

# Estatística e Ciência de Dados

Versão preliminar

abril de 2021

**Pedro A. Morettin**

**Julio M. Singer**

Departamento de Estatística  
Universidade de São Paulo  
Rua do Matão, 1010  
São Paulo, SP 05508-090  
Brasil



---

# Conteúdo

Prefácio . . . . .	x
<b>1 Estatística, Ciência de Dados e Megadados</b>	<b>1</b>
1.1 Introdução . . . . .	1
1.2 Aprendizado com Estatística . . . . .	4
1.3 Aprendizado automático . . . . .	4
1.4 Uma cronologia do desenvolvimento da Estatística . . . . .	6
1.4.1 Probabilidades . . . . .	7
1.4.2 Estatística . . . . .	7
1.4.3 Estatística e computação . . . . .	8
1.5 Notação e tipos de dados . . . . .	8
1.6 Paradigmas para o aprendizado com Estatística . . . . .	10
1.6.1 Aprendizado supervisionado . . . . .	10
1.6.2 Aprendizado não supervisionado . . . . .	14
1.7 Este livro . . . . .	15
1.8 Conjuntos de dados . . . . .	17
1.9 Notas de capítulo . . . . .	19
<b>PARTE I: ANÁLISE EXPLORATÓRIA DE DADOS</b>	<b>21</b>
<b>2 Preparação dos dados</b>	<b>23</b>
2.1 Considerações preliminares . . . . .	23
2.2 Planilhas de dados . . . . .	26
2.3 Construção de tabelas . . . . .	31
2.4 Construção de gráficos . . . . .	33
2.5 Notas de capítulo . . . . .	34
2.6 Exercícios . . . . .	38
<b>3 Análise de dados de uma variável</b>	<b>43</b>
3.1 Introdução . . . . .	43
3.2 Distribuições de frequências . . . . .	44
3.2.1 Variáveis qualitativas . . . . .	46
3.2.2 Variáveis quantitativas . . . . .	48
3.3 Medidas resumo . . . . .	54

3.3.1	Medidas de posição . . . . .	54
3.3.2	Medidas de dispersão . . . . .	56
3.3.3	Medidas de forma . . . . .	59
3.4	<i>Boxplots</i> . . . . .	62
3.5	Modelos probabilísticos . . . . .	64
3.6	Dados amostrais . . . . .	67
3.7	Gráficos QQ . . . . .	68
3.8	Desvio padrão e erro padrão . . . . .	73
3.9	Intervalo de confiança . . . . .	76
3.10	Transformação de variáveis . . . . .	78
3.11	Notas de capítulo . . . . .	80
3.12	Exercícios . . . . .	83
<b>4</b>	<b>Análise de dados de duas variáveis</b>	<b>93</b>
4.1	Introdução . . . . .	93
4.2	Dois variáveis qualitativas . . . . .	94
4.3	Dois variáveis quantitativas . . . . .	107
4.4	Uma variável qualitativa e outra quantitativa . . . . .	119
4.5	Notas de capítulo . . . . .	126
4.6	Exercícios . . . . .	135
<b>5</b>	<b>Análise de dados de várias variáveis</b>	<b>145</b>
5.1	Introdução . . . . .	145
5.2	Gráficos para três variáveis . . . . .	146
5.3	Gráficos para quatro ou mais variáveis . . . . .	159
5.4	Medidas resumo multivariadas . . . . .	160
5.5	Tabelas de contingência de múltiplas entradas . . . . .	161
5.6	Notas de capítulo . . . . .	164
5.7	Exercícios . . . . .	175
<b>6</b>	<b>Análise de Regressão</b>	<b>181</b>
6.1	Introdução . . . . .	181
6.2	Regressão linear simples . . . . .	184
6.3	Regressão linear múltipla . . . . .	203
6.4	Regressão para dados longitudinais . . . . .	215
6.5	Regressão logística . . . . .	218
6.6	Notas de capítulo . . . . .	224
6.7	Exercícios . . . . .	234
<b>7</b>	<b>Análise de Sobrevivência</b>	<b>243</b>
7.1	Introdução . . . . .	243
7.2	Estimação da função de sobrevivência . . . . .	247
7.3	Comparação de curvas de sobrevivência . . . . .	253
7.4	Regressão para dados de sobrevivência . . . . .	254
7.5	Notas de capítulo . . . . .	256
7.6	Exercícios . . . . .	256

<b>PARTE II: APRENDIZADO SUPERVISIONADO</b>	<b>261</b>
<b>8 Classificação por meio de técnicas clássicas</b>	<b>263</b>
8.1 Introdução . . . . .	263
8.2 Classificação por regressão logística . . . . .	264
8.3 Análise discriminante linear . . . . .	272
8.3.1 Classificador de Bayes . . . . .	272
8.3.2 Classificador linear de Fisher . . . . .	280
8.4 Classificador do vizinho mais próximo . . . . .	282
8.5 Algumas extensões . . . . .	284
8.6 Notas de capítulo . . . . .	285
8.7 Exercícios . . . . .	289
<b>9 Algoritmos de Suporte Vetorial</b>	<b>291</b>
9.1 Introdução . . . . .	291
9.2 Fundamentação dos algoritmos de suporte vetorial . . . . .	292
9.3 Classificador de margem máxima . . . . .	294
9.4 Classificador de margem flexível . . . . .	297
9.5 Classificador de margem não linear . . . . .	302
9.6 Regressão por algoritmos de suporte vetorial . . . . .	305
9.7 Notas de capítulo . . . . .	309
9.8 Exercícios . . . . .	316
<b>10 Árvores e Florestas</b>	<b>319</b>
10.1 Introdução . . . . .	319
10.2 Classificação por árvores . . . . .	320
10.3 <i>Bagging</i> , <i>boosting</i> e florestas . . . . .	327
10.3.1 <i>Bagging</i> . . . . .	327
10.3.2 <i>Boosting</i> . . . . .	329
10.3.3 Florestas aleatórias . . . . .	332
10.4 Árvores para regressão . . . . .	334
10.5 Notas de capítulo . . . . .	338
10.6 Exercícios . . . . .	343
<b>11 Regularização e Modelos Aditivos Generalizados</b>	<b>345</b>
11.1 Introdução . . . . .	345
11.2 Regularização . . . . .	345
11.2.1 Regularização $L_2$ ( <i>Ridge</i> ) . . . . .	346
11.2.2 Regularização $L_1$ ( <i>Lasso</i> ) . . . . .	348
11.2.3 Outras propostas . . . . .	349
11.3 Modelos aditivos generalizados ( <i>GAM</i> ) . . . . .	353
11.4 Notas de capítulo . . . . .	361
11.5 Exercícios . . . . .	363
<b>PARTE III: APRENDIZADO NÃO SUPERVISIONADO</b>	<b>365</b>

<b>12</b>	<b>Análise de Agrupamentos</b>	<b>367</b>
12.1	Introdução . . . . .	367
12.2	Estratégias de agrupamento . . . . .	369
12.3	Algoritmos hierárquicos . . . . .	370
12.4	Algoritmos de partição: K-médias . . . . .	373
12.5	Notas de capítulo . . . . .	379
12.6	Exercícios . . . . .	382
<b>13</b>	<b>Redução de dimensionalidade</b>	<b>383</b>
13.1	Introdução . . . . .	383
13.2	Análise de Componentes Principais . . . . .	383
13.3	Análise fatorial . . . . .	390
13.4	Análise de componentes independentes . . . . .	403
13.5	Notas de capítulo . . . . .	411
13.6	Exercícios . . . . .	413
	<b>PARTE IV: TÓPICOS ADICIONAIS</b>	<b>415</b>
<b>14</b>	<b>Redes neurais</b>	<b>417</b>
14.1	Introdução . . . . .	417
14.2	<i>Perceptron</i> . . . . .	418
14.3	Redes com camadas escondidas . . . . .	421
14.4	O algoritmo retropropagação ( <i>backpropagation</i> ) . . . . .	423
14.5	Aprendizado profundo ( <i>Deep learning</i> ) . . . . .	430
14.6	Notas de capítulo . . . . .	431
14.7	Exercícios . . . . .	433
	<b>Apêndices</b>	<b>437</b>
<b>A</b>	<b>Otimização numérica</b>	<b>437</b>
A.1	Introdução . . . . .	437
A.2	O método de Newton-Raphson . . . . .	440
A.3	O método <i>scoring</i> . . . . .	442
A.4	O método de Gauss-Newton . . . . .	442
A.5	Métodos Quase-Newton . . . . .	444
A.6	Aspectos computacionais . . . . .	445
A.7	Notas de capítulo . . . . .	449
A.8	Exercícios . . . . .	450
<b>B</b>	<b>Noções de simulação</b>	<b>453</b>
B.1	Introdução . . . . .	453
B.2	Método Monte Carlo . . . . .	456
B.3	Simulação de variáveis discretas . . . . .	457
B.4	Simulação de variáveis contínuas . . . . .	459
B.5	Simulação de vetores aleatórios . . . . .	464
B.6	Métodos de reamostragem . . . . .	467
B.6.1	Amostragem por aceitação-rejeição . . . . .	468

B.6.2	Reamostragem ponderada . . . . .	470
B.7	Notas de capítulo . . . . .	472
B.8	Exercícios . . . . .	476
<b>C</b>	<b>Algoritmos para dados aumentados</b>	<b>479</b>
C.1	Introdução . . . . .	479
C.2	O algoritmo EM . . . . .	480
C.3	O algoritmo EM Monte Carlo . . . . .	485
C.4	Cálculo de erros padrões . . . . .	486
C.5	O Algoritmo de dados aumentados . . . . .	487
C.6	Exercícios . . . . .	489
	<b>Referências</b>	<b>491</b>
	<b>Índice Remissivo</b>	<b>499</b>





---

# Prefácio

Com a ampla divulgação de uma “nova” área de trabalho conhecida como Ciência de Dados (*Data Science*), muitas universidades estrangeiras criaram programas para o seu ensino, primeiramente no formato de MBA e em seguida como mestrados regulares. Atualmente esses programas incluem doutorado e até mesmo graduação. Surpreendentemente, esses programas foram introduzidos em escolas de Engenharia, Economia e, em vários casos, em escolas especialmente criadas para abrigar o “novo” domínio mas não em Departamentos de Estatística. De certa forma, muitos estatísticos sentiram-se surpreendidos e imaginaram-se diante de algo totalmente diferente do seu ofício. No entanto, uma visão mais crítica mostra que Ciência de Dados consiste principalmente na aplicação de algumas técnicas estatísticas a problemas que exigem grande capacidade computacional. Muitos modelos empregados nesse “novo” campo estavam disponíveis (e esquecidos) na literatura estatística há décadas. Esses modelos não vinham sendo aplicados em grande escala em virtude de limitações computacionais. Árvores de decisão, por exemplo, amplamente utilizadas em Ciência de Dados, foram introduzidas na década de 1980. Outro tópico, conhecido como Algoritmos de Suporte Vetorial (*Support Vector Machines*) que não fazia parte da metodologia estudada por estatísticos, por necessitar de grande capacidade computacional para sua aplicação, está disponível na literatura desde a década de 1990.

Hoje, programas de MBA e cursos de extensão em Ciência de Dados têm surgido no Brasil e atualmente, no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP) estuda-se a possibilidade de criar um Mestrado em Estatística com ênfase em Ciência de Dados. A maior dificuldade é encontrar professores interessados em se readequar a esse novo paradigma nos vários departamentos de Estatística existentes no país.

Originalmente, pretendíamos escrever um texto sobre Análise Exploratória de Dados para utilização na disciplina de Estatística Descritiva, ministrada no bacharelado em Estatística do IME-USP. Tendo em vista as considerações acima, decidimos ampliar o escopo da obra para incluir tópicos que normalmente não são abordados nos cursos de graduação e pós-graduação em Estatística. Desta forma, além de apresentar fundamentos de Análise Exploratória de Dados (extremamente importantes para quem

pretende se aventurar em Ciência de Dados), o objetivo do texto inclui o preenchimento de uma lacuna na formação de alunos de graduação e pós-graduação em Estatística proveniente da falta de exposição a tópicos que envolvem a interação entre Estatística e Computação. Num contexto que resume as principais aplicações de Ciência de Dados, ou seja, de previsão, classificação, redução da dimensionalidade e agrupamento, apresentamos as ideias que fundamentam os algoritmos de suporte vetorial, árvores de decisão, florestas aleatórias e redes neurais. A exposição é focada em diversos exemplos e os detalhes mais técnicos são apresentados em notas de capítulo.

Embora sejam tópicos que tangenciam os métodos apresentados no texto, mas que são amplamente utilizados no ajuste de modelos estatísticos, incluímos apêndices com conceitos básicos de simulação e otimização.

Em resumo, o texto pode ser útil para diferentes disciplinas de graduação e pós-graduação em Estatística assim como para profissionais de diferentes áreas que tenham interesse em conhecer os fundamentos estatísticos da Ciência de Dados.

São Paulo, abril de 2021

Os autores

# Estatística, Ciência de Dados e Megadados

Statistical learning theory does not belong to any specific branch of science: it has its own goals, its own paradigm, and its own techniques. Statisticians (who have their own paradigm) never considered this theory as part of Statistics.

V. Vapnik

## 1.1 Introdução

Atualmente, os termos *Data Science* (**Ciência de Dados**) e *Big Data* (**Megadados**)<sup>1</sup> são utilizados em profusão, como se envolvessem conceitos novos, distintos daqueles com que os estatísticos lidam há cerca de dois séculos. Na década de 1980, numa palestra na Universidade de Michigan, EUA, C.F. Jeff Wu já sugeria que se adotassem os rótulos *Statistical Data Science*, ou simplesmente, *Data Science*, em lugar de *Statistics*, para dar maior visibilidade ao trabalho dos estatísticos. Talvez seja Tukey (1962, 1977), sob a denominação *Exploratory Data Analysis* (**Análise Exploratória de Dados**), o primeiro a chamar a atenção para o que hoje é conhecido como Ciência de Dados, sugerindo que se desse mais ênfase ao uso de tabelas, gráficos e outros dispositivos para uma análise preliminar de dados, antes que se passasse a uma **análise confirmatória**, que seria a **inferência estatística**. Outros autores, como Chambers (1993), Breiman (2001) e Cleveland (1985, 1993, 2001), também enfatizaram a preparação, apresentação e descrição dos dados como atividades que devem preceder a modelagem ou a inferência.

---

<sup>1</sup>Para esclarecimento do significado dos termos cunhados em inglês, optamos pela tradução oriunda do **Glossário Inglês-Português de Estatística** produzido pela Associação Brasileira de Estatística e Sociedade Portuguesa de Estatística, disponível em <http://glossario.spestatistica.pt/>. As exceções são as expressões para as quais não há uma tradução oficial (*boxplot*, por exemplo) ou acrônimos usualmente utilizadas por pacotes computacionais (MSE, de *Mean Squared Error*, por exemplo).

Basta uma procura simples na *internet* para identificar novos centros de Ciência de Dados em várias universidades ao redor do mundo, com programas de mestrado, doutorado e mesmo de graduação. O interessante é que muitos desses programas estão alojados em escolas de Engenharia, Bioestatística, Ciência da Computação, Administração, Economia etc., e não em departamentos de Estatística. Paradoxalmente, há estatísticos que acham que Estatística é a parte menos importante de Ciência de Dados! Certamente isso é um equívoco. Como ressalta Donoho (2017), se uma das principais características dessa área é analisar grandes conjuntos de dados (megadados), há mais de 200 anos estatísticos têm se preocupado com a análise de vastos conjuntos de dados provenientes de censos, coleta de informações meteorológicas, observação de séries de índices financeiros etc., que têm essa característica.

Outro equívoco consiste em imaginar que a Estatística tradicional, seja ela frequentista ou bayesiana, trata somente de pequenos volumes de dados, conhecidos como **microdados** (*small data*). Essa interpretação errônea vem do fato de que muitos livros didáticos incluem conjuntos de dados de pequeno ou médio porte para permitir que as técnicas de análise apresentadas possam ser aplicadas pelos leitores, mesmo utilizando calculadoras, planilhas de cálculo ou pacotes estatísticos. Nada impede que esses métodos sejam aplicados a grandes volumes de dados a não ser pelas inerentes dificuldades computacionais. Talvez seja este aspecto de complexidade computacional, aquele que mascara os demais componentes daquilo que se entende por Ciência de Dados, em que, na maioria dos casos, o interesse é dirigido para o desenvolvimento de algoritmos cuja finalidade é “aprender” a partir dos dados, muitas vezes subestimando as características estatísticas.

Em particular, Efron and Hastie (2016) ressaltam que tanto a teoria bayesiana quanto a frequentista têm em comum duas características: a **algorítmica** e a **inferencial**. Como exemplo, citam o caso da média amostral de um conjunto de dados  $x_1, \dots, x_n$ , como **estimador** da média  $\mu$  de uma população da qual se supõe que a amostra tenha sido obtida. O algoritmo para cálculo do estimador é

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (1.1)$$

Esse algoritmo, no entanto, não contempla uma questão importante, que é saber quão acurado e preciso é este estimador. Admitindo-se que a amostra tenha sido colhida segundo um procedimento adequado, a metodologia estatística permite mostrar que  $E(\bar{x}) = \mu$ , ou seja, que o estimador  $\bar{x}$  é **não enviesado** e que o seu **erro padrão** é

$$\text{ep} = \left[ \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right]^{1/2}, \quad (1.2)$$

o que implica a sua consistência e estabelece as bases para uma inferência estatística (frequentista) adequada. Em resumo, a utilização da média amos-

tral como estimador não pode prescindir de uma avaliação estatística. Esses autores também mencionam que:

*Optimality theory, both for estimating and for testing, anchored statistical practice in the twentieth century. The larger datasets and more complicated inferential questions of the current era have strained the capabilities of that theory. Computer-age statistical inference, as we will see, often displays an unsettling ad hoc character. Perhaps some contemporary Fishers and Neymans will provide us with a more capacious optimality theory equal to the challenges of current practice, but for now that is only a hope.*

Blei and Smyth (2017) discutem as relações entre Estatística e Ciência de Dados sob três perspectivas: estatística, computacional e humana. Segundo os autores, Ciência de Dados é uma filha da Estatística e da Ciência da Computação. A Estatística serviria à Ciência de Dados guiando a coleta e análise de dados complexos; a Ciência da Computação, desenvolvendo algoritmos que, por exemplo, distribuem conjuntos enormes de dados por múltiplos processadores (proporcionando velocidade de cálculo) ou armazenando-os adequadamente em equipamentos com grande capacidade de memória. Sob a perspectiva humana, a Ciência de Dados contempla modelos estatísticos e métodos computacionais para resolver problemas específicos de outras disciplinas, entender o domínio desses problemas, decidir quais dados obter, como processá-los, explorá-los e visualizá-los, selecionar um modelo estatístico e métodos computacionais apropriados, além de comunicar os resultados da análise de uma forma inteligível para aqueles que propuseram os problemas.

Donoho (2017) discute várias **memes** (uma ideia ou símbolo transmitido pelas chamadas **mídias sociais**) sobre Megadados e Ciência de Dados. Por exemplo, sobre a *Big Data Meme*, diz que se pode rejeitar o termo megadados como um critério para uma distinção séria entre Estatística e Ciência de Dados, o que está de acordo com o que dissemos acima sobre análise de dados de censos e o fato de pesquisadores na área de inferência estatística terem buscado o entendimento científico de megadados por décadas.

Um dos aspectos tradicionalmente negligenciados por estatísticos é aquele em que os dados têm natureza não ortodoxas como imagens, sons etc. Nesse caso, algoritmos computacionais são essenciais para seu tratamento que, por sua vez, não pode prescindir do componente estatístico.

Alguns termos muito utilizados hoje em dia são *Statistical Learning* (**Aprendizado com Estatística**) e *Machine Learning* (**Aprendizado com Máquina ou Automático**). Esses termos estão associados à utilização de modelos estatísticos acoplados a algoritmos computacionais desenvolvidos para extrair informação de conjuntos de dados contendo, em geral, muitas unidades amostrais e muitas variáveis.

## 1.2 Aprendizado com Estatística

O que hoje se entende como aprendizado com Estatística envolve duas classes de técnicas, denominadas **aprendizado supervisionado** e **aprendizado não supervisionado**.

O **aprendizado supervisionado** está relacionado com metodologia desenvolvida essencialmente para **previsão** e **classificação**. No âmbito de previsão, o objetivo é utilizar **variáveis preditoras** (sexo, classe social, renda, por exemplo) observadas em várias **unidades** (clientes de um banco, por exemplo) para “adivinhar” valores de uma **variável resposta** numérica (saldo médio, por exemplo) de novas unidades. O problema de classificação consiste em usar as variáveis preditoras para indicar em que categorias de uma variável resposta qualitativa (bons e maus pagadores, por exemplo) as novas unidades são classificadas.

Sob um ponto de vista mais amplo, além desses objetivos, a Estatística tradicional adiciona metodologia direcionada ao entendimento das relações entre as características dos dados disponíveis e aqueles de uma população da qual se supõe que os dados foram obtidos. Essa metodologia mais ampla é o que se entende por **Inferência Estatística**.

No **aprendizado não supervisionado**, dispomos apenas um conjunto de variáveis, sem distinção entre preditoras e respostas e o objetivo é descrever **associações** e **padrões** entre essas variáveis, **agrupá-las** com o objetivo identificar características comuns a conjuntos de unidades de investigação ou desenvolver métodos para combiná-las e assim **reduzir sua dimensionalidade**. Essas combinações de variáveis podem ser utilizadas como novas variáveis preditoras em problemas de previsão ou classificação.

## 1.3 Aprendizado automático

**Inteligência Artificial** também é um rótulo que aparece frequentemente na mídia escrita e falada e que tem gerado amplo interesse para analistas de dados. Esse termo suscita questões do tipo: no futuro computadores tornar-se-ão inteligentes e a raça humana será substituída por eles? Perderemos nossos empregos, porque seremos substituídos por robôs inteligentes? Pelo menos até o presente esses receios são infundados. Nesse contexto, veja Jordan (2019). Segundo esse autor, o que é hoje rotulado como inteligência artificial, nada mais é do que aquilo que chamamos de aprendizado automático (*machine learning*). O trecho abaixo é extraído do artigo mencionado.

*Artificial Intelligence is the mantra of the current era. The phrase is intoned by technologists, academicians, journalists, and venture capitalists alike. As with many phrases that cross over from technical academic fields into general circulation, there is significant misunderstanding accompanying use of the phrase. However, this is not the classical case of the public not understanding the scientists— here the scientists are often as befuddled as*

*the public. The idea that our era is somehow seeing the emergence of an intelligence in silicon that rivals our own entertains all of us, enthralling us and frightening us in equal measure. And, unfortunately, it distracts us.*

O autor distingui três tipos de inteligência artificial:

- i) **Inteligência artificial imitativa da humana** (*Human-imitative artificial intelligence*), que se refere à noção que a entidade inteligente deva se parecer como nós, fisicamente ou mentalmente.
- ii) **Aumento de inteligência** (*Intelligence augmentation*), segundo a qual a análise de dados e computação são usados para criar serviços que aumentam a inteligência e criatividade humanas.
- iii) **Infraestrutura inteligente** (*Intelligent infrastructure*), referindo-se à vasta rede de dados, entidades físicas e aparato computacional que dão suporte para tornar o ambiente humano mais seguro e interessante (*smart TV, smart phone, smart house*).

Acredita-se que o artigo de Turing (1950) seja o primeiro a tratar do tema. A primeira frase do artigo diz:

*I propose to consider the question, “Can machines think?”*

Segue-se discussão sobre o que se entende por “máquina”, por “pensar” e por um jogo, chamado “jogo da imitação”. Turing também discute condições para considerar uma máquina inteligente, que podem ser avaliadas pelo teste de Turing (*Turing test*). A primeira página do artigo está na Nota de Capítulo 1.

O tema foi tratado a seguir por McCarthy et al. (1955), na forma de uma proposta para um projeto de pesquisa no Dartmouth College. Cópia da primeira página do original encontra-se na Nota de Capítulo 2. Entre os signatários, encontra-se Shannon, precursor da Teoria da Informação.

De modo informal, a inteligência artificial está relacionada com um esforço para automatizar tarefas intelectuais usualmente realizadas por seres humanos (Chollet, 2018) e conseqüentemente, intimamente ligada ao desenvolvimento da computação (ou programação de computadores). Até a década de 1980, a programação clássica era apenas baseada em um sistema computacional (um computador ou um conglomerado (*cluster*) de computadores) ao qual se alimentavam dados e uma regra de cálculo para se obter uma resposta. Por exemplo, num problema de regressão a ser resolvido por meio do método de mínimos quadrados para obtenção dos estimadores dos parâmetros, a regra de cálculo (ou algoritmo) pode ser programada em alguma linguagem (Fortran, C, R, Python etc.). A maioria dos pacotes estatísticos existentes funciona dessa maneira.

A partir da década de 1990, a introdução do conceito de aprendizado automático criou um novo paradigma para analisar dados oriundos de reconhecimento de imagens, voz, escrita etc. Problemas dessa natureza são

difícilmente solucionáveis sem o recente avanço na capacidade computacional. A ideia subjacente é **treinar** um sistema computacional programando-o para ajustar diferentes modelos por meio dos algoritmos associados (muitas vezes bastante complexos) repetidamente na análise de um conjunto de dados. Nesse processo, diferentes modelos são ajustados a conjuntos de dados (**dados de treinamento**), aplicados a um conjunto de **dados de validação** e comparados segundo algum critério de desempenho com o objetivo de escolher o melhor para prever ou classificar futuras unidades de observação.

Convém ressaltar que o objetivo do aprendizado automático não é o mesmo daquele considerado na análise de regressão usual, em que se pretende entender como cada variável preditora está associada com a variável resposta. O objetivo do aprendizado automático é selecionar o modelo que produz melhores previsões, mesmo que as variáveis selecionadas com essa finalidade não sejam aquelas consideradas numa análise padrão.

Quando esses dois conjuntos de dados (treinamento e validação) não estão definidos *a priori*, o que é mais comum, costuma-se dividir o conjunto disponível em dois, sendo um deles destinado ao treinamento do sistema computacional com o outro servindo para validação. Calcula-se então alguma medida do erro de previsão obtido ao se aplicar o resultado do ajuste do modelo obtido com os dados de treinamento aos dados de validação. Essa subdivisão (em conjuntos de treinamento e de validação diferentes) é repetida várias vezes, ajustando o modelo a cada conjunto de dados de treinamento, utilizando os resultados para previsão com os dados de validação e calculando a medida adotada para o erro de previsão. A média dessa medida é utilizada como avaliação do desempenho do modelo proposto. Para comparar diferentes modelos, repete-se o processo com cada um deles e aquele que produzir a menor média do erro de previsão é o modelo a ser selecionado. Esse processo é conhecido como **validação cruzada** (ver a Nota de Capítulo 2 no Capítulo 8). O modelo selecionado deve ser ajustado ao conjunto de dados completo (treinamento + validação) para se obter o ajuste (estimativas dos coeficientes de um modelo de regressão, por exemplo) que será empregado para previsão de novos dados (consistindo apenas dos valores das variáveis predictoras).

## 1.4 Uma cronologia do desenvolvimento da Estatística

Embora a terminologia “aprendizado com Estatística” seja recente, a maioria dos conceitos subjacentes foi desenvolvida a partir do século 19. Essencialmente, aprendizado com Estatística e aprendizado automático tratam dos mesmos tópicos, mas utilizaremos o primeiro quando os métodos do segundo são tratados com técnicas estatísticas apropriadas.



### 1.4.1 Probabilidades

As origens da teoria de probabilidades remontam a 1654, com Fermat (1601-1665) e Pascal (1632-1662), que trataram de jogos de dados, baralho etc. Huygens (1629-1695) escreveu o primeiro livro sobre probabilidades em 1657. A primeira versão do Teorema de Bayes (Bayes, 1702-1761) foi publicada em 1763.

### 1.4.2 Estatística

Gauss (1777-1856) propôs o **método de mínimos quadrados** na última década do Século 18 (1795) e usou-o regularmente em cálculos astronômicos depois de 1801. Foi Legendre (1752-1833), todavia, quem primeiro publicou, sem justificção, detalhes sobre o método no apêndice de seu livro “Nouvelles Méthodes pour la Détermination des Orbites des Comètes”. Gauss (1809) apresentou a justificativa probabilística do método em “The Theory of the Motion of Heavenly Bodies”. Basicamente, eles implementaram o que é hoje chamado de **Regressão Linear**.

Laplace (1749-1827) desenvolveu o Teorema de Bayes independentemente, em 1774. Em 1812 e 1814 deu a interpretação bayesiana para probabilidade e fez aplicações científicas e práticas. Há autores que julgam que a chamada Inferência Bayesiana dever-se-ia chamar Inferência Laplaciana, devido às suas contribuições na área (lembramos da aproximação de Laplace, que se usava para obter distribuições a posteriori antes do advento de métodos MCMC (*Markov Chain Monte Carlo*) e filtros de partículas). As contribuições de Jeffreys (1939) podem ser consideradas como um reinício da Inferência Bayesiana, juntamente com as obras de de Finetti, Savage e Lindley.

A Inferência Frequentista (testes de hipóteses, estimação, planejamento de experimentos e amostragem) foi iniciada por Fisher (1890-1962) e Neyman (1894-1981). Fisher, em 1936, propôs a técnica de Análise Discriminante Linear e seus dois livros “Statistical Methods for Research Workers”, de 1925 e “The Design of Experiments”, de 1935, são marcos dessa teoria. Segundo Stigler (1990), o artigo de Fisher (1922), “On the mathematical foundation of theoretical statistics”, publicado na *Phil. Trans. Royal Society, A* foi o artigo mais influente sobre Teoria Estatística no Século 20. Neyman e Pearson (1933), por sua vez, publicaram os dois artigos fundamentais sobre testes de hipóteses, consubstanciados no excelente livro de Lehmann de 1967.

A partir da década de 1940 começaram a aparecer abordagens alternativas ao modelo de regressão linear, como a **Regressão Logística**, os **Modelos Lineares Generalizados** (Nelder e Wedderburn, 1970), além dos **Modelos Aditivos Generalizados** (Hastie e Tibshirani, 1986).

Em 1969, Efron introduz a técnica **Bootstrap** e em 1970, Hoerl e Kennard introduzem a **Regressão em crista** (*Ridge regression*). Até o final da década de 1970, os métodos lineares predominaram. A partir da década de 1980, os avanços computacionais possibilitaram a aplicação de métodos não lineares, como o **CART** (*Classification and Regression Trees*) conside-

rado em Breiman et al., (1984). Tibshirani (1996) introduz o método de regularização **LASSO**, que juntamente com os métodos **Ridge**, **Elastic Net** e outras extensões passam a ser usados em conjunção com modelos de regressão, por exemplo, com o intuito de prevenir o fenômeno de sobreajuste (*overfitting*), mas que também funcionam como métodos de seleção de modelos.

### 1.4.3 Estatística e computação

Os avanços no aprendizado com Estatística estão diretamente relacionados com avanços na área computacional. Até 1960, os métodos estatísticos precisavam ser implementados em máquinas de calcular manuais ou elétricas. Entre 1960 e 1980, apareceram as máquinas de calcular eletrônicas e os computadores de grande porte, como o IBM 1620, CDC 360, VAX etc., que trabalhavam com cartões perfurados e discos magnéticos. A linguagem FORTRAN predominava.

A partir de 1980 apareceram os computadores pessoais, supercomputadores, computação paralela, computação na nuvem (*cloud computation*), linguagens C, C+, S e os pacotes estatísticos SPSS, BMDP, SAS, SPlus (que utiliza a linguagem S, desenvolvida por Chambers, do Bell Labs), MatLab etc. Em 1984 surgiu a linguagem R (que na realidade é basicamente a linguagem S com algumas modificações) e o repositório CRAN, de onde pacotes para análises estatísticas podem ser obtidos livremente; essa linguagem passou a ser a linguagem preferida dos estatísticos.

Métodos de aprendizado com Estatística não usualmente considerados em programas de graduação e pós-graduação em Estatística surgiram recentemente (na realidade, não tão recentemente; veja a citação de Vapnik no início desse capítulo), estão atraindo a atenção de um público mais amplo e são englobados no que hoje chamamos de Ciência de Dados. Tais métodos incluem **Algoritmos de suporte vetorial** (*Support Vector Machines*), **Árvores de decisão** (*Decision Trees*), **Florestas aleatórias** (*Random Forests*), **Bagging**, **Boosting** etc. Outros métodos mais tradicionais que voltaram a estar em evidência, como **Redução da Dimensionalidade** (incluindo **Análise de Componentes Principais**, **Análise Fatorial**, **Análise de Componentes Independentes**) e **Análise de Agrupamentos** já fazem parte de métodos estudados em cursos de Estatística.

## 1.5 Notação e tipos de dados

Introduzimos, agora, a notação usada no livro. Por exemplo, denotamos por **X**, uma matriz com dimensão  $n \times p$ , contendo as **variáveis preditoras** ou **explicativas**;  $n$  indica o número de unidades de observação ou amostrais

(indivíduos, por exemplo) e  $p$  o número de variáveis. Especificamente,

$$\mathbf{X} = [x_{ij}] = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix}.$$

As colunas de  $\mathbf{X}$ , vetores com dimensão  $n \times 1$  são denotadas por  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p$ . As linhas de  $\mathbf{X}$ , vetores com dimensão  $p \times 1$  são denotadas por  $\mathbf{x}_1^*, \dots, \mathbf{x}_n^*$ .

Então

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p] = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^{*\top} \\ \mathbf{x}_2^{*\top} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^{*\top} \end{bmatrix}$$

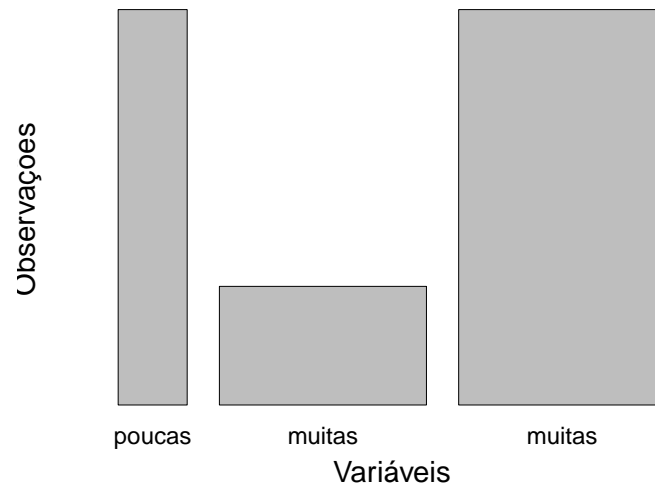
em que  $\mathbf{x}^\top$  denota o vetor  $\mathbf{x}$  transposto.

Denotamos por  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^\top$  o vetor cujos elementos são os valores da **variável resposta**. No caso de análise estatística supervisionada,  $y_i$  é um valor de uma variável numérica e corresponde ao **rótulo** da  $i$ -ésima classe, num problema de classificação. Consequentemente os dados são os pares  $\{(\mathbf{x}_1, y_1), \dots, (\mathbf{x}_n, y_n)\}$ .

Uma das características que têm sido objeto de discussão em Ciência de Dados está relacionada com o volume de dados, especialmente quando se trata dos chamados megadados (*big data*). Nesse contexto, as seguintes estruturas podem ser consideradas:

- a) grande número de unidades amostrais e pequeno número de variáveis,  $n \gg p$ ;
- b) pequeno número de unidades amostrais e grande número de variáveis,  $p \gg n$ ;
- c) grande número de unidades amostrais e grande número de variáveis,  $n$  e  $p$  grandes.

Uma representação pictórica dessas estruturas de dados está apresentada na Figura 1.1.



**Figura 1.1:** Estruturas de dados

Quando  $n \ll p$ , os dados têm **alta dimensão** (*high dimension*) e requerem procedimentos especiais. Por outro lado, megadados podem ser classificados como:

- a) **Dados estruturados:** em que a informação se ajusta às estruturas usuais de bases de dados, relativamente fáceis de armazenar e analisar. Exemplos usuais de dados numéricos ou não, que podem ser dispostos em **matrizes de dados**.
- b) **Dados não estruturados:** tudo o que não se encaixa no item anterior, como arquivos de textos, páginas da *web*, *emails*, mídias sociais etc.

Megadados implicam megamodelos, que contêm um grande número de parâmetros a serem estimados, como em modelos de regressão múltipla em que o número de variáveis ( $p$ ) é grande. O ajuste de modelos lineares a dados de alta dimensão pode ser tratado por meio técnicas de redução da dimensionalidade, regularização ou métodos bayesianos. Para modelos não lineares, árvores de decisão e redes neurais são técnicas mais adequadas.

## 1.6 Paradigmas para o aprendizado com Estatística

### 1.6.1 Aprendizado supervisionado

#### Previsão

Dados o vetor  $\mathbf{y}$  com os valores da variável resposta e a matriz  $\mathbf{X}$  com os correspondentes valores das variáveis preditoras, o modelo de regressão

em **Aprendizado supervisionado** tem a forma

$$y_i = f(\mathbf{x}_i) + e_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.3)$$

com  $E(e_i) = 0$  e  $f$  denotando uma função desconhecida, chamada de **informação sistemática**. O objetivo do aprendizado com Estatística é encontrar métodos para estimar  $f$  e usar o modelo (1.3) para fazer previsões ou em alguns casos, inferência sobre a população de onde os dados foram extraídos. A **previsão** para  $y_i$  é  $\hat{y}_i = \hat{f}(\mathbf{x}_i)$  em que  $\hat{f}$  é a estimativa da função  $f$ , chamada de **previsor**. A acurácia de  $\hat{y}$  como previsor de  $\mathbf{y}$  depende dos seguintes dois tipos de erros (James et al., 2017):

- a) **Erro redutível**, introduzido pelo previsor de  $f$ ; assim chamado porque podemos melhorar a acurácia de  $\hat{f}$  usando técnicas de Aprendizado com Estatística mais apropriadas.
- b) **Erro irredutível**, que depende de  $e_i$  e não pode ser previsto por  $\mathbf{X}$ , mesmo usando o melhor previsor de  $f$ .

A acurácia do previsor  $\hat{f}$  é definida como

$$\begin{aligned} E(y_i - \hat{y}_i)^2 &= E[f(\mathbf{x}_i) + e_i - \hat{f}(\mathbf{x}_i)]^2 \\ &= E[f(\mathbf{x}_i) - \hat{f}(\mathbf{x}_i)]^2 + \text{Var}(e_i), \end{aligned} \quad (1.4)$$

para  $i = 1, \dots, n$ . O primeiro termo do segundo membro de (1.4) mede o efeito do erro redutível e o segundo termo, o efeito do erro irredutível. Consequentemente, o objetivo é minimizar o primeiro.

Para estimar  $f$  podemos usar **métodos paramétricos** ou **métodos não paramétricos**.

No primeiro caso, fazemos alguma suposição sobre a forma de  $f$  como no modelo de regressão múltipla usual com  $p$  variáveis. Nesse caso, o problema é mais simples, pois temos que estimar um número finito de parâmetros. Selecionado o modelo, devemos ajustá-lo aos dados de treinamento, ou seja, devemos **treinar** o modelo. No caso de modelos de regressão, o método mais usado na estimação é o de **Mínimos Quadrados** mas há outros métodos disponíveis, como os **Algoritmos de Suporte Vetorial** (*Support Vector Machines* - SVM) ou **Árvores de Decisão**. O ajuste de um modelo de regressão por mínimos quadrados, por exemplo, pode ser pobre, como no Exemplo 6.7 do Capítulo 6 (veja a Figura 6.23). Nesse caso, pode-se tentar ajustar modelos mais flexíveis, escolhendo outras formas funcionais para  $f$ , incluindo aí modelos não lineares. Todavia, modelos mais flexíveis podem envolver a estimação de um grande número de parâmetros, o que pode gerar um problema de sobreajuste (*overfitting*).

No segundo caso, não fazemos nenhuma hipótese sobre a forma funcional de  $f$  e como o problema envolve a estimação de grande número de parâmetros, necessitamos um número grande de observações para obter estimadores de  $f$  com boa acurácia. Vários métodos podem ser usados com essa finalidade, dentre os quais destacamos aqueles que utilizam:

- kernels;
- polinômios locais (*e.g.*, Lowess);
- splines;
- polinômios ortogonais (*e.g.*, Chebyshev);
- outras bases ortogonais (*e.g.*, Fourier, ondaletas).

Métodos menos flexíveis (*e.g.*, regressão linear) ou mais restritivos em geral são menos acurados e mais fáceis de interpretar. Por outro lado, métodos mais flexíveis (*e.g.*, *splines*) são mais acurados e mais difíceis de interpretar. Para cada conjunto de dados, um método pode ser preferível a outros, dependendo do objetivo da análise. A escolha do método talvez seja a parte mais difícil do aprendizado com Estatística.

No caso de modelos de regressão, a medida mais usada para a avaliação da acurácia do modelo é o **Erro Quadrático Médio** (*Mean Squared Error*, *MSE*), definido por

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(y_i - \hat{f}(\mathbf{x}_i))]^2, \quad (1.5)$$

em que  $\hat{f}(\mathbf{x}_i)$  é o valor predito da resposta para a  $i$ -ésima observação. Outra medida comumente utilizada para avaliar o ajuste de modelos de previsão é a **raiz quadrada** do erro quadrático médio (*Root Mean Squared Error*, *RMSE*). O erro quadrático médio calculado no conjunto de treinamento que produz o preditor  $\hat{f}$  é chamado **erro quadrático médio de treinamento**. Em geral, estamos mais interessados na acurácia do ajuste para os dados de validação e nesse caso podemos calcular o **erro quadrático médio de validação**,

$$\text{Média}[(y_0 - \hat{f}(\mathbf{x}_0))]^2, \quad (1.6)$$

que é o erro de previsão quadrático médio para as observações do conjunto de dados de validação, em que o elemento típico é denotado por  $(\mathbf{x}_0, y_0)$ . A ideia é ajustar diferentes modelos aos dados de treinamento, obtendo diferentes preditores  $\hat{f}$  por meio da minimização de (1.5), calcular o correspondente erro quadrático médio no conjunto de validação via (1.6) e escolher o modelo para o qual esse valor é mínimo. Muitas vezes, usa-se **validação cruzada** em que o único conjunto de dados disponível é repetidamente dividido em dois subconjuntos, um deles servindo para treinamento e o outro para validação (ver Nota de Capítulo 1 do Capítulo 8).

Para os dados do conjunto de validação,  $(\mathbf{x}_0, y_0)$ ,

$$E[y_0 - \hat{f}(\mathbf{x}_0)]^2 = \text{Var}[\hat{f}(\mathbf{x}_0)] + [\text{Vies}(\hat{f}(\mathbf{x}_0))]^2 + \text{Var}(e_0). \quad (1.7)$$

Em resumo, procuramos selecionar o modelo que produza simultaneamente baixo viés e baixa variância, que atuam em sentidos opostos. Na prática, podemos estimar (1.7) para os dados do conjunto de validação por meio de (1.6). Também é possível estimar  $\text{Var}[\hat{f}(\mathbf{x}_0)]$ , mas como  $f$  é desconhecida

não há como estimar o viés de  $\hat{f}(\mathbf{x}_0)$  dado que  $\text{Var}(e_0)$  também não é conhecida. Em geral, métodos de aprendizado com Estatística mais flexíveis têm viés baixo e variância grande. Na maioria dos casos, o erro quadrático médio de treinamento é menor que o erro quadrático médio de validação e o gráfico desses valores de validação em função do número de parâmetros de diferentes modelos, em geral, apresenta uma forma de U, resultante da competição entre viés e variância.

### Classificação

Problemas de **classificação** são aqueles em que as respostas  $y_1, \dots, y_n$  são qualitativas. Formalmente, no caso de duas classes, seja  $(\mathbf{x}, y)$ , com  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$  e  $y \in \{-1, 1\}$ . Um **classificador** é uma função  $g: \mathbb{R}^p \rightarrow \{-1, 1\}$  e a **função erro** ou **risco** é a probabilidade de erro,  $L(g) = P\{g(X) \neq Y\}$ .

Obtendo-se um estimador de  $g$ , digamos  $\hat{g}$ , sua acurácia pode ser medida pelo estimador de  $L(g)$ , chamado de **taxa de erros de treinamento**, que é a proporção de erros gerados pela aplicação do classificador  $\hat{g}$  às observações do conjunto de treinamento, ou seja,

$$\hat{L}(\hat{g}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(y_i \neq \hat{y}_i), \quad (1.8)$$

O interesse está na **taxa de erros de validação**

$$\text{Média}[I(y_0 \neq \hat{y}_0)], \quad (1.9)$$

para as observações do conjunto de validação  $(\mathbf{x}_0, y_0)$ . Um bom classificador tem a taxa de erros de classificação (1.9) pequena. Pode-se provar que (1.9) é minimizado, em média, por um classificador que associa cada observação à classe mais provável, dados os preditores; ou seja, por aquele que maximiza

$$P(y = j | \mathbf{x} = \mathbf{x}_0). \quad (1.10)$$

Tal classificador é chamado de **classificador de Bayes**.

No caso de duas classes, uma alternativa é classificar a observação de validação na classe -1 se  $P(y = -1 | \mathbf{x} = \mathbf{x}_0) > 0,5$  ou na classe 1, em caso contrário. O classificador de Bayes produz a menor taxa de erro, dada por  $1 - \max_j P(y = j | \mathbf{x} = \mathbf{x}_0)$ ,  $j = 1, -1$ . A taxa de erro de Bayes global é  $1 - E[\max_j P(y = j | \mathbf{x} = \mathbf{x}_0)]$ , em que  $E(\cdot)$  é calculada sobre todos os valores de  $\mathbf{x}$ . O classificador de Bayes não pode ser calculado na prática, pois não temos conhecimento da distribuição condicional de  $y$ , dado  $\mathbf{x}$ . Uma alternativa é estimar essa distribuição condicional. Detalhes serão apresentados no Capítulo 8.

O classificador do  **$K$ -ésimo vizinho mais próximo** ( *$K$ -nearest neighbors*, *KNN*) estima tal distribuição por meio do seguinte algoritmo:

- i) Escolha  $K > 0$  inteiro e uma observação teste  $\mathbf{x}_0$ .
- ii) Identifique os  $K$  pontos do conjunto de treinamento mais próximos de  $\mathbf{x}_0$ ; chame-os de  $\mathcal{N}$ .

iii) Estime a probabilidade condicional da classe  $j$  por meio de

$$P(y = j | \mathbf{x} = \mathbf{x}_0) = \frac{1}{K} \sum_{i \in \mathcal{N}} I(y_i = j).$$

iv) Classifique  $\mathbf{x}_0$  na classe com a maior probabilidade condicional.

A escolha de  $K$  crucial e o resultado depende dessa escolha. Tratamos desse problema no Capítulo 10.

## 1.6.2 Aprendizado não supervisionado

### Análise de agrupamentos

Nesta categoria de técnicas incluímos aquelas cujo objetivo é agrupar os elementos do conjunto de dados segundo com alguma medida de distância entre as variáveis preditoras, de modo que observações de um mesmo grupo tenham uma “pequena” distância entre elas.

Nos casos em que as variáveis preditoras  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  pertencem a um espaço euclidiano  $p$ -dimensional (peso e altura, no caso bidimensional, por exemplo), a distância (euclidiana) definida por

$$d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \sqrt{(x_{i1} - x_{j1})^2 + \dots + (x_{jp} - x_{jp})^2}$$

é utilizada. Casos em que as variáveis preditoras pertencem a espaços não euclidianos (palavras num texto, por exemplo), outras distâncias são consideradas.

Os algoritmos utilizados para a implementação das técnicas de agrupamento podem partir de um único grupo com todos os elementos do conjunto de dados e prosseguir subdividindo-o até que um número pré-fixado de grupos seja obtido ou considerar, inicialmente, cada elemento como um grupo e prosseguir combinando-os até a obtenção do número de grupos desejados.

### Redução de dimensionalidade

O objetivo das técnicas consideradas nessa classe é reduzir a dimensionalidade de observações multivariadas com base em sua estrutura de dependência. Essas técnicas são usualmente aplicadas em conjuntos de dados com um grande número de variáveis e baseiam-se na obtenção de poucos **fatores**, obtidos como funções das variáveis observadas, que conservem, pelo menos aproximadamente, sua estrutura de covariância. Esses poucos fatores podem substituir as variáveis originais em análises subseqüentes, servindo, por exemplo, como variáveis preditoras em modelos de regressão. Por esse motivo, a interpretação dessas novas variáveis é muito importante.

Dentre as técnicas mais utilizadas com essa finalidade, incluímos a **análise de componentes principais** e a **análise de componentes independentes** (ambas proporcionando a redução da dimensionalidade dos dados).



## 1.7 Este livro

Um dos maiores problemas oriundos da disseminação indiscriminada das técnicas utilizadas em Ciência de Dados é a confiança exagerada nos resultados obtidos da aplicação de algoritmos computacionais. Embora sejam essenciais em muitas situações, especialmente com megadados, sua utilização sem o concurso dos princípios do pensamento estatístico, fundamentado nas características de aleatoriedade e variabilidade inerentes a muitos fenômenos, pode gerar conclusões erradas ou não sustentáveis. Também lembramos que o principal componente da Ciência de Dados é um problema em que as questões a serem respondidas estejam claramente especificadas.

Independentemente do volume de dados disponíveis para análise, Ciência de Dados é uma atividade multidisciplinar que envolve

- i) um problema a ser resolvido com questões claramente especificadas;
- ii) um conjunto de dados (seja ele volumoso ou não);
- iii) os meios para sua obtenção;
- iv) sua organização;
- v) a especificação do problema original em termos das variáveis desse conjunto de dados;
- vi) a descrição e resumo dos dados à luz do problema a ser resolvido;
- vii) a escolha das técnicas estatísticas apropriadas para a resolução desse problema;
- viii) os algoritmos computacionais necessários para a implementação dessas técnicas;
- ix) a apresentação dos resultados.

Obviamente, a análise de problemas mais simples pode ser conduzida por um estatístico (sempre em interação com investigadores da área em que o problema se insere). Em problemas mais complexos, especialmente aqueles com grandes conjuntos de dados que possivelmente contenham imagens, sons etc., só **uma equipe** com profissionais de diferentes áreas poderá atacá-los adequadamente. Em particular, essa equipe deve ser formada, pelo menos, por um profissional de alguma área do conhecimento em que o problema a ser resolvido se situa, por um estatístico, por um especialista em banco de dados, por um especialista em algoritmos computacionais e possivelmente por um profissional da área de comunicação. Se por um lado, os aspectos computacionais são imprescindíveis nesse contexto, por outro, uma compreensão dos conceitos básicos de Estatística deve constar da formação de todos os membros da equipe.

A (bem-vinda) popularização das técnicas utilizadas em Ciência de Dados não está isenta de problemas. Nem sempre os profissionais que se aventuram por essa seara têm o conhecimento básico dos métodos estatísticos que fundamentam os algoritmos mais empregados na análise de dados. Nosso objetivo é preencher essa lacuna, apresentando conceitos e métodos da Análise Exploratória de Dados necessários para a análise de dados e indicando como

são empregados nos problemas práticos com que “cientistas de dados” são usualmente desafiados.

Embora muitos tópicos relacionados com Ciência dos Dados sejam abordados neste livro, o foco será na metodologia estatística que envolve a coleta, a organização, o resumo e a análise dos dados. Para um melhor entendimento das técnicas apresentadas, em geral, usamos conjuntos de dados não muito volumosos, de modo que os leitores poderão reanalísá-los usando desde uma calculadora até programas sofisticados. Desde que tenham acesso e aptidão para lidar com *software* adequado, os leitores não terão dificuldades em analisar grandes conjuntos de dados sob as mesmas perspectivas apresentadas no texto.

O Capítulo 2 é dedicado à preparação dos dados, geralmente apresentados de forma inadequada para análise.

Nos Capítulos 3 a 5 dedicamo-nos à discussão de alguns conceitos básicos, como distribuição de frequências, variabilidade e associação entre variáveis, além de métodos de resumo de dados por meio de tabelas e gráficos. Para efeito didático, discutimos separadamente os casos de uma, duas ou mais que duas variáveis.

Técnicas de regressão, essenciais para o entendimento da associação entre uma ou mais variáveis explicativas e uma variável resposta são discutidas no Capítulo 6. Os conceitos subjacentes constituem o cerne do **aprendizado supervisionado**. O Capítulo 7 trata de técnicas de análise de sobrevivência, que essencialmente considera modelos de regressão em que a variável resposta é o tempo até a ocorrência de um evento de interesse.

No Capítulo 8 tratamos de técnicas clássicas utilizadas para classificação e nos Capítulos 9 e 10 consideramos outros métodos que servem tanto para classificação quanto para previsão. No Capítulo 11 apresentamos extensões dos modelos de regressão bastante utilizadas para previsão. Esses quatro capítulos envolvem as técnicas mais empregadas no **aprendizado supervisionado**.

O aprendizado **não supervisionado** é abordado nos Capítulos 12 e 13 em que apresentamos métodos utilizados para agrupar dados e reduzir a dimensão do conjunto de variáveis disponíveis por meio de combinações delas. Neste contexto, não há distinção entre variáveis preditoras e respostas e o objetivo é o entendimento da estrutura de associação entre elas. Com essa finalidade, consideramos análise de agrupamentos, análise de componentes principais, análise de componentes independentes.

Muitos métodos de aprendizado automático são implementados por meios de redes neurais que constituem o tema no Capítulo 14. Conceitos básicos de otimização numérica, simulação e técnicas de dados aumentados são apresentados nos Apêndices A, B e C.

O texto poderá ser utilizado em programas de bacharelado em Estatística (especialmente na disciplina de Estatística Descritiva com os capítulos 1 a 8 e na disciplina de Estatística Aplicada, com a inclusão dos capítulos restantes). Além disso, servirá para “cientistas de dados” que tenham interesse nos aspectos que fundamentam análise de dados.

Embora muitos cálculos necessários para uma análise estatística possam ser concretizados por meio de calculadoras ou planilhas eletrônicas, o recurso a pacotes computacionais é necessário tanto para as análises mais sofisticadas quanto para análises extensas. Neste livro usaremos preferencialmente o repositório de pacotes estatísticos R, obtido livremente em *Comprehensive R Archive Network*, CRAN, no sítio

<http://CRAN.R-project.org>.

Dentre os pacotes estatísticos disponíveis na linguagem R, aqueles mais utilizados neste texto são: `adabag`, `caret`, `cluster`, `e1071`, `forecast`, `ggplot2`, `MASS`, `mgcv`, `nlme`, `randomForests`, `xgboost`. As funções de cada pacote necessárias para a realização das análises serão indicadas ao longo do texto.

Pacotes comerciais alternativos incluem SPlus, Minitab, SAS, MatLab etc.

## 1.8 Conjuntos de dados

Alguns conjuntos de dados analisados são dispostos ao longo do texto; outros são apresentados em planilhas Excel em arquivos disponíveis no formato

<http://www.ime.usp.br/~jmsinger/MorettinSinger/arquivo.xls>

Por exemplo, no *site*

<http://www.ime.usp.br/~jmsinger/MorettinSinger/coronarias.xls>

encontramos uma planilha com dados de um estudo sobre obstrução coronariana; quando pertinentes, detalhes sobre as variáveis observadas no estudo estarão na aba intitulada “descricao”; os dados estão dispostos na aba intitulada “dados”. Conjuntos de dados também poderão ser referidos por meio de seus endereços URL. Quando necessário, indicaremos os *sites* em que se podem obter os dados utilizados nas análises.

Na Tabela 1.1 listamos os principais conjuntos de dados e uma breve descrição de cada um deles.

**Tabela 1.1:** Conjuntos de dados para alguns exemplos e exercícios do livro

Rótulo	Descrição
adesivo	Resistência de adesivos dentários
antracose	Dados sobre depósito de fuligem em pulmões
arvores	Concentração de elementos químicos em cascas de árvores
bezerros	Medida longitudinal de peso de bezerros
ceagfgv	Questionário respondido por 50 alunos da FGV-SP
idades	Dados demográficos de cidades brasileiras
coronarias	Fatores de risco na doença coronariana
disco	Deslocamento do disco temporomandibular
distancia	Distância para distinguir objeto em função da idade
empresa	Dados de funcionários de uma empresa
endometriose	Dados de um estudo sobre endometriose
endometriose2	Dados de um estudo sobre endometriose (1500 pacientes)
entrevista	Comparação intraobservadores em entrevista psicológica
esforco	Respostas de cardíacos em esteira ergométrica
esteira	Medidas obtidas em testes ergométricos (parcial)
figado	Relação entre volume e peso do lobo direito de fígados em transplantes intervivos
figadodiag	Medidas radiológicas e intraoperatórias de alterações anatômicas do fígado
freios	Dados de um estudo de sobrevivência envolvendo pastilhas de freios
hiv	Dados de sobrevivência de pacientes HIV
inibina	Utilização de inibina como marcador de reserva ovariana
lactato	Concentração de lactato de sódio em atletas
manchas	Número de manchas solares
morfina	Dados de um estudo sobre concentração de morfina em cabelos
municipios	Populações dos 30 maiores municípios do Brasil
neonatos	Pesos de recém nascidos
palato	Dados de um estudo sobre efeito de peróxido de hidrogênio na em palatos de sapos
piscina	Dados de um estudo de sobrevivência experimental com ratos
placa	Índice de remoção de placa dentária
poluicao	Concentração de poluentes em São Paulo
precipitacao	Precipitação em Fortaleza, CE, Brasil
producao	Dados hipotéticos de produção de uma empresa
profilaxia	pH da placa bacteriana sob efeito de enxaguatório
regioes	Dados populacionais de estados brasileiros
rehabcardio	Dados sobre reabilitação de pacientes de infartos
rotarod	Tempo com que ratos permanecem em cilindro rotativo
salarios	Salários de profissionais em diferentes países
sondas	Tempos de sobrevivência de pacientes de câncer com diferentes tipos de sondas
suicidios	Frequência de suicídios por enforcamento em São Paulo
temperaturas	Temperaturas mensais em Ubatuba e Cananéia
tipofacial	Classificação de tipos faciais
veiculos	Características de automóveis nacionais e importados
vento	Velocidade do vento no aeroporto de Philadelphia

## 1.9 Notas de capítulo

- 1) Apresentamos, a seguir, a primeira página do artigo de Alan Turing, publicado na revista *Mind*, em 1950.

VOL. LIX. No. 236.]

[October, 1950

**M I N D**  
A QUARTERLY REVIEW  
OF  
PSYCHOLOGY AND PHILOSOPHY

I.—COMPUTING MACHINERY AND  
INTELLIGENCE

BY A. M. TURING

1. *The Imitation Game.*

I PROPOSE to consider the question, 'Can machines think?' This should begin with definitions of the meaning of the terms 'machine' and 'think'. The definitions might be framed so as to reflect so far as possible the normal use of the words, but this attitude is dangerous. If the meaning of the words 'machine' and 'think' are to be found by examining how they are commonly used it is difficult to escape the conclusion that the meaning and the answer to the question, 'Can machines think?' is to be sought in a statistical survey such as a Gallup poll. But this is absurd. Instead of attempting such a definition I shall replace the question by another, which is closely related to it and is expressed in relatively unambiguous words.

The new form of the problem can be described in terms of a game which we call the 'imitation game'. It is played with three people, a man (A), a woman (B), and an interrogator (C) who may be of either sex. The interrogator stays in a room apart from the other two. The object of the game for the interrogator is to determine which of the other two is the man and which is the woman. He knows them by labels X and Y, and at the end of the game he says either 'X is A and Y is B' or 'X is B and Y is A'. The interrogator is allowed to put questions to A and B thus:

C: Will X please tell me the length of his or her hair?  
Now suppose X is actually A, then A must answer. It is A's

28

433

- 2) Apresentamos, abaixo, a primeira página do Projeto de IA de Dartmouth, publicado originalmente em 1955, e reproduzido na revista *AI Magazine*, de 2006.

AI Magazine Volume 27 Number 4 (2006) (© AAAI)

Articles

# A Proposal for the Dartmouth Summer Research Project on Artificial Intelligence

August 31, 1955

*John McCarthy, Marvin L. Minsky,  
Nathaniel Rochester,  
and Claude E. Shannon*

■ The 1956 Dartmouth summer research project on artificial intelligence was initiated by this August 31, 1955 proposal, authored by John McCarthy, Marvin Minsky, Nathaniel Rochester, and Claude Shannon. The original typescript consisted of 17 pages plus a title page. Copies of the typescript are housed in the archives at Dartmouth College and Stanford University. The first 5 papers state the proposal, and the remaining pages give qualifications and interests of the four who proposed the study. In the interest of brevity, this article reproduces only the proposal itself, along with the short autobiographical statements of the proposers.

**W**e propose that a 2 month, 10 man study of artificial intelligence be carried out during the summer of 1956 at Dartmouth College in Hanover, New Hampshire. The study is to proceed on the basis of the conjecture that every aspect of learning or any other feature of intelligence can in principle be so precisely described that a machine can be made to simulate it. An attempt will be made to find how to make machines use lan-

guage, form abstractions and concepts, solve kinds of problems now reserved for humans, and improve themselves. We think that a significant advance can be made in one or more of these problems if a carefully selected group of scientists work on it together for a summer.

The following are some aspects of the artificial intelligence problem:

## 1. Automatic Computers

If a machine can do a job, then an automatic calculator can be programmed to simulate the machine. The speeds and memory capacities of present computers may be insufficient to simulate many of the higher functions of the human brain, but the major obstacle is not lack of machine capacity, but our inability to write programs taking full advantage of what we have.

