac{n-1}{2}$.
Explique o que diz essa propriedade.

Respostas da Lista de Exercícios 11
(01.a) $C_8^4 = 70$ (01.b) $C_{12}^7 = 792$ (01.c) $C_{13}^9 = 715$ (01.d) $C_{15}^{12} = 455$
(02.a) $C_6^4 = 15$ (02.b) $C_{11}^7 = 330$ (02.c) $C_{21}^4 = 5.985$
(03) Na coluna 12, pois no triângulo, elementos equidistantes dos extremos são iguais. Assim, $T_{16}^4 = T_{16}^{12}$.
(04.a) $2^7 = 128$ (04.b) 178 (04.c) 32
(05.a) $C_7^4 = 35$ (05.b) $C_{11}^6 = 462$ (05.c) 1.286 (05.d) 1.631
(06.a) 210 (06.b) 330 (06.c) 294

Capítulo 12

Binômio de Newton

Objetivos:

✓ **Justificar a fórmula do Binômio de Newton usando a Análise Combinatória.**

1 Introdução

Dados números reais x e a, para qualquer número natural $n \geq 1$, temos a identidade:

$$\boxed{(x+a)^n = C_n^0 x^n a^0 + C_n^1 x^{n-1} a^1 + C_n^2 x^{n-2} a^2 + \ldots + C_n^n x^0 a^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} a^k}$$

Essa expressão é conhecida como **Fórmula do Binômio de Newton**.

Usando demonstração por indução, prova-se que essa identidade é verdadeira para qualquer natural $n \geq 1$. Nosso objetivo aqui é justificar a validade da fórmula do Binômio de Newton, usando as técnicas de contagem da Análise Combinatória.

Pela definição de potência, para qualquer natural $n \geq 1$, tem-se que:

$$(x+a)^n = \underbrace{(x+a)(x+a)(x+a) \quad \ldots \quad (x+a)}_{n \text{ fatores}}$$

Pelo uso da propriedade distributiva, esse produto é obtido, tomando-se em cada um dos n fatores (parênteses) uma das parcelas, x ou a, e multiplicando os n fatores resultantes. Repete-se esse processo até que todas as possibilidades sejam esgotadas e no final, somamos os termos semelhantes. Como exemplo, vejamos o cálculo de $(x+a)^4$.

$$(x+a)^4 = (x+a)(x+a)(x+a)(x+a) = x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + a^4.$$

Analisemos agora, como foram obtidas cada uma das 5 parcelas do desenvolvimento desse binômio.

Parcela: $\mathbf{x^4}$:

Essa parcela é obtida escolhendo x em 4 dos 4 fatores (parênteses) acima, a em 0 deles e multiplicando o resultado:

$$\begin{array}{cccccccc}
(x+a)^4 & = & (x+a) & (x+a) & (x+a) & (x+a) & & \\
 & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \\
 & & x & x & x & x & \rightarrow & x^4a^0
\end{array}$$

Parcela: $\mathbf{4x^3a}$:

$4x^3a$ é obtida escolhendo-se a em 1 dos 4 parênteses, x no restante deles e multiplicando o resultado. O coeficiente 4, indica que existem 4 parcelas desse tipo, isso porque, existem $C_4^1 = 4$ modos de selecionar os parênteses que escolheremos o a, dentre os 4 existentes. Essas 4 parcelas são obtidas como abaixo:

$$\begin{array}{cccccccc}
(x+a)^4 & = & (x+a) & (x+a) & (x+a) & (x+a) & & \\
 & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \\
 & & x & x & x & a & \rightarrow & x^3a
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
(x+a)^4 & = & (x+a) & (x+a) & (x+a) & (x+a) & & \\
 & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \\
 & & x & x & a & x & \rightarrow & x^3a
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
(x+a)^4 & = & (x+a) & (x+a) & (x+a) & (x+a) & & \\
 & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \\
 & & x & a & x & x & \rightarrow & x^3a
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
(x+a)^4 & = & (x+a) & (x+a) & (x+a) & (x+a) & & \\
 & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \\
 & & a & x & x & x & \rightarrow & x^3a
\end{array}$$

Como os termos obtidos nesses produtos são todos semelhantes, somamos no final, obtendo $4x^3a$.

Parcela: $\mathbf{6x^2a^2}$:

Essa parcela é obtida escolhendo-se a em 2 dos 4 parênteses, x nos 2 restantes e multiplicando os resultados. Como existem $C_4^2 = 6$ modos de selecionar os 2 parênteses dentre os 4 existentes, encontramos 6 parcelas desse tipo, as quais são somadas no final. Tudo como abaixo:

$$\begin{array}{cccccccc}
(x+a)^4 & = & (x+a) & (x+a) & (x+a) & (x+a) & & \\
 & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \\
 & & x & x & a & a & \rightarrow & x^2a^2
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
(x+a)^4 & = & (x+a) & (x+a) & (x+a) & (x+a) & & \\
 & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \\
 & & x & a & x & a & \to & x^2a^2
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
(x+a)^4 & = & (x+a) & (x+a) & (x+a) & (x+a) & & \\
 & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \\
 & & x & a & a & x & \to & x^2a^2
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
(x+a)^4 & = & (x+a) & (x+a) & (x+a) & (x+a) & & \\
 & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \\
 & & a & x & x & a & \to & x^2a^2
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
(x+a)^4 & = & (x+a) & (x+a) & (x+a) & (x+a) & & \\
 & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \\
 & & a & x & a & x & \to & x^2a^2
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
(x+a)^4 & = & (x+a) & (x+a) & (x+a) & (x+a) & & \\
 & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \\
 & & a & a & x & x & \to & x^2a^2
\end{array}$$

Somando as 6 parcelas obtemos $6x^2a^2$.

Parcela: $\mathbf{4xa^3}$:

É obtida escolhendo-se a em 3 dos 4 parênteses, x no restante e multiplicando os resultados. Como existem $C_4^3 = 4$ modos de selecionar 3 dentre os 4 parênteses, temos 4 parcelas desse tipo, obtidas como abaixo:

$$\begin{array}{cccccccc}
(x+a)^4 & = & (x+a). & (x+a). & (x+a). & (x+a) & & \\
 & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \\
 & & x & a & a & a & \to & xa^3
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
(x+a)^4 & = & (x+a) & (x+a) & (x+a) & (x+a) & & \\
 & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \\
 & & a & x & a & a & \to & xa^3
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
(x+a)^4 & = & (x+a) & (x+a) & (x+a) & (x+a) & & \\
 & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \\
 & & a & a & x & a & \to & xa^3
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
(x+a)^4 & = & (x+a) & (x+a) & (x+a) & (x+a) & & \\
 & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \\
 & & a & a & a & x & \to & xa^3
\end{array}$$

A soma das parcelas resulta $4xa^3$.

Parcela: $\mathbf{a^4}$:

Aqui escolhe-se a em 4 dos 4 parênteses acima e x em 0 deles. Existe $C_4^4 = 1$ modo de fazer essa escolha. Assim, temos uma só parcela desse tipo.

$$\begin{array}{ccccccccc} (x+a)^4 & = & (x+a). & (x+a). & (x+a). & (x+a) & & \\ & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \\ & & a & a & a & a & \rightarrow & x^0a^4 \end{array}$$

Portanto,

$$(x+a)^4 = C_4^0\, x^4a^0 + C_4^1\, x^3a^1 + C_4^2\, x^2a^2 + C_4^3\, x^1a^3 + C_4^4\, x^0a^4.$$

Generalizando, para um número natural $n \geq 1$ árbitrário, o desenvolvimento do binômio $(x+a)^n$ é obtido somando as parcelas resultantes do produto:

$$(x+a)^n = \underbrace{(x+a)(x+a)(x+a) \quad ... \quad (x+a).}_{n \text{ fatores}}$$

E para efetuar esse produto, escolhe-se a em k dos n parênteses, para $k = 0, 1, 2, ..., n$ e x no restante deles, isto é, em $n-k$. Efetuam-se os produtos e no final, somando-se os termos semelhantes. A tabela abaixo mostra o número de possibilidades dessas escolhas e a parcela resultante para cada valor de k.

Número de parênteses que escolhe-se a	Número de parêntese que escolhe-se x	Possibilidades de escolher k em n	Parcela Resultante
0	n	C_n^0	$C_n^0\, x^na^0$
1	$n-1$	C_n^1	$C_n^1\, x^{n-1}a^1$
2	$n-2$	C_n^2	$C_n^2\, x^{n-2}a^2$
3	$n-3$	C_n^3	$C_n^3\, x^{n-3}a^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	$n-k$	C_n^k	$C_n^{n-k}\, x^{n-k}a^k$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	0	C_n^n	$C_n^n\, x^0a^n$

Somando as parcelas resultantes, temos:

$$(x+a)^n = C_n^0x^na^0 + C_n^1x^{n-1}a + C_n^2x^{n-2}a^2 + ... + C_n^nx^0a^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^kx^{n-k}a^k.$$

Observações:
Observe que:
(i) $(x+a)^n$ tem $n+1$ parcelas;
(ii) Os coeficientes que aparecem no desenvolvimento de $(x+a)^n$ são exatamente os elementos que estão na n-ésima linha do Triângulo de Pascal.

2 Termo Geral do Binômio de Newton

Considerando o Binômio de Newton, com as parcelas ordenadas pelas potências decrescente de x:

$$(x+a)^n = C_n^0x^na^0 + C_n^1x^{n-1}a^1 + C_n^2x^{n-2}a^2 + ... + C_n^kx^{n-k}a^k + ... + C_n^nx^0a^n,$$

para cada $k = 0, 1, ..., n$, o termo de ordem $k+1$ é:

$$\boxed{T_{k+1} = C_n^k \, x^{n-k} a^k}$$

Exemplos:
(01) O quinto termo no desenvolvmento de binômio $(x+a)^{10}$ é:

$$T_5 = \underset{\substack{\uparrow \\ k}}{T_{4+1}} = C_{10}^4 \, x^{10-4} a^4 = 210 x^6 a^4.$$

$\square$

(02) O oitavo termo do binômio $\left(\frac{1}{2x^3} - 2x^4\right)^{12}$ é:

$$T_8 = T_{7+1} = C_{12}^7 \, (\frac{1}{2x^3})^5 (-2x^4)^7 = -3.168 x^{13}.$$

$\square$

(03) O coeficiente de x^4 no desenvolvimento do binômio $(x^4 - \frac{1}{2x^2})^7$ é $\frac{35}{16}$.

De fato, o termo geral desse binômio é dado por:

$$T_{k+1} = C_7^k \, (x^4)^{7-k} (-\frac{1}{2x^2})^k = \frac{(-1)^k C_7^k}{2^k} \, x^{28-6k}.$$

Então, se $28 - 6k = 4 \Rightarrow k = 4 \Rightarrow T_5 = \frac{35}{16} x^4$. $\square$

(04) O coeficiente do termo independente de x no desenvolvimento do binômio $(5x^5 - \frac{1}{3x})^6$ é $-\frac{10}{81}$.

Como o termo geral é dado por:

$$T_{k+1} = C_6^k \, (5x^5)^{6-k} (-\frac{1}{3x})^k = (-1)^k C_6^k \, \frac{5^{6-k}}{3^k} \, x^{30-6k}.$$

Então, $30 - 6k = 0 \Rightarrow k = 5 \Rightarrow T_6 = -\frac{30}{243} = -\frac{10}{81}$. $\square$

Lista de Exercícios 12.

(01) Utilizando o Triângulo de Pascal, faça o desenvolvimento dos binômios abaixo:
(a) $(x+a)^6$;
(b) $(x-a)^{10}$;
(c) $(p+q)^{11}$;
(d) $(2x+3y)^7$.

(02) Considerando o desenvolvimento do binômio $(x^3 + \frac{2}{x^2})^{15}$, ordenado segundo as potências decrescente da primeira parcela, determine:
(a) o número de termos;
(b) o segundo termo;
(c) o quinto termo;
(d) o coeficiente de x^{10};
(e) a potência de x que tem 320.320 como coeficiente;
(f) o coeficiente da menor potência positiva de x.

(03) Determine o termo independente de x no desenvolvimento do binômio $(x^5 + \frac{1}{x^2})^7$.

(04) Determine o coeficiente de x^3 no desenvolvimento de $\left(-\frac{1}{x^4} + 2x^3\right)^8$.

(05) Para que valor de n, o desenvolvimento de $(2x^2 - \frac{1}{x^3})^n$ possui um termo independente de x?

(06) Use o desenvolvimento do Binômio de Newton para mostrar que:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n.$$

(07) Mostre que, para todo $n \geq 0$, $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + ... + (-1)^n C_n^n = 0$.

(08) Dado um natural $n \geq 1$, calcule $\sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k$.

(09) Supondo n um número par, mostre que $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + ... + C_n^n = 2^{n-1}$.

Respostas da Lista de Exercícios 12

(01.a) Na 6^a linha do Triângulo de Pascal temos: 1 6 15 20 15 6 1. Assim, $(x+a)^6 = x^6 + 6x^5a + 15x^4a^2 + 20x^3a^3 + 15x^2a^4 + 6xa^5 + a^6$;

(01.b) $(x-a)^{10} = x^{10} - 10x^9a + 45x^8a^2 - 120x^7a^3 + 210x^6a^4 - 252x^5a^5 + 210x^4a^6 - 120x^3a^7 + 45x^2a^8 - 10xa^9 + a^{10}$

(01.c) $(p+1)^{11} = p^{11} + 11p^{10}q^1 + 55p^9q^2 + 165p^8q^3 + 330p^7q^4 + 462p^6q^5 + 462p^5q^6 + 330p^4q^7 + 165p^3q^8 + 55p^2q^9 + 11pq^{10} + q^{11}$

(01.d) $(2x+3y)^7 = 128x^7 + 1.344x^6y^1 + 6.048x^5y^2 + 15.120x^4y^3 + 22.680x^3y^4 + 20.412x^2y^5 + 10.206xy^6 + 2.187y^7$

(02.a) 16

(02.b) $30x^{40}$

(02.c) $21.840x^{25}$ (02.d) 823.680

(02.e) x^{15} (02.f) 1.647.360

(03) $T_6 = 21$

(04) -1.792

(05) $n = 5k, k \in \mathbb{N}^*$

(06) $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.1^{n-1}1^k = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n$.

(07) Pelo desenvolvimento do binômio,
$0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^{n-1}(-1)^k = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + ... + (-1)^n C_n^n = 0$.

(08) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.1^{n-k}.2^k = (1+2)^n = 3^n$.

(09) Das questões (06) e (07) temos as identidades:
$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$ e
$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + ...(-1)^{n-1}C_n^{n-1} + (-1)^n C_n^n = 0$.
Como n é par, temos que $(-1)^n = 1$. Assim, somando as duas identidades, obtemos: $2(C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^3 + ... + C_n^n) = 2^n \Rightarrow C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^3 + ... + C_n^n) = 2^{n-1}$.

Capítulo 13

Experimento Aleatório

Objetivos:

✓ **Apresentar definições elementares associadas a Teoria das Probabilidades.**

1 Experimento

A Teoria das Probabilidades cria modelos apropriados para descrever fenômenos observáveis e tenta quantificar as chances desses fenômenos acontecerem. Ela tem aplicações em diversas áreas, como economia, meteorologia, política, cálculo de seguros, etc. A seguir, vejamos alguns conceitos básicos que necessitaremos no cálculo de probabilidades.

Denominaremos de **experimento**, qualquer *ação* que possa ser repetida, acompanhada de um *resultado* que se quer observar.

Exemplos de experimentos:
(a) Abandonar uma moeda de uma determinada altura e observar o tempo que ela leva para tocar o solo.

- **ação**: abandonar uma moeda
- **resultado a observar**: tempo que a moeda leva para tocar o solo.

(b) Abandonar uma moeda de uma determinada altura e observar a face voltada para cima.

- **ação**: abandonar uma moeda
- **resultado a observar**: a face que cai voltada para cima.

(c) Aquecer a água e observar a que temperatura que ela ferve.

- **ação**: aquecer a água
- **resultado a observar**: a temperatura que a água ferve.

(d) Lançar dois dados e observar o maior número obtido.

- **ação**: lançar dois dados
- **resultado a observar**: o maior número obtido.

(e) Lançar dois dados e observar a soma obtida.

- **ação**: lançar dois dados
- **resultado a observar**: a soma obtida.

Experimento Determinístico

Um experimento é dito **determinístico**, se ele produz os mesmos resultados quando repetido em condições semelhantes.

Exemplos de experimentos determinísticos:
(a) Abandonar uma moeda e observar o tempo que ela leva para tocar o solo.
(b) Aquecer a água e observar a temperatura que ela ferve.
(c) Tirar 10 cópias da lista de exercícios, a $R\$ \ 0,10$ cada uma, e determinar o valor a pagar.

Experimento Aleatório

Um experimento é dito **aleatório** ou **probabilístico**, se ele produz resultados geralmente diferentes quanto repetido em condições semelhantes.

Exemplos de experimentos aleatórios:
(a) Abandonar uma moeda de uma determinada altura e observar a face voltada para cima.
(b) Lançar uma dado e observar o número obtido.
(c) Jogar duas moedas e anotar o par de resultados.
(d) Jogar um dado duas vezes e anotar a soma dos números obtidos.

2 Espaço Amostral

O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado **espaço amostral** desse experimento.

Usaremos a notação Ω para representar o espaço amostral de experimentos aleatórios e $|\Omega|$ para indicar sua cardinalidade.

Exemplos:

(a) Experimento: Lançar uma moeda e observar a face que cai voltada para cima:
· Espaço amostral : $\Omega = \{cara, coroa\}$ e $|\Omega| = 2$.

(b) Experimento: Lançar um dado e observar o resultado obtido.
· Espaço amostral : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $|\Omega| = 6$.

(c) Experimento: Lançar uma moeda três vezes e observar os resultados obtidos nos 3 lançamentos, considerando K - cara e C - coroa:
· Espaço amostral : $\Omega = \{KKK, KKC, KCK, CKK, KCC, CKC, CCK, CCC\}$ e $|\Omega| = 8$.

(d) Experimento: lançar uma moeda 4 vezes e observar o número de caras obtidas:
· Espaço amostral: $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $|\Omega| = 5$.

No cálculo de probabilidades, não estaremos interessados em relacionar os elementos de Ω, e sim, em determinar sua cardinalidade $|\Omega|$. Para isso, serão de grande utilidade as técnicas de contagem estudadas em Análise Combinatória.

Exercícios Resolvidos 24.

(01) Determine a cardinalidade do espaço amostral de cada um dos experimentos abaixo.

(a) Lançar um dado seguido de uma moeda e anotar o par obtido.
Solução:
Os elementos do espaço amostral são pares ordenados

$$(d, m)$$

onde d é o resuldo do lançamento do dado e m, o resultado do lançamento da moeda. Assim, para determinar $|\Omega|$, temos como tarefa a execução do experimento:

	Etapas	N.P.
1^a	Lançar o dado	6
2^a	Lançar a moeda	2

Pelo P. M., $|\Omega| = 6 \times 2 = 12$. □

(b) Em uma caixa há 6 bolas numeradas de 1 a 6. Duas bolas são retiradas, uma após a outra, sem reposição, e seus números são anotados.
Solução:
O experimento consiste na retirada sucessiva das duas bolas da caixa e na observação dos números obtidos. Logo, os elementos do espaço amostral são pares ordenados

$$(b_1, b_2),$$

onde b_1 é o número da primeira bola e b_2, o da segunda. Assim, para determinar $|\Omega|$, executaremos como tarefa o experimento:

	Etapa	N.P.
1^a	Retirar a 1^a bola	6
2^a	Retirar a 2^a bola	5

$\therefore |\Omega| = 6 \times 5 = 30.$ □

(c) Anotar a data de aniversário de 10 pessoas, colocadas em fila.
Solução:
Considerando o ano com 365 dias, há 365 possibilidades (dia/mes) para o aniversário de uma pessoa. Assim, para determinar $|\Omega|$ executamos as seguintes etapas:

	Etapa	N.P.
1^a	Anotar a data de aniversário da 1^a pessoa	365
2^a	Anotar a data de aniversário da 2^a pessoa	365
3^a	Anotar a data de aniversário da 3^a pessoa	365
$\vdots$		
10^a	Anotar a data de aniversário da 10^a pessoa	365

$\therefore |\Omega| = 365^{10}.$ □

(d) Retirar, simultaneamente, 2 sapatos de um armário que contém 2 pares.
Solução:
Considere $X = \{E_1, D_1, E_2, D_2\}$ os 2 pares de sapatos no armário, onde E_i, D_i, representam, respectivamente, o pé esquerdo e direito do par i. O experimento consiste em escolher 2 elementos desse conjunto, sendo a ordem irrelevante, o que pode ser feito de C_4^2 modos. Portanto, $|\Omega| = 6$. □

3 Evento

> Um **evento** de um experimento aleatório é qualquer subconjunto do espaço amostral desse experimento.

Como um conjunto com n elementos possui 2^n subconjuntos, então todo experimento com $|\Omega| = n$, possui 2^n eventos distintos.

Exemplos de Eventos:
(01) **Experimento**: Retirar uma bola de uma caixa que contém 3 bolas, numeradas de 1 a 3, e observar o número retirado.
· Espaço amostral: $\Omega = \{1, 2, 3\} \Rightarrow |\Omega| = 3$.
Esse experimento tem $2^3 = 8$ eventos distintos, os quais são os elementos de $\mathcal{P}(\Omega)$, que é o conjunto das partes de Ω, dado abaixo:

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

(02) **Experimento**: Lançar um dado e observar o resultado obtido.