## 2. How Can a Computer be Programmed to Use a Language

It may be speculated that a large part of human thought consists of manipulating words according to rules of reasoning and rules of conjecture. From this point of view, forming a generalization consists of admitting a new

---

# PARTE I: ANÁLISE EXPLORATÓRIA DE DADOS

A primeira parte deste texto é dedicada à discussão de alguns conceitos básicos, como distribuição de frequências, variabilidade e associação entre variáveis, além de métodos de resumo de dados por meio de tabelas e gráficos. Para efeito didático, discutimos separadamente os casos de uma, duas ou mais que duas variáveis. Consideramos técnicas de regressão, essenciais para o entendimento da associação entre uma ou mais variáveis explicativas e uma variável resposta. Nesse contexto, incluímos análise de sobrevivência, em que a variável resposta é o tempo até a ocorrência de um evento de interesse. Os conceitos e técnicas aqui abordados servem de substrato e são imprescindíveis para a compreensão e aplicação adequada das técnicas estatísticas de análise apresentadas nas Partes II e III.





# Preparação dos dados

A tarefa de converter observações em números é a mais difícil de todas, a última e não a primeira coisa a fazer, e pode ser feita somente quando você aprendeu bastante sobre as observações.

Lewis Thomas

## 2.1 Considerações preliminares

Em praticamente todas as áreas do conhecimento, dados são coletados com o objetivo de obtenção de informação. Esses dados podem representar uma população (como o censo demográfico) ou uma parte (amostra) dessa população (como aqueles oriundos de uma pesquisa eleitoral). Eles podem ser obtidos por meio de estudos observacionais (como aqueles em que se examinam os registros médicos de um determinado hospital), de estudos amostrais (como pesquisas de opinião) ou experimentais (como ensaios clínicos).

Mais comumente, os dados envolvem valores de várias variáveis, obtidos da observação de **unidades de investigação** que constituem uma amostra de uma população. As unidades de investigação são os entes (indivíduos, animais, escolas, cidades etc.) em que as variáveis serão observadas. Num estudo em que se pretende avaliar a relação entre peso e altura de adultos, as unidades de investigação são os adultos e as variáveis a serem observadas são peso e altura. Em outro estudo, em que se pretenda comparar agências bancárias com relação ao desempenho medido em termos de diferentes variáveis, as unidades de investigação são as agências e as variáveis podem ser, por exemplo, saldo médio dos clientes, número de funcionários e total de depósitos em cadernetas de poupança.

A análise de dados amostrais possibilita que se faça inferência sobre a distribuição de probabilidades das variáveis de interesse, definidas sobre a população da qual a amostra foi (ao menos conceitualmente) colhida. Nesse contexto, a Estatística é uma ferramenta importante para organizá-los, resumi-los, analisá-los e utilizá-los para tomada de decisões. O ramo da Estatística conhecido como **Análise Exploratória de Dados** se ocupa da organização e resumo dos dados de uma amostra ou, eventualmente, de

toda a população e o ramo conhecido como **Inferência Estatística** se refere ao processo de se tirar conclusões sobre uma população com base em uma amostra dela.

A abordagem estatística para o tratamento de dados envolve:

- i) O planejamento da forma de coleta em função dos objetivos do estudo.
- ii) A organização de uma planilha para seu armazenamento eletrônico; no caso de megadados, a organização de um banco de dados (*data warehouse*) pode ser necessária (ver Nota de Capítulo 1).
- iii) O seu resumo por meio de tabelas e gráficos.
- iv) A identificação e correção de possíveis erros de coleta e/ou digitação.
- v) A proposta de modelos probabilísticos baseados na forma de coleta dos dados e nos objetivos do estudo; a finalidade desses modelos é relacionar a amostra (se for o caso) à população para a qual se quer fazer inferência.
- vi) A proposta de modelos estruturais para os parâmetros do modelo probabilístico com a finalidade de representar relações entre as características (variáveis) observadas. Num modelo de regressão, por exemplo, isso corresponde a expressar a média da variável resposta como função dos valores de uma ou mais variáveis explicativas.
- vii) A avaliação do ajuste do modelo aos dados por meio de técnicas de diagnóstico e/ou simulação.
- viii) A reformulação e reajuste do modelo à luz dos resultados do diagnóstico e/ou de estudos de simulação.
- ix) A tradução dos resultados do ajuste em termos não técnicos.

O item i), por exemplo, pode ser baseado em uma hipótese formulada por um cientista. Numa tentativa de comprovar a sua hipótese, ele identifica as variáveis de interesse e planeja um experimento (preferencialmente com o apoio de um estatístico) para a coleta dos dados que serão armazenados numa planilha. Um dos objetivos deste livro é abordar detalhadamente os itens ii), iii), iv) e viii), que constituem a essência da Estatística Descritiva, com referências eventuais aos itens v), vi), vii), viii) e ix), que formam a base da Inferência Estatística. Esses itens servem de fundamento para as principais técnicas utilizadas em Ciência de Dados, cuja apresentação constitui outro objetivo do texto.

**Exemplo 2.1:** Se quisermos avaliar a relação entre o consumo (variável  $C$ ) e renda (variável  $Y$ ) de indivíduos de uma população, podemos escolher uma amostra<sup>1</sup> de  $n$  indivíduos dessa população e medir essas duas variáveis nesses indivíduos, obtendo-se o conjunto de dados  $\{(Y_1, C_1), \dots, (Y_n, C_n)\}$ .

---

<sup>1</sup>Em geral, a amostra deve ser obtida segundo alguns critérios que servirão para fundamentar os modelos utilizados na inferência; mesmo nos casos em que esses critérios não são seguidos, as técnicas abordadas neste texto podem ser utilizadas para o entendimento das relações entre as variáveis observadas. No Capítulo 3 definiremos formalmente o que se chama uma amostra aleatória simples retirada de uma população.

Para saber se existe alguma relação entre  $C$  e  $Y$  podemos construir um gráfico de dispersão, colocando a variável  $Y$  no eixo das abscissas e a variável  $C$  no eixo das ordenadas. Obteremos uma nuvem de pontos no plano  $(Y, C)$ , que pode nos dar uma ideia de um **modelo** relacionando  $Y$  e  $C$ . No Capítulo 4 trataremos da análise de duas variáveis e, no Capítulo 6, estudaremos os chamados modelos de regressão, que são apropriados para o exemplo em questão. Em Economia, sabe-se, desde Keynes, que o gasto com o consumo de pessoas ( $C$ ) é uma função da renda pessoal disponível ( $Y$ ), ou seja

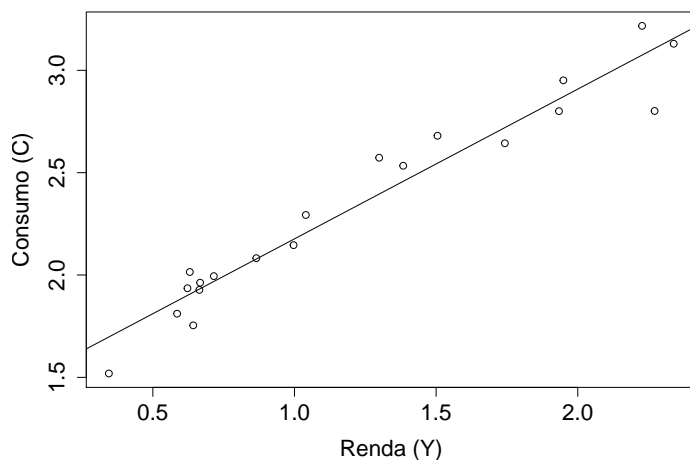
$$C = f(Y),$$

para alguma função  $f$ .

Para se ter uma ideia de como é a função  $f$  para essa população, podemos construir um gráfico de dispersão entre  $Y$  e  $C$ . Com base em um conjunto de dados hipotéticos com  $n = 20$ , esse gráfico está apresentado na Figura 2.1 e é razoável postular o modelo

$$C_i = \alpha + \beta Y_i + e_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.1)$$

em que  $(Y_i, C_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  são os valores de  $Y$  e  $C$  efetivamente observados e  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  são variáveis não observadas, chamadas **erros**. No jargão econômico, o parâmetro  $\alpha$  é denominado **consumo autônomo** e  $\beta$  representa a **propensão marginal a consumir**. A reta representada no gráfico foi obtida por meio dos métodos discutidos no Capítulo 6. Nesse caso, obtemos  $\alpha = 1,44$  e  $\beta = 0,73$ , aproximadamente. O resultado sugere o consumo médio de indivíduos com renda nula é 1,44 e que esse consumo aumenta de 0,73 para cada incremento de uma unidade na renda. Detalhes sobre essa interpretação serão discutidos no Capítulo 6. Para diferentes populações poderemos ter curvas (modelos) diferentes para relacionar  $Y$  e  $C$ .



**Figura 2.1:** Relação entre renda e consumo de 20 indivíduos.

## 2.2 Planilhas de dados

Planilhas de dados (usualmente eletrônicas) são matrizes em que se armazenam dados com o objetivo de permitir sua análise estatística. Em geral, cada linha da matriz de dados corresponde a uma unidade de investigação (*e.g.*, unidade amostral) e cada coluna, a uma variável. Uma planilha de dados bem elaborada contribui tanto para o entendimento do processo de coleta de dados e especificação das variáveis sob investigação quanto para a proposta de uma análise estatística adequada. A primeira etapa da construção de uma planilha de dados consiste na elaboração de um dicionário com a especificação das variáveis, que envolve

- i) sua definição operacional (ver Nota de Capítulo 2);
- ii) a atribuição de rótulos às variáveis (esses rótulos devem ser preferencialmente mnemônicos e grafados com letras minúsculas e sem acentos para facilitar a digitação e leitura por pacotes computacionais);
- iii) a especificação das unidades de medida ou definição de categorias; para variáveis categorizadas, convém atribuir valores numéricos às categorias com a finalidade de facilitar a digitação e evitar erros (veja a variável “Sexo do recém-nascido” na Tabela 2.1);
- iv) a atribuição de um código para valores omissos (*missing*);
- v) a indicação de como devem ser codificados dados abaixo do limite de detecção (*e.g.*,  $< 0,05$  ou  $0,025$  se considerarmos que medidas abaixo do limite de detecção serão definidas como o ponto médio entre  $0,00$  e  $0,05$ );
- vi) a especificação do número de casas decimais (correspondente à precisão do instrumento de medida) - ver Notas de Capítulo 3 e 4;
- vii) a indicação, quando pertinente, de limites (inferiores ou superiores) para facilitar a identificação de erros; por exemplo, o valor mínimo para aplicação num fundo de ações é de R\$ 2000,00;
- viii) o mascaramento (por meio de um código de identificação, por exemplo) de informações sigilosas ou confidenciais como o nome de pacientes de ensaios clínicos.

Algumas recomendações para a construção de planilhas eletrônicas de dados são:

- i) não utilizar limitadores de celas (*borders*) ou cores;
- ii) reservar a primeira linha para os rótulos das variáveis;
- iii) não esquecer uma coluna para a variável indicadora das unidades de investigação (evitar informações confidenciais como nomes de pacientes); essa variável é útil para a correção de erros identificados na

análise estatística além de servir como elo de ligação entre planilhas com diferentes informações sobre as unidades de investigação;

- iv) escolher ponto ou vírgula para separação de casas decimais<sup>2</sup>;
- v) especificar o número de casas decimais (ver Nota de Capítulo 3);
- vi) formatar as celas correspondentes a datas para manter a especificação uniforme (dd/mm/aaaa ou mm/dd/aaaa, por exemplo).

**Exemplo 2.2:** Consideremos os dados extraídos de um estudo realizado no Instituto de Ciências Biomédicas da Universidade de São Paulo com o objetivo de avaliar a associação entre a infecção de gestantes por malária e a ocorrência de microcefalia nos respectivos bebês. O dicionário das variáveis observadas está indicado na Tabela 2.1.

**Tabela 2.1:** Dicionário para as variáveis referentes ao Exemplo 2.2

Rótulos	Variável	Unidade de medida
id	identificador de paciente	
idade	Idade da mãe	anos
nmal	Quantidade de malárias durante a gestação	número inteiro
parasit	Espécie do parasita da malária	0: não infectada 1: P. vivax 2: P. falciparum 3: malária mista 4: indeterminado
ngest	Paridade (quantidade de gestações)	Número inteiro
idgest	Idade gestacional no parto	semanas
sexrn	Sexo do recém-nascido	1: masculino 2: feminino
pesorn	Peso do recém-nascido	g
estrn	Estatura do recém-nascido	cm
pcefal	Perímetro cefálico do recém-nascido	cm
Obs:	Observações omissas são representadas por um ponto	

Um exemplo de planilha de dados contendo observações das variáveis descritas na Tabela 2.1 está representado na Figura 2.2<sup>3</sup>. Observe que neste conjunto de dados, as unidades de investigação são os pares (gestante+recém nascido). Há variáveis observadas tanto na gestante quanto no recém nascido e espera-se alguma dependência entre as observações realizadas no mesmo par mas não entre observações realizadas em pares diferentes.

<sup>2</sup>Embora a norma brasileira ABNT indique a vírgula para separação de casas decimais, a maioria dos pacotes computacionais utiliza o ponto com essa função; por essa razão é preciso tomar cuidado com esse detalhe na construção de planilhas a serem analisadas computacionalmente. Em geral, adotaremos a norma brasileira neste texto.

<sup>3</sup>Representamos tabelas e planilhas de forma diferente. Planilhas são representadas no texto como figuras para retratar o formato com que são apresentadas nos *software* mais utilizados, como o **Excel**.

id	idade	nmal	parasit	ngest	idgest	sexrn	pesorn	estrn	pcefal
1	25	0	0	3	38	2	3665	46	36
2	30	0	0	9	37	1	2880	44	33
3	40	0	0	1	41	1	2960	52	35
4	26	0	0	2	40	1	2740	47	34
5	.	0	0	1	38	1	2975	50	33
6	18	0	0	.	38	2	2770	48	33
7	20	0	0	1	41	1	2755	48	34
8	15	0	0	1	39	1	2860	49	32
9	.	0	0	.	42	2	3000	50	35
10	18	0	0	1	40	1	3515	51	34
11	17	0	0	2	40	1	3645	54	35
12	18	1	1	3	40	2	2665	48	35
13	30	0	0	6	40	2	2995	49	33
14	19	0	0	1	40	1	2972	46	34
15	32	0	0	5	41	2	3045	50	35
16	32	0	0	8	38	2	3150	44	35
17	18	0	0	2	40	1	2650	48	33.5
18	18	0	0	1	41	1	3200	50	37
19	19	0	0	1	39	1	3140	48	32
20	18	0	0	2	40	1	3150	47	35

**Figura 2.2:** Planilha com dados referentes ao Exemplo 2.2.

Neste livro estamos interessados na análise de conjuntos de dados, que podem ser provenientes de populações, amostras ou de estudos observacionais. Para essa análise usamos tabelas, gráficos e diversas medidas de posição (localização), variabilidade e associação, com o intuito de resumir e interpretar os dados.

**Exemplo 2.3:** Na Tabela 2.2 apresentamos dados provenientes de um estudo em que o objetivo é avaliar a variação do peso (kg) de bezerras submetidas a uma determinada dieta entre 12 e 26 semanas após o nascimento.

Dados com essa natureza são chamados de **dados longitudinais** por terem a mesma característica (peso, no exemplo) medida ao longo de uma certa dimensão (tempo, no exemplo). De acordo com nossa especificação, há nove variáveis na Tabela 2.2, nomeadamente, Animal, Peso na 12a semana, Peso na 14a semana etc. Para efeito computacional, no entanto, esse tipo de dados deve ser disposto numa planilha de dados com formato diferente (às vezes chamado de **formato longo**) como indicado na Figura 2.3.

Nesse formato apropriado para dados longitudinais (ou mais geralmente, para medidas repetidas), há apenas três variáveis, a saber, Animal, Semana e Peso. Note que o rótulo da mesma unidade amostral (animal, neste caso) é repetido na primeira coluna para caracterizar a natureza longitudinal dos dados. Ele é especialmente adequado para casos em que as unidades de investigação são avaliadas em instantes diferentes.

**Tabela 2.2:** Peso de bezerros (kg)

animal	Semanas após nascimento							
	12	14	16	18	20	22	24	26
1	54,1	65,4	75,1	87,9	98,0	108,7	124,2	131,3
2	91,7	104,0	119,2	133,1	145,4	156,5	167,2	176,8
3	64,2	81,0	91,5	106,9	117,1	127,7	144,2	154,9
4	70,3	80,0	90,0	102,6	101,2	120,4	130,9	137,1
5	68,3	77,2	84,2	96,2	104,1	114,0	123,0	132,0
6	43,9	48,1	58,3	68,6	78,5	86,8	99,9	106,2
7	87,4	95,4	110,5	122,5	127,0	136,3	144,8	151,5
8	74,5	86,8	94,4	103,6	110,7	120,0	126,7	132,2
9	50,5	55,0	59,1	68,9	78,2	75,1	79,0	77,0
10	91,0	95,5	109,8	124,9	135,9	148,0	154,5	167,6
11	83,3	89,7	99,7	110,0	120,8	135,1	141,5	157,0
12	76,3	80,8	94,2	102,6	111,0	115,6	121,4	134,5
13	55,9	61,1	67,7	80,9	93,0	100,1	103,2	108,0
14	76,1	81,1	84,6	89,8	97,4	111,0	120,2	134,2
15	56,6	63,7	70,1	74,4	85,1	90,2	96,1	103,6

animal	semana	peso
1	12	54,1
1	14	65,4
⋮	⋮	⋮
1	24	124,2
1	26	131,3
2	12	91,7
2	14	104,0
⋮	⋮	⋮
2	26	176,8
⋮	⋮	⋮
15	12	56,6
⋮	⋮	⋮
15	26	103,6

**Figura 2.3:** Planilha computacionalmente adequada para os dados do Exemplo 2.3.

Na Figura 2.4 apresentamos um exemplo em que o diâmetro da aorta (mm) de recém nascidos pré termo, com peso adequado (AIG) ou pequeno (PIG) para a idade gestacional foi avaliado até a 40a semana pós concepção. Note que o número de observações pode ser diferente para as diferentes unidades de investigação. Esse formato também é comumente utilizado para armazenar dados de **séries temporais**.

grupo	ident	sem	diam
AIG	2	30	7,7
AIG	2	31	8,0
⋮	⋮	⋮	⋮
AIG	2	36	9,8
AIG	12	28	7,1
AIG	12	29	7,1
⋮	⋮	⋮	⋮
AIG	12	30	9,4
⋮	⋮	⋮	⋮
PIG	17	33	7,5
PIG	17	34	7,7
PIG	17	36	8,2
PIG	29	26	6,3
PIG	29	27	6,5
⋮	⋮	⋮	⋮
PIG	29	31	7,2
PIG	29	32	7,2

**Figura 2.4:** Planilha com diâmetro da aorta (mm) observado em recém nascidos pré termo.

**Exemplo 2.4:** Os dados da Tabela 2.3 foram extraídos de um estudo sobre gestações gemelares com medidas de várias características anatômicas de fetos de gestantes com diferentes idades gestacionais (semanas).

**Tabela 2.3:** Diâmetro biparietal medido ultrassonograficamente (cm)

Gestante	Idade gestacional	Diâmetro biparietal	
		Feto 1	Feto 2
1	28	7,8	7,5
2	32	8,0	8,0
3	25	5,8	5,9
⋮	⋮	⋮	⋮
34	32	8,5	7,2
35	19	3,9	4,1

Embora as medidas tenham sido observadas nos dois fetos, a unidade de investigação é a gestante. Espera-se que os diâmetros biparietais observados nos dois fetos da mesma gestante sejam dependentes. Esse tipo de dados tem uma **estrutura hierárquica** ou **por conglomerados**, em que os dois fetos estão aninhados na gestante. Tanto dados com essa natureza quanto dados longitudinais são casos particulares daquilo que se chama **dados com medidas repetidas** que essencialmente são dados em que a mesma variável



resposta é observada duas ou mais vezes em cada unidade de investigação.

Em geral, dados armazenados em planilhas eletrônicas devem ser apropriadamente transformados para análise por algum *software* estatístico (como o R). Nesse contexto, convém ressaltar que esses *software* tratam variáveis **numéricas** (peso, por exemplo) e **alfanuméricas** (bairro, por exemplo) de forma diferente. Além disso, observações omissas também requerem símbolos específicos. Cuidados nessa formatação dos dados apresentados em planilhas eletrônicas são importantes para evitar problemas na análise.

## 2.3 Construção de tabelas

A finalidade primordial de uma tabela é resumir a informação obtida dos dados. Sua construção deve permitir que o leitor entenda esse resumo sem a necessidade de recorrer ao texto. Algumas sugestões para construção de tabelas estão apresentadas a seguir.

- 1) Não utilize mais casas decimais do que o necessário para não dificultar as comparações de interesse. A escolha do número de casas decimais depende da precisão do instrumento de medida e/ou da importância prática dos valores representados. Para descrever a redução de peso após um mês de dieta, por exemplo, é mais conveniente representá-lo como 6 kg do que como 6,200 kg. Além disso, quanto mais casas decimais forem incluídas, mais difícil é a comparação. Por exemplo, compare a Tabela 2.4 com a Tabela 2.5.

Observe que calculamos porcentagens em relação ao total de cada linha. Poderíamos, também, ter calculado porcentagens em relação ao total de cada coluna ou porcentagens em relação ao total geral (50). Cada uma dessas maneiras de se calcular as porcentagens pode ser útil para responder diferentes questões. Esse tópico será discutido no Capítulo 4.

**Tabela 2.4:** Número de alunos

Estado civil	Bebida preferida			Total
	não alcoólica	cerveja	outra alcoólica	
Solteiro	19 (53%)	7 (19%)	10 (28%)	36 (100%)
Casado	3 (25%)	4 (33%)	5 (42%)	12 (100%)
Outros	1 (50%)	0 (0%)	1 (50%)	2 (100%)
Total	23 (46%)	11 (22%)	16 (32%)	50 (100%)

**Tabela 2.5:** Número de alunos (e porcentagens com duas casas decimais)

Estado civil	Bebida preferida			Total
	não alcoólica	cerveja	outra alcoólica	
Solteiro	19 (52,78%)	7 (19,44%)	10 (27,78%)	36 (100,00%)
Casado	3 (25,00%)	4 (33,33%)	5 (41,67%)	12 (100,00%)
Outros	1 (50,00%)	0 (0,00%)	1 (50,00%)	2 (100,00%)
Total	23 (46,00%)	11 (22,00%)	16 (32,00%)	50 (100,00%)

- 2) Proponha um título autoexplicativo e inclua as unidades de medida. O título deve dizer o que representam os números do corpo da tabela e, em geral, não deve conter informações que possam ser obtidas diretamente dos rótulos de linhas e colunas. Compare o título da Tabela 2.6 com: “Intenção de voto (%) por candidato para diferentes meses”.
- 3) Inclua totais de linhas e/ou colunas para facilitar as comparações. É sempre bom ter um padrão contra o qual os dados possam ser avaliados.
- 4) Não utilize abreviaturas ou indique o seu significado no rodapé da tabela (*e.g.* Desvio padrão em vez de DP); se precisar utilize duas linhas para indicar os valores da coluna correspondente.
- 5) Ordene colunas e/ou linhas quando possível. Se não houver impedimentos, ordene-as segundo os valores, crescente ou decrescentemente. Compare a Tabela 2.6 com a Tabela 2.7.

**Tabela 2.6:** Intenção de voto (%)

Candidato	janeiro	fevereiro	março	abril
Nononono	39	41	40	38
Nananana	20	18	21	24
Nenenene	8	15	18	22

**Tabela 2.7:** Intenção de voto (%)

Candidato	janeiro	fevereiro	março	abril
Nananana	20	18	21	24
Nononono	39	41	40	38
Nenenene	8	15	18	22

- 6) Tente trocar a orientação de linhas e colunas para melhorar a apresentação. Em geral, é mais fácil fazer comparações ao longo das linhas do que das colunas.
- 7) Altere a disposição e o espaçamento das linhas e colunas para facilitar a leitura. Inclua um maior espaçamento a cada grupo de linhas e/ou

colunas em tabelas muito extensas e use mais do que uma linha para acomodar rótulos longos. Avalie a Tabela 2.8.

**Tabela 2.8:** Sensibilidade dentinária pré- e pós-operatória

Material	Dentina	Sensibilidade pré-operatória	Sensibilidade pós-operatória		Total
			Ausente	Presente	
Single Bond	Seca	Ausente	22	1	23
		Presente	3	6	9
		Subtotal	25	7	32
Single Bond	Úmida	Ausente	12	10	22
		Presente	7	4	11
		Subtotal	19	14	33
Prime Bond	Seca	Ausente	10	6	16
		Presente	12	3	15
		Subtotal	22	9	31
Prime Bond	Úmida	Ausente	5	13	18
		Presente	11	3	14
		Subtotal	16	16	32

- 8) Não analise a tabela descrevendo-a, mas sim comentando as principais tendências sugeridas pelos dados. Por exemplo, os dados apresentados na Tabela 2.4 indicam que a preferência por bebidas alcoólicas é maior entre os alunos casados do que entre os solteiros; além disso, há indicações de que a cerveja é menos preferida que outras bebidas alcoólicas, tanto entre solteiros quanto entre casados.

## 2.4 Construção de gráficos

A seguir apresentamos algumas sugestões para a construção de gráficos, cuja finalidade é similar àquela de tabelas, ou seja, resumir a informação obtida dos dados; por esse motivo, convém optar pelo resumo em forma de tabela ou de gráfico. Exemplos serão apresentados ao longo do texto.

- 1) Proponha um título autoexplicativo.
- 2) Escolha o tipo de gráfico apropriado para os dados.
- 3) Rotule os eixos apropriadamente, incluindo unidades de medida.
- 4) Procure escolher adequadamente as escalas dos eixos para não distorcer a informação que se pretende transmitir. Se o objetivo for comparar as informações de dois ou mais gráficos, use a mesma escala.
- 5) Inclua indicações de “quebra” nos eixos para mostrar que a origem (zero) está deslocada.

- 6) Altere as dimensões do gráfico até encontrar o formato adequado.
- 7) Inclua uma legenda.
- 8) Tome cuidado com a utilização de áreas para comparações, pois elas variam com o quadrado das dimensões lineares.
- 9) Não exagere nas ilustrações que acompanham o gráfico para não o “poluir” visualmente, mascarando seus aspectos mais relevantes.

## 2.5 Notas de capítulo

### 1) Bancos de dados

Projetos que envolvem grandes quantidades de dados, em geral provenientes de diversas fontes e com diversos formatos necessitam a construção de bancos de dados (*data warehouses*), cuja finalidade é prover espaço suficiente para sua armazenagem, garantir sua segurança, permitir a inclusão por meio de diferentes meios e proporcionar uma interface que permita a recuperação da informação de forma estruturada para uso por diferentes pacotes de análise estatística.

Bancos de dados têm se tornado cada vez maiores e mais difíceis de administrar em função da crescente disponibilidade de sistemas de análise de dados com diversas naturezas (imagens, textos etc.). Em geral, esses bancos de dados envolvem a participação de profissionais de áreas e instituições diversas. Por esse motivo, os resultados de sua implantação são lentos e às vezes inexistentes. Conforme pesquisa elaborada pelo Grupo Gartner (2005), 50% dos projetos de bancos de dados tendem a falhar por problemas em sua construção. Uma das causas para esse problema, é o longo tempo necessário para o seu desenvolvimento, o que gera uma defasagem na sua operacionalidade. Muitas vezes, algumas de suas funcionalidades ficam logo obsoletas enquanto novas demandas estão sendo requisitadas. Duas razões para isso são a falta de sincronização entre os potenciais usuários e os desenvolvedores do banco de dados e o fato de que técnicas tradicionais usadas nesse desenvolvimento não permitem a rápida disponibilidade de suas funções.

Para contornar esses problemas, sugere-se uma arquitetura modular cíclica em que o foco inicial é a criação dos principais elementos do sistema, deixando os detalhes das características menos importantes para uma segunda fase em que o sistema se torna operacional. No Módulo 1, são projetados os sistemas para inclusão e armazenagem dos dados provenientes de diferentes fontes. A detecção, correção de possíveis erros e homogeneização dos dados é realizada no Módulo 2. Como esperado, dados obtidos por diferentes componentes do projeto geralmente têm codificação distinta para os mesmos atributos, o que requer uniformização e possível indicação de incongruências que não podem ser corrigidas. No Módulo 3, os dados tratados no módulo

anterior são atualizados e inseridos numa base de dados históricos, devidamente padronizada. Nesse módulo, a integridade dos dados recém obtidos é avaliada comparativamente aos dados já existentes para garantir a consistência entre eles. O foco do Módulo 4 é a visualização, análise e exportação dos dados. Esse módulo contém as ferramentas que permitem a geração de planilhas de dados apropriadas para a análise estatística.

Detalhes sobre a construção de bancos de dados podem ser encontrados em Rainardi (2008), entre outros. Para avaliar as dificuldades de construção de um banco de dados num projeto complexo, o leitor poderá consultar Ferreira et al. (2017).

## 2) Definição operacional de variáveis

Para efeito de comparação entre estudos, a definição das variáveis envolvidas requer um cuidado especial. Por exemplo em estudos cujo objetivo é avaliar a associação entre renda e gastos com lazer, é preciso especificar se a variável “Renda” se refere à renda familiar total ou *per capita*, se benefícios como vale transporte, vale alimentação ou bônus estão incluídos etc.

Num estudo que envolva a variável “Pressão arterial”, um exemplo de definição operacional é: “média de 60 medidas com intervalo de 1 minuto da pressão arterial diastólica (mmHg) obtida no membro superior direito apoiado à altura do peito com aparelho automático de método oscilométrico (Dixtal, São Paulo, Brasil)”.

Num estudo cujo objetivo é comparar diferentes modelos de automóveis com relação ao consumo de combustível, uma definição dessa variável poderia ser “número de quilômetros percorridos em superfície plana durante 15 minutos em velocidade constante de 50 km/h e sem carga por litro de gasolina comum (km/L).”

Neste texto, não consideraremos definições detalhadas por razões didáticas.

## 3) Ordem de grandeza, precisão e arredondamento de dados quantitativos

A precisão de dados quantitativos contínuos está relacionada com a capacidade de os instrumentos de medida distinguirem entre valores próximos na escala de observação do atributo de interesse. O número de dígitos colocados após a vírgula indica a precisão associada à medida que estamos considerando. O volume de um certo recipiente expresso como 0,740 L implica que o instrumento de medida pode detectar diferenças da ordem de 0,001 L (= 1 mL, ou seja 1 mililitro); se esse volume for expresso na forma 0,74 L, a precisão correspondente será de 0,01 L (= 1 cL, ou seja 1 centilitro).

Muitas vezes, em função dos objetivos do estudo em questão, a expressão de uma grandeza quantitativa pode não corresponder à precisão dos instrumentos de medida. Embora com uma balança suficientemente precisa, seja possível dizer que o peso de uma pessoa é de 89,230 kg, para avaliar o efeito de uma dieta, o que interessa saber é a ordem de grandeza da perda de peso após três meses de regime, por exemplo. Nesse caso, saber se a perda de peso foi de 10,230 kg ou de 10,245 kg é totalmente irrelevante. Para efeitos práticos, basta dizer que a perda foi da ordem de 10 kg. A ausência de casas decimais nessa representação indica que o próximo valor na escala de interesse seria 11 kg, embora todos os valores intermediários com unidades de 1 g sejam mensuráveis.

Para efeitos contábeis, por exemplo, convém expressar o aumento das exportações brasileiras num determinado período como R\$ 1 657 235 458,29; no entanto, para efeitos de comparação com outros períodos, é mais conveniente dizer que o aumento das exportações foi da ordem de 1,7 bilhões de reais. Note que nesse caso, as grandezas significativas são aquelas da ordem de 0,1 bilhão de reais (= 100 milhões de reais).

Nesse processo de transformação de valores expressos com uma determinada precisão para outros com a precisão de interesse é necessário arredondar os números correspondentes. Em termos gerais, se o dígito a ser eliminado for 0, 1, 2, 3 ou 4, o dígito precedente não deve sofrer alterações e se o dígito a ser eliminado for 5, 6, 7, 8 ou 9, o dígito precedente deve ser acrescido de uma unidade. Por exemplo, se desejarmos reduzir para duas casas decimais números originalmente expressos com três casas decimais, 0,263 deve ser transformado para 0,26 e 0,267 para 0,27. Se desejarmos uma redução mais drástica para apenas uma casa decimal, tanto 0,263 quanto 0,267 devem ser transformados para 0,3.

É preciso tomar cuidado com essas transformações quando elas são aplicadas a conjuntos de números cuja soma seja prefixada (porcentagens, por exemplo) pois elas podem introduzir erros cumulativos. Discutiremos esse problema ao tratar de porcentagens e tabulação de dados.

É interessante lembrar que a representação decimal utilizada nos EUA e nos países da comunidade britânica substitui a vírgula por um ponto. Cuidados devem ser tomados ao se fazerem traduções, embora em alguns casos, esse tipo de representação já tenha sido adotada no cotidiano (veículos com motor 2.0, por exemplo, são veículos cujo volume dos cilindros é de 2,0 L).

Finalmente, convém mencionar que embora seja conveniente apresentar os resultados de uma análise com o número de casas decimais conveniente, os cálculos necessários para sua obtenção devem ser realizados com maior precisão para evitar propagação de erros. O arredondamento deve ser concretizado ao final dos cálculos.

#### 4) Proporções e porcentagens

Uma proporção é um quociente utilizado para comparar duas grandezas por meio da adoção de um padrão comum. Se 31 indivíduos, num total de 138, são fumantes, dizemos que a proporção de fumantes entre esses 138 indivíduos é de 0,22 ( $= 31/138$ ). O denominador desse quociente é chamado de base e a interpretação associada à proporção é que 31 está para a base 138 assim como 0,22 está para a base 1,00. Essa redução a uma base fixa permite a comparação com outras situações em que os totais são diferentes. Consideremos, por exemplo, um outro conjunto de 77 indivíduos em que 20 são fumantes; embora o número de fumantes não seja comparável com o do primeiro grupo, dado que as bases são diferentes, pode-se dizer que a proporção de fumantes desse segundo grupo, 0,26 ( $= 20/77$ ) é maior que aquela associada ao primeiro conjunto.

Porcentagens, nada mais são do que proporções multiplicadas por 100, o que equivale a fazer a base comum igual a 100. No exemplo acima, podemos dizer que a porcentagem de fumantes é de 22% ( $= 100 \times 31/138$ ) no primeiro grupo e de 26% no segundo. Para efeito da escolha do número de casas decimais, note que a comparação entre essas duas porcentagens é mais fácil do que se considerássemos suas expressões mais precisas (com duas casas decimais), ou seja 22,46% contra 25,97%.

A utilização de porcentagens pode gerar problemas de interpretação em algumas situações. A seguir consideramos algumas delas. Se o valor do IPTU de um determinado imóvel foi de R\$ 500,00 em 1998 e de R\$ 700,00 em 1999, podemos dizer que o valor do IPTU em 1999 é 140% ( $= 100 \times 700/500$ ) do valor em 1998, mas o aumento foi de 40% [ $= 100 \times (700-500)/500$ ]. Se o preço de uma determinada ação varia de R\$ 22,00 num determinado instante para R\$ 550,00 um ano depois, podemos dizer que o aumento de seu preço foi de 2400% [ $= 100 \times (550-22)/22$ ] nesse período. É difícil interpretar porcentagens “grandes” como essa. Nesse caso é melhor dizer que o preço dessa ação é 25 ( $= 550/22$ ) vezes seu preço há um ano. Porcentagens calculadas a partir de bases de pequena magnitude podem induzir conclusões inadequadas. Dizer que 43% dos participantes de uma pesquisa preferem um determinado produto tem uma conotação diferente se o cálculo for baseado em 7 ou em 120 entrevistados. É sempre conveniente explicitar a base relativamente à qual se estão fazendo os cálculos.

Para se calcular uma porcentagem global a partir das porcentagens associadas às partes de uma população, é preciso levar em conta sua composição.

Suponhamos que numa determinada faculdade, 90% dos alunos que usam transporte coletivo sejam favoráveis à cobrança de estacionamento no campus e que apenas 20% dos alunos que usam transporte in-

dividual o sejam. A porcentagem de alunos dessa faculdade favoráveis à cobrança do estacionamento só será igual à média aritmética dessas duas porcentagens, ou seja 55%, se a composição da população de alunos for tal que metade usa transporte coletivo e metade não. Se essa composição for de 70% e 30% respectivamente, a porcentagem de alunos favoráveis à cobrança de estacionamento será de 69% ( $= 0,9 \times 70\% + 0,20 \times 30\%$  ou seja, 90% dos 70% que usam transporte coletivo + 20% dos 30% que utilizam transporte individual).

Para evitar confusão, ao se fazer referência a variações, convém distinguir porcentagem e ponto percentual. Se a porcentagem de eleitores favoráveis a um determinado candidato aumentou de 14% antes para 21% depois da propaganda na televisão, pode-se dizer que a preferência eleitoral por esse candidato aumentou 50% [ $= 100 \times (21-14)/14$ ] ou foi de 7 pontos percentuais (e não de 7%). Note que o que diferencia esses dois enfoques é a base em relação à qual se calculam as porcentagens; no primeiro caso, essa base é a porcentagem de eleitores favoráveis ao candidato antes da propaganda (14%) e no segundo caso é o total (não especificado) de eleitores avaliados na amostra (favoráveis ou não ao candidato).

Uma porcentagem não pode diminuir mais do que 100%. Se o preço de um determinado produto decresce de R\$ 3,60 para R\$ 1,20, a diminuição de preço é de 67% [ $= 100 \times (3,60 - 1,20)/3,60$ ] e não de 200% [ $= 100 \times (3,60 - 1,20)/1,20$ ]. Aqui também, o importante é definir a base: a ideia é comparar a variação de preço (R\$ 2,40) com o preço inicial do produto (R\$ 3,60) e não com o preço final (R\$ 1,20). Na situação limite, em que o produto é oferecido gratuitamente, a variação de preço é de R\$ 3,60; conseqüentemente, a diminuição de preço limite é de 100%. Note que se estivéssemos diante de um aumento de preço de R\$ 1,20 para R\$ 3,60, diríamos que o aumento foi de 200% [ $= 100 \times (3,60 - 1,20)/1,20$ ].

## 2.6 Exercícios

- 1) O objetivo de um estudo da Faculdade de Medicina da USP foi avaliar a associação entre a quantidade de morfina administrada a pacientes com dores intensas provenientes de lesões medulares ou radiculares e a dosagem dessa substância em seus cabelos. Três medidas foram realizadas em cada paciente, a primeira logo após o início do tratamento e as demais após 30 e 60 dias. Detalhes podem ser obtidos no documento disponível no arquivo `morfina.doc`.

A planilha `morfina.xls`, disponível no arquivo `morfina` foi entregue ao estatístico para análise e contém resumos de características demográficas além dos dados do estudo.

- a) Com base nessa planilha, apresente um dicionário com a especi-



ificação das variáveis segundo as indicações da Seção 2.2 e construa a planilha correspondente.

- b) Com as informações disponíveis, construa tabelas para as variáveis sexo, raça, grau de instrução e tipo de lesão segundo as sugestões da Seção 2.3.
- 2) A Figura 2.5 foi extraída de um relatório do Centro de Estatística Aplicada do IME/USP [ver Giampaoli et al. (2008) para detalhes]. Critique-a e reformule-a para facilitar sua leitura.

Sheet1

Subprefeitura	Observado	Ajustado	Nota SP
Aricanduva	0,586	0,588	0,396
Butantã	0,483	0,468	0,334
Campo Limpo	0,484	0,526	0,362
Casa Verde/Cachoeirinha	0,558	0,554	0,382
Cidade Tiradentes	0,543	0,540	0,369
Freguesia/Brasilândia	0,545	0,540	0,371
Ipiranga	0,593	0,539	0,368
Itaim Paulista	0,566	0,557	0,374
Itaquera	0,396	0,563	0,383
Jabaquara	0,533	0,533	0,364
M' Boi Mirim	0,566	0,552	0,368
São Mateus	0,523	0,511	0,354
São Miguel	0,601	0,583	0,395
Socorro	0,601	0,523	0,360
V. Prudente/Sapopemba	0,648	0,620	0,413

**Figura 2.5:** Tabela comparativa das notas médias da avaliação das subprefeituras no modelo padronizado para a escala [0,1]

- 3) Utilize as sugestões para construção de planilhas apresentadas na Seção 2.2 com a finalidade de preparar os dados do arquivo **empresa** para análise estatística.
- 4) Num estudo planejado para avaliar o consumo médio de combustível de veículos em diferentes velocidades foram utilizados 4 automóveis da marca A e 3 automóveis da marca B selecionados ao acaso das respectivas linhas de produção. O consumo (em L/km) de cada um dos 7 automóveis foi observado em 3 velocidades diferentes (40 km/h, 80 km/h e 110 km/h). Delineie uma planilha apropriada para a coleta e análise estatística dos dados, rotulando-a adequadamente.
- 5) Utilizando os dados do arquivo **esforco**, prepare uma planilha **Excel** num formato conveniente para análise pelo **R**. Inclua apenas as variáveis Idade, Altura, Peso, Frequência cardíaca e VO<sub>2</sub> no repouso além do quociente VE/VCO<sub>2</sub>, as correspondentes porcentagens relativamente ao máximo, o quociente VO<sub>2</sub>/FC no pico do exercício e data do óbito.

Importe a planilha Excel que você criou utilizando comandos R e obtenha as características do arquivo importado (número de casos, número de observações omissas etc.)

- 6) A Figura 2.6 contém uma planilha encaminhada pelos investigadores responsáveis por um estudo sobre AIDS para análise estatística. Organize-a de forma a permitir sua análise por meio de um pacote computacional como o R.

Grupo I	Tempo de			Ganho de Peso
registro	Diagnóstico	DST	MAC	por Semana
2847111D	pré natal	não	Pílula	11Kg em 37 semanas
3034048F	6 meses	não	pílula	?
3244701J	1 ano	não	Condon	?
2943791B	pré natal	não	não	8 Kg em 39 semanas
3000327F	4 anos	condiloma/ sífilis	não	9Kg em 39 semanas
3232893D	1 ano	não	DIU	3Kg em 39 semanas
3028772E	3 anos	não	não	3 kg em 38 semanas
3240047G	pré natal	não	pílula	9 Kg em 38 semanas
3017222G		HPV	CONDON	falta exame clínico
3015834J	2 anos	não	condon	14 Kg em 40 semanas
Grupo II	Tempo de			Ganho de Peso
registro	Diagnóstico	DST	MAC	por Semana
3173611E	3 meses	abscesso ovariano	condon	15 Kg em 40 semanas
3296159D	pré natal	não	condon	0 Kg em ? semanas
3147820D1	2 anos	não	sem dados	4 Kg em 37 semanas
3274750K	3 anos	não	condon	8 Kg em 38 semanas
3274447H	pré natal	sifilis com 3 meses	condon	
2960066D	5 anos	não	?	13 Kg em 36 semanas
3235727J	7 anos	não	Condon	(-) 2 Kg em 38 semanas
3264897E		condiloma	condon	nenhum Kg
3044120J	5 anos	HPV		3 Kg em 39 semanas 1

**Figura 2.6:** Planilha com dados de um estudo sobre AIDS.

- 7) A planilha apresentada na Figura 2.7 contém dados de um estudo em que o limiar auditivo foi avaliado nas orelhas direita (OD) e esquerda (OE) de 13 pacientes em 3 ocasiões (Limiar, Teste 1 e Teste 2). Reformate-a segundo as recomendações da Seção 2.2, indicando claramente
- a definição das variáveis,
  - os rótulos para as colunas da planilha.

Limiar	Teste1	Teste2
OD 50 / OE 55	OD/OE 50	OD/OE 80%
OD 41 /OE 40	OD 45/OE 50	OD 68% OE 80%
OD/OE 41,25	OD/OE 45	OD 64% OE 72%
OD 45/OE 43,75	OD 60/OE 50	OD 76%/OE 88%
OD51,25/ OE47,5	OD/OE 50	OD 80%/OE 88%
OD45/ OE 52,5	OD/OE 50	OD 84%/OE 96%
OD 52,5/OE 50	OD55/OE45	OD 40%/OE 28%
OD 42,15/OE48,75	OD 40/OE 50	OD80%/OE76%
OD50/ OE 48,75	OD/OE 50	OD 72%/OE 80%
OD47,5/OE46,25	OD/OE 50	OD/OE 84%
OD55/OE 56,25	OD55/OE60	OD80%/OE 84%
OD/OE 46,25	OD40/OE35	OD72%/OE 84%
OD 50/OE 47,5	OD/OE45	OD/OE 76%

**Figura 2.7:** Limiar auditivo de pacientes observados em 3 ocasiões.

- 8) A planilha disponível no arquivo `idades` contém informações demográficas de 3554 municípios brasileiros.
  - a) Importe-a para permitir a análise por meio do *software* R, indicando os problemas encontrados nesse processo além de sua solução.
  - b) Use o comando `summary` para obter um resumo das variáveis do arquivo.
  - c) Classifique cada variável como numérica ou alfanumérica e indique o número de observações omissas de cada uma delas.
- 9) Preencha a ficha de inscrição do Centro de Estatística Aplicada ([www.ime.usp.br/~cea](http://www.ime.usp.br/~cea)) com as informações de um estudo em que você está envolvido.



# Análise de dados de uma variável

Você pode, certamente, ter um entendimento profundo da natureza por meio de medidas quantitativas, mas você deve saber do que está falando antes que comece a usar os números para fazer previsões.

Lewis Thomas

## 3.1 Introdução

Neste capítulo consideraremos a análise descritiva de dados provenientes da observação de uma variável. As técnicas utilizadas podem ser empregadas tanto para dados provenientes de uma população quanto para dados oriundos de uma amostra.

A ideia de uma análise descritiva de dados é tentar responder as seguintes questões:

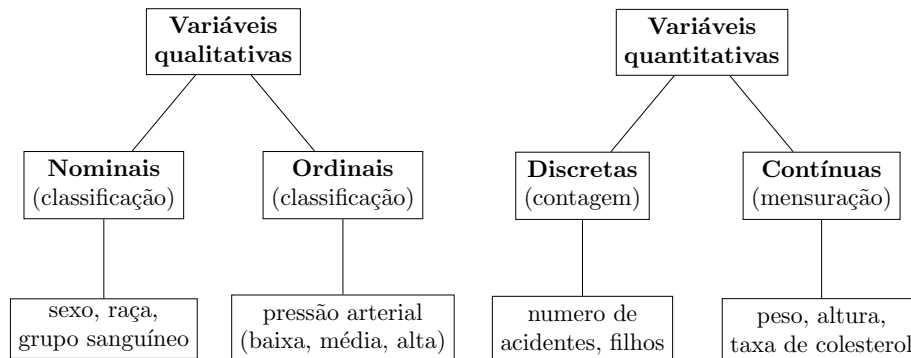
- i) Qual a frequência com que cada valor (ou intervalo de valores) aparece no conjunto de dados ou seja, qual a **distribuição de frequências** dos dados?
- ii) Quais são alguns valores típicos do conjunto de dados, como mínimo e máximo?
- iii) Qual seria um valor para representar a posição (ou localização) central do conjunto de dados?
- iv) Qual seria uma medida da variabilidade ou dispersão dos dados?
- v) Existem valores atípicos ou discrepantes (*outliers*) no conjunto de dados?
- vi) A distribuição de frequências dos dados pode ser considerada simétrica?

Nesse contexto, um dos objetivos da análise descritiva é organizar e exibir os dados de maneira apropriada e para isso utilizamos

- i) gráficos e tabelas;

ii) medidas resumo.

As técnicas empregadas na análise descritiva dependem do tipo de variáveis que compõem o conjunto de dados em questão. Uma possível classificação de variáveis está representada na Figura 3.1.



**Figura 3.1:** Classificação de variáveis.

Variáveis **qualitativas** são aquelas que indicam um atributo (não numérico) da unidade de investigação (sexo, por exemplo). Elas podem ser **ordinais**, quando há uma ordem nas diferentes categorias do atributo (tamanho de uma escola: pequena, média ou grande, por exemplo) ou **nominiais**, quando não há essa ordem (região em que está localizada uma empresa: norte, sul, leste ou oeste, por exemplo).

Variáveis **quantitativas** são aquelas que exibem valores numéricos associados à unidade de investigação (peso, por exemplo). Elas podem ser **discretas**, quando assumem valores no conjunto dos números naturais (número de gestações de uma paciente) ou **contínuas**, quando assumem valores no conjunto dos números reais (tempo gasto por um atleta para percorrer 100 m, por exemplo). Ver Nota de Capítulo 1.

## 3.2 Distribuições de frequências

**Exemplo 3.1:** Consideremos o conjunto de dados o apresentado na Tabela 3.1 obtido de um questionário respondido por 50 alunos de uma disciplina ministrada na Fundação Getúlio Vargas em São Paulo. Os dados estão disponíveis no arquivo `ceagfgv`.

**Tabela 3.1:** Dados de um estudo realizado na FGV

ident	Salário (R\$)	Fluência inglês	Anos de formado	Estado civil	Número de filhos	Bebida preferida
1	3500	fluyente	12,0	casado	1	outra alcoólica
2	1800	nenhum	2,0	casado	3	não alcoólica
3	4000	fluyente	5,0	casado	1	outra alcoólica
4	4000	fluyente	7,0	casado	3	outra alcoólica
5	2500	nenhum	11,0	casado	2	não alcoólica
6	2000	fluyente	1,0	solteiro	0	não alcoólica
7	4100	fluyente	4,0	solteiro	0	não alcoólica
8	4250	algum	10,0	casado	2	cerveja
9	2000	algum	1,0	solteiro	2	cerveja
10	2400	algum	1,0	solteiro	0	não alcoólica
11	7000	algum	15,0	casado	1	não alcoólica
12	2500	algum	1,0	outros	2	não alcoólica
13	2800	fluyente	2,0	solteiro	1	não alcoólica
14	1800	algum	1,0	solteiro	0	não alcoólica
15	3700	algum	10,0	casado	4	cerveja
16	1600	fluyente	1,0	solteiro	2	cerveja
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
26	1000	algum	1,0	solteiro	1	outra alcoólica
27	2000	algum	5,0	solteiro	0	outra alcoólica
28	1900	fluyente	2,0	solteiro	0	outra alcoólica
29	2600	algum	1,0	solteiro	0	não alcoólica
30	3200		6,0	casado	3	cerveja
31	1800	algum	1,0	solteiro	2	outra alcoólica
32	3500		7,0	solteiro	1	cerveja
33	1600	algum	1,0	solteiro	0	não alcoólica
34	1700	algum	4,0	solteiro	0	não alcoólica
35	2000	fluyente	1,0	solteiro	2	não alcoólica
36	3200	algum	3,0	solteiro	2	outra alcoólica
37	2500	fluyente	2,0	solteiro	2	outra alcoólica
38	7000	fluyente	10,0	solteiro	1	não alcoólica
39	2500	algum	5,0	solteiro	1	não alcoólica
40	2200	algum	0,0	casado	0	cerveja
41	1500	algum	0,0	solteiro	0	não alcoólica
42	800	algum	1,0	solteiro	0	não alcoólica
43	2000	fluyente	1,0	solteiro	0	não alcoólica
44	1650	fluyente	1,0	solteiro	0	não alcoólica
45		algum	1,0	solteiro	0	outra alcoólica
46	3000	algum	7,0	solteiro	0	cerveja
47	2950	fluyente	5,5	outros	1	outra alcoólica
48	1200	algum	1,0	solteiro	0	não alcoólica
49	6000	algum	9,0	casado	2	outra alcoólica
50	4000	fluyente	11,0	casado	3	outra alcoólica

Em geral, a primeira tarefa de uma análise estatística de um conjunto de dados consiste em resumi-los. As técnicas disponíveis para essa finalidade dependem do tipo de variáveis envolvidas, tema que discutiremos a seguir.

### 3.2.1 Variáveis qualitativas

Uma tabela contendo as frequências (absolutas e/ou relativas) de unidades de investigação classificadas em cada categoria de uma variável qualitativa indica sua distribuição de frequências. A frequência absoluta corresponde ao número de unidades (amostrais ou populacionais) em cada classe e a frequência relativa indica a porcentagem correspondente. As Tabelas 3.2 e 3.3, por exemplo, representam respectivamente as distribuições de frequências das variáveis “Bebida preferida” e “Fluência em inglês” para os dados do Exemplo 3.1.

**Tabela 3.2:** Distribuição de frequências para a variável Bebida preferida correspondente ao Exemplo 3.1

Bebida preferida	Frequência observada	Frequência relativa (%)
não alcoólica	23	46
cerveja	11	22
outra alcoólica	16	32
Total	50	100

**Tabela 3.3:** Distribuição de frequências para a variável Fluência em inglês correspondente ao Exemplo 3.1

Fluência em inglês	Frequência observada	Frequência relativa (%)	Frequência acumulada (%)
nenhuma	2	4	4
alguma	26	54	58
fluyente	20	42	100
Total	48	100	

Obs: dois participantes não forneceram informação.

Note que para variáveis qualitativas ordinais pode-se acrescentar uma coluna com as frequências relativas acumuladas que podem ser úteis na sua análise. Por exemplo a partir da última coluna da Tabela 3.3 pode-se afirmar que cerca de 60% dos alunos que forneceram a informação tem no máximo alguma fluência em inglês.

O resumo exibido nas tabelas com distribuições de frequências pode ser representado por meio de gráficos de barras ou gráficos do tipo pizza (ou torta). Exemplos correspondentes às variáveis “Bebida preferida” e “Fluência em inglês” são apresentados nas Figuras 3.2, 3.3 e 3.4.



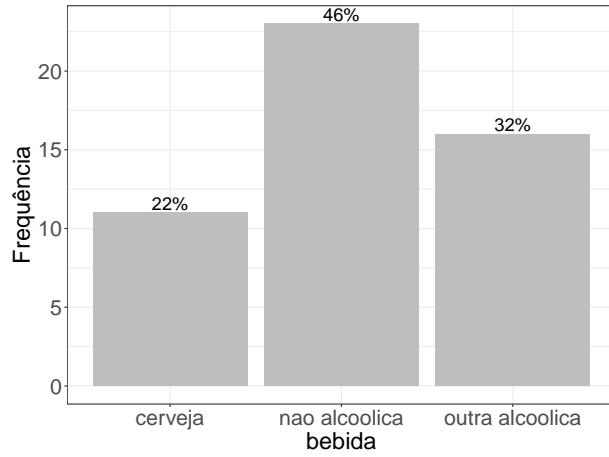


Figura 3.2: Gráfico de barras para Bebida preferida.

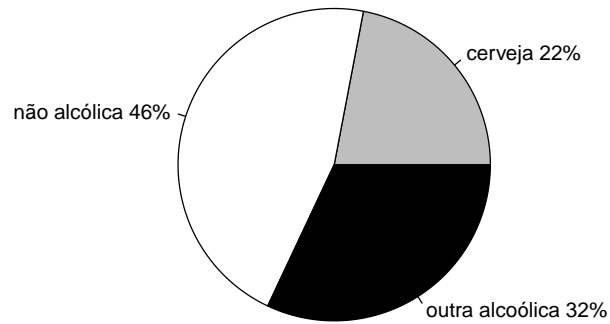


Figura 3.3: Gráfico tipo pizza para Bebida preferida.

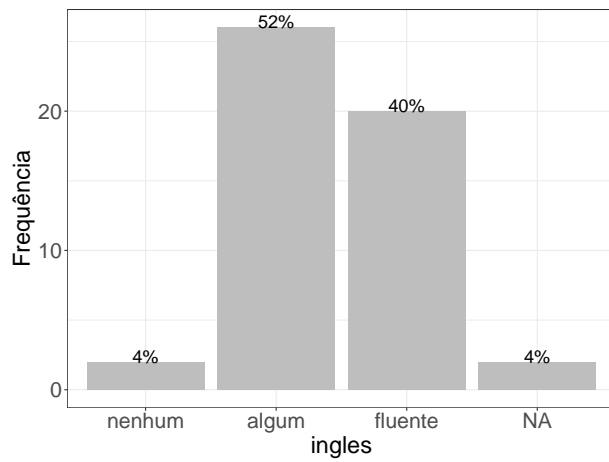


Figura 3.4: Gráfico de barras para Fluência em inglês.

Note que na Figura 3.2 as barras podem ser colocadas em posições arbitrárias; na Figura 3.4, convém colocá-las de acordo com a ordem natural das categorias.

### 3.2.2 Variáveis quantitativas

Se utilizássemos o mesmo critério adotado para variáveis qualitativas na construção de distribuições de frequências de variáveis quantitativas (especialmente no caso de variáveis contínuas), em geral obteríamos tabelas com frequências muito pequenas (em geral iguais a 1) nas diversas categorias, deixando de atingir o objetivo de resumir os dados. Para contornar o problema, agrupam-se os valores das variáveis em classes e obtêm-se as frequências em cada classe.

Uma possível distribuição de frequências para a variável “Salário” correspondente ao Exemplo 3.1 está apresentada na Tabela 3.4.

**Tabela 3.4:** Distribuição de frequências para a variável Salário correspondente ao Exemplo 3.1

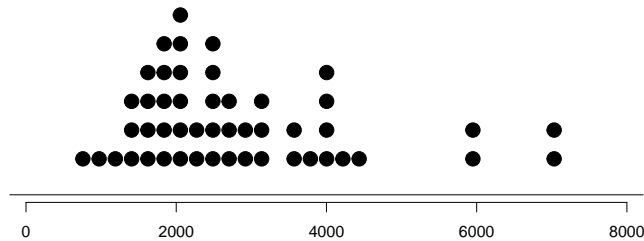
Classe de salário (R\$)	Frequência observada	Frequência relativa (%)	Frequência relativa acumulada (%)
0 — 1500	6	12,2	12,2
1500 — 3000	27	55,1	67,3
3000 — 4500	12	24,5	91,8
4500 — 6000	2	4,1	95,9
6000 — 7500	2	4,1	100,0
Total	49	100,0	100,0

Obs: um dos participantes não informou o salário.

Alternativamente a tabelas com o formato da Tabela 3.4, vários gráficos podem ser utilizados para representar a distribuição de frequências das variáveis quantitativas de um conjunto de dados. Os mais utilizados são apresentados a seguir.

#### Gráfico de dispersão unidimensional (*dotplot*)

Neste tipo de gráfico representamos os valores  $x_1, \dots, x_n$  por pontos ao longo de um segmento de reta provido de uma escala. Valores repetidos são empilhados, de modo que possamos ter uma ideia de sua distribuição. O gráfico de dispersão unidimensional para a variável Salário do Exemplo 3.1 está representado na Figura 3.5.



**Figura 3.5:** Gráfico de dispersão unidimensional para Salário (Exemplo 3.1).

### Gráfico ramo-e-folhas (*Stem and leaf*)

Um procedimento alternativo para reduzir um conjunto de dados sem perder muita informação sobre eles consiste na construção de um gráfico chamado **ramo e folhas**. Não há regras fixas para construí-lo, mas a ideia é dividir cada observação em duas partes: o **ramo**, colocado à esquerda de uma linha vertical, e a **folha**, colocada à direita.

Considere a variável “Salário” do Exemplo 3.1. Para cada observação podemos considerar o primeiro dígito como o ramo e o segundo como folha, desprezando as dezenas. O gráfico correspondente, apresentado na Figura 3.6 permite avaliar a forma da distribuição das observações; em particular, vemos que há quatro valores atípicos, nomeadamente, dois iguais a R\$ 6000 (correspondentes aos alunos 22 e 49) e dois iguais a R\$ 7000 (correspondentes aos alunos 11 e 38), respectivamente.

```

1 | 2: representa 1200
unidade da folha: 100
n: 49
0 | 8
1 | 023
1 | 55666788899
2 | 000000234
2 | 55556789
3 | 0222
3 | 557
4 | 00012
4 | 5
5 |
5 |
6 | 00
6 |
7 | 00

```

**Figura 3.6:** Gráfico ramo-e-folhas para a variável Salário (R\$).

### Histograma

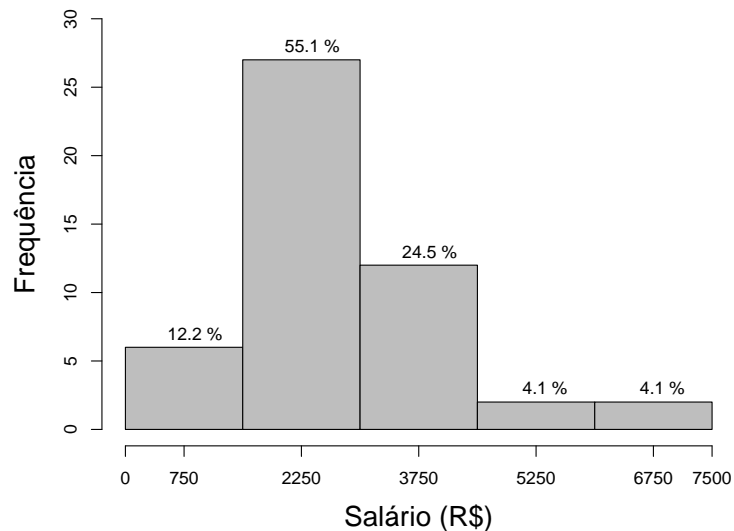
O histograma é um gráfico construído a partir da distribuição de frequências e é composto de retângulos contíguos cuja área total é normalizada para ter

valor unitário. A **área** de cada retângulo corresponde à frequência relativa associada à classe definida por sua base.

Um histograma correspondente à distribuição de frequências indicada na Tabela 3.4 está representado na Figura 3.7.