· Espaço amostral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow |\Omega| = 6$.

Como $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^6 = 64$, existem 64 eventos distintos. Abaixo damos descrição para alguns desses eventos:

- A : sair um número par
  $A = \{2, 4, 6\} \Rightarrow |A| = 3$.
- B : sair um número ímpar
  $B = \{1, 3, 5\} \Rightarrow |B| = 3$.
- C : sair um múltiplo de 3
  $C = \{3, 6\} \Rightarrow |C| = 2$.

(03) **Experimento**: Lançar uma moeda três vezes e observar os resultados obtidos, considerando K - cara e C - coroa.
· Espaço amostral: $\Omega = \{KKK, KKC, KCK, CKK, KCC, CKC, CCK, CCC\}$.

Como $|\Omega| = 8$, então $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^8$. Logo, esse experimento tem 256 eventos distintos. Abaixo, exemplos de alguns deles:

- A : sairem duas caras
  $A = \{KKC, KCK, CKK\} \Rightarrow |A| = 3$.
- B : sair o mesmo resultado nas três moedas
  $B = \{KKK, CCC\} \Rightarrow |B| = 2$.
- C: Não sair nenhuma cara
  $C = \{CCC\} \Rightarrow |C| = 1$.

(04) **Experimento**: Retirar, simultaneamente, 2 sapatos de um armário com 2 pares.
Já vimos acima, que $|\Omega| = 6$. Considerando $X = \{E_1, D_1, E_2, D_2\}$ os sapatos no armário, esses 6 elementos são:

$$\Omega = \{\{E_1, D_1\}, \{E_1, E_2\}, \{E_1, D_2\}, \{D_1, E_2\}, \{D_1, D_2\}, \{E_2, D_2\}\}.$$

Assim, esse experimento tem $2^6 = 64$ eventos distintos. Exemplos de alguns deles:

- A : os sapatos retirados formam 1 par
  $A = \{\{E_1, D_1\}, \{E_2, D_2\}\} \Rightarrow |A| = 2$.
- B : os sapatos retirados são de pares distintos
  $B = \{\{E_1, E_2\}, \{E_1, D_2\}, \{D_1, E_2\}, \{D_1, D_2\}\} \Rightarrow |B| = 4$.
- C: os sapatos retirados são do mesmo pé
  $C = \{\{E_1, E_2\}, \{D_1, D_2\}\} \Rightarrow |C| = 2$.

Tipos de Eventos

Alguns eventos recebem denominações especiais.

Evento Certo

Quanto um evento coincide com seu espaço amostral ele é chamado **evento certo**.

Exemplo:
Experimento: Lançar um dado e observar o resultado.
Evento A - sair um número menor que 10.

$$A = \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Evento Impossível

Quanto um evento é vazio ele é dito **evento impossível**.

Exemplo:
Experimento: Lançar um dado e observar o resultado.
Evento A - sair um número maior que 10.

$$A = \emptyset.$$

Eventos Mutuamente Excludentes

Dois eventos A e B são ditos **mutuamente excludentes**, se $A \cap B = \emptyset$.

Exemplo:
Experimento: Lançar um dado e observar o resultado.
Evento A - sair um número par.
Evento B - sair um número ímpar.

$$A \cap B = \{2, 4, 6\} \cap \{1, 3, 5\} = \emptyset.$$

Evento Unitário

Um evento com um único elemento, diz-se um evento **elementar**, **unitário** ou **simples**.

Exemplo:
Experimento: Lançar um dado e observar o resultado.
Evento A: sair um múltiplo de 5.

$$A = \{5\}.$$

Evento Complementar

Chama-se **evento complementar** de $A \subset \Omega$ ao conjunto, denotado por $\overline{A}$ ou A^c, dado por:

$$\overline{A} = \Omega - A = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}.$$

Exemplo:
Experimento: Lançar um dado e observar o resultado.
Evento A: sair um número par;
Evento complementar $\overline{A}$ - não sair um número par.

$$\overline{A} = \Omega - A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} - \{2, 4, 6, \} = \{1, 3, 5\}.$$

Lista de Exercícios 13.

(01) Classifique os experimentos a seguir em determinísticos ou aleatórios:
(a) Retirar uma bola de uma caixa contendo bolas pretas e brancas e anotar a cor;
(b) Retirar uma bola de uma caixa contendo somente bolas pretas e anotar a cor;
(c) Girar uma roleta e observar o número em que ela pára;
(d) Anotar a temperatura de ebulição da água;
(e) Retirar o rei de copas de um baralho de 52 cartas e anotar as cartas que restam;
(f) Lançar 3 moedas e observar o número de caras obtidas.

(02) Descreva o espaço amostral de cada um dos experimentos a seguir:
(a) Lançar um dado duas vezes e anotar a soma dos números obtidos;
(b) Lançar um dado duas vezes e anotar o produto dos números obtidos;
(c) Lançar uma moeda duas vezes e anotar o par resultante, sendo K - cara e C - coroa:
(d) Lançar duas moedas e anotar o número de caras;
(e) Selecionar, ao acaso, 3 lâmpadas a partir de um lote e observar se a lâmpadda é defeituosa (d) ou perfeita (p);
(f) De uma família com três filhos, anotar o sexo de cada um deles;
(g) De uma caixa contendo as 4 letras: A, B, C, D, sortear 2, uma após a outra, sem reposição.

(03) Determine a cardinalidade do espaço amostral de cada um dos experimentos a seguir:
(a) Lançar um dado duas vezes e anotar o par resultante;
(b) Em uma caixa há 4 bolas numeradas de 1 a 4. Duas bolas são retiradas, uma após a outra, com reposição (isto é, a primeira bola é devolvida à caixa antes de retirar a segunda bola), e seus números são anotados;
(c) Escolher, desprezando a ordem, 6 números no conjunto $\{1, 2, 3, ..., 60\}$;
(d) Retirar, simultaneamente, duas peças de um dominó de 28 peças.

(04) Considere o experimento: **Retirar 1 carta de um baralho com 52 cartas**. Descreva cada um dos eventos abaixo, associados a esse experimento, e determine sua cardinalidade:
(a) A - retirar um ás;
(b) B - retirar um rei vermelho;
(c) C - retirar uma carta de paus;
(d) D - retirar uma carta de naipe preto;

(05) Considere o experimento: **Escolher, simultameamente, 4 elementos do conjunto** $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$. Descreva cada um dos eventos abaixo, associados a esse experimento, e determine sua cardinalidade
(a) A - a_1 está entre os escolhidos;
(b) B - a_1 e a_2 estão entre os escolhidos;
(c) C - a_1 está entre os escolhidos e a_2 não.

(06) Considere o experimento: **Sortear 6 números do conjunto** $\{1, 2, 3, ...60\}$**, desprezando a ordem do sorteio**. Para esse experimento, determine a cardinalidade de cada um dos eventos abaixo.
(a) A - o número 1 está dentre os números sorteados;
(b) B - os números 1 e 2 estão entre os números sorteados;
(c) C - o número 1 ou o número 2 estão entre os números sorteados;
(d) D - os números sorteados entre os números $\{12, 23, 24, 35, 36, 55, 56\}$.

(07) Considere o experimento: **Lançar um dado 5 vezes e anotar os números obtidos**. Determine a cardinalidade de cada um dos eventos abaixo, associados a esse experimento.
(a) A - o número 1 saiu em exatamente dois lançamentos;
(b) B - obteve-se um par (dois dados com o mesmo número e os outros 3 com números distintos);
(c) C - obteve-se uma trinca (três dados com o mesmo número e dois outros com números distintos).

(08) Considere o experimento: **Retirar, simultaneamente, 4 pés de sapatos de um armário que tem 5 pares**. Determine a cardinalidade de cada um dos eventos abaixo, associados a esse experimento.
(a) A - Retirar exatamente dois pares de sapatos.
(b) B - retirar exatamente um par de sapatos;
(c) C - não existir nenhum par, entre os sapatos retirados.

(09) Considere o experimento: **Retirar simultaneamente duas peças de um dominó de 28 peças**. Determine a cardinalidade de cada um dos eventos abaixo, associados a esse experimento.
(a) A - as peças retiradas possuem o número 1 em comum;
(b) B - as peças retiradas possuem um número em comum.

Respostas da Lista de Exercícios 13
(01.a) aleatório
(01.b) determinístico
(01.c) aleatório
(01.d) determinístico
(01.e) determinístico
(01.f) aleatório
(02.a) $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$;
(02.b) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36\}$;
(02.c) $\Omega = \{KK, KC, CK, KK\}$
(02.d) $\Omega = \{0, 1, 2\}$;
(02.e) $\Omega = \{ddd, ddp, dpd, pdd, dpp, pdp, ppd, ppp\}$
(02.f) $\Omega = \{MMM, MMF, MFM, FMM, MFF, FMF, FFM, FFF)\}$
(02.g) $\Omega = \{AB, BA, AC, CA, AD, DA, BC, CB, BD, DB, CD, DC\}$.
(03.a) $|\Omega| = 6 \times 6 = 36$
(03.b) $|\Omega| = 4 \times 4 = 16$
(03.c) $|\Omega| = C_{60}^{6} = 50.063.860$.
(03.d) $C_{28}^{2} = 378$.
(04.a) $A = \{$ ás de copas, ás de ouros, ás de espada, ás de paus $\} \Rightarrow |A| = 4$;
(04.b) $B = \{$ rei de ouro, rei de copas$\} \Rightarrow |B| = 2$
(04.c) $C = \{$ ás de paus, 1 de paus, 2 de paus, 3 de paus, ..., rei de paus $\} \Rightarrow |C| = 13$
(04.d) $D = \{$ ás de paus, ás de espada, 1 de paus, 1 de espadas, 2 de paus, 2 de espadas, 3 de paus, 3 de espadas, ..., rei de paus, rei de espada $\} \Rightarrow |D| = 26$
(05.a) $A = \{\{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \{a_1, a_2, a_3, a_5\}, \{a_1, a_2, a_4, a_5\}, \{a_1, a_3, a_4, a_5\}\} \Rightarrow |A| = C_4^3 = 4$;
(05.b) $B = \{\{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \{a_1, a_2, a_3, a_5\}, \{a_1, a_2, a_4, a_5\}\} \Rightarrow |B| = C_3^2 = 3$;
(05.c) $C = \{\{a_1, a_3, a_4, a_5\}\} \Rightarrow |C| = C_3^3 = 1$.
(06.a) Formamos um subconjunto com 5 elementos do conjunto $\{2, 3, ..., 60\}$ e depois acrescentamos o número 1 ao subconjunto, o que pode ser feito $C_{59}^{5} \Rightarrow |A| = 5.006.386$.
(06.b) Formamos um subconjunto com 4 elementos do conjunto $\{3, 4, ..., 59, 60\}$ e depois acrescentamos os números 1 e 2 ao subconjunto, o que pode ser feito de $C_{58}^{4} \Rightarrow |B| = 424.270$.
(06.c) Sejam X - subconjunto de $\{1, 2, ..., 60\}$ com 6 elementos, entre eles o número 1;
Y - subconjunto de $\{1, 2, ..., 60\}$ com 6 elementos, entre eles o número 2;
Então $C = X \cup Y \Rightarrow |C| = |X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y| = C_{59}^{5} + C_{59}^{5} - C_{58}^{4} = 9.588.502$.
(06.d) $|D| = C_7^6 = 7$.
(07) Considere $(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5)$ os resultados dos 5 lançamentos .
Observamos que $|\Omega| = 6^5$ pois em cada um dos lançamentos temos 6 resultados possíveis.
(07.a) Para determinar a cardinalidade de A, vamos construir um elemento
$(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5) \in \Omega$, com as propriedades do evento A:
- Escoher 2 posições, dentre as 5 coordenadas, para colocar o número 1: C_5^2
- Escolher 3 números distintos de 1, para colocar nas 3 coordenadas livres: 5^3
$|A| = C_5^2 \times 5^3 = 1.250$
(07.b) Para determinar $|B|$, executamos as seguintes etapas:
- Escolher o número para o par (que será repetido): 6
- Escolher 2 posições, dentre as 5 coordenadas, para colocar o par: C_5^2
- Escolher 3 números distintos e distintos do par, para as 3 posições restantes: $5 \times 4 \times 3$
$|B| = 6 \times C_5^2 \times 5 \times 4 \times 3 = 3.600$.
(07.c) Executamos as seguintes etapas:
- Escolher o número da trinca (que será repetido): 6
- Escolher 3 posições, dentre as 5, para colocar a trinca: C_5^3
- Escolher 2 números distintos e distintos da trinca, para as 2 posições restantes: 5×4
$|C| = 6 \times C_5^3 \times 5 \times 4 = 1.200$.
(08) Considere $X = \{E_1, D_1, E_2, D_2, E_3, D_3, E_4, D_4, E_5, D_5\}$ os 5 pares de sapatos no armário, onde E_i, D_i, representam, respectivamente, o pé esquerdo e direito do par i. O experimento consiste em retirar, aleatoriamente, 4 elementos desse conjunto.
(08.a) A - Retirar exatamente 2 pares de sapatos
- Escolher 2 pares, dentre os 5: $C_5^2 \Rightarrow |A| = 10$

(08.b) B - retirar examente um par de sapatos
- Escolher o par que será tirado: 5
- Escolher 2 pares, dentre os 4 restantes: C_4^2
- De cada um dos dois pares escolhidos na etapa anterior, escolher o pé que será tirado: 2×2

$|B| = 5 \times C_4^2 \times 2^2 = 120$.

(08.c) C - Não existir nenhum par, dentre os retirados
- Escolher 4 pares, dentre os 5: C_5^4
- Escolher o pé, de cada um dos pares da etapa anterior: 2^4

$|C| = 5 \times 16 = 80$.

(09.a) A - as peças retiradas possuem o número 1 em comum

Como existem 7 peças que contém o número 1, então existem tantos elementos em A, quantas são as formas de escolher 2 elementos dentre 7 $\Rightarrow |A| = C_7^2 = 21$.

(09.b) para determinar $|B|$, executamos as etapas:

· Escolher o número comum: 7

· Escolher 2 peças, dentre as 7 que tem o número escolhido na etapa anterior: C_7^2

$|B| = 7 \times C_7^2 = 147$. $\square$

Capítulo 14

Probabilidade

Objetivos:

✓ **Definir Probabilidade**
✓ **Apresentar o Modelo Equiprobabilístico.**

1 Introdução

Se A é um evento associado a um experimento aleatório, não podemos afirmar com certeza, que ao executar o experimento, A irá ocorrer. Assim, queremos associar ao evento A um número, o qual traduza nossa confiança na capacidade do evento ocorrer. A questão é: - Como atribuir tal número? Uma maneira seria repetir o experimento um "grande" número de vezes, contar as ocorrências de A nessas repetições e então calcular o quociente:

$$\frac{\text{número de ocorrências de } A}{\text{número de repetições}}$$

chamado frequência relativa de A, conforme definido a seguir.

Definição 6. *Sejam E um experimento aleatório e A um evento associado a E. Se n_A é o número de vezes que o evento A ocorreu em n repetições do experimento E, então o quociente*

$$f_A = \frac{n_A}{n}$$

*é denominado a **frequência relativa** do evento A nas n repetições de E.*

Vê-se facilmente, que a frequência relativa f_A tem as seguintes propriedades:
(i) $0 \leq f_A \leq 1$;
(ii) $f_A = 1$ se, e somente se, A ocorre em todas as n repetições;
(ii) Se A e B são eventos mutuamente excludentes, então $f_{A \cup B} = f_A + f_B$.

Sabe-se que à medida que n aumenta, f_A se estabiliza próximo de algum número. Portanto, a frequência relativa f_A apresenta-se como um bom candidato para traduzir a chance do evento A ocorrer na execução de E. Porém, há alguns inconvenientes na determinação de f_A: - Quão grande deve ser n para consideramos f_A como o número aceito? Além disso, f_A fica dependendo de agentes externos, tais como o experimentador. Para contornar tais inconvenientes, define-se uma função que associa a cada evento $A \subset \Omega$, um número $P(A)$ - chamado a probabilidade de A - e exige-se que esta função tenha propriedades análogas as observadas na frequência relativa f_A.

2 Função Probabilidade

Definição 7. *Sejam Ω o espaço amostral de um experimento aleatório e $\mathcal{P}(\Omega)$ o conjunto das partes de Ω. Uma probabilidade é uma função:*

$$\begin{array}{rl} P: \mathcal{P}(\Omega) & \to [0,1] \\ A & \to P(A) \end{array}$$

a qual tem as seguintes propriedades:
(i) $P(\Omega) = 1$;
(ii) Se $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ são tais que $A \cap B = \emptyset$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

O número $P(A)$ é chamado a **Probabilidade de** A. Se $A = \{a\}$ é um evento unitário, escreve $P(a)$ no lugar de $P(\{a\})$.

Exemplos de probabilidades:

- Experimento: Lançar uma moeda e observar o resultado.
- Espaço amostral: $\Omega = \{K, C\}$, sendo K - cara e C - coroa.
- $\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{K\}, \{C\}, \Omega\}$.

As funções P_1 e P_2, abaixo definidas, são exemplos de probabilidades para esse experimento:

(a) $P_1 : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ definida por:

$$P_1(\emptyset) = 0,\ P_1(K) = 0,5,\ \ P_1(C) = 0,5 \ \text{ e } \ P_1(\Omega) = 1.$$

(b) $P_2 : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ definida por:

$$P_2(\emptyset) = 0,\ P_2(K) = 0,2,\ \ P_2(C) = 0,8 \text{ e } \ P_2(\Omega) = 1.$$

Se $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ é uma probabilidade associada a um espaço amostral Ω, diz-se que o par (Ω, P) é um **Espaço de Probabilidade**.

3 Modelo Equiprobabilístico

A condição (ii) da Definição 7 diz que se $A, B \subset \Omega$, são tais que $A \cap B = \emptyset$, então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Esse resultado é conhecido como **Regra da Adição**. Segue daí, que se $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n\}$ é o espaço amostral de um experimento aleatório, então

$$\begin{aligned}
P(\Omega) &= P(\{a_1, a_2, a_3, a_4..., a_n\})\\
&= P(\{a_1\} \cup \{a_2, a_3, a_4, ..., a_n\})\\
&= P(a_1) + P(\{a_2, a_3, a_4, ..., a_n\})\\
&= P(a_1) + P(\{a_2\} \cup \{a_3, a_4, ..., a_n\})\\
&= P(a_1) + P(a_2) + P(\{a_3\} \cup \{a_4, ..., a_n\})\\
&....\\
&= P(a_1) + P(a_2) + P(a_3) + P(a_4) + ... + P(a_n).
\end{aligned}$$

Assim, pela regra da adição, a probabilidade de um espaço amostral finito Ω é dado pela soma das probabilidades dos eventos elementares.

Quantos todos os eventos elementares tem a mesma probabilidade, isto é,

$$P(a_1) = P(a_2) = ... = P(a_n)$$

dizemos que a probabilidade P é um **Modelo Equiprobabilístico.**

Considere $\Omega = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ o espaço amostral de um experimento aleatório e $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ um modelo equiprobabilístico, com

$$P(a_1) = P(a_2) = ... = P(a_n) = k.$$

Então, pelos itens (i) e (ii) da Definição 7:

$$1 = P(\Omega) = P(a_1) + P(a_2) + ... + P(a_n) = k + k + ... + k = nk.$$

$$\Downarrow$$

$$k = \frac{1}{n} = \frac{1}{|\Omega|}.$$

Temos, então

> Em um modelo equiprobabilístico, com espaço amostral $\Omega = \{a_1, a_2, ..., a_j, ..., a_n\}$, a probabilidade de qualquer evento elementar $\{a_j\}$ é dado por:
>
> $$P(a_j) = \frac{1}{|\Omega|}$$

E se
$$A = \{a_1, a_2, ..., a_k\} \subset \Omega$$
é um evento arbitrário, então,
$$P(A) = P(\{a_1\}\cup\{a_2\}\cup...\cup\{a_k\}) = P(a_1)+P(a_2)+...+P(a_k) = \frac{1}{n}+\frac{1}{n}+...+\frac{1}{n} = \frac{k}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Portanto,

> Em um modelo equiprobabilístico com espaço amostral Ω, a probabilidade de um evento $A \subset \Omega$ é dado por:
> $$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{números de casos favoráveis a } A}{\text{numeros de casos possíveis}}$$

Obsservações:
(i) Multiplicando $P(A)$ por 100, obtemos a probabilidade em percentual, isto é, a chance de ocorrer o evento A em cada 100 repetições do experimento.

(ii) Nestas notas, consideraremos sempre Ω finito e $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ modelos equiprobabilísticos.

Exercícios Resolvidos 25.
(01) No lançamento de um dado equilibrado, determine a probabilidade dos eventos abaixo:
(a) A - sair o número 1;
(b) B - sair um número par;
(c) C - sair um número menor do que 10;
(d) D - sair um número maior do que 10;
Solução:
Inicialmente, vamos determinar o espaço amostral Ω. Ao lançar um dado, os resultados possíveis são $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \Rightarrow |\Omega| = 6$.

Agora determinaremos a cardinalidade e a probabilidade de cada um dos eventos pedidos:
(a) A : sair o número 1.
$A = \{1\} \Rightarrow |A| = 1$. Portanto, $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{6}$. □

(b) B - sair um número par:
$B = \{2,4,6\} \Rightarrow |B| = 3$. Portanto, $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = 0,5$. □

(c) C - sair um número menor que 10:
$C = \{1,2,3,4,5,6\} \Rightarrow |C| = 6$. Portanto, $P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{6}{6} = 1 \Rightarrow C$ é um evento certo. □

(d) D - sair um número maior que 10:
$D = \emptyset \Rightarrow |D| = 0$. Portanto, $P(D) = \frac{|D|}{|\Omega|} = \frac{0}{6} = 0 \Rightarrow D$ é um evento impossível. □

(02) Uma caixa contém 48 bolas vermelhas e 2 pretas, todas de mesmo tamanho e feitas do mesmo material. Retira-se, sucessivamente e sem reposição, duas bolas dessa caixa e anotam-se as cores das bolas retiradas.
(a) Qual é a probabilidade das duas bolas retiradas serem vermelhas?
(b) Qual é a probabilidade das duas bolas retiradas serem pretas?
Solução:
Como o resultado a observar é a cor das bolas, poderíamos então considerar que só há 4 sequências possíveis de cores. Considerando p-preta e v-vermelha, temos:

$$\Omega = \{pp, pv, vp, vv\}.$$

Daí, a probabilidade de A: retirar duas bolas vermelhas - é dada por:

$$P(A) = \frac{|\{vv\}|}{|\Omega|} = \frac{1}{4}$$

e a probabilidade de B: retirar duas bolas pretas - é:

$$P(B) = \frac{|\{pp\}|}{|\Omega|} = \frac{1}{4}.$$

Observa-se que, tal resultado não correspondendo à realidade, já que as bolas vermelhas saem com mais frequência que as pretas, uma vez que elas estão em maior quantidade na caixa. A falha nessa resolução, é que não estamos considerando um modelo equiprobabilístico. A solução correta consiste em considerar individualmente as 50 bolas na caixa:

$$C = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_{47}, v_{48}, p_1, p_2\}$$

e nesse caso,

$$\Omega = \{v_1v_2, v_1v_3, .., v_1v_{48}, v_1p_1, v_1p_2, ..., p_2v_1, p_2v_2, p_2v_3, .., p_2v_{48}, p_2p_1\}.$$

Para determinar $|\Omega|$, podemos usar o Princípio Multiplicativo.

Tarefa: Retirar sucessivamente e sem reposição 2 bolas da caixa.

Etapas	Restrições	N.P.
Retirar a 1^a bola da caixa	-	50
Retirar a 2^a bola da caixa	-	49

Pelo P.M., $|\Omega| = 50 \times 49 = 2.450$.

Usa-se o mesmo recurso para calcular $|A|$ e $|B|$.

(a) **Tarefa:** Retirar sucessivamente e sem reposição 2 bolas vermelhas da caixa.

Etapas	Restrições	N.P.
Retirar a 1^a bola	vermelha	48
Retirar a 2^a bola	vermelha	47

$|A| = 48 \times 47 = 2.256 \Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2.256}{2.450} \approx 0,9208$ ou $92,08\%$.

(b) **Tarefa:** Retirar sucessivamente e sem reposição 2 bolas pretas da caixa.

Etapas	Restrições	N.P.
Retirar a 1^a bola	preta	2
Retirar a 2^a bola	preta	1

$|B| = 2 \times 1 = 2 \Rightarrow P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{2}{2.450} \approx 0,000816$ ou $0,082\%$. □

(03) Um casal planeja ter três filhos. Determine:
(a) a probababilidade de nascerem exatamente dois meninos;
(b) a probabilidade de nascerem pelo menos dois meninos;
(c) a probabilidade de nascerem todos meninos.
Solução:
Considere M - sexo masculino e F - sexo feminino. Como na questão anterior, para construirmos um modelo equiprobabilístico, devemos considerar:
$\Omega = \{x_1x_2x_3 \mid x_i \in \{M, F\}$, sendo x_i o sexo do filho $i = 1, 2, 3\}$
$= \{MMM, MMF, MFM, FMM, MFF, FMF, FFM, FFF\} \Rightarrow |\Omega| = 8$.
Determinaremos agora a cardinalidade e probabilidade de cada um dos eventos pedidos:
(a) A - nascerem exatamente dois meninos:
$A = \{MMF, MFM, FMM\} \Rightarrow |A| = 3 \Rightarrow P(A) = \frac{3}{8}$. □

(b) B - nascerem pelo menos dois meninos;
$B = \{MMF, MFM, FMM, MMM\} \Rightarrow |B| = 4 \Rightarrow P(B) = \frac{4}{8}$. □

(c) C - nascerem três meninos;
$C = \{MMM\} \Rightarrow |C| = 1 \Rightarrow P(C) = \frac{1}{8}$. □

(04) Dez pessoas, entre elas Ana e Beatriz, são separadas em dois grupos de 5 pessoas cada um. Qual é a probabilidade de que Ana e Beatriz façam parte do mesmo grupo?
Solução:
O Espaço amostral Ω é formado de todas as divisões possíveis de 10 pessoas em dois grupos de 5. Como já vimos, $|\Omega| = \frac{10!}{5!^2 \times 2!} = 126$.
Considere agora o evento:
A - Separar as 10 pessoas em 2 grupos de 5, de modo que Ana e Beatriz fiquem no mesmo grupo.

Para determinar $|A|$, podemos pensar em executar essa tarefa do seguinte modo: Tirando Ana e Beatriz, restam 8 pessoas. Separamos essas 8 pessoas em dois grupos, um de 5 e outro de 3, o que pode ser feito de $\frac{8!}{5! \times 3!} = 56$ modos. Depois colocamos Ana e Beatriz no grupo de 3. Assim,

$$|A| = 56 \Rightarrow P(A) = \frac{56}{126} = 44,44\%.$$

□

(05) De uma turma formada por 12 homens e 8 mulheres, dentre eles Ana e Bruno, escolhe-se ao acaso 6 pessoas para compor uma comissão. Determine a

probabilidade da comissão:
(a) ter 3 pessoas de cada sexo;
(b) ter 3 pessoas de cada sexo, sendo Ana uma delas;
(c) ter 3 pessoas de cada sexo, excluindo Ana e Bruno.
Solução:
O **experimento** consiste em escolher 6 pessoas, de forma não ordenada, de um total de 20. Logo, $|\Omega| = C_{20}^6 = \frac{20!}{6!14!} = 38.760$.
Considerando agora os eventos:
(a) A - A comissão é formada por 3 mulheres e 3 homens.
Como já visto anteriormente, $|A| = C_8^3 \times C_{12}^3 = 56 \times 220 = 12.320$. Assim,

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{12.320}{38.760} \approx 0,318 \text{ ou } 31,8\%.$$

□

(b) B - a comissão é formada por 3 pessoas de cada sexo, sendo Ana uma delas.
$|B| = C_1^1 \times C_7^2 \times C_{12}^3 = 1 \times 21 \times 220 = 4.620$. Portanto,

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{4.620}{38.760} \approx 0,119 \text{ ou } 11,9\%.$$

□

(c) C - a comissão é formada por 3 pessoas de cada sexo, excluindo Ana e Bruno.
Excluindo Ana e Bruno do grupo, restam 7 mulheres e 11 homens, dos quais devemos escolher 3 de cada sexo. Assim,

$$|C| = C_7^3 \times C_{11}^3 = 35 \times 165 = 5.775 \Rightarrow P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{5.775}{38.760} \approx 0,149 \text{ ou } 14,9\%.$$

□

(06) Oito bolas diferentes são colocadas em oito caixas distintas. Qual é a probabilidade de:
(a) todas as caixas ficarem ocupadas?
(b) exatamente uma caixa ficar desocupada?
Solução:
O experimento consiste em colocar 8 bolas em 8 caixas, sendo bolas e caixas distintas. Para determinar $|\Omega|$, vamos simular a execução do experimento. Consideremos $b_1, b_2, .., b_8$ as bolas e $C_1, C_2, ..., C_8$ as caixas.

	Etapas	Restrições	N.P.
1^a	Escolher uma caixa para colocar a bola b_1	-	8
2^a	Escolher uma caixa para colocar a bola b_2	-	8
$\vdots$			
8^a	Escolher uma caixa para colocar a bola b_8	-	8

$\therefore |\Omega| = 8^8 = 16.777.216$.

Consideremos agora os eventos:
(a) A - todas as caixas ficam ocupadas.

Como temos 8 bolas e 8 caixas, para que todas as caixas fiquem ocupadas, deve-se necessariamente ter apenas uma bola em cada caixa. Então, a restrição em cada etapa é colocar a bola em caixas que ainda não tenham bola.

	Etapas	Restrições	N.P.
1^a	Escolher uma caixa para colocar a bola b_1	-	8
2^a	Escolher uma caixa para colocar a bola b_2	caixa sem bola	7
3^a	Escolher uma caixa para colocar a bola b_3	caixa sem bola	6
$\vdots$			
8^a	Escolher uma caixa para colocar a bola b_8	caixa sem bola	1

$|A| = 8 \times 7 \times 6 \times ... \times 1 = 8! = 40.320 \Rightarrow P(A) = \frac{40.320}{16.777.216} \approx 0,24\%.$ □

(b) B - Exatamente uma caixa fica desocupada.

A tarefa agora consiste em distribuir 8 bolas em 8 caixas, de modo que somente uma caixa fique desocupada. Assim, escolhida a caixa que ficará vazia, restarão 8 bolas para distribuir em 7 caixas, as quais deverão ficar todas ocupadas. Então, necessariamente uma das 7 caixas receberá duas bolas. Devemos então executar as seguintes etapas:

	Etapas	Restrições	N.P.
1^a	Escolher a caixa que ficará vazia	-	8
2^a	Escolher a caixa que ficará com 2 bolas	-	7
3^a	Escolher duas bolas para colocar na caixa da etapa 2	-	C_8^2
4^a	Permutar as 6 bolas restantes nas 6 caixas restantes	-	6!

Assim,

$$|B| = 8 \times 7 \times C_8^2 \times 6! = 1.128.960 \Rightarrow P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{1.128.960}{16.777.216} \approx 6,73\%.$$

□

4 Regra da Adição

Seja (Ω, P) um espaço de probabilidade. Pela Definição 7, para quaisquer eventos disjuntos A e B, temos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Usando demonstração por indução, podemos estender a regra da adição para um número finito n qualquer de eventos $A_1, A_2, ..., A_n$, mutuamente excludentes.

Proposição 11. *Seja (Ω, P) um espaço de probabilidade, $A_1, A_2, ..., A_n \subset \Omega$ eventos, disjuntos dois a dois, isto é, $A_i \cap A_j = \emptyset$, para quaisquer $i \neq j$. Então,*

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n).$$

Generalização da Regra da Adição

Proposição 12. *Seja* (Ω, P) *um espaço de probabilidade. Se* $A, B \subset \Omega$*, então*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Demonstração:
Para quaisquer $A, B \subset \Omega$, temos que:

$$A \cup B = (A - B) \cup B$$

e

$$A = (A - B) \cup (A \cap B),$$

sendo a união disjunta nos dois casos. Assim, pelo item (ii) da Definição 7:

$$P(A \cup B) = P(A - B) + P(B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B).$$

□

Exercícios Resolvidos 26.

(01) De uma turma formada por 12 homens e 8 mulheres, dentre eles Ana e Bruno, escolhe-se ao acaso 6 pessoas para compor uma comissão. Determine a probabilidade:
(a) da comissão ser formada somente por pessoas do mesmo sexo;
(b) de Ana ou Bruno pertencerem a comissão.
Solução:
Já calculamentos anteriormente, que $|\Omega| = 38.7690$. Resta calcular as cardinalidades dos eventos pedidos.

(a) A - a comissão é formada somente por pessoas do mesmo sexo;
Para determinar $|A|$, devemos contar as comissões formadas só por homens ou só por mulheres. Vamos considerar os seguintes eventos:
A_1 - a comissão é formada só por mulheres $\Rightarrow |A_1| = C_8^6 = 28$.
A_2 - a comissão é formada somente por homens $\Rightarrow |A_2| = C_{12}^6 = 924$.

Então, $A = A_1 \cup A_2$ e como A_1 e A_2 são eventos disjuntos, segue que:

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{|A_1|}{|\Omega|} + \frac{|A_2|}{|\Omega|} = \frac{28}{38.760} + \frac{924}{38.760} \approx 2,46\%.$$

□

(b) Ana ou Bruno pertencem a comissão.
Solução:
Considerando os eventos:
A - Ana faz parte da comissão;
B - Bruno faz parte da comissão

Temos que $|A| = |B| = C^5_{19} = 11.628$ e $|A \cap B| = C^4_{18} = 3.060$.
Pela regra da adição,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{11.628}{38.760} + \frac{11.628}{38.760} - \frac{3.060}{38.760} \approx 52,11\%.$$

$\square$

(02) Um número entre 1 e 200 é escolhido aleatoriamente. Calcule a probabilidade dele ser divisível por 5 ou por 7.
Solução:
Considerando os eventos:
A - o número é divisível por 5;
B - o número é divisível por 7.
Então, a probabilidade procurada é dada por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Resta, calcular cada uma dessas probabilidades.

Espaço amostral: $\Omega = \{1, 2, 3, ..., 200\} \Rightarrow |\Omega| = 200$.
$A = \{5k \mid k \in \mathbb{Z},\ 1 \leq 5k \leq 200\} = \{5k \mid k \in \mathbb{Z}, 1 \leq k \leq 40\} \Rightarrow |A| = 40$;
$B = \{7k \mid k \in \mathbb{Z},\ 1 \leq 7k \leq 200\} = \{7k \mid k \in \mathbb{Z},\ 1 \leq k \leq 28\} \Rightarrow |B| = 28$.
$A \cap B = \{35k \mid k \in \mathbb{Z},\ 1 \leq k \leq 5\} \Rightarrow |A \cap B| = 5$.
Daí,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{40}{200} + \frac{28}{200} - \frac{5}{200} = \frac{63}{200} = 0,315.$$

$\square$

(03) Seja A, B eventos de um mesmo experimento. Mostre que se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$.
Solução:
Como $A \subset B$, segue que $B = (B - A) \cup A$, sendo essa união disjunta. Assim, pela regra da adição:

$$P(B) = P(B - A) + P(A) \Rightarrow P(A) = P(B) - P(B - A) \leq P(B),$$

já que $P(B - A) \geq 0$. $\square$

5 Probabilidade do Evento Complementar

Proposição 13. *Seja (Ω, P) um espaço de probabilidade. Se $A \subset \Omega$, então a probabilidade do evento complementar $\overline{A}$ é dada por:*

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Demonstração:
Como $\Omega = A \cup \overline{A}$, pelos itens (i) e (ii) da Definição 7:

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

□

Exercícios Resolvidos 27.

(01) Em um grupo de 10 pessoas, qual é a probabilidade de haver pelo menos duas delas que façam aniversário no mesmo dia?
Solução:
O experimento consiste em anotar a data de aniversário de 10 pessoas. Como cada uma delas pode ter nascido em qualquer um dos 365 dias do ano civil, então $|\Omega| = 365^{10}$.

Consideremos agora o evento
A - pelo menos duas pessoas fazem aniversário no mesmo dia.

Para determinar $|A|$, devemos considerar os casos em que exatamente duas pessoas fazem aniversário no mesmo dia, exatamente 3, exatamente 4, e assim sucessivamente. Uma tarefa bem trabalhosa. Torna-se mais simples calcular o evento complementar $\overline{A}$ - todas as pessoas fazem aniversário em dias distintos, cujas etapas são dadas abaixo:

Tarefa: - Anotar o aniversário de 10 pessoas $p_1, p_2, ..., p_{10}$

	Etapas	Restrições	N.P
1^a	Anotar o aniversário de p_1	-	365
2^a	Anotar o aniversário de p_2	$\neq p_1$	364
3^a	Anotar o aniversário de p_3	$\neq p_1, p_2$	363
$\vdots$			
10^a	Anotar o aniversário da p_{10}	$\neq p_1, p_2, ..., p_9$	356

Daí,

$$P(\overline{A}) = \frac{365 \times 364 \times ... \times 356}{365^{10}} = 0,883.$$

Usando agora a Proposição 13, segue que:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0,883 = 0,117 = 11,7\%.$$

□

(02) Um número entre 1 e 200 é escolhido aleatoriamente. Calcular a probabilidade de que ele não seja divisível nem por 5 e nem por 7.
Solução:
Na questão 02 do exercício anterior, foi calculada a probabilidade do evento:
X - o número é divisível por 5 ou por 7, então a probabilidade procurada é dada por

$$P(\overline{X}) = 1 - P(X) = \frac{137}{200} = 68,5\%.$$

□

Lista de Exercícios 14.

(01) De um baralho comum de 52 cartas, uma é extraída ao acaso. Determine a probabilidade da carta retirada ser:
(a) uma dama de copas;
(b) uma dama;
(c) não ser uma dama;
(d) ser de copas.

(02) Um número é escolhido ao acaso no conjunto $\{1, 2, 3, ..., 100\}$. Determine a probabilidade do número escolhido ser:
(a) par;
(b) múltiplo de 3;
(c) múltiplo de 5;
(d) múltiplo de 3 **e** múltiplo de 5;
(e) múltiplo de 3 **ou** múltiplo de 5.

(03) Uma caixa contém 20 bolas, sendo 10 vermelhas, 6 azuis e 4 amarelas. Uma bola é retirada ao acaso da caixa. Determine a probabilidade da bola retirada ser:
(a) vermelha;
(b) azul;
(c) amarela;
(d) não ser amarela;
(e) ser vermelha ou azul.

(04) Uma caixa contém 20 bolas, sendo 9 vermelhas, 7 azuis e 4 brancas. Retiram-se, sucessivamente e sem reposição, duas bolas da caixa. Determine a probabilidade de cada um dos evento abaixo:
(a) as duas bolas retiradas são vermelhas;
(b) a primeira bola retirada é vermelha e a segunda azul;
(c) as duas bolas retiradas são, uma vermelha e outra azul;
(d) pelo menos uma das bolas retiradas não é vermelha;
(e) nenhuma das bolas retiradas é vermelha.

(05) Em uma caixa existem 6 bolinhas numeradas de 1 a 6. Uma a uma elas são extraídas, sem reposição. Qual a probabilidade de que a sequência de números observada seja crescente ou seja decrescente?

(06) Oito pessoas, entre elas Ana e Bia, são dispostas ao acaso em uma fila. Qual a probabilidade de:
(a) Ana e Bia ficarem juntas?
(b) Ana e Bia não ficarem juntas?
(c) exatamente duas pessoas ficarem entre Ana e Bia?

(07) Uma caixa contém 10 bolas, numeradas de 1 a 10. Cinco bolas são retiradas ao acaso dessa caixa, com reposição. Qual a probabilidade de que as bolas retiradas tenham todas números diferentes?

(08) Em um armário há 10 pares de sapatos. Retiram-se, simultaneamente, 8 pés de sapatos desse armário. Qual é a probabilidade de haver entre esses pés, exatamente 3 pares de sapatos?

(09) No jogo da Mega-Sena são sorteados a cada extração, 6 dos números de 1 a 60, desprezando-se a ordem do sorteio.
(a) Qual é a probabilidade que uma pessoa tem de ganhar, se ela aposta os números 2, 14, 17, 19, 32, 58? E se ela aposta os números 1, 2, 3, 4, 5, 6?

(b) Quem aposta em 8 números, tem quantas vezes mais chances de ganhar do que o apostador que joga em 6 números?
(c) Se a aposta em um cartão com 6 números custa R $ 3,50, quanto deverá custar a aposta de um cartão com 10 números?

(10) Um grupo é formado por 8 homens e 7 mulheres. Seis pessoas desse grupo serão escolhidas ao acaso para formar uma comissão. Qual é a probabilidade desta comissão contar com pelo menos um homem?

(11) De um grupo de 6 pessoas, qual a probabilidade de:
(a) todas terem signos distintos?
(b) pelo menos duas delas terem o mesmo signo?

(12) Os Centros Acadêmicos de Matemática e Física da UFPA são formados por 5 mulheres e 3 homens na Matemática; 2 mulheres e 6 homens na Física. Escolhem-se, ao acaso, 4 pessoas dentre as que compõem os dois C.A. para formar uma comissão. Qual é a probabilidade da comissão ser formada só por mulheres ou só por alunos da Matemática?

Respostas da Lista de Exercícios 14

(01.a) $\frac{1}{52}$	(01.b) $\frac{1}{13}$	(01.c) $\frac{12}{13}$	(01.d) $\frac{1}{4}$	
(02.a) $\frac{1}{2}$	(02.b) $\frac{33}{100}$	(02.c) $\frac{1}{5}$	(02.d) $\frac{3}{50}$	(02.e) $\frac{47}{100}$
(03.a) $\frac{1}{2}$	(03.b) $\frac{3}{10}$	(03.c) $\frac{1}{5}$	(03.d) $\frac{4}{5}$	(03.e) $\frac{4}{5}$
(04.a) $\frac{18}{95}$	(04.b) $\frac{63}{380}$	(04.c) $\frac{63}{190}$	(04.d) $\frac{77}{95}$	(04.e) $\frac{9}{19}$
(05) $\frac{1}{360}$				
(06.a) $\frac{1}{4}$	(06.b) $\frac{3}{4}$	(06.c) $\frac{5}{28}$		
(07) $30,24\%$				
(08) $\approx 8,00\%$				
(09.a) $\frac{1}{50.063.860} \approx 2 \times 10^{-6}\%$ qualquer que seja o jogo com 6 números.	(09.b) 28 vezes	(09.c) $210 \times 3,50 = 735,00.$		
(10) $99,86\%$.				
(11.a) $22,28\%$	(11.b) $77,72\%$			
(12) $\frac{5}{91}$.				