Formalmente, dados os valores  $x_1, \dots, x_n$  de uma variável quantitativa  $X$ , podemos construir uma tabela contendo

- a frequência absoluta  $n_k$ , que corresponde ao número de elementos cujos valores pertencem à classe  $k$ ,  $k = 1, \dots, K$ ;
- a frequência relativa  $f_k = n_k/n$ , que é a proporção de elementos cujos valores pertencem à classe  $k$ ,  $k = 1, \dots, K$ ;
- a densidade de frequência  $d_k = f_k/h_k$  que representa a proporção de valores pertencentes à classe  $k$  por unidade de comprimento  $h_k$  de cada classe,  $k = 1, \dots, K$ .



**Figura 3.7:** Histograma para a variável salário (R\$).

**Exemplo 3.2:** Os dados correspondentes à população<sup>1</sup> (em 10000 habitantes) de 30 municípios brasileiros (IBGE, 1996) estão dispostos na Tabela 3.5. Os dados estão disponíveis no arquivo `municipios`.

<sup>1</sup>Aqui, o termo “população” se refere ao número de habitantes e é encarado como uma variável. Não deve ser confundido com população no contexto estatístico, que se refere a um conjunto (na maioria das vezes, conceitual) de valores de uma ou mais variáveis medidas. Podemos considerar, por exemplo, a população de pesos de pacotes de feijão produzidos por uma empresa.

**Tabela 3.5:** População de 30 municípios brasileiros (10000 habitantes)

Município	População	Município	População
São Paulo (SP)	988,8	Nova Iguaçu (RJ)	83,9
Rio de Janeiro (RJ)	556,9	São Luís (MA)	80,2
Salvador (BA)	224,6	Maceió (AL)	74,7
Belo Horizonte (MG)	210,9	Duque de Caxias (RJ)	72,7
Fortaleza (CE)	201,5	S, Bernardo do Campo (SP)	68,4
Brasília (DF)	187,7	Natal (RN)	66,8
Curitiba (PR)	151,6	Teresina (PI)	66,8
Recife (PE)	135,8	Osasco (SP)	63,7
Porto Alegre (RS)	129,8	Santo André (SP)	62,8
Manaus (AM)	119,4	Campo Grande (MS)	61,9
Belém (PA)	116,0	João Pessoa (PB)	56,2
Goiânia (GO)	102,3	Jaboatão (PE)	54,1
Guarulhos (SP)	101,8	Contagem (MG)	50,3
Campinas (SP)	92,4	S, José dos Campos (SP)	49,7
São Gonçalo (RJ)	84,7	Ribeirão Preto (SP)	46,3

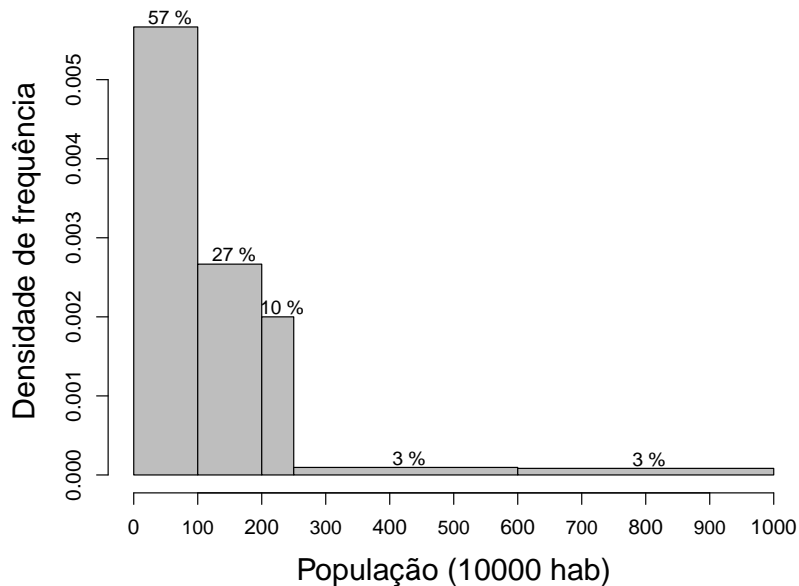
Ordenemos os valores  $x_1, \dots, x_{30}$  das populações dos 30 municípios, do menor para o maior e consideremos a primeira classe como aquela com limite inferior igual a 40 e a última com limite superior igual a 1000; para que as classes sejam disjuntas, devemos considerar intervalos de classe semi-abertos. A Tabela 3.6 contém a distribuição de frequências para a variável  $X$  que representa população. Observemos que as duas primeiras classes têm amplitudes iguais a 100, a terceira tem amplitude 50, a penúltima tem amplitude igual 350 e a última, amplitude igual a 400. Observemos também que  $K = 5$ ,  $\sum_{k=1}^K n_k = n = 30$  e que  $\sum_{k=1}^K f_k = 1$ . Quanto maior for a densidade de frequência de uma classe, maior será a concentração de valores nessa classe.

O valor da amplitude de classes  $h$  deve ser escolhido de modo adequado. Se  $h$  for grande, teremos poucas classes e o histograma pode não mostrar detalhes importantes; por outro lado, se  $h$  for pequeno, teremos muitas classes e algumas poderão ser vazias. A escolha do número e amplitude das classes é arbitrária. Detalhes técnicos sobre a escolha do número de classes em casos específicos podem ser encontrados na Nota de Capítulo 2. Uma definição mais técnica de histograma está apresentada na Nota de Capítulo 3.

**Tabela 3.6:** Distribuição de frequências para a variável  $X =$  população em dezenas de milhares de habitantes

classes	$h_k$	$n_k$	$f_k$	$d_k = f_k/h_k$
00 – 100	100	17	0,567	0,00567
100 – 200	100	8	0,267	0,00267
200 – 250	50	3	0,100	0,00200
250 – 600	350	1	0,033	0,00010
600 – 1000	400	1	0,033	0,00008
Total	–	30	1,000	–

O histograma da Figura 3.8 corresponde à distribuição de frequências da variável  $X$  do Exemplo 3.2, obtido usando a função `hist()`.



**Figura 3.8:** Histograma para a variável População (10000 habitantes).

O gráfico de ramo-e-folhas para os dados da Tabela 3.5 está apresentado na Figura 3.9. Por meio desse gráfico podemos avaliar a forma da distribuição das observações; em particular, vemos que há dois valores atípicos, 556,9 e 988,8, correspondentes às populações do Rio de Janeiro e São Paulo, respectivamente.

```

1 | 2: representa 120
unidade da folha: 10
n: 30
 0 | 44555666666778889
 1 | 00112358
 2 | 012
 3 |
 4 |
 5 | 5
 6 |
 7 |
 8 |
 9 | 8

```

**Figura 3.9:** Gráfico ramo-e-folhas para a variável População (10000 habitantes).

Quando há muitas folhas num ramo, podemos considerar ramos subdivididos, como no exemplo a seguir.

**Exemplo 3.3:** Os dados disponíveis no arquivo `poluicao` correspondem à concentração atmosférica dos poluentes ozônio ( $O_3$ ) e monóxido de carbono (CO) além de temperatura média e umidade na cidade de São Paulo entre 1 de janeiro e 30 de abril de 1991. O gráfico de ramo-e-folhas para a concentração de monóxido de carbono pode ser construído com dois ramos, colocando-se no primeiro folhas com dígitos de 0 a 4 e no segundo, folhas com dígitos de 5 a 9. Esse gráfico está apresentado na Figura 3.10

A separação decimal está em |

```

 4 | 77
 5 | 12
 5 | 55677789
 6 | 11111222222223333444444
 6 | 56666777778999999999
 7 | 00122233444
 7 | 5566777778888899999999
 8 | 012334
 8 | 55678999
 9 | 0114
 9 | 557
10 | 1333
10 | 8
11 | 4
11 | 69
12 | 0
12 | 5

```

**Figura 3.10:** Gráfico ramo-e-folhas para a variável CO (ppm).

### 3.3 Medidas resumo

Em muitas situações deseja-se fazer um resumo mais drástico de um determinado conjunto de dados, por exemplo, por meio de um ou dois valores. A renda per capita de um país ou a porcentagem de eleitores favoráveis a um candidato são exemplos típicos. Com essa finalidade podem-se considerar as chamadas medidas de posição (localização ou de tendência central), as medidas de dispersão e medidas de forma, entre outras.

#### 3.3.1 Medidas de posição

As medidas de posição mais utilizadas são a média, a mediana, a média aparada e os quantis. Para defini-las, consideremos as observações  $x_1, \dots, x_n$  de uma variável  $X$ .

A **média aritmética** (ou simplesmente média) é definida por

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (3.1)$$

No caso de dados agrupados numa distribuição de frequências de um conjunto com  $n$  valores,  $K$  classes e  $n_k$  valores na classe  $k$ ,  $k = 1, \dots, K$ , a média pode ser calculada como

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^K n_k \tilde{x}_k = \sum_{k=1}^K f_k \tilde{x}_k, \quad (3.2)$$

em que  $\tilde{x}_k$  é o ponto médio correspondente à classe  $k$  e  $f_k = n_k/n$ . Essa mesma expressão é usada para uma variável discreta, com  $n_k$  valores iguais a  $x_k$ , bastando para isso, substituir  $\tilde{x}_k$  por  $x_k$  em (3.2).

A **mediana** é definida em termos das **estatísticas de ordem**,  $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$  por

$$\text{md}(x) = \begin{cases} x_{(\frac{n+1}{2})}, & \text{se } n \text{ for ímpar,} \\ \frac{1}{2}[x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)}], & \text{se } n \text{ for par} \end{cases} \quad (3.3)$$

Dado um número  $0 < \alpha < 1$ , a **média aparada** de ordem  $\alpha$ ,  $\bar{x}(\alpha)$  é definida como a média do conjunto de dados obtido após a eliminação das  $100\alpha\%$  primeiras observações ordenadas e das  $100\alpha\%$  últimas observações ordenadas do conjunto original. Uma definição formal é:

$$\bar{x}(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{n(1-2\alpha)} \left\{ \sum_{i=m+2}^{n-m-1} x_{(i)} + (1+m-n\alpha)[x_{(m+1)} + x_{(n-m)}] \right\}, & \text{se } m+2 \leq n-m+1 \\ \frac{1}{2}[x_{(m+1)} + x_{(n-m)}] & \text{em caso contrário.} \end{cases} \quad (3.4)$$

em que  $m$  é o maior inteiro menor ou igual a  $n\alpha$ ,  $0 < \alpha < 0,5$ . Se  $\alpha = 0,5$ , obtemos a mediana. Para  $\alpha = 0,25$  obtemos a chamada **meia média**. Observe que se  $\alpha = 0$ ,  $\bar{x}(0) = \bar{x}$ .



**Exemplo 3.4:** Consideremos o seguinte conjunto com  $n = 10$  valores de uma variável  $X$ :  $\{14, 7, 3, 18, 9, 220, 34, 23, 6, 15\}$ . Então,  $\bar{x} = 34,9$ ,  $\text{md}(x) = (14 + 15)/2 = 14,5$ , e  $\bar{x}(0,2) = [x_{(3)} + x_{(4)} + \dots + x_{(8)}]/6 = 14,3$ . Note que se usarmos (3.4), temos  $\alpha = 0,2$  e  $m = 2$  obtendo o mesmo resultado. Se  $\alpha = 0,25$ , então de (3.4) obtemos

$$\bar{x}(0,25) = \frac{x_{(3)} + 2x_{(4)} + 2x_{(5)} + \dots + 2x_{(7)} + x_{(8)}}{10} = 14,2.$$

Observe que a média é bastante afetada pelo valor atípico 220, ao passo que a mediana e a média aparada com  $\alpha = 0,2$  não o são. Dizemos que essas duas últimas são **medidas resistentes** ou **robustas**.<sup>2</sup> Se substituirmos o valor 220 do exemplo por 2200, a média passa para 232,9 ao passo que a mediana e a média aparada  $\bar{x}(0,20)$  não se alteram.

As três medidas consideradas acima são chamadas de medidas de posição ou localização central do conjunto de dados. Para variáveis qualitativas também é comum utilizarmos outra medida de posição que indica o valor mais frequente, denominado **moda**. Quando há duas classes com a mesma frequência máxima, a variável (ou distribuição) é dita **bimodal**. A não ser que os dados de uma variável contínua sejam agrupados em classes, caso em que se pode considerar a **classe modal**, não faz sentido considerar a moda, pois em geral, cada valor da variável tem frequência unitária.

## Quantis

Consideremos agora medidas de posição úteis para indicar posições não centrais dos dados. Informalmente, um **quantil- $p$**  ou **quantil de ordem  $p$**  é **um valor da variável** (quando ela é contínua) ou **um valor interpolado entre dois valores da variável** (quando ela é discreta) que deixa  $100p\%$  ( $0 < p < 1$ ) das observações à sua esquerda. Formalmente, definimos o **quantil- $p$  empírico** (ou simplesmente **quantil- $p$** ) como

$$Q(p) = \begin{cases} x_{(i)}, & \text{se } p = p_i = (i - 0,5)/n, i = 1, \dots, n \\ (1 - f_i)Q(p_i) + f_iQ(p_{i+1}), & \text{se } p_i < p < p_{i+1} \\ x_{(1)}, & \text{se } 0 < p < p_1 \\ x_{(n)}, & \text{se } p_n < p < 1, \end{cases} \quad (3.5)$$

em que  $f_i = (p - p_i)/(p_{i+1} - p_i)$ . Ou seja, se  $p$  for da forma  $p_i = (i - 0,5)/n$ , o **quantil- $p$**  coincide com a  $i$ -ésima observação ordenada. Para um valor  $p$  entre  $p_i$  e  $p_{i+1}$ , o **quantil  $Q(p)$**  pode ser definido como sendo a ordenada de um ponto situado no segmento de reta determinado por  $[p_i, Q(p_i)]$  e  $[p_{i+1}, Q(p_{i+1})]$  num gráfico cartesiano de  $p$  versus  $Q(p)$ .

Escolhemos  $p_i$  como acima (e não como  $i/n$ , por exemplo) de forma que se um **quantil** coincidir com uma das observações, metade dela pertencerá

<sup>2</sup>Uma medida é dita resistente se ela muda pouco quando alterarmos um número pequeno dos valores do conjunto de dados.

ao conjunto de valores à esquerda de  $Q(p)$  e metade ao conjunto de valores à sua direita.

Os quantis amostrais para os dez pontos do Exemplo 3.4 estão indicados na Tabela 3.7.

**Tabela 3.7:** Quantis amostrais para os dados do Exemplo 3.4

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p_i$	0,05	0,15	0,25	0,35	0,45	0,55	0,65	0,75	0,85	0,95
$Q(p_i)$	3	6	7	9	14	15	18	23	34	220

Com essa informação, podemos calcular outros quantis; por exemplo,

$$Q(0,10) = [x_{(1)} + x_{(2)}]/2 = (3 + 6)/2 = 4,5,$$

com  $f_1 = (0,10 - 0,05)/(0,10) = 0,5$ ,

$$Q(0,90) = [x_{(9)} + x_{(10)}]/2 = (34 + 220)/2 = 127,$$

pois  $f_9 = 0,5$ ,

$$Q(0,62) = [0,30 \times x_{(6)} + 0,70 \times x_{(7)}] = (0,3 \times 15 + 0,7 \times 18) = 17,1,$$

pois  $f_6 = (0,62 - 0,55)/0,10 = 0,7$ .

Note que a definição (3.5) é compatível com a definição de mediana apresentada anteriormente.

Os quantis  $Q(0,25)$ ,  $Q(0,50)$  e  $Q(0,75)$  são chamados **quartis** e usualmente são denotados  $Q_1$ ,  $Q_2$  e  $Q_3$ , respectivamente. O quartil  $Q_2$  é a mediana e a proporção dos dados entre  $Q_1$  e  $Q_3$  para variáveis contínuas é 50%.

Outras denominações comumente empregadas são  $Q(0,10)$ : primeiro decil,  $Q(0,20)$ : segundo decil ou vigésimo percentil,  $Q(0,85)$ : octogésimo-quinto percentil etc.

### 3.3.2 Medidas de dispersão

Duas medidas de dispersão (ou de escala ou de variabilidade) bastante usadas são obtidas tomando-se a média de alguma função positiva dos desvios das observações em relação à sua média. Considere as observações  $x_1, \dots, x_n$ , não necessariamente distintas. A **variância** desse conjunto de dados é definida por

$$\text{Var}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (3.6)$$

Neste caso, a função a que nos referimos é quadrática. Para uma tabela de frequências (com  $K$  classes), a expressão para cálculo da variância é

$$\text{Var}(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^K n_k (\tilde{x}_k - \bar{x})^2 = \sum_{k=1}^K f_k (\tilde{x}_k - \bar{x})^2, \quad (3.7)$$

com a notação estabelecida anteriormente. Para facilitar os cálculos, convém substituir (3.6) pela expressão equivalente

$$\text{Var}(x) = n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2. \quad (3.8)$$

Analogamente, podemos substituir (3.7) por

$$\text{Var}(x) = n^{-1} \sum_{k=1}^K f_k \tilde{x}_k^2 - \bar{x}^2. \quad (3.9)$$

Como a unidade de medida da variância é o quadrado da unidade de medida da variável correspondente, convém definir outra medida de dispersão que mantenha a unidade original. Uma medida com essa propriedade é a raiz quadrada positiva da variância, conhecida por **desvio padrão**.

Para garantir certas propriedades estatísticas úteis para propósitos de inferência, convém modificar as definições acima. Em particular, para garantir que a variância obtida de uma amostra de dados de uma população seja um **estimador não enviesado** da variância populacional basta definir a variância como

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (3.10)$$

em substituição à definição (3.6).

Um estimador (a variância amostral  $S^2$ , por exemplo) de um determinado parâmetro (a variância populacional  $\sigma^2$ , por exemplo) é dito não enviesado quando seu valor esperado é o próprio parâmetro que está sendo estimado. *Grosso modo*, se um conjunto “infinito” (aqui interpretado como muito grande) de amostras for colhido da população sob investigação e para cada uma delas for calculado o valor desse estimador não enviesado, a média desses valores será o próprio parâmetro (ou estará bem próxima dele).

Dizemos que o estimador  $S^2$  tem  $n-1$  **graus de liberdade** pois “perdemos” um grau de liberdade ao estimar a média populacional  $\mu$  por meio de  $\bar{x}$ , ou seja, dado o valor  $\bar{x}$ , só temos “liberdade” para escolher  $n-1$  valores da variável  $X$ , pois o último valor, digamos  $x_n$ , é obtido como  $x_n = n\bar{x} - \sum_{k=1}^{n-1} x_k$ .

Note que se  $n$  for grande (*e.g.*,  $n = 100$ ) (3.10) e (3.6) têm valores praticamente iguais. Para detalhes, veja Bussab e Morettin (2017).

Em geral,  $S^2$  é conhecida por **variância amostral**. A **variância populacional** é definida como em (3.10) com o denominador  $n-1$  substituído pelo tamanho populacional  $N$  e a média amostral  $\bar{x}$  substituída pela média populacional  $\mu$ . O desvio padrão amostral é usualmente denotado por  $S$ .

O **desvio médio** ou **desvio absoluto médio** é definido por

$$\text{dm}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|. \quad (3.11)$$

Neste caso, a função a que nos referimos acima é a função "valor absoluto".

Outra medida de dispersão bastante utilizada é a **distância interquartis** ou **amplitude interquartis**

$$d_Q = Q_3 - Q_1. \quad (3.12)$$

A distância interquartis pode ser utilizada para estimar o desvio padrão conforme indicado na Nota de Capítulo 4.

Podemos também considerar uma medida de dispersão definida em termos de desvios em relação à mediana. Como a mediana é uma medida robusta, nada mais natural que definir o **desvio mediano absoluto** como

$$\text{dma}(x) = \text{md}_{1 \leq i \leq n} |x_i - \text{md}(x)|, \quad (3.13)$$

Finalmente, uma medida correspondente à média aparada é a **variância aparada**, definida por

$$S^2(\alpha) = \begin{cases} \frac{c_\alpha}{n(1-2\alpha)} \left( \sum_{i=m+2}^{n-m-1} [x_{(i)} - \bar{x}(\alpha)]^2 + A \right), & m+2 \leq n-m+1 \\ \frac{1}{2} [(x_{(m+1)} - \bar{x}(\alpha))^2 + (x_{(n-m)} - \bar{x}(\alpha))^2], & \text{em caso contrário} \end{cases} \quad (3.14)$$

em que

$$A = (1 + m - n\alpha)[(x_{(m+1)} - \bar{x}(\alpha))^2 + (x_{(n-m)} - \bar{x}(\alpha))^2],$$

$m$  é como em (3.4) e  $c_\alpha$  é uma constante normalizadora que torna  $S^2(\alpha)$  um estimador não enviesado para  $\sigma^2$ . Para  $n$  grande,  $c_\alpha = 1,605$ . Para amostras pequenas, veja a tabela da página 173 de Johnson e Leone (1964). Em particular, para  $n = 10$ ,  $c_\alpha = 1,46$ .

A menos do fator  $c_\alpha$ , a variância aparada pode ser obtida calculando-se a variância amostral das observações restantes, após a eliminação das  $100\alpha\%$  iniciais e finais (com denominador  $n-l$  em que  $l$  é o número de observações desprezadas).

Considere as observações do Exemplo 3.4. Para esse conjunto de dados as medidas de dispersão apresentadas são  $S^2 = 4313,9$ ;  $S = 65,7$ ;  $\text{dm}(x) = 37,0$ ;  $d_Q = 23 - 7 = 16$ ;  $S^2(0,20) = 34,3$ ;  $S(0,20) = 5,9$  e  $\text{dma}(x) = 7,0$ .

Observemos que as medidas robustas são, em geral, menores do que  $\bar{x}$  e  $S$  e que  $d_Q/1,349 = 11,9$ . Se considerarmos que esses dados constituem uma amostra de uma população com desvio padrão  $\sigma$ , pode-se mostrar que,  $\text{dma}/0,6745$  é um estimador não enviesado para  $\sigma$ . A constante  $0,6745$  é obtida por meio de considerações assintóticas. No exemplo,  $\text{dma}/0,6745 = 10,4$ . Note que esses dois estimadores do desvio padrão populacional coincidem. Por outro lado,  $S$  é muito maior, pois sofre bastante influencia do valor 220. Retirando-se esse valor do conjunto de dados, a média dos valores restantes é  $14,3$  e o correspondente desvio padrão é  $9,7$ .

Uma outra medida de dispersão, menos utilizada na prática é a **amplitude**, definida como  $\max(x_1, \dots, x_n) - \min(x_1, \dots, x_n)$ .

### 3.3.3 Medidas de forma

Embora sejam menos utilizadas na prática que as medidas de posição e dispersão, as medidas de **assimetria** (*skewness*) e **curtose** são úteis para identificar modelos probabilísticos para análise inferencial.

Na Figura 3.11 estão apresentados histogramas correspondentes a dados com assimetria positiva (ou à direita) ou negativa (ou à esquerda) e simétrico.

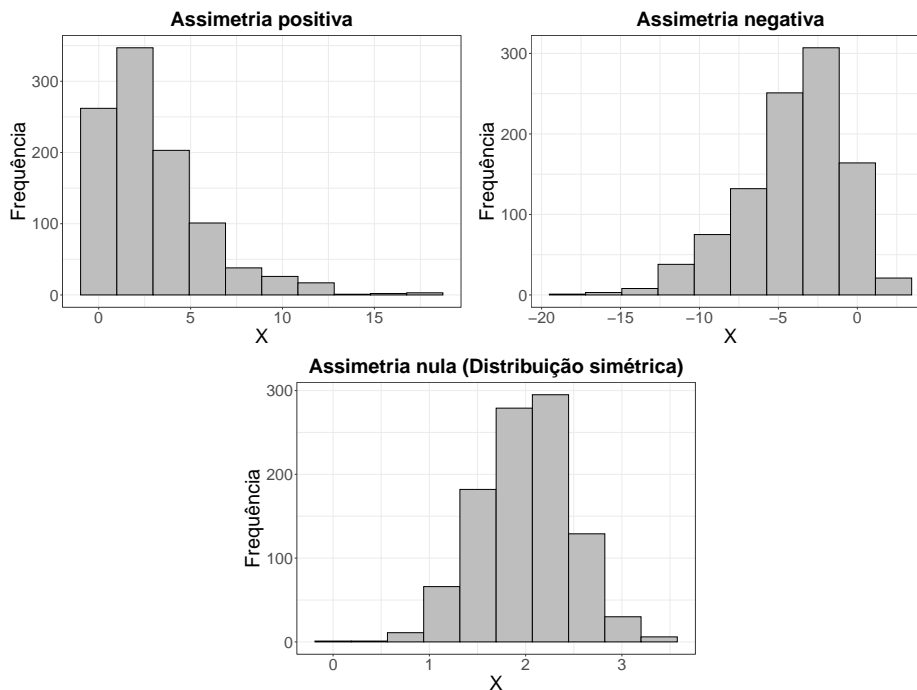
O objetivo das medidas de assimetria é quantificar sua magnitude e, em geral, são baseadas na relação entre o segundo e o terceiro **momentos centrados**, nomeadamente

$$m_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad \text{e} \quad m_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3.$$

Dentre as medidas de assimetria, as mais comuns são:

- o coeficiente de assimetria de Fisher-Pearson:  $g_1 = m_3/m_2^{3/2}$
- o coeficiente de assimetria de Fisher-Pearson ajustado:

$$\frac{\sqrt{n(n-1)}}{n-1} \sum_{i=1}^n [(x_i - \bar{x})/\sqrt{m_2}]^3. \quad (3.15)$$



**Figura 3.11:** Histogramas com assimetria positiva e negativa e nula.

As principais propriedades desses coeficientes são

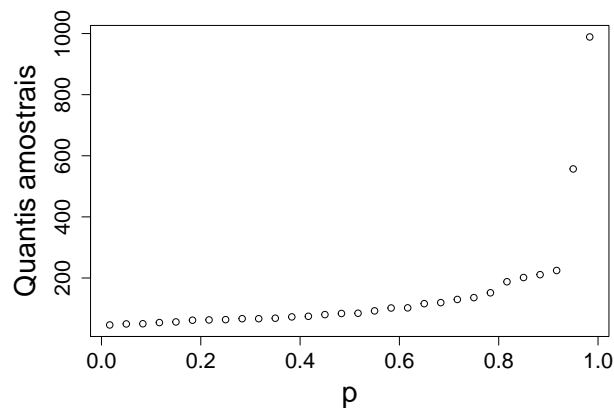
- i) seu sinal reflete a direção da assimetria (sinal negativo corresponde a assimetria à direita e sinal positivo corresponde a assimetria à esquerda);
- ii) comparam a assimetria dos dados com aquela da distribuição Normal, que é simétrica;
- iii) valores mais afastados do zero indicam maiores magnitudes de assimetria e conseqüentemente, maior afastamento da distribuição Normal;
- iv) a estatística indicada em (3.15) tem um ajuste para o tamanho amostral;
- v) esse ajuste tem pequeno impacto em grandes amostras.

Outro coeficiente de assimetria mais intuitivo é o chamado **Coefficiente de assimetria de Pearson 2**,

$$Sk_2 = 3[\bar{x} - md(x)]/s.$$

A avaliação de assimetria também pode ser concretizada por meios gráficos. Em particular, o gráfico de  $Q(p)$  versus  $p$  conhecido como **gráfico de quantis** é uma ferramenta importante para esse propósito.

A Figura 3.12 mostra o gráfico de quantis para os dados do Exemplo 3.2. Notamos que os pontos correspondentes a São Paulo e Rio de Janeiro são destacados. Se a distribuição dos dados for aproximadamente simétrica, a inclinação na parte superior do gráfico deve ser aproximadamente igual àquela da parte inferior, o que não acontece na figura em questão.



**Figura 3.12:** Gráfico de quantis para População (10000 habitantes).

Os cinco valores  $x_{(1)}, Q_1, Q_2, Q_3, x_{(n)}$ , isto é, os extremos e os quartis, são medidas de localização importantes para avaliarmos a simetria dos dados. Para uma distribuição simétrica (ou aproximadamente simétrica), espera-se que

- a)  $Q_2 - x_{(1)} \approx x_{(n)} - Q_2$ ;
- b)  $Q_2 - Q_1 \approx Q_3 - Q_2$ ;
- c)  $Q_1 - x_{(1)} \approx x_{(n)} - Q_3$ .

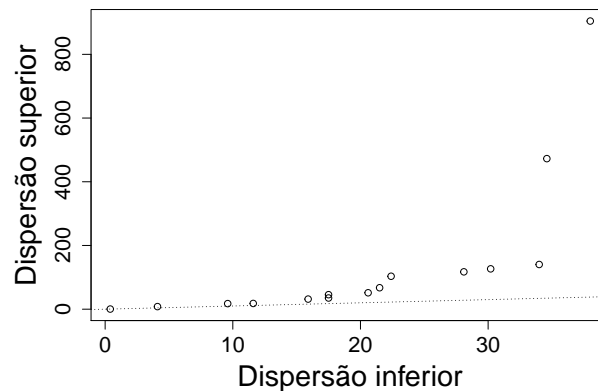
A condição a) nos diz que a **dispersão inferior** é igual (ou aproximadamente igual) à **dispersão superior**. Para distribuições assimétricas à direita, as diferenças entre os quantis situados à direita da mediana e a mediana são maiores que as diferenças entre a mediana e os quantis situados à sua esquerda.

Além disso, se uma distribuição for (aproximadamente) simétrica, vale a relação

$$Q_2 - x_{(i)} \approx x_{(n+1-i)} - Q_2, \quad i = 1, \dots, [(n+1)/2], \quad (3.16)$$

em que  $[x]$  representa o maior inteiro contido em  $x$ . Definindo  $u_i = Q_2 - x_{(i)}$  e  $v_i = x_{(n+1-i)} - Q_2$ , podemos considerar um **gráfico de simetria**, no qual colocamos os valores  $u_i$  como abcissas e os valores  $v_i$  como ordenadas. Se a distribuição dos dados for simétrica, os pontos  $(u_i, v_i)$  deverão estar sobre (ou próximos) da reta  $u = v$ .

O gráfico de simetria para os dados do Exemplo 3.2 está apresentado a Figura 3.13, na qual podemos observar que a maioria dos pontos está acima da reta  $u = v$ , representada pela linha pontilhada mostrando que a distribuição correspondente apresenta uma assimetria à direita.



**Figura 3.13:** Gráfico de simetria para População (10000 habitantes).

Outra medida de interesse para representar a distribuição de frequências dos dados é a **curtose**, que está relacionada com as frequências relativas em suas caudas. Essa medida envolve momentos de quarta ordem.

Seja  $X$  uma variável aleatória qualquer, com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ . A **curtose** de  $X$  é definida por

$$K(X) = \text{E} \left[ \frac{(X - \mu)^4}{\sigma^4} \right]. \quad (3.17)$$

Para uma distribuição normal,  $K = 3$ , razão pela qual a quantidade  $e(X) = K(X) - 3$  é chamada de **excesso de curtose**. Distribuições com caudas pesadas têm curtose maior do que 3.

Para uma amostra  $\{X_1, \dots, X_n\}$  de  $X$ , considere o  $r$ -ésimo momento amostral

$$m_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^r,$$

em que a média  $\mu$  é estimada por  $\bar{X}$ . Substituindo os momentos verdadeiros de  $X$  pelos respectivos momentos amostrais, obtemos um estimador da curtose, nomeadamente

$$\hat{K}(X) = \frac{m_4}{m_2^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \bar{X}}{\hat{\sigma}} \right)^4, \quad (3.18)$$

em que  $\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 / n$ . Então um estimador para o excesso de curtose é  $\hat{e}(X) = \hat{K}(X) - 3$ . Pode-se provar que, para uma amostra suficientemente grande de uma distribuição normal,

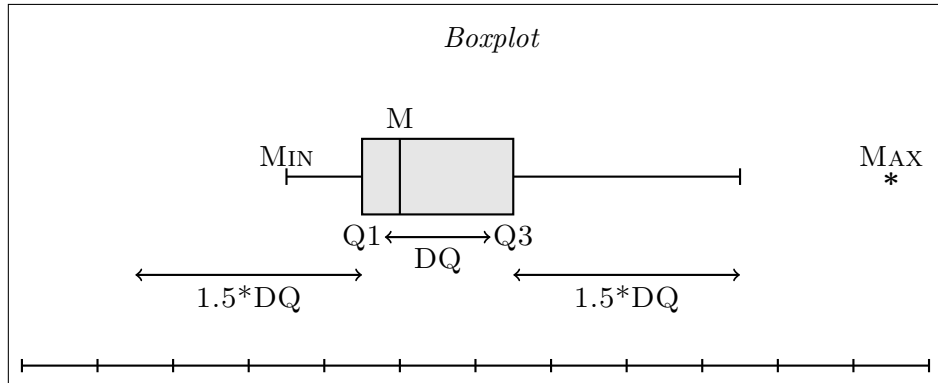
$$\hat{K} \approx \mathcal{N}(3, 24/n), \quad (3.19)$$

ou seja,  $\hat{K}$  tem uma distribuição aproximadamente normal com média 3 e variância  $24/n$ .

### 3.4 *Boxplots*

O *boxplot* é um gráfico baseado nos quantis que serve como alternativa ao histograma para resumir a distribuição dos dados. Considere um retângulo, com base determinada por  $Q_1$  e  $Q_3$ , como indicado na Figura 3.14. Nesse retângulo, insira um segmento de reta correspondente à posição da mediana. Considere dois segmentos de reta denominados **bigodes** (*whiskers*) colocados respectivamente “acima” e “abaixo” de  $Q_1$  e  $Q_3$  com limites dados, respectivamente, por  $\min[x_{(n)}, Q_3 + 1,5 * d_Q]$  e  $\max[x_{(1)}, Q_1 - 1,5 * d_Q]$  com  $d_Q$  representando a distância interquartis. Pontos colocados acima do limite superior ou abaixo do limite inferior, considerados **valores atípicos** ou **discrepantes** (*outliers*) são representados por algum símbolo (\*, por exemplo).





Q1: 1o quartil Q3: 3o quartil DQ: distância interquartis M: mediana

**Figura 3.14:** Detalhes para a construção de *boxplots*.

Esse gráfico permite que identifiquemos a posição dos 50% centrais dos dados (entre o primeiro e terceiro quartil), a posição da mediana, os valores atípicos, se existirem, assim como permite uma avaliação da simetria da distribuição. *Boxplots* são úteis para a comparação de vários conjuntos de dados, como veremos em capítulos posteriores.

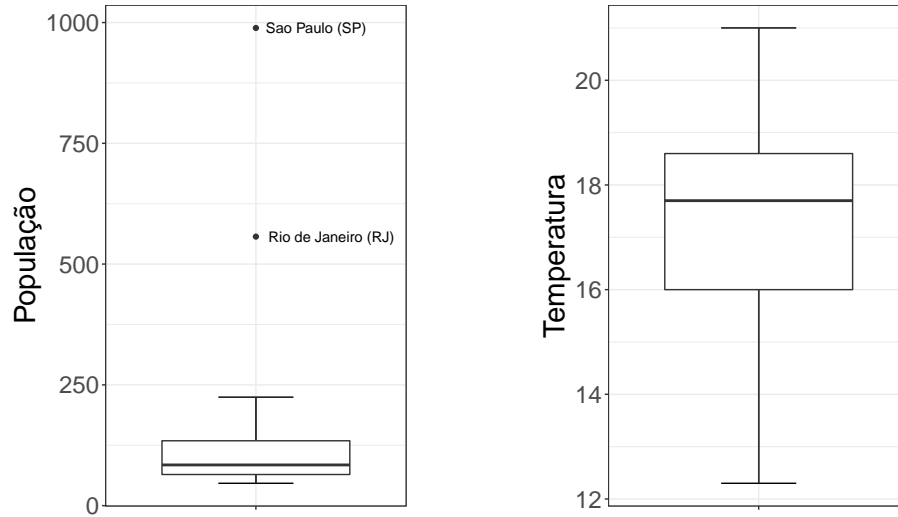
Os *boxplots* apresentados na Figura 3.15 correspondem aos dados do Exemplo 3.2 [painel (a)] e da Temperatura do Exemplo 3.3 [painel (b)].<sup>3</sup> A distribuição dos dados de Temperatura tem uma natureza mais simétrica e mais dispersa do que aquela correspondente às populações de municípios. Há valores atípicos no painel (a), representando as populações do Rio de Janeiro e de São Paulo, mas não os encontramos nos dados de temperatura.

Há uma variante do *boxplot*, denominada ***boxplot dentado*** (*notched boxplot*) que consiste em acrescentar um dente em “v” ao redor da mediana no gráfico. O intervalo determinado pelo dente, dado por

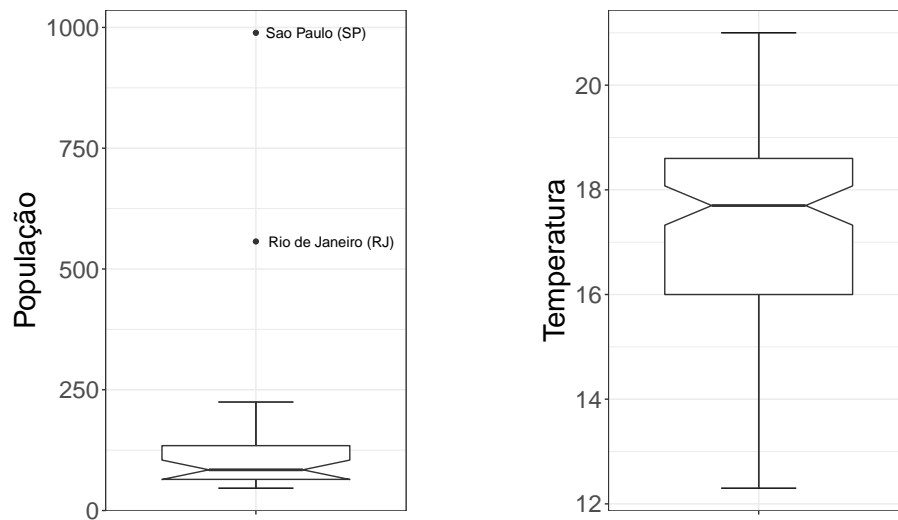
$$Q_2 \pm \frac{1,57d_Q}{\sqrt{n}}$$

é um intervalo de confiança para a mediana da população da qual supomos que os dados constituem uma amostra. Para detalhes, veja McGill et al. (1978) ou Chambers et al. (1983). Na Figura 3.16 apresentamos *boxplots* correspondentes àqueles da Figura 3.15 com os dentes (*notchs*) incorporados.

<sup>3</sup>Note que tanto a orientação horizontal (como na Figura 3.14) quanto a vertical (como na Figura 3.15) podem ser empregadas na construção dos *boxplots*.



**Figura 3.15:** *Boxplots* para os dados dos Exemplos 3.2 (População) e 3.3 (Temperatura).



**Figura 3.16:** *Boxplots* dentados para os dados dos Exemplos 3.2 (População) e 3.3 (Temperatura).

### 3.5 Modelos probabilísticos

Um dos objetivos da Estatística é fazer inferência (ou tirar conclusões) sobre distribuições de variáveis em populações a partir de dados de uma parte dela, denominada **amostra**. A ligação entre os dados amostrais e a população depende de **modelos probabilísticos** ou seja, de modelos que representem

a distribuição (desconhecida) da variável na população. Por exemplo, pode ser difícil obter informações sobre a distribuição dos salários de empregados de uma empresa com 40000 empregados espalhados por diversos países. Nessa situação, costuma-se recorrer a uma amostra dessa população, obter as informações desejadas a partir dos valores amostrais e tentar tirar conclusões sobre toda a população com base num modelo probabilístico. Esse procedimento é denominado **inferência estatística**. No exemplo acima, poderíamos escolher uma amostra de 300 empregados da empresa e analisar a distribuição dos salários dessa amostra com o objetivo de tirar conclusões sobre a distribuição dos salários da população de 40000 empregados. Um dos objetivos da inferência estatística é quantificar a incerteza nessa generalização.

Muitas vezes, a população para a qual se quer tirar conclusões é apenas conceitual e não pode ser efetivamente enumerada, como o conjunto de potenciais consumidores de um produto ou o conjunto de pessoas que sofrem de uma certa doença. Nesses casos, não se pode obter a correspondente distribuição de frequências de alguma característica de interesse associada a essa população e o recurso a modelos para essa distribuição faz-se necessário; esses são os chamados modelos probabilísticos e as frequências relativas correspondentes são denominadas **probabilidades**. Nesse sentido, o conhecido gráfico com formato de sino associado à distribuição normal pode ser considerado como um histograma teórico. Por isso, convém chamar a média da distribuição de probabilidades (que no caso de uma população conceitual não pode ser efetivamente calculada) de **valor esperado**.

Se pudermos supor que a distribuição de probabilidades de uma variável  $X$ , definida sobre uma população possa ser descrita por um determinado modelo probabilístico representado por uma função, nosso problema reduz-se a estimar os **parâmetros** que a caracterizam. Para a distribuição normal, esses parâmetros são o valor esperado, usualmente representado por  $\mu$  e a variância, usualmente representada por  $\sigma^2$ .

Há vários modelos probabilísticos importantes usados em situações de interesse prático. As Tabelas 3.8 e 3.9 trazem um resumo das principais distribuições discretas e contínuas, respectivamente apresentando:

- a) a **função de probabilidade**  $p(x) = P(X = x)$ , no caso discreto e a **função densidade de probabilidade**,  $f(x)$ , no caso contínuo;
- b) os parâmetros que caracterizam cada distribuição;
- c) o valor esperado, representado por  $E(X)$  e a variância, representada por  $\text{Var}(X)$  de cada uma delas.

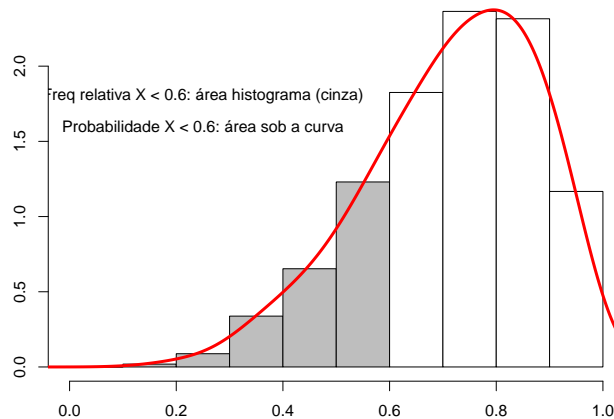
**Tabela 3.8:** Modelos probabilísticos para variáveis discretas

Modelo	$P(X = x)$	Parâmetros	$E(X), \text{Var}(X)$
Bernoulli	$p^x(1-p)^{1-x}, x = 0,1$	$p$	$p, p(1-p)$
Binomial	$\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}, x = 0, \dots, n$	$n, p$	$np, np(1-p)$
Poisson	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, x = 0,1, \dots$	$\lambda$	$\lambda, \lambda$
Geométrica	$p(1-p)^{x-1}, x = 1,2, \dots$	$p$	$1/p, (1-p)/p^2$
Hipergeométrica	$\frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}, x = 0,1, \dots$	$N, r, n$	$nr/N, n\frac{r}{N}(1-\frac{r}{N})\frac{N-n}{N-1}$

**Tabela 3.9:** Modelos probabilísticos para variáveis contínuas

Modelo	$f(x)$	Parâmetros	$E(X), \text{Var}(X)$
Uniforme	$1/(b-a), a < x < b$	$a, b$	$\frac{a+b}{2}, \frac{(b-a)^2}{12}$
Exponencial	$\alpha e^{-\alpha x}, x > 0$	$\alpha$	$1/\alpha, 1/\alpha^2$
Normal	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\}, -\infty < x < \infty$	$\mu, \sigma$	$\mu, \sigma^2$
Gama	$\frac{\alpha^r}{\Gamma(r)} (\alpha x)^{r-1} e^{-\alpha x}, x > 0$	$\alpha > 0, r \geq 1$	$r/\alpha, r/\alpha^2$
Qui-quadrado	$\frac{2^{-n/2}}{\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2}, x > 0$	$n$	$n, 2n$
t-Student	$\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)\sqrt{\pi n}} (1 + \frac{x^2}{n})^{-(n+1)/2}, -\infty < x < \infty$	$n$	$0, n/(n-2)$

Lembrando que num histograma, as frequências relativas correspondem a áreas de retângulos, num modelo probabilístico, as probabilidades correspondem a áreas sob regiões delimitadas pela função  $f(x)$ , como indicado na Figura 3.17.



**Figura 3.17:** Aproximação de um histograma por uma função densidade de probabilidade.

Para muitas distribuições, as probabilidades podem ser obtidas de tabelas apropriadas ou obtidas com o uso de pacotes de computador. Detalhes podem ser encontrados em Bussab e Morettin (2017) entre outros.

### 3.6 Dados amostrais

Uma amostra é um subconjunto de uma população e para que possamos fazer inferências, é preciso que ela satisfaça certas condições. O caso mais comum é o de uma amostra aleatória simples. Dizemos que um conjunto de observações  $x_1, \dots, x_n$  constitui uma **amostra aleatória simples** de tamanho  $n$  de uma variável  $X$  definida sobre uma população  $\mathcal{P}$  se as variáveis  $X_1, \dots, X_n$  que geraram as observações são independentes e têm a mesma distribuição de  $X$ . Como consequência,  $E(X_i) = E(X)$  e  $\text{Var}(X_i) = \text{Var}(X)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Nem sempre nossos dados representam uma amostra aleatória simples de uma população. Por exemplo, dados observados ao longo de um certo período de tempo são, em geral, correlacionados. Nesse caso, os dados constituem uma amostra de uma trajetória de um **processo estocástico** e a população correspondente pode ser considerada como o conjunto de todas as trajetórias de tal processo [detalhes podem ser encontrados em Morettin e Tolói (2018)].

Também podemos ter dados obtidos de um experimento planejado no qual uma ou mais variáveis explicativas (preditoras) são controladas para produzir valores de uma variável resposta. A não ser quando explicitamente indicado, para propósitos inferenciais, neste texto consideraremos os dados como provenientes de uma amostra aleatória simples.

Denotemos por  $x_1, \dots, x_n$  os valores efetivamente observados das variáveis

$X_1, \dots, X_n$ <sup>4</sup>. Além disso, denotemos por  $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$  esses valores observados ordenados em ordem crescente, ou seja,  $x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ . Esses são os valores das **estatísticas de ordem**  $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ .

A **função distribuição acumulada** de uma variável  $X$  definida como  $F(x) = P(X \leq x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  pode ser estimada a partir dos dados amostrais, por meio da **função distribuição empírica** definida por

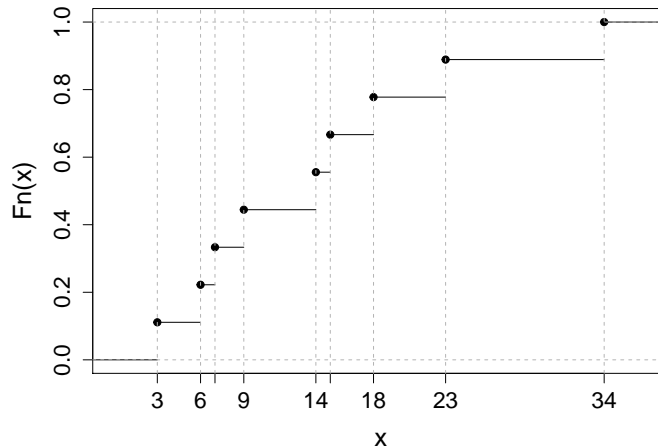
$$F_n(x) = \frac{n(x)}{n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (3.20)$$

em que  $n(x)$  é o número de observações amostrais menores ou iguais a  $x$ .

Considere novamente as observações do Exemplo 3.4 sem o valor 220 para efeito ilustrativo. O gráfico de  $F_n$  que é essencialmente uma função em escada, com “saltos” de magnitude  $1/n$  em cada  $x_{(i)}$ , nomeadamente

$$F_n(x_{(i)}) = \frac{i}{n}, \quad i = 1, \dots, n$$

está disposto na Figura 3.18.



**Figura 3.18:** Função distribuição empírica para os dados do Exemplo 3.4 (sem o valor 220).

### 3.7 Gráficos QQ

Uma das questões fundamentais na especificação de um modelo para inferência estatística é a escolha de um modelo probabilístico para representar a distribuição (desconhecida) da variável de interesse na população. Uma possível estratégia para isso é examinar o histograma dos dados amostrais e compará-lo com histogramas teóricos associados a modelos probabilísticos

<sup>4</sup>Muitas vezes não faremos distinção entre a variável e seu valor, ou seja, designaremos, indistintamente, por  $x$  a variável e um valor observado dela.

candidatos. Alternativamente, os **gráficos QQ** (*QQ plots*) também podem ser utilizados com essa finalidade.

Essencialmente, gráficos QQ são gráficos cartesianos cujos pontos representam os quantis de mesma ordem obtidos das distribuições amostral (empírica) e teórica. Se os dados amostrais forem compatíveis com o modelo probabilístico proposto, esses pontos devem estar sobre uma reta com inclinação unitária quando os quantis forem padronizados, *i.e.*,

$$Q^*(p_i) = [Q(p_i) - \bar{x}]/dp(x).$$

Para quantis não padronizados, os pontos no gráfico estarão dispostos em torno de uma reta com inclinação diferente de 1.

Como o modelo normal serve de base para muitos métodos estatísticos de análise, uma primeira tentativa é construir esse tipo de gráfico baseado nos quantis dessa distribuição. Os quantis normais padronizados  $Q_N(p_i)$  são obtidos da distribuição normal padrão  $[N(0,1)]$  por meio da solução da equação

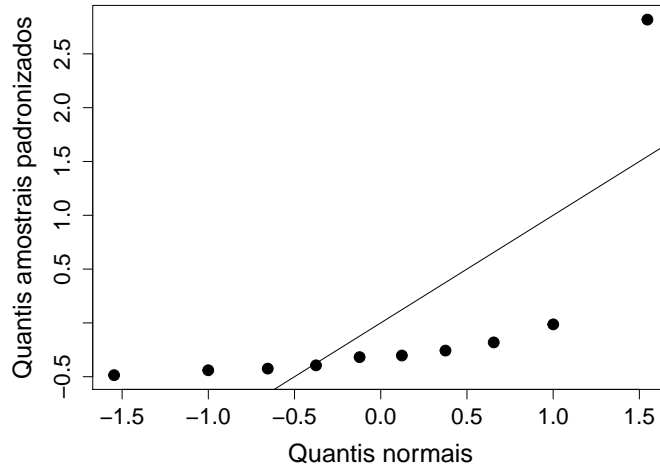
$$\int_{-\infty}^{Q_N(p_i)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2) = p_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

cujos resultados estão disponíveis na maioria dos pacotes computacionais destinados à análise estatística. Para facilitar a comparação, convém utilizar os quantis amostrais padronizados. Veja a Nota de Capítulo 5 deste capítulo e a Nota de Capítulo 5 do Capítulo 4.

Consideremos novamente os dados do Exemplo 3.4. Os quantis amostrais, quantis amostrais padronizados e normais padronizados estão dispostos na Tabela 3.10. O correspondente gráfico QQ está representado na Figura 3.19.

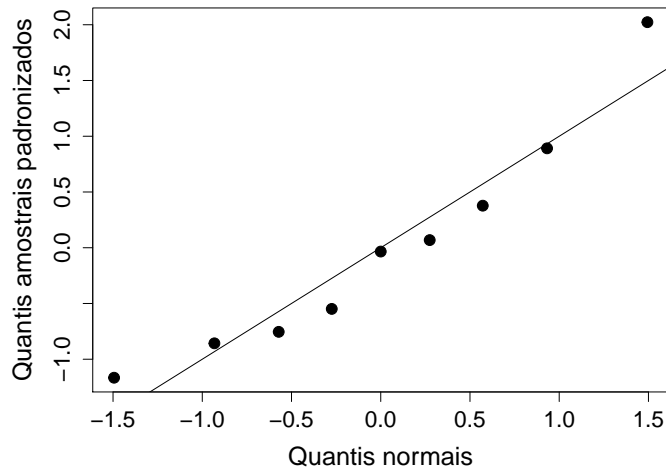
**Tabela 3.10:** Quantis amostrais e normais para os dados do Exemplo 3.4

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p_i$	0,05	0,15	0,25	0,35	0,45	0,55	0,65	0,75	0,85	0,95
$Q(p_i)$	3	6	7	9	14	15	18	23	34	220
$Q^*(p_i)$	-0,49	-0,44	-0,42	-0,39	-0,32	-0,30	-0,26	-0,18	-0,14	2,82
$Q_N(p_i)$	-1,64	-1,04	-0,67	-0,39	-0,13	0,13	0,39	0,67	1,04	1,64



**Figura 3.19:** Gráfico QQ Normal para os dados do Exemplo 3.4 (com reta  $y = x$ ).

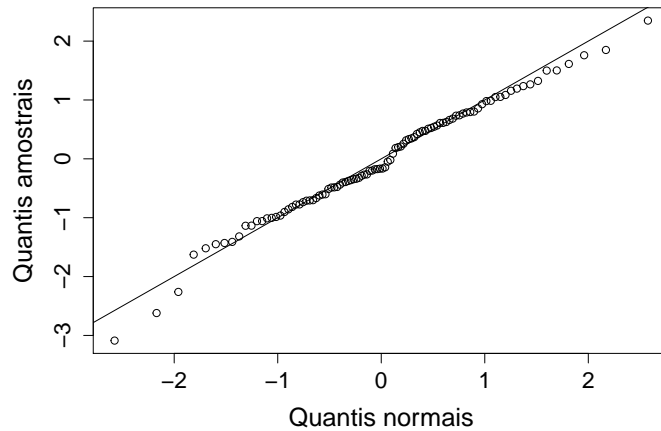
Um exame da Figura 3.19 sugere que o modelo normal não parece ser adequado para os dados do Exemplo 3.4. Uma das razões para isso, é a presença de um ponto atípico (220). Um gráfico QQ normal para o conjunto de dados obtidos com a eliminação desse ponto está exibido na Figura 3.20 e indica que as evidências contrárias ao modelo normal são menos aparentes.



**Figura 3.20:** Gráfico QQ normal para os dados do Exemplo 3.4 com a eliminação do ponto 220 e reta  $y = x$ .

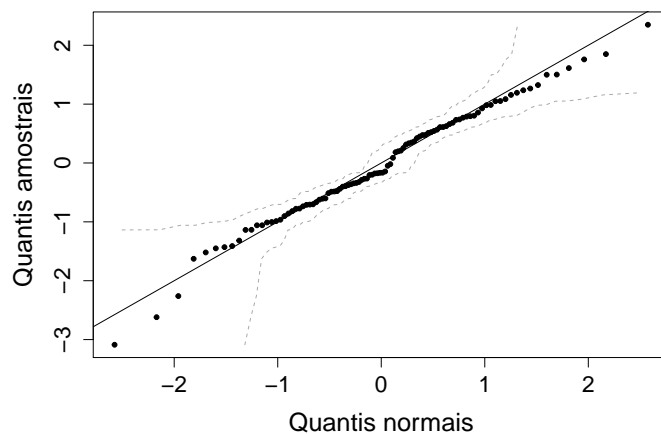
Um exemplo de gráfico QQ para uma distribuição amostral com 100 dados gerados a partir de uma distribuição normal padrão está apresentado na Figura 3.21.





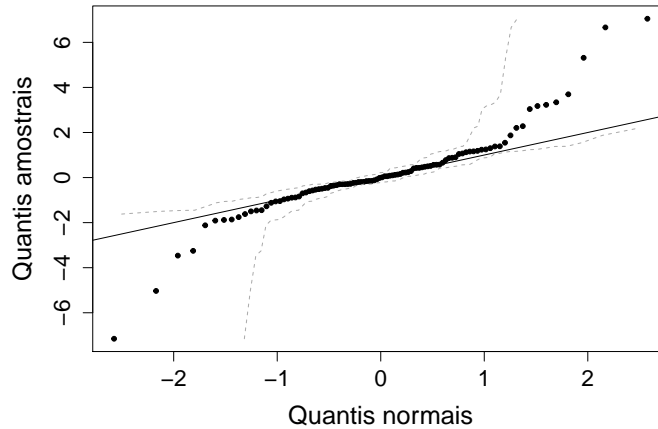
**Figura 3.21:** Gráfico QQ Normal para 100 dados gerados de uma distribuição normal padrão.

Embora os dados correspondentes aos quantis amostrais da Figura 3.21 tenham sido gerados a partir de uma distribuição normal padrão, os pontos não se situam exatamente sobre a reta com inclinação de 45 graus em função de flutuações amostrais. Em geral, a adoção de um modelo probabilístico com base num exame do gráfico QQ tem uma natureza subjetiva, mas é possível incluir bandas de confiança nesse tipo de gráfico para facilitar a decisão. Essas bandas dão uma ideia sobre a faixa de variação esperada para os pontos no gráfico. Detalhes sobre a construção dessas bandas são tratados na Nota de Capítulo 6. Um exemplo de gráfico QQ com bandas de confiança para uma distribuição amostral com 100 dados gerados a partir de uma distribuição normal padrão está apresentado na Figura 3.22.



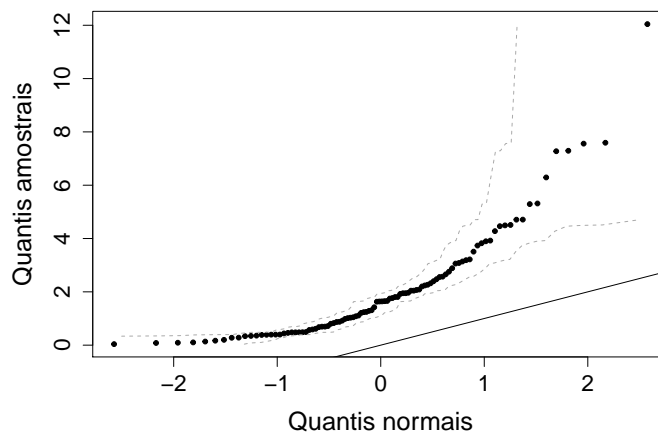
**Figura 3.22:** Gráfico QQ Normal para 100 dados gerados de uma distribuição normal padrão com bandas de confiança.

Um exemplo de gráfico QQ em que as caudas da distribuição amostral (obtidas de uma amostra de 100 dados gerados a partir de uma distribuição  $t$  com 2 graus de liberdade) são mais pesadas que aquelas da distribuição normal está apresentado na Figura 3.23.



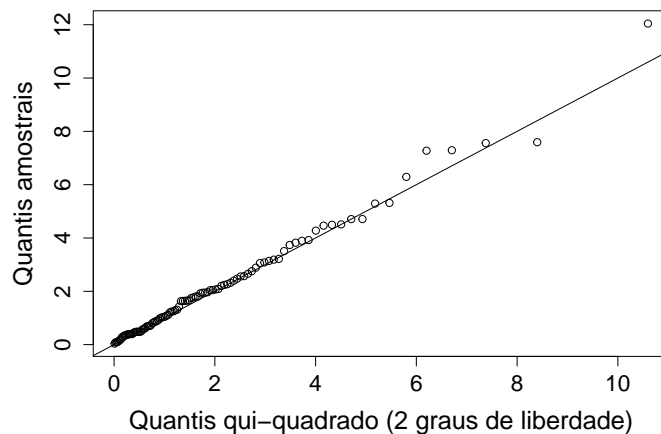
**Figura 3.23:** Gráfico QQ Normal para 100 dados gerados de uma distribuição  $t$  com 2 graus de liberdade.

Um exemplo de gráfico QQ normal em que a distribuição amostral (com 100 dados gerados a partir de uma distribuição qui-quadrado com 2 graus de liberdade) é assimétrica está apresentado na Figura 3.24.



**Figura 3.24:** Gráfico QQ normal para 100 dados gerados de uma distribuição qui-quadrado com 2 graus de liberdade.

O gráfico QQ correspondente, agora obtido por meio dos quantis de uma distribuição qui-quadrado com 2 graus de liberdade é apresentado na Figura 3.25.



**Figura 3.25:** Gráfico QQ qui-quadrado para 100 dados gerados de uma distribuição qui-quadrado com 2 graus de liberdade.

### 3.8 Desvio padrão e erro padrão

Considere uma população para a qual a variável  $X$  tem valor esperado  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ . Imaginemos que um número grande, digamos  $M$  de amostras de tamanho  $n$  seja obtido dessa população. Denotemos por  $X_{i1}, \dots, X_{in}$  os  $n$  valores observados da variável  $X$  na  $i$ -ésima amostra,  $i = 1, \dots, M$ . Para cada uma das  $M$  amostras, calculemos as respectivas médias, denotadas por  $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_M$ . Pode-se mostrar que o valor esperado e a variância da variável  $\bar{X}$  (cujos valores são  $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_M$ ) são respectivamente  $\mu$  e  $\sigma^2/n$ , *i.e.*, o valor esperado do conjunto das médias amostrais é igual ao valor esperado da variável original  $X$  e a sua variância é menor (por um fator  $1/n$ ) que a variância da variável original  $X$ . Além disso pode-se demonstrar que o histograma da variável  $\bar{X}$  tem o formato da distribuição normal.

Note que a variância  $\sigma^2$  é uma característica inerente à distribuição da variável original e não depende do tamanho da amostra. A variância  $\sigma^2/n$  da variável  $\bar{X}$ , depende do tamanho da amostra; quanto maior esse tamanho, mais concentrada (em torno de seu valor esperado, que é o mesmo da variável original) será a sua distribuição. O desvio padrão da variável  $\bar{X}$  é conhecido como **erro padrão** (da média).

Lembremos que, dada uma amostra  $X_1, \dots, X_n$ , a variância  $\sigma^2$  da variável  $X$  é estimada por

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

Ao se aumentar o tamanho da amostra, o denominador  $n-1$  aumenta, mas o numerador,  $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ , também aumenta de forma que o quociente e também sua raiz quadrada, que é uma estimativa do desvio padrão de  $X$ , permanecem estáveis a menos de flutuações aleatórias. Uma estimativa da variância da variável  $\bar{X}$  é  $S^2/n$ , e dada a estabilidade do numerador  $S^2$ , esse

quociente, e conseqüentemente, sua raiz quadrada, que é o erro padrão da média  $\bar{X}$ , diminuem com o aumento do denominador  $n$ . Detalhes podem ser obtidos em Bussab e Morettin (2017).

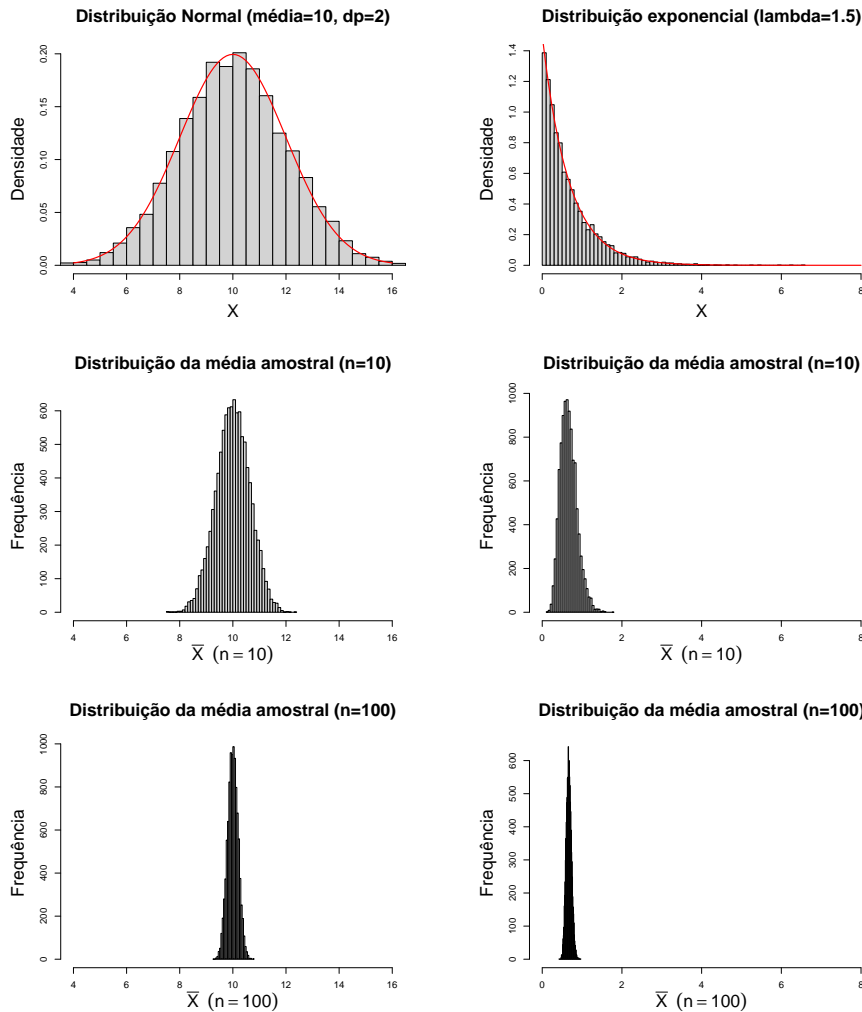
Uma avaliação desses resultados por meio de simulação está apresentada na Figura 3.26. Os histogramas apresentados na coluna da esquerda correspondem a dados simulados de uma distribuição normal com valor esperado  $\mu = 10$  e desvio padrão  $\sigma = 2$ . O primeiro deles exibe um histograma obtido com 10000 dados e mimetiza a população. A média e o desvio padrão correspondentes são, respectivamente 10,009 e 2,011 que essencialmente representam os valores de  $\mu$  e  $\sigma$ .

Geramos 10000 amostras de tamanhos  $n = 10$  e 10000 amostras de tamanhos  $n = 100$  dessa distribuição e para cada uma delas, calculamos as médias ( $\bar{X}$ ) e desvios padrões ( $S$ ). Cada uma dessas 10000 médias  $\bar{X}$  é uma estimativa do valor esperado populacional  $\mu$  e cada um dos desvios padrões amostrais  $S$  é uma estimativa do desvio padrão populacional  $\sigma$ . Os outros dois gráficos exibidos na mesma coluna correspondem aos histogramas das médias (amostrais) das  $M = 10000$  amostras para  $n = 10$  e  $n = 100$ , e salientam o fato de que a dispersão das médias amostrais em torno de sua média, (que é essencialmente o valor esperado da população de onde foram extraídas) diminui com o aumento do tamanho das amostras. Médias e desvios padrões (erros padrões) dessas distribuições amostrais além das médias dos desvios padrões amostrais estão indicados na Tabela 3.11.

Os histogramas apresentados na coluna da direita da Figura 3.26 correspondem a dados simulados de uma distribuição Exponencial com parâmetro  $\lambda = 1,5$  para a qual o valor esperado é  $\mu = 0,667 = 1/1,5$  e o desvio padrão também é  $\sigma = 0,667 = 1/1,5$ . O primeiro deles exibe um histograma obtido com 10000 dados e mimetiza a população. A média e o desvio padrão correspondentes são, respectivamente 0,657 e 0,659 que essencialmente são os valores de  $\mu$  e  $\sigma$ .

**Tabela 3.11:** Medidas resumo de 10000 amostras de uma distribuição normal com média 10 e desvio padrão 2

Amostras	média( $\bar{X}$ )	ep( $\bar{X}$ )	média( $S$ )
$n = 10$	9,997	$0,636 \approx 2/\sqrt{10}$	$1,945 \approx 2$
$n = 100$	9,999	$0,197 \approx 2/\sqrt{100}$	$1,993 \approx 2$



**Figura 3.26:** Efeito do tamanho da amostra na distribuição amostral da média.

Os outros dois gráficos exibidos na mesma coluna correspondem aos histogramas das médias (amostrais) de  $M = 10000$  amostras de tamanhos  $n = 10$  e  $n = 100$ , respectivamente da mesma distribuição exponencial, salientando o fato de que a dispersão das médias amostrais em torno de sua média (que é essencialmente o valor esperado da distribuição original) diminui. Além disso, esses histogramas mostram que a distribuição das médias amostrais é aproximadamente normal apesar de a distribuição de onde as amostras foram geradas ser bastante assimétrica. Médias e desvios padrões (erros padrões) dessas distribuições amostrais além das médias dos desvios padrões amostrais estão indicados na Tabela 3.12.

**Tabela 3.12:** Medidas resumo de 10000 amostras de uma distribuição exponencial com parâmetro  $\lambda = 1,5$  (média=0,667 e desvio padrão=0,667)

Amostras	média( $\bar{X}$ )	ep( $\bar{X}$ )	média( $S$ )
$n = 10$	0,669	$0,212 \approx 0,667/\sqrt{10}$	$0,617 \approx 0,667$
$n = 100$	0,666	$0,066 \approx 0,667/\sqrt{100}$	$0,659 \approx 0,667$

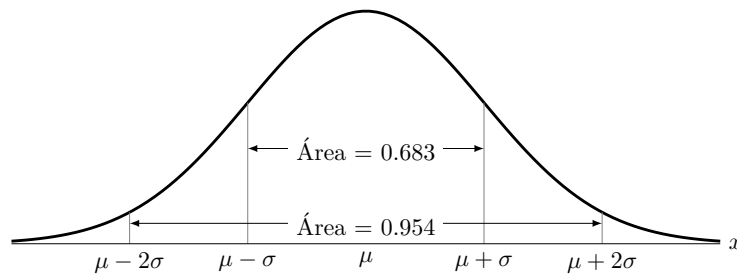
### 3.9 Intervalo de confiança

Em muitas situações, dados passíveis de análise estatística provêm de variáveis observadas em unidades de investigação (indivíduos, animais, corpos de prova, residências etc.) obtidas de uma população de interesse por meio de um processo de amostragem. Além de descrever e resumir os dados da amostra, há interesse em utilizá-los para fazer inferência sobre as distribuições populacionais dessas variáveis. Essas populações são, em geral, conceituais. Por exemplo, na avaliação de um determinado medicamento para diminuição da pressão arterial ( $X$ ), a população de interesse não se resume aos pacientes de um hospital ou de uma região; o foco é a população de indivíduos (vivos ou que ainda nascerão) que poderão utilizar essa droga. Nesse contexto, as características populacionais da diminuição da pressão arterial possivelmente provocada pela administração da droga são desconhecidas e queremos estimá-la (ou adivinhá-las) com base nas suas características amostrais.

Não temos dúvidas sobre as características amostrais. Se a droga foi administrada a  $n$  pacientes e a redução média da pressão arterial foi de  $\bar{X} = 10$  mmHg com desvio padrão  $S = 3$  mmHG, não temos dúvida de que “em média” a droga reduziu a pressão arterial em 10 mmHg **nos indivíduos da amostra**. O problema é saber se o resultado obtido na amostra pode ser extrapolado para a população, ou seja se podemos utilizar  $\bar{X}$  para estimar o valor esperado populacional ( $\mu$ ), que não conhecemos e que não conheceremos a não ser que seja possível fazer um censo. Obviamente, se foram tomados cuidados na seleção da amostra e se o protocolo experimental foi devidamente adotado, faz sentido supor que a redução média da pressão arterial induzida pela droga na população esteja próxima de 10 mmHg mas precisamos então especificar o que entendemos por “próxima”. Isso pode ser feito por intermédio do cálculo da **margem de erro**, que, essencialmente, é uma medida de nossa incerteza na extrapolação dos resultados obtidos na amostra para a população de onde assumimos que foi obtida.

A margem de erro depende do processo amostral, do desvio padrão amostral  $S$ , do tamanho amostral  $n$  e é dada por  $me = kS/\sqrt{n}$  em que  $k$  é uma constante que depende do modelo probabilístico adotado e da confiança com que pretendemos fazer a inferência. No caso de uma **amostra aleatória simples** de uma variável  $X$  obtida de uma população para a qual assumimos um modelo normal, a constante  $k$  para um intervalo com **coeficiente de confiança** de 95,4% é igual a 2. Esse valor corresponde à área sob a curva normal entre o valor esperado menos dois desvios padrões ( $\mu - 2\sigma$ ) e o valor esperado mais dois desvios padrões ( $\mu + 2\sigma$ ) como indicado na Figura

3.27.



**Figura 3.27:** Áreas sob a curva normal com valor esperado  $\mu$  e desvio padrão  $\sigma$

Para um coeficiente de confiança igual a 95%,  $k = 1,96$ . Quando o tamanho da amostra é suficientemente grande, podemos utilizar esse valor, mesmo quando a distribuição de onde foi obtida a amostra não é normal. A margem de erro correspondente a um coeficiente de confiança de 95% é  $me = 1,96S/\sqrt{n}$ . Com base nessa margem de erro, podemos construir um **intervalo de confiança** para o valor esperado populacional da variável  $X$ . Os limites inferior e superior para esse intervalo são, respectivamente,

$$\bar{X} - 1,96S/\sqrt{n} \text{ e } \bar{X} + 1,96S/\sqrt{n}.$$

Se considerássemos um grande número de amostras dessa população sob as mesmas condições, o intervalo construído dessa maneira conteria o verdadeiro (mas desconhecido) valor esperado populacional ( $\mu$ ) em 95% dos casos. Dizemos então, que o intervalo de confiança tem confiança de 95%.

Consideremos uma pesquisa eleitoral em que uma amostra de  $n$  eleitores é avaliada quanto à preferência por um determinado candidato. Podemos definir a variável resposta como  $X = 1$  se o eleitor apoiar o candidato e  $X = 0$  em caso contrário. A média amostral de  $X$  é a proporção amostral de eleitores favoráveis ao candidato, que representamos por  $\hat{p}$ ; sua variância,  $p(1 - p)/n$ , pode ser estimada por  $\hat{p}(1 - \hat{p})/n$  (veja o Exercício 32). Pode-se demonstrar que os limites inferior e superior de um intervalo de confiança com 95% de confiança para a proporção populacional  $p$  de eleitores favoráveis ao candidato são, respectivamente,

$$\hat{p} - 1,96\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})/n} \text{ e } \hat{p} + 1,96\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})/n}.$$

Se numa amostra de tamanho  $n = 400$  obtivermos 120 eleitores favoráveis ao candidato, a proporção amostral será  $\hat{p} = 30\%$  e então podemos dizer que com 95% de confiança a proporção populacional  $p$  deve estar entre 25,5% e 34,5%.

Detalhes técnicos sobre a construção de intervalos de confiança podem ser encontrados em Bussab e Morettin (2017) entre outros.

### 3.10 Transformação de variáveis

Muitos procedimentos empregados em inferência estatística são baseados na suposição de que os valores de uma (ou mais) das variáveis de interesse provêm de uma distribuição normal, ou seja, de que os dados associados a essa variável constituem uma amostra de uma população na qual a distribuição dessa variável é normal. No entanto, em muitas situações de interesse prático, a distribuição dos dados na amostra é assimétrica e pode conter valores atípicos, como vimos em exemplos anteriores.

Se quisermos utilizar os procedimentos talhados para análise de dados com distribuição normal em situações nas quais a distribuição dos dados amostrais é sabidamente assimétrica, pode-se considerar uma transformação das observações com a finalidade de se obter uma distribuição “mais simétrica” e portanto, mais próxima da distribuição normal. Uma transformação bastante usada com esse propósito é

$$x^{(p)} = \begin{cases} x^p, & \text{se } p > 0 \\ \log(x), & \text{se } p = 0 \\ -x^p, & \text{se } p < 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

Essa transformação com  $0 < p < 1$  é apropriada para distribuições assimétricas à direita, pois valores grandes de  $x$  decrescem mais relativamente a valores pequenos. Para distribuições assimétricas à esquerda, basta tomar  $p > 1$ . Normalmente, consideramos valores de  $p$  na sequência

$$\dots, -3, -2, -1, -1/2, -1/3, -1/4, 0, 1/4, 1/3, 1/2, 1, 2, 3, \dots$$

e para cada um deles construímos gráficos apropriados (histogramas, *boxplots*) com os dados originais e transformados, com a finalidade de escolher o valor mais adequado para  $p$ . Hinkley (1977) sugere que para cada valor de  $p$  na sequência acima se calcule a média, a mediana e um estimador de escala (desvio padrão ou algum estimador robusto) e então se escolha o valor que minimiza

$$d_p = \frac{\text{média} - \text{mediana}}{\text{medida de escala}}, \quad (3.22)$$

que pode ser vista como uma medida de assimetria; numa distribuição simétrica,  $d_p = 0$ .

**Exemplo 3.5.** Consideremos a variável concentração de Fe em cascas de árvores da espécie *Tipuana tipu* disponível no arquivo `arvores`. Nas Figuras 3.28 e 3.29 apresentamos, respectivamente *boxplots* e histogramas para os valores originais da variável assim como para seus valores transformados por (3.21) com  $p = 0, 1/3$  e  $1/2$ . Observamos que a transformação obtida com  $p = 1/3$  é aquela que gera uma distribuição mais próxima da simetria.



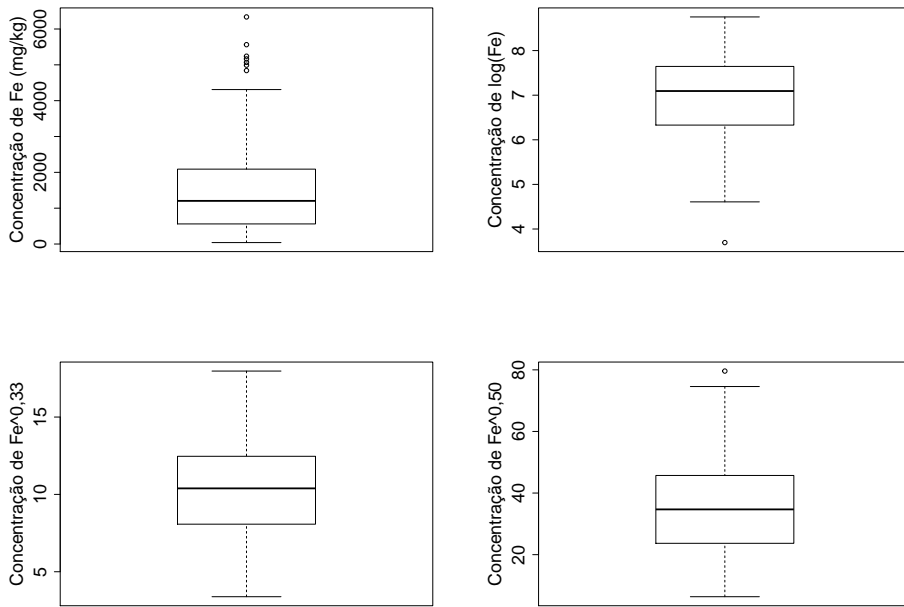


Figura 3.28: *Boxplots* com variável transformada.

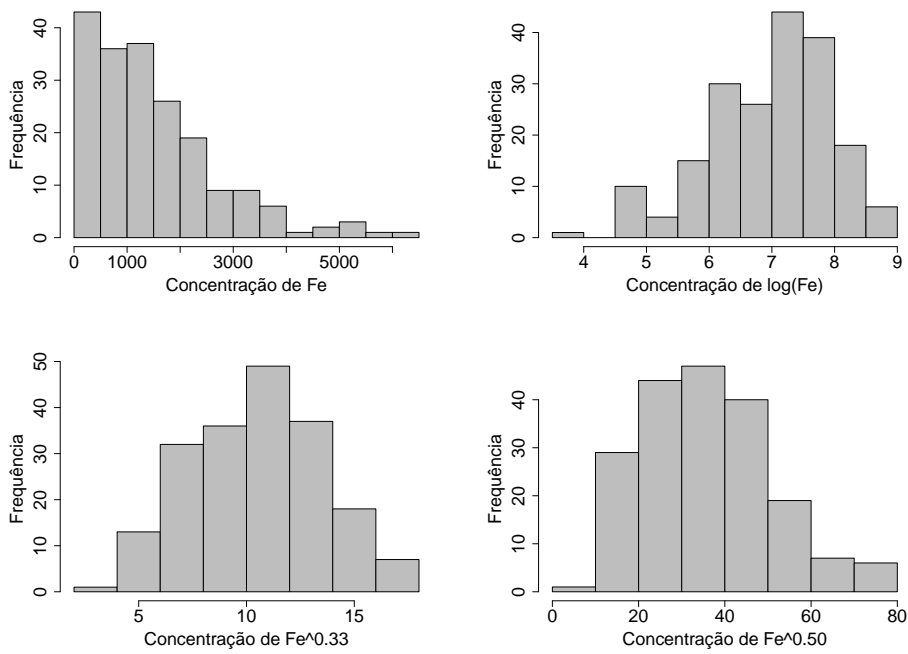


Figura 3.29: Histogramas com variável transformada.

Muitas vezes, (em **Análise de Variância**, por exemplo) é mais importante transformar os dados de modo a “estabilizar” a variância do que tornar a distribuição aproximadamente normal. Um procedimento idealizado para essa finalidade é detalhado a seguir.

Suponhamos que  $X$  seja uma variável com  $E(X) = \mu$  e variância dependente da média, ou seja  $\text{Var}(X) = h^2(\mu)\sigma^2$ , para alguma função  $h$ . Note-mos que se  $h(\mu) = 1$ , então  $\text{Var}(X) = \sigma^2 = \text{constante}$ . Procuremos uma transformação  $X \rightarrow g(X)$ , de modo que  $\text{Var}[g(X)] = \text{constante}$ . Com esse propósito, consideremos uma **expansão de Taylor** de  $g(X)$  ao redor de  $g(\mu)$  até primeira ordem, ou seja

$$g(X) \approx g(\mu) + (X - \mu)g'(\mu).$$

em que  $g'$  denota a derivada de  $g$  em relação a  $\mu$ . Então,

$$\text{Var}[g(X)] \approx [g'(\mu)]^2 \text{Var}(X) = [g'(\mu)]^2 [h(\mu)]^2 \sigma^2.$$

Para que a variância da variável transformada seja constante, devemos tomar

$$g'(\mu) = \frac{1}{h(\mu)}.$$

Por exemplo, se o desvio padrão de  $X$  for proporcional a  $\mu$ , tomamos  $h(\mu) = \mu$ , logo  $g'(\mu) = 1/\mu$  e portanto  $g(\mu) = \log(\mu)$  e devemos considerar a transformação (3.21) com  $p = 0$ , ou seja,  $y^{(p)} = \log(x)$ . Por outro lado, se a variância for proporcional à média, então usando o resultado acima, é fácil ver que a transformação adequada é  $g(x) = \sqrt{x}$ .

A transformação (3.21) é um caso particular das **transformações de Box-Cox** que são da forma

$$g(x) = \begin{cases} (x^p - 1)/p, & \text{se } p \neq 0 \\ \log(x), & \text{se } p = 0. \end{cases} \quad (3.23)$$

Veja Box e Cox (1964) para detalhes.

## 3.11 Notas de capítulo

### 1) Variáveis contínuas

Conceitualmente existem variáveis que podem assumir qualquer valor no conjunto dos números reais, como peso ou volume de certos produtos. Como na prática, todas as medidas que fazemos têm valores discretos, não é possível obter o valor  $\pi$  (que precisa ser expresso com infinitas casas decimais) por exemplo, para peso ou volume. No entanto, em geral, é possível aproximar as distribuições de frequências de variáveis com essa natureza por funções contínuas (como a distribuição normal) e é essa característica que sugere sua classificação como variáveis contínuas.

## 2) Amplitude de classes em histogramas

Nos casos em que o histograma é obtido a partir dos dados de uma amostra de uma população com densidade  $f(x)$ , Freedman e Diaconis (1981) mostram que a escolha

$$h = 1,349\tilde{S} \left( \frac{\log n}{n} \right)^{1/3} \quad (3.24)$$

em que  $\tilde{S}$  é um estimador “robusto” do desvio padrão de  $X$ , minimiza o desvio máximo absoluto entre o histograma e a verdadeira densidade  $f(x)$ . Em (3.24). Veja a Nota de Capítulo 4 para detalhes sobre estimadores robustos do desvio padrão. O pacote R usa como *default* o valor de  $h$  sugerido por Sturges (1926), dado por

$$h = \frac{W}{1 + 3,322 \log(n)}, \quad (3.25)$$

sendo  $W$  a amplitude amostral e  $n$  o tamanho da amostra,

## 3) Definição de histograma

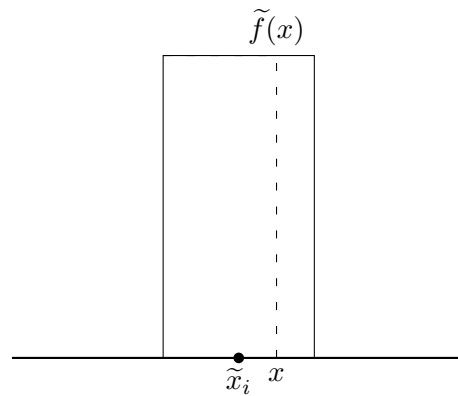
Consideremos um exemplo com  $K$  classes de amplitudes iguais a  $h$ . O número de classes a utilizar pode ser obtido aproximadamente como o quociente  $(x_{(n)} - x_{(1)})/h$  em que  $x_{(1)}$  é o valor mínimo e  $x_{(n)}$ , o valor máximo do conjunto de dados. Para que a área do histograma seja igual a 1, a altura do  $k$ -ésimo retângulo deve ser igual a  $f_k/h$ . Chamando  $\tilde{x}_k$ ,  $k = 1, \dots, K$ , os pontos médios dos intervalos das classes, o histograma pode ser construído a partir da seguinte função

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n I(x - \tilde{x}_i; h/2), \quad (3.26)$$

em que  $I(z; h)$  é a função indicadora do intervalo  $[-h, h]$ , ou seja,

$$I(z; h) = \begin{cases} 1, & \text{se } -h \leq z \leq h \\ 0, & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

Para representar essa construção, veja a Figura 3.30.



**Figura 3.30:** Detalhe para a construção de histogramas.

#### 4) Um estimador alternativo para o desvio padrão

Pode-se verificar que, para uma distribuição normal e relação entre a distância interquartis  $d_Q$  e o desvio padrão  $\sigma$  satisfaz

$$d_Q = 1,349\sigma.$$

Logo, um estimador “robusto” para o desvio padrão populacional é

$$\tilde{S} = d_Q/1,349.$$

Observe que substituindo  $\tilde{S}$  em (3.24), obtemos

$$h \approx d_Q \left( \frac{\log n}{n} \right)^{1/3},$$

que também pode ser utilizado para a determinação do número de classes de um histograma.

#### 5) Padronização de variáveis

Para comparação de gráficos QQ, por exemplo, convém transformar variáveis com diferentes unidades de medida para deixá-las adimensionais, com a mesma média e mesma variância. Para esse efeito pode-se padronizar uma variável  $X$  com média  $\mu$  e desvio padrão  $\sigma$  por meio da transformação  $Z = (X - \mu)/\sigma$ . Pode-se mostrar (ver Exercício 15) que a variável padronizada  $Z$  tem média 0 e desvio padrão 1, independentemente dos valores de  $\mu$  e  $\sigma$ . Esse tipo de padronização também é útil em Análise de Regressão (ver Capítulo 6) quando se deseja avaliar a importância relativa de cada variável por meio dos coeficientes do modelo linear adotado.

### 6) Bandas de confiança para gráficos QQ

Seja  $\{X_1, \dots, X_n\}$  uma amostra aleatória de uma variável com função distribuição  $F$  desconhecida. A estatística de Kolmogorov-Smirnov [ver Wayne (1990, páginas 319-330), por exemplo], dada por

$$KS = \sup_x |F_n(x) - F_0(x)|$$

em que  $F_n$  é correspondente função distribuição empírica, serve para testar a hipótese  $F = F_0$ . A distribuição da estatística  $KS$  é tabelada de forma que se pode obter o valor crítico  $t$  tal que  $P(KS \leq t) = 1 - \alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ . Isso implica que para qualquer valor  $x$  temos  $P(|F_n(x) - F_0(x)| \leq t) = 1 - \alpha$  ou seja, que com probabilidade  $1 - \alpha$  temos  $F_n(x) - t \leq F_0(x) \leq F_n(x) + t$ . Consequentemente, os limites inferior e superior de um intervalo de confiança com coeficiente de confiança  $1 - \alpha$  para  $F$  são respectivamente,  $F_n(x) - t$  e  $F_n(x) + t$ . Essas bandas conterão a função distribuição normal  $N(\mu, \sigma^2)$  se

$$F_n(x) - t \leq \Phi[(x - \mu)/\sigma] \leq F_n(x) + t$$

o que equivale a ter uma reta contida entre os limites da banda definida por

$$\Phi^{-1}[F_n(x) - t] \leq (x - \mu)/\sigma \leq \Phi^{-1}[F_n(x) + t].$$

Para a construção do gráfico QQ esses valores são calculados nos pontos  $X_1, \dots, X_n$ .

## 3.12 Exercícios

- 1) O arquivo **rehabcardio** contém informações sobre um estudo de reabilitação de pacientes cardíacos. Elabore um relatório indicando possíveis inconsistências na matriz de dados e faça uma análise descritiva de todas as variáveis do estudo, construindo distribuições de frequências para as variáveis qualitativas e obtendo medidas resumo para as variáveis qualitativas.
- 2) Considere um conjunto de dados  $\{X_1, \dots, X_n\}$ .
  - a) Obtenha a média e a variância de  $W_1, \dots, W_n$  em que  $W_i = X_i + k$  com  $k$  denotando uma constante, em termos da média e da variância de  $X$ .
  - b) Calcule a média e a variância de  $V_1, \dots, V_n$  em que  $V_i = kX_i$  com  $k$  denotando uma constante, em termos da média e da variância de  $X$ .
- 3) Calcule as medidas de posição e dispersão estudadas para os dados disponíveis no arquivo **antracose**.

- 4) Considere as variáveis Peso e Altura de homens do conjunto de dados **rehabcardio**. Determine o número de classes para os histogramas correspondentes por meio de (3.24) e (3.25) e construa-os.
- 5) Prove que  $S^2$ , dado por (3.10) é um estimador não enviesado da variância populacional.
- 6) Considere o arquivo **vento**. Observe o valor atípico 61,1, que na realidade ocorreu devido a uma forte tempestade no dia 2 de dezembro. Calcule as medidas de posição e dispersão apresentadas na Seção 3.3. Quantifique o efeito do valor atípico indicado nessas medidas.
- 7) Construa gráficos ramo-e-folhas e *boxplot* para os dados do Exercício 6.
- 8) Analise a variável “Temperatura” do arquivo **poluicao**.
- 9) Idem, para a variável “Salário de administradores”, disponível no arquivo **salarios**.
- 10) Construa um gráfico ramo-e-folhas e um *boxplot* para os dados de precipitação atmosférica de Fortaleza disponíveis no arquivo **precipitacao**.
- 11) Transforme os dados do Exercício 6 por meio de (3.21) com  $p = 0, 1/4, 1/3, 1/2, 3/4$  e escolha a melhor alternativa de acordo com a medida  $d_p$  dada em (3.22).
- 12) Construa gráficos de quantis e de simetria para os dados de manchas solares disponíveis no arquivo **manchas**.
- 13) Prove a relação (3.8). Como ficaria essa expressão para  $S^2$ ?
- 14) Uma outra medida de assimetria é

$$A = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{Q_3 - Q_1},$$

que é igual a zero no caso de distribuições simétricas. Calcule-a para os dados do Exercício 6.

- 15) Considere os valores  $X_1, \dots, X_n$  de uma variável  $X$ , com média  $\bar{X}$  e desvio padrão  $S$ . Mostre que a variável  $Z$ , cujos valores são  $Z_i = (X_i - \bar{X})/S$ ,  $i = 1, \dots, n$  tem média 0 e desvio padrão 1.
- 16) Os dados disponíveis no arquivo **endometriose** são provenientes de um estudo em que o objetivo é verificar se existe diferença entre os grupos de doentes e controles quanto a algumas características observadas.
  - a) O pesquisador responsável pelo estudo tem a seguinte pergunta: pacientes doentes apresentam mais dor na menstruação do que as pacientes não doentes? Que tipo de análise você faria para responder essa pergunta utilizando as técnicas discutidas neste capítulo? Faça-a e tire suas conclusões.

- b) Compare as distribuições das variáveis idade e concentração de PCR durante a menstruação (PCRa) para pacientes dos grupos controle e doente utilizando medidas resumo (mínimo, máximo, quartis, mediana, média, desvio padrão, etc.), *boxplots*, histogramas, gráficos de médias e gráficos QQ. Como você considerou os valores  $< 0,5$  da variável PCRa nesses cálculos? Você sugeriria uma outra maneira para considerar tais valores?
- c) Compare a distribuição da variável número de gestações para os dois grupos por intermédio de uma tabela de frequências. Utilize um método gráfico para representá-la.
- 17) Os dados apresentados na Figura 3.31 referem-se aos instantes nos quais o centro de controle operacional de estradas rodoviárias recebeu chamados solicitando algum tipo de auxílio em duas estradas num determinado dia.

Estrada 1	12:07:00 AM	12:58:00 AM	01:24:00 AM	01:35:00 AM	02:05:00 AM
	03:14:00 AM	03:25:00 AM	03:46:00 AM	05:44:00 AM	05:56:00 AM
	06:36:00 AM	07:26:00 AM	07:48:00 AM	09:13:00 AM	12:05:00 PM
	12:48:00 PM	01:21:00 PM	02:22:00 PM	05:30:00 PM	06:00:00 PM
	07:53:00 PM	09:15:00 PM	09:49:00 PM	09:59:00 PM	10:53:00 PM
	11:27:00 PM	11:49:00 PM	11:57:00 PM		
Estrada 2	12:03:00 AM	01:18:00 AM	04:35:00 AM	06:13:00 AM	06:59:00 AM
	08:03:00 AM	10:07:00 AM	12:24:00 PM	01:45:00 PM	02:07:00 PM
	03:23:00 PM	06:34:00 PM	07:19:00 PM	09:44:00 PM	10:27:00 PM
	10:52:00 PM	11:19:00 PM	11:29:00 PM	11:44:00 PM	

**Figura 3.31:** Planilha com instantes de realização de chamados solicitando auxílio em estradas.

- a) Construa um histograma para a distribuição de frequências dos instantes de chamados em cada uma das estradas.
- b) Calcule os intervalos de tempo entre as sucessivas chamadas e descreva-os, para cada uma das estradas, utilizando medidas resumo e gráficos do tipo *boxplot*. Existe alguma relação entre o tipo de estrada e o intervalo de tempo entre as chamadas?
- c) Por intermédio de um gráfico do tipo QQ, verifique se a distribuição da variável “Intervalo de tempo entre as chamadas” em cada estrada é compatível com um modelo normal. Faça o mesmo para um modelo exponencial. Compare as distribuições de frequências correspondentes às duas estradas.
- 18) As notas finais de um curso de Estatística foram: 7, 5, 4, 5, 6, 3, 8, 4, 5, 4, 6, 4, 5, 6, 4, 6, 6, 3, 8, 4, 5, 4, 5, 5 e 6.
- a) Calcule a mediana, os quartis e a média.
- b) Separe o conjunto de dados em dois grupos denominados **aprovados**, com nota pelo menos igual a 5, e **reprovados**. Compare a variância das notas desses dois grupos.

- 19) Considere o seguinte resumo descritivo da pulsação de estudantes com atividade física intensa e fraca:

Atividade	N	Média	Mediana	DP	Min	Max	Q1	Q3
Intensa	30	79,6	82	10,5	62	90	70	85
Fraca	30	73,1	70	9,6	58	92	63	77

DP: desvio padrão

Q1: primeiro quartil

Q3: terceiro quartil

Indique se as seguintes afirmações estão corretas, justificando a sua resposta:

- 5% e 50% dos estudantes com atividade física intensa e fraca, respectivamente, tiveram pulsação inferior a 70.
  - A proporção de estudantes com fraca atividade física com pulsação inferior a 63 é menor que a proporção de estudantes com atividade física intensa com pulsação inferior a 70.
  - A atividade física não tem efeito na média da pulsação dos estudantes.
  - Mais da metade dos estudantes com atividade física intensa têm pulsação maior que 82.
- 20) Considere os gráficos *boxplot* da Figura 3.32. Quais deles correspondem às pulsações dos estudantes submetidos a atividade física intensa e fraca?

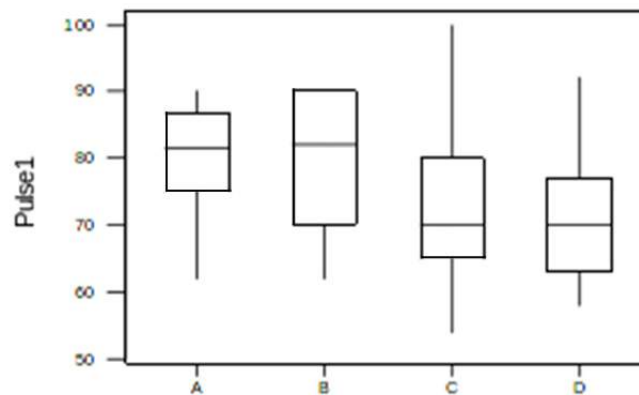
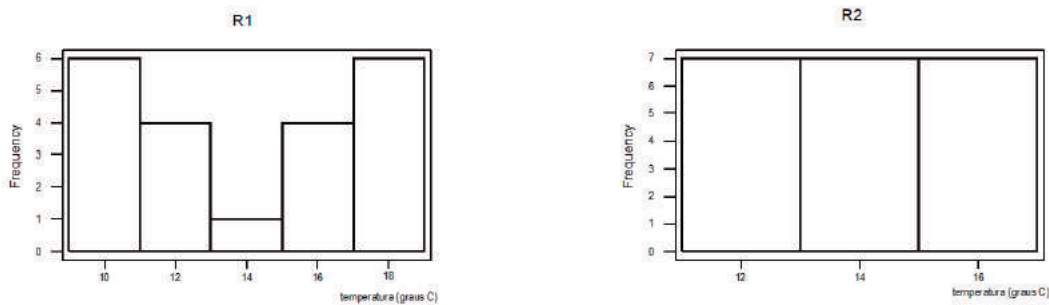


Figura 3.32: *Boxplots* para o Exercício 20.

- A e B
  - B e D
  - A e C
  - B e C
- 21) Os histogramas apresentados na Figura 3.33 mostram a distribuição das temperaturas ( $^{\circ}\text{C}$ ) ao longo de vários dias de investigação para duas regiões (R1 e R2). Podemos dizer que:





**Figura 3.33:** Histogramas para o Exercício 21.

- a) As temperaturas das regiões R1 e R2 têm mesma média e mesma variância.
  - b) Não é possível comparar as variâncias.
  - c) A temperatura média da região R2 é maior que a de R1.
  - d) As temperaturas das regiões R1 e R2 têm mesma média e variância diferentes.
  - e) Nenhuma das respostas anteriores.
- 22) Na companhia A, a média dos salários é 10000 unidades e o 3º quartil é 5000. Responda as seguintes perguntas, justificando a sua respostas.
- a) Se você se apresentasse como candidato a funcionário nessa firma e se o seu salário fosse escolhido ao acaso entre todos os possíveis salários, o que seria mais provável: ganhar mais ou menos que 5000 unidades?
  - b) Suponha que na companhia B a média dos salários seja 7000 unidades, a variância praticamente zero e o salário também seja escolhido ao acaso. Em qual companhia você se apresentaria para procurar emprego, com base somente no salário?
- 23) Num conjunto de dados, o primeiro quartil é 10, a mediana é 15 e o terceiro quartil é 20. Indique quais das seguintes afirmativas são verdadeiras, justificando sua resposta:
- a) A distância interquartis é 5.
  - b) O valor 32 seria considerado *outlier* segundo o critério utilizado na construção do *boxplot*.
  - c) A mediana ficaria alterada de 2 unidades se um ponto com valor acima do terceiro quartil fosse substituído por outro 2 vezes maior.
  - d) O valor mínimo é maior do que zero.
- 24) A bula de um medicamento A para dor de cabeça afirma que o tempo médio para que a droga faça efeito é de 60 seg com desvio padrão de

10 seg. A bula de um segundo medicamento B afirma que a média correspondente é de 60 seg com desvio padrão de 30 seg. Sabe-se que as distribuições são simétricas. Indique quais das seguintes afirmativas são verdadeiras, justificando sua resposta:

- a) Os medicamentos são totalmente equivalentes com relação ao tempo para efeito pois as médias são iguais.
  - b) Com o medicamento A, a probabilidade de cura de sua dor de cabeça antes de 40 seg é maior do que com o medicamento B.
  - c) Com o medicamento B, a probabilidade de você ter sua dor de cabeça curada antes de 60 seg é maior que com o medicamento A.
- 25) Na tabela abaixo estão indicadas as durações de 335 lâmpadas.

Duração (horas)	Número de lâmpadas
0 † 100	82
100 † 200	71
200 † 300	68
300 † 400	56
400 † 500	43
500 † 800	15

- a) Esboce o histograma correspondente.
  - b) Calcule os quantis de ordem  $p=0,1; 0,3; 0,5; 0,7$  e  $0,9$ .
- 26) A tabela abaixo representa a distribuição do número de dependentes por empregados de uma determinada empresa.

Dependentes	Empregados
1	40
2	50
3	30
4	20
5	10
Total	150

A mediana, média e moda são, respectivamente:

- a) 50; 15; 50    b) 1; 2,1; 1    c) 50,5; 50; 50    d) 1; 1; 1
- 27) Com relação ao Exercício 26, qual a porcentagem de empregados da empresa com 2 ou mais dependentes?
- a) 40,1%    b) 50,1%    c) 60,3%    d) 73,3%

- 28) Os dados encontrados no arquivo `esforco` são provenientes de um estudo sobre teste de esforço cardiopulmonar em pacientes com insuficiência cardíaca. As variáveis medidas durante a realização do teste foram observadas em quatro momentos distintos: repouso (REP), limiar anaeróbio (LAN), ponto de compensação respiratório (PCR) e pico (PICO). As demais variáveis são referentes às características demográficas e clínicas dos pacientes e foram registradas uma única vez.
- Descreva a distribuição da variável consumo de oxigênio (VO2) em cada um dos quatro momentos de avaliação utilizando medidas resumo (mínimo, máximo, quartis, mediana, média, desvio padrão, etc.), *boxplots* e histogramas. Você identifica algum paciente com valores de consumo de oxigênio discrepantes? Interprete os resultados.
  - Descreva a distribuição da classe funcional NYHA por meio de uma tabela de frequências. Utilize um método gráfico para representar essa tabela.
- 29) Num estudo na área de Oncologia, o número de vasos que alimentam o tumor está resumido na seguinte tabela.

**Tabela 3.13:** Distribuição de frequências do número de vasos que alimentam o tumor

Número de vasos	Frequência
0 – 5	8 (12%)
5 – 10	23 (35%)
10 – 15	12 (18%)
15 – 20	9 (14%)
20 – 25	8 (12%)
25 – 30	6 (9%)
Total	66 (100%)

Indique a resposta correta.

- O primeiro quartil é 25%.
  - A mediana está entre 10 e 15.
  - O percentil de ordem 10% é 10.
  - A distância interquartil é 50.
  - Nenhuma das respostas anteriores.
- 30) Utilizando o mesmo enunciado da questão anterior, indique a resposta correta:
- Não é possível estimar nem a média nem a variância com esses dados.

- b) A variância é menor que 30.  
 c) A média estimada é 12,8.  
 d) Em apenas 35% dos casos, o número de vasos é maior que 10.  
 e) Nenhuma das anteriores.
- 31) Em dois estudos realizados com o objetivo de estimar o nível médio de colesterol total para uma população de indivíduos saudáveis observaram-se os dados indicados na tabela seguinte:

**Tabela 3.14:** Medidas descritivas dos estudos A e B

Estudo	n	Média	Desvio padrão
A	100	160 mg/dL	60 mg/dL
B	49	150 mg/dL	35 mg/dL

Indique a resposta correta:

- a) Não é possível estimar o nível médio de colesterol populacional só com esses dados.  
 b) Se os dois estudos foram realizados com amostras da mesma população não deveria haver diferença entre os desvios padrões amostrais.  
 c) Com os dados do estudo B, o colesterol médio populacional pode ser estimado com mais precisão do que com os dados do estudo A.  
 d) Ambos os estudos sugerem que a distribuição do colesterol na população é simétrica.  
 e) Nenhuma das respostas anteriores.
- 32) Considere uma amostra aleatória simples  $X_1, \dots, X_n$  de uma variável  $X$  que assume o valor 1 com probabilidade  $0 < p < 1$  e o valor 0 com probabilidade  $1 - p$ . Seja  $\hat{p} = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$ . Mostre que
- $E(X_i) = p$  e  $\text{Var}(X_i) = p(1 - p)$ .
  - $E(\hat{p}) = p$  e  $\text{Var}(\hat{p}) = p(1 - p)/n$ .
  - $0 < \text{Var}(X_i) < 0,25$ .

Com base nesses resultados, utilize o Teorema Limite Central [ver Sen et al. (2009), por exemplo] para construir um intervalo de confiança aproximado conservador (*i.e.*, com a maior amplitude possível) para  $p$ . Utilize o Teorema de Sverdrup [ver Sen et al. (2009), por exemplo] para construir um intervalo de confiança aproximado para  $p$  com amplitude menor que a do intervalo mencionado acima.

- 33) Com a finalidade de entender a diferença entre “desvio padrão” e “erro padrão”,

- a) Simule 10000 dados de uma distribuição normal com média 12 e desvio padrão 4. Construa o histograma correspondente, calcule a média e o desvio padrão amostrais e compare os valores obtidos com aqueles utilizados na geração dos dados.
- b) Simule 500 amostras de tamanho  $n = 4$  dessa população. Calcule a média amostral de cada amostra, construa o histograma dessas médias e estime o correspondente desvio padrão (que é o erro padrão da média).
- c) Repita os passos a) e b) com amostras de tamanhos  $n = 9$  e  $n = 100$ . Comente os resultados comparando-os com aqueles preconizados pela teoria.
- d) Repita os passos a) - c) simulando amostras de uma distribuição qui-quadrado com 3 graus de liberdade.



# Análise de dados de duas variáveis

Não é a linha reta que me atrai. Dura, inflexível, criada pelo homem. O que me atrai é a curva livre e natural.

Oscar Niemeyer

## 4.1 Introdução

Neste capítulo trataremos da análise descritiva da **associação** entre duas variáveis. De maneira geral, dizemos que existe associação entre duas variáveis se o conhecimento do valor de uma delas nos dá alguma informação sobre alguma característica da distribuição (de frequências) da outra. Podemos estar interessados, por exemplo, na associação entre o grau de instrução e o salário de um conjunto de indivíduos. Diremos que existe associação entre essas duas variáveis se o salário de indivíduos com maior nível educacional for maior (ou menor) que os salários de indivíduos com menor nível educacional. Como na análise de uma única variável, também discutiremos o emprego de tabelas e gráficos para representar a distribuição conjunta das variáveis de interesse além de medidas resumo para avaliar o tipo e a magnitude da associação. Podemos destacar três casos:

- i) as duas variáveis são qualitativas;
- ii) as duas variáveis são quantitativas;
- iii) uma variável é qualitativa e a outra é quantitativa.

As técnicas para analisar dados nos três casos acima são distintas. No primeiro caso, a análise é baseada no número de unidades de investigação (amostrais ou populacionais) em cada cela de uma tabela de dupla entrada. No segundo caso, as observações são obtidas por mensurações, e técnicas envolvendo gráficos de dispersão ou de quantis são apropriadas. Na terceira situação, podemos comparar as distribuições da variável quantitativa para cada categoria da variável qualitativa.

Aqui, é importante considerar a classificação das variáveis segundo outra característica, intimamente ligada à forma de coleta dos dados. **Variáveis explicativas** (ou **preditoras**) são aquelas cujas categorias ou valores são fixos, seja por planejamento, seja por condicionamento. **Variáveis respostas** são aquelas cujas categorias ou valores são aleatórios.

Num estudo em que se deseja avaliar o efeito do tipo de aditivo adicionado ao combustível no consumo de automóveis, cada um de 3 conjuntos de 5 automóveis (de mesmo modelo) foi observado sob o tratamento com um de 4 tipos de aditivo. O consumo (em km/L) foi avaliado após um determinado período de tempo. Nesse contexto, a variável qualitativa “Tipo de aditivo” (com 4 categorias) é considerada como explicativa e a variável quantitativa “Consumo de combustível” é classificada como resposta.

Num outro cenário, em que se deseja estudar a relação entre o nível sérico de colesterol (mg/dL) e o nível de obstrução coronariana (em %), cada paciente de um conjunto de 30 selecionados de um determinado hospital foi submetido a exames de sangue e tomográfico. Nesse caso, tanto a variável “Nível sérico de colesterol” quanto a variável “Nível de obstrução coronariana” devem ser encaradas como respostas. Mesmo assim, sob um **enfoque condicional**, em que se deseja avaliar o “Nível de obstrução coronariana” para pacientes com um determinado “Nível sérico de colesterol” a primeira é encarada como variável resposta e a segunda, como explicativa.

## 4.2 Duas variáveis qualitativas

Nessa situação, as classes das duas variáveis podem ser organizadas numa tabela de dupla entrada, em que as linhas correspondem aos níveis de uma das variáveis e as colunas, aos níveis da outra.

**Exemplo 4.1.** Os dados disponíveis no arquivo `coronarias` contém dados do projeto “Fatores de risco na doença aterosclerótica coronariana”, coordenado pela Dra. Valéria Bezerra de Carvalho (INTERCOR). O arquivo contém informações sobre cerca de 70 variáveis observadas em 1500 indivíduos.

Para fins ilustrativos, consideramos apenas duas variáveis qualitativas nominais, a saber, hipertensão arterial ( $X$ ) e insuficiência cardíaca ( $Y$ ) observadas em 50 pacientes, ambas codificadas com os atributos 0=não tem e 1=tem. Nesse contexto, as duas variáveis são classificadas como respostas. A Tabela 4.1 contém a **distribuição de frequências conjunta** das duas variáveis.



**Tabela 4.1:** Distribuição conjunta das variáveis  $X$  = hipertensão arterial e  $Y$  = insuficiência cardíaca

Insuficiência cardíaca	Hipertensão arterial		Total
	Tem	Não tem	
Tem	12	4	16
Não tem	20	14	34
Total	32	18	50

Essa distribuição indica, por exemplo, que 12 indivíduos têm hipertensão arterial e insuficiência cardíaca, ao passo que 4 indivíduos não têm hipertensão e têm insuficiência cardíaca. Para efeito de comparação com outros estudos envolvendo as mesmas variáveis mas com número de pacientes diferentes, convém expressar os resultados na forma de porcentagens. Com esse objetivo, podemos considerar porcentagens em relação ao total da tabela, em relação ao total de suas linhas ou em relação ao total de suas colunas. Na Tabela 4.2 apresentamos as porcentagens correspondentes à Tabela 4.1 calculadas em relação ao seu total.

**Tabela 4.2:** Porcentagens para os dados da Tabela 4.1 em relação ao seu total

Insuficiência cardíaca	Hipertensão		Total
	Tem	Não tem	
Tem	24%	8%	32%
Não tem	40%	28%	68%
Total	64%	36%	100%

Os dados da Tabela 4.2 permitem-nos concluir que 24% dos indivíduos avaliados têm hipertensão e insuficiência cardíaca, ao passo que 36% dos indivíduos avaliados não sofrem de hipertensão.

Também podemos considerar porcentagens calculadas em relação ao total das colunas como indicado na Tabela 4.3.

**Tabela 4.3:** Porcentagens com totais nas colunas

Insuficiência cardíaca	Hipertensão		Total
	Tem	Não tem	
Tem	37,5%	22,2%	32%
Não tem	62,5%	77,8%	68%
Total	100,0%	100,0%	100,0%

Com base nessa tabela, podemos dizer que independentemente do *status* desses indivíduos quanto à presença de hipertensão, 32% têm insuficiência cardíaca. Esse cálculo de porcentagens é mais apropriado quando uma das variáveis é considerada explicativa e a outra, considerada resposta.

No exemplo, apesar de o planejamento do estudo indicar que as duas variáveis são respostas (a frequência de cada uma delas não foi fixada a

*priori*), para efeito da análise, uma delas (Hipertensão arterial) será considerada explicativa. Isso significa que não temos interesse na distribuição de frequências de hipertensos (ou não) dentre os 50 pacientes avaliados apesar de ainda querermos avaliar a associação entre as duas variáveis. Nesse caso, dizemos que a variável “Hipertensão arterial” é considerada explicativa **por condicionamento**. Se houvésemos fixado *a priori* um certo número de hipertensos e outro de não hipertensos e então observado quantos dentre cada um desses dois grupos tinham ou não insuficiência cardíaca, diríamos que a variável “Hipertensão arterial” seria considerada explicativa **por planejamento**. Nesse contexto, apenas as porcentagens calculadas como na Tabela 4.3 fariam sentido. Uma enfoque análogo poderia ser adotado se fixássemos as frequências de “Insuficiência cardíaca” e considerássemos “Hipertensão arterial” como variável resposta. Nesse cenário, as porcentagens deveriam ser calculadas em relação ao total das linhas da tabela.

Tabelas com a natureza daquelas descritas acima são chamadas de **tabelas de contingência** ou **tabelas de dupla entrada**. Essas tabelas são classificadas como tabelas  $r \times c$  em que  $r$  é o número de linhas e  $c$  é o número de colunas. As tabelas apresentadas acima são, portanto, tabelas  $2 \times 2$ . Se a variável  $X$  tiver 3 categorias e a variável  $Y$ , 4 categorias, a tabela de contingência correspondente será uma tabela  $3 \times 4$ .

Suponha, agora, que queiramos verificar se as variáveis  $X$  e  $Y$  são associadas. No caso da Tabela 4.2 (em que as duas variáveis são consideradas respostas), dizer que as variáveis **não** são associadas corresponde a dizer que essas variáveis são **(estatisticamente) independentes**. No caso da Tabela 4.3 (em que uma variáveis é explicativa, quer por condicionamento, quer por planejamento e a outra é considerada resposta), dizer que as variáveis **não** são associadas corresponde a dizer que as distribuições de frequências da variável resposta (“Insuficiência cardíaca”) para indivíduos classificados em cada categoria da variável explicativa (“Hipertensão arterial”) são **homogêneas**.

Nas Tabelas 4.2 ou 4.3, por exemplo, há diferenças, que parecem não ser “muito grandes”, o que nos leva a conjecturar que **na população de onde esses indivíduos foram extraídos**, as duas variáveis não são associadas. Para avaliar essa conjectura, pode-se construir um **teste formal** para essa **hipótese de inexistência de associação** (independência ou homogeneidade), ou seja, para a hipótese

$$H : X \text{ e } Y \text{ são não associadas.}$$

Convém sempre lembrar que a hipótese  $H$  refere-se à associação entre as variáveis  $X$  e  $Y$  na população (geralmente conceitual) de onde foi extraída a amostra cujos dados estão dispostos na tabela. Não há dúvidas de que na tabela, as distribuições de frequências correspondentes às colunas rotuladas por “Tem” e “Não tem” hipertensão são diferentes.

Se as duas variáveis não fossem associadas, deveríamos ter porcentagens iguais (ou aproximadamente iguais) nas colunas da Tabela 4.3 rotuladas “Tem” e “Não tem”. Podemos então calcular as **frequências esperadas**

nas celas da tabela **admitindo que a hipótese  $H$  seja verdadeira**, ou seja, admitindo que as frequências relativas de pacientes com ou sem hipertensão fossem, respectivamente, 64% e 36%, independentemente de terem ou não insuficiência cardíaca. Por exemplo, o valor 10,2 corresponde a 64% de 16, ou ainda,  $10,2 = (32 \times 16)/50$ . Observe que os valores foram arredondados segundo a regra usual e que as somas de linhas e colunas são as mesmas da Tabela 4.1.

**Tabela 4.4:** Valores esperados das frequências na Tabela 4.3 sob  $H$

Insuficiência Cardíaca	Hipertensão		Total
	Tem	Não Tem	
Tem	10,2	5,8	16
Não Tem	21,8	12,2	34
Total	32	18	50

Denotando os valores observados por  $o_i$  e os esperados por  $e_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , podemos calcular os **resíduos**  $r_i = o_i - e_i$  e verificar que  $\sum_i r_i = 0$ . Uma medida da discrepância entre os valores observados e aqueles esperados sob a hipótese  $H$  é a chamada estatística ou **qui-quadrado** de Pearson,

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^4 \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}. \quad (4.1)$$

No nosso exemplo,  $\chi^2 = 1,3$ . Quanto maior esse valor, maior a **evidência** de que a hipótese  $H$  não é verdadeira, ou seja de que as variáveis  $X$  e  $Y$  **são** associadas (na população de onde foi extraída a amostra que serviu de base para os cálculos). Resta saber se o valor observado é suficientemente grande para concluirmos que  $H$  não é verdadeira. Com essa finalidade, teríamos que fazer um teste formal, o que não será tratado nesse texto. Pode-se mostrar que sob a hipótese  $H$ , a estatística (4.1) segue uma distribuição qui-quadrado com número de graus de liberdade igual a  $(r - 1)(c - 1)$  para tabelas  $r \times c$  de forma que a decisão de rejeitar ou não a hipótese pode ser baseada nessa distribuição. Para o exemplo, o valor  $\chi^2 = 1,3$  deve ser comparado com quantis da distribuição qui-quadrado com 1 grau de liberdade. Veja Bussab e Morettin (2017), entre outros, para detalhes.

A própria estatística de Pearson poderia servir como medida da intensidade da associação mas o seu valor aumenta com o tamanho da amostra; uma alternativa para corrigir esse problema é o **coeficiente de contingência de Pearson**, dado por

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + n}}. \quad (4.2)$$

Para o Exemplo 4.1, temos que  $C = \sqrt{1,3/(1,3 + 50)} = 0,16$ , que é um valor pequeno. Esse coeficiente tem interpretação semelhante à do **coeficiente de correlação**, a ser tratado na próxima seção. Mas enquanto esse

último varia entre  $-1$  e  $+1$ , o coeficiente  $C$ , como definido acima, não varia entre 0 e 1 (em módulo). O valor máximo de  $C$  depende do número de linhas,  $r$ , e do número de colunas,  $c$ , da tabela de contingência. Uma modificação de  $C$  é o **coeficiente de Tschuprov**,

$$T = \sqrt{\frac{\chi^2/n}{\sqrt{(r-1)(c-1)}}}, \quad (4.3)$$

que atinge o valor máximo igual a 1 quando  $r = c$ . No Exemplo 4.1,  $T = 0,16$ .

**Exemplo 4.2.** A Tabela 4.5 contém dados sobre o tipo de escola cursada por alunos aprovados no vestibular da USP em 2018.

**Tabela 4.5:** Frequências de alunos aprovados no vestibular de 2018 na USP

Tipo de escola frequentada	Área do conhecimento			Total
	Biológicas	Exatas	Humanas	
Pública	341	596	731	1668
Privada	1327	1957	2165	5449
Principalmente pública	100	158	178	436
Principalmente privada	118	194	196	508
Total	1886	2905	3270	8061

O valor da estatística de Pearson (4.1) correspondente aos dados da Tabela 4.5 é  $\chi^2 = 15$ ; com base na distribuição  $\chi^2$  com  $6 = (4 - 1)(3 - 1)$  graus de liberdade obtemos  $p = 0,02$  o que sugere uma associação entre as duas variáveis (Tipo de escola e Área do conhecimento). No entanto, essa conclusão não tem significância prática, pois a estatística de Pearson terá um valor tanto maior quanto maior for o total da tabela, mesmo que a associação entre as variáveis seja muito tênue<sup>1</sup>. Nesse contexto, convém avaliar essa associação por intermédio dos coeficientes de contingência de Pearson (4.2) ou de Tschuprov (4.3), entre outros. Para o exemplo, seus valores são, respectivamente, 0,043 e 0,027, sugerindo uma associação de pequena intensidade.

Para comparar as preferências de formação profissional entre alunos que frequentaram diferentes tipos de escola, consideramos as frequências relativas tomando como base os totais das linhas; os resultados estão dispostos na Tabela 4.6.

<sup>1</sup>Essa característica é conhecida como maldição (ou praga) da dimensionalidade.

**Tabela 4.6:** Frequências relativas de preferências por área de conhecimento (por tipo de escola)

Tipo de escola frequentada	Área do conhecimento			Total
	Biológicas	Exatas	Humanas	
Pública	20,5%	35,7%	43,8%	100,0%
Privada	24,4%	35,9%	39,7%	100,0%
Principalmente pública	23,0%	36,2%	40,8%	100,0%
Principalmente privada	23,2%	38,2%	38,6%	100,0%
Total	23,4%	36,0%	40,6%	100,0%

Sem grande rigor, podemos dizer que cerca de 40% dos alunos que frequentaram escolas públicas ou privadas, mesmo que parcialmente, matricularam-se em cursos de Ciências Humanas, cerca de 36% de alunos com as mesmas características matricularam-se em cursos de Ciências Exatas e os demais 24% em cursos de Ciências Biológicas. Note que foi necessário um ajuste em algumas frequências relativas (por exemplo, o valor correspondente à cela Escola Pública/Ciências Biológicas deveria ser 20,4% e não 20,5%) para que o total somasse 100% mantendo os dados da tabela com apenas uma casa decimal.

Se, por outro lado, o objetivo for avaliar o tipo de escola frequentado por alunos matriculados em cada área do conhecimento, devemos calcular as frequências relativas tomando como base o total da colunas; os resultados estão dispostos na Tabela 4.7 e sugerem que dentre os alunos que optaram por qualquer das três áreas, cerca de 21% são oriundos de escolas públicas, cerca de 68% de escolas privadas com os demais 11% tendo cursado escolas públicas ou privadas parcialmente.

**Tabela 4.7:** Frequências relativas tipo de escola cursada (por área do conhecimento)

Tipo de escola frequentada	Área do conhecimento			Total
	Biológicas	Exatas	Humanas	
Pública	18,1%	20,5%	22,4%	20,7%
Privada	70,3%	67,4%	66,2%	67,6%
Principalmente pública	5,3%	5,4%	5,4%	5,4%
Principalmente privada	6,3%	6,7%	6,0%	6,3%
Total	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Em estudos que envolvem a mesma característica observada sob duas condições diferentes (gerando duas variáveis,  $X$  e  $Y$ , cada uma correspondendo à observação da característica sob uma das condições), espera-se que elas sejam associadas e o interesse recai sobre a avaliação da **concordância** dos resultados em ambas as condições. Nesse contexto, consideremos um exemplo em que as redações de 445 alunos são classificadas por cada um de dois professores ( $A$  e  $B$ ) como “ruim”, “média” ou “boa” com os resultados resumidos na Tabela 4.8.