Capítulo 15

Probabilidade Condicional

Objetivos:

✓ **Definir Probabilidade Condicional.**

1 Introdução

• Uma caixa contém 80 bolas pretas e 20 brancas. Sacam-se, sucessivamente e **com reposição**, duas bolas dessa caixa. Determine a probabilidade dos seguintes eventos:
(a) A : a primeira bola ser preta;
(b) B : a segunda bola ser preta, sabendo que a primeira bola retirada foi preta;
(c) C : a segunda bola ser preta, sabendo que a primeira bola retirada foi branca;
Solução:
Como a retirada é com reposição, o número de bolas na caixa mantém-se inalterado. Assim, tanto na primeira como na segunda retiradas, a caixa contém 80 pretas e 20 brancas. Portanto,

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{80}{100}.$$

□

• Uma caixa contém 80 bolas pretas e 20 brancas. Sacam-se, sucessivamente e **sem reposição**, duas bolas dessa caixa. Determine a probabilidade dos seguintes eventos:
(a) A : a primeira bola ser preta;
(b) B : a segunda bola ser preta, sabendo que a primeira bola retirada foi preta;
(c) C : a segunda bola ser preta, sabendo que a primeira bola retirada foi branca;
Solução:
(a) Ao retirarmos a primeira bola, temos na caixa 80 pretas e 20 brancas, assim,

$$P(A) = \frac{80}{100}.$$

□

(b) Como a retirada é sem reposição, então na segunda retirada, restam apenas 99 bolas na caixa. Dessas, quantas são pretas? Pelas informações dadas no problema, sabemos que a primeira bola retirada foi preta, então restam 79 pretas e 20 brancas, logo

$$P(B) = \frac{79}{99}.$$

□

(c) A informação que temos agora é que a primeira bola retirada foi branca, portanto na caixa temos 80 pretas e 19 brancas. Assim,

$$P(C) = \frac{80}{99}.$$

□

O fato da ocorrência ou não de um evento alterar a probabilidade de outros, leva a definição de probabilidade condicional.

2 Probabilidade Condicional

Sejam (Ω, P) um espaço de probabilidade, $\emptyset \neq A$ e B eventos associados a um mesmo experimento aleatório. A probabilidade do evento B, na certeza da ocorrência de A, é chamada **Probabilidade Condicional** de B na certeza de A, denotada por $P(B|A)$, cujo valor é dado por:

$$P(B|A) = \frac{|A \cap B|}{|A|}.$$

$P(B|A)$ - lê-se probabilidade de B dado A ou probabilidade de B na certeza de A.

Exercícios Resolvidos 28.

(01) De um baralho comum de 52 cartas retira-se ao acaso uma carta. Qual é a probabilidade da carta retirada ser um rei, sabendo-se que ela é de um naipe vermelho?
Solução:
Queremos saber $P(B|A)$, onde
B - a carta é um rei;
A - a carta é de um naipe vermelho;
Então,

$$P(B|A) = \frac{|A \cap B|}{|A|} = \frac{2}{26} = \frac{1}{13}.$$

□

(02) Um dado equilibrado é lançado duas vezes e o par de números na face de cima anotado. Qual é a probabilidade do primeiro número do par ser menor que o segundo, sabendo-se que a soma dos números obtidos foi 10?
Solução:
Queremos saber $P(B|A)$, onde
B - o número do primeiro dado é menor que o número do segundo;
A - a soma do número obtidos é 10.

Observe que:

$$\Omega = \{(d_1, d_2) \mid 1 \leq d_1, d_2 \leq 6\}.$$

Assim,
$B = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),$
$(3,4),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6),(5,6)\};$
$A = \{(4,6),(5,5),(6,4)\};$
$A \cap B = \{(4,6\}.$
Então,

$$P(B|A) = \frac{|A \cap B|}{|A|} = \frac{1}{3}.$$

□

(03) Uma moeda é jogada 6 vezes. Calcule a probabilidade:
(a) do número de caras nos seis lançamentos superar o número de coroas;
(b) do número de caras nos seis lançamentos superar o número de coroas, sabendo que no primeiro lançamento deu coroa.
Solução:
Denotando K - cara e C - coroa, podemos expressar o espaço amostral por:

$$\Omega = \{x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5\, x_6 \mid x_i \in \{K, C\}\} \Rightarrow |\Omega| = 2^6.$$

(a) Considere o evento:
B - o número de caras é maior que o número de coras.
B é formado pelos elementos de Ω que tem 4, 5 ou 6 caras. Vamos contar quantos são os elementos de cada tipo. Ora, existem tantos elementos em Ω com 4 K e 2 C, quantas são as formas de permutar os 6 símbolos: $KKKKCC$, cujo total é dado por $P_6^{4,2} = 15$. Procedendo de modo análogo para os outros dois casos, obtemos:

$$|B| = P_6^{4,2} + P_6^{5,1} + P_6^{6} = 15 + 6 + 1 = 22. \text{ Logo, } P(B) = \frac{22}{64} \approx 34,38\%.$$

□

(b) o número de caras nos seis lançamentos superar o número de coroas, sabendo que no primeiro lançamento deu coroa.
Consideremos os eventos:
B - o número de caras é maior que o número de coras;

A - saiu coroa no primeiro lançamento.

$|A| = 2^5$ - pois só há uma opção para o primeiro lançamento (deve ser C) e duas opções (K ou C) para os outros 5.
Queremos determinar:

$$P(B|A) = \frac{|A \cap B|}{|A|},$$

onde

$$A \cap B = \{C\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5\, x_6 \mid x_i \in \{K, C\}\},$$

com o número de caras maior que o de coroas. Para que isso ocorra, devemos ter nos 5 últimos lançamentos 4 ou 5 caras. Assim, $|A \cap B| = P_5^4 + P_5^5 = 6$. Daí,

$$P(B|A) = \frac{6}{32} = 18,75\%.$$

□

(04) Em uma prova há 5 questões do tipo V ou F. Qual a probabilidade de uma pessoa acertar todas as questões se:
(a) ela escolhe aleatoriamente as 5 respostas?
(b) ela escolhe aleatoriamente as 5 respostas, mas sabendo que há mais respostas V do que F?
Solução:
Observe que um elemento do espaço amostral é uma quíntupla da forma $VFVFV$.
Para determinar Ω, vejamos quantos são os gabaritos possíveis para a prova:

Etapas	Restrições	N.P.
Escolher a resposta da 1^a questão	-	2 (V ou F)
Escolher a resposta da 2^a questão	-	2
⋮		
Escolher a resposta da 5^a questão	-	2

$|\Omega| = 2^5 = 32.$

(a) Considere o evento B: - acertar todas as questões.
Suponha $VVFVF$ o gabarito da prova, então $B = \{VVFVF\}$ e assim $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{1}{32}$. □

(b) ela escolher aleatoriamente as 5 respostas, mas sabendo que há mais respostas V do que F?
Solução:
Agora queremos determinar a probabilidade condicional $P(B|A)$, onde
B - acertar todas as questões;
A - há mais resposta V que F.
Para determinar $|A|$, vejamos quantas são os gabaritos com mais V do que F. Podemos ter
(i) Gabaritos com 3 V e 2 F:
Cada um desses garabaritos é uma permutação de $VVVFF \Rightarrow$ total: $P_5^{3,2} = 10$;
(ii) Gabaritos com 4 V e 1 F :

Existem tantos quantos são as permutações de $VVVVF \Rightarrow$ total: $P_5^4 = 5$;
(iii) Gabaritos com 5 V:
Que correspondem as permutações de $VVVVV \Rightarrow$ total: $P_5^5 = 1$.
Pelo Princípio Aditivo, $|A| = 10 + 5 + 1 = 16$. Como $B \subset A$, então $A \cap B = B$. Assim,

$$P(B|A) = \frac{|A \cap B|}{|A|} = \frac{|B|}{|A|} = \frac{1}{16}.$$

$\square$

A probabilidade condicional também pode ser expressa em função das probabilidades de $A \cap B$ e de A.

Proposição 14. *Sejam A e B eventos de um mesmo espaço amostral Ω, com $P(A) \neq 0$. Então,*

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Demonstração:
Da definição de probabilidade condicional, segue que:

$$P(B|A) = \frac{|A \cap B|}{|A|} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|A|}{|\Omega|}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

$\square$

Exercícios Resolvidos 29.

(01) A tabela abaixo mostra a classificação por estado e sexo, dos professores participantes de um congresso:

	Parense	Amazonense	Amapaense	Total
Masculino	10	8	15	33
Feminino	16	14	5	35
Total	26	22	20	68

Escolhe-se ao acaso uma pessoa desse grupo.
(a) Sabendo-se que a escolhida é paraense, qual a probabilidade de ser do sexo feminino?
Solução:
Queremos determinar $P(B|A)$, onde
B - a pessoa escolhida é do sexo feminino
A - a pessoa escolhida é paraense
Como: $P(A) = \frac{26}{68}$ e $P(A \cap B) = \frac{16}{68}$, então

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{16}{26} \approx 61,54\%.$$

□

(b) Sabendo que a escolhida é do sexo feminino, qual a probabilidade de ser paraense?
Solução:
Considerando A e B os mesmos eventos da resolução anterior, agora queremos determinar $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{16}{68}}{\frac{35}{68}} = \frac{16}{35} \approx 45,71\%$. □

(c) Qual a probabilidade da pessoa escolhida ser paraense ou amazonense, sabendo que é do sexo masculino?
Considere os eventos:
A - a pessoa escolhida é paraense;
B - a pessoa escolhida é amazonense;
C - a pessoa escolhida é do sexo masculino.
devemos determinar $P((A \cup B)|C)$.

Usando a fórmula dada na Proposição 14 e a regra da adição:
$P((A \cup B)|C) = \frac{P(A \cup B) \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A \cap C) + P(B \cap C)}{P(C)} = P(A|C) + P(B|C) = \frac{10}{33} + \frac{8}{33} = \frac{18}{33}$ □

3 Probabilidade da Interseção de Eventos

Retornemos à letra (b) da questão resolvida na Introdução desse capítulo:

• Uma caixa contém 80 bolas pretas e 20 brancas. Sacam-se, sucessivamente e **sem reposição**, duas bolas dessa caixa. Determine a probabilidade dos seguintes eventos:
(b) B : a segunda bola ser preta, sabendo que a primeira bola retirada foi preta.
Considerando os eventos:
B - a segunda bola é preta
A - a primeira bola é preta
Pela simples análise do experimento, facilmente obtivemos:

$$P(B|A) = \frac{79}{99}.$$

Embora, estejamos calculando uma probabilidade condicional, temos aqui uma dificuldade em obter essa probabilidade usando a fórmula dada na Proposição 14, $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, uma vez que não temos informações suficientes para calcular $P(A \cap B)$.

A vantagem da fórmula dada na Proposição 14 é que podemos, a partir dela, obter uma fórmula para calcular a probabilidade da interseção de dois eventos, conforme corolário abaixo.

Corolário 3. *Sejam A e B eventos de um mesmo espaço amostral Ω, com $P(A) \neq 0$. Então*

Também, $P(A \cap B) = P(B).P(A|B)$, desde que $P(B) \neq 0$.

$$P(A \cap B) = P(A).P(B|A).$$

Demonstração:
Segue da fórmula dada na Proposição 14:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A).P(A \cap B).$$

Exercícios Resolvidos 30.

(01) Uma caixa contém 80 bolas pretas e 20 brancas. Sacam-se, sucessivamente e sem reposição, duas bolas dessa caixa.
(a) Qual a probabilidade das duas bolas serem pretas?
Solução:
Considere os eventos:
A - a primeira bola é preta ;
B - a segunda bola é preta.
Então,

$$P(A \cap B) = P(A).P(B|A) = \frac{80}{100}.\frac{79}{99} = \frac{6.320}{9.900} \approx 63,83\%.$$

□

(b) Qual a probabilidade das duas bolas serem brancas?
Solução:
Considere os eventos:
A - a primeira bola é branca ;
B - a segunda bola é branca.
Então,

$$P(A \cap B) = P(A).P(B|A) = \frac{20}{100}.\frac{19}{99} = \frac{380}{9.900} \approx 3,84\%.$$

□

(c) Qual a probabilidade da primeira bola ser preta e a segunda branca?
Solução:
Considere os eventos:
A - a primeira bola é preta ;
B - a segunda bola é branca.
Então,

$$P(A \cap B) = P(A).P(B|A) = \frac{80}{100}.\frac{20}{99} = \frac{1.600}{9.900} \approx 16,16\%.$$

□

(02) Sacam-se, sucessivamente e sem reposição, duas cartas de um baralho comum (52 cartas). Calcule a probabilidade da primeira carta ser uma dama e a segunda, uma carta de copas.
Solução:
Considere os eventos:
A - a 1^a carta é uma dama

B - a 2^a carta é de copas.
Queremos calcular

$$P(A \cap B) = P(A).P(B|A).$$

Agora, observe que o valor de $P(B|A)$ depende do naipe da dama tirada no primeiro evento. Assim, temos dois casos a considerar. Mais precisamente, podemos decompor A como:

$$A = A_1 \cup \overline{A_1} \qquad \text{(união disjunta)},$$

onde
A_1 - a 1^a carta é uma dama de copas
$\overline{A_1}$ - é o complementar de A_1 com relação a A, isto é, a 1^a carta é uma dama que não é de copas
Daí,

$$A \cap B = (A_1 \cup \overline{A_1}) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (\overline{A_1} \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A_1 \cap B) + P(\overline{A_1} \cap B).$$

Vamos calcular as probabilidades de cada caso.

Caso 1:
A_1 - a 1^a carta é uma dama de copas
B - a 2^a carta é de copas.
Então, $P(A_1 \cap B) = P(A_1).P(B|A_1) = \frac{1}{52}.\frac{12}{51}$;

Caso 2:
$\overline{A_1}$ - a 1^a carta é uma dama que não é de copas
B - a 2^a carta é de copas.
Então, $P(\overline{A_1} \cap B) = P(A_2).P(B|\overline{A_1}) = \frac{3}{52}.\frac{13}{51}$.

Assim,

$$P(A \cap B) = \frac{1}{52}.\frac{12}{51} + \frac{3}{52}.\frac{13}{51} = \frac{1}{52}.$$

□

O resultado do corolário anterior pode ser generalizado para uma quantidade finita n qualquer de eventos, conforme teorema abaixo.

Teorema 2. ***(Teorema do Produto)*** *Sejam $A_1, A_2, ..., A_n$ eventos associados a um mesmo experimento aleatório, com $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n \neq 0$. Então,*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap .... \cap A_n) = P(A_1).P(A_2|A_1).P(A_3|(A_1 \cap A_2)).... P(A_n|(A_1 \cap A_2 \cap ... A_{n-1})).$$

Demonstração:
Faremos a demonstração por indução em n.
(i) $n = 2$
Nesse caso, o resultado fica

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1).P(A_2 \mid A_1),$$

que é verdadeiro, conforme mostrado no corolário anterior.
(ii) Suponha o resultado válido para n eventos, isto é,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap .... \cap A_n) = P(A_1).P(A_2|A_1).P(A_3|(A_1 \cap A_2))....P(A_n|(A_1 \cap A_2 \cap ...A_{n-1})).$$

Vamos mostrar que o resultado vale também para $n+1$ eventos $A_1, A_2, ..., A_n, A_{n+1}$.
Fazendo $B = A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$, segue de (i) que:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n \cap A_{n+1}) = P(B \cap A_{n+1}) = P(B).P(A_{n+1}|B).$$

Agora, pela hipótese de indução:

$$P(B) = P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1).P(A_2|A_1).P(A_3|(A_1 \cap A_2))....P(A_n|(A_1 \cap A_2 \cap ...A_{n-1}).$$

Assim,

$$P(B).P(A_{n+1}|B) = \underbrace{P(A_1).P(A_2|A_1).P(A_3|A_1 \cap A_2)....P(A_n|(A_1 \cap A_2 \cap ...A_{n-1}))}_{P(B)}.P(A_{n+1}|(\underbrace{A_1 \cap ... \cap A_n}_{B})).$$

□

Exercícios Resolvidos 31.

(01) De um lote de 80 peças boas (b) e 20 peças defeituosas(d), são retiradas 3 peças ao acaso, uma após a outra, sem reposição.
(a) Qual é a probabilidade de todas as peças retiras serem perfeitas?
Solução:
Considere os eventos:
A_1 - a primeira peça é boa;
A_2 - a segunda peça é boa;
A_3 - a terceira peça é boa;
Queremos saber $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$. Pelo resultado acima essa probabilidade é dada por:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1).P(A_2|A_1).P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{80}{100}.\frac{79}{99}.\frac{78}{98} = \frac{492.960}{970.200} \approx 50,81\%$$

□

(b) Qual a probabilidade da a segunda peça ser defeituosa e as outras duas perfeitas?
Solução:
Considere os A_1, A_2, A_3 os mesmos eventos definidos na letra (a), a probabilidade pedida é dada por:

$$P(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) = P(A_1).P(\overline{A_2}|A_1).P(A_3|A_1 \cap \overline{A_2}) = \frac{80}{100}.\frac{20}{99}.\frac{79}{98} = \frac{126.400}{970.200} \approx 13,03\%$$

□

(02) Uma caixa contém 20 bolas pretas, 15 vermelhas e 5 brancas. Sacam-se, sucessivamente e sem reposição, 4 bolas dessa caixa. Determine a probabilidade

das duas primeiras bolas serem vermelha, a terceira preta e a quarta, branca.
Solução:
Considere os eventos:
A_1 - a primeira bola é vermelha
A_2 - a segunda bola é vermelha
A_3 - a terceira bola é preta
A_4 - a quarta bola é branca
Então

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) &= P(A_1).P(A_2|A_1).P(A_3|A_1 \cap A_2).P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= \tfrac{15}{40}.\tfrac{14}{39}.\tfrac{20}{38}.\tfrac{5}{37} = \tfrac{21.000}{2.193.360} \approx 0,96\%. \end{aligned}$$

□

Lista de Exercícios 15.

(01) Escolhe-se ao acaso um número no conjunto $\{1, 2, 3, .., 100\}$. Qual a probabilidade do número escolhido:
(a) ser múltiplo de 3?
(b) ser um número par?
(c) ser múltiplo de 3, sabendo que é um número par?

(02) Dois dados D_1 e D_2 são lançados e os resultados nas faces de cima anotados.
(a) Qual a probabilidade da soma dos pontos ser 6, se a face observada em D_1 foi 2?
(b) Qual a probabilidade de ter saído 2 em D_1, se a soma dos pontos foi 6?
(c) Qual a probablidade da soma dos pontos ser menor do que 7, sabendo que o número 2 saiu pelo menos uma vez?
(d) Qual a probablidade da soma dos pontos ser menor do que ou igual a 6, se o maior dos números obtidos é menor do que 5?
(e) Qual a probabilidade do maior dos números obtidos ser menor do que 5, sabendo que a soma dos pontos foi menor do que ou igual a 6?

(03) Uma comissão de 4 pessoas é formada escolhendo-se ao acaso, entre Ana, Bia, Carla, Duda, Antônio, Bruno, Cláudio e Daniel.
(a) Se Ana e Bia estão na comissão, qual a probabilidade dela ser formada só por mulheres?
(b) Se Ana e Daniel estão na comissão, qual a probabilidade dela ser formada por duas pessoas de cada sexo?
(c) Se Ana pertence a comissão, qual a probabilidade de Antônio não pertencer?

(04) Três máquinas A,B e C produzem, respectivamente, 1.000, 1.500 e 500 peças por dia. Das peças produzidas por A, 3% são defeituosas, das produzidas B, esse percentual é de 5% e C tem 20% de sua produção com defeitos. Da produção total de um dia, uma peça é escolhida ao acaso.
(a) Qual a probabilidade da peça ter sido produzida pelas máquinas A ou B, sabendo que ela é defeituosa?
(b) Qual a probabilidade da peça ser defeituosa, sabendo que ela foi produzida pela máquina A ou pela B?

(05) Dos 513 deputados do congresso nacional de certo pais, 180 pertencem ao partido A, 95 ao partido B e o restante, são filiados ao partido C. Sabe-se que 90% dos deputados do partido A são corruptos, 60% dos filiados ao partido B estão envolvidos em escândalos de corrupção e 50% dos filiados a C já foram condenados (embora não cumpram pena) pelo uso ilegal do dinheiro público. Suponha que desses "representantes do povo" um é escolhido ao acaso, para vir passar o Círio de Nazaré em Belém.
(a) Qual a probabilidade de termos a visita de um deputado honesto durante o círio?
(b) Qual a probabilidade do deputado escolhido ser honesto, sabendo que ele é do partido A?
(c) Qual a probabilidade do deputado escolhido ser corrupto, sabendo que ele é do partido B ou C?