**Tabela 4.8:** Frequências de redações classificadas por dois professores

Professor A	Professor B		
	ruim	média	boa
ruim	192	1	5
média	2	146	5
boa	11	12	71

Se todas as frequências estivessem dispostas ao longo da diagonal principal da tabela, diríamos que a haveria completa concordância entre os dois professores com relação ao critério de avaliação das redações. Como em geral isso não acontece, é conveniente construir um índice para avaliar a magnitude da concordância. Uma estimativa do índice denominado  $\kappa$  de Cohen (1960), construído com esse propósito é

$$\hat{\kappa} = \frac{\sum_{i=1}^3 p_{ii} - \sum_{i=1}^3 p_{i+p+i}}{1 - \sum_{i=1}^3 p_{i+p+i}},$$

Nessa expressão,  $p_{ij}$  representa frequência relativa associada à cela correspondente à linha  $i$  e coluna  $j$  da tabela e  $p_{i+}$  e  $p_{+j}$  representam a soma das frequências relativas associadas à linha  $i$  e coluna  $j$ , respectivamente. O numerador corresponde à diferença entre a soma das frequências relativas correspondentes à diagonal principal da tabela e a soma das frequências relativas que seriam esperadas se as avaliações dos dois professores fossem independentes. Portanto, quando há concordância completa,  $\sum_{i=1}^3 p_{ii} = 1$ , o numerador é igual ao denominador e o valor da estimativa do índice de Cohen é  $\hat{\kappa} = 1$ . Quando a concordância entre as duas variáveis é menor do que a esperada pelo acaso,  $\hat{\kappa} < 0$ . Uma estimativa da variância de  $\hat{\kappa}$  obtida por meio do método Delta é

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\kappa}) = n^{-1} & \left\{ \frac{\sum_i p_{ii}(1 - \sum_i p_{ii})}{(1 - \sum_i p_{ii})^2} \right. \\ & + \frac{2(1 - \sum_i p_{ii})[2 \sum_i p_{ii} \sum_i p_{i+p+i} - \sum_i p_{ii}(p_{i+} + p_{+i})]}{(1 - \sum_i p_{i+p+i})^3} \\ & \left. + \frac{(1 - \sum_i p_{ii})^2 [\sum_i \sum_j p_{ij}(p_{i+} + p_{+j})^2 - 4 \sum_i p_{i+p+i}]}{(1 - \sum_i p_{i+p+i})^4} \right\} \end{aligned}$$

Para os dados da Tabela 4.8, em há forte evidência de associação entre as duas variáveis ( $\chi^2 = 444,02$ ,  $gl = 4$ ,  $p < 0,001$ ) temos  $\hat{\kappa} = 0,87$  sugerindo uma “boa” concordância entre as avaliações dos dois professores<sup>2</sup>. Na Tabela 4.9, por outro lado, temos  $\kappa = -0,41$ , sugerindo uma concordância

<sup>2</sup>Para uma interpretação ingênua sobre o significado do valor-p, consulte a Nota de Capítulo 8.

muito fraca entre as duas variáveis, embora também haja forte evidência de associação ( $\chi^2 = 652,44, gl = 4, p < 0,001$ ).

**Tabela 4.9:** Frequências de redações classificadas por dois professores

Professor A	Professor B		
	ruim	média	boa
ruim	1	146	12
média	5	5	71
boa	192	2	11

Embora o nível de concordância medido pelo índice  $\kappa$  seja subjetivo e dependa da área em que se realiza o estudo gerador dos dados, há autores que sugerem regras de classificação, como aquela proposta por Viera and Garrett (2005) e reproduzida na Tabela 4.10

**Tabela 4.10:** Níveis de concordância segundo o índice  $\kappa$  de Cohen

$\kappa$ de Cohen	Nível de concordância
$< 0$	Menor do que por acaso
0,01–0,20	Leve
0,21–0,40	Razoável
0,41–0,60	Moderado
0,61–0,80	Substancial
0,81–0,99	Quase perfeito

Para salientar discordâncias mais extremas como no exemplo, um professor classifica a redação como “ruim” e o outro como “boa”, pode-se considerar o índice  $\kappa$  ponderado, cuja estimativa é

$$\hat{\kappa}_p = \frac{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 w_{ij} p_{ij} - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 w_{ij} p_{i+p+j}}{1 - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 w_{ij} p_{i+p+j}},$$

em que  $w_{ij}, i, j = 1, 2, 3$  é um conjunto de pesos convenientes. Por exemplo,  $w_{ii} = 1, w_{ij} = 1 - (i - j)/(I - 1)$  em que  $I$  é o número de categorias em que a característica de interesse é classificada. Para o exemplo,  $w_{12} = w_{21} = w_{23} = w_{32} = 1 - 1/2 = 1/2, w_{13} = w_{31} = 1 - 2/2 = 0$ .

### Risco atribuível, risco relativo e razão de chances

Em muitas áreas do conhecimento há interesse em avaliar a associação entre um ou mais **fatores de risco** e uma variável resposta. Num estudo epidemiológico, por exemplo, pode haver interesse em avaliar a associação entre o hábito tabagista (fator de risco) e a ocorrência de algum tipo de câncer pulmonar (variável resposta). Um exemplo na área de Seguros pode

envolver a avaliação da associação entre estado civil e sexo (considerados como fatores de risco) e o envolvimento em acidente automobilístico (variável resposta).

No primeiro caso, os dados (hipotéticos) obtidos de uma amostra de 50 fumantes e 100 não fumantes, por exemplo, para os quais se observa a ocorrência de câncer pulmonar após um determinado período podem ser dispostos no formato da Tabela 4.11. Esse tipo de estudo em que se fixam os níveis do fator de risco (hábito tabagista) e se observa a ocorrência do evento de interesse (câncer pulmonar) após um determinado tempo é conhecido como **estudo prospectivo**.

**Tabela 4.11:** Frequências de doentes observados num estudo prospectivo

Hábito tabagista	Câncer pulmonar		Total
	sem	com	
não fumante	80	20	100
fumante	35	15	50

Para a população da qual essa amostra é considerada oriunda (e para a qual se quer fazer inferência), a tabela correspondente pode ser esquematizada como indicado na Tabela 4.12.

**Tabela 4.12:** Probabilidades de ocorrência de doença

Hábito tabagista	Câncer pulmonar		Total
	sem	com	
não fumante	$1 - \pi_0$	$\pi_0$	1
fumante	$1 - \pi_1$	$\pi_1$	1

O parâmetro  $\pi_0$  corresponde à probabilidade<sup>3</sup> de que indivíduos que **sabemos** ser não fumantes contarem câncer pulmonar; analogamente,  $\pi_1$  corresponde à probabilidade de que indivíduos que **sabemos** ser fumantes contraírem câncer pulmonar.

Nesse contexto podemos definir algumas medidas de associação (entre o fator de risco e a variável resposta).

- i) **Risco atribuível:**  $d = \pi_1 - \pi_0$ , que corresponde à diferença entre as probabilidades (ou riscos) de ocorrência do evento de interesse para expostos e não expostos ao fator de risco.
- ii) **Risco relativo:**  $r = \pi_1/\pi_0$ , que corresponde ao quociente entre as probabilidades de ocorrência do evento de interesse para expostos e não expostos ao fator de risco.

<sup>3</sup>O termo “frequência relativa” é substituído por “probabilidade” quando nos referimos às características populacionais (veja a Seção 3.5).



- iii) **Razão de chances**<sup>4</sup> (*odds ratio*):  $\omega = [\pi_1/(1 - \pi_1)]/[\pi_0/(1 - \pi_0)]$ , que corresponde ao quociente entre as chances de ocorrência do evento de interesse para expostos e não expostos ao fator de risco.

No exemplo da Tabela 4.11 essas medidas de associação podem ser estimadas como

- i) Risco atribuível:  $\hat{d} = 0,30 - 0,20 = 0,10$  (o risco de ocorrência de câncer pulmonar aumenta de 10% para fumantes relativamente aos não fumantes).
- ii) Risco relativo:  $\hat{r} = 0,30/0,20 = 1,50$  (o risco de ocorrência de câncer pulmonar para fumantes é 1,5 vezes o risco correspondente para não fumantes).
- iii) Chances: a estimativa de chance de ocorrência de câncer pulmonar para fumantes é  $0,429 = 0,30/0,70$ ; a estimativa da chance de ocorrência de câncer pulmonar para não fumantes é  $0,250 = 0,20/0,80$ .
- iv) Razão de chances:  $\hat{\omega} = 0,429/0,250 = 1,72$  (a chance de ocorrência de câncer pulmonar para fumantes é 1,72 vezes a chance correspondente para não fumantes).

Em geral, embora a medida de associação de maior interesse prático pela facilidade de interpretação, seja o risco relativo, a razão de chances talvez seja a mais utilizada na prática. Primeiramente, observemos que

$$\omega = \frac{\pi_1/(1 - \pi_1)}{\pi_0/(1 - \pi_0)} = r \frac{1 - \pi_0}{1 - \pi_1} \longrightarrow r, \text{ quando } \pi_0 \text{ e } \pi_1 \longrightarrow 0$$

ou seja, para eventos raros [cujas probabilidade  $\pi_1$  ou  $\pi_0$  são muito pequenas], a razão de chances serve como uma boa aproximação do risco relativo.

Em geral, estudos prospectivos com a natureza daquele que motivou a discussão acima não são praticamente viáveis em função do tempo decorrido até o diagnóstico da doença. Uma alternativa é a condução de **estudos retrospectivos** em que, por exemplo, são selecionados 35 pacientes com e 115 pacientes sem câncer pulmonar e se determina (*a posteriori*) quais dentre eles eram fumantes e não fumantes. Nesse caso, os papéis das variáveis explicativa e resposta se invertem, sendo o *status* relativo à presença da moléstia encarado como variável explicativa e o hábito tabagista, como variável resposta. A Tabela 4.13 contém dados hipotéticos de um estudo retrospectivo planejado com o mesmo intuito do estudo prospectivo descrito acima, ou seja, avaliar a associação entre tabagismo e ocorrência de câncer de pulmão.

---

<sup>4</sup>Lembremos que **probabilidade** é uma medida de frequência de ocorrência de um evento (quanto maior a probabilidade de um evento, maior a frequência com que ele ocorre) cujos valores variam entre 0 e 1 (ou entre 0% e 100%). Uma medida de frequência equivalente mas com valores entre 0 e  $\infty$  é conhecida como **chance** (*odds*). Por exemplo, se um evento ocorre com probabilidade 0.8 (80%), a chance de ocorrência é 4 (= 80% / 20%) ou mais comumente de 4 para 1, indicando que em cinco casos, o evento ocorre em 4 e não ocorre em 1.

**Tabela 4.13:** Frequências de fumantes observados num estudo retrospectivo

Hábito	Câncer pulmonar	
	sem	com
tabagista		
não fumante	80	20
fumante	35	15
Total	115	35

A Tabela 4.14 representa as probabilidades pertinentes.

**Tabela 4.14:** Probabilidades de hábito tabagista

Hábito	Câncer pulmonar	
	sem	com
tabagista		
não fumante	$1 - p_0$	$1 - p_1$
fumante	$p_0$	$p_1$
Total	1	1

O parâmetro  $p_0$  corresponde à probabilidade de que indivíduos que **sabemos** não ter câncer pulmonar serem fumantes; analogamente,  $p_1$  corresponde à probabilidade que indivíduos que **sabemos** ter câncer pulmonar serem não fumantes. Nesse caso, não é possível calcular nem o risco atribuível nem o risco relativo, pois não se conseguem estimar as probabilidades de ocorrência de câncer pulmonar,  $\pi_1$  ou  $\pi_0$  para fumantes e não fumantes, respectivamente. No entanto, pode-se demonstrar (ver Nota de Capítulo 1) que a razão de chances obtida por meio de um estudo retrospectivo é igual àquela que seria obtida por intermédio de um estudo prospectivo correspondente ou seja

$$\omega = \frac{p_1/(1 - p_1)}{p_0/(1 - p_0)} = \frac{\pi_1/(1 - \pi_1)}{\pi_0/(1 - \pi_0)}.$$

Num estudo retrospectivo, pode-se afirmar que a chance de ocorrência do evento de interesse (câncer pulmonar, por exemplo) para indivíduos expostos ao fator de risco é  $\omega$  vezes a chance correspondente para indivíduos não expostos, embora não se possa estimar quanto valem essas chances.

Detalhes sobre estimativas e intervalos de confiança para o risco relativo e razão de chances são apresentados na Nota de Capítulo 7.

A partir das frequências da Tabela 4.13 podemos **estimar** a chance de um indivíduo ser fumante dado que tem câncer pulmonar como  $0,751 = 0,429/0,571$  e a chance de um indivíduo ser fumante dado que não tem câncer pulmonar como  $0,437 = 0,304/0,696$ ; a estimativa da razão de chances correspondente é  $\omega = 0,751/0,437 = 1,72$ . Essas chances não são aquelas de interesse pois gostaríamos de conhecer as chances de ter câncer pulmonar para indivíduos fumantes e não fumantes. No entanto a razão de chances tem o mesmo valor que aquela calculada por meio de um estudo prospectivo, ou seja, a partir da análise dos dados da Tabela 4.13, não é possível estimar a chance de ocorrência de câncer pulmonar nem para fumantes nem para não fumantes mas podemos concluir que a primeira é 1,72 vezes a segunda.

### Avaliação de testes diagnósticos

Dados provenientes de estudos planejados com o objetivo de avaliar a capacidade de testes laboratoriais ou exames médicos para diagnóstico de alguma doença envolvem a classificação de indivíduos segundo duas variáveis; a primeira corresponde ao verdadeiro *status* relativamente à presença da moléstia (doente ou não doente) e a segunda ao resultado do teste (positivo ou negativo). Dados correspondentes aos resultados de um determinado teste aplicado a  $n$  indivíduos podem ser dispostos no formato da Tabela 4.15.

**Tabela 4.15:** Frequência de pacientes submetidos a um teste diagnóstico

Verdadeiro status	Resultado do teste		Total
	positivo (T+)	negativo (T-)	
doente (D)	$n_{11}$	$n_{12}$	$n_{1+}$
não doente (ND)	$n_{21}$	$n_{22}$	$n_{2+}$
Total	$n_{+1}$	$n_{+2}$	$n$

Aqui,  $n_{ij}$  corresponde à frequência de indivíduos com o  $i$ -ésimo *status* relativo à doença ( $i = 1$  para doentes e  $i = 2$  para não doentes) e  $j$ -ésimo *status* relativo ao resultado do teste ( $j = 1$  para resultado positivo e  $j = 2$  para resultado negativo). Além disso,  $n_{i+} = n_{i1} + n_{i2}$  e  $n_{+j} = n_{1j} + n_{2j}$ ,  $i, j = 1, 2$ . As seguintes características associadas aos testes diagnóstico são bastante utilizadas na prática.

- i) **Sensibilidade:** corresponde à probabilidade de resultado positivo para pacientes doentes [ $S = P(T+ | D)$ ] e pode ser estimada por  $s = n_{11}/n_{1+}$ ;
- ii) **Especificidade:** corresponde à probabilidade de resultado negativo para pacientes não doentes [ $E = P(T- | ND)$ ] e pode ser estimada por  $e = n_{22}/n_{2+}$ ;
- iii) **Falso positivo:** corresponde à probabilidade de resultado positivo para pacientes não doentes [ $FP = P(T+ | ND)$ ] e pode ser estimada por  $fp = n_{21}/n_{2+}$ ;
- iv) **Falso negativo:** corresponde à probabilidade de resultado negativo para pacientes doentes [ $FN = P(T- | D)$ ] e pode ser estimada por  $fn = n_{12}/n_{1+}$ ;
- v) **Valor preditivo positivo:** corresponde à probabilidade de que o paciente seja doente dado que o resultado do teste é positivo [ $VPP = P(D | T+)$ ] e pode ser estimada por  $vpp = n_{11}/n_{+1}$ ;
- vi) **Valor preditivo negativo:** corresponde à probabilidade de que o paciente não seja doente dado que o resultado do teste é negativo [ $VPN = P(ND | T-)$ ] e pode ser estimada por  $vpn = n_{22}/n_{+2}$ ;
- vii) **Acurácia:** corresponde à probabilidade de resultados corretos [ $AC = P\{(D \cap T+) \cup (ND \cap T-)\}$ ] e pode ser estimada por  $ac = (n_{11} + n_{22})/n$ .

Estimativas das variâncias dessas características estão apresentadas na Nota de Capítulo 7.

A sensibilidade de um teste corresponde à proporção de doentes identificados por seu intermédio, ou seja, é um indicativo da capacidade de o teste detectar a doença. Por outro lado, a especificidade de um teste corresponde à sua capacidade de identificar indivíduos que não têm a doença.

Quanto maior a sensibilidade de um teste, menor é a possibilidade de que indique falsos positivos. Um teste com sensibilidade de 95%, por exemplo, consegue identificar um grande número de pacientes que realmente têm a doença e por esse motivo testes com alta sensibilidade são utilizados em triagens. Quanto maior a especificidade de um teste, maior é a probabilidade de apresentar um resultado negativo para pacientes que não têm a doença. Se, por exemplo, a especificidade de um teste for de 99% dificilmente um paciente que não tem a doença terá um resultado positivo. Um bom teste é aquele que apresenta alta sensibilidade e alta especificidade, mas nem sempre isso é possível.

O valor preditivo positivo indica a probabilidade de um indivíduo ter a doença dado que o resultado do teste é positivo e o valor preditivo negativo indica a probabilidade de um indivíduo não ter a doença dado um resultado negativo no teste.

Sensibilidade e especificidade são características do teste, mas tanto o valor preditivo positivo quanto o valor preditivo negativo dependem da **prevalência** (porcentagem de indivíduos doentes na população) da doença. Consideremos um exemplo em que o mesmo teste diagnóstico é aplicado em duas comunidades com diferentes prevalências de uma determinada doença. A Tabela 4.16 contém os dados (hipotéticos) da comunidade em que a doença é menos prevalente e a Tabela 4.17 contém os dados (hipotéticos) da comunidade em que a doença é mais prevalente.

**Tabela 4.16:** Frequência de pacientes submetidos a um teste diagnóstico (prevalência da doença = 15%)

Verdadeiro status	Resultado do teste		Total
	positivo (T+)	negativo (T-)	
doente (D)	20	10	30
não doente (ND)	80	90	170
Total	100	100	200

**Tabela 4.17:** Frequência de pacientes submetidos a um teste diagnóstico (prevalência da doença = 30%)

Verdadeiro status	Resultado do teste		Total
	positivo (T+)	negativo (T-)	
doente (D)	40	20	60
não doente (ND)	66	74	140
Total	106	94	200

Os valores estimados para a sensibilidade, especificidade, valores preditivo positivo e negativo além da acurácia estão dispostos na Tabela 4.18

**Tabela 4.18:** Características do teste aplicado aos dados das Tabelas 4.16 e 4.17

Característica	População com doença	
	menos prevalente	mais prevalente
Sensibilidade	67%	67%
Especificidade	53%	53%
VPP	20%	38%
VPN	90%	79%
Acurácia	55%	57%

### 4.3 Duas variáveis quantitativas

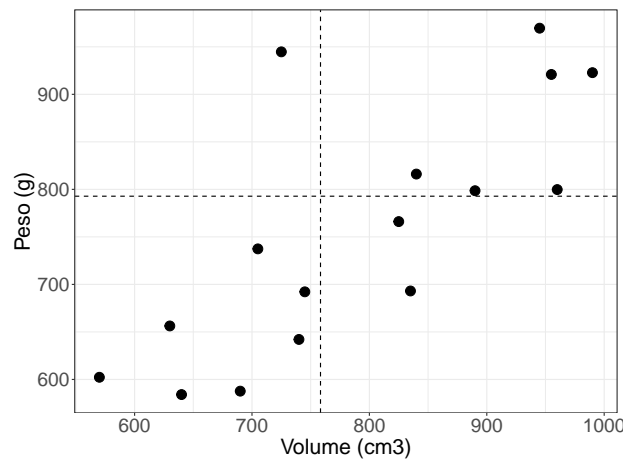
Uma das principais ferramentas para avaliar a associação entre duas variáveis quantitativas é o **gráfico de dispersão**. Consideremos um conjunto de  $n$  pares de valores  $(x_i, y_i)$  de duas variáveis  $X$  e  $Y$ ; o gráfico de dispersão correspondente é um gráfico cartesiano em que os valores de uma das variáveis são colocados no eixo das abscissas e os da outra, no eixo das ordenadas.

**Exemplo 4.3** Os dados contidos na Tabela 4.19, disponíveis no arquivo **figado**, correspondem a um estudo cujo objetivo principal era avaliar a associação entre o volume ( $cm^3$ ) do lobo direito de fígados humanos medido ultrassonograficamente e o seu peso ( $g$ ). Um objetivo secundário era avaliar a concordância de medidas ultrassonográficas do volume (Volume1 e Volume2) realizadas por dois observadores. O volume foi obtido por meio da média das duas medidas ultrassonográficas. Detalhes podem ser obtidos em Zan (2005).

O gráfico de dispersão correspondente às variáveis Volume e Peso está apresentado na Figura 4.1. Nesse gráfico pode-se notar que a valores menores do volume correspondem valores menores do peso e a valores maiores do volume correspondem valores maiores do peso, sugerindo uma associação positiva e possivelmente linear entre as duas variáveis. Além disso, o gráfico permite identificar um possível ponto discrepante (*outlier*) correspondente à unidade amostral em que o volume é  $725cm^3$  e o peso é  $944,7g$ . A utilização dessas constatações para a construção de um modelo que permita estimar o peso como função do volume é o objeto da técnica conhecida como **Análise de Regressão** que será considerada no Capítulo 6.

**Tabela 4.19:** Peso e volume do lobo direito de enxertos de fígado

Volume1 ( $cm^3$ )	Volume2 ( $cm^3$ )	Volume ( $cm^3$ )	Peso ( $g$ )
672,3	640,4	656,3	630
686,6	697,8	692,2	745
583,1	592,4	587,7	690
850,1	747,1	798,6	890
729,2	803,0	766,1	825
776,3	823,3	799,8	960
715,1	671,1	693,1	835
634,5	570,2	602,3	570
773,8	701,0	737,4	705
928,3	913,6	920,9	955
916,1	929,5	922,8	990
983,2	906,2	944,7	725
750,5	881,7	816,1	840
571,3	596,9	584,1	640
646,8	637,4	642,1	740
1021,6	917,5	969,6	945

**Figura 4.1:** Gráfico de dispersão entre peso e volume do lobo direito de enxertos de fígado.

Dado um conjunto de  $n$  pares  $(x_i, y_i)$ , a associação (linear) entre as variáveis quantitativas  $X$  e  $Y$  pode ser quantificada por meio do **coeficiente de correlação (linear)** de Pearson, definido por

$$r_P = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2]^{1/2}}. \quad (4.4)$$

Pode-se mostrar que  $-1 \leq r_P \leq 1$  e, na prática, se o valor  $r_P$  estiver próximo de  $-1$  ou  $+1$ , pode-se dizer que as variáveis são fortemente associadas ou (linearmente) correlacionadas; por outro lado, se o valor de  $r_P$  estiver próximo de zero, dizemos que as variáveis são não correlacionadas.

Quanto mais próximos de uma reta estiverem os pontos  $(x_i, y_i)$ , maior será a intensidade da correlação (linear) entre elas.

Não é difícil mostrar que

$$r_P = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{[(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2)(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2)]^{1/2}}. \quad (4.5)$$

Essa expressão é mais conveniente que (4.4), pois basta calcular: (a) as médias amostrais  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ ; (b) a soma dos produtos  $x_i y_i$  e (c) a soma dos quadrados dos  $x_i$  e a soma dos quadrados dos  $y_i$ .

Para os dados do Exemplo 4.3, o coeficiente de correlação de Pearson é 0,76. Se excluirmos o dado discrepante identificado no gráfico de dispersão, o valor do coeficiente de correlação de Pearson é 0,89, evidenciando a falta de robustez desse coeficiente relativamente a observações com essa natureza. Nesse contexto, uma medida de associação mais robusta é o coeficiente de correlação de Spearman, cuja expressão é similar à (4.4) com os valores das variáveis  $X$  e  $Y$  substituídos pelos respectivos **postos**.<sup>5</sup> Mais especificamente, o coeficiente de correlação de Spearman é

$$r_S = \frac{\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})(S_i - \bar{S})}{[\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})^2 \sum_{i=1}^n (S_i - \bar{S})^2]^{1/2}}, \quad (4.6)$$

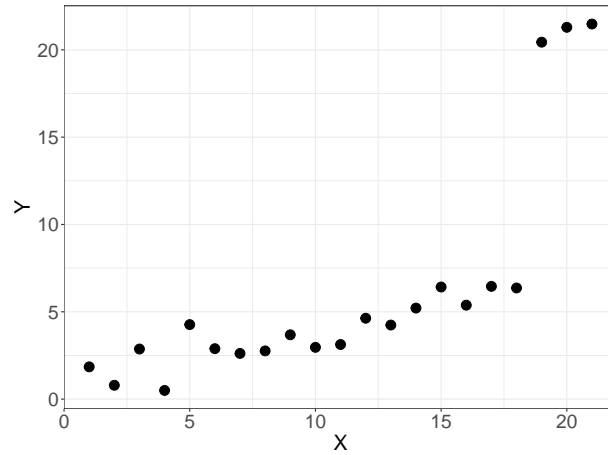
em que  $R_i$  corresponde ao posto da  $i$ -ésima observação da variável  $X$  entre seus valores e  $\bar{R}$  à média desses postos e  $S_i$  e  $\bar{S}$  têm interpretação similar para a variável  $Y$ . Para efeito de cálculo pode-se mostrar que a expressão (4.6) é equivalente a

$$r_S = 1 - 6 \sum_{i=1}^n (R_i - S_i)^2 / [n(n^2 - 1)]. \quad (4.7)$$

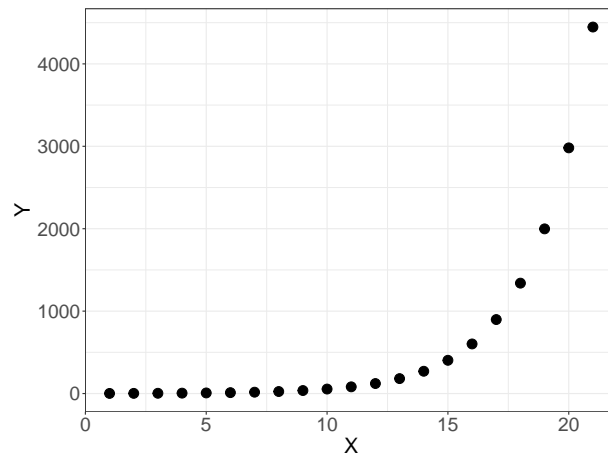
Os dados correspondentes à Figura 4.2 foram gerados a partir da expressão  $y_i = 1 + 0,25x_i + e_i$  com  $e_i$  simulado a partir de uma distribuição normal padrão e com as três últimas observações acrescidas de 15. Para esses dados obtemos  $r_P = 0.768$  e  $r_S = 0.926$ . Eliminando as três observações com valores discrepantes, os coeficientes de correlação correspondentes são  $r_P = 0.881$  e  $r_S = 0.882$ , indicando que o coeficiente de Spearman é mais sensível a associações não lineares.

Em resumo, o coeficiente de correlação de Spearman é mais apropriado para avaliar associações não lineares, desde que sejam **monotônicas**, *i.e.*, em que os valores de uma das variáveis só aumentam ou só diminuem conforme a segunda variável aumenta (ou diminui). Os dados representados na Figura 4.3 foram gerados a partir da expressão  $y_i = \exp(0.4x_i)$ ,  $i = 1, \dots, 20$ .

<sup>5</sup>O posto de uma observação  $x_i$  é o índice correspondente à sua posição no conjunto ordenado  $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ . Por exemplo, dado o conjunto de observações  $x_1 = 4$ ,  $x_2 = 7$ ,  $x_3 = 5$ ,  $x_4 = 13$ ,  $x_5 = 6$ ,  $x_6 = 5$ , o posto correspondente à  $x_5$  é 4. Quando há observações com o mesmo valor, o posto correspondente a cada uma delas é definido como a média dos postos correspondentes. No exemplo, os postos das observações  $x_3$  e  $x_6$  são iguais a  $2,5 = (2 + 3)/2$ .



**Figura 4.2:** Gráfico de dispersão entre valores de duas variáveis  $X$  e  $Y$ .



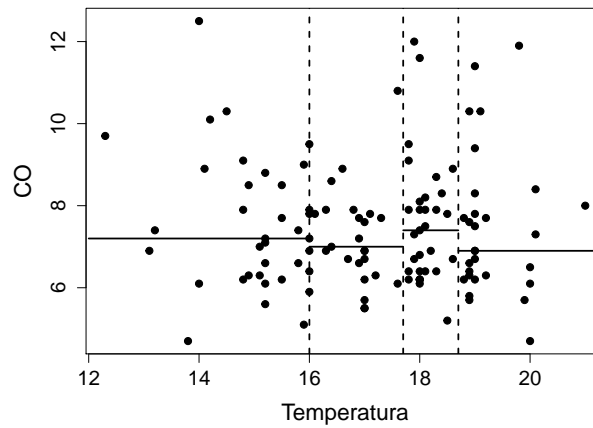
**Figura 4.3:** Gráfico de dispersão entre valores de duas variáveis  $X$  e  $Y$ .

Nesse caso, os valores dos coeficientes de correlação de Pearson e de Spearman são, respectivamente,  $r_P = 0.742$  e  $r_S = 1$  indicando que apenas este último é capaz de realçar a associação perfeita entre as duas variáveis.

### Partição e janelamento

Um gráfico de dispersão para as variáveis concentração de monóxido de carbono (CO) e temperatura `temp` disponíveis no arquivo `poluicao` está apresentado na Figura 4.4 e não evidencia uma associação linear entre as duas variáveis. Para avaliar uma possível associação não linear é possível considerar diferentes medidas resumo de uma das variáveis (`temp`, por exemplo) para diferentes intervalos de valores da segunda variável, (`temp`, por exemplo) com o mesmo número de pontos, como indicado na Tabela 4.20.



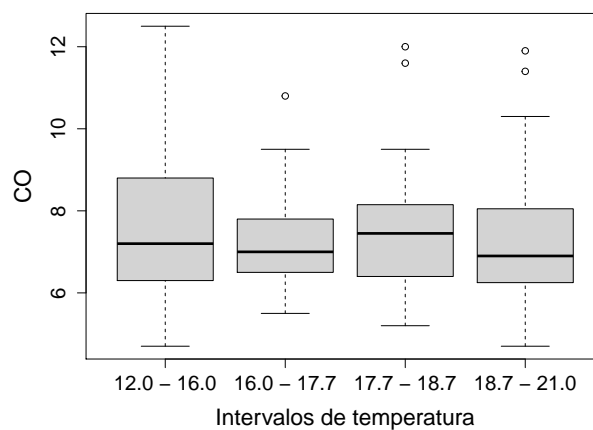


**Figura 4.4:** Gráfico de dispersão entre valores de duas variáveis  $X$  e  $Y$ .

**Tabela 4.20:** Medidas resumo para CO em diferentes intervalos de temp

Medida resumo (CO)	Intervalo de temperatura			
	12,0 - 16,0	16,0 - 17,7	17,7 - 18,7	18,7 - 21,0
$n_i$	29	31	31	29
$Q_1$	6,3	6,5	6,4	6,3
Mediana	7,2	7,0	7,4	6,9
$Q_3$	8,8	7,8	8,2	8,3
Média	7,6	7,2	7,6	7,5

Outra alternativa é considerar *boxplots* para CO em cada intervalo de temperatura como na Figura 4.5.



**Figura 4.5:** *Boxplots* para CO em diferentes intervalos de temperatura.

Embora a mediana de CO varie entre os diferentes intervalos de temperatura, não há uma indicação clara de que essa variação indique uma associação clara entre as variáveis. Os *boxplots* da Figura 4.5 sugerem que a variabilidade da concentração de CO é maior para o intervalo de temperaturas de 12 a 16 graus, atingindo aqui níveis maiores do que nos outros intervalos. Além disso, essa análise mostra que tanto o primeiro quartil quanta a mediana de CO são aproximadamente constantes ao longo dos intervalos, o que não acontece com o terceiro quartil.

### Gráficos de perfis individuais

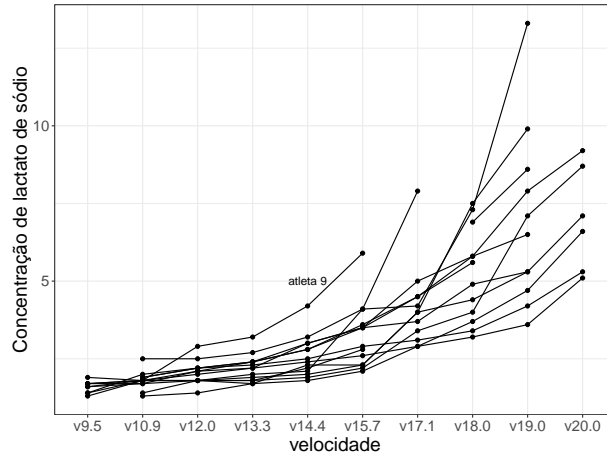
Para dados longitudinais, *i.e.*, aqueles em que a mesma variável resposta é observada em cada unidade amostral mais do que uma vez ao longo do tempo (ou de outra escala ordenada, como distância de uma fonte poluidora, por exemplo), uma das ferramentas descritivas mais importantes são os chamados **gráficos de perfis individuais**. Eles são essencialmente gráficos de dispersão (com o tempo na abscissa e a resposta na ordenada) em que os pontos associados a uma mesma unidade amostral são unidos por segmentos de reta. Em geral, os perfis médios são sobrepostos a eles. Esse tipo de gráfico pode ser utilizado para sugerir modelos de regressão (ver Capítulo 6) construídos para modelar o comportamento temporal da resposta esperada e também para identificar possíveis unidades ou observações discrepantes.

**Exemplo 4.4.** Os dados do arquivo `lactato` foram obtidos de um estudo realizado na Escola de Educação Física da Universidade de São Paulo com o objetivo de comparar a evolução da concentração sérica de lactato de sódio (mmol/L) como função da velocidade de dois grupos de atletas: 14 fundistas e 12 triatletas. A concentração sérica de lactato de sódio tem sido utilizada como um indicador da condição física de atletas. Nesse estudo, cada atleta correu durante certos períodos com velocidades pré-estabelecidas e a concentração de lactato de sódio foi registrada logo após cada corrida. A observação repetida da resposta em cada atleta caracteriza a natureza longitudinal dos dados. Por meio dos comandos

```
fundistas <- lactato[which(lactato$group == 0), ]
fundistas1 <- fundistas[-1]
fundistas2 <- melt(fundistas1, id.vars = "ident")
fundistaslong <- group_by(fundistas2, ident)
g1 <- ggplot(fundistaslong) +
  + geom_line(aes(variable, value, group = ident))
g2 <- g1 + theme_bw() + annotate("text", x = 5, y = 5,
  label = "atleta 9")
g3 <- g2 + labs(x="velocidade",
  y="Concentração de lactato de sódio")
g4 <- g3 + theme(text=element_text(size=18))
```

obtemos o gráfico de perfis individuais para os fundistas que está represen-

tado na Figura 4.6 e sugere que i) a relação entre a concentração esperada de lactato de sódio pode ser representada por uma curva quadrática no intervalo de velocidades considerado e ii) o perfil do atleta 9 é possivelmente atípico *outlier*. Na realidade, verificou-se que esse atleta era velocista e não fundista.



**Figura 4.6:** Gráfico de perfis individuais para os dados do Exemplo 4.4 (atletas fundistas).

### Gráficos QQ para comparação de duas distribuições amostrais

Uma ferramenta adequada para comparar as distribuições de uma variável observada sob duas condições diferentes é o gráfico QQ utilizado na Seção 3.7 para a comparação de uma distribuição empírica com uma distribuição teórica. Um exemplo típico é aquele referente ao objetivo secundário mencionado na descrição do Exemplo 4.3, em que se pretende avaliar a concordância entre as duas medidas ultrassonográficas do volume do lobo direito do fígado.

Denotando por  $X$  uma das medidas e por  $Y$ , a outra, sejam  $Q_X(p)$  e  $Q_Y(p)$  os quantis de ordem  $p$  das duas distribuições que pretendemos comparar. O gráfico QQ é um gráfico cartesiano de  $Q_X(p)$  em função de  $Q_Y(p)$  (ou vice-versa) para diferentes valores de  $p$ . Se as distribuições de  $X$  e  $Y$  forem iguais, os pontos nesse gráfico devem estar sobre a reta  $x = y$ . Se uma das variáveis for uma função linear da outra, os pontos também serão dispostos sobre uma reta, porém com intercepto possivelmente diferente de zero e com inclinação possivelmente diferente de 1.

Quando os números de observações das duas variáveis forem iguais, o gráfico QQ é essencialmente um gráfico dos dados ordenados de  $X$ , ou seja  $x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ , versus os dados ordenados de  $Y$ , nomeadamente,  $y_{(1)} \leq \dots \leq y_{(n)}$ .

Quando os números de observações das duas variáveis forem diferentes, digamos  $m > n$ , calculam-se os quantis amostrais referentes àquela variável com menos observações utilizando  $p_i = (i - 0,5)/n$ ,  $i = 1, \dots, n$  e obtêm-se os quantis correspondentes à segunda variável por meio de interpolações como

aquelas indicadas em (3.5). Consideremos, por exemplo os conjuntos de valores  $x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}$  e  $y_{(1)} \leq \dots \leq y_{(m)}$ . Primeiramente, determinemos  $p_i = (i - 0,5)/n$ ,  $i = 1, \dots, n$  para obter os quantis  $Q_X(p_i)$ ; em seguida, devemos obter índices  $j$  tais que

$$\frac{j - 0,5}{m} = \frac{i - 0,5}{n} \text{ ou seja } j = \frac{m}{n}(i - 0,5) + 0,5.$$

Se  $j$  obtido dessa forma for inteiro, o ponto a ser disposto no gráfico QQ será  $(x_{(i)}, y_{(j)})$ ; em caso contrário, teremos  $j = [j] + f_j$  em que  $[j]$  é o maior inteiro contido em  $j$  e  $0 < f_j < 1$  é a correspondente parte fracionária ( $f_j = j - [j]$ ). O quantil correspondente para a variável  $Y$  será:

$$Q_Y(p_i) = (1 - f_j)y_{([j])} + f_j y_{([j]+1)}.$$

Por exemplo, sejam  $m = 45$  e  $n = 30$ ; então, para  $i = 1, \dots, 30$  temos

$$p_i = (i - 0,5)/30 \text{ e } Q_X(p_i) = x_{(i)}$$

logo  $j = 45/30(i - 0,5) + 0,5 = 1,5i - 0,25$  e  $[j] = [1,5i - 0,25]$ . Consequentemente, no gráfico QQ, o quantil  $Q_X(p_i)$  deve ser pareado com o quantil  $Q_Y(p_i)$  conforme o seguinte esquema

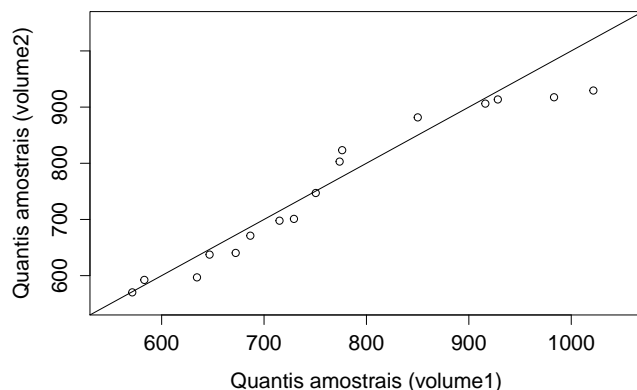
$i$	$p_i$	$j$	$[j]$	$j - [j]$	$Q_X(p_i)$	$Q_Y(p_i)$
1	0,017	1,25	1	0,25	$x_{(1)}$	$0,75y_{(1)} + 0,25y_{(2)}$
2	0,050	2,75	2	0,75	$x_{(2)}$	$0,25y_{(2)} + 0,75y_{(3)}$
3	0,083	4,25	4	0,25	$x_{(3)}$	$0,75y_{(4)} + 0,25y_{(5)}$
4	0,117	5,75	5	0,75	$x_{(4)}$	$0,25y_{(5)} + 0,75y_{(6)}$
5	0,150	7,25	7	0,25	$x_{(5)}$	$0,75y_{(7)} + 0,25y_{(8)}$
6	0,183	8,75	8	0,75	$x_{(6)}$	$0,25y_{(8)} + 0,75y_{(9)}$
7	0,216	10,25	10	0,25	$x_{(7)}$	$0,75y_{(10)} + 0,25y_{(11)}$
8	0,250	11,75	11	0,75	$x_{(8)}$	$0,25y_{(11)} + 0,25y_{(12)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
30	0,983	44,75	44	0,75	$x_{(30)}$	$0,25y_{(44)} + 0,75y_{(45)}$

Suponha, por exemplo, que duas variáveis,  $X$  e  $Y$ , sejam tais que  $Y = aX + b$ , indicando que suas distribuições são iguais, exceto por uma transformação linear. Então,

$$p = P[X \leq Q_X(p)] = P[aX + b \leq aQ_X(p) + b] = P[Y \leq Q_Y(p)],$$

ou seja,  $Q_Y(p) = aQ_X(p) + b$ , indicando que o gráfico QQ correspondente mostrará uma reta com inclinação  $a$  e intercepto  $b$ .

Para a comparação das distribuições do volume ultrassonográfico do lobo direito do fígado medidas pelos dois observadores mencionados no Exemplo 4.3, o gráfico QQ está disposto na Figura 4.7.



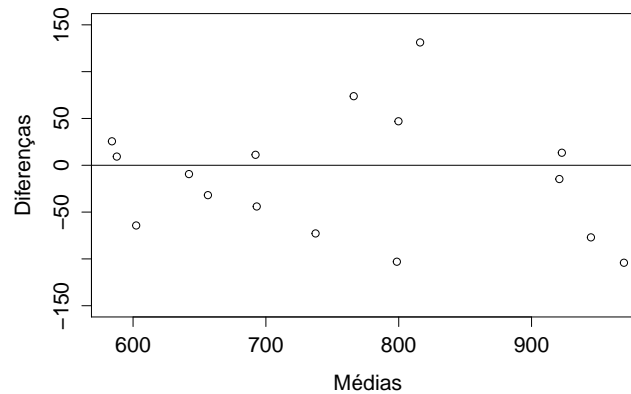
**Figura 4.7:** Gráfico QQ para avaliação da concordância de duas medidas ultrassonográficas do lobo direito do fígado.

Os pontos distribuem-se em torno da reta  $x = y$  sugerindo que as medidas realizadas pelos dois observadores tendem a ser similares. Em geral os gráficos QQ são mais sensíveis a diferenças nas caudas das distribuições, se estas forem aproximadamente simétricas e com a aparência de uma distribuição normal. Enquanto os diagramas de dispersão mostram uma relação sistemática global entre  $X$  e  $Y$ , os gráficos QQ relacionam valores pequenos de  $X$  com valores pequenos de  $Y$ , valores medianos de  $X$  com valores medianos de  $Y$  e valores grandes de  $X$  com valores grandes de  $Y$ .

Uma ferramenta geralmente utilizada para avaliar concordância entre as distribuições de duas variáveis contínuas com o mesmo espírito da estatística  $\kappa$  de Cohen é o **gráfico de médias/diferenças** originalmente proposto por Tukey e popularizado como **gráfico de Bland-Altman**. Essencialmente, essa ferramenta consiste num gráfico das diferenças entre as duas observações pareadas  $(X_{2i} - X_{1i})$  em função das médias correspondentes  $[(X_{1i} + X_{2i})/2]$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Esse procedimento transforma a reta com coeficiente angular igual 1 apresentada no gráfico QQ numa reta horizontal passando pelo ponto zero no gráfico de médias/diferenças de Tukey e facilita a percepção das diferenças entre as duas medidas da mesma variável.

Note que enquanto gráficos QQ são construídos a partir dos quantis amostrais, gráficos de Bland-Altman baseiam-se no próprios valores das variáveis em questão. Por esse motivo, para a construção de gráficos de Bland-Altman as observações devem ser pareadas ao passo que gráficos QQ podem ser construídos a partir de conjuntos de dados desbalanceados (com número diferentes de observações para cada variável).

O gráfico de médias/diferenças de Tukey (Bland-Altman) correspondente aos volumes do lobo direito do fígado medidos pelos dois observadores e indicados na Tabela 4.19 está apresentado na Figura 4.8.



**Figura 4.8:** Gráfico de médias/diferenças de Tukey (Bland-Altman) para avaliação da concordância de duas medidas ultrassonográficas do lobo direito do fígado.

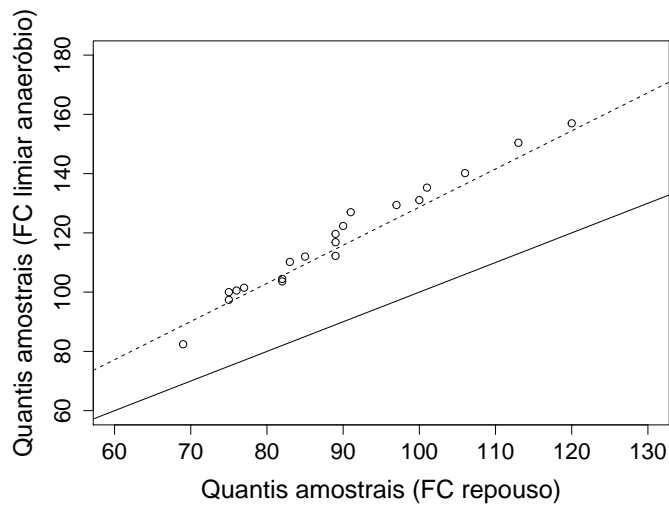
Os pontos no gráfico da Figura 4.8) distribuem-se de forma não regular em torno do valor zero e não sugerem evidências de diferenças entre as distribuições correspondentes. Por essa razão, para diminuir a variabilidade, decidiu-se adotar a média das medidas obtidas pelos dois observadores como volume do lobo direito do fígado para avaliar sua associação com o peso correspondente.

**Exemplo 4.5** Os dados contidos na Tabela 4.21 foram extraídos de um estudo para avaliação de insuficiência cardíaca e correspondem à frequência cardíaca em repouso e no limiar anaeróbio de um exercício em esteira para 20 pacientes. O conjunto de dados completos está disponível no arquivo `esforco`.

**Tabela 4.21:** Frequência cardíaca em repouso (`fcrep`) e no limiar anaeróbio (`fclan`) de um exercício em esteira

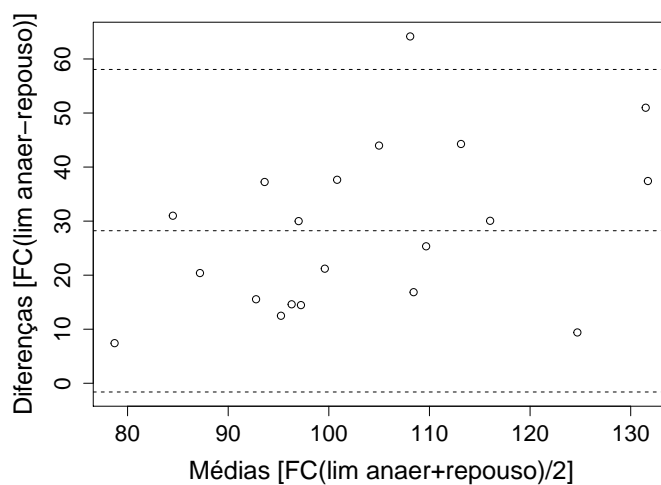
paciente	fcrep	fclan	paciente	fcrep	fclan
1	89	110	11	106	157
2	69	100	12	83	127
3	82	112	13	90	104
4	89	104	14	75	82
5	82	120	15	100	117
6	75	112	16	97	122
7	89	101	17	76	140
8	91	135	18	77	97
9	101	131	19	85	101
10	120	129	20	113	150

Os gráficos QQ e de médias/diferenças de Tukey correspondentes aos dados da Tabela 4.21 estão apresentados nas Figuras 4.9 e 4.10.



**Figura 4.9:** Gráfico QQ para comparação das distribuições de frequência cardíaca em repouso e no limiar anaeróbio.

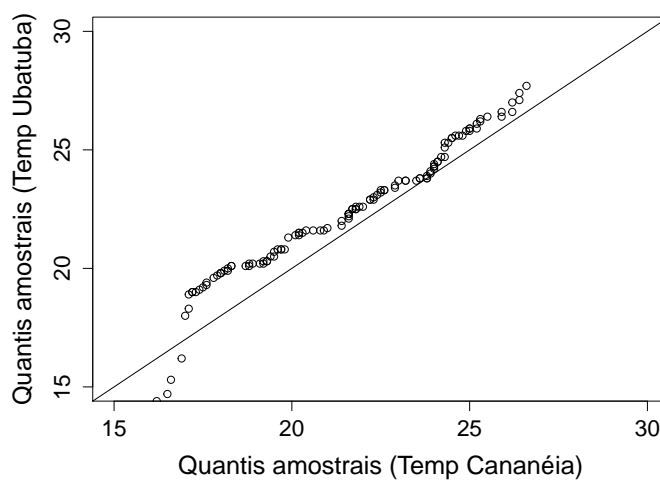
Na Figura 4.9, a curva pontilhada corresponde à reta  $Q_Y(p) = 1.29Q_X(p)$  sugerindo que a frequência cardíaca no limiar anaeróbio ( $Y$ ) tende a ser cerca de 30% maior do que aquela em repouso ( $X$ ) em toda faixa de variação. Isso também pode ser observado, embora com menos evidência, no gráfico de Bland-Altman da Figura 4.10.



**Figura 4.10:** Gráfico de médias/diferenças de Tukey (Bland-Altman) para comparação das distribuições de frequência cardíaca em repouso e no limiar anaeróbio.

**Exemplo 4.6.** Considere o arquivo `temperaturas`, contendo dados de tem-

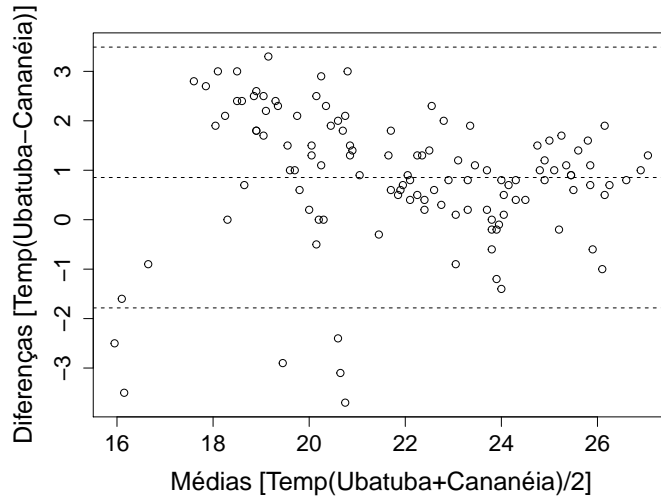
peratura para Ubatuba e Cananéia. O gráfico QQ correspondente está apresentado na Figura 4.11. Observamos que a maioria dos pontos está acima da reta  $y = x$ , mostrando que as temperaturas de Ubatuba são em geral maiores do que as de Cananeia para valores maiores do que 17 graus.



**Figura 4.11:** Gráfico QQ para comparação das distribuições de temperaturas de Ubatuba e Cananéia.

O gráfico de Bland-Altman correspondente, apresentado na Figura 4.12, sugere que acima de 17 graus, em média Ubatuba tende a ser 1 grau mais quente que Cananeia.





**Figura 4.12:** Gráfico de médias/diferenças de Tukey (Bland-Altman) para comparação das distribuições de temperaturas de Ubatuba e Cananéia.

## 4.4 Uma variável qualitativa e outra quantitativa

Um estudo da associação entre uma variável quantitativa e uma qualitativa consiste essencialmente na comparação das distribuições da primeira nos diversos níveis da segunda. Essa análise pode ser conduzida por meio de medidas resumo, histogramas, *boxplots* etc.

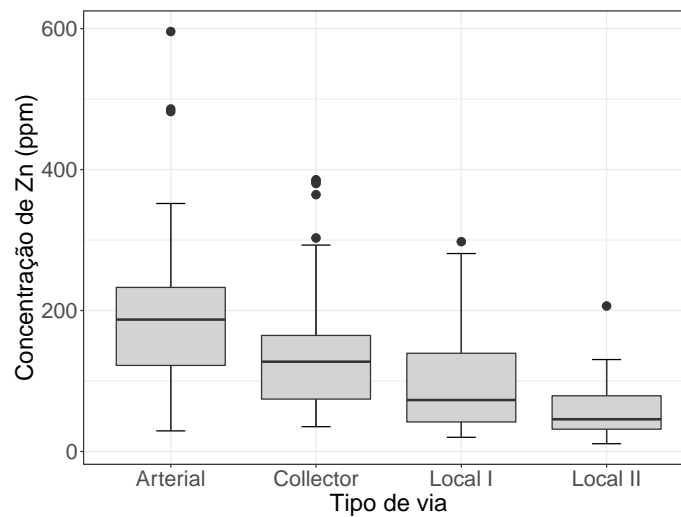
**Exemplo 4.7.** Num estudo coordenado pelo Laboratório de Poluição Atmosférica Experimental da USP, foram colhidos dados de concentração de vários elementos captados nas cascas de árvores em diversos pontos do centro expandido do município de São Paulo com o intuito de avaliar sua associação com a poluição atmosférica oriunda do tráfego. Os dados disponíveis no arquivo *arvores* foram extraídos desse estudo e contêm a concentração de Zn (ppm) entre outros elementos em 497 árvores classificadas segundo a espécie (*alfeneiro*, *sibipiruna* e *tipuana*) e a localização em termos da proximidade do tipo de via (arterial, coletora, local I, local II, em ordem decrescente da intensidade de tráfego). Para efeito didático, consideramos primeiramente as 193 *tipuanas*. Medidas resumo para a concentração de Zn segundo os níveis de espécie e tipo de via estão indicadas na Tabela 4.22.

**Tabela 4.22:** Medidas resumo para a concentração de Zn (ppm) em cascas de *tipuanas*

Tipo de via	Desvio		Min	Q1	Mediana	Q3	Max	n
	Média	padrão						
Arterial	199,4	110,9	29,2	122,1	187,1	232,8	595,8	59
Coletora	139,7	90,7	35,2	74,4	127,4	164,7	385,5	52
Local I	100,6	73,4	20,1	41,9	73,0	139,4	297,7	48
Local II	59,1	42,1	11,0	31,7	45,7	79,0	206,4	34

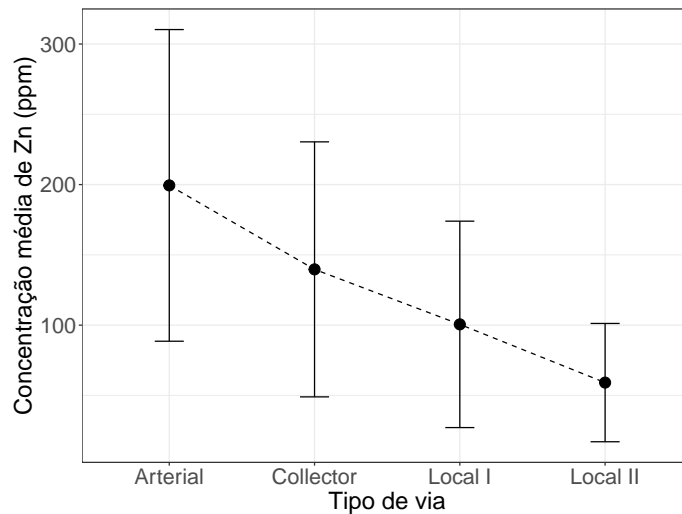
Min: mínimo                      Max: máximo  
Q1: primeiro quartil      Q3: terceiro quartil

Os resultados indicados na Tabela 4.22 mostram que tanto as concentrações média e mediana de Zn quanto o correspondente desvio padrão decrescem à medida que a intensidade de tráfego diminui, sugerindo que essa variável pode ser utilizada como um indicador da poluição produzida por veículos automotores. Os *boxplots* apresentados na Figura 4.13 confirmam essas conclusões e também indicam que as distribuições apresentam uma leve assimetria, especialmente para as vias coletoras e locais I além de alguns pontos discrepantes.

**Figura 4.13:** *Boxplots* para comparação das distribuições da concentração de Zn nas cascas de *tipuanas*.

Outro tipo de gráfico útil para avaliar a associação entre a variável quantitativa (concentração de Zn, no exemplo) e a variável qualitativa (tipo de via, no exemplo) especialmente quando esta tem níveis ordinais (como no exemplo) é o **gráfico de perfis médios**. Nesse gráfico cartesiano as médias (e barras representando desvios padrões, erros padrões ou intervalos de confiança - para detalhes, veja a Nota de Capítulo 6) da variável quantitativa são representadas no eixo das ordenadas e os níveis da variável quantitativa, no eixo das abscissas. O gráfico de perfis médios para a concentração de Zn

medida nas cascas de *Tipuanas* está apresentado na Figura 4.14 e reflete as mesmas conclusões obtidas com as análises anteriores.



**Figura 4.14:** Gráfico de perfis médios (com barras de desvios padrões) para comparação das distribuições da concentração de Zn nas cascas de *tipuanas*.

No título do gráfico, deve-se sempre indicar o que representam as barras; desvios padrões são úteis para avaliar como a dispersão dos dados em torno da média correspondente varia com os níveis da variável quantitativa (e não dependem do número de observações utilizadas para o cálculo da média); erros padrões são indicados para avaliação da precisão das médias (e dependem do número de observações utilizadas para o cálculo delas); intervalos de confiança servem para comparação das médias populacionais correspondentes e dependem de suposições sobre a distribuição da variável quantitativa.

Os segmentos de reta (linhas pontilhadas) que unem os pontos representando as médias não têm interpretação e servem apenas para salientar possíveis tendências de variação dessas médias.

Para propósitos inferenciais, uma técnica apropriada para a análise de dados com essa natureza é a **Análise de Variância** (com um fator), comumente cognominada ANOVA (*ANalysis Of VAriance*). O objetivo desse tipo de análise é avaliar diferenças entre as respostas esperadas das unidades de investigação na população da qual se supõe que os dados correspondem a uma amostra.

Um modelo bastante empregado para representar as distribuições da variável resposta das unidades de investigação submetidas aos diferentes tratamentos é

$$y_{ij} = \mu_i + e_{ij}, \quad i = 1, \dots, a, \quad j = 1, \dots, n_i \quad (4.8)$$

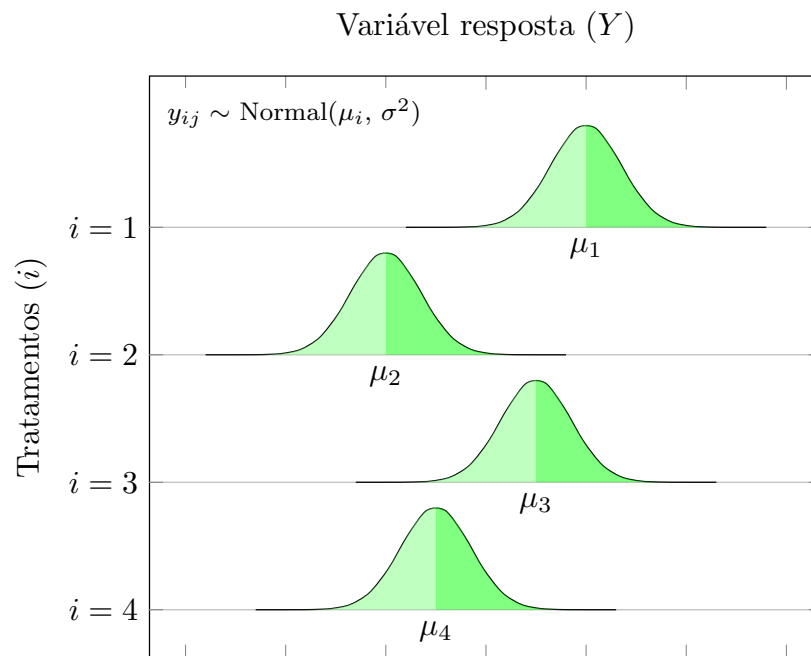
em que  $y_{ij}$  representa a resposta da  $j$ -ésima unidade de investigação submetida ao  $i$ -ésimo tratamento,  $\mu_i$  denota o valor esperado correspondente e

os  $e_{ij}$  representam erros aleatórios independentes para os quais se supõem distribuições normais com valores esperados iguais a zero e variância  $\sigma^2$ , constante, mas desconhecida. Uma representação gráfica desse modelo está disposta na Figura 4.15.

A hipótese a ser avaliada por meio da ANOVA é que os valores esperados das respostas associados aos  $a$  tratamentos são iguais, ou seja

$$H : \mu_1 = \dots = \mu_a.$$

Se a ANOVA indicar que não existem evidências contrárias a essa hipótese, dizemos que não há **efeito de tratamentos**. Em caso contrário, dizemos que os dados sugerem que pelo menos uma das médias  $\mu_i$  é diferente das demais.



**Figura 4.15:** Representação de um modelo para ANOVA com um fator.

A concretização da ANOVA para a comparação dos valores esperados da concentração de Zn referentes aos diferentes tipos de via pode ser realizada por meio da função `aov` com os comandos

```
tipovia <- as.factor(tipuana$tipovia)
anovaZn <- aov(Zn ~ tipovia, data=tipuana)
summary(anovaZn)
```

O resultado, disposto na forma de uma tabela de ANOVA é

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
tipovia	3	498525	166175	21.74	3.84e-12 ***
Residuals	189	1444384	7642		

e sugere uma diferença altamente significativa ( $p < 0,001$ ) entre os correspondentes valores esperados, ou seja, que pelo menos um dos valores esperados é diferente dos demais. O prosseguimento da análise envolve alguma técnica de **comparações múltiplas** para identificar se as concentrações esperadas de Zn correspondentes aos diferentes tipos de via são todas diferentes entre si ou se existem algumas que podem ser consideradas iguais. Para detalhes sobre esse tópico, o leitor pode consultar o excelente texto de Kutner et al. (2004).

Uma análise similar para os 76 *alfeneiros* está resumida na Tabela 4.23, e Figuras 4.16 e 4.17.

**Tabela 4.23:** Medidas resumo para a concentração de Zn (ppm) em cascas de *alfeneiros*

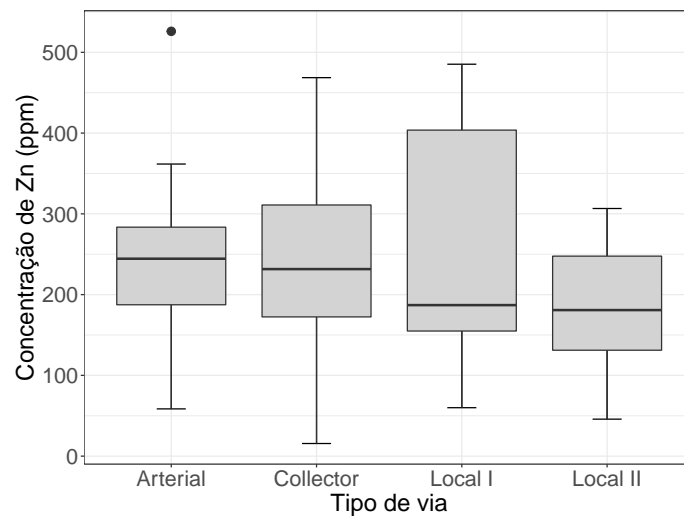
Tipo de via	Desvio							
	Média	padrão	Min	Q1	Mediana	Q3	Max	n
Arterial	244,2	102,4	58,5	187,4	244,5	283,5	526,0	19
Coletora	234,8	102,7	15,6	172,4	231,6	311,0	468,6	31
Local I	256,3	142,4	60,0	154,9	187,0	403,7	485,3	19
Local II	184,4	96,4	45,8	131,1	180,8	247,6	306,6	7

Min: mínimo

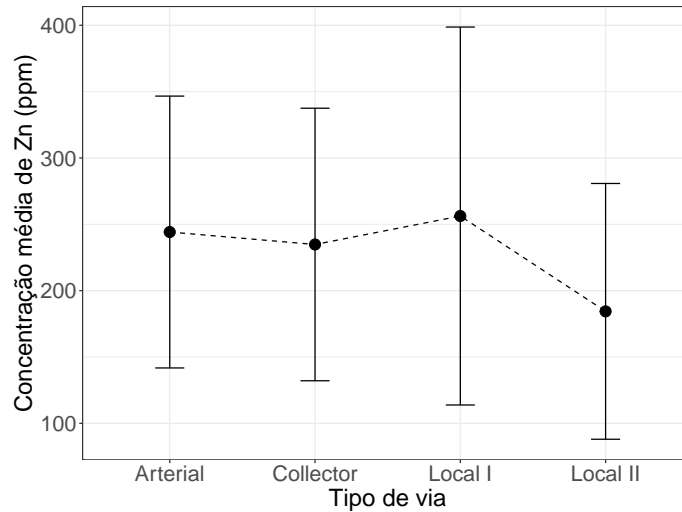
Max: máximo

Q1: primeiro quartil

Q3: terceiro quartil



**Figura 4.16:** *Boxplots* para comparação das distribuições da concentração de Zn nas cascas de *alfeneiros*.



**Figura 4.17:** Gráfico de perfis médios (com barras de desvios padrões) para comparação das distribuições da concentração de Zn nas cascas de *alfeneiros*.

Os valores dispostos na Tabela 4.23 e as Figuras 4.16 e 4.17 indicam que as concentrações de Zn em *alfeneiros* tendem a ser maiores do que aquelas encontradas em *tipuanas* porém são menos sensíveis a variações na intensidade de tráfego com exceção de vias locais II; no entanto, convém lembrar que apenas 7 *alfeneiros* foram avaliados nas proximidades desse tipo de via.

A tabela de ANOVA correspondente é

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
tipovia	3	27482	9161	0.712	0.548
Residuals	72	925949	12860		

e não sugere que as concentrações esperadas de Zn nas cascas de *alfeneiros* sejam diferentes para árvores dessa espécie localizadas nas cercanias dos diferentes tipos de via ( $p < 0,548$ ).

**Exemplo 4.8.** Consideremos os dados do arquivo *empresa*, referentes à informações sobre 36 funcionários de uma certa empresa. Nosso objetivo é avaliar a associação entre as variáveis “Salário” ( $S$ ) expressa em número de salários mínimos e “Grau de instrução” ( $GI$ ), com a classificação “fundamental”, “médio” ou “superior”.

Medidas resumo para “Salário” em função dos níveis de “Grau de instrução” são apresentadas na Tabela 4.24.

**Tabela 4.24:** Medidas resumo para a variável “Salário” (número de salários mínimos)

Grau de instrução	$n$	Média $\bar{S}$	Variância $\text{var}(S)$	Min	Q1	Q2	Q3	Max
Fundam	12	7,84	7,77	4,00	6,01	7,13	9,16	13,65
Médio	18	11,54	13,10	5,73	8,84	10,91	14,48	19,40
Superior	6	16,48	16,89	10,53	13,65	16,74	18,38	23,30
Todos	36	11,12	20,46	4,00	7,55	10,17	14,06	23,30

Min: mínimo                      Max: máximo  
Q1: primeiro quartil      Q2: mediana      Q3: terceiro quartil

A leitura desses resultados sugere associação entre salários e grau de instrução: o salário médio tende a aumentar conforme aumenta o grau de instrução. O salário médio dos 36 funcionários é 11,12 salários mínimos; para funcionários com curso superior, o salário médio é de 16,48 salários mínimos, enquanto que funcionários com primeiro grau completo recebem, em média, 7,82 salários mínimos.

Embora nos dois exemplos apresentados a variável qualitativa seja ordinal, o mesmo tipo de análise pode ser empregado no caso de variáveis qualitativas nominais, tendo o devido cuidado na interpretação, pois não se poderá afirmar que a média da variável quantitativa aumenta com o aumento dos níveis da variável quantitativa.

Como nos casos anteriores, é conveniente poder contar com uma medida que quantifique o grau de associação entre as duas variáveis. Com esse intuito, convém observar que as variâncias podem ser usadas como insumos para construir essa medida. A variância da variável quantitativa (“Salário”) para todos os dados, *i.e.*, calculada sem usar a informação da variável qualitativa (“Grau de instrução”), mede a dispersão dos dados em torno da média global (média salarial de todos os funcionários). Se as variâncias da variável “Salário” calculadas dentro de cada categoria da variável qualitativa forem pequenas (comparativamente à variância global), essa variável pode ser usada para melhorar o conhecimento da distribuição da variável quantitativa, sugerindo a existência de uma associação entre ambas.

Na Tabela 4.24 pode-se observar que as variâncias do salário dentro das três categorias são menores do que a variância global e além disso, que aumentam com o grau de instrução. Uma medida resumo da variância **entre** as categorias da variável qualitativa é a média das variâncias ponderada pelo número de observações em cada categoria, ou seja,

$$\overline{\text{Var}(S)} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i \text{Var}_i(S)}{\sum_{i=1}^k n_i}, \quad (4.9)$$

em que  $k$  é o número de categorias ( $k = 3$  no exemplo) e  $\text{Var}_i(S)$  denota a variância de  $S$  dentro da categoria  $i$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Pode-se mostrar que  $\overline{\text{Var}(S)} \leq \text{Var}(S)$ , de modo que podemos definir o grau de associação entre as duas variáveis como o ganho relativo na variância obtido pela introdução

da variável qualitativa. Explicitamente,

$$R^2 = \frac{\text{Var}(S) - \overline{\text{Var}(S)}}{\text{Var}(S)} = 1 - \frac{\overline{\text{Var}(S)}}{\text{Var}(S)}. \quad (4.10)$$

Além disso, pode-se mostrar que  $0 \leq R^2 \leq 1$ .

Quando as médias da variável resposta (salário, no exemplo) nas diferentes categorias da variável explicativa forem iguais,  $\overline{\text{Var}(S)} = \text{Var}(S)$  e  $R^2 = 0$ , indicando a inexistência de associação entre as duas variáveis relativamente às suas médias. Esse é o princípio que norteia a técnica de Análise de Variância, cuja finalidade é comparar médias (populacionais) de distribuições normais independentes com mesma variância. A estatística  $R^2$  também é utilizada para avaliar a qualidade do ajuste de modelos de regressão, o tópicos abordado no Capítulo 6.

Para os dados do Exemplo 4.8, temos

$$\overline{\text{Var}(S)} = \frac{12 \times 7,77 + 18 \times 13,10 + 6 \times 16,89}{12 + 18 + 6} = 11,96.$$

Como  $\text{Var}(S) = 20,46$ , obtemos  $R^2 = 1 - (11,96/20,46) = 0,415$ , sugerindo que 41,5% da variação total do salário é **explicada** pelo grau de instrução.

## 4.5 Notas de capítulo

### 1) Probabilidade condicional e razões de chances

Considere a seguinte tabela 2x2

	Doente ( $D$ )	Não doentes ( $\bar{D}$ )	Total
Exposto ( $E$ )	$n_{11}$	$n_{12}$	$n_{1+}$
Não exposto ( $\bar{E}$ )	$n_{21}$	$n_{22}$	$n_{2+}$
Total	$n_{+1}$	$n_{+2}$	$n_{++}$

correspondente a um estudo em que o interesse é avaliar a associação entre a exposição de indivíduos a um certo fator de risco e a ocorrência de uma determinada moléstia. Em **estudos prospectivos** (*prospective, follow-up, cohort*) o planejamento envolve a escolha de amostras de tamanhos  $n_{1+}$  e  $n_{2+}$  de indivíduos respectivamente expostos e não expostos ao fator de risco e a observação da ocorrência ou não da moléstia após um certo intervalo de tempo. A razão de chances (de doença entre indivíduos expostos e não expostos) é definida como:

$$\omega_1 = \frac{P(D|E)P(\bar{D}|\bar{E})}{P(\bar{D}|E)P(D|\bar{E})}$$

em que  $P(D|E)$  denota a probabilidade da ocorrência da moléstia para indivíduos expostos ao fator de risco, com os demais termos dessa expressão tendo interpretação similar.



Em **estudos retrospectivos** ou **caso-controle**, o planejamento envolve a escolha de amostras de tamanhos  $n_{+1}$  e  $n_{+2}$  de indivíduos não doentes (controles) e doentes (casos), respectivamente e a observação retrospectiva de sua exposição ou não ao fator de risco. Nesse caso, a razão de chances é definida por:

$$\omega_2 = \frac{P(E|D)P(\bar{E}|\bar{D})}{P(\bar{E}|D)P(E|\bar{D})},$$

com  $P(E|D)$  denotando a probabilidade de indivíduos com a moléstia terem sido expostos ao fator de risco e com interpretação similar para os demais termos da expressão. Utilizando a definição de probabilidade condicional [ver Bussab e Morettin (2017), por exemplo], temos

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{[P(D \cap E)/P(E)][P(\bar{D} \cap \bar{E})/P(\bar{E})]}{[P(\bar{D} \cap E)/P(E)][P(D \cap \bar{E})/P(\bar{E})]} = \frac{P(D \cap E)P(\bar{D} \cap \bar{E})}{P(\bar{D} \cap E)P(D \cap \bar{E})} \\ &= \frac{[P(E|D)/P(D)][P(\bar{E}|\bar{D})/P(\bar{D})]}{[P(E|\bar{D})/P(\bar{D})][P(\bar{E}|D)/P(D)]} = \omega_2 \end{aligned}$$

Embora não se possa calcular o risco relativo de doença em estudos retrospectivos, a razão de chances obtida por meio desse tipo de estudo é igual àquela que seria obtida por intermédio de um estudo prospectivo, que em muitas situações práticas não pode ser realizado devido ao custo.

## 2) Medidas de dependência entre duas variáveis

Dizemos que  $X$  e  $Y$  são **comonotônicas** se  $Y$  (ou  $X$ ) for uma função estritamente crescente de  $X$  (ou  $Y$ ) e são **contramonotônicas** se a função for estritamente decrescente.

Consideremos duas variáveis  $X$  e  $Y$  e seja  $\delta(X,Y)$  uma medida de dependência entre elas. As seguintes propriedades são desejáveis para  $\delta$  (Embrechts et al., 2003):

- (i)  $\delta(X,Y) = \delta(Y,X)$ ;
- (ii)  $-1 \leq \delta(X,Y) \leq 1$ ;
- (iii)  $\delta(X,Y) = 1$  se  $X$  e  $Y$  são comonotônicas e  $\delta(X,Y) = -1$  se  $X$  e  $Y$  são contramonotônicas;
- (iv) Se  $T$  for uma transformação monótona,

$$\delta(T(X),Y) = \begin{cases} \delta(X,Y), & \text{se } T \text{ for crescente,} \\ -\delta(X,Y), & \text{se } T \text{ for decrescente.} \end{cases}$$

- (v)  $\delta(X,Y) = 0$  se e somente se  $X$  e  $Y$  são independentes.

O **coeficiente de correlação (linear)** entre  $X$  e  $Y$  é definido por

$$\rho = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{DP(X)DP(Y)} \quad (4.11)$$

com  $\text{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ ,  $DP(X) = E\{[X - E(X)]^2\}$  e  $DP(Y) = E\{[Y - E(Y)]^2\}$ . Pode-se provar que  $-1 \leq \rho \leq 1$  e que satisfaz as propriedades (i)-(ii). Além disso,  $\rho$  requer que as variâncias de  $X$  e  $Y$  sejam finitas e  $\rho = 0$  não implica independência entre  $X$  e  $Y$ , a não ser que  $(X,Y)$  tenha uma distribuição normal bivariada. Também, mostra-se que  $\rho$  não é invariante sob transformações não lineares estritamente crescentes.

### 3) Dependência linear entre duas variáveis

Convém reafirmar que  $\rho(X,Y)$  mede dependência linear entre  $X$  e  $Y$  e não outro tipo de dependência. De fato, suponha que uma das variáveis possa ser expressa linearmente em termos da outra, por exemplo  $X = aY + b$ , e seja  $d = E(|X - aY - b|^2)$ . Então, pode-se provar (veja Exercício 13) que o mínimo de  $d$  ocorre quando

$$a = \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} \rho(X,Y), \quad b = E(X) - aE(Y), \quad (4.12)$$

e é dado por

$$\min d = \sigma_X^2 [1 - \rho(X,Y)^2]. \quad (4.13)$$

Portanto, quanto maior o valor absoluto do coeficiente de correlação entre  $X$  e  $Y$ , melhor a acurácia com que uma das variáveis pode ser representada como uma combinação linear da outra. Obviamente, este mínimo se anula se e somente se  $\rho = 1$  ou  $\rho = -1$ . Então de (4.13) temos

$$\rho(X,Y) = \frac{\sigma_X^2 - \min_{a,b} E(|X - aY - b|^2)}{\sigma_X^2}, \quad (4.14)$$

ou seja,  $\rho(X,Y)$  mede a redução relativa na variância de  $X$  por meio de uma regressão linear de  $X$  sobre  $Y$ .

### 4) Medidas de dependência robustas

O coeficiente de correlação não é uma medida robusta. Uma alternativa robusta para a associação entre duas variáveis quantitativas pode ser construída como indicamos na sequência. Considere as variáveis padronizadas

$$\tilde{x}_k = \frac{x_k}{S_x(\alpha)}, \quad \tilde{y}_k = \frac{y_k}{S_y(\alpha)}, \quad k = 1, \dots, n,$$

em que  $S_x^2(\alpha)$  e  $S_y^2(\alpha)$  são as variâncias  $\alpha$ -aparadas para os dados  $x_i$  e  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , respectivamente. Um coeficiente de correlação robusto é definido por

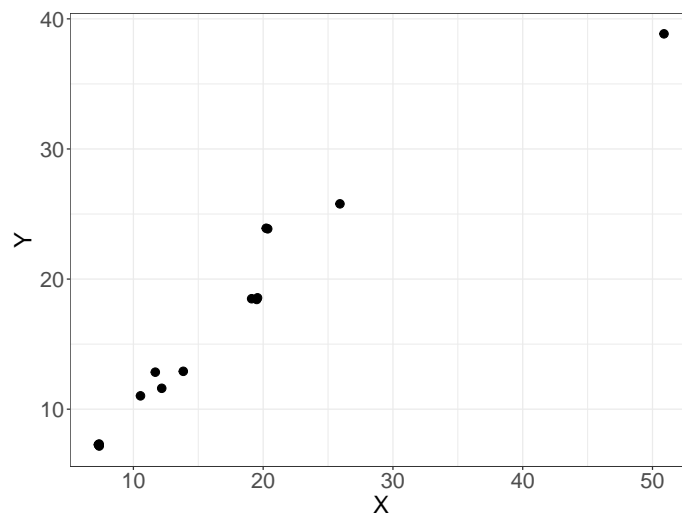
$$r(\alpha) = \frac{S_{\tilde{x}+\tilde{y}}^2(\alpha) - S_{\tilde{x}-\tilde{y}}^2(\alpha)}{S_{\tilde{x}+\tilde{y}}^2(\alpha) + S_{\tilde{x}-\tilde{y}}^2(\alpha)}, \quad (4.15)$$

em que, por exemplo,  $S_{\tilde{x}+\tilde{y}}^2(\alpha)$  é a variância  $\alpha$ -aparada da soma dos valores padronizados de  $x_i$  e  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Pode-se mostrar que  $r(\alpha) = r_P$  se  $\alpha = 0$ . Esse método é denominado de **método de somas e diferenças padronizadas**.

**Exemplo 4.9.** Consideremos os dados  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  apresentados na Tabela 4.25 e dispostos num diagrama de dispersão na Figura 4.18.

**Tabela 4.25:** Valores hipotéticos de duas variáveis  $X$  e  $Y$

$x$	$y$	$x$	$y$
20,2	24,0	19,3	18,5
50,8	38,8	19,3	18,5
12,0	11,5	19,3	18,5
25,6	25,8	10,2	11,1
20,2	24,0	12,0	12,9
7,2	7,2	7,2	7,2
7,2	7,2	13,5	12,9
7,2	7,2		



**Figura 4.18:** Gráfico de dispersão para os dados do Exemplo 4.9.

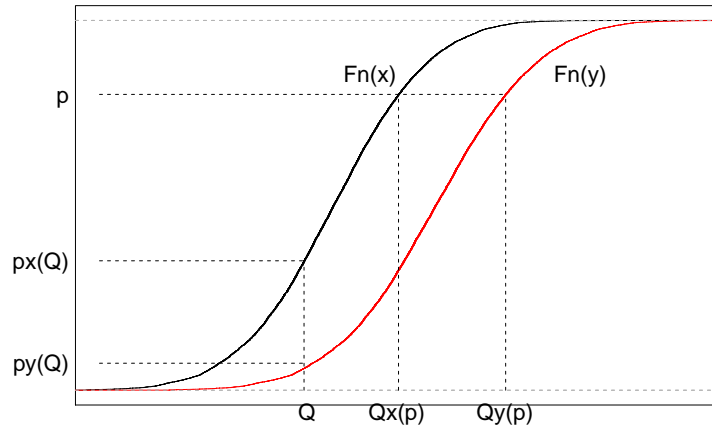
Para  $\alpha = 0,05$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \bar{x}(\alpha) &= 14,86, & \bar{y}(\alpha) &= 15,33, & S_x(\alpha) &= 5,87, & S_y(\alpha) &= 6,40, \\ (\bar{\tilde{x}} + \bar{\tilde{y}})(\alpha) &= 4,93, & (\bar{\tilde{x}} - \bar{\tilde{y}})(\alpha) &= 0,14, \\ S_{\tilde{x}+\tilde{y}}^2(\alpha) &= 3,93, & S_{\tilde{x}-\tilde{y}}^2(\alpha) &= 0,054. \end{aligned}$$

Então de (4.15) obtemos  $r(\alpha) = 0,973$ , o que indica uma alta correlação entre as duas variáveis.

## 5) Gráficos PP

Na Figura 4.19, observe que  $p_x(q) = P(X \leq q) = F_X(q)$  e que  $p_y(q) = P(Y \leq q) = F_Y(q)$ . O gráfico cartesiano com os pares  $[p_x(q), p_y(q)]$ , para qualquer  $q$  real, é chamado de gráfico de probabilidades ou **gráfico PP**. O gráfico cartesiano com os pares  $[Q_X(p), Q_Y(p)]$ , para  $0 < p < 1$ , é o gráfico de quantis *versus* quantis (gráfico QQ).



**Figura 4.19:** Quantis e probabilidades associados a duas distribuições.

Se as distribuições de  $X$  e  $Y$  forem iguais, então  $F_X = F_Y$  e os pontos dos gráficos PP e QQ se situam sobre a reta  $x = y$ . Em geral os gráficos QQ são mais sensíveis a diferenças nas caudas das distribuições se estas forem aproximadamente simétricas e com a aparência de uma distribuição normal. Suponha que  $Y = aX + b$ , ou seja, que as distribuições de  $X$  e  $Y$  são as mesmas, exceto por uma transformação linear. Então,

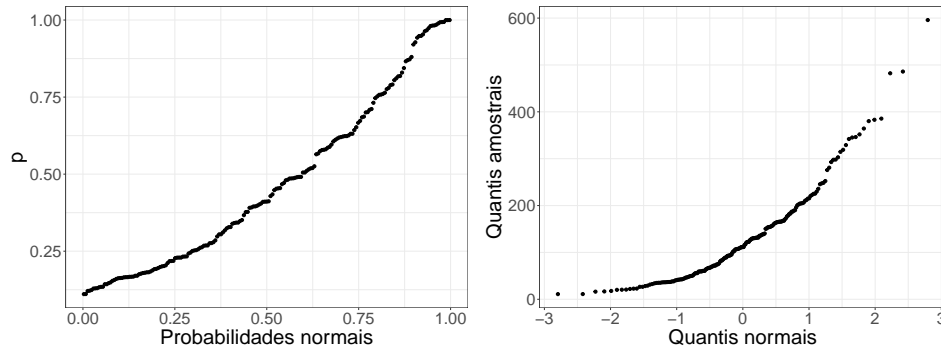
$$p = P[X \leq Q_X(p)] = P[aX + b \leq aQ_X(p) + b] = P[Y \leq Q_Y(p)],$$

ou seja,

$$Q_Y(p) = aQ_X(p) + b.$$

O gráfico QQ correspondente será representado por uma reta com inclinação  $a$  e intercepto  $b$ . Essa propriedade não vale para gráficos PP.

Gráficos PP e QQ para a distribuição da concentração de Zn em cascas de árvores da espécie *Tipuana*, disponíveis no arquivo `arvores` estão dispostos na Figura 4.20 e salientam a maior capacidade dos últimos para detectar assimetrias em distribuições de frequência.



**Figura 4.20:** Gráficos PP e QQ para concentração de Zn em cascas de árvores da espécie *Tipuana*.

#### 6) Diferenças significativas

Consideremos a distribuição de uma variável  $X$  (pressão arterial, por exemplo) em duas populações,  $A$  e  $B$  e admitamos que os valores esperados de  $X$  sejam  $\mu_A$  e  $\mu_B$  (desconhecidos), respectivamente. Além disso, admitamos que ambas as distribuições tenham desvios padrões iguais a  $\sigma = 10$  (conhecido). Nosso objetivo é saber se existem evidências de que  $\mu_A = \mu_B$  com base em amostras aleatórias  $X_{A1}, \dots, X_{An}$  da população  $A$  e  $X_{B1}, \dots, X_{Bn}$  da população  $B$ . Admitamos que  $n = 100$  e que as correspondentes médias amostrais sejam  $\bar{X}_A = 13$  e  $\bar{X}_B = 10$ , respectivamente. Nesse caso dizemos que a diferença  $|\bar{X}_A - \bar{X}_B| = 3$  é **significativa** com  $p < 0,05$ , concluindo que há evidências de que para acreditar que  $\mu_A \neq \mu_B$ . Consideremos agora uma amostra de tamanho  $n = 25$  de cada população, com médias  $\bar{X}_A = 15$  e  $\bar{X}_B = 10$ . Nesse caso dizemos que a diferença  $|\bar{X}_A - \bar{X}_B| = 5$  **não é significativa** com  $p > 0,05$ , concluindo que não há razão para acreditar que  $\mu_A \neq \mu_B$ , embora a diferença entre as médias amostrais  $\bar{X}_A$  e  $\bar{X}_B$  seja maior que no primeiro caso. Essencialmente, queremos saber qual é a interpretação da expressão “a diferença entre as médias é significativa”.

O cerne do problema é que não queremos tirar conclusões sobre as médias amostrais,  $\bar{X}_A$  e  $\bar{X}_B$  (cuja diferença é evidente, pois a conhecemos) e sim sobre as médias populacionais  $\mu_A$  e  $\mu_B$ , que desconhecemos. Para associar as amostras às populações, precisamos de um modelo probabilístico. No caso do exemplo, um modelo simples supõe que as distribuições de frequências da variável  $X$  nas populações  $A$  e  $B$  são normais, independentes com médias  $\mu_A$  e  $\mu_B$ , respectivamente e desvio padrão comum  $\sigma = 10$ .

No primeiro caso ( $n = 100$ ), admitindo que as duas distribuições têm médias iguais ( $\mu_A = \mu_B$ ), a probabilidade de que a diferença (em valor

absoluto) entre as médias amostrais seja maior ou igual a 3 é

$$P(|\bar{X}_A - \bar{X}_B| \geq 3) = P(|Z| > 3/(\sqrt{2}\sigma/\sqrt{100}) = P(|Z| \geq 2,82) < 0,05$$

em que  $Z$  representa uma distribuição normal padrão, *i.e.*, com média zero e variância 1. Em outras palavras, se as médias populacionais forem iguais, a probabilidade de se obter uma diferença de magnitude 3 entre as médias de amostras de tamanho  $n = 100$  é menor que 5% e então dizemos que a diferença (entre as médias amostrais) é significativa ( $p < 0,05$ ), indicando que a evidência de igualdade entre as médias populacionais  $\mu_A$  e  $\mu_B$  é pequena.

No segundo caso ( $n = 25$ ), temos

$$P(|\bar{X}_A - \bar{X}_B| \geq 5) = P(|Z| > 5/(\sigma/\sqrt{25}) = P(|Z| > 1,76) > 0,05,$$

e então dizemos que a diferença (entre as médias amostrais) não é significativa ( $p > 0,05$ ), indicando que não há evidências fortes o suficiente para acreditarmos que as médias populacionais  $\mu_A$  e  $\mu_B$  sejam diferentes.

Apesar de que no segundo caso, a diferença amostral é maior do que aquela do primeiro caso, concluímos que a evidência de diferença entre as médias populacionais é menor. Isso ocorre porque o tamanho amostral desempenha um papel importante nesse processo; quanto maior o tamanho amostral, mais fácil será detectar diferenças entre as médias populacionais em questão.

De forma geral, afirmar que uma diferença entre duas médias amostrais é significativa é dizer que as médias das populações de onde as amostras foram extraídas não devem ser iguais; por outro lado, dizer que a diferença entre as médias amostrais não é significativa é dizer que não há razões para acreditar que exista diferença entre as médias populacionais correspondentes. A escolha do valor 0,05 para a decisão sobre a significância ou não da diferença é arbitrária embora seja muito utilizada na prática.

## 7) Intervalos de confiança para o risco relativo e razão de chances

Consideremos a seguinte tabela  $2 \times 2$

**Tabela 4.26:** Frequência de pacientes

Fator de risco	Status do paciente		Total
	doente	são	
presente	$n_{11}$	$n_{12}$	$n_{1+}$
ausente	$n_{21}$	$n_{22}$	$n_{2+}$
Total	$n_{+1}$	$n_{+2}$	$n$

Estimativas dos riscos (populacionais) de doença para pacientes expostos e não expostos ao fator de risco são, respectivamente,  $p_1 = n_{11}/n_{1+}$  e  $p_2 = n_{21}/n_{2+}$ . Sob a suposição de que as distribuições de  $n_{11}$  e  $n_{21}$  são binomiais, as variâncias de  $p_1$  e  $p_2$  são respectivamente estimadas por  $\text{Var}(p_1) = p_1(1 - p_1)/n_{1+}$  e  $\text{Var}(p_2) = p_2(1 - p_2)/n_{2+}$ .

Em vez de estimar a variância associada à estimativa do risco relativo,  $rr = p_1/p_2$ , é mais conveniente estimar a variância de  $\log(rr)$ . Com essa finalidade, recorremos ao **método Delta**<sup>6</sup>, obtendo

$$\begin{aligned} \text{Var}[\log(rr)] &= \text{Var}[\log(p_1) - \log(p_2)] = \text{Var}[\log(p_1)] + \text{Var}[\log(p_2)] \\ &= \frac{p_1(1 - p_1)}{p_1^2 n_{1+}} + \frac{p_2(1 - p_2)}{p_2^2 n_{2+}} = \frac{1 - p_1}{p_1 n_{1+}} + \frac{1 - p_2}{p_2 n_{2+}} \\ &= \frac{1 - p_1}{n_{11}} + \frac{1 - p_2}{n_{21}} \\ &= \frac{1}{n_{11}} - \frac{1}{n_{1+}} + \frac{1}{n_{21}} - \frac{1}{n_{2+}} \end{aligned}$$

Os limites inferior e superior de um intervalo de confiança com coeficiente de confiança aproximado de 95% para o logaritmo do risco relativo (populacional)  $RR$  são obtidos de

$$\log(p_1/p_2) \pm 1.96 \sqrt{\frac{1}{n_{11}} - \frac{1}{n_{1+}} + \frac{1}{n_{21}} - \frac{1}{n_{2+}}}. \quad (4.16)$$

Os limites do intervalo de confiança correspondente para o risco relativo (populacional) podem ser obtidos exponenciando-se os limites indicados em 4.16.

A razão de chances  $RC$  de doença entre indivíduos expostos e não expostos ao fator de risco é estimada por  $rc = p_1(1 - p_2)/p_2(1 - p_1)$ . Como no caso do risco relativo é mais conveniente estimar a variância de  $\log(rc)$ , que é

$$\text{Var}[\log(rc)] = \frac{1}{n_{11}} + \frac{1}{n_{12}} + \frac{1}{n_{21}} + \frac{1}{n_{22}}.$$

Os limites inferior e superior de um intervalo de confiança com coeficiente de confiança aproximado de 95% para o logaritmo do razão de chances (populacional)  $RC$  são obtidos de

$$\log[p_1(1 - p_2)/p_2(1 - p_1)] \pm 1.96 \sqrt{\frac{1}{n_{11}} + \frac{1}{n_{12}} + \frac{1}{n_{21}} + \frac{1}{n_{22}}}. \quad (4.17)$$

---

<sup>6</sup>O método Delta é utilizado para estimar a variância de funções de variáveis aleatórias. Essencialmente, se  $x$  é tal que  $E(X) = \mu$  e  $\text{Var}(X) = \sigma^2$ , então sob certas condições de regularidade (em geral satisfeitas nos casos mais comuns),  $\text{Var}[g(X)] = [g'(\mu)]^2 \sigma^2$  em que  $g$  é uma função com derivada  $g'(z)$  no ponto  $z$ . Para detalhes, o leitor poderá consultar Sen et al. (2009).

Assim como no caso do risco relativo, os limites do intervalo de confiança aproximado correspondente para a razão de chances pode ser obtido por meio da exponenciação dos limites indicados em (4.17).

Tendo em conta a forma da estimativa da sensibilidade de um teste diagnóstico, a saber,  $\widehat{S} = n_{11}/n_{1+}$ , uma estimativa sua variância, obtida por meio da aproximação da distribuição binomial por uma distribuição normal é  $\widehat{\text{Var}}(x) = S(1 - S)/n_{1+}$  e os limites inferior e superior de um intervalo de confiança com coeficiente de confiança aproximado de 95% para a sensibilidade populacional são, respectivamente,

$$S - 1,96\sqrt{S(1 - S)/n_{1+}} \quad \text{e} \quad s + 1,96\sqrt{S(1 - S)/n_{1+}} \quad (4.18)$$

Intervalos de confiança aproximados para as demais características de testes diagnósticos podem ser construídos de maneira análoga, substituindo em (4.18),  $\widehat{S}$  e o denominador  $n_{1+}$  pelos valores correspondentes nas definições de especificidade, falsos positivos etc.

### 8) Uma interpretação ingênua sobre o valor-p

Embora haja controvérsias, uma medida de plausibilidade de uma hipótese (nula) estatística é o valor-p.

Considere a hipótese de que a probabilidade de cara, digamos  $\theta$ , num lançamento de uma moeda seja igual a 0,5 contra uma hipótese alternativa de que essa probabilidade é maior do que 0,5 e admitamos que o objetivo seja decidir se  $\theta = 0,5$  ou  $\theta < 0,5$  com base em 10 lançamentos dessa moeda. Suponhamos que 10 caras tenham sido observadas nesses 10 lançamentos. A probabilidade de que isso ocorra para moedas com  $\theta = 0,5$  pode ser calculada por meio da distribuição binomial e é igual a  $1/1024 \approx 0,001$ ; esse é o valor-p associado ao resultado (10 caras em 10 lançamentos) e indica que embora esse resultado seja possível, ele é pouco provável. Se, com base nesse resultado, decidirmos que  $\theta$  deve ser menor do 0,5, a probabilidade de termos decidido erroneamente é esse valor-p.

Se, tivermos observado 8 em vez de 10 caras nos 10 lançamentos da moeda, o valor-p correspondente é a probabilidade de que 8 ou mais caras sejam observadas que também pode ser obtido por meio da distribuição binomial e é igual a  $56/1024 \approx 0,055$ . Neste caso, se optarmos pela decisão de afirmar que  $\theta$  deve ser menor do 0,5, a probabilidade de essa decisão esteja errada é  $0,055 = 56/1024$ .

A tomada da decisão depende das consequências de um possível erro mas é um problema extra estatístico. A conclusão estatística limita-se ao cálculo da probabilidade de uma decisão errada. Se decidirmos que a maior probabilidade de tomar a decisão errada for de 5% ou seja se adotarmos um **nível de significância**  $\alpha = 0,05$ , optaremos por dizer que  $\theta < 0,5$  no primeiro caso (10 caras em 10 lançamentos da



moeda), mas não o faremos no segundo caso (8 ou mais caras em 10 lançamentos da moeda).

Para detalhes técnicos e generalizações, o leitor pode consultar Bussab e Morettin (2017), por exemplo.

## 4.6 Exercícios

- 1) Considere o conjunto de dados disponível no arquivo **empresa**. Compare as distribuições de frequências das variáveis “Estado civil”, “Grau de Instrução” e “Salário” para indivíduos com diferentes procedências.
- 2) Considere o conjunto de dados disponível no arquivo **regioes**. Avalie a relação entre as variáveis “Região” e “Densidade populacional”.
- 3) Considere o conjunto de dados disponível no arquivo **salarios**.
  - a) Compare as distribuições das variáveis “Salário de professor secundário” e “Salário de administrador” por meio de um gráfico QQ e interprete os resultados.
  - b) Calcule o coeficiente de correlação de Pearson,  $r_P$  e o coeficiente de correlação robusto,  $r(\alpha)$  com  $\alpha = 0,10$  entre essas duas variáveis.
- 4) Considere o conjunto de dados disponível no arquivo **coronarias**.
  - a) Construa gráficos QQ para comparar as distribuições das variáveis **imc** e **colesterol** de pacientes masculinos (=1) e femininos (=0) e discuta os resultados.
  - b) Calcule o coeficiente de correlação de Pearson e o coeficiente de correlação de Spearman entre as variáveis “Altura” e “Peso”.
  - c) Construa uma tabela de contingência para avaliar a distribuição conjunta das variáveis “Tabagismo” (com 6 níveis) e “Arteriopatia” (com 4 níveis) e calcule a intensidade de associação entre elas utilizando a estatística de Pearson, o coeficiente de contingência de Pearson e o coeficiente de “Tschuprov”.
- 5) Considere o conjunto de dados disponível no arquivo **esforco**.
  - a) Compare as distribuições de frequências da variável “VO2” em repouso e no pico do exercício para pacientes classificados em cada um dos níveis da variável “Etiologia” por meio de gráficos QQ e de medidas resumo. Comente os resultados.
  - b) Repita o item a) utilizando gráficos de Bland-Altman.
  - c) Utilize *boxplots* e gráficos de perfis médios para comparar as distribuições da variável “Frequência cardíaca” correspondentes a pacientes nos diferentes níveis da variável “NYHA”. Comente os resultados.

- 6) Para os dados do arquivo `salarios`, considere a variável “Região”, com as classes “América do Norte”, “América Latina”, “Europa” e “Outros” e a variável “Salário de professor secundário”. Avalie a associação entre essas duas variáveis.
- 7) Considere os dados do arquivo `figadodiag`. Calcule a sensibilidade, especificidade, taxas de falsos positivos e falsos negativos, valores preditivos positivos e negativos e acurácia das técnicas radiológicas para detecção de alterações anatômicas tendo os resultados intraoperatórios como padrão áureo.
- 8) Analise a variável “Preço de veículos” segundo as categorias N (nacional) e I (importado) para o conjunto de dados disponíveis no arquivo `veiculos`.
- 9) Utilizando a definição da Nota de Capítulo 4, prove que se  $\alpha = 0$ , então  $r(\alpha) = r$ .
- 10) Mostre que para a hipótese de inexistência de associação numa tabela  $r \times s$ , a estatística (4.1) pode ser escrita como

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{(n_{ij} - n_{i+}n_{+j}/n)^2}{n_{i+}n_{+j}/n},$$

em que  $n_{ij}$  é a frequência absoluta observada na linha  $i$  e coluna  $j$  e  $n_{i+}$  e  $n_{+j}$  são, respectivamente, os totais das linhas e colunas.

- 11) Prove que a expressão da estatística de Pearson do Exercício 10 pode ser escrita como

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{(f_{ij} - f_{ij}^*)^2}{f_{ij}^*},$$

em que  $f_{ij}$  e  $f_{ij}^*$  representam, respectivamente, as frequências relativas observada e esperada (sob a hipótese de inexistência de associação) correspondentes à cela  $i, j$

- 12) Prove que (4.4) e (4.5) são equivalentes.
- 13) Prove as relações (4.12)-(4.14).
- 14) Os dados da Tabela 4.27 são provenientes de um estudo em que um dos objetivos era avaliar o efeito da dose de radiação gama (em centigrays) na formação de múltiplos micronúcleos em células de indivíduos normais. Analise os dados descritivamente, calculando o risco relativo de ocorrência de micronúcleos para cada dose tomando como base a dose nula. Repita a análise calculando as razões de chances correspondentes. Quais as conclusões de suas análises?

**Tabela 4.27:** Número de células

Dose de radiação gama (cGy)	Frequência de células com múltiplos micronúcleos	Total de células examinadas
0	1	2373
20	6	2662
50	25	1991
100	47	2047
200	82	2611
300	207	2442
400	254	2398
500	285	1746

- 15) De uma tabela construída para avaliar a associação entre tratamento (ativo e placebo) e cura (sim ou não) de uma certa moléstia obteve-se uma razão de chances igual a 2,0. Explique por que não se pode concluir daí que a probabilidade de cura para pacientes submetidos ao tratamento ativo é 2 vezes a probabilidade de cura para pacientes submetidos ao placebo.
- 16) Um criminologista desejava estudar a relação entre: X (densidade populacional = número de pessoas por unidade de área) e Y (índice de assaltos = número de assaltos por 100000 pessoas) em grandes cidades. Para isto sorteou 10 cidades observando em cada uma delas os valores de X e Y. Os resultados obtidos estão dispostos na Tabela 4.28

**Tabela 4.28:** Densidade populacional e índice de assaltos em grandes cidades

Cidade	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	59	49	75	65	89	70	54	78	56	60
Y	190	180	195	186	200	204	192	215	197	208

- a) Classifique as variáveis envolvidas.
- b) Calcule a média, mediana, desvio-padrão e a distância interquartil para cada variável.
- c) Construa o diagrama de dispersão entre Y e X e faça comentários sobre a relação entre as duas variáveis.
- 17) Considere a seguinte tabela.

X	1	3	4	6	8	9	11	14
Y	1	2	4	4	5	7	8	9

O que se pode dizer sobre a relação entre as variáveis X e Y?

- a) Não há associação entre X e Y.  
 b) Há relação linear positiva.  
 c) Há relação linear negativa.  
 d) Há relação quadrática.
- 18) Em um teste de esforço cardiopulmonar aplicado a 55 mulheres e 104 homens, foram medidas entre outras, as seguintes variáveis:
- Grupo: Normais, Cardiopatas ou DPOC (portadores de doença pulmonar obstrutiva crônica).
  - VO2MAX: consumo máximo de O2 (ml/min).
  - VCO2MAX: consumo máximo de CO2 (ml/min).

Algumas medidas descritivas e gráficos são apresentados abaixo nas Tabelas 4.29 e 4.30 e Figura 4.21

**Tabela 4.29:** VO2MAX

Grupo	n	Média	Mediana	Desvio Padrão
Normais	56	1845	1707	795
Cardiopatas	57	1065	984	434
DPOC	46	889	820	381

**Tabela 4.30:** VCO2MAX

Grupo	n	Média	Mediana	Desvio Padrão
Normais	56	2020	1847	918
Cardiopatas	57	1206	1081	479
DPOC	46	934	860	430

Coefficiente de correlação entre VO2MAX e VCO2MAX = 0,92.

- a) Que grupo tem a maior variabilidade?  
 b) Compare as médias e as medianas dos 3 grupos.  
 c) Compare as distâncias interquartis dos 3 grupos para cada variável. Você acha razoável usar a distribuição normal para esse conjunto de dados?  
 d) O que representam os asteriscos nos *boxplots*?  
 e) Que tipo de função você ajustaria para modelar a relação entre o consumo máximo de CO2 e o consumo máximo de O2? Por quê?  
 f) Há informações que necessitam verificação quanto a possíveis erros? Quais?

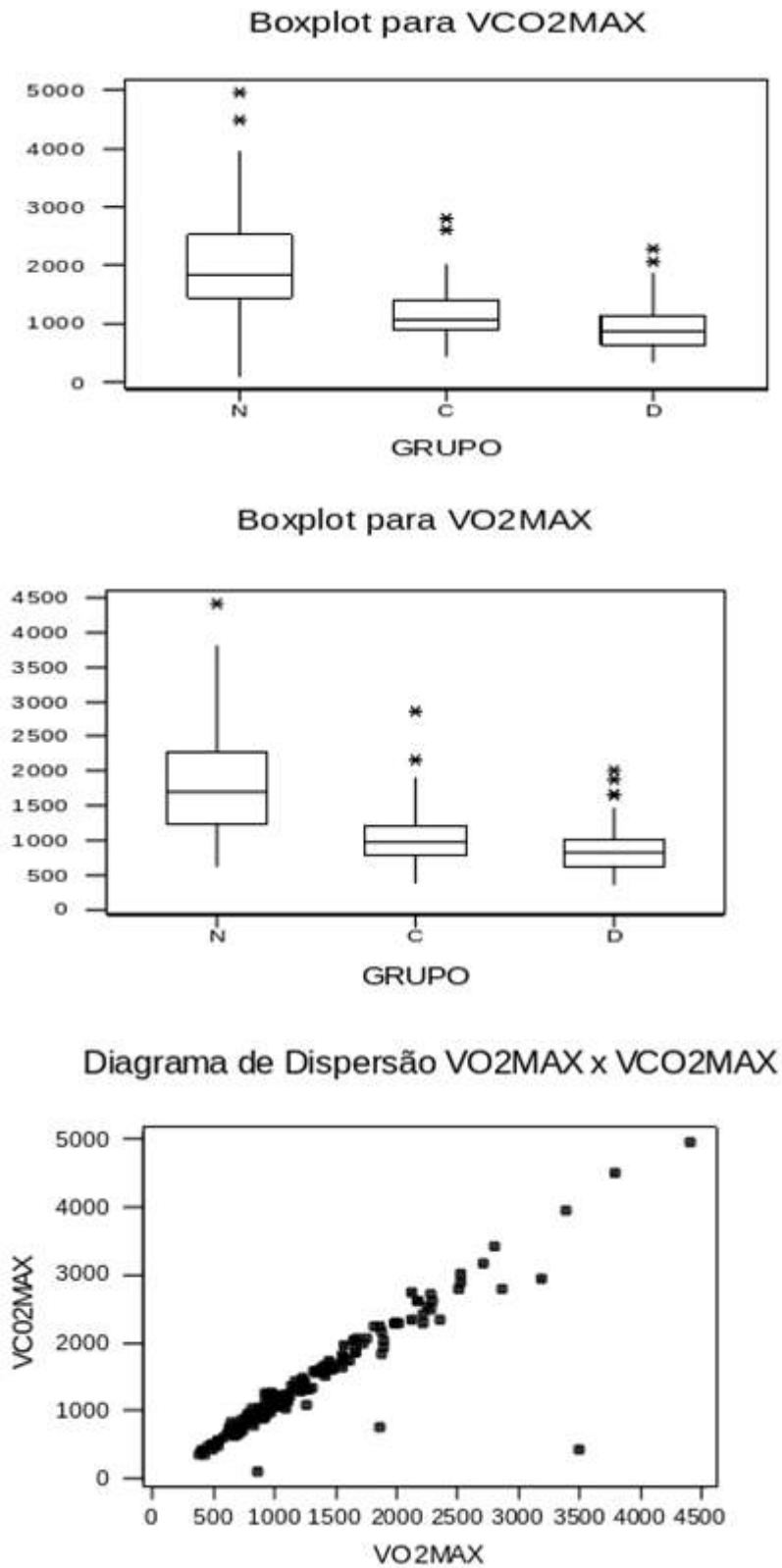


Figura 4.21: Gráficos para o Exercício 18.

- 19) Para avaliar a associação entre a persistência do canal arterial (PCA) em recém-nascidos pré-termo (RNPT) e óbito ou hemorragia intracraniana, um pesquisador obteve os dados dispostos na seguinte tabela

Frequências absolutas e relativas de óbitos e hemorragia intracraniana em recém-nascidos

PCA	Óbito			Hemorragia intracraniana		
	Sim	Não	Total	Sim	Não	Total
Presente	8	13	21	7	14	21
Ausente	1	39	40	7	33	40
Total	9	52	61	14	44	61

Um resumo das análises para óbitos e hemorragia intracraniana está disposto na tabela seguinte

Variável	valor p	Razão de chances e Intervalo de confiança (95%)		
		Estimativa	Lim inf	Lim sup
Óbito	0,001	24,0	2,7	210,5
Hemorragia intracraniana	0,162	2,4	0,7	8,0

- Interprete as estimativas das razões de chances, indicando claramente a que pacientes elas se referem.
- Analogamente, interprete os intervalos de confiança correspondentes, indicando claramente a que pacientes eles se referem.
- Com base nos resultados anteriores, o que você pode concluir sobre a associação entre persistência do canal arterial e óbito para RNPT em geral? E sobre a associação entre a persistência do canal arterial e a ocorrência de hemorragia interna? Justifique suas respostas.
- Qual a hipótese nula testada em cada caso?
- Qual a interpretação dos valores p em cada caso?

Detalhes podem ser obtidos em Afiune (2000).

- 20) Em um estudo comparativo de duas drogas para hipertensão os resultados indicados nas Tabelas 4.31, 4.32 e 4.33 e Figura 4.22 foram usados para descrever a eficácia e a tolerabilidade das drogas ao longo de 5 meses de tratamento.

**Tabela 4.31:** Frequências absoluta e relativa do efeito colateral para as duas drogas

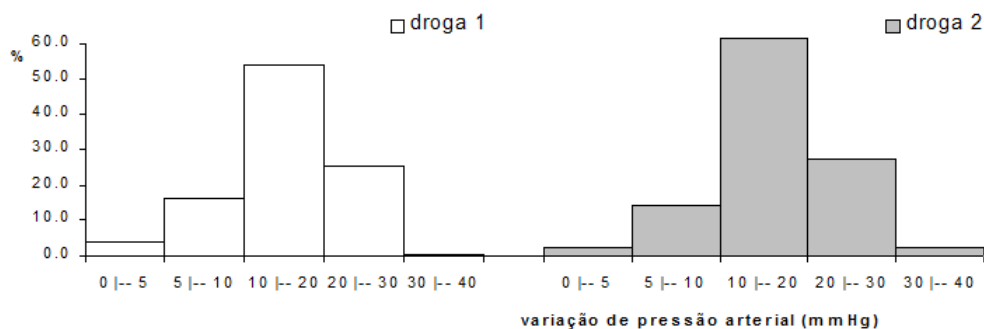
Efeito Colateral	Droga 1		Droga 2	
	n	%	n	%
não	131	61,22	144	65,45
sim	83	38,79	76	34,54

**Tabela 4.32:** Distribuição de frequências para as drogas 1 e 2

Variação	Droga 1		Droga 2	
	n	%	n	%
0 † 5	9	4,20561	5	2,27273
5 † 10	35	16,3551	29	13,1818
10 † 20	115	53,7383	125	56,8181
20 † 30	54	25,2336	56	25,4545
30 † 40	1	0,46729	5	2,27273

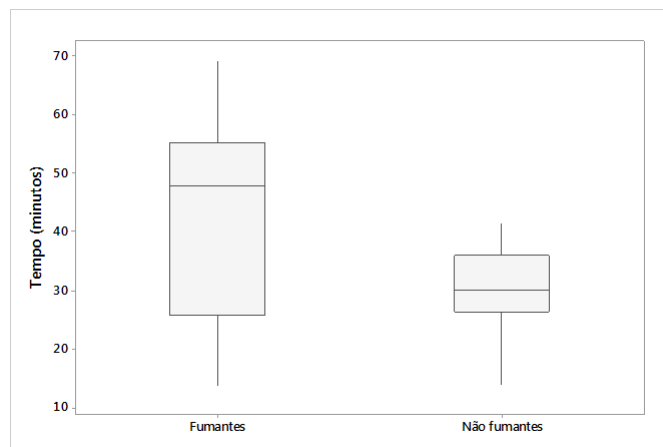
**Tabela 4.33:** Medidas resumo das drogas 1 e 2

Droga	Média	DP	Mediana
1	15,58	6,09	15,49
2	16,82	6,37	17,43

**Figura 4.22:** Histogramas para a variação de pressão arterial.

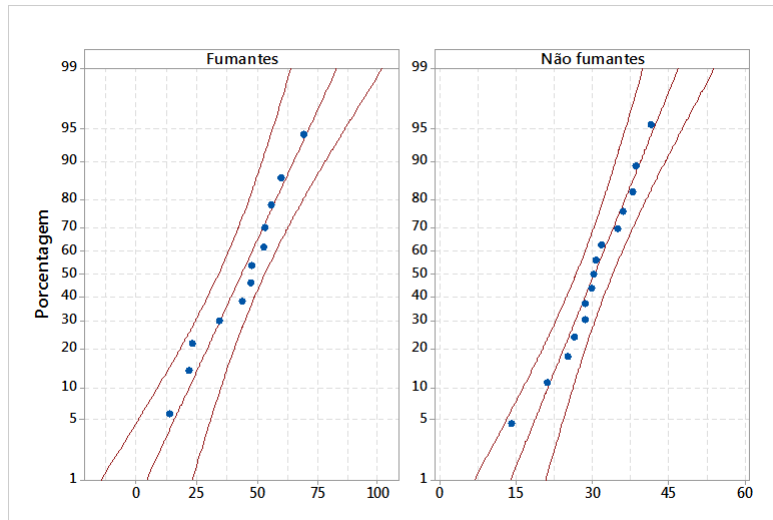
- Com a finalidade de melhorar a apresentação dos resultados, faça as alterações que você julgar necessárias em cada uma das tabelas e figura.
- Calcule a média, o desvio padrão e a mediana da variação de pressão arterial para cada uma das duas drogas por meio do histograma.

- c) Compare os resultados obtidos no item b) com aqueles obtidos diretamente dos dados da amostra (Tabela 4.33).
- 21) Numa cidade A em que não foi veiculada propaganda, a porcentagem de clientes que desistem do plano de TV a cabo depois de um ano é 14%. Numa cidade B, em que houve uma campanha publicitária, essa porcentagem é de 6%. Então, considerando uma aproximação de 2 asas decimais, podemos dizer a razão de chances (rc) de desistência entre as cidades A e B é
- a)  $rc = 2,33$    b)  $rc = 2,55$    c)  $rc = 8,00$    d)  $rc = 1,75$    e) Nenhuma das respostas anteriores está correta.
- 22) Em um estudo realizado para avaliar o efeito do tabagismo nos padrões de sono foram consideradas amostras de tamanhos 12 e 15 de duas populações: Fumantes e Não Fumantes, respectivamente. A variável observada foi o tempo, em minutos, que se leva para dormir. Os correspondentes *boxplots* e gráficos de probabilidade Normal são apresentados nas Figuras 4.23 e 4.24.



**Figura 4.23:** *Boxplots* do tempo até dormir nas populações Fumantes e Não Fumantes.





**Figura 4.24:** Gráfico QQ para as populações Fumantes e Não Fumantes.

Esses gráficos sugerem que:

- a) a variabilidade do tempo é a mesma nas duas populações estudadas;
  - b) as suposições para a aplicação do teste t-Student para comparar as médias dos tempos nas duas populações estão válidas;
  - c) os fumantes tendem a apresentar um tempo maior para dormir do que os não fumantes;
  - d) as informações fornecidas permitem concluir que o estudo foi bem planejado;
  - e) nenhuma das respostas anteriores está correta.
- 23) Considere os dados do arquivo **entrevista**. Calcule estatísticas  $\kappa$  sem e com ponderação para quantificar a concordância entre as duas observadoras (G e P) para as variáveis “Impacto” e “Independência” e comente os resultados.
  - 24) Considere os dados do arquivo **endometriose**. Construa um gráfico QQ para comparar as distribuições da variável “Idade” de pacientes dos grupos Controle e Doente.
  - 25) Considere duas amostras de uma variável  $X$  com  $n$  unidades amostrais cada. Utilize a definição (4.9) para mostrar que  $\overline{\text{Var}(X)} = \text{Var}(X)$  quando as médias das duas amostras são iguais.
  - 26) Utilize o método Delta para calcular uma estimativa da variância da razão de chances (ver Nota de Capítulo 7).

- 
- 27) Considere os dados do arquivo **neonatos** contendo pesos de recém nascidos medidos por via ultrassonográfica (antes do parto) e ao nascer. Construa gráficos QQ e gráficos Bland-Altman para avaliar a concordância entre as duas distribuições. Comente os resultados.
- 28) Considere os dados do arquivo **esquistossomose**. Calcule a sensibilidade, especificidade, taxas de falsos positivos e falsos negativos, valores preditivos positivos e negativos e acurácia correspondentes aos cinco testes empregados para diagnóstico de esquistossomose.

# Análise de dados de várias variáveis

Nothing would be done at all if a man waited 'til he could do it so well that no one could find fault with it.

John Henry Newman

## 5.1 Introdução

Em várias situações práticas, os valores de mais de duas variáveis são observados em cada unidade amostral (ou populacional). Por exemplo, o conjunto de dados disponível no arquivo `veiculos` corresponde a uma amostra de 30 veículos fabricados no Brasil ou importados em cada qual foram observadas 4 variáveis: preço (`preco`), comprimento (`comp`), potência do motor (`motor`) e procedência (`proc`). As três primeiras são variáveis quantitativas contínuas e a quarta é uma variável qualitativa nominal. O conjunto de dados disponível no arquivo `poluicao` contém 4 variáveis quantitativas contínuas, nomeadamente, concentrações atmosféricas de monóxido de carbono (`CO`) e ozônio (`O3`), além de temperatura (`temp`) e umidade do ar (`umid`) observadas ao longo de 120 dias.

Modelos probabilísticos para esse tipo de dados envolvem distribuições conjuntas para as  $p$  variáveis, digamos  $X_1, \dots, X_p$ , sob investigação. No caso discreto, eles envolvem funções de probabilidade  $P(X_1 = x_1, \dots, X_p = x_p)$ , e no caso contínuo, funções densidade de probabilidade,  $f(x_1, \dots, x_p)$ . Medidas resumo (média, variância, correlação etc.) são extensões daquelas estudadas no Capítulo 3 e são abordadas na Seção 5.4.

Quando todas as  $p$  variáveis são observadas em cada uma de  $n$  unidades amostrais, podemos dispo-las em uma matriz com dimensão  $n \times p$ , chamada **matriz de dados**. No exemplo dos veículos, essa matriz tem dimensão  $30 \times 4$  e nem todos os seus elementos são numéricos. No conjunto de dados de poluição, a matriz de dados correspondente tem dimensão  $120 \times 4$ .

A análise de dados com essa estrutura deve levar em consideração a provável correlação (intraunidades amostrais) entre as variáveis estudadas.

Em geral, as observações realizadas em duas unidades amostrais diferentes não são correlacionadas embora haja exceções. No exemplo de dados de poluição, as unidades amostrais são os  $n$  diferentes dias e o conjunto das  $n$  observações de cada variável corresponde a uma **série temporal**. Nesse contexto, também se esperam correlações entre as observações realizadas entre unidades amostrais diferentes.

Embora seja possível considerar cada variável separadamente e aplicar as técnicas do Capítulo 3, a análise da relação entre elas precisa ser avaliada de forma conjunta. Muitas análises desse tipo de dados consistem na redução de sua dimensionalidade, considerando algum tipo de transformação que reduza o número de variáveis mas conserve a maior parte da informação do conjunto original. Com essa finalidade, uma técnica de análise de dados multivariados, *i.e.*, dados de várias variáveis, bastante utilizada é a **Análise de Componentes Principais**, também conhecida por Análise de Funções Empíricas Ortogonais em muitas ciências físicas. Esse tópico será discutido no Capítulo 13.

Recursos gráficos para representar as relações entre as variáveis são mais complicados quando temos mais de duas variáveis. Neste livro trataremos apenas de alguns casos, com ênfase em três variáveis. Mais opções e detalhes podem ser encontrados em Chambers et al. (1983).

## 5.2 Gráficos para três variáveis

### Gráfico do desenhista (*Draftsman's display*)

Esse tipo de gráfico consiste de uma matriz (ou dos componentes situados abaixo ou acima da diagonal principal) cujos elementos são painéis com gráficos de dispersão para cada par de variáveis. Muitas vezes incluem-se coeficientes de correlação de Pearson entre os diferentes pares de variáveis nos painéis situados acima ou abaixo da diagonal.

**Exemplo 5.1.** O gráfico do desenhista para as variáveis Preço, Comprimento e Potência do motor do arquivo `veiculos`, apresentado na Figura 5.1 pode ser gerado por meio dos comandos

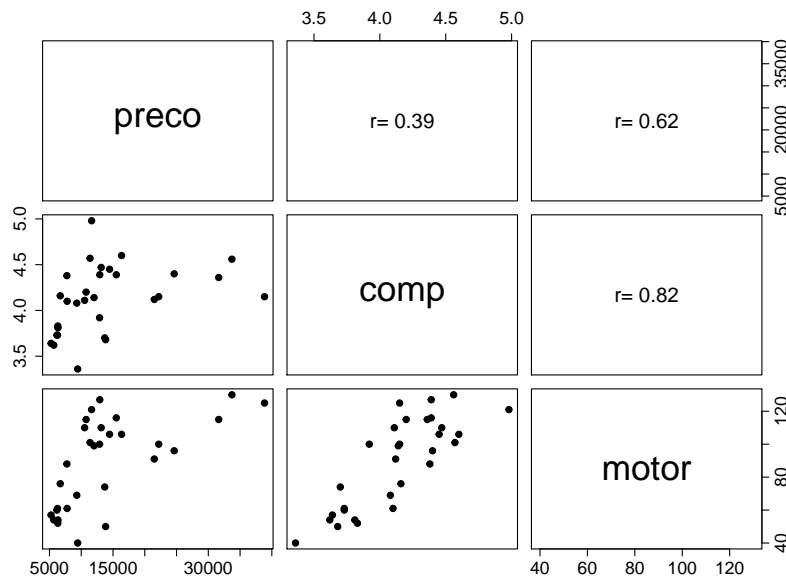
```
pairs(~preco + comp + motor, data=dados, upper.panel=panel.cor,
      cex=1.2, pch=19, cex.labels=3, cex.axis = 1.5)
```

Os coeficientes de correlação indicados nos painéis superiores podem ser calculados com a utilização da função

```
panel.cor <- function(x, y, digits = 2, cex.cor, ...){
  usr <- par("usr"); on.exit(par(usr))
  par(usr = c(0, 1, 0, 1))
  # correlation coefficient
  r <- cor(x, y)
  txt <- format(c(r, 0.123456789), digits = digits)[1]
  txt <- paste("r= ", txt, sep = "")
```

```
text(0.5, 0.5, txt, cex=1.8)}
```

Observam-se associações positivas tanto entre potência do motor e comprimento quanto entre potência do motor e preço: maiores potências do motor estão associadas tanto com maiores comprimentos quanto com preços maiores. Esse tipo de relação não está tão aparente quanto consideramos as variáveis preço e comprimento: para comprimentos entre 3,5 m e 4 m, os preços situam-se entre 5000 e 15000 enquanto os preços para veículos com comprimentos entre 4 e 5 m distribuem-se entre 5000 e 40000.



**Figura 5.1:** Gráfico do desenhista para os dados do arquivo `veiculos`.

A Figura 5.2 contém o mesmo tipo de gráfico para as variáveis CO, O3 e temp do arquivo `poluicao` e não mostra evidências considerável de associação entre cada par dessas variáveis.