(06) Ana possui em seu armário 10 pares de sapatos, sendo 4 pretos, 2 nudes, 3 vermelhos e 1 branco. Ela retira simultaneamente 4 pés de sapatos do armário. Determine a probabilidade:
(a) dos sapatos retirados formarem dois pares, sabendo que todos são vermelhos;
(b) dos sapatos retidados não formarem par algum, sabendo que foram tirados 2 sapatos pretos e 2 vermelhos.

(07) Uma caixa contém bilhetes numerados de 1 a 20. Sacam-se, sucessivamente e sem reposição, 4 bilhetes dessa caixa. Determine a probabilidade:
(a) dos números retirados serem todos números pares;
(b) dos dois primeiros números serem pares e os dois últimos ímpares;
(c) dos números sairem com a paridade alternada;
(d) dos números serem todos múltiplos de 3.

(08) Três caixas I, II e III contém respectivamente 1 bola branca e 2 pretas; 2 brancas e 1 preta; 3 brancas e 2 pretas. Uma caixa é escolhida ao acaso e dela é retirada uma bola. Determine a probabilidade:
(a) da bola retirada ser branca, sabendo que a caixa escolhida foi a I;
(b) da caixa escolhida ter sido a I e a bola retirada ser branca.

Respostas da Lista de Exercícios 15
(01.a) $\frac{33}{100}$
(01.b) $\frac{1}{2}$
(01.c) $\frac{8}{25}$
(02.a) $\frac{1}{6}$
(02.b) $\frac{1}{5}$
(02.c) $\frac{7}{11}$
(02.d) $\frac{13}{16}$
(02.e) $\frac{13}{15}$
(03.a) $\frac{1}{15}$
(03.b) $\frac{3}{5}$
(03.c) $\frac{4}{7}$
(04.a) $\frac{21}{41}$
(04.b) $\frac{21}{500}$
(05.a) $\approx 34,11\%$
(05.b) 10%
(05.c) $\approx 52,85\%$
(06.a) $\frac{1}{5}$
(06.b) $\frac{24}{35}$
(07.a) $4,33\%$
(07.b) $6,97\%$
(07.c) $\approx 13,94\%$
(07.d) $\approx 0,31\%$
(08.a) $\frac{1}{3}$
(08.b) $\frac{1}{9}$

Capítulo 16

Probabilidade Total

Objetivos:

✓ **Definir Probabilidade Total**
✓ **Apresentar a fórmula para o cálculo da Probabilidade Total**

1 Introdução

Retornemos, mais uma vez, ao problema proposto no ínicio do Capítulo anterior. Agora, para calcular uma nova probabilidade.

• Uma caixa contém 80 bolas pretas e 20 brancas. Sacam-se, sucessivamente e **sem reposição**, duas bolas dessa caixa. Qual a probabilidade da **segunda bola ser preta**?

Sabemos que essa probabilidade é dada pelo quociente:

$$\frac{\text{número de bolas pretas na caixa}}{\text{numero de bolas na caixa}}$$

Como a retirada é sem reposição, no segundo saque a caixa tem exatamente 99 bolas. Dessas, quantas são pretas? Esse valor fica dependendo do que aconteceu na primeira retirada, se saiu uma bola preta ou uma bola branca. Neste capítulo, vamos estudar a fórmula para calcular essa probabilidade, chamada de probabilidade total, a qual leva em consideração todas as situações possíveis para o evento anterior.

2 Probabilidade Total

Se $A, B \subset \Omega$, com $A \neq \emptyset$, então

$$B = \Omega \cap B = (A \cup \overline{A}) \cap B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B),$$

sendo essa união disjunta. Logo, pela Regra da Adição e Corolário 3:

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P(A).P(B|A) + P(\overline{A}).P(B|\overline{A}).$$

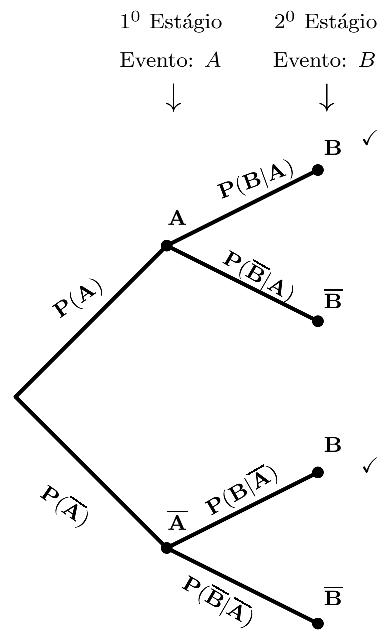
Esse resultado é conhecido como teorema da probabilidade total, de grande utilidade quando o experimento possui vários estágios.

Teorema 3. ***(Probabilidade Total)*** *Seja* (Ω, P) *um espaço de probabilidade. Se* $\emptyset \neq A, B \subset \Omega$, *então*

$$P(B) = P(A).P(B|A) + P(\overline{A}).P(B|\overline{A}).$$

A probabilidade total pode ser visualizads usando um *diagrama de árvore*, no qual constam todos os resultados possíveis para cada estágio do experimento e suas respectivas probabilidades.

Diagrama de árvore para um experimento com dois estágios:



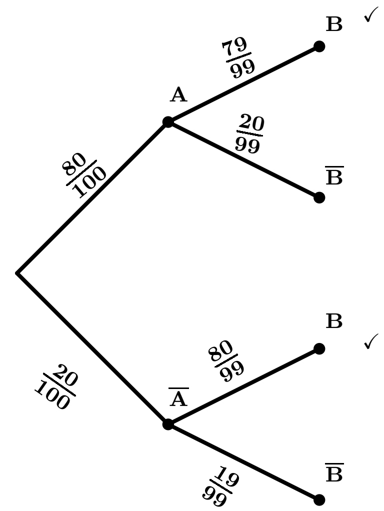
$$\mathbf{P(B) = P(A).P(B|A) + P(\overline{A}).P(B|\overline{A})}.$$

Exercícios Resolvidos 32.

(01) Uma caixa contém 80 bolas pretas e 20 brancas. Sacam-se, sucessivamente e sem reposição, duas bolas dessa caixa. Determine a probabilidade da segunda bola ser preta.
Solução:
Vamos considerar os eventos:
A - a primeira bola é preta
B - a segunda bola é preta.
Pelo teorema da probabilidade total:

$$P(B) = P(A).P(B|A) + P(\overline{A}).P(B|\overline{A}) = \frac{80}{100}.\frac{79}{99} + \frac{20}{100}.\frac{80}{99} = 0,8.$$

Podemos também chegar a esse resultado, usando um diagrama de árvore:



Para determinar $P(B)$, identificamos na árvore todos os ramos que tem B como evento final (assinalados na árvore com ✓). Para cada um deles, multiplicamos suas probabilidades e somamos as parcelas obtidas:

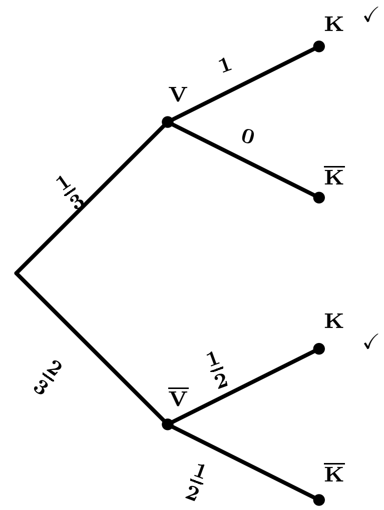
$$P(B) = \frac{80}{100}.\frac{79}{99} + \frac{20}{100}.\frac{80}{99} = 0,8.$$

$\square$

(02) Um saco contém três moedas, uma das quais tem cara nas duas faces, enquanto as outras duas são normais e não viciadas. Uma moeda é tirada ao acaso do saco e lançada para cima. Qual a probabilidade de que o resultado seja cara?
Solução:
O experimento tem dois estágios:
1^a estágio: tirar uma moeda do saco;
2^a estágio: lançar a moeda retirada e observar a face de cima.
Vamos considerar um evento associados a cada um dos estágios.
Estágio 1: - Evento V - saiu a moeda viciada (com duas caras)
Estágio 2: - Evento K - saiu cara
Queremos determinar $P(K)$. Pelo teorema da probabilidade total:

$$P(K) = P(V).P(K|V) + P(\overline{V}).P(K|\overline{V}) = \frac{1}{3}.1 + \frac{2}{3}.\frac{1}{2} = \frac{2}{3}.$$

Ou, usando o diagrama de árvores:



$$\mathbf{P(K) = \frac{1}{3}.1 + \frac{2}{3}.\frac{1}{2} = \frac{2}{3}}$$

Generalizando o resultado acima, temos o seguinte teorema:

Teorema 4. ***(Extensão do teorema da probabilidade total)***

Se $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ *é uma partição do espaço amostral* Ω*, então para todo* $B \subset \Omega$*, tem-se:*

$$P(B) = P(A_1).P(B|A_1) + P(A_2).P(B|A_2) + ... + P(A_n).P(B|A_n).$$

Demonstração:
Como $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ é uma partição de Ω, segue que

$$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n,$$

com $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$ e $P(A_i) > 0$, para todo i. Assim,

$$B = \Omega \cap B = (A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup ... \cup (A_n \cap B)$$

e como $(A_i \cap B) \cap (A_j \cap B) = \emptyset$, para todo $i \neq j$, segue da Proposição 11 e do Corolário 3:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + ... + P(A_n \cap B) \\ &= P(A_1).P(B|A_1) + P(A_2).P(B|A_2) + ... + P(A_n).P(B|A_n). \end{aligned}$$ □

Exercícios Resolvidos 33.

(01) Professores das escolas A, B e C participaram de um congresso, com a seguinte distribuição por disciplinas ministradas:

	Escola A	Escola B	Escola C
Matemática	12	7	5
Física	6	3	2
Química	2	-	3

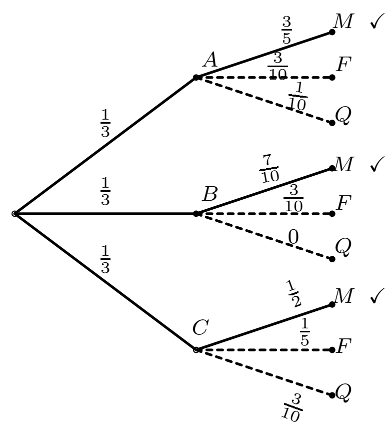
No final do congresso, selecionou-se aleatoriamente uma das escola participantes e, dentre seus professores, um deles foi escolhido por sorteio. Qual a probabilidade do professor sorteado ser do curso de:
(a) Matemática;
(b) Física;
(c) Química.
Solução:
(a) Observamos que o experimento em questão tem dois estágios:
Estágio 1: Selecionar uma escola, com resultados possíveis: A, B ou C
Estágio 2: Escolher um professor e observar a disciplina que ele ministra, com possíveis resultados: M (Matemática), F (Física) ou Q (Química).

É claro que as probabilidades $P(M|A)$, $P(M|B)$ e $P(M|C)$ tem valores distintos. Assim, para calcularmos $P(M)$, deveremos levar em consideração, todos os resultados possíveis na escolha da escola, ou seja, calcular a probabilidade total, conforme o Teorema 4:

$$P(M) = P(A).P(M|A)+P(B).P(M|B)+P(C).P(M|C) = \frac{1}{3}.\frac{3}{5}+\frac{1}{3}.\frac{7}{10}+\frac{1}{3}.\frac{1}{2} = \frac{3}{5}.$$

□

Podemos também chegar a esse valor, por meio de um diagrama de árvore, conforme abaixo:



Para calcular $P(M)$, selecionamos na árvore todos os ramos que tem em sua terminação o evento M. Uma vez identificados esses ramos, multiplicamos as probabilidades existentes ao longo de cada um deles e somamos as parcelas obtidas:

$$P(M) = \frac{1}{3}.\frac{3}{5} + \frac{1}{3}.\frac{7}{10} + \frac{1}{3}.\frac{1}{2} = \frac{3}{5}.$$

(b) Física:
Da árvore segue que:

$$P(F) = P(A).P(F|A)+P(B).P(F|B)+P(C).P(F|C) = \frac{1}{3}.\frac{3}{10}+\frac{1}{3}.\frac{3}{10}+\frac{1}{3}.\frac{1}{5} = \frac{4}{15}.$$

$\square$

(c) Química:

$$P(Q) = P(A).P(Q|A)+P(B).P(Q|B)+P(C).P(Q|C) = \frac{1}{3}.\frac{1}{10}+\frac{1}{3}.0+\frac{1}{3}.\frac{3}{10} = \frac{2}{15}.$$

$\square$

3 Probabilidade das Causas

Três caixas I, II e III contém as seguintes bolas:

- Caixa I: 1 bola branca e 2 pretas;
- Caixa II: 2 bolas brancas e 1 preta;
- Caixa III: 3 bolas brancas e 2 pretas.

Uma caixa é escolhida ao acaso e dela retira-se uma bola.
(a) Qual a probabilidade da bola retira ser branca, sabendo que foi escolhida a caixa III?
Solução:
Considere os eventos:
A_1 - a caixa escolhida foi a I;
A_2 - a caixa escolhida foi a II;
A_3 - a caixa escolhida foi a III;
B - a bola retirada é branca.
Queremos determinar $P(B|A_3)$. Como a caixa III tem 5 bolas, sendo apenas 3 brancas, então

$$P(B|A_3) = \frac{3}{5}.$$

$\square$

(b) Qual é a probabilidade da bola retirada ser branca?
Solução:
Pelo teorema da probabilidade total:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1).P(B|A_1) + P(A_2).P(B|A_2) + P(A_3).P(B|A_3) \\ &= \tfrac{1}{3}.\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}.\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}.\tfrac{3}{5} = \tfrac{8}{15}. \end{aligned}$$

$\square$

(c) Qual a probabilidade da caixa escolhida ser a III, sabendo que a bola retira foi branca?
Solução:
Agora, queremos saber $P(A_3|B)$, ou seja, determinar a probabilidade de um fato ocorrido no primeiro estágio, na certeza de um evento ocorrido no segundo. Essa probabilidade é chamada **Probabilidade das Causas**. Usando a Proposição 14 e o Corolário 3, podemos facilmente determinar esse valor:

$P(A_3|B) = \frac{P(A_3 \cap B)}{P(B)}$ - pela Proposição 14

$= \frac{P(A_3).P(B|A_3)}{P(B)}$ - pelo Corolário 3

$= \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{8}{15}} = \frac{3}{8}.$ □

(02) Em uma fábrica três máquinas produzem o mesmo produto. A tabela abaixo mostra a produção ao longo de um mês.

Máquina	Unidades Produzidas	Unidades Defeituosas
1	2.000	40
2	1.000	20
3	1.000	40

Uma máquina é escolhida ao acaso, e de sua produção mensal, retira-se aleatoriamente uma peça.
(a) Qual a probabilidade da peça retirada ser defeituosa, sabendo que ela foi produzida pela máquina 3?
Solução:
Considere os eventos:
A_1 - a peça foi produzida pela máquina 1;
A_2 - a peça foi produzida pela máquina 2;
A_3 - a peça foi produzida pela máquina 3;
D - A peça é defeitosa.
Queremos saber $P(D|A_3)$, a qual é dada por;

$$P(D|A_3) = \frac{|D \cap A_3|}{|A_3|} = \frac{40}{1.000} = 0,04.$$

□

(b) Qual é a probabilidade da peça escolhida ser defeituosa?
Solução:
Trata-se da probabilidade total, já que a peça pode ter sido produzida por quaisquer das três máquinas. Assim,
$P(D) = P(A_1).P(D|A_1) + P(A_2).P(D|A_2) + P(A_3).P(D|A_3)$
$= \frac{2.000}{4.000}.\frac{40}{2.000} + \frac{1.000}{4.000}.\frac{20}{1.000} + \frac{1.000}{4.000}.\frac{40}{1.000} = \frac{1}{40}.$ □

(c) Qual a probabilidade da peça escolhida ter sido produzida pela máquina 3, sabendo que ela é defeituosa?
Solução:
Compare essa pergunta com aquela feita na letra (a). Ambas são probabilidades condicionais. Porém, aqui deseja-se calcular a probabilidade de um evento ocorrido na primeira etapa do experimento, que foi a escolha da máquina, com base em informações da segunda etapa, o estado da peça retirada. Trata-se de probabilidade das causas:
$P(A_3|D) = \frac{P(A_3 \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A_3).P(D|A_3)}{P(A_1).D(A_1)+P(A_2).P(D|A_2)+P(A_3).P(D|A_3)} = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{100}}{\frac{1}{40}} = 0,4.$ □

Generalizando esse resultado temos o teorema a seguir:

Teorema 5. *(**Teorema de Bayes**) Sejam $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ uma partição do espaço amostral Ω e $\emptyset \neq B \subset \Omega$. Então, para qualquer $i = 1, 2, ..., n$, tem-se:*

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i).P(B|A_i)}{P(B)}.$$

onde,

$$P(B) = P(A_1).P(B|A_1) + P(A_2).P(B|A_2) + ... + P(B|A_n).$$

Demonstração:
Da Proposição 14 e o Corolário 3, tem-se que:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i).P(B|A_i)}{P(B)}.$$

$\square$

Lista de Exercícios 16.

(01) Uma caixa contém 30 bolas pretas e 20 brancas. Sacam-se, sucessivamente e sem reposição, duas bolas dessa caixa. Determine a probabilidade:
(a) da segunda bola ser preta, sabendo que a primeira bola foi preta;
(b) da segunda bola ser preta, sabendo que a primeira bola foi branca;
(c) da segunda bola ser preta.

(02) Uma caixa contém 30 bolas pretas, 20 brancas e 10 vermelhas. Duas bolas são retiradas da caixa, uma após a outra, sem reposição. Determine a probabilidade:
(a) da segunda bola ser preta, sabendo que a primeira é preta;
(b) da segunda bola ser branca, sabendo que a primeira é vermelha;
(c) da segunda bola ser preta;
(d) da segunda bola ser branca.

(03) Uma caixa contém 30 bolas pretas, 20 brancas e 10 vermelhas. Três bolas são retiradas da caixa, uma após a outra, sem reposição. Qual a pobabilidade da terceira bola retirada ser preta?

(04) Três caixas idênticas contém moedas, conforme abaixo:
· Caixa 1: 5 moedas de ouro e 1 de prata;
· Caixa 2: 2 moedas de ouro e 3 de prata;
· Caixa 3: 5 moedas de ouro e 5 de prata.
Uma caixa é escolhida ao acaso e dela retirada uma moeda, também ao acaso. Determine a probabilidade:
(a) da moeda retirada ser de ouro, sabendo que foi escolhida a Caixa 1;
(b) da moeda retirada ser de prata, sabendo que foi escolhida a Caixa 3;
(c) da moeda escolhida ser de ouro;
(d) da caixa escolhida ter sido a III, sabendo que a moeda retirada é de ouro;
(e) da caixa escolhida ter sido a II, sabendo que a moeda retirada é de prata.

(05) Duas máquinas A e B produzem peças idênticas. Do total de peças produzidas por A, 90% são boas, enquanto B tem só 80% de aproveitamento. Uma máquina é escolhida ao acaso e de sua produção diária, retira-se uma peça. Determine a probabilidade da peça retirada:
(a) ser defeituosa, sabendo que ela foi produzida pela máquina B;
(b) ser boa;
(c) ter sido produzida pela máquina A, sabendo que ela é defeituosa.

(06) Um jogo é formado por duas caixas, as quais contém bolas de mesmo tamanho e formato, como abaixo:
· Caixa I: 5 bolas pretas, 4 brancas e 1 vermelha;
· Caixa II: 5 bolas pretas e 4 brancas.
O jogador, de olhos vendados, deverá retirar uma bola da Caixa I e colocá-la na Caixa II. Em seguida, retirar uma bola da Caixa II, depositando-a na I. Por fim, retirar uma bola da Caixa I. Ganhará o jogo, se a última bola retirada for a vermelha. Qual a probabilidade de vitória nesse jogo?

Respostas da Lista de Exercícios 16

(01.a) $\frac{29}{49}$

(01.b) $\frac{30}{49}$

(01.c) $0,6$

(02.a) $\frac{29}{59}$

(02.b) $\frac{20}{59}$

(02.c) $\frac{1}{2}$

(02.d) $\frac{1}{3}$

(03) $\frac{1}{2}$.

(04.a) $\frac{5}{6}$

(04.b) $\frac{1}{2}$

(04.c) $\frac{26}{45}$

(04.d) $\frac{15}{52}$.

(04.e) $\frac{9}{19}$

(05.a) 20%

(05.b) $\frac{17}{20}$

(05.c) $\frac{1}{3}$

(06) $9,1\%$

Capítulo 17

Distribuição Binomial

Objetivos:

✓ **Definir Eventos Independentes**
✓ **Apresentar a Distribuição Binomial**

1 Eventos Independentes

Definição 8. *Seja* (Ω, P) *um espaço de probabilidade. Dois eventos* $A, B \subset \Omega$ *são ditos* ***independentes*** *se*

$$P(B|A) = P(B).$$

Segue do Corolário 3, que se A e B são eventos independentes, então

$$P(A \cap B) = P(A).P(B).$$

Exemplos:
(01) Uma moeda é lançada duas vezes. Qual é a probabilidade de obtermos cara nos dois lançamentos?
Solução:
Considere os eventos:
A - saiu cara no 1^0 lançamento
B - saiu cara no 2^0 lançamento
Como um lançamento não afeta o outro, os eventos são independentes, então

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

□

Podemos estender a definição acima para um número finito n qualquer de eventos.

Definição 9. *Dizemos que os eventos* $A_1, A_2, ..., A_n \subset \Omega$ *são independentes, se para todo* k*,* $1 \leq k \leq n$ *e para quaisquer* $i_1, i_2, ..., i_k \in \{1, 2, ..., n\}$*, tem-se:*

$$P(A_k|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}) = P(A_k).$$

E consequentemente,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1).P(A_2)....P(A_n).$$

Exemplos:
(01) Uma moeda é lançada 5 vezes. Qual é a probabilidade de obtermos cara em todos os lançamentos?
Solução:
Considere os eventos:
A_i - saiu cara no i-ésimo lançamento, $i = 1, 2, 3, 4, 5$.
Como um lançamento não afeta o outro, os eventos são independentes, então

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = P(A_1).P(A_2).P(A_3).P(A_4).P(A_5) = (\frac{1}{2})^5 = \frac{1}{32}.$$

$\square$

(02) Um dado é lançado seis vezes. Qual é a probabilidade de obtermos a sequência 1, 2, 3, 4, 5, 6 nos seis lançamentos?
Solução:
Seja A_i - saiu i no i-ésimo lançamento, para $i = 1, 2, ..., n$.
Como a ocorrência de um evento não afeta a ocorrência de outro, os eventos são independentes. Logo,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6) = P(A_1).P(A_2).P(A_3).P(A_4).P(A_5).P(A_6) = (\frac{1}{6})^6.$$

$\square$

(03) Qual é a probabilidade de Marcelo ganhar por três semanas consecutivas em uma rifa, que semanalmente sortea um número entre 1 e N, se em cada uma das semanas ele apostou um único número?
Solução:
Considere os eventos
A_1 - Marcelo ganhou na 1^a semana
A_2 - Marcelo ganhou na 2^a semana
A_3 - Marcelo ganhou na 3^a semana
Como os eventos são independentes, então,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1).P(A_2).P(A_3) = (\frac{1}{N})^3.$$

$\square$

(04) Uma caixa contém 7 bolas brancas e 3 pretas. Sacam-se, sucessivamente

e com reposição, 4 bolas dessa caixa. Qual é a probabilidade das duas primeiras bolas serem pretas e as duas últimas brancas?
Solução:
Para cada $i = 1, 2, 3, 4$, considere os eventos:
P_i - a i-ésima bola retirada é preta;
B_i - a i-ésima bola retirada é branca.

Como a retirada é com reposição, a ocorrência de um evento não altera a probabilidade de outro, logo os eventos são independentes. Portanto,

$$P(P_1 \cap P_2 \cap B_3 \cap B_4) = P(P_1).P(P_2).P(B_3).P(B_4) = (\frac{7}{10})^2.(\frac{3}{10})^2 = 0,0441.$$

□

(05) Em uma prova de múltipla escolha com 10 questões, sendo 5 alternativas por questão, com apenas uma delas a correta, qual é a probabilidade de um estudante acertar somente as três primeiras questões?
Solução:
Considere os eventos:
A_i - o estudante acerta a i-ésima questão, para $i = 1, 2, 3, ..., 10$.
Como as questões são independentes, então
$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \overline{A_4} \cap \overline{A_5} \cap \overline{A_6} \cap \overline{A_7} \cap \overline{A_8} \cap \overline{A_9} \cap \overline{A_{10}})$
$= P(A_1).P(A_2).P(A_3).P(\overline{A_4}).P(\overline{A_5})....P(\overline{A_{10}}) = (\frac{1}{5})^3.(\frac{4}{5})^7 \approx 0,17\%.$ □

2 Distribuição Binomial

• Um dado não viciado é lançado 7 vezes e os resultados anotados. Qual a probabilidade de, nos 7 lançamentos, sairem exatamente cinco vezes o número 5?
Solução:
Para o lançamento do dado vamos considerar os seguintes eventos:
S (*sucesso*) - saiu o número 5
F (*fracasso*) - não saiu o número 5.
Então,

$$P(S) = \frac{1}{6} \quad \text{e} \quad P(F) = P(\overline{S}) = 1 - P(S) = \frac{5}{6}.$$

Vejamos alguns dos casos em que ocorrem 5 sucessos nos 7 lançamentos. A ordem das letras corresponde à ordem do lançamento:
(i) $S\,S\,S\,F\,S\,F\,S$
(ii) $F\,F\,S\,S\,S\,S\,S$
(iii) $S\,F\,S\,S\,S\,S\,F$
(iv) $F\,S\,F\,S\,S\,S\,S$

Como os evento são independentes, a probabilidade da sequência dada em (i) é:

$$P(S \cap S \cap S \cap F \cap S \cap F \cap S) = P(S).P(S).P(S).P(F).P(S).P(F).P(S) = (\frac{1}{6})^5.(\frac{5}{6})^2.$$

E da sequência dada em (ii) é:

$$P(F \cap F \cap S \cap S \cap S \cap S \cap S) = P(F).P(F).P(S).P(S).P(S).P(S).P(S) = (\frac{5}{6})^2.(\frac{1}{6})^5.$$

Observe que essa probabilidade é a mesma para as sequências dadas em (iii) e (iv), bem como, para qualquer ordenação de 5 sucessos e 2 fracassos. Resta então, calcularmos quantas são essas ordenações. Como cada uma dessas sequências corresponde a uma permutação dos símbolos

$$SSSSSFF$$

então, temos $P_7^{5,2}$ sequências dessa forma. Assim, a probabilidade de obtermos exatamente 5 sucessos nos 7 lançamentos é dada por:

$$P_7^{5,2} \times (\frac{1}{6})^5 \times (\frac{5}{6})^2 \approx 0,187\%.$$

$\square$

Sucesso × Fracasso

Ao realizar um experimento, podemos assumir que certo resultado desejado seja considerado *sucesso* (S) e o evento complementar, *fracasso* (F).

Exemplos:
(01) **Experimento**: Jogar uma moeda não viciada.
Podemos considerar:
sucesso: saiu cara
fracasso: saiu coroa.

(02) **Experimento**: Jogar um dado não viciado.
Vamos considerar:
sucesso: saiu um múltiplo de 3
fracasso: não saiu um múltiplo de 3.

(03) **Experimento**: Retirar uma bola de uma caixa que contém 7 bolas brancas e 3 pretas.
Consideremos:
sucesso: saiu uma bola branca
fracasso: saiu uma bola preta

(04) **Experimento**: Responder uma questão em um teste de múltipla escolha, com 5 alternativas por questão.
Consideremos:
sucesso: marcar a resposta correta
fracasso: não marcar a resposta correta.

Representaremos por p a probabilidade de ocorrer sucesso e $q = 1 - p$ a probabilidade de fracasso. Considerando os exemplos acima temos:
(01) $p = q = \frac{1}{2}$;
(02) $p = \frac{1}{3}$ e $q = \frac{2}{3}$;
(03) $p = \frac{7}{10}$ e $q = \frac{3}{10}$;
(04) $p = \frac{1}{5}$ e $q = \frac{4}{5}$.

Considere agora que certo experimento seja repetido n vezes e que o resultado de cada tentativa seja independente dos resultados das demais. Queremos saber:

- Qual é a probabilidade de ocorrerem exatamente k $(0 \leq k \leq n)$ sucessos nas n repetições do experimento?

Consideremos uma possibilidade da ocorrência de k sucessos e $(n-k)$ fracassos:

$$\underbrace{SSSS...S}_{k\times}\underbrace{FFFF...F}_{(n-k)\times}$$

Como as provas são independentes, a probabilidade dessa sequência é dada por:

$$P(SSSS...SFFFF..F) = P(S)^k.P(F)^{n-k} = p^k(1-p)^{n-k}.$$

Obs: Para simplificar a notação, estamos suprimindo o símbolo de interseção na probabilidade acima.

Essa probabilidade é a mesma, qualquer que seja a sequência em que ocorrem os k sucessos e $(n-k)$ fracassos. Resta contar quantas são as sequências possíveis para as ocorrências dos sucessos e fracassos. Isto equivale a permutar n símbolos, sendo k símbolos iguais a S e $(n-k)$ iguais a F, a qual é dada:

$$P_n^{k,(n-k)} = C_n^k,$$

assim, a probabilidade de ocorrem exatamente k sucessos nas n repetições é dada por:

$$C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}.$$

Com isto mostramos o seguinte teorema.

Teorema 6. *(**Teorema Binomial**) A probabilidade de ocorrem exatamente k sucessos em uma sequência de n provas independentes, na qual a probabilidade de sucesso em cada prova é p, é igual*

$$C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}.$$

$\square$

Observe que o valor da probabilidade dada acima é o termo geral do binômio

$$(q+p)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-1},$$

onde $q = 1 - p$. Em função disso, essa probabilidade é chamada de **Distribuição Binomial**.

Exercícios Resolvidos 34.

(01) Um dado não viciado tem 2 faces brancas e 4 pretas. Qual é a probabilidade de em 6 lançamentos desse dado, obtermos 4 vezes a cor branca?
Solução:
Vamos considerar os eventos:
S - saiu uma face branca $\Rightarrow p = \frac{1}{3}$.
F - saiu uma face preta $\Rightarrow q = \frac{2}{3}$.

Usando a fórmula acima, esta probabilidade é dada por:

$$C_6^4 \times (\frac{1}{3})^4 \times (\frac{2}{3})^2 = \frac{20}{243}.$$

□

(02) Uma pesquisa indicou que em uma cidade 75% dos automóveis tem seguro. Se 6 automóveis envolvem-se em um acidente, qual é a probabilidade de exatamente 2 deles ter seguro?
Solução:
Vamos considerar
S - o carro envolvido no acidente tem seguro
F - o carro envolvido no acidente não tem seguro
$p = P(S) = 0,75$ e $q = P(F) = 0,25$.

Então, a probabilidade pedida é dada por:

$$C_6^2 \times (0,75)^2 \times (0,25)^4 \approx 3,3\%.$$

□

(03) Constatou-se que 60% dos alunos da UFPA almoçam no RU. Escolhendo-se aleatoriamente 8 alunos dessa instituição, qual a probabilidade de:
(a) metade deles almoçarem no RU?
Solução:
Consideremos:
S - o aluno almoça no RU
F - o aluno não almoça no RU
$p = P(S) = \frac{3}{5}$ e $q = P(F) = \frac{2}{5}$.

Logo, essa probabilidade é:

$$C_8^4 \times (\frac{3}{5})^4 \times (\frac{2}{5})^4 \approx 23,22\%.$$

□

(b) pelo menos dois deles almoçarem no RU?
Solução:
Vamos denotar por P_k - a probabilidade de exatamente k dos 8 alunos almoçarem no RU - cujo valor é dado por:

$$P_k = C_8^k \times (\frac{3}{5})^k \times (\frac{2}{5})^{8-k}.$$

Então, a probabilidade procurada é dada pela soma:

$$\sum_{k=2}^{8} P_k.$$

Restando o cálculo de P_k, para $k = 2, 3, ..., 8$.

Outra solução, menos trabalhosa, é observar que:

$$1 = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + ... + P_8$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{k=2}^{10} P_k = 1 - (P_0 + P_1) \approx 99,15\%.$$

□

(04) Um estudante resolve uma prova de múltipla escolha com 10 questões, sendo 5 alternativas por questão, com apenas uma delas a correta. Para ser aprovado ele tem que acertar pelo menos 6 questões. Qual é a probabilidade desse aluno ser aprovadao, apenas chutando as respostas?
Solução:
Vamos considerar:
S - o aluno acerta a questão;
F - o aluno erra a questão.
Como cada questão tem 5 altenativas, com apenas uma correta, então

$$p := P(S) = \frac{1}{5} \ \text{ e } \ q = P(F) = 1 - p = \frac{4}{5}.$$

Para ser aprovado o aluno tem que acertar 6, 7, 8, 9 ou 10 questões. Assim, se denotarmos por A_k - o aluno acerta apenas k questões, com $k = 6, 7, 8, 9, 10$, então a probabilidade desejada é dada por:

$$P(A_6 \cup A_7 \cup A_8 \cup A_9 \cup A_{10}) = \sum_{k=6}^{10} P(A_k).$$

Resta calcular $P(A_k)$, com $6 \leq k \leq 10$.
Como os eventos são independentes, para cada k podemos usar a fórmula da distribuição binomial:

$$A_k = C_{10}^{k} \times (\frac{1}{5})^k \times (\frac{4}{5})^{10-k}.$$

Assim, a probabilidade procurada é dada por

$$\sum_{k=6}^{10} C_{10}^{k} \times (\frac{1}{5})^k \times (\frac{4}{5})^{10-k}.$$

Lista de Exercícios 17.

(01) Lança-se uma moeda não viciada 10 vezes. Qual a probabilidade de nos 10 lançamentos obtermos:
(a) exatamente 1 cara?
(b) exatamente 7 caras?
(c) pelo menos 7 caras?

(02) Uma caixa contém 9 bolas brancas, 6 pretas e 5 vermelhas. Retiram-se, sucessivamente e com reposição, 4 bolas dessa caixa. Determine a probabilidade:
(a) das 4 bolas retiradas serem vermelhas;
(b) de somente 2 bolas retiradas serem vermelhas;
(c) de pelo menos 2 bolas serem vermelhas.

(03) Um time de futebol, sempre que joga, tem probabilidade $p = \frac{3}{5}$ de vencer, independentemente do adversário. Se esse time disputar 5 partidas, qual a probabilidade que vença pelo menos uma?

(04) Uma dado é lançado cinco vezes. Qual a probabilidade de que o 4 apareça exatamente três vezes nos cinco lançamentos?

(05) Uma pessoa tem probabilidade 0,2 de acertar num alvo toda vez que ela atira. Supondo que os tiros são independentes, qual a probabilidade dela ter 50% de acertos em 8 tiros?

Respostas da Lista de Exercícios 17
(01.a) $\frac{5}{512}$

(01.b) $\frac{15}{128}$

(01.c) $\frac{11}{64}$

(02.a) $\frac{1}{256}$

(02.b) $\frac{27}{128}$

(02.c) $\frac{67}{256}$

(03) $\frac{3093}{3125}$

(04) $\frac{125}{3.888}$

(05) $4,6\%$.

Capítulo 18

Esperança Matemática

Objetivos:

✓ **Definir Variável Aleatória**
✓ **Definir e calcular Esperança Matemática**

1 Introdução

• Certo dado tem o número 1 em uma de suas faces, o 2 em duas delas e o número 3 nas outras três. Um jogador paga 1 real para lançar esse dado. Se a face observada for 2, ele recebe 10 reais. Caso contrário, não recebe nada. Calcule o valor do *ganho esperado* por partida.

Para responder a esta questão, precisamos entender o significado da expressão *ganho esperado*. Para uma melhor compreensão, vamos resolver inicialmente as duas questões a seguir.

• Lança-se o dado da questão anterior quinze vezes e obtém-se a seguinte sequência de valores:

$$(2, 1, 3, 2, 3, 2, 3, 3, 1, 1, 3, 3, 2, 3, 3).$$

Calcule a média (aritmética) dos valores obtidos.
Solução:
A média aritmética dos valores obtidos é dada por:

$$\text{Média } = \frac{(1+1+1)+(2+2+2+2)+(3+3+3+3+3+3+3+3)}{15}$$

ou ainda,

$$\text{Média } = \frac{3\times 1 + 4\times 2 + 8\times 3}{15} = 2,33.$$

• Lança-se o dado da questão anterior 300 vezes. Determine o *valor esperado* para a média dos resultados obtidos.
Solução:
O espaço amostral para o lançamento do dado é $\Omega = \{1, 2, 3\}$, com probabilidades

para cada um dos eventos unitários:

$$p(1) = \frac{1}{6}, \qquad p(2) = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad p(3) = \frac{1}{2}.$$

Assim, espera-se que o número 1 saia em $\frac{1}{6}$ dos 300 lançamentos; o número 2 em $\frac{1}{3}$ deles e 3, em $\frac{1}{2}$ dos 300. Portanto, o *valor esperado* para a média é dado por:

$$\text{Média} = \frac{1}{300}\left[\underbrace{(1+1+...+1)}_{50\times} + \underbrace{(2+2+..+2)}_{100\times} + \underbrace{(3+3+..+3)}_{150\times}\right] = 2,33.$$

Podemos também expressar essa média como:

$$\text{Média} = \frac{1}{300}\left[1\times 50 + 2\times 100 + 3\times 150\right] = \frac{1}{300}[1\times\frac{1}{6}\times 300 + 2\times\frac{1}{3}\times 300 + 3\times\frac{1}{2}\times 300]$$

$$\Downarrow$$

$$\text{Média} = [1\times\frac{1}{6} + 2\times\frac{1}{3} + 3\times\frac{1}{2}] = 2,33$$

Ou seja,

$$\text{Média Esperada} = \sum_{i=1}^{3} i.p(i) = 2,33.$$

Interpreta-se este resultado dizendo-se que se o dado for lançado uma grande quantidade de vezes, espera-se que a média dos resultados obtidos nos lançamentos seja 2,33.

Dessa última expressa, observa-se que o valor esperado para a média independe do número de lançamentos efetuados e é dado pela soma dos produtos resultantes da multiplicação dos possíveis resultados por suas respectivas probabilidades. Este somatório é o que chamamos de *Valor Esperado* ou *Esperança Matemática*, uma grandeza que traduz a nossa espectativa com relação ao valor de uma variável aleatória.

2 Variável Aleatória

Consideremos os seguintes experimentos e seus espaços amostrais:

Experimento 1: Lançar uma moeda duas vezes e observar o número de caras obtidas nos dois lançamentos.
· Espaço amostral: $\Omega = \{0, 1, 2\}$.

Experimento 2: - Lançar uma moeda duas vezes e observar os resultados obtidos.
· Espaço amostral: $\Omega = \{KK, CC, KC, CK\}$, sendo K - cara e C - coroa.

Observamos que os resultados do primeiro experimento são numéricos, enquanto os do segundo não. Podemos classificar os resultados de um experimento aleatório em **quantitativos**, quando numéricos ou **qualitativos**, se não numéricos.

Em certos casos é possível converter os resultados qualitativos em quantitativos, associando um valor numérico a cada elemento do espaço amostral, isso é feito através de uma função chamada variável aleatória.

Definição 10. *Seja Ω um espaço amostral associado a um experimento aleatório. Toda função*

$$X : \Omega \to R_X \subset \mathbb{R},$$

que associa a cada $s \in \Omega$ o número real $X(s)$, é denominada ***Variável Aleatória****.*

Se $R_X = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$ é um conjunto enumerável, diz-se que X é uma *variável aleatória discreta*. Caso contrário, X é uma *variável aleatória contínua*.

Exemplos 1:
(01) **Experimento 1**: Lançar uma moedas duas vezes e anotar os resultados.
· Espaço amostral: $\Omega = \{KK, KC, CK, CC\}$, sendo K - cara e C - cora.

Podemos definir a seguinte variável aleatória para esse experimento:

$$\begin{aligned} X : \Omega &\to R_X \\ s &\to X(s) := \text{número de caras obtidas nos lançamentos} \end{aligned}$$

Então,

$$X(KK) = 2, \quad X(KC) = X(CK) = 1 \quad \text{e} \quad X(CC) = 0.$$

Logo, $R_X = \{0, 1, 2\}$ e X é uma variável aleatória discreta.

(02) **Experimento 2**: Retirar, sucessivamente e sem reposição, seis bolas de uma caixa que contém 20 bolas brancas (b) e 5 vermelhas (v) e observar a sequência de cores obtidas.
Temos aqui um espaço amostral qualitativo:

$$\Omega = \{bbbbbv, bvvvvv, vbbvvv, vvvvbb, ...\}.$$

Podemos definir a seguinte variável aleatória para esse experimento:

$$\begin{aligned} X : \Omega &\to R_X \\ s &\to X(s) := \text{número de bolas brancas retiradas.} \end{aligned}$$

Neste caso, $X(vvvvvb) = 1$, $X(bbbbbv) = 5$, $X(bbbbb) = 6$.
Como $R_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, X é uma variável aleatória discreta.

(03) **Experimento 3**: Fazer um teste de qualidade em um lote contendo 20 lâmpadas, colocando-as uma a uma em um soquete. O resultado do teste: $+$ (lâmpada perfeita) ou $-$ (com defeito), é anotado. O teste continua até que a

primeira lâmpada com defeito apareça ou todo o lote seja testado.
· Espaço amostral: $\Omega = \{-, +-, ++-, +++-, ++++-, ...\}$.

A fim de associar valores números aos resultados do experimento, que são qualitativos, podemos definir a seguinte variável:

$$\begin{aligned} X : \Omega &\to R_X \\ s &\to X(s) := \text{número de lâmpadas testadas.} \end{aligned}$$

Temos:

$$X(-) = 1, \quad X(+-) = 2, \quad X(++-) = 3, ..., \quad X(\underbrace{+++...+-}_{n\times}) = n,$$

sendo, $R_X = \{1, 2, 3, ..., 20\}$.

(04) **Experimento 4**: Lançar um dado e observar o resultado obtido.
· Espaço amostral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Embora, o espaço amostral seja quantitativo, podemos também definir uma variável aleatória para esse experimento. Por exemplo,

$$\begin{aligned} X : \Omega &\to R_X \\ s &\to X(s) := s. \end{aligned}$$

Sendo essa uma variável aleatória discreta, com $R_X = \Omega$.