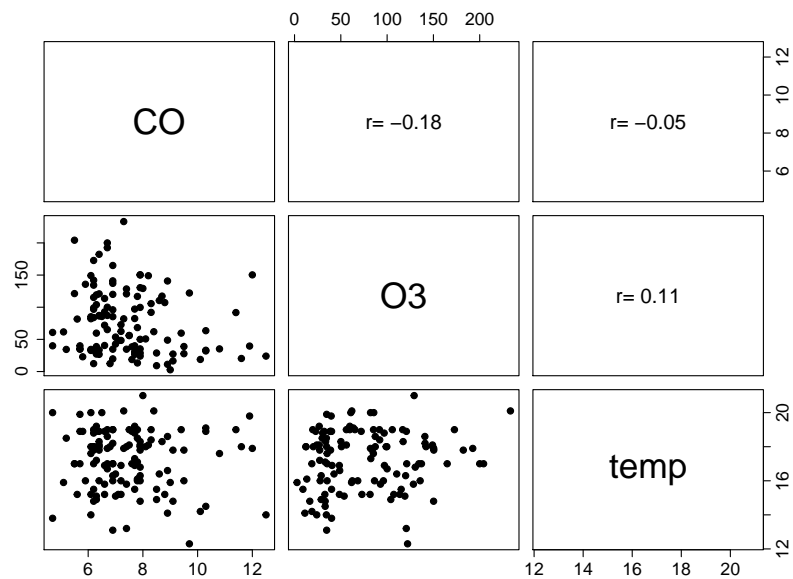
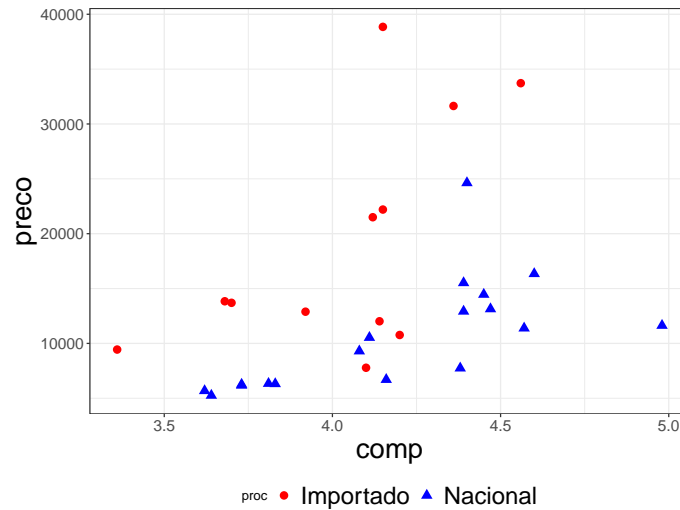


Figura 5.2: Gráfico do desenhista para os dados do arquivo poluicao.

### Gráfico de dispersão simbólico

**Gráficos de dispersão simbólicos** ou **estéticos** (*aesthetic*) são essencialmente gráficos de dispersão em que mais do que duas variáveis são representadas. Para distingui-las usam-se diferentes símbolos, cores ou forma dos pontos.

**Exemplo 5.2.** Consideremos novamente os dados do arquivo `veiculos`, concentrando a atenção em duas variáveis quantitativas `preco` e `comp` e em uma terceira variável qualitativa, `proc` (procedência, com categorias “nacional” ou “importado”). Para cada par (`preco`, `comp`) usamos o símbolo  $\Delta$ , para representar a categoria “nacional” e o símbolo  $\circ$ , para indicar a categoria “importado”. Essa escolha permite-nos construir o gráfico de dispersão disposto na Figura 5.3, em que se pode notar que os preços maiores correspondem, de modo geral, a carros importados, o que era esperado. Os carros nacionais têm os menores preços.

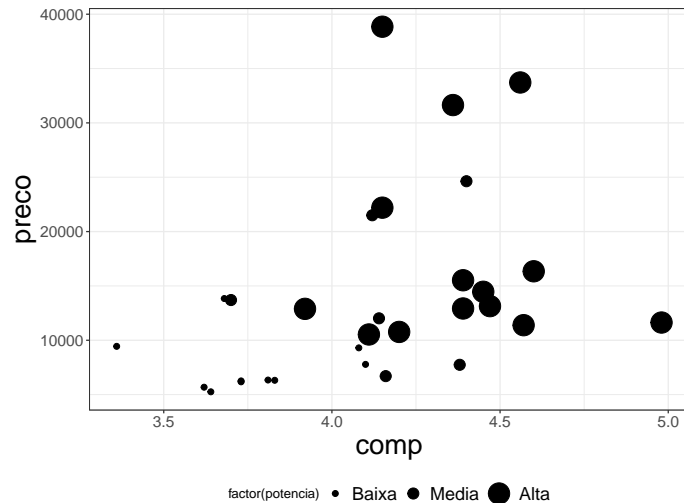


**Figura 5.3:** Gráfico de dispersão simbólico para os dados do Exemplo 5.2 por procedência.

Os comandos do pacote `ggplot2` utilizados para a construção do gráfico disposto na Figura 5.3 são

```
g1 <- ggplot(veiculos, aes(comp, preco)) +
  geom_point(aes(shape=proc, color=proc), size=3) + theme_bw() +
  scale_color_manual(values=c("red", "blue")) +
  theme(axis.title = element_text(size=23)) +
  theme(legend.position="bottom", legend.direction="horizontal",
        legend.text=element_text(size=20))
  theme(axis.text.x = element_text(face="plain", size=13),
        axis.text.y = element_text(face="plain", size=13))
```

Outra alternativa para a representação gráfica das associações entre três variáveis quantitativas desse conjunto de dados consiste em adotar símbolos com diferentes tamanhos para representar cada uma delas. Por exemplo, na Figura 5.4, apresentamos o gráfico de dispersão de preço (`preço`) *versus* comprimento (`comp`), com a variável potência do motor (`motor`) representada por círculos com tamanhos variando conforme a potência: círculos menores para potências entre 40 e 70, círculos médios para potências entre 70 e 100 e círculos maiores para potências entre 100 e 130. O gráfico permite evidenciar que carros com maior potência do motor são em geral mais caros e têm maior comprimento.



**Figura 5.4:** Gráfico de dispersão simbólico para os dados do Exemplo 5.2 por potência do motor.

Os comandos do pacote `ggplot2` utilizados para a construção do gráfico disposto na Figura 5.4 são

```

categ_motor=rep(NA,length(motor))
categ_motor[motor>=40 & motor<70]="Baixa Potencia"
categ_motor[motor>=70 & motor<100]="Media Potencia"
categ_motor[motor>=100 & motor<=130]="Alta Potencia"
categ_motor=factor(categ_motor)
potencia = 2*c(categ_motor == "Baixa Potencia")+
  4*c(categ_motor == "Media Potencia")+
  8*c(categ_motor=="Alta Potencia")
ggplot(veiculos, aes(comp,preco))
  + geom_point(aes(size = factor(potencia)))
g1 <- ggplot(veiculos,aes(comp,preco))
  + geom_point(aes(size = factor(potencia))) + theme_bw()
g2 <- g1 + theme(axis.title = element_text(size=23))
g3 <- g2 + theme(legend.position="bottom",
  legend.direction="horizontal",
  legend.text=element_text(size=15))
g4 <- g3 + theme(axis.text.x = element_text(face="plain",
  size=13), axis.text.y = element_text(face="plain", size=13))
g5 <- g4 + scale_size_manual(labels = c("Baixa", "Media",
  "Alta"), values = c(2, 4, 8))

```

**Exemplo 5.3.** No pacote `ggplot2` encontramos o conjunto de dados `mpg`, que consiste de observações de 38 modelos de carros nos EUA, com várias variáveis, dentre as quais destacamos: `displ` = potência do motor, `hwy` = eficiência do carro em termos de gasto de combustível, `class` = tipo do

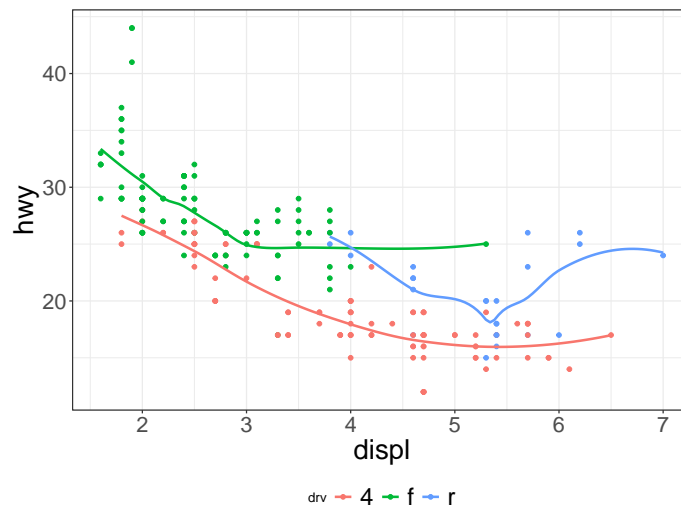


carro (duas portas, compacto, SUV etc.) e `drv` = tipo de tração (4 rodas, rodas dianteiras e rodas traseiras).

Consideremos os comandos

```
g1 <- ggplot(data=mpg) +
  geom_point(mapping=aes(x=displ, y=hwy, color=drv)) +
  geom_smooth(mapping=aes(x=displ, y=hwy, color=drv), se=FALSE) +
  theme_bw() +
  theme(legend.position="bottom", legend.direction="horizontal",
        legend.text=element_text(size=20)) +
  theme(axis.text.x = element_text(face="plain", size=18),
        axis.text.y = element_text(face="plain", size=18)) +
  theme(axis.title = element_text(size=23))
```

que usa a opção `geom_smooth` para ajustar curvas suaves aos dados (usando o procedimento de suavização **lowess**) de cada conjunto de pontos da variável `drv` (*drive*), ou seja uma curva para os pontos com o valor 4 (*four-wheel drive*), outra para os pontos com o valor f (*front-wheel drive*) e uma curva para os pontos com valor r (*rear-wheel drive*). O resultado está apresentado na Figura 5.5. As curvas lowess são úteis para identificar possíveis modelos de regressão que serão discutidos no Capítulo 6. Detalhes sobre curvas lowess podem ser obtidos na Nota de Capítulo 2.

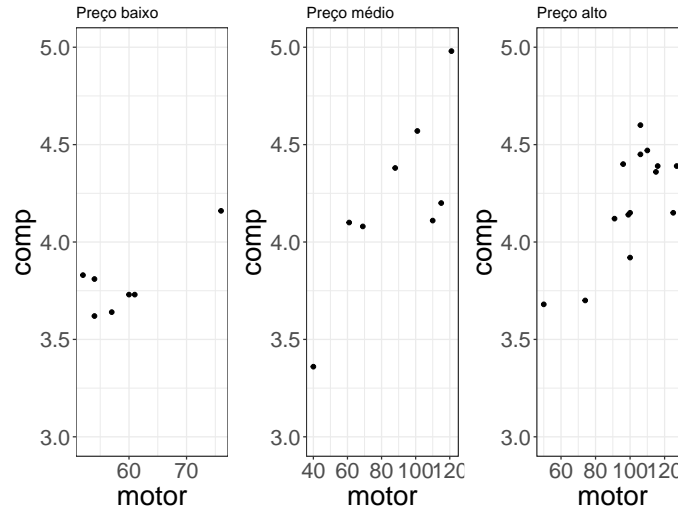


**Figura 5.5:** Gráfico de dispersão simbólico das variáveis `hwy` versus `displ`, categorizado pela variável `drv` com pontos e curvas *lowess*.

## Partição e Janelamento

Uma abordagem alternativa aos gráficos de dispersão simbólicos consiste em dividir as  $n$  observações disponíveis em subconjuntos de acordo com os valores de uma das variáveis e construir um gráfico de dispersão envolvendo as outras duas variáveis para cada subconjunto.

Por exemplo, para os dados do arquivo `veiculos`, podemos construir gráficos de dispersão para as variáveis `motor` e `comp` de acordo com a faixa de preço (baixo, entre 5000 e 7000, médio, entre 5000 e 7000 ou alto, entre 12000 e 40000), como na Figura 5.6.



**Figura 5.6:** Janelamento para as variáveis preço *versus* comprimento, categorizado pela variável Potência do motor.

Esse gráfico sugere uma associação positiva entre comprimento e (potência) motor, independentemente da faixa de preço, com menos intensidade para veículos mais baratos.

### Gráfico de perfis médios

Os gráficos de perfis médios considerados no Capítulo 4 para duas variáveis podem ser facilmente estendidos para acomodar situações com duas variáveis explicativas categorizadas, usualmente denominadas **fatores** e uma variável resposta. Como ilustração, consideremos os dados do arquivo `arvores` com o objetivo de comparar as concentrações médias de Mg obtidas nas cascas de três espécies de árvores localizadas nas proximidades de vias com diferentes intensidades de tráfego. Nesse contexto, estamos diante de um problema com dois fatores, nomeadamente, “Espécie de árvores” e “Tipo de via” e uma variável resposta contínua, “Concentração de Mg”. O gráfico de perfis médios correspondente, apresentado na Figura 5.7 pode ser obtido por intermédio dos seguintes comandos

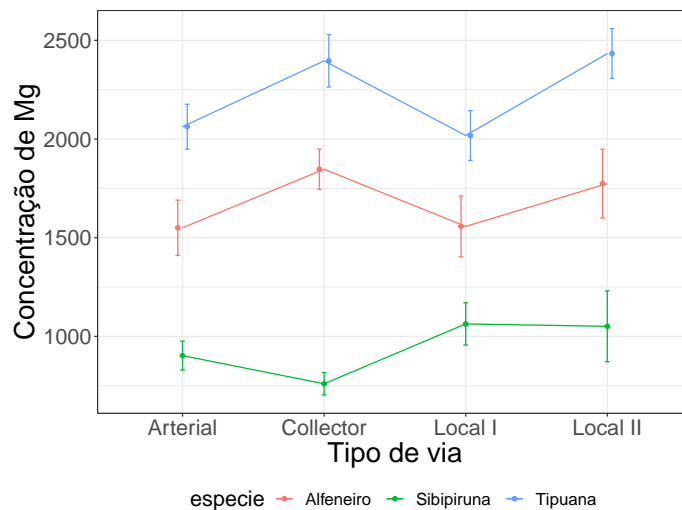
```
> resumo <- ddply(arvores, c("especie", "tipovia"), summarise,
+ N      = sum(!is.na(Mg)),
+ mean  = mean(Mg, na.rm=TRUE),
+ sd    = sd(Mg, na.rm=TRUE),
+ se    = sd / sqrt(N)
+ )
```

```

> pd <- position_dodge(0.1)
> ggplot(resumo, aes(x=tipovia, y=mean, colour=especie)) +
+   geom_errorbar(aes(ymin=mean-se, ymax=mean+se), width=.1,
+                   position=pd) +
+   geom_line(aes(group = especie)) + geom_point(position=pd) +
+   theme_bw() + labs(x="Tipo de via", y="Concentração de Mg") +
+   theme(text=element_text(size=18))

```

O gráfico permite concluir que as concentrações médias Mg nas *tipuanas* são mais elevadas que aquelas obtidas em *alfeneiros*, cujas concentrações médias de Mg são mais elevadas que aquelas obtidas em *sibipirunas*. Além disso, nota-se que a variação das concentrações médias de Mg são similares para *tipuanas* e *alfeneiros* localizadas nas proximidades dos quatro tipos de vias considerados. As concentrações médias de Mg em *sibipirunas*, por outro lado, seguem um padrão diferente.



**Figura 5.7:** Gráfico de perfis médios para a concentração de Mg em cascas de árvores (as barras correspondem a erros padrões).

Nesse tipo de estudo, o objetivo inferencial é avaliar o “efeito” de cada fator e de sua “interação” na distribuição de uma variável resposta quantitativa contínua. Os termos “efeito” e “interação” estão entre aspas porque precisam ser definidos. Quando as observações são independentes e a distribuição (populacional) da variável resposta é Normal com a mesma variância para todas as combinações dos níveis dos fatores, as comparações de interesse restringem-se aos correspondentes valores esperados. Esse é o típico figurino dos problemas analisados por meio da técnica conhecida como **Análise de Variância** (com dois fatores).

Com o objetivo de definir os “efeitos” dos fatores e sua “interação”, consideremos um exemplo simples em que cada um dos dois fatores tem dois níveis. Um dos fatores, que representamos por *A*, por exemplo, pode ser o tipo de droga (com níveis ativa e placebo) e o outro, digamos *B*, pode

ser faixa etária (com níveis  $< 60$  anos e  $\geq 60$  anos) e a variável resposta poderia ser pressão diastólica.

De uma forma geral, admitamos que  $m$  unidades amostrais tenham sido observadas sob cada tratamento, *i.e.*, para cada combinação dos  $a$  níveis do fator  $A$  e dos  $b$  níveis do fator  $B$  e que a variável resposta seja denotada por  $y$ . A estrutura de dados coletados sob esse esquema está apresentada na Tabela 5.1.

**Tabela 5.1:** Estrutura de dados para ANOVA com dois fatores

Droga	Idade	Paciente	PDiaSt	Droga	Idade	Paciente	PDiaSt
Ativa	$< 60$	1	$y_{111}$	Placebo	$< 60$	1	$y_{211}$
Ativa	$< 60$	2	$y_{112}$	Placebo	$< 60$	2	$y_{212}$
Ativa	$< 60$	3	$y_{113}$	Placebo	$< 60$	3	$y_{213}$
Ativa	$\geq 60$	1	$y_{121}$	Placebo	$\geq 60$	1	$y_{221}$
Ativa	$\geq 60$	2	$y_{122}$	Placebo	$\geq 60$	2	$y_{222}$
Ativa	$\geq 60$	3	$y_{123}$	Placebo	$\geq 60$	3	$y_{223}$

Os “efeitos” de cada um dos fatores e da “interação” entre eles podem ser definidos em termos dos valores esperados das distribuições da resposta sob os diferentes tratamentos (combinações dos níveis dos dois fatores).

Para casos em que o fator  $A$  tem  $a$  níveis e o fator  $B$  tem  $b$  níveis, um modelo comumente considerado para análise inferencial de dados com essa estrutura é

$$y_{ijk} = \mu_{ij} + e_{ijk}, \quad (5.1)$$

$i = 1, \dots, a$ ,  $j = 1, \dots, b$ ,  $k = 1, \dots, m$ , em que  $E(e_{ijk}) = 0$ ,  $\text{Var}(e_{ijk}) = \sigma^2$  e  $E(e_{ijk}e_{i'j'k'}) = 0$ ,  $i \neq i'$  ou  $j \neq j'$  ou  $k \neq k'$ , ou seja, os  $e_{ijk}$  são erros não correlacionados. Aqui,  $y_{ijk}$  denota a resposta observada para a  $k$ -ésima unidade amostral submetida ao tratamento definido pela combinação do nível  $i$  do fator  $A$  e nível  $j$  do fator  $B$ .

Esta é a **parametrização** conhecida como de **parametrização de médias de celas** pois o **parâmetro de localização**  $\mu_{ij}$  corresponde ao valor esperado (médio) da resposta de unidades amostrais submetidas ao tratamento correspondente à combinação do nível  $i$  do fator  $A$  e nível  $j$  do fator  $B$ . Outra parametrização bastante utilizada está discutida na Nota de Capítulo 3.

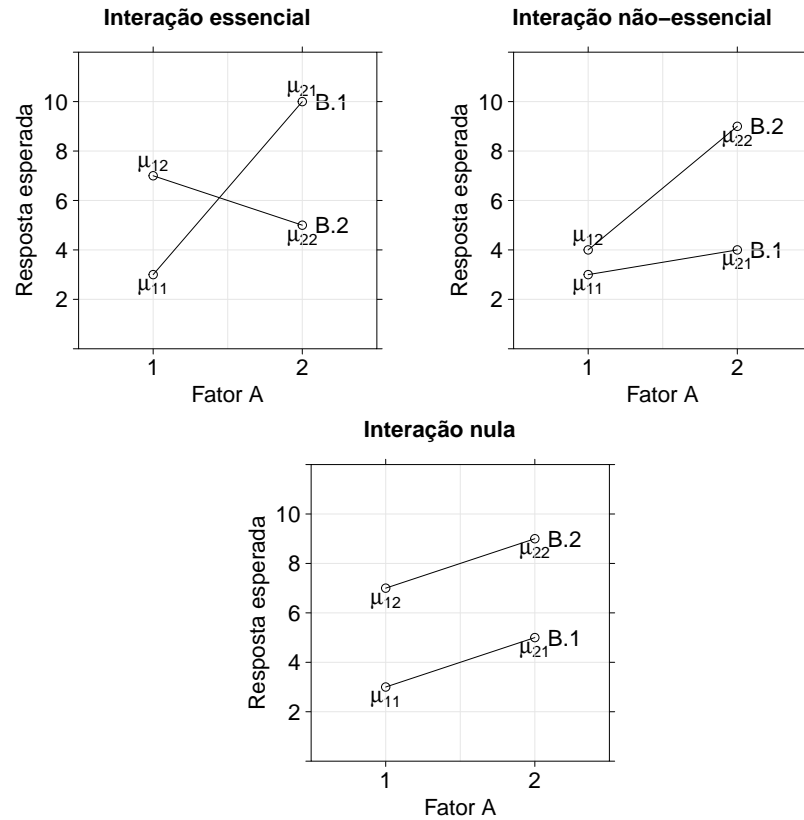
Fazendo  $a = b = 2$  para facilidade de exposição, o **efeito do fator  $A$  (droga) para unidades submetidas ao nível  $j$  do fator  $B$  (faixa etária)** pode ser definido como a diferença  $\mu_{1j} - \mu_{2j}$ , que, no exemplo, corresponde à diferença entre o valor esperado da pressão diastólica de unidades com faixa etária  $j$  submetidas à droga 1 (ativa) e o valor esperado da pressão diastólica de unidades com mesma faixa etária submetidas à droga 2 (placebo). Analogamente, o **efeito do fator  $B$  (faixa etária) para unidades submetidas ao nível  $i$  do fator  $A$  (droga)** pode ser definido como a diferença  $\mu_{i1} - \mu_{i2}$ .

A **interação entre os fatores  $A$  e  $B$**  pode ser definida como a diferença entre o efeito do fator  $A$  para unidades submetidas ao nível 1 do fator  $B$  e o efeito do fator  $A$  para unidades submetidas ao nível 2 do fator  $B$ , nomeadamente,  $(\mu_{11} - \mu_{21}) - (\mu_{12} - \mu_{22})$ . Outras definições equivalentes, como  $(\mu_{22} - \mu_{12}) - (\mu_{21} - \mu_{11})$ , também podem ser utilizadas. A escolha entre as alternativas deve ser feita em função dos detalhes do problema; por exemplo, se a droga 1 for uma droga padrão e a faixa etária 1 corresponder a indivíduos mais jovens, esta última proposta pode ser mais conveniente.

Quando a interação é nula, o efeito do fator  $A$  é o mesmo para unidades submetidas a qualquer um dos níveis do fator  $B$  e pode-se definir o **efeito principal do fator  $A$**  como  $(\mu_{11} + \mu_{12})/2 - (\mu_{21} + \mu_{22})/2$ , que corresponde à diferença entre o valor esperado da resposta para unidades submetidas ao nível 1 do fator  $A$  e o valor esperado da resposta para unidades submetidas ao nível 2 do fator  $A$  (**independentemente** do nível do fator  $B$ ). Similarmente, o efeito principal do fator  $B$  pode ser definido como  $(\mu_{11} + \mu_{21})/2 - (\mu_{12} + \mu_{22})/2$ .

Em muitos casos, essas definições de efeitos principais podem ser consideradas mesmo na presença de interação, desde que ela seja **não essencial**. A interação entre os fatores  $A$  e  $B$  é não essencial quando as diferenças  $\mu_{11} - \mu_{21}$  e  $\mu_{12} - \mu_{22}$  têm o mesmo sinal, mas magnitudes diferentes. Por exemplo, se  $\mu_{11} - \mu_{21} = K_1 > 0$  e  $\mu_{12} - \mu_{22} = K_2 > 0$  com  $K_1 \neq K_2$ , a resposta esperada sob o nível 1 do fator  $A$  é maior que a resposta esperada sob o nível 2 do fator  $A$  tanto no nível 1 quanto no nível 2 do fator  $B$ , embora as magnitudes das diferenças não sejam iguais. Se essas magnitudes tiverem sinais diferentes, a interação é **essencial**. Por outro lado, se  $K_1 = K_2$ , não há interação. O leitor pode consultar Kutner et al. (2004) para uma discussão sobre a consideração de efeitos principais em situações com interação não essencial. Na Figura 5.8 apresentamos gráficos de perfis médios (populacionais) com interações essencial e não essencial entre dois fatores,  $A$  e  $B$ , cada um com dois níveis.

Na prática, tanto a interação entre os fatores bem como seus efeitos (que são parâmetros populacionais são estimados pelas correspondentes funções das médias amostrais  $\bar{y}_{ij} = m^{-1} \sum_{k=1}^m y_{ijk}$ . Os correspondentes gráficos de perfis médios são construídos com essas médias amostrais e desvios padrões (ou erros padrões) associados e servem para sugerir uma possível interação entre os fatores envolvidos ou os seus efeitos.



**Figura 5.8:** Gráfico de perfis médios (populacionais) com diferentes tipos de interação.

**Exemplo 5.4.** Consideremos um estudo cujo objetivo é avaliar o efeito de dois fatores, a saber, tipo de adesivo odontológico e instante em que foi aplicada uma carga cíclica na resistência à tração de corpos de prova odontológicos (variável resposta). O fator **Adesivo** tem três níveis (CB, RX e RXQ) e o fator **Instante** tem três níveis (início, após 15 minutos e após 2 horas) para os adesivos CB e RXQ e quatro níveis (após fotoativação além de início, após 15 minutos e após 2 horas) para o adesivo RX. Os dados, disponíveis no arquivo `adesivo` estão dispostos na Tabela 5.2 e contêm omissões causadas pela quebra acidental dos corpos de prova. Detalhes sobre o estudo podem ser encontrados em Witzel et al. (2000).

**Tabela 5.2:** Resistência à tração de corpos de prova de um estudo sobre cimentos odontológicos

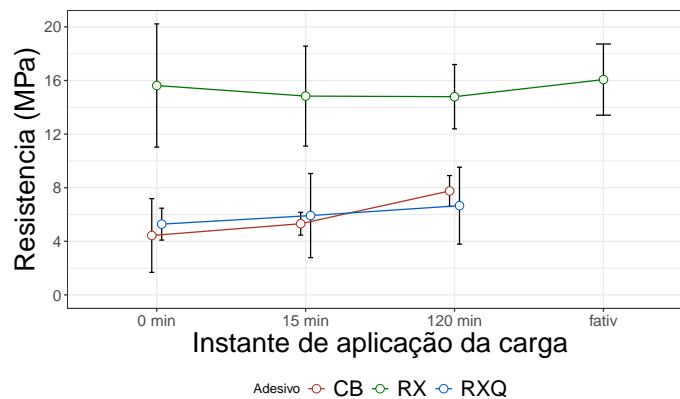
Adesivo	Instante			Adesivo	Instante		
	carga	Repet	Resist		carga	Repet	Resist
CB	inic	1	8,56	RX	2h	1	16,76
CB	inic	2	5,01	RX	2h	2	16,80
CB	inic	3	2,12	RX	2h	3	13,07
CB	inic	4	1,70	RX	2h	4	11,47
CB	inic	5	4,78	RX	2h	5	15,86
CB	15min	1	5,67	RX	fativ	1	13,42
CB	15min	2	4,07	RX	fativ	2	13,82
CB	15min	3	5,99	RX	fativ	3	19,63
CB	15min	4	5,52	RX	fativ	4	15,60
CB	15min	5		RX	fativ	5	17,87
CB	2h	1	8,57	RXQ	inic	1	3,95
CB	2h	2	6,94	RXQ	inic	2	6,49
CB	2h	3		RXQ	inic	3	4,60
CB	2h	4		RXQ	inic	4	6,59
CB	2h	5		RXQ	inic	5	4,78
RX	inic	1	20,81	RXQ	15min	1	8,14
RX	inic	2	12,14	RXQ	15min	2	3,70
RX	inic	3	9,96	RXQ	15min	3	
RX	inic	4	15,95	RXQ	15min	4	
RX	inic	5	19,27	RXQ	15min	5	
RX	15min	1	14,25	RXQ	2h	1	4,39
RX	15min	2	14,21	RXQ	2h	2	6,76
RX	15min	3	13,60	RXQ	2h	3	4,81
RX	15min	4	11,04	RXQ	2h	4	10,68
RX	15min	5	21,08	RXQ	2h	5	

Médias e desvios padrões da resistência à tração para as observações realizadas sob cada tratamento (correspondentes ao cruzamento dos níveis de cada fator) estão apresentados na Tabela 5.3.

**Tabela 5.3:** Estatísticas descritivas para os dados da Tabela 5.2

Adesivo	Instante	n	Média	Desvio Padrão
CB	0 min	5	4,43	2,75
	15 min	4	5,31	0,85
	120 min	2	7,76	1,15
RXQ	0 min	5	5,28	1,19
	15 min	2	5,92	3,14
	120 min	4	6,66	2,87
RX	0 min	5	15,63	4,60
	15 min	5	14,84	3,73
	120 min	5	14,79	2,40
	fativ	5	16,07	2,66

O gráfico de perfis médios correspondente está apresentado na Figura 5.9.

**Figura 5.9:** Gráfico de perfis de médias (com barras de desvios padrões) para os dados da Tabela 5.2.

Esse gráfico **sugere** que não existe interação entre os dois fatores (pois os perfis são “paralelos” (lembramos que os perfis apresentados são amostrais e que servem apenas para sugerir o comportamento dos perfis populacionais correspondentes). Além disso, a variabilidade dos dados (aqui representada pelas barras de desvios padrões) deve ser levada em conta para avaliar as possíveis diferenças entre os valores esperados populacionais. Nesse contexto, podemos esperar um efeito principal do fator Adesivo, segundo o qual, os adesivos CB e RXQ têm respostas esperadas iguais, mas menores que a resposta esperada do adesivo RX. Também é razoável esperar que não exista um efeito principal de Instante de aplicação, dado que os três perfis são “paralelos” ao eixo das abscissas. Finalmente, convém reafirmar



que as conclusões acima são apenas exploratórias precisam ser confirmadas por técnicas de ANOVA para efeitos inferenciais. Os seguintes comandos R geram a tabela ANOVA apresentada em seguida.

```
adesivo.anova <- aov(resistencia ~ adesivo + instante +
adesivo*instante, data=adesivo)
summary(adesivo.anova)
```

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)	
adesivo	2	987.8	493.9	59.526	1.65e-11	***
instante	3	9.3	3.1	0.373	0.773	
adesivo:instante	4	16.5	4.1	0.498	0.737	
Residuals	32	265.5	8.3			

O resultado não sugere evidências nem de interação entre Adesivo e Instante de aplicação ( $p = 0,737$ ) nem de efeito principal de Instante de aplicação ( $p = 0,773$ ), mas sugere forte evidência de efeito de Adesivo ( $p < 0,001$ ).

Comparações múltiplas entre os níveis de Adesivo realizadas por meio da técnica de Tukey a partir do comando

```
TukeyHSD(adesivo.anova, which = "adesivo")
```

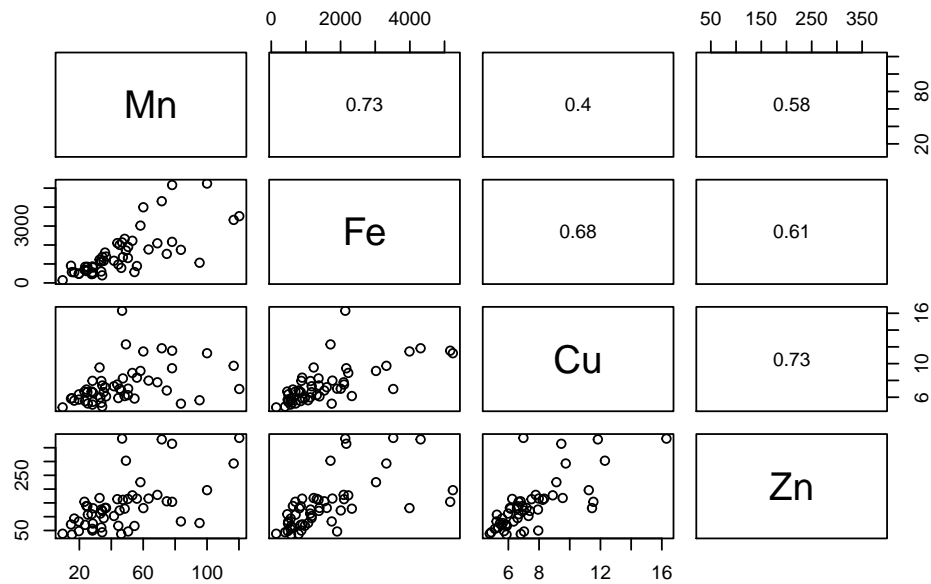
corroboram a sugestão de que os efeitos dos adesivos CB e RXQ são iguais ( $p < 0,899$ ), porém diferentes do efeito do adesivo RXQ ( $p < 0,001$ ).

	diff	lwr	upr	p adj
RX-CB	9.9732273	7.316138	12.630317	0.0000000
RXQ-CB	0.5418182	-2.476433	3.560069	0.8986306
RXQ-RX	-9.4314091	-12.088499	-6.774319	0.0000000

### 5.3 Gráficos para quatro ou mais variáveis

Os mesmos tipos de gráficos examinados na seção anterior podem ser considerados para a análise conjunta de quatro ou mais variáveis. Como ilustração, consideremos dados de concentração de elementos químicos observados em cascas de diferentes espécies de árvores na cidade de São Paulo, utilizados para avaliar os níveis de poluição. Os dados estão disponíveis no arquivo `arvores`.

**Exemplo 5.5.** Na Figura 5.10 apresentamos um gráfico do desenhista com  $\binom{4}{2} = 6$  painéis correspondentes aos elementos Mn, Fe, Cu e Zn observados em árvores da espécie *tipuana* localizadas junto a vias coletoras. Aqui também observam-se evidências de correlações moderadas entre as variáveis.



**Figura 5.10:** Gráfico do desenhista para os dados da concentração de elementos químicos em cascas de árvores.

Outros tipos de gráficos podem ser encontrados em Cleveland (1979) e Chambers et al. (1983), entre outros.

## 5.4 Medidas resumo multivariadas

Consideremos valores de  $p$  variáveis  $X_1, \dots, X_p$ , medidas em  $n$  unidades amostrais dispostos na forma de uma matriz de dados  $\mathbf{X}$ , de ordem  $n \times p$ , *i.e.*,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1v} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2v} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{ii} & x_{i2} & \cdots & x_{iv} & \cdots & x_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nv} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

Para cada variável  $X_i$  podemos considerar as medidas resumo já estudadas no Capítulo 3 (média, mediana, quantis, variância etc.). Para cada par de variáveis,  $X_i$  e  $X_j$ , também podemos considerar as medidas de correlação (linear) já estudadas no Capítulo 4, a saber, covariância e coeficiente de correlação. O vetor de dimensão  $p \times 1$  contendo as  $p$  médias é chamado de **vetor de médias**. Similarmente, a matriz simétrica com dimensão  $p \times p$

contendo as variâncias ao longo da diagonal principal e as covariâncias dispostas acima e abaixo dessa diagonal é chamada de **matriz de covariâncias** de  $X_1, \dots, X_p$  ou, equivalentemente, do vetor  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)^\top$ . Tanto o vetor de médias quanto a matriz de covariâncias (ou de correlações) correspondentes ao vetor de variáveis podem ser facilmente calculados por meio de operações matriciais como detalhado na Nota de Capítulo 1.

**Exemplo 5.6** Consideremos as variáveis CO, O3, Temp e Umid do arquivo `poluicao`. A matriz de covariâncias correspondente é

	CO	O3	Temp	Umid
CO	2.38	-14.01	-0.14	1.46
O3	-14.01	2511.79	9.43	-239.02
Temp	-0.14	9.43	3.10	0.14
Umid	1.46	-239.02	0.14	153.63

Note que  $\text{Cov}(\text{CO}, \text{O3}) = -14,01 = \text{Cov}(\text{O3}, \text{CO})$  etc. Para obter a correspondente **matriz de correlações**, basta usar a definição (4.11) para cada par de variáveis, obtendo-se a matriz

	CO	O3	Temp	Umid
CO	1.00	-0.18	-0.05	0.08
O3	-0.18	1.00	0.11	-0.38
Temp	-0.05	0.11	1.00	0.01
Umid	0.08	-0.38	0.01	1.00

As correlações entre as variáveis são muito pequenas, exceto para O3 e Umid.

## 5.5 Tabelas de contingência de múltiplas entradas

A análise de dados de três ou mais variáveis qualitativas (ou quantitativas categorizadas) pode ser realizada nos moldes daquela abordada na Seção 4.2 para duas variáveis. A distribuição de frequências conjunta correspondente pode ser representada por meio de tabelas de contingência de múltiplas entradas. Nesse contexto, as frequências de um conjunto de dados com três variáveis qualitativas com 3, 3 e 2 níveis, respectivamente, são representadas numa tabela  $3 \times 3 \times 2$ . Como ilustração, consideremos o seguinte exemplo.

**Exemplo 5.7.** A tabela de frequências para a distribuição conjunta das variáveis `dismenorreia`, `esterilidade` e `endometriose` apresentadas no arquivo `endometriose2` pode ser obtida por meio dos seguintes comandos

```
> endomet1 <- read.xls("/home/jmsinger/Desktop/endometriose2.xls",
  sheet='dados', method="tab")
> endomet1$dismenorreia <- reorder(endomet1$dismenorreia,
  new.order=c("nao", "leve", "moderada",
  "intensa", "incapacitante"))
```

```

> attach(endomet1)
> tab <- ftable(dismenorreia, esterilidade, endometriose)
> tab

```

		endometriose	
		nao	sim
dismenorreia	esterilidade		
nao	nao	482	36
	sim	100	27
leve	nao	259	31
	sim	77	14
moderada	nao	84	71
	sim	31	45
intensa	nao	160	134
	sim	52	67
incapacitante	nao	106	43
	sim	28	24

Quando o objetivo é estudar as relações de dependência entre as três variáveis encaradas como respostas, as frequências relativas calculadas em relação ao total de pacientes são obtidas por meio do comandos

```

> tabprop <- prop.table(tab)
> tabprop <- round(tabprop, 2)

```

cujo resultado é

```


```

		endometriose	
		nao	sim
dismenorreia	esterilidade		
nao	nao	0.26	0.02
	sim	0.05	0.01
leve	nao	0.14	0.02
	sim	0.04	0.01
moderada	nao	0.04	0.04
	sim	0.02	0.02
intensa	nao	0.09	0.07
	sim	0.03	0.04
incapacitante	nao	0.06	0.02
	sim	0.01	0.01

Nesse caso, as análises de interesse geralmente envolvem hipóteses de independência conjunta, independência marginal e independência condicional e podem ser estudadas com técnicas de **análise de dados categorizados**, por meio de **modelos log-lineares**.

Alternativamente, o interesse pode recair na avaliação do efeito de duas das variáveis (encaradas como fatores) e de sua interação na distribuição da outra variável, encarada como variável resposta, como o mesmo espírito daquele envolvendo problemas de ANOVA. As frequências relativas correspondentes devem ser calculadas em relação ao total das linhas da tabela. Com essa finalidade, consideremos os comandos

```
> tabprop12 <- prop.table(tab,1)
> tabprop12 <- round(tabprop12,2)
```

cujo resultado é

		endometriose	nao	sim
dismenorreia	esterilidade			
nao	nao		0.93	0.07
	sim		0.79	0.21
leve	nao		0.89	0.11
	sim		0.85	0.15
moderada	nao		0.54	0.46
	sim		0.41	0.59
intensa	nao		0.54	0.46
	sim		0.44	0.56
incapacitante	nao		0.71	0.29
	sim		0.54	0.46

Medidas de associação entre `esterilidade` e `endometriose` podem ser obtidas para cada nível de `dismenorreia` por meio das tabelas marginais; para `dismenorreia=não`, os comandos do pacote `vcd` são

```
> nao <- subset(endomet1, dismenorreia == "nao", na.rm=TRUE)
> attach(nao)
> tab1 <- ftable(esterilidade, endometriose)
```

com o seguinte resultado

		endometriose	nao	sim
esterilidade				
nao		482	36	
sim		100	27	

```
> assocstats(tab1)
              X^2 df    P(> X^2)
Likelihood Ratio 19.889  1 8.2064e-06
Pearson          23.698  1 1.1270e-06

Phi-Coefficient   : 0.192
Contingency Coeff.: 0.188
Cramer's V       : 0.192
```

Razões de chances (e intervalos de confiança) correspondentes às variáveis `esterilidade` e `endometriose` podem ser obtidas para cada nível da variável `dismenorreia` por meio dos seguintes comandos do pacote `epiDisplay`

```
> endomet1 %$% mhor(esterilidade, endometriose, dismenorreia,
                    graph = F)
Stratified analysis by dismenorreia
OR lower lim. upper lim. P value
```

dismenorreia nao	3.61	2.008	6.42	7.73e-06
dismenorreia leve	1.52	0.708	3.12	2.63e-01
dismenorreia moderada	1.71	0.950	3.12	6.86e-02
dismenorreia intensa	1.54	0.980	2.42	5.11e-02
dismenorreia incapacitante	2.10	1.042	4.25	2.69e-02
M-H combined	1.91	1.496	2.45	1.36e-07
M-H Chi2(1) = 27.77 , P value = 0				
Homogeneity test, chi-squared 4 d.f. = 6.9 , P value = 0.141				

O resultado obtido por meio da razão de chances combinada pelo **método de Mantel-Haenszel** sugerem que a chance de endometriose para pacientes com sintomas de esterilidade é 1,91 (IC95%: 1,5 - 2,45) vezes a chance de endometriose para pacientes sem esses sintomas, independentemente da intensidade da dismenorreia. Detalhes sobre a técnica de Mantel-Haenszel são apresentados na Nota de Capítulo 4.

## 5.6 Notas de capítulo

### 1) Notação matricial para variáveis multivariadas

Nesta seção iremos formalizar a notação matricial usualmente empregada para representar medidas resumo multivariadas.

Denotemos cada coluna da matriz de dados  $\mathbf{X}$  por  $\mathbf{x}_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ , com elementos  $x_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Então, definindo  $\bar{x}_j = n^{-1} \sum_{i=1}^n x_{ij}$ , o vetor de médias é expresso como  $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p)^\top$ .

Se denotarmos por  $\mathbf{1}_n$  o vetor coluna de ordem  $n \times 1$  contendo todos os elementos iguais a um, podemos escrever o vetor de médias como

$$\bar{\mathbf{x}}^\top = \frac{1}{n} \mathbf{1}_n^\top \mathbf{X} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p). \quad (5.3)$$

A matriz de desvios de cada observação em relação à média correspondente é

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} - \mathbf{1}_n \bar{\mathbf{x}}^\top \quad (5.4)$$

de forma que a matriz de covariâncias pode ser expressa como

$$\mathbf{S} = \frac{1}{n-1} \mathbf{Y}^\top \mathbf{Y}. \quad (5.5)$$

Na diagonal principal de  $\mathbf{S}$  constam as variâncias amostrais  $s_{jj}$ ,  $j = 1, \dots, p$  e nas demais diagonais temos as covariâncias amostrais

$$s_{uv} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_{iu} - \bar{x}_u)(x_{iv} - \bar{x}_v), \quad u, v = 1, \dots, p,$$

em que  $s_{uv} = s_{vu}$ , para todo  $u, v$ . Ou seja, podemos escrever

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{bmatrix}.$$

O desvio padrão amostral da  $j$ -ésima componente é  $s_j = (s_{jj})^{1/2}$ ,  $j = 1, \dots, p$ . Denotando por  $\mathbf{D}$  a matriz diagonal de ordem  $p \times p$  com o  $j$ -ésimo elemento da diagonal igual a  $s_j$ , a **matriz de correlações** é definida por

$$\mathbf{R} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{SD}^{-1} = [r_{uv}]. \quad (5.6)$$

em que  $r_{vv} = r_v = 1$ ,  $v = 1, \dots, p$  e  $r_v \geq r_{uv}$  para todo  $u \neq v$ .

O coeficiente de correlação amostral entre as variáveis  $X_u$  e  $X_v$  é dado por

$$r_{uv} = \frac{s_{uv}}{\sqrt{s_u s_v}}, \quad (5.7)$$

com  $-1 \leq r_{uv} \leq 1$  e  $r_{uv} = r_{vu}$  para todo  $u, v$ .

Em muitas situações também são de interesse as somas de quadrados de desvios, nomeadamente

$$W_{vv} = \sum_{i=1}^n (x_{iv} - \bar{x}_v)^2, \quad v = 1, \dots, p \quad (5.8)$$

e as somas dos produtos de desvios, a saber,

$$W_{uv} = \sum_{i=1}^n (x_{iu} - \bar{x}_u)(x_{iv} - \bar{x}_v), \quad u, v = 1, \dots, p. \quad (5.9)$$

**Exemplo 5.9.** Os dados dispostos na Tabela 5.4 correspondem a cinco agentes de seguros para os quais foram observados os valores das variáveis  $X_1 =$  número de anos de serviço e  $X_2 =$  número de clientes.

**Tabela 5.4:** Número de anos de serviço e número de clientes para cinco agentes de seguros

Agente	$X_1$	$X_2$
A	2	48
B	4	56
C	5	64
D	6	60
E	8	72

A matriz de dados é

$$\mathbf{X}^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 6 & 8 \\ 48 & 56 & 64 & 60 & 72 \end{bmatrix},$$

de modo que

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_{i1} = \frac{1}{5}(2 + 4 + 5 + 6 + 8) = 5,$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_{i2} = \frac{1}{5}(48 + 56 + 64 + 60 + 72) = 60$$

e o vetor de médias é

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 60 \end{bmatrix}.$$

A matriz de desvios em relação às médias é

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 2 & 48 \\ 4 & 56 \\ 5 & 64 \\ 6 & 60 \\ 8 & 72 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [5 \quad 60] = \begin{bmatrix} 2-5 & 48-60 \\ 4-5 & 56-60 \\ 5-5 & 64-60 \\ 6-5 & 60-60 \\ 8-5 & 72-60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -12 \\ -1 & -4 \\ 0 & 4 \\ 1 & 0 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$$

e as correspondentes matrizes de covariâncias e correlações são, respectivamente,

$$\mathbf{S} = \frac{1}{5-1} \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 5 & 19 \\ 19 & 80 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0,95 \\ 0,95 & 1 \end{bmatrix}.$$

As variâncias e covariâncias amostrais são respectivamente,

$$s_{11} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^5 (x_{i1} - \bar{x}_1)^2 = 5, \quad s_{22} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^5 (x_{i2} - \bar{x}_2)^2 = 80,$$

$$s_{12} = s_{21} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^5 (x_{i1} - \bar{x}_1)(x_{i2} - \bar{x}_2) = 19$$

ao passo que as correlações amostrais são dadas por

$$r_{11} = r_{22} = 1 \quad \text{e} \quad r_{12} = r_{21} = \frac{s_{12}}{\sqrt{s_{11}s_{22}}} = \frac{19}{\sqrt{5 \times 80}} = 0,95.$$

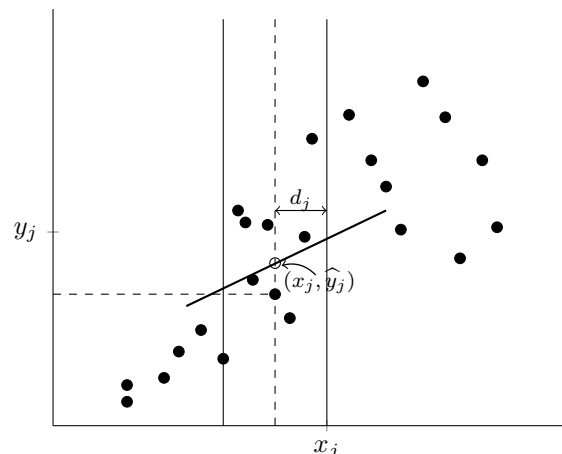
## 2) *Lowess*

Muitas vezes, gráficos de dispersão (simbólicos ou não) são utilizados para a identificação de curvas que possam representar a relação entre as variáveis sob avaliação. Por exemplo, pode haver interesse em saber se uma variável resposta é uma função linear ou quadrática de uma variável explicativa (preditora). O ajuste de uma curva suave aos dados pode ser realizado or meio da técnica conhecida como **lowess** (*locally weighted regression scatterplot smoothing*). Essa técnica de **suavização** é realizada por meio de sucessivos ajustes de retas por mínimos quadrados ponderados (ver Capítulo 6) a subconjuntos dos dados.



Consideremos, as coordenadas  $(x_j, y_j)$ ,  $j = 1, \dots, n$  dos elementos de um conjunto de dados, por exemplo, correspondentes aos pontos associados aos veículos `drv=4` na Figura 5.5. O ajuste de uma curva suave a esses pontos por meio da técnica *lowess* é baseado na substituição da coordenada  $y_j$  por um valor suavizado  $\hat{y}_j$  obtido segundo os seguintes passos:

- i) Escolha uma faixa vertical centrada em  $(x_j, y_j)$  contendo  $q$  pontos conforme ilustrado na Figura 5.11 (em que  $q = 9$ ). Em geral, escolhemos  $q = n \times p$  em que  $0 < p < 1$ , tendo em conta que quanto maior for  $p$ , maior será o grau de suavização.

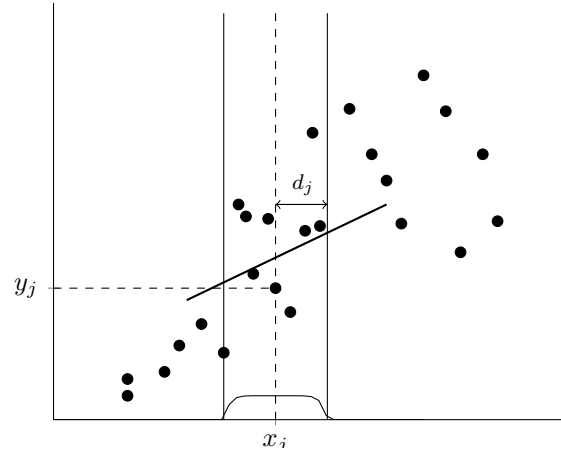


**Figura 5.11:** Faixa centrada em  $(x_j, y_j)$  para suavização por lowess.

- ii) Use uma função simétrica em torno de  $x_j$  para atribuir pesos aos pontos na vizinhança de  $(x_j, y_j)$ . Essa função é escolhida de forma que o maior peso seja atribuído a  $(x_j, y_j)$  e que os demais pesos diminuam à medida que  $x$  se afasta de  $x_j$ . Com essa finalidade, utiliza-se, por exemplo, a **função tricúbica**

$$h(u) = \begin{cases} (1 - |u|^3)^3, & \text{se } |u| < 1 \\ 0, & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

O peso atribuído a  $(x_k, y_k)$  é  $h[(x_j - x_k)/d_j]$  em que  $d_j$  é a distância entre  $x_j$  e seu vizinho mais afastado dentro da faixa selecionada em i) conforme ilustrado na Figura 5.12.



**Figura 5.12:** Atribuição de pesos para suavização por *lowess*.

- iii) Ajuste uma reta  $y = \alpha + \beta x + e$  aos  $q$  pontos da faixa centrada em  $x_j$ , por meio da minimização de

$$\sum_{k=1}^q h_j(x_k)(y_k - \alpha - \beta x_k)^2,$$

obtendo os estimadores  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta}$ . O valor suavizado de  $y_k$  é  $\hat{y}_k = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x_k$ ,  $k = 1, \dots, q$ .

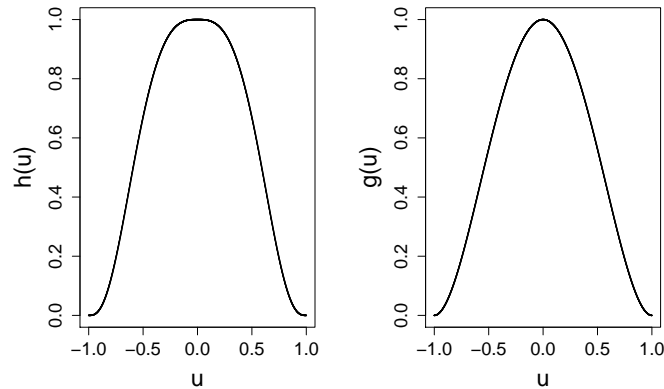
- iv) Calcule os resíduos  $\hat{e}_k = y_k - \hat{y}_k$ ,  $k = 1, \dots, q$  e por meio de um gráfico de dispersão, por exemplo, identifique possíveis pontos discrepantes (*outliers*). Quando existirem, refaça os cálculos, atribuindo pesos menores aos maiores resíduos, por exemplo, por meio da **função biquadrática**

$$g(u) = \begin{cases} (1 - |u|^2)^2, & \text{se } |u| < 1 \\ 0, & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$

O peso atribuído ao ponto  $(x_k, y_k)$  é  $g(x_k) = g(\hat{e}_k/6m)$  em que  $m$  é a mediana dos valores absolutos dos resíduos ( $|\hat{e}_k|$ ). Se o valor absoluto do resíduo  $\hat{e}_k$  for muito menor do que  $6m$ , o peso a ele atribuído será próximo de 1; em caso contrário, será próximo de zero. A razão pela qual utilizamos o denominador  $6m$  é que se os resíduos tiverem uma distribuição Normal com variância  $\sigma^2$ , então  $m \approx 2/3$  e  $6m \approx 4\sigma$ . Isso implica que para resíduos Normais, raramente teremos pesos pequenos.

- v) Finalmente, ajuste uma nova reta aos pontos  $(x_k, y_k)$  com pesos  $h(x_k)g(x_k)$ . Se  $(x_k, y_k)$  corresponder a um ponto discrepante, o resíduo  $\hat{e}_k$  será grande, mas o peso atribuído a ele será pequeno.
- vi) Repita o procedimento duas ou mais vezes, observando que a presença de pontos discrepantes exige um maior número de iterações.

Gráficos das funções tricúbica  $[h(u)]$  e biquadrática  $[g(u)]$  estão exibidos na Figura 5.13.

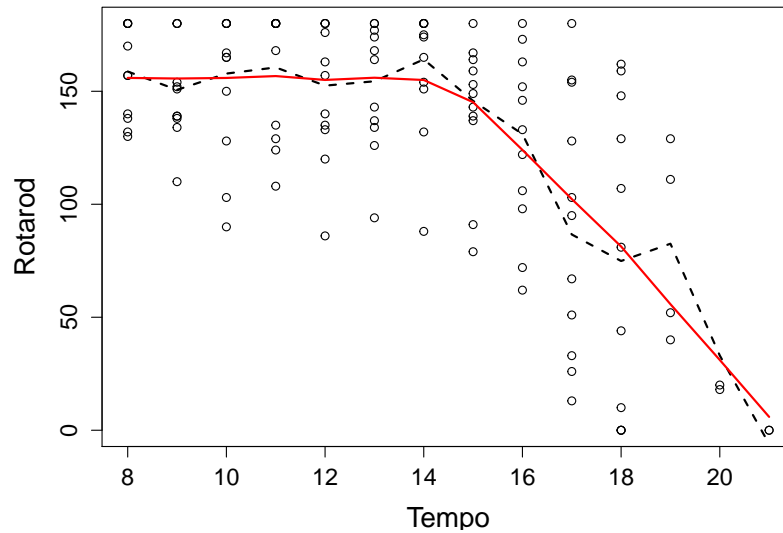


**Figura 5.13:** Gráficos das funções tricúbica  $[h(u)]$  e biquadrática  $[g(u)]$ .

Para mais detalhes sobre o método *lowess* bem como sobre outros métodos de suavização o leitor poderá consultar Morettin e Tolói (2018), por exemplo.

O gráfico da Figura 5.14 contém curvas *lowess* (com dois níveis de suavização) ajustadas aos pontos do conjunto de dados `rotarod` obtidos de um estudo cujo objetivo era propor um modelo para avaliar a evolução de uma variável ao longo do tempo. O gráfico sugere um modelo de **regressão segmentada**, *i.e.* em que a resposta média assume um valor constante até um ponto de mudança, a partir do qual a uma curva quadrática pode representar a sua variação temporal. Os comandos utilizados para a construção da figura são

```
> par(mar=c(5.1,5.1,4.1,2.1))
> plot(rotarod$tempo, rotarod$rotarod, type='p',
       xlab = "Tempo", ylab = "Rotarod",
       cex.axis = 1.3, cex.lab = 1.6)
> lines(lowess(rotarod$rotarod ~ rotarod$tempo, f=0.1),
       col=1, lty=2, lwd =2)
> lines(lowess(rotarod$rotarod ~ rotarod$tempo, f=0.4),
       col=2, lty=1, lwd =2)
```



**Figura 5.14:** Curvas *lowess* com diferentes parâmetros de suavização ajustadas a um conjunto de dados.

### 3) Parametrização de desvios médios

Com a finalidade de explicitar efeitos principais e interação no modelo em que se deseja avaliar o efeito de dois fatores no valor esperado de uma variável resposta, é comum considerar-se a reparametrização  $\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij}$ , que implica o modelo

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + e_{ijk}, \quad (5.10)$$

$i = 1, \dots, a$ ,  $j = 1, \dots, b$ ,  $k = 1, \dots, m$ . Muitos autores, como Nelder et al. (1988), interpretam erroneamente os parâmetros  $\mu$ ,  $\alpha_i$ ,  $\beta_j$ ,  $\alpha\beta_{ij}$ , respectivamente, como “média geral”, “efeito principal do nível  $i$  do fator  $A$ ”, “efeito principal do nível  $j$  do fator  $B$ ” e “interação entre os níveis  $i$  do fator  $A$  e  $j$  do fator  $B$ ”. Esse modelo é **inidentificável**<sup>1</sup> e seus parâmetros não são estimáveis e não têm interpretação. Para tornar os parâmetros estimáveis, é preciso acrescentar **restrições de identificabilidade**. As restrições de identificabilidade mais frequentemente utilizadas são aquelas correspondentes às parametrizações de

<sup>1</sup>Um modelo  $F(\theta)$ , dependendo do parâmetro  $\theta \in \Theta$ , é identificável se para todo  $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ ,  $\theta_1 \neq \theta_2$  temos  $F(\theta_1) \neq F(\theta_2)$ . Em caso contrário, o modelo é dito inidentificável. Por exemplo, consideremos o modelo  $y_i \sim N(\mu + \alpha_i, \sigma^2)$ ,  $i = 1, 2$  em que  $y_1$  e  $y_2$  são independentes. Tomando  $\theta = (\mu, \alpha_1, \alpha_2)^\top$  como parâmetro, o modelo é inidentificável, pois tanto para  $\theta_1 = (5, 1, 0)^\top$  quanto para  $\theta_2 = (4, 2, 1)^\top \neq \theta_1$ , a distribuição conjunta de  $(y_1, y_2)$  é  $N_2[(6, 6)^\top, \sigma^2 \mathbf{I}_2]$ . O leitor poderá consultar Bickel e Doksum (2015), entre outros, para detalhes.

desvios de médias e de cela de referência, respectivamente,

$$\sum_{i=1}^a \alpha_i = \sum_{j=1}^b \beta_j = \sum_{i=1}^a \alpha\beta_{ij} = \sum_{j=1}^b \alpha\beta_{ij} = 0 \quad (5.11)$$

e

$$\alpha_1 = \beta_1 = \alpha\beta_{11} = \dots = \alpha\beta_{1b} = \alpha\beta_{21} = \dots = \alpha\beta_{a1} = 0 \quad (5.12)$$

Sob as restrições (5.11), pode-se mostrar que

$$\mu = (ab)^{-1} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \mu_{ij}, \quad \alpha_i = b^{-1} \sum_{j=1}^b \mu_{ij} - \mu, \quad \beta_j = a^{-1} \sum_{i=1}^a \mu_{ij} - \mu$$

e que

$$\alpha\beta_{ij} = \mu_{ij} - b^{-1} \sum_{j=1}^b \mu_{ij} - a^{-1} \sum_{i=1}^a \mu_{ij}.$$

É nesse contexto que o parâmetro  $\mu$  pode ser interpretado como **média geral** e representa a média dos valores esperados da resposta sob as diversas combinações dos níveis dos fatores  $A$  e  $B$ . O parâmetro  $\alpha_i$ , chamado de **efeito do nível  $i$**  do fator  $A$  corresponde à diferença entre o valor esperado da resposta sob o nível  $i$  do do fator  $A$  e a média geral  $\mu$ . O parâmetro  $\beta_j$  tem ma interpretação análoga e o parâmetro  $\alpha\beta_{ij}$  corresponde à interação entre entre os níveis  $i$  do do fator  $A$  e  $j$  do fator  $B$  e pode ser interpretado como a diferença entre o valor esperado da resposta sob a combinação desses níveis dos fatores  $A$  e  $B$  e aquela que seria esperada quando não existe interação entre os dois fatores.