(05) **Experimento 5**: Escolher aleatoriamente na reta real, um ponto pertencente ao intervalo $[0, 1]$
· Espaço amostral Ω = conjunto de todos os pontos existentes no intervalo $[0, 1]$.

Temos aqui um espaço amostral qualitativo. Podemos associar a esse experimento a seguinte variável aleatória:

$$\begin{aligned} X : \Omega &\to R_X \\ P &\to X(P) := \text{coordenada do ponto } P \end{aligned}$$

Neste caso, $R_X = [0, 1]$, logo X é uma variável aleatória contínua.

3 Distribuição de Probabilidade

Seja

$$\begin{aligned} X : \Omega &\to R_X \\ s &\to X(s) \end{aligned} \tag{18.1}$$

uma variável aleatória definida em um espaço amostral Ω. Como já vimos, se $s \in \Omega$ não representa uma quantidade (não é numérico), a variável aleatória X tem a função de converter s em $X(s) \in \mathbb{R}$, que é um valor número. O próximo passo é associar a cada número $x_i \in R_X$ um valor $p(x_i)$ no intervalo $[0, 1]$, o qual vai representar a probabilidade da ocorrência de $s \in \Omega$. Isto também é feito através de uma função, chamada *função de probabilidade*, como definiremos posteriormente.

Eventos Equivalentes

Considerando a variável aleatória dada em (18.1), a cada $B \subset R_X$ fica associado o evento $B^{-1} \subset \Omega$, dado por:

$$B^{-1} = \{s \in \Omega \mid X(s) \in B\}$$

o qual é imagem inversa de B pela função X, isto é, $B^{-1} = X^{-1}(B)$. Dizemos que B e B^{-1} são **eventos equivalentes**. No caso de $B = \{x_i\}$ ser conjunto unitário, denotaremos B^{-1} por $X^{-1}(x_i)$.

Exemplos 2:
(01) Considerando a variável aleatória abaixo, dada no item 01 do Exemplo 1 acima:

$$\begin{array}{rl} X : \{KK, KC, CK, CC\} & \rightarrow R_X = \{0,1,2\} \\ s & \rightarrow X(s) := \text{número de caras} \end{array}$$

Temos como exemplos de eventos equivalentes:
$\cdot\ B = \{0\} \Rightarrow B^{-1} = X^{-1}(0) = \{s \in \Omega \mid X(s) = 0\} = \{CC\}$;
$\cdot\ B = \{1\} \Rightarrow B^{-1} = X^{-1}(1) = \{KC, CK\}$;
$\cdot\ B = \{2\} \Rightarrow B^{-1} = X^{-1}(2) = \{KK\}$.
$\cdot\ B = \{0,1\} \Rightarrow B^{-1} = \{s \in \Omega \mid X(s) \in \{0,1\}\} = \{CC, KC, CK\}$.

(02) Para a variável aleatória abaixo, definida no item 02 do Exemplo 1:

$$\begin{array}{rl} X : \{bbbbbv, bvvvvv, ...\} & \rightarrow R_X = \{1,2,3,4,5,6\} \\ s & \rightarrow X(s) := n^0 \text{ de bolas brancas retiradas} \end{array}$$

Como exemplos temos:
$\cdot\ X^{-1}(1) = \{s \in \Omega \mid X(s) = 1\} = \{bvvvvv, vbvvvv, vvbvvv, vvvbvv, vvvvbv, vvvvvb\}$;
$\cdot\ X^{-1}(2) = \{bbvvvv, bvbvvv, bvvbvv, bvvvbv, bvvvvb, vbbvvv, vbvbvv, vbvvbv,$
$vbvvvb, vvbbvv, vvbvbv, vvbvvb, vvvbbv, vvvbvb, vvvvbb\}$;
$\cdot\ X^{-1}(\{5,6\}) = \{bbbbbv, bbbbvb, bbbvbb, bbvbbb, bvbbbb, vbbbbb, bbbbbb\}$.

Função de Probabilidade

Definição 11. *Seja* $X : \Omega \rightarrow R_X = \{x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ..\}$ *uma variável aleatória discreta. Chama-se* ***Função de Probabilidade*** *da variável aleatória* X*, a toda função*

$$p : R_X \rightarrow [0,1],$$

$$x_i \rightarrow p(x_i)$$

que tem as seguintes propriedades:
(i) $p(x_i) \geq 0$*, para todo* $x_i \in R_X$*;*
(ii) $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$.

Para cada $x_i \in R_X$, o número $p(x_i)$, também denotado por $p(X = x_i)$, é chamado a *probabilidade* de x_i.

A coleção dos pares

$$(x_i, p(x_i)), \quad i = 1, 2, 3, ...$$

é denominada **Distribuição de Probabilidade** de X. Em geral, para o caso de $R_X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ finito, usam-se tabelas para representar a Distribuição de Probabilidade, como abaixo:

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$p(x_i)$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	$p(x_3)$	...	$p(x_n)$

Observações
(i) Suponha $R_X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ um conjunto finito. Se os resultados forem igualmente prováveis, isto é, $p(x_1) = p(x_2) = ... = p(x_n)$, da condição (ii) da Definição 11, segue que:

$$1 = \sum_{i=1}^{n} p(x_i) = n.p(x_i) \Rightarrow p(x_i) = \frac{1}{n}.$$

(ii) Se $R_X = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ for um conjunto infinito enumerável, não podemos ter um modelo equiprobabilístico, pois nesse caso $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) \neq 1$.

Embora qualquer coleção de números $p(x_i)$ que satisfaçam as condições dadas na Definição 11 possa servir como uma função de probabilidade, em geral a escolha destes números é determinada pela probabilidade

$$P : \Omega \to [0, 1]$$

associada ao espaço amostral Ω, no qual a variável aleatória X esteja definida, isto é, define-se

$$p(x_i) = P(X^{-1}(x_i)),$$

onde $X^{-1}(x_i) = \{s \in \Omega \mid X(s) = x_i\}$ é o evento equivalente ao conjunto unitário $\{x_i\}$.

Definição 12. *Seja (Ω, P) um espaço de probabilidade e $X : \Omega \to R_X$ uma variável aleatória discreta, definida em Ω. Definimos a probabilidade de $B \subset R_X$, por*

$$p(B) = P(B^{-1})$$

onde $B^{-1} = \{s \in \Omega \mid X(s) \in B\}$ é o evento equivalente a B.

Exemplos 3:
Vamos construir a distribuição de probabilidade para as variáveis aleatórias definidas nos itens 01 e 02 do Exemplo 1 acima:

(01) **Experimento 1**: Lançar uma moeda duas vezes e anotar os resultados obtidos.

$$\begin{array}{ll} X : \{KK, KC, CK, CC\} & \to R_X = \{0, 1, 2\} \\ \qquad s & \to X(s) := \text{número de caras} \end{array}$$

Para determinar a distribuição de probabilidade devemos associar a cada $x \in R_X$, um número real $p(x)$, que expresse a propabilidade da ocorrência se $X^{-1}(x)$.

Considerando modelos equiprobabilísticos, lembremos que, no lançamento de uma moeda temos uma função $p : \{K, C\} \to [0, 1]$, com probabilidades

$$p(K) = p(C) = \frac{1}{2}.$$

E como nos dois lançamentos os eventos são independentes, temos as seguintes probabilidades para os eventos unitários de $\Omega = \{KK, KC, CK, CC\}$.

$$P(KK) = \frac{1}{4}, \quad P(KC) = P(CK) = \frac{1}{4}, \quad P(CC) = \frac{1}{4}.$$

Usando a Definição 12 e os eventos equivalentes, como já determinados no exemplo anterior, temos:
$p(0) = P(X^{-1}(0)) = P(CC) = \frac{1}{4}$;
$p(1) = P(X^{-1}(1)) = P(\{KC, KC\}) = P(KC) + P(KC) = \frac{1}{2}$;
$p(3) = P(X^{-1}(3)) = P(KK) = \frac{1}{4}$.

Assim, a distribuição de probabilidade de X é dada por:

x_i	0	1	2
$p(x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

□

(02) **Experimento 2**: Retirar, sucessivamente e sem reposição, seis bolas de uma caixa que contém 20 bolas brancas (b) e 5 vermelhas (v) e observar a sequência de cores obtidas.

$$\begin{array}{ll} X : \{bbbbbv, bvvvvv, ...\} & \to R_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ \qquad s & \to X(s) := \text{número de bolas brancas retiradas} \end{array}$$

Para todo $k \in R_X$, o evento equivalente $X^{-1}(k)$ corresponde a todas as retiradas das seis bolas, para as quais k são brancas e $(6-k)$ vermelhas, portanto é o conjunto formado por todas as sequências de Ω que tem k vezes a letra b e $(6-k)$ vezes a letra v. Logo,

$$|X^{-1}(k)| = C_6^k.$$

E para cada uma dessas sequências, a probabilidade é a mesma, independentemente da ordem das letras b e v, a qual é dada por:

$$P(\underbrace{bb...b}_{k\times}\underbrace{vv..v}_{6-k}) = \frac{[20 \times 19 \times 18 \times ... \times (20-(k-1)] \times [5 \times 4 \times ... \times k]}{25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21 \times 20}$$

Portanto,

$$p(k) = P(X^{-1}(k)) = C_6^k \times \prod_{j=0}^{k-1}(20-j) \times \prod_{l=0}^{5-k}(5-l) \times \frac{1}{25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21 \times 20}.$$

Lembrando que $\prod$ é símbolo do produtório, isto é, $\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \times x_2 \times ... \times x_n$.

Calculando $p(k)$, para $k = 1, 2, .., 6$, obtemos a distribuição de probabilidade:

x_i	1	2	3	4	5	6
$p(x_i)$	$\frac{2}{17.710}$	$\frac{95}{17.710}$	$\frac{1.140}{17.710}$	$\frac{4.845}{17.710}$	$\frac{7.752}{17.710}$	$\frac{3.876}{17.710}$

Obserserve que $\sum_{i=1}^{6} p(x_i) = 1$, conforme pede o item (ii) da Definição 11. $\square$

4 Valor Esperado

Definição 13. *Seja $X : \Omega \to R_X = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$ uma variável aleatória discreta e $(x_i, p(x_i))$ uma distribuição de probabilidade para X. O* ***Valor Esperado*** *ou* ***Esperança Matemática*** *de X, representado por $E(X)$, é definido como:*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i)$$

se a série $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i)$ convergir absolutamente, isto é, $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i p(x_i)| < \infty$.

Se $R_X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ é um conjunto finito, então a Esperança Matemática é simplesmente a soma

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i),$$

que pode ser considerada como uma média ponderada dos possíveis valores $x_1, x_2, .., x_n$. Se todos os valores possíveis forem igualmente prováveis, já vimos que $p(x_i) = \frac{1}{n}$, logo

$$E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

a qual é simplesmente a média aritmética dos valores de X.

Exercícios Resolvidos 35.

(01) Considerando a distribuição de probabilidade construída no item 01 do Exemplo 3, determine o valor esperado para o número de caras nos dois lançamentos da moeda.

Solução:

Lembremos que, a distribuição de probabilidade dada no item 01 do Exemplo 3 foi construída para a variável aleatória $X : \Omega \to R_X$, onde $X(s)$ é o número de caras nos dois lançamentos. Portanto, o valor esperado para o número de caras obtidos nos dois lançamentos é dado por:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i p(x_i) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

□

(02) Considerando a distribuição de probabilidade encontrada no item 02 do Exemplo 3, determine o valor esperado para o número de bolas brancas sacadas na execução do experimento.
Solução:
Da distribuição de probabilidade encontrada, segue que:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i p(x_i) = \frac{1 \times 2 + 2 \times 95 + 3 \times 1.140 + 4 \times 4.845 + 5 \times 7.752 + 6 \times 3.876}{17.710} = 4,8.$$

□

(03) Considerando as famílias brasileiras constituídas de 3 filhos, determine o valor esperado para o número de meninas.
Solução:
Neste caso, queremos determinar o valor esperado para uma variável aleatória que ainda não foi definida. Então, devemos inicialmente definir a variável aleatória, construir sua distribuição de probabilidade, para então calcular o valor esperado.

Consideremos como experimento anotar o sexo dos filhos das famílias com 3 crianças. Considerando M - sexo masculino e F - sexo feminino, já vimos que o espaço amostral para esse experimento é dado por:

$$\Omega = \{MMM, MMF, MFM, FMM, MFF, FMF, MFF, FFF\}$$

tratando-se, pois de um espaço amostral qualitativo. Para associarmos a cada $s \in \Omega$ um valor numérico, definimos em Ω uma variável aleatória, de modo que $X(s)$ = número de meninas, uma vez que esse é o valor esperado que deseja-se calcular. Assim, definimos:

$$\begin{aligned} X : \Omega &\to R_X \\ s &\to X(s) := \text{número de meninas} \end{aligned}$$

Como $R_X = \{0, 1, 2, 3\}$, então X é uma variavel aleatória discreta com a seguinte distribuição de probabilidade:

x_i	0	1	2	3
$p(x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Portanto, o valor esperado para X é:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i p(x_i) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = 1,5.$$

□

(04) Certo dado tem o número 1 em uma de suas faces, o 2 em duas delas e o número 3 nas outras três. Um jogador paga 1 real para lançar esse dado. Se a face observada for 2, ele recebe 10 reais. Caso contrário, não recebe nada. Calcule o valor do *ganho esperado* por partida.
Solução:
Para o lançamento do dado temos como espaço amostral $\Omega = \{1, 2, 3\}$. Como deseja-se calcular o valor esperado para o ganho por partida, então precisamos definir em Ω uma variável aletória, de modo que $X(s)$ seja o ganho do jogador na partida. Considere:

$$\begin{aligned} X : \Omega &\to R_X \\ s &\to X(s) := \text{ganho do jogador na partida.} \end{aligned}$$

Dos dado do problema, obtemos facilmente que:

$$X(1) = X(3) = -1 \text{ e } X(2) = 9.$$

Logo $R_X = \{-1, 9\}$. Assim, a distribuição de probabilidade de X é dada por:

x_i	-1	9
$p(x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

Portanto,

$$E(X) = \sum_{i=1}^{2} x_i p(x_i) = -1 \times \frac{2}{3} + 9 \times \frac{1}{3} = 2,33.$$

(05) Um lote contendo 20 lâmpadas será testado, colocando as lâmpadas, uma a uma, em um soquete. O resultado do teste: + (lâmpada perfeita) ou − (com defeito), é anotado. O teste continua até que a primeira lâmpada com defeito apareça ou todo o lote seja testado. Sabendo-se que a probabilidade de uma lâmpada ser perfeita é 80%, determine:
(a) a probabilidade do teste encerrar na 10^a tentativa;
(b) a distribuição de probabilidade para a variável aleatória $X : \Omega \to R_X$, onde $X(s) :=$ número de lâmpadas testadas;
(c) o valor esperado para o número de lâmpadas testadas.

Solução:
Já vimos que $\Omega = \{-, +-, ++-, +++-, ++++-, ...\}$ é o espaço amostral para esse experimento e $X : \Omega \to R_X$, onde $X(s) :=$ número de lâmpadas testadas - é a variável aleatória definida em Ω. Para cada $n \in \{1, 2, 3, ..., 19\}$ temos os eventos equivalentes:

$$X^{-1}(n) = \{s \in \Omega \mid X(s) = n\} = \{\underbrace{+++...+}_{n-1\times}-\}$$

que corresponde a ocorrência de $n-1$ testes positivos e 1 negativo. E para $n = 20$

$$X^{-1}(20) = \{\underbrace{+++...+}_{19\times}-, \quad \underbrace{+++...++}_{20\times}\}$$

E como os eventos são independentes:

$$p(n) = P(X^{-1}(n)) = \begin{cases} \frac{4^{n-1}}{5^n}, & n = 1, 2, ..., 19 \\ \\ \frac{4^{19}}{5^{20}} + \frac{4^{20}}{5^{20}}, & n = 20 \end{cases}$$

(a) Em particular, para $n = 10$:

$$p(10) = \frac{4^9}{5^{10}} \approx 2,68\%.$$

$\square$

(b) Distribuição de Probabilidade:
Usando $p(n)$ determinada acima, temos a seguinte distribuição de probabilidade:

x_i	1	2	3	4	5	...	19	20
$p(x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5^2}$	$\frac{4^2}{5^3}$	$\frac{4^3}{5^4}$	$\frac{4^4}{5^5}$	....	$\frac{4^{18}}{5^{19}}$	$\frac{4^{19}}{5^{20}} + \frac{4^{20}}{5^{20}}$

Observe que essa distribuição está de acordo com o item (ii) da Definição 11, pois

$$\sum_{i=1}^{20} p(x_i) = \sum_{n=1}^{20} \frac{4^{n-1}}{5^n} + (\frac{4}{5})^{20} = [1 - (\frac{4}{5})^{20}] + (\frac{4}{5})^{20} = 1.$$

$\square$

(c) Calculo do $E(X)$:

Usando a distribuição de probabilidade encontrada na letra (b):

$$E(X) = \sum_{i=1}^{20} x_i p(x_i) = \frac{1}{5} \sum_{n=1}^{20} n \times (\frac{4}{5})^{n-1} + 20 \times (\frac{4}{5})^{20} \approx 4,72.$$

$\square$

Lista de Exercícios 18.

(01) Retiram-se, sucessivamente e sem reposição, duas bolas de uma caixa que contém 5 bolas azuis (a), 3 vermelhas (v) e 2 brancas (b) e anota-se a cor das bolas retiradas.
(a) Determine o espaço amostral Ω desse experimento;
(b) Considerando $X : \Omega \to R_X$, definida por $X(s)$ = número de bolas azuis retiradas, determine R_X;
(c) Determine o evento equivalente $X^{-1}(x_i)$, para cada $x_i \in R_X$;
(d) Considerando a probabilidade $P : P(\Omega) \to [0, 1]$ como um modelo equiprobabilístico, determine a distribuição de probabilidade para a variável aleatória X descrita na letra (b);
(e) Calcule o valor esperado para o número de bolas azuis retiradas.

(02) Retiram-se, sucessivamente e sem reposição, quatro bolas de uma caixa que contém 10 bolas azuis (a), 6 vermelhas (v) e 4 brancas (b) e anota-se a cor das bolas retiradas.
(a) Considerando $X : \Omega \to R_X$, definida por $X(s)$ = número de bolas azuis retiradas, determine R_X;
(b) Determine $X^{-1}(2)$;
(c) Considerando a probabilidade $P : P(\Omega) \to [0, 1]$ como um modelo equiprobabilístico, determine a distribuição de probabilidade para a variável aleatória X descrita na letra (a);
(d) Calcule o valor esperado para o número de bolas azuis retiradas.

(03) A tabela abaixo representa a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória D, descrita como "a procura diária de certo produto". Calcule a Esperança Matemática $E(D)$.

d_i	1	2	3	4	5
$p(d_i)$	0,1	0,1	0,3	0,3	0,2

(04) Um médico cobra $R\$300,00$ por uma consulta particular, já os Planos A e B, pagam $R\$100,00$ e $R\$80,00$, respectivamente por consulta. E por cada paciente do SUS ele recebe apenas $R\$20,00$ por atendimento. Sabendo que 8% de seus pacientes são do plano A, 10% do plano B, 5% pagam consultas particulares, sendo todo o restante atendimento do SUS, determine o valor esperado por consulta.

(05) Um jogador paga 2 reais para lançar um dado não viciado. Se sair o número por ele previamente informado, ele recebe 10 reais. Caso contrário, não recebe nada. Calcule o valor esperado do ganho por partida nesse jogo.

(06) Um jogador paga 5 reais para lançar um dado não viciado três vezes. Se sair o mesmo número nos três lançamentos ele recebe 100. Caso contrário, não recebe nada. Calcule o valor esperado do ganho por partida nesse jogo.

(07) Para lançar um dado não viciado um jogador paga 5 reais. O jogo paga

dez reais se sair 6, sete reais se sairem os números 4 ou 5 e não paga nada para os demais resultados. Determine o valor esperado do ganho por partida neste jogo.

(08) Um lote contendo uma grande quantidade de válvulas eletrônicas será testado. As válvulas serão analisadas uma após a outra, até que a primeira válvula sem defeito apareça. Supondo que a probabilidade de existir válvulas com defeito no lote é de 10%, determine a probabilidade do teste encerrá somente na 20^a válvula analisada.

(09) Do total de peças produzidas por uma fábrica, 90% são comercializáveis. O restante apresenta defeito e são descartadas. Sabe-se que a fábrica ganha 12 reais por peça vendida e perde 2 reais na produção de uma peça defeituosa. Calcule o valor esperado do lucro líquido por peça, nessa fábrica.

(10) Uma caixa contém 15 bolas vermelhas e 5 brancas. Retiram-se, sucessivamente e com reposição, três bolas dessa caixa e anota-se a cor das bolas retiradas. Considere $X : \Omega \rightarrow R_X$ a variável aleatória definida no espaço amostral Ω desse experimento, onde $X(s) =$ número de bolas brancas retiradas.
(a) Determine a distribuição de probabilidade para X;
(b) Calcule o valor esperado $E(X)$.

(11) Uma caixa contém 2 bolas brancas e 18 pretas. Aleatoriamente as bolas vão sendo retiradas da caixa, uma após a outra até que as duas bolas brancas sejam retiradas.
(a) Estabeleça a distribuição de probabilidade para a variavel $X : \Omega \rightarrow R_X$, onde $X(s) =$ número de bolas retiradas até a remoção total das brancas;
(b) Calcule o valor esperado para o número de bolas retiradas, até a remoção total das brancas.

Respostas da Lista de Exercícios 18

(01.a) $\Omega = \{aa, vv, bb, av, va, ab, ba, vb, bv\}$;

(01.b) $R_x = \{0, 1, 2\}$;

(01.c) $X^{-1}(0) = \{vv, bb, vb, bv\}$; $X^{-1}(1) = \{av, va, ab, ba\}$; $X^{-1}(2) = \{aa\}$.

(01.d)

x_i	0	1	2
$p(x_i)$	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$

(01.e) $E(X) = 1$

(02.a) $R_X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$;

(02.b) $X^{-1}(2) = \{aavv, avav, avva, vaav, vava, vvaa, aabb, abab, abba, baab, baba, bbaa,$
$aavb, avab, avba, vaab, vaba, vbaa, aabv, abav, abva, baav, bava, bvaa\}$

(02.c)

x_i	0	1	2	3	4
$p(x_i)$	$\frac{14}{323}$	$\frac{80}{323}$	$\frac{135}{323}$	$\frac{80}{323}$	$\frac{14}{323}$

(02.d) $E(X) = 2$. $\square$

(03) $E(D) = 4, 9$.

(04) $46, 4$ reais

(05) - $0, 33$ reais

(06) - $2, 22$ reais.

(07) -1 real.

(08) $\approx 1, 35\%$.

(09) R\$$10, 6$

(10.a)

x_i	0	1	2	3
$p(x_i)$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

(10.b) $E(X) = 0, 75$.

(11.a)

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(x_i)$	$\frac{1}{45}$	$\frac{2}{45}$	$\frac{3}{45}$	$\frac{4}{45}$	$\frac{5}{45}$	$\frac{6}{45}$	$\frac{7}{45}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{9}{45}$

(b) $E(X) = 7, 33$

Apêndice I

Princípio Bijetivo

Lembremos que, dado $n \in \mathbb{N}$, I_n representa o conjunto dos n primeiros números naturais:

$$I_n = \{1, 2, 3, ..., n\}.$$

Diz-se que um conjunto A é finito se é vazio ou existe uma bijeção $f : I_n \to A$, para algum natural n. Nesse caso, dizemos que n é o **número de elementos** ou **cardinalidade** de A, simbolicamente escreve-se $|A| = n$. Se $A = \emptyset$, dizemos que A tem zero elementos e escreve-se $|A| = 0$.

Proposição 15. *(**Princípio Bijetivo**) Se A e B são conjuntos finitos e não vazios, então*

$$|A| = |B|$$

se, e somente se, existe uma bijeção $f : A \to B$.

Demonstração:
($\Rightarrow$) $|A| = |B| = n \Rightarrow$ existe $f : A \to B$ bijetora
Suponha $|A| = |B| = n$, então existem bijeções

$$g : I_n \to A \quad \text{e} \quad h : I_n \to B.$$

Portanto, a composta $f := h \circ g^{-1} : A \to B$ é também um bijeção de A em B.

($\Leftarrow$) Existe uma bijeção $f : A \to B \Rightarrow |A| = |B|$.
Suponha $|A| = n$, então existe uma bijeção $g : I_n \to A$, daí a composta $f \circ g : I_n \to B$ é uma bijeção e portanto $|B| = n$. □

Princípio Aditivo

Dizemos que dois conjuntos A e B são **disjuntos** se $A \cap B = \emptyset$. E dizemos que os conjuntos $A_1, A_2, ..., A_n$, com $n \geq 2$, são dois a dois disjuntos, se $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$.

Proposição 16. *(**Príncipio Aditivo**) Sejam A e B conjuntos finitos e disjuntos, então*

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Demonstração:
Se pelo menos um dos conjuntos é vazio, isso é obviamente verdadeiro, pois nesse caso,

$$A \cup B = B \text{ (se } A = \emptyset) \text{ ou } A \cup B = A \text{ (se } B = \emptyset).$$

Suponhamos então, ambos não vazios, com

$$|A| = m \quad \text{e} \quad |B| = n.$$

Então, existem bijeções

$$f : I_m \to A \quad \text{e} \quad g : I_n \to B.$$

Definamos a função

$$h : I_{n+m} \to A \cup B$$

dada por:

$$h(x) = f(x), \text{ se } 1 \leq x \leq m \quad \text{e} \quad h(m+x) = g(x), \text{ se } 1 \leq x \leq n.$$

Vamos mostrar que h é injetora e sobrejetora, logo bijetora.
(a) h é injetora:
Sejam $x, y \in I_{m+n}$ tais que $h(x) = h(y)$.
Observe que se $1 \leq x \leq m$ e $m+1 \leq y \leq m+n \Rightarrow y = m+k$, para algum $1 \leq k \leq n$. Nesse caso,

$$h(x) = h(y) = h(m+k) \Rightarrow f(x) = g(k) \in f(A) \cap g(B) = A \cap B = \emptyset$$

pois A e B são disjuntos. Assim, só podemos ter apenas dois casos possíveis:
(i) $1 \leq x, y \leq m$
$h(x) = h(y) \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$, pois f é injetora
(ii) $m+1 \leq x, y \leq m+n \Rightarrow x = m+k_1$ e $y = m+k_2$, com $1 \leq k_1, k_2 \leq n$. Logo,

$$h(x) = h(y) \Rightarrow h(m+k_1) = h(m+k_2) \Rightarrow g(k_1) = g(k_2) \Rightarrow k_1 = k_2,$$

pois g é injetora. Logo $x = y$.

(b) h é sobrejetora:
Seja $z \in A \cup B \Rightarrow z \in A = f(I_m) \Rightarrow z = f(x)$, para algum $1 \leq x \leq m$
$\Rightarrow z = f(x) = h(x)$ ou
$z \in B = g(I_n) \Rightarrow z = g(x)$, com $1 \leq x \leq n \Rightarrow z = g(x) = h(m+x) \in h(I_{m+n})$.

Como $h : I_{n+m} \to A \cup B$ é uma bijeção, então $|A \cup B| = m+n = |A| + |B|$. $\square$

Podemos estender o resultado acima para uma quantidade finita n quaquer de conjuntos.

Corolário 4. *Sejam $A_1, A_2, .., A_n$ conjuntos finitos, dois a dois disjuntos. Então*

$$|\bigcup_{j=1}^{n} A_j| = \sum_{j=1}^{n} |A_j|$$

Demonstração:
Faremos a demonstração por indução em n.
(i) $n = 2$

Já foi provado na Proposição 16.
(ii) Suponha o resultado válido para $n \geq 2$ e considere os conjuntos $A_1, A_2, .., A_n, A_{n+1}$, dois a dois disjuntos.
Chamando $B = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ temos que B e A_{n+1} são disjuntos, já que os A_j são dois a dois disjuntos. Então por (i) e pela hipótese de indução temos:
$|A_1 \cup A_2 ... \cup A_n \cup A_{n+1}| = |B \cup A_{n+1}| = |B| + |A_{n+1}| = |A_1| + |A_2| + ... + |A_n| + |A_{n+1}|$.

Corolário 5. *Se A e B são conjuntos finitos, então*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Demonstração:
Claramente temos que $A = (A - B) \cup (A \cap B)$ e $(A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset$. Então pela Proposição 16,

$$|A| = |A - B| + |A \cap B| \Rightarrow |A - B| = |A| - |A \cap B|.$$

Por outro lado, também temos $A \cup B = (A - B) \cup B$, sendo esta união disjunta, logo segue da proprosição, que

$$|A \cup B| = |A - B| + |B| = |A| - |A \cap B| + |B|$$

□

Apêndice II

Princípio Multiplicativo

Proposição 17. *Se A e B são conjuntos finitos e não vazios, então*

$$|A \times B| = |A| \times |B|.$$

Demonstração:
Considere $A = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ e $B = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$. Então
$A \times B = \{(x_1, y_1), (x_2, y_1).., (x_m, y_1),$
$(x_1, y_2), (x_2, y_2), ..., (x_m, y_2),$
$...,$
$(x_1, y_n), (x_2, y_n), .., (x_m, y_n)\}$
$= \{(x_1, y_1), (x_2, y_1)...(x_m, y_1)\} \cup \{(x_1, y_2), (x_2, y_2).., (x_m, y_2)\} \cup ... \cup \{(x_1, y_n), (x_2, y_n).., (x_m, y_n)\}$
$= A_1 \cup A_2 ... \cup A_n$, onde $A_i = A \times \{y_i\}$.

Como os A_i são dois a dois disjuntos e com m elementos cada um, segue do Corolário 4 que o número de elementos de $A \times B$ é:

$$|A \times B| = m + m... + m = n \times m = |A| \times |B|.$$

$\square$

Podemos estender o resultado acima para uma quantidade finita n qualquer de conjuntos.

Dados conjuntos finitos e não vazios A_1, A_2, ..., A_k definimos o produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times ... \times A_k$ como o conjunto:

$$A_1 \times A_2 \times ... A_k = \{(a_1, a_2, ..., a_k) \mid a_j \in A_j, j = 1, 2, ..., k\}$$

Corolário 6. *Se $A_1, A_2, ..., A_n$ são conjuntos finitos e não vazios, então*

$$|A_1 \times A_2 \times ... \times A_n| = |A_1| \times |A_2| \times ... \times |A_n|$$

Demonstração:
Faremos por indução em n.
(i) $n = 2$
Já provado na Proposição 17.
(ii) Suponha o resultado verdadeiro para $n \geq 2$ e considere os conjuntos $A_1, A_2, ..., A_n, A_{n+1}$.
Fazendo $B = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$, pela hipótese de indução temos:

$$|B| = |A_1| \times |A_2| \times ... \times |A_n|$$

e por (i),

$$|B \times A_{n+1}| = |B| \times |A_{n+1}| = |A_1| \times |A_2| \times ... \times |A_n| \times |A_{n+1}|.$$

Agora a função

$$\begin{aligned} f : B \times A_{n+1} &\rightarrow A_1 \times A_2 \times A_n \times A_{n+1} \\ ((a_1, a_2, .., a_n), a_{n+1}) &\rightarrow (a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}) \end{aligned}$$

define uma bijeção entre esses conjuntos, logo
$|A_1 \times A_2 \times A_n \times A_{n+1}| = |B \times A_{n+1}| = |A_1| \times |A_2| \times ... \times |A_n| \times |A_{n+1}|$. □

Teorema 7. ***(Princípio Multiplicativo)***
Se uma tarefa é composta de duas etapas sucessivas, sendo que:
· o número de possibilidades de realizar a 1^a *etapa é* n_1*;*
· o número de possibilidades de realizar a 2^a *etapa é* n_2*,*
então, o número total de possibilidades de executar a tarefa completa é dado pelo produto:

$$n_1 \times n_2.$$

Demonstração:
Considere
A - o conjunto com as possibilidades de executar a 1^a etapa;
B - o conjunto com as possibilidades de executar a 2^a etapa.
Da hipótese, segue que $|A| = n_1$ e $|B| = n_2$.
Como a execução da tarefa T consiste na escolha de um elemento no produto cartesiano $A \times B$, pela Proprosição 17 o número de modos de executar a tarefa T é dada por $|A \times B| = |A| \times |B| = n_1 \times n_2$. □

Teorema 8. ***(Extensão do Princípio Multiplicativo)***
Se uma tarefa compõe-se de k *etapas sucessivas* $E_1, E_2, ..., E_k$ *e há:*
· n_1 *modos de executar a etapa* E_1*;*
· n_2 *modos de executar a etapa* E_2*;*
· n_3 *modos de executar a etapa* E_3*;*
$\vdots$
· n_k *modos de executar a etapa* E_k*,*
então, o número de possibilidades de executar a tarefa completa é dado pelo produto:

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times ... \times n_k.$$

Demonstração:
Basta considerar A_i o conjunto com as possibilidades de executar a etapa A_i e aplicar o Corolário 6. □

Apêndice III

Princípio da Inclusão-Exclusão

Lembremos que dados inteiros n e p, com $n \geq 1$ e $1 \leq p \leq n$, $X_{n,p}$ é o conjunto definido por:

$$X_{n,p} := \{(i_1, i_2, ..., i_p) \in \mathbb{Z}^p \mid 1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_p \leq n\} \tag{18.2}$$

$|X_{n,p}| = C_n, p$, conforme Proposição 8 (Capítulo 8).

Sejam A_1, A_2, ..., A_n subconjuntos de um mesmo conjunto Ω. Para cada inteiro $p = 1, 2, 3, ..., n$, definimos o inteiro S_p, como segue:

$$S_p = \sum_{(i_1,i_2,..,i_p)\in X_{n,p}} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_p}| \tag{18.3}$$

onde $X_{n,p}$ é o conjunto definido em (18.2). Para $p = 0$, $S_0 := |\Omega|$.

Lema 4. *Sejam $A_1, A_2, ..., A_n$ subconjuntos de um conjunto Ω. Para cada inteiro $p = 0, 1, 2, ..., n$, o número de elementos de Ω que pertencem a **exatamente** p desses subconjuntos é dado por:*

$$a_p := \sum_{k=0}^{n-p} (-1)^k \, C_{p+k}^k \, S_{p+k}$$

onde S_{p+k} é como definido em (18.3) para todo $p + k \geq 1$ e $S_0 = |\Omega|$.

Demonstração:
Desenvolvendo o somatório cima, temos:

$$a_p = C_{p+0}^0 S_p - C_{p+1}^1 S_{p+1} + ... + (-1)^{p+j} C_{p+j}^j S_{p+j} + ... + (-1)^{n-p} C_n^{n-p} S_n \tag{18.4}$$

Como $A_1, A_2, ..., A_n \subset \Omega$, então se $x \in \Omega$, pode acontecer desse elemento não pertencer a nenhum desses subconjuntos, ou pertencer a somente 1 deles, ou a 2 deles, ou a 3 deles, ..., ou a todos os n subconjuntos.

Assim, dado $x \in \Omega$, vamos considerar que x pertence a m dos subconjuntos $A_1, A_2, ..., A_n$, para algum $m = 0, 1, 2, ...n$. Pela tricotomia, comparando m com p temos 3 casos possíveis:

(i) $m < p$:
Isso significa que x pertence a menos de p dos subconjuntos $A_1, A_2, ..., A_n$. Logo, esse elemento não será contado nenhuma vez na soma (18.4), uma vez que o somatório começa com S_p, o qual é uma soma com todas as parcelas sendo interseções de $p > m$ dos subconjuntos;

(ii) $m = p$;
Nesse caso, x pertecence a exatamente p dos subconjuntos $A_1, A_2, ..., A_n$ e portanto, será contado como 1 unidade apenas em S_p, que está na 1^a parcela de

(18.4) e provém da interseção desses p subconjuntos. Multiplicando pelo coeficiente daquela parcela, segue que x será contato:

$$C^0_{p+0} \times 1 = 1 \text{ vez;}$$

(iii) $m > p$:
$m > p \Rightarrow m = p + j$, para algum algum $1 \leq j \leq n - p$. Então, x será contado como uma vez em cada uma das parcelas que tem os inteiros S_p, S_{p+1}, S_{p+2}, ..., S_{p+j}. De (18.4) temos que que x será contado:

$$\sum_{k=0}^{j}(-1)^k C^k_{p+k} S_{p+k}$$

Aplicando a definição de S_{p+k} para $n = p + j$ (já que neste caso o total de subconjuntos a que x pertence é $p + j$) temos:

$$S_{p+k} = \sum_{(i_1,i_2,...,i_{p+k}) \in X_{p+j,p+k}} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ...A_{p+k}|.$$

Em cada parcela deste somátorio, x é contato uma vez, já que ele pertence a todos os $p + j$ subconjuntos. Pela Proposição 8, este somatório tem C^{p+k}_{p+j} parcelas. Logo x será contado:

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{k=0}^{j}(-1)^k \, C^k_{p+k} \, C^{p+k}_{p+j} &= \textstyle\sum_{k=0}^{j}(-1)^k \frac{(p+k)!}{k!\,p!} \times \frac{(p+j)!}{(p+k)!\,(j-k)!} \\
&= \textstyle\frac{(p+j)!}{p!} \sum_{k=0}^{j}(-1)^k \frac{1}{k!\,(j-k)!} \\
&= \textstyle\frac{(p+j)!}{p!\,j!} \sum_{k=0}^{j}(-1)^k \frac{j!}{k!\,(j-k)!} \\
&= C^p_{p+j} \textstyle\sum_{k=0}^{j} C^k_j (-1)^k = C^k_{p+j} \times 0 = 0 \text{ vezes.}
\end{aligned}$$

Na última passagem, usamos que $\sum_{k=0}^{j} C^k_j (-1)^k = 0$, conforme a questão (07) de Lista de Exercício 12.

De (i), (ii) e (iii), segue que a_p conta uma única vez cada elemento de Ω que pertence a exatamente p dos subconjuntos, e zero vezes todos os demais. $\square$

Lema 5. *Sejam $A_1, A_2, ..., A_n$ subconjuntos de um conjunto Ω. Para cada inteiro $p = 1, 2, ..., n$, o número de elementos de Ω que pertencem a **pelo menos** p destes subconjuntos é dado por:*

$$b_p := \sum_{k=0}^{n-p}(-1)^k \, C^k_{p+k-1} \, S_{p+k}.$$

Demonstração:
Devemos contar todos os elementos de Ω que pertencem a exatamente p dos subconjuntos, mais os que pertencem a exatamente $p + 1$, mais os que pertencem a exatamente $p + 2$, ..., mais os que pertecem a n deles. Pelo Lema 4, este total é

dado por:

$$b_p = a_{p+0}+a_{p+1}+a_{p+2}+...+a_{n-1}+a_n = \sum_{l=0}^{n-p} a_{p+l} = \sum_{l=0}^{n-p}\left[\sum_{k=0}^{n-(p+l)} (-1)^k\, C^k_{(p+l)+k}\, S_{(p+l)+k}\right].$$

Desenvolvendo esses somatórios, teremos parcelas com S_{p+0}, S_{p+1}, S_{p+2},..., S_n. Agrupando essas parcelas podemos reescrever este somatório como:

$$b_p = \sum_{j=0}^{n-p} \beta_{p+j} S_{p+j}$$

onde β_{p+j} é o coeficiente de S_{p+j}, o qual determinaremos agora.

Para que $p+l+k = p+j$, devemos ter $k = j-l$. Assim, para cada $l = 0, 1, 2, ..., n-p$, devemos tomar $k = j-l$ no somatório de a_{p+l}, a fim de obter o coeficiente de S_{p+j}. Então,

$$\beta_{p+j} = \sum_{l=0}^{?} (-1)^{j-l}\, C^{j-l}_{(p+l)+(j-l)}$$

Como devemos ter $j-l \geq 0$, então $l \geq j$, assim o limite superior deste somatório é j.

$$\beta_{p+j} = \sum_{l=0}^{j} (-1)^{j-l}\, C^{j-l}_{p+j}$$

Pela Relação de Stifel, as parcela do somatorio acima, pode ser decomposta como soma de outras duas:

$$\begin{aligned}\beta_{p+j} &= [(-1)^j C^j_{p+j} + (-1)^{j-1} C^{j-1}_{p+j} + (-1)^{j-2} C^{j-2}_{p+j} + ... + (-1)^1 C^1_{p+j} + (-1)^0 C^0_{p+j}] \\ &= (-1)^j [C^j_{p+j-1} + C^{j-1}_{p+j-1}] + (-1)^{j-1} [C^{j-1}_{p+j-1} + C^{j-2}_{p+j-1}] + (-1)^{j-2} [C^{j-2}_{p+j-1} + C^{j-3}_{p+j-1}] \\ &\quad +.... + (-1)^1 [C^1_{p+j-1} + C^0_{p+j-1}] + (-1)^0 C^0_{p+j-1} \\ &= (-1)^j C^j_{p+j-1}.\end{aligned}$$

Assim,

$$b_p = \sum_{j=0}^{n-p} (-1)^j C^j_{p+j-1} S_{p+j} = \sum_{k=0}^{n-p} (-1)^k\, C^k_{p+k-1}\, S_{p+k}.$$

□

Teorema 9. *O número de elementos da união $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ é dado por:*

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} S_k, \tag{18.5}$$

onde S_k é como definido em (18.3).

Demonstração:
$x \in A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ se x pertencer a pelo menos um dos conjuntos A_i, logo, pela Lema 2:

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = b_1 = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_k^k S_{1+k} = S_1 - S_2 + S_3 + ... + (-1)^{n-1} S_n.$$

$\square$

Bibliografia

[1] BACHX, Arago de C. et al. *Prelúdio à Análise Combinatória*. São Paulo. Editora Nacional, 1975.

[2] HAZZAN, Samuel. *Fundamentos da Matemática Elementar 5* - Probabilidade - Combinatória. Editora Atual, 1977.

[3] MAYER, Paul L. *Probabilidade* - Aplicações à Estatística - 2^a Edição. Rio de Janeiro. Editora LCT, 2003.

[4] MORGADO, Augusto Céar de OLiveira et al. *Análise Combinatória e Probabilidade*. 9^a Edição. Rio de Janeiro: SBM - Coleção Professor de Matemática, 2006.

[5] NETO, Antônio Caminha Muniz. *Tópicos de Matemática Elementar - Vol. 4* - Combinatória. 1^a. Rio de Janeiro: SBM - Coleção Professor de Matemática, 2012.