Sob as restrições (5.12), temos

$$\mu = \mu_{11}, \quad \alpha_i = \mu_{ij} - \mu_{1j}, \quad i = 2, \dots, a, \quad \beta_j = \mu_{ij} - \mu_{i1}, \quad j = 2, \dots, b,$$

e

$$\alpha\beta_{ij} = \mu_{ij} - (\mu_{11} + \alpha_i + \beta_j), \quad i = 2, \dots, a, \quad j = 2, \dots, b,$$

de forma que os parâmetros  $\alpha_i$ ,  $i = 2, \dots, a$  podem ser interpretados como diferenças entre as respostas esperadas das unidades submetidas ao nível  $i$  do fator  $A$  relativamente àquelas obtidas por unidades submetidas ao tratamento associado ao nível 1 do mesmo fator, mantido fixo o nível correspondente ao fator  $B$ . Analogamente, os parâmetros  $\beta_j$ ,  $j = 2, \dots, b$  podem ser interpretados como diferenças entre as respostas esperadas das unidades submetidas ao nível  $j$  do fator  $B$  relativamente àquelas obtidas por unidades submetidas ao tratamento associado ao nível 1 do mesmo fator, mantido fixo o nível correspondente do fator  $A$ . Os parâmetros  $\alpha\beta_{ij}$ ,  $i = 2, \dots, a$ ,  $j = 2, \dots, b$  podem ser interpretados como diferenças entre as respostas esperadas das unidades submetidas ao tratamento correspondente à cela  $(i, j)$  e aquela esperada sob um modelo sem interação.

Em resumo, a definição do **efeito de um fator** e da **interação entre dois fatores** depende da parametrização utilizada e é importante para a interpretação dos resultados da análise, embora a conclusão da análise seja a mesma qualquer que seja a alternativa adotada.

#### 4) A estatística de Mantel-Haenszel

A estatística de Mantel-Haenszel é utilizada para avaliar a associação em conjuntos de tabelas  $2 \times 2$  obtidas de forma estratificada segundo o paradigma indicado na Tabela 5.5, em que consideramos apenas dois estratos para efeito didático..

**Tabela 5.5:** Frequência de pacientes

Estrato	Fator de risco	Status do paciente		Total
		doente	são	
1	presente	$n_{111}$	$n_{112}$	$n_{11+}$
	ausente	$n_{121}$	$n_{122}$	$n_{12+}$
	Total	$n_{1+1}$	$n_{1+2}$	$n_{1++}$
2	presente	$n_{211}$	$n_{212}$	$n_{21+}$
	ausente	$n_{221}$	$n_{222}$	$n_{22+}$
	Total	$n_{2+1}$	$n_{2+2}$	$n_{2++}$

Uma estimativa da razão de chances para o estrato  $h$  é

$$rc_h = \frac{n_{h11}n_{h22}}{n_{h12}n_{h21}}.$$

A estimativa da razão de chances comum proposta por Mantel e Haenszel (1959) é uma média ponderada das razões de chances de cada um dos  $H$  ( $H = 2$  no exemplo) estratos com pesos

$$w_h = \frac{n_{h12}n_{h21}}{n_{h++}} / \sum_{h=1}^H \frac{n_{h12}n_{h21}}{n_{h++}},$$

ou seja

$$\begin{aligned} rc_{MH} &= \sum_{h=1}^H w_h rc_h = \sum_{h=1}^H \frac{n_{h12}n_{h21}}{n_{h++}} \times \frac{n_{h11}n_{h22}}{n_{h12}n_{h21}} / \sum_{h=1}^H \frac{n_{h12}n_{h21}}{n_{h++}} \\ &= \sum_{h=1}^H \frac{n_{h11}n_{h22}}{n_{h++}} / \sum_{h=1}^H \frac{n_{h12}n_{h21}}{n_{h++}} \end{aligned}$$

Consideremos, por exemplo, os dados hipotéticos dispostos na Tabela 5.6 provenientes de um estudo cujo objetivo é avaliar a associação entre um fator de risco e a ocorrência de uma determinada moléstia com dados obtidos em três clínicas diferentes.

**Tabela 5.6:** Frequências de pacientes em um estudo com três estratos

Clínica	Fator de risco	Doença		Total	Razão de chances
		sim	não		
A	presente	5	7	12	2,86
	ausente	2	8	10	
B	presente	3	9	12	2,00
	ausente	1	6	7	
C	presente	3	4	7	2,63
	ausente	2	7	9	

A estimativa da razão de chances de Mantel-Haenszel é

$$r_{CMH} = \frac{(5 \times 8)/22 + (3 \times 6)/19 + (3 \times 7)/16}{(7 \times 2)/22 + (9 \times 1)/19 + (4 \times 2)/16} = 2,53.$$

Uma das vantagens da razão de chances de Mantel-Haenszel é que ela permite calcular a razão de chances comum mesmo quando há frequências nulas. Vamos admitir que uma das frequências da Tabela 5.6, fosse nula, como indicado na Tabela 5.7

**Tabela 5.7:** Tabela com frequência nula

Clínica	Fator de risco	Doença		Total	Razão de chances
		sim	não		
A	presente	5	7	12	$\infty$
	ausente	0	10	10	
B	presente	3	9	12	2,00
	ausente	1	6	7	
C	presente	3	4	7	2,63
	ausente	2	7	9	

Embora a razão de chances para o estrato A seja “infinita”, a razão de chances de Mantel-Haenszel pode ser calculada e é

$$r_{CMH} = \frac{(5 \times 10)/22 + (3 \times 6)/19 + (3 \times 8)/16}{(7 \times 0)/22 + (9 \times 1)/19 + (4 \times 2)/16} = 6,56.$$

Outra vantagem da estatística de Mantel-Haenszel é que ela não é afetada pelo **Paradoxo de Simpson**, que ilustramos por meio de um exemplo em que a opinião sobre um determinado projeto foi avaliada com moradores de duas regiões, obtendo-se os dados apresentados na Tabela 5.8.

**Tabela 5.8:** Frequências relacionadas com a preferência de moradores por um de dois projetos

Região	Projeto	Opinião		Total	Razão de chances
		favorável	desfavorável		
1	A	50	950	1000	0,47
	B	1000	9000	10000	
	Total	1050	9950	10000	
2	A	5000	5000	10000	0,05
	B	95	5	100	
	Total	5095	5005	10100	

Segundo a Tabela 5.8, em ambas as regiões, há uma preferência pelo Projeto B, ou seja, a chance de preferência pelo projeto B é pelo menos o dobro daquela de preferência pelo Projeto A. Se agruparmos os dados somando os resultados de ambas as regiões, obteremos as frequências dispostas na Tabela 5.9.

**Tabela 5.9:** Frequências agrupadas correspondentes à Tabela 5.8

Projeto	Opinião		Total	Razão de chances
	favorável	desfavorável		
A	5050	5950	11000	6,98
B	1095	9005	10100	
Total	6145	9950	21100	

A razão de chances obtida com os dados agrupados indicam que a chance de preferência pelo Projeto A é cerca de 7 vezes aquela de preferência pelo Projeto B. Essa aparente incongruência é conhecida como o Paradoxo de Simpson e pode ser explicada por uma forte associação (com  $rc = 0,001$ ) entre as variáveis Região e Projeto como indicado na Tabela 5.10.

**Tabela 5.10:** Frequências de moradores favoráveis a cada projeto

Projeto	Região		Total	Razão de chances
	1	2		
A	1000	10000	11000	0,001
B	10000	100	10100	
Total	11000	10100	21100	



A estatística de Mantel-Haenszel correspondente é

$$r_{CMH} = \frac{(50 \times 9000)/11000 + (5000 \times 5)/10100}{(950 \times 1000)/11000 + (5000 \times 95)/10100} = 0,33$$

preservando a associação entre as duas variáveis de interesse. Detalhes sobre o Paradoxo de Simpson podem ser encontrados em Paulino e Singer (2006), por exemplo.

## 5.7 Exercícios

- 1) Um laboratório de pesquisa desenvolveu uma nova droga para febre tifóide com a mistura de duas substâncias químicas (A e B). Foi realizado um ensaio clínico com o objetivo de estabelecer as dosagens adequadas (baixa ou alta, para a substância A, e baixa, média ou alta, para a substância B) na fabricação da droga. Vinte e quatro voluntários foram aleatoriamente distribuídos em 6 grupos de 4 indivíduos e cada grupo foi submetido a um dos 6 tratamentos. A resposta observada foi o tempo para o desaparecimento dos sintomas (em dias). Os resultados obtidos estão dispostos na Tabela 5.11

**Tabela 5.11:** Tempo para o desaparecimento dos sintomas (dias)

Dose da substância A	Dose da substância B		
	baixa	média	alta
baixa	10,4	8,9	4,8
baixa	12,8	9,1	4,5
baixa	14,6	8,5	4,4
baixa	10,5	9,0	4,6
alta	5,8	8,9	9,1
alta	5,2	9,1	9,3
alta	5,5	8,7	8,7
alta	5,3	9,0	9,4

- a) Faça uma análise descritiva dos dados com o objetivo de avaliar qual a combinação de dosagens das substâncias faz com que os sintomas desapareçam em menos tempo.
- b) Especifique o modelo para a comparação dos 6 tratamentos quanto ao tempo esperado para o desaparecimento dos sintomas. Identifique os fatores e seus níveis.
- c) Construa o gráfico dos perfis médios e interprete-o. Com base nesse gráfico, você acha que existe interação entre os fatores? Justifique sua resposta.
- d) Confirme suas conclusões do item c) por meio de uma ANOVA com dois fatores.

- 2) Um experimento foi realizado em dois laboratórios de modo independente com o objetivo de verificar o efeito de três tratamentos (A1, A2 e A3) na concentração de uma substância no sangue de animais (dados hipotéticos). As concentrações observadas nos dois laboratórios são apresentadas na Tabela 5.12.

**Tabela 5.12:** Concentração de uma substância no sangue de animais

Laboratório 1			Laboratório 2				
A1	A2	A3	A1	A2	A3		
8	4	3	4	6	5		
3	8	2	5	7	4		
1	10	8	3	7	6		
4	6	7	5	8	5		
Total	16	28	20	Total	16	28	20

- a) Compare, descritivamente, as médias dos três tratamentos nos dois laboratórios.
- b) Sem nenhum cálculo, apenas olhando os dados, em qual dos dois laboratórios será observado o maior valor da estatística F numa análise de variância?
- 3) Um estudo foi realizado com o objetivo de avaliar a influência da exposição ao material particulado fino (MP2,5) na capacidade vital forçada (% do predito) em indivíduos que trabalham em ambiente externo. Deseja-se verificar se o efeito da exposição depende da ocorrência de hipertensão ou diabetes. Os 101 trabalhadores na amostra foram classificados quanto à exposição ao material particulado fino e presença de diabetes ou hipertensão. As médias da capacidade vital forçada para cada combinação das categorias de diabetes ou hipertensão e exposição ao MP2,5 estão representadas na Figura 5.15.

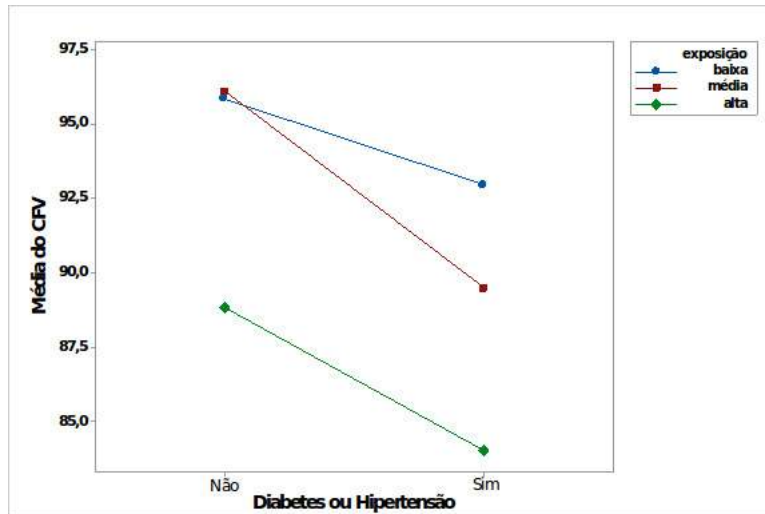
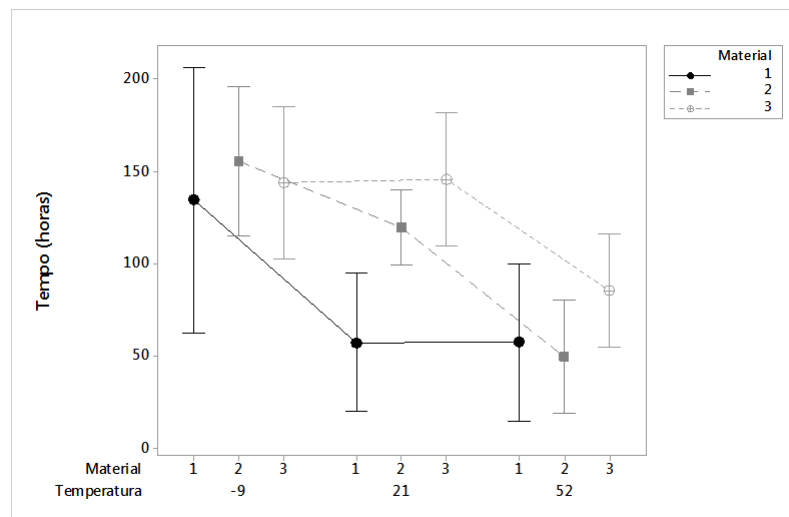


Figura 5.15: Capacidade vital forçada (% do predito).

- a) Comente descritivamente os resultados obtidos, discutindo a possível interação entre diabetes e exposição ao material particulado.
  - b) Que comparações você faria para explicar essa possível interação?
- 4) Considere os dados do arquivo **esforco**.
- a) Construa gráficos do desenhista (*draftman's plots*) separadamente para cada etiologia (CH, ID e IS) com a finalidade de avaliar a associação entre os consumos de oxigênio (VO<sub>2</sub>) medidos nos três momentos de exercício (LAN, PCR e Pico) e indique os coeficientes de correlação de Pearson e de Spearman correspondentes.
  - b) Para cada etiologia (CH, ID e IS), construa um gráfico de dispersão simbólico para representar a relação entre carga e VO<sub>2</sub> no no momento PCR do exercício, e sobreponha curvas *lowess*. Que tipo de função você utilizaria para representar a relação entre as duas variáveis.
  - c) Para cada um dos quatro momentos de exercício (Repouso, LAN, PCR e Pico), construa gráficos de perfis médios da frequência cardíaca para as diferentes combinações dos níveis de etiologia (CH, ID e IS) e gravidade da doença avaliada pelo critério NYHA. Em cada caso, avalie descritivamente as evidências de efeitos dos fatores Etiologia e Gravidade da doença e de sua interação.
  - d) Utilize ANOVA para avaliar se as conclusões descritivas podem ser extrapoladas para a população de onde a amostra foi obtida.
- 5) Considere os dados do arquivo **arvores**. Obtenha os vetores de médias e matrizes de covariâncias e correlações entre as concentrações dos elementos Mn, Fe, Cu, Zn, Sr, Ba, Mg, Al, P, S, Cl e Ca para cada combinação dos níveis de espécie e tipo de via.

- 6) Considere os dados do arquivo **arvores**. Construa gráficos de perfis médios (com barras de desvios padrões) para avaliar o efeito de espécie de árvores e tipo de via na concentração de Fe. Utilize uma ANOVA com dois fatores para avaliar a possível interação e efeitos dos fatores na variável resposta. Traduza os resultados sem utilizar o jargão estatístico.
- 7) Um novo tipo de bateria está sendo desenvolvido. Sabe-se que o tipo de material da placa e a temperatura podem afetar o tempo de vida da bateria. Há três materiais possíveis a testar em três temperaturas escolhidas de forma a serem consistentes com o ambiente de uso do produto:  $-9^{\circ}\text{C}$ ,  $21^{\circ}\text{C}$  e  $50^{\circ}\text{C}$ . Quatro baterias foram testadas em cada combinação de material e temperatura em ordem aleatória. As médias observadas do tempo de vida (h) e intervalos de confiança de 95% para as médias populacionais em cada combinação de temperatura e material estão representados no gráfico da Figura 5.16 .



**Figura 5.16:** Gráfico das médias observadas do tempo de vida (h) e intervalos de confiança de 95% para as médias populacionais em cada combinação de temperatura e material.

Com base nesse gráfico pode-se conjecturar que:

- a escolha do material com o qual é obtida a maior média do tempo de vida independe da temperatura;
- as menores médias de tempo de vida foram observadas quando foi utilizado o material 1;
- a temperatura em que foram observadas as maiores médias do tempo de vida é a de  $21^{\circ}\text{C}$ ;
- há interação entre Temperatura e Tempo de vida;
- nenhuma das alternativas acima é correta.

- 8) O gráfico apresentado na Figura 5.17 considera a associação entre as variáveis pressão sistólica e idade de imigrantes com menos de dez anos (Migra1) e com mais de dez anos (Migra2) desde a migração.

A dispersão dos pontos indica que:

- existem muitos pontos aberrantes.
- existe correlação linear positiva entre as variáveis para o grupo Migra2.
- independentemente do tempo desde a migração as variáveis são altamente correlacionadas.
- existe correlação linear positiva entre as variáveis para o grupo Migra1.

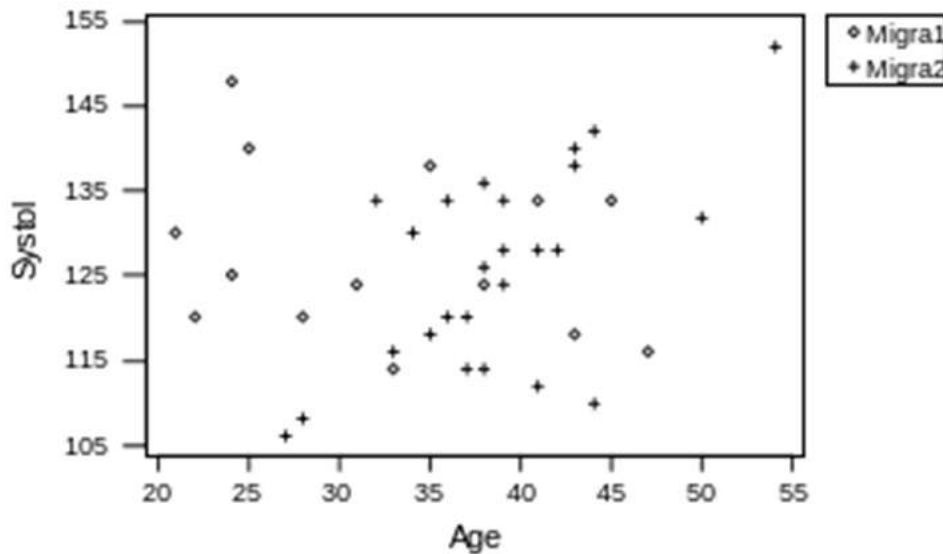


Figura 5.17: Gráfico de Pressão sistólica *versus* Idade para imigrantes.

- 9) Os dados do arquivo `palato` provêm de um estudo realizado no Laboratório Experimental de Poluição Atmosférica da Faculdade de Medicina da Universidade de São Paulo para avaliar os efeitos de agentes oxidantes no sistema respiratório. Espera-se que a exposição a maiores concentrações de agentes oxidantes possa causar danos crescentes às células ciliares e excretoras de muco, que constituem a principal defesa do sistema respiratório contra agentes externos. Cinquenta e seis palatos de sapos foram equitativamente e aleatoriamente alocados a um de seis grupos; cada grupo de 8 palatos foi imerso por 35 minutos numa solução de peróxido de hidrogênio numa concentração especificada, nomeadamente 0, 1, 8, 16, 32 ou 64  $\mu\text{M}$ . A variável resposta de interesse é a velocidade de transporte mucociliar relativa (mm/s), definida como o quociente entre a velocidade de transporte mucociliar

num determinado instante e aquela obtida antes da intervenção experimental. Essa variável foi observada a cada cinco minutos após a imersão.

- a) Obtenha os vetores de médias e matrizes de covariâncias/correlações para os dados correspondentes aos diferentes níveis do fator interunidades amostrais (concentração de peróxido de hidrogênio).
  - b) Construa gráficos de perfis individuais com perfis médios e curvas lowess sobrepostas para os diferentes níveis da concentração de peróxido de hidrogênio.
  - c) Compare os resultados obtidos sob os diferentes níveis do fator interunidades amostrais.
- 10) Os dados abaixo reportam-se a uma avaliação do desempenho de um conjunto de 203 estudantes universitários em uma disciplina introdutória de Álgebra e Cálculo. Os estudantes, agrupados segundo os quatro cursos em que estavam matriculados, foram ainda aleatoriamente divididos em dois grupos por curso, a cada um dos quais foi atribuído um de dois professores que lecionaram a mesma matéria. O desempenho de cada aluno foi avaliado por meio da mesma prova.

Frequências de aprovação/reprovação de estudantes.

Curso	Professor	Desempenho	
		Aprovado	Reprovado
Ciências Químicas	A	8	11
	B	11	13
Ciências Farmacêuticas	A	10	14
	B	13	9
Ciências Biológicas	A	19	25
	B	20	18
Bioquímica	A	14	2
	B	12	4

- a) Para valiar a associação entre Professor e Desempenho, calcule a razão de chances em cada estrato.
  - b) Calcule a razão de chances de Mantel-Haenszel correspondente.
  - c) Expresse suas conclusões de forma não técnica.
- 11) Com base nos dados do arquivo `coronarias`, construa uma tabela de contingência  $2 \times 2 \times 2 \times 2$  envolvendo os fatores sexo (`SEX0`), idade (`IDA55`) e hipertensão arterial (`HA`) e a variável resposta lesão obstrutiva coronariana  $\geq 50\%$  (`L03`). Obtenha as razões de chances entre cada fator e a variável resposta por meio das correspondentes distribuições marginais. Comente os resultados, indicando possíveis problemas com essa estratégia.

# Análise de Regressão

Models are, for the most part, caricatures of reality, but if they are good, like good caricatures, they portray, though perhaps in a disturbed manner, some features of the real world.

Mark Kač

## 6.1 Introdução

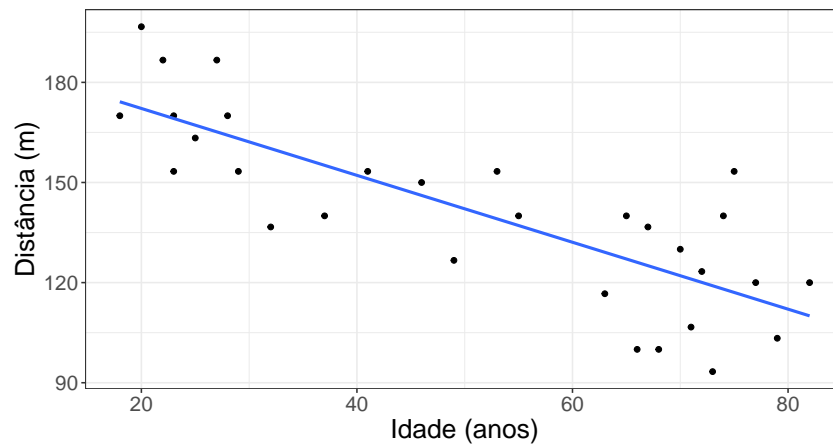
Neste capítulo avaliamos, de modo exploratório, um dos modelos estatísticos mais utilizados na prática, conhecido como **modelo de regressão**. O exemplo mais simples serve para a análise de dados pareados  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  de duas variáveis contínuas  $X$  e  $Y$  num contexto em que sabemos a priori que a distribuição de frequências de  $Y$  pode depender de  $X$ , ou seja, na linguagem introduzida no Capítulo 4, em que  $X$  é a variável explicativa e  $Y$  é a variável resposta.

**Exemplo 6.1:** Para efeito de ilustração, considere os dados apresentados na Tabela 6.1 (disponíveis no arquivo `distancia`), oriundos de um estudo cujo objetivo é avaliar como a distância com que motoristas conseguem distinguir um determinado objeto (doravante indicada simplesmente como distância) varia com a idade.

**Tabela 6.1:** Distância com que motoristas conseguem distinguir certo objeto

Ident	Idade (anos)	Distância (m)	Ident	Idade (anos)	Distância (m)
1	18	170	16	55	140
2	20	197	17	63	117
3	22	187	18	65	140
4	23	170	19	66	100
5	23	153	20	67	137
6	25	163	21	68	100
7	27	187	22	70	130
8	28	170	23	71	107
9	29	153	24	72	123
10	32	137	25	73	93
11	37	140	26	74	140
12	41	153	27	75	153
13	46	150	28	77	120
14	49	127	29	79	103
15	53	153	30	82	120

Aqui, a variável resposta é a distância e a variável explicativa é a idade. O gráfico de dispersão correspondente está apresentado na Figura 6.1 e mostra uma tendência decrescente da distância com a idade.

**Figura 6.1:** Gráfico de dispersão para os dados da Tabela 6.1.

O objetivo da análise de regressão é quantificar essa tendência. Como a resposta para motoristas com a mesma idade (ou com idades bem próximas) varia, o foco da análise é a estimação de uma tendência média (representada pela reta sobreposta aos dados na Figura 6.1).

No caso geral em que temos  $n$  pares de dados, o modelo de regressão



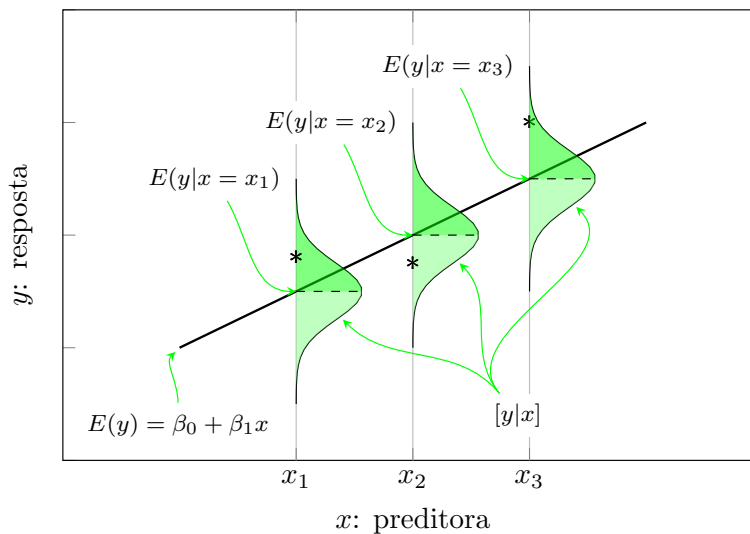
utilizado para essa quantificação é

$$y_i = \alpha + \beta x_i + e_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (6.1)$$

em que  $\alpha$  e  $\beta$  são coeficientes (usualmente chamados de **parâmetros**) desconhecidos (e que se pretende estimar com base nos dados) e  $e_i$  são erros (aleatórios) que representam desvios entre as observações  $y_i$  e a reta  $\alpha + \beta x$  que corresponde à tendência esperada.<sup>1</sup> Em geral, supõe-se que a média (ou valor esperado) dos erros é nula, o que significa, de modo genérico, que existe uma compensação entre erros positivos e negativos e que, conseqüentemente, o objetivo da análise é modelar o valor esperado da variável resposta

$$E(y_i) = \alpha + \beta x_i.$$

Uma representação gráfica desse modelo está apresentada na Figura 6.2.



**Figura 6.2:** Representação gráfica do modelo (6.1).

No contexto do Exemplo 6.1, podemos interpretar o parâmetro  $\alpha$  como a distância esperada com que um recém-nascido, *i.e.*, um motorista com idade  $x = 0$ , consegue distinguir o determinado objeto e o parâmetro  $\beta$  como a diminuição esperada nessa distância para cada aumento de um ano na idade. Como a interpretação de  $\alpha$  não faz muito sentido nesse caso, um modelo mais adequado é

$$y_i = \alpha + \beta(x_i - 18) + e_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.2)$$

<sup>1</sup>Uma notação mais elucidativa para (6.1) é  $y_i|x_i = \alpha + \beta x_i + e_i$ , cuja leitura como “valor observado  $y_i$  da variável resposta  $Y$  para um dado valor da variável  $x_i$  da variável explicativa  $X$ ” deixa claro que o interesse da análise está centrado na distribuição de  $Y$  e não naquela de  $X$ .

Para esse modelo, parâmetro  $\alpha$  corresponde à distância esperada com que um motorista com idade  $x = 18$  anos consegue distinguir o determinado objeto e o parâmetro  $\beta$  tem a mesma interpretação apresentada para o modelo (6.1).

O modelo (6.1) é chamado de **regressão linear simples** e o adjetivo **linear** refere-se ao fato de os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  serem incluídos de forma linear. Nesse sentido, o modelo

$$y_i = \alpha + \beta x_i + e_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (6.3)$$

seria um **modelo não linear**. Por outro lado, o modelo

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \gamma x_i^2 + e_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (6.4)$$

é também um modelo linear, pois embora a variável explicativa  $x$  esteja elevada ao quadrado, os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  aparecem de forma linear. Modelos como esse, que envolvem funções polinomiais da variável explicativa, são conhecidos como **modelos de regressão polinomial** e serão analisados na Seção 6.3.

Nosso principal objetivo não é discutir em detalhes o problema da estimação dos parâmetros desses modelos, mas considerar métodos gráficos que permitam avaliar se eles são ou não adequados para descrever conjuntos de dados com a estrutura descrita. No entanto, não poderemos prescindir de apresentar alguns detalhes técnicos. Um tratamento mais aprofundado sobre o ajuste de modelos lineares e não lineares pode ser encontrado em inúmeros textos, dentre os quais destacamos Kutner et al. (2004) para uma primeira abordagem.

Vários pacotes computacionais dispõem de códigos que permitem ajustar esses modelos. Em particular, mencionamos a função `lm()`. Na Seção 6.2, discutiremos, com algum pormenor, o ajuste de modelos da forma (6.1) e depois indicaremos como o caso geral de uma regressão linear múltipla (com mais de duas variáveis) pode ser abordado.

## 6.2 Regressão linear simples

Consideramos o modelo (6.1), supondo que os erros  $e_i$  são não correlacionados, tenham média 0 e variância  $\sigma^2$ . Nosso primeiro objetivo é estimar os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ . Um possível método para obtenção dos estimadores consiste em determinar  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta}$  que minimizem a distância entre cada observação a reta definida por  $E(y_i) = \alpha + \beta x_i$ . Com esse objetivo, consideremos a soma dos quadrados dos erros  $e_i$ ,

$$Q(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha - \beta x_i)^2. \quad (6.5)$$

Os **estimadores de mínimos quadrados** são obtidos minimizando-se (6.5) com relação a  $\alpha$  e  $\beta$ . Com essa finalidade, derivamos  $Q(\alpha, \beta)$  em

relação a esses parâmetros e obtemos as **equações de estimação** igualando as expressões resultantes a zero. A solução dessas equações são os estimadores de mínimos quadrados,

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad (6.6)$$

e

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x}, \quad (6.7)$$

em que  $\bar{x} = n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i$  e  $\bar{y} = n^{-1} \sum_{i=1}^n y_i$ . Um estimador não enviesado de  $\sigma^2$  é

$$S^2 = \frac{1}{n-2} Q(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n \hat{e}_i^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_i)^2, \quad (6.8)$$

em que  $Q(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$  é a **soma dos quadrados dos resíduos**, abreviadamente, *SQRes*. Note que no denominador de (6.8) temos  $n - 2$ , pois perdemos dois graus de liberdade em função da estimação de dois parâmetros ( $\alpha$  e  $\beta$ ). Alguns resultados referentes à inferência baseada nesse tipo de modelos são apresentados na Nota de Capítulo 1.

Os valores ajustados,  $\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i$ , são utilizados para obtenção dos **resíduos**

$$\hat{e}_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Num contexto inferencial, ou seja, em que os dados correspondem a uma amostra de uma população (geralmente conceitual), os valores dos parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\sigma^2$  não podem ser conhecidos, a menos que toda a população seja avaliada. Consequentemente, os erros  $e_i$  não são conhecidos, mas os resíduos  $\hat{e}_i$  podem ser calculados e correspondem a “estimativas” desses erros.

A proposta de um modelo de regressão linear simples pode ser baseada em argumentos teóricos, como no caso em que dados são coletados para a avaliação do espaço percorrido num movimento uniforme ( $s = s_0 + vt$ ) ou num gráfico de dispersão entre a variável resposta e a variável explicativa como aquele da Figura 6.1 em que parece razoável representar a variação da distância esperada com a idade por meio de uma reta.

Uma vez ajustado o modelo, convém avaliar a qualidade do ajuste e um dos indicadores mais utilizados para essa finalidade é o **coeficiente de determinação** definido como

$$R^2 = \frac{SQTot - SQRes}{SQTot} = \frac{SQReg}{SQTot} = 1 - \frac{SQRes}{SQTot},$$

em que a **soma de quadrados total** é  $SQTot = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$ , a **soma de quadrados dos resíduos** é  $SQRes = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$  e a **soma de quadrados da regressão** é  $SQReg = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2$ . Para mais detalhes, ver a Nota de Capítulo 3. Em essência, esse coeficiente mede a porcentagem da variação total dos valores da variável resposta ( $y_i$ ) em relação à sua média ( $\bar{y}$ ) explicada pelo modelo de regressão.

O coeficiente de determinação deve ser acompanhado de outras ferramentas para a avaliação do ajuste, pois não está direcionado para identificar se todas as suposições do modelo são compatíveis com os dados sob investigação. Em particular, mencionamos os **gráficos de resíduos**, **gráficos de Cook** e **gráficos de influência local**. Tratamos dos dois primeiros na sequência e remetemos os últimos para as Notas de Capítulo 4 e 5.

Resultados do ajuste do modelo de regressão linear simples  $distancia_i = \alpha + \beta(idade_i - 18) + e_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  aos dados da Tabela 6.1 por meio da função `lm()` do pacote MASS estão apresentados abaixo. Note que a variável preditora está especificada como `id= idade - 18`.

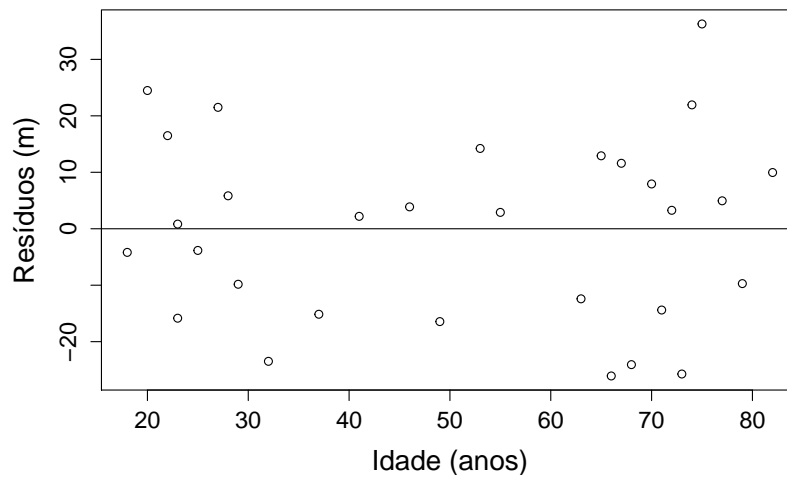
```
> lm(formula = distancia ~ id, data = distancia)
Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-26.041 -13.529   2.388  11.478  35.994
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 174.2296     5.5686  31.288 < 2e-16 ***
id          -1.0039     0.1416  -7.092 1.03e-07 ***
Residual standard error: 16.6 on 28 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.6424, Adjusted R-squared:  0.6296
F-statistic: 50.29 on 1 and 28 DF,  p-value: 1.026e-07
```

As estimativas dos parâmetros  $\alpha$  (distância esperada para motoristas com 18 anos) e  $\beta$  (diminuição da distância esperada para cada ano adicional na idade) com erros padrões entre parênteses são, respectivamente,  $\hat{\alpha} = 174,2$  (5,6) e  $\hat{\beta} = -1,004$  (0,14).

A estimativa do desvio padrão dos erros ( $\sigma$ ) é  $S = 16,6$ , com  $30 - 2 = 28$  graus de liberdade e o coeficiente de determinação é  $R^2 = 0,63$ . Detalhes sobre o coeficiente de determinação ajustado serão apresentados na Nota de Capítulo 3. Se usássemos o modelo (6.1), a estimativa de  $\alpha$  seria 192,3 (7,8) e a de  $\beta$  seria a mesma.

Uma das ferramentas mais úteis para a avaliação da qualidade do ajuste de modelos de regressão é o **gráfico de resíduos** em que os resíduos ( $\hat{e}_i$ ) são dispostos no eixo das ordenadas e os correspondentes valores da variável explicativa ( $x_i$ ), no eixo das abscissas.

O gráfico de resíduos correspondente ao modelo ajustado aos dados da Tabela 6.1 está apresentado na Figura 6.3.



**Figura 6.3:** Gráfico de resíduos para o ajuste do modelo de regressão linear simples aos dados da Tabela 6.1.

Para facilitar a visualização em relação à dispersão dos resíduos e para efeito de comparação entre ajustes de modelos em que as variáveis respostas têm unidades de medida diferentes, convém padronizá-los, *i.e.*, dividi-los pelo respectivo desvio padrão para que tenham variância igual a 1. Como os resíduos (ao contrário dos erros) são correlacionados, pode-se mostrar que

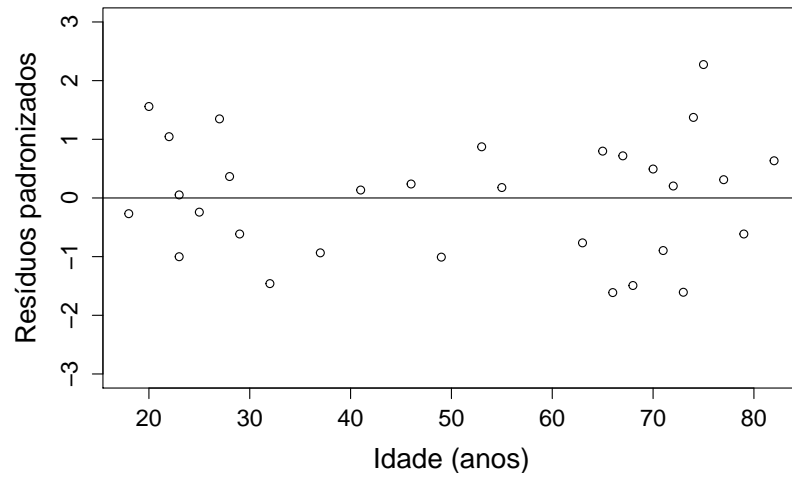
$$DP(\hat{e}_i) = \sigma\sqrt{1 - h_{ii}} \quad \text{com} \quad h_{ii} = \frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2},$$

de forma que os **resíduos padronizados**, também chamados de **resíduos estudentizados**, são definidos por

$$\hat{e}_i^* = \hat{e}_i / (S\sqrt{1 - h_{ii}}). \quad (6.9)$$

Os resíduos padronizados são adimensionais e têm variância igual a 1, independentemente da variância da variável resposta ( $\sigma^2$ ). Além disso, para erros com distribuição Normal, cerca de 99% dos resíduos padronizados têm valor entre -3 e +3.

O gráfico de resíduos padronizados correspondente àquele da Figura 6.3 está apresentado na Figura 6.4.



**Figura 6.4:** Gráfico de resíduos padronizados para o ajuste do modelo de regressão linear simples aos dados da Tabela 6.1.

Na Figura 6.4, nota-se que resíduos positivos e negativos estão distribuídos sem algum padrão sistemático e que sua variabilidade é razoavelmente uniforme ao longo dos diferentes valores da variável explicativa, sugerindo que relativamente à suposição de **homocedasticidade** (variância constante) o modelo adotado é (pelo menos, aproximadamente) adequado.

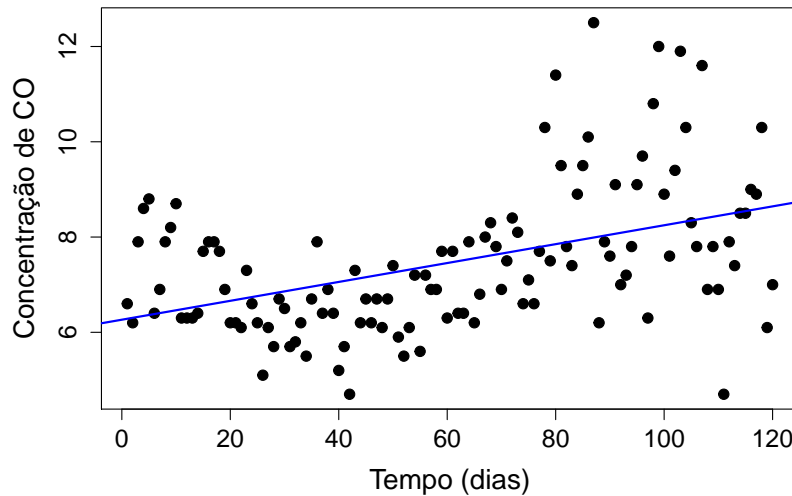
**Exemplo 6.2:** Os gráficos de dispersão e de resíduos padronizados correspondentes ao ajuste do modelo  $CO_i = \alpha + \beta \text{tempo}_i + e_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  em que  $CO$  representa a concentração atmosférica de monóxido de carbono no dia (tempo)  $i$  contado a partir de 1 de janeiro de 1991 (arquivo `poluicao`) estão apresentados nas Figuras 6.5 e 6.6. Ambos sugerem uma deficiência no ajuste: no primeiro, observa-se uma curvatura não compatível com o ajuste de uma reta; no segundo, nota-se um padrão na distribuição dos resíduos, que são positivos nos primeiros dias, negativos em seguida e espalhados ao final das observações diárias. Além disso, a dispersão dos resíduos varia com o tempo.

O resultado obtido por meio da função `lm()` é

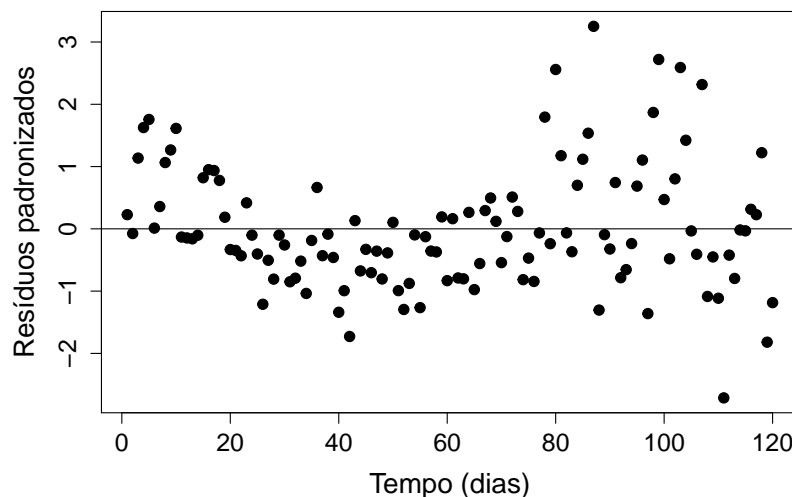
```
lm(formula = CO ~ tempo, data = dados)
Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  6.264608   0.254847  24.582 < 2e-16 ***
tempo         0.019827   0.003656   5.424 3.15e-07 ***
Residual standard error: 1.387 on 118 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.1996, Adjusted R-squared:  0.1928
F-statistic: 29.42 on 1 and 118 DF,  p-value: 3.148e-07
```

O coeficiente de determinação correspondente é 0,19, sugerindo que o modelo de regressão linear simples explica apenas uma pequena parcela da

variabilidade dos dados. Um modelo (linear) de regressão polinomial alternativo em que termos quadrático e cúbico são incluídos, *i.e.*,  $CO_i = \alpha + \beta \text{tempo}_i + \gamma \text{tempo}_i^2 + \delta \text{tempo}_i^3 + e_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  tem um melhor ajuste, como se pode notar tanto pelo acréscimo no coeficiente de determinação, cujo valor é 0,35, quanto pelo gráfico de resíduos padronizados disposto na Figura 6.7. Detalhes sobre o ajuste de modelos de regressão polinomial como esse, serão apresentados na Seção 6.3.



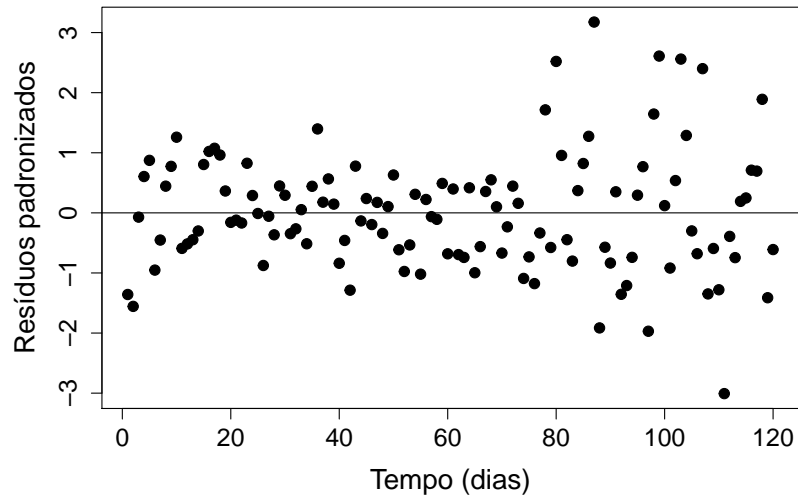
**Figura 6.5:** Gráfico de dispersão para os dados de monóxido de carbono.



**Figura 6.6:** Gráfico de resíduos padronizados para o ajuste do modelo de regressão linear simples aos dados da concentração de CO.

Ainda assim, esse modelo polinomial não é o mais adequado em virtude

da presença de **heteroscedasticidade**, ou seja, de variâncias que não são constantes ao longo do tempo. Há modelos que incorporam heterogeneidade de variâncias, mas estão fora do objetivo deste texto. Para detalhes, pode-se consultar Kutner et al. (2004), por exemplo.



**Figura 6.7:** Gráfico de resíduos padronizados para o ajuste do modelo de regressão polinomial aos dados da concentração de CO.

**Exemplo 6.3:** Os dados da Tabela 6.2 são provenientes da mensuração da velocidade do vento no aeroporto de Philadelphia (EUA), sempre à uma hora da manhã, para os primeiros 15 dias de dezembro de 1974 (Graedel e Kleiner, 1985). Esses dados estão disponíveis no arquivo `vento`.

**Tabela 6.2:** Velocidade do vento no aeroporto de Philadelphia ( $v_t$ )

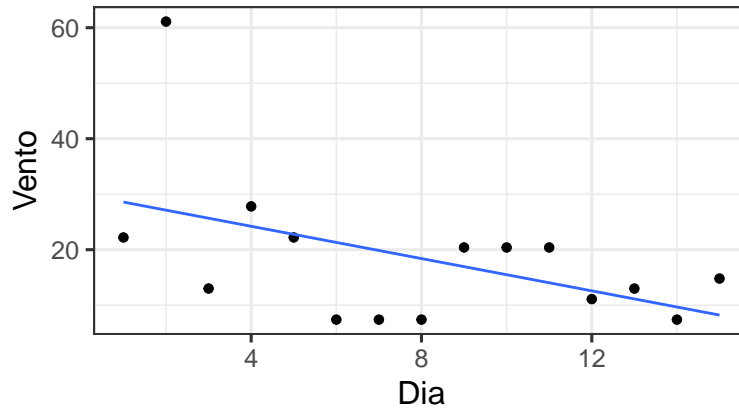
$t$	$v_t$	$t$	$v_t$
1	22,2	9	20,4
2	61,1	10	20,4
3	13,0	11	20,4
4	27,8	12	11,1
5	22,2	13	13,0
6	7,4	14	7,4
7	7,4	15	14,8
8	7,4		

O diagrama de dispersão dos dados no qual está indicada a reta obtida pelo ajuste de um modelo linear simples, nomeadamente,

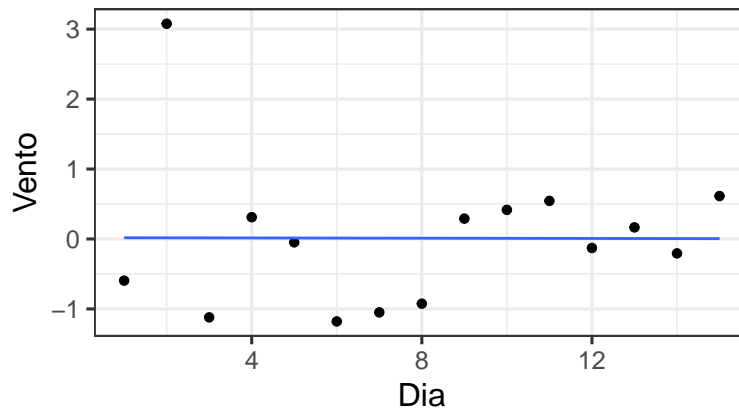
$$\hat{v}_t = 30,034 - 1,454t, \quad t = 1, \dots, 15$$

e o correspondente gráfico de resíduos padronizados estão apresentados nas Figuras 6.8 e 6.9.





**Figura 6.8:** Gráfico de dispersão para os dados da Tabela 6.2 com reta de mínimos quadrados sobreposta.



**Figura 6.9:** Gráfico de resíduos padronizados para o ajuste do modelo de regressão linear simples aos dados da Tabela 6.2.

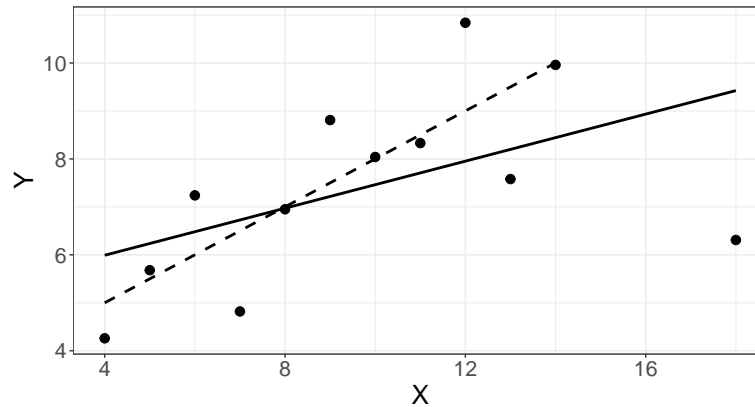
Nesses gráficos pode-se notar que tanto a observação associada ao segundo dia ( $t = 2$ , com  $v_t = 61,1$ ) quanto o resíduo correspondente destoam dos demais, gerando estimativas dos coeficientes da reta diferentes daqueles que se espera. Essa é uma **observação discrepante**, também conhecida como **observação atípica** (*outlier*). Na Nota de Capítulo 8, apresentamos um modelo alternativo com a finalidade de obtenção de estimativas **resistentes** (também chamadas de **robustas**) a pontos desse tipo.

**Exemplo 6.4:** Consideremos agora os dados (hipotéticos) dispostos na Tabela 6.3 aos quais ajustamos um modelo de regressão linear simples.

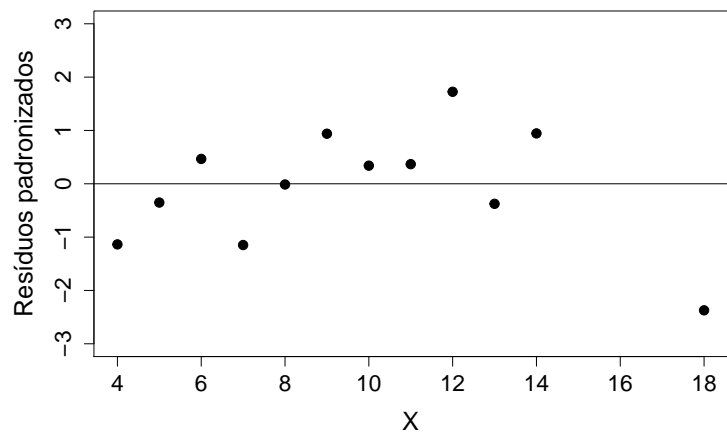
O gráfico de dispersão (com os dados representados por círculos e com a reta de regressão representada pela linha sólida) e o correspondente gráfico de resíduos padronizados estão apresentados nas Figuras 6.10 e 6.11.

**Tabela 6.3:** Dados hipotéticos

$X$	10	8	13	9	11	14	6	4	12	7	5	18
$Y$	8,04	6,95	7,58	8,81	8,33	9,96	7,24	4,26	10,84	4,82	5,68	6,31

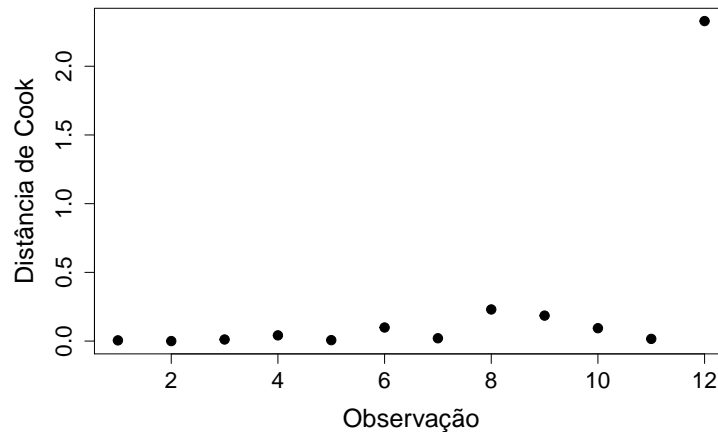


**Figura 6.10:** Gráfico de dispersão (com retas de regressão sobrepostas) para os dados da Tabela 6.3; curva sólida para dados completos e curva interrompida para dados com ponto influente eliminado.



**Figura 6.11:** Gráfico de resíduos padronizados para o ajuste do modelo de regressão linear simples aos dados da Tabela 6.3.

Os dois gráficos contêm indicações de que o ponto associado aos valores ( $X = 18, Y = 6,31$ ) pode ser um ponto discrepante. Isso fica mais evidente quando consideramos outra ferramenta diagnóstica conhecida como **gráfico de Cook** apresentado na Figura 6.12.



**Figura 6.12:** Gráfico de Cook correspondente ao ajuste do modelo de regressão linear simples aos dados da Tabela 6.3.

Esse gráfico é baseado na chamada **distância de Cook** (ver Nota de Capítulo 4) que serve para indicar as observações que têm grande influência em alguma característica do ajuste do modelo. Em particular, salienta os pontos [chamados de **pontos influentes** ou **pontos alavanca** (*high leverage points*)] que podem alterar de forma relevante as estimativas dos parâmetros. Em geral, como no caso estudado aqui, esses pontos apresentam valores das respectivas abscissas afastadas daquelas dos demais pontos do conjunto de dados. Para detalhes, consulte a Nota de Capítulo 5.

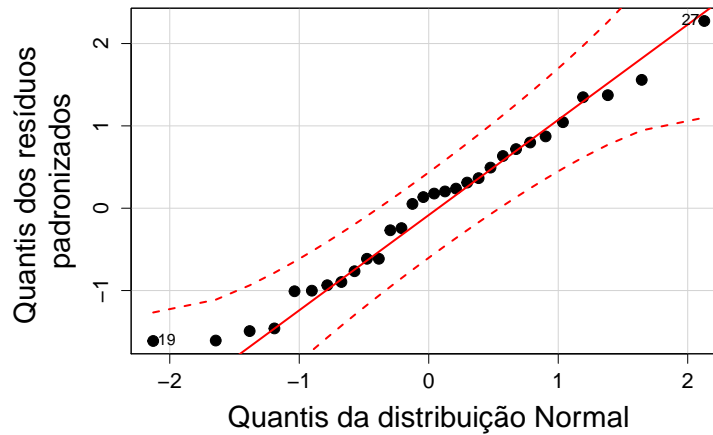
Neste exemplo, a eliminação do ponto mencionado altera as estimativas do intercepto [de 5,01 (1,37) para 3,00 (1,12)] e da inclinação [de 0,25 (0,13) para 0,50 (0,12)] da reta ajustada. A reta correspondente ao ajuste quando o ponto influente ( $X = 18, Y = 6.31$ ) é eliminado do conjunto de dados está representada na Figura 6.10 pela curva interrompida.

Nos casos em que se supõe que os erros têm distribuição Normal, pode-se utilizar gráficos QQ com o objetivo de avaliar se os dados são compatíveis com essa suposição. É importante lembrar que esses gráficos QQ devem ser construídos com os quantis amostrais baseados nos resíduos e não com as observações da variável resposta, pois apesar de suas distribuições também serem normais, suas médias variam com os valores associados da variável explicativa, ou seja, a média da variável resposta correspondente a  $x_i$  é  $\alpha + \beta x_i$ .

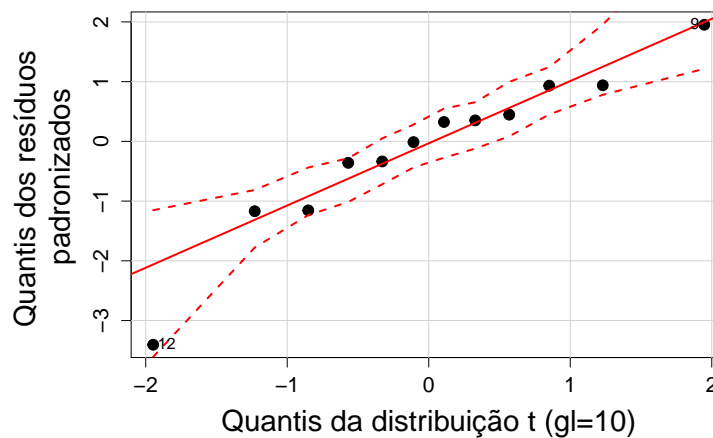
Convém observar que sob normalidade dos erros, os resíduos padronizados seguem uma distribuição  $t$  com  $n - 2$  graus de liberdade e é dessa distribuição que se deveriam obter os quantis teóricos para a construção do gráfico QQ. No entanto, para valores de  $n$  maiores que 20 ou 30, os quantis da distribuição  $t$  se aproximam daqueles da distribuição Normal, tornando-as intercambiáveis para a construção do correspondente gráfico

QQ. Na prática, mesmo com valores de  $n$  menores, é comum construir esses gráficos baseados na distribuição Normal.

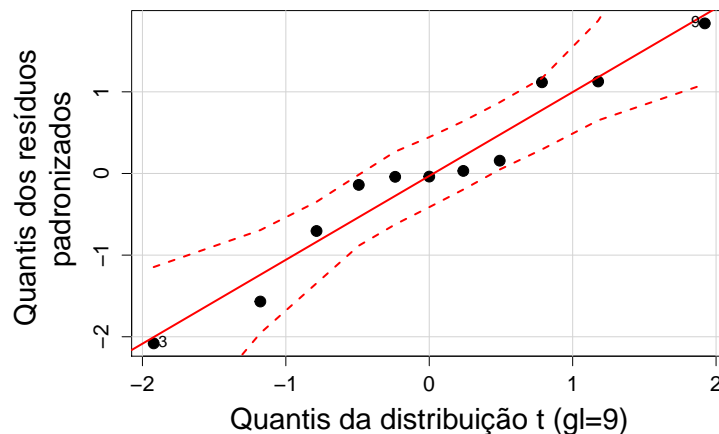
Gráficos QQ (com bandas de confiança) correspondentes aos ajustes de modelos de regressão linear simples aos dados das Tabelas 6.1 e 6.3 (com e sem a eliminação da observação influente) estão respectivamente apresentados nas Figuras 6.13, 6.14 e 6.15.



**Figura 6.13:** Gráfico QQ correspondente ao ajuste do modelo de regressão linear simples aos dados da Tabela 6.1.



**Figura 6.14:** Gráfico QQ correspondente ao ajuste do modelo de regressão linear simples aos dados da Tabela 6.3 (com todas as observações).



**Figura 6.15:** Gráfico QQ correspondente ao ajuste do modelo de regressão linear simples aos dados da Tabela 6.3 (sem a observação influente).

Nos três casos, não há evidências fortes contra a suposição de normalidade dos erros (apesar do ponto fora da banda de confiança salientado na Figura 6.14). Especialmente com poucos dados, é difícil observar casos em que essa suposição não parece razoável.

Convém lembrar que se o objetivo for avaliar a inclinação da reta de regressão ( $\beta$ ), ou seja, avaliar a taxa com que a resposta esperada muda por unidade de variação da variável explicativa, essa suposição de normalidade da variável resposta tem efeito marginal na distribuição do estimador de mínimos quadrados desse parâmetro ( $\hat{\beta}$ ). Pode-se mostrar que esse estimador segue uma distribuição **aproximadamente** Normal quando o tamanho da amostra é suficientemente grande, por exemplo, 30 ou mais, mesmo quando a suposição de normalidade para a variável resposta não for verdadeira. Mais detalhes e uma referência estão apresentados na Nota de Capítulo 1.

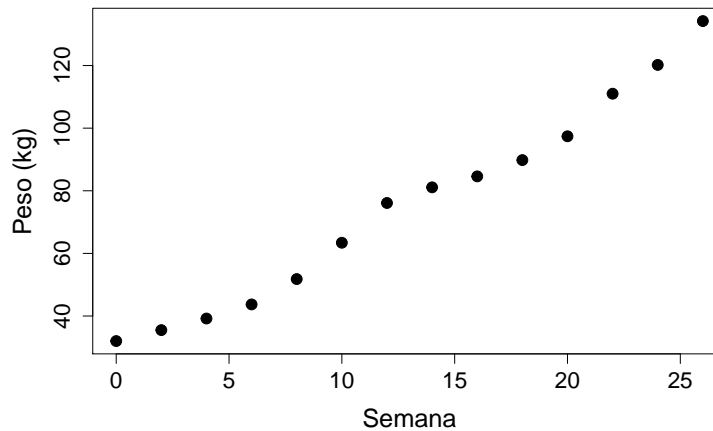
Em geral, a suposição de que os erros do modelo linear são não correlacionados deve ser questionada com base no procedimento de coleta de dados. Como ilustração, consideramos dois exemplos nos quais essa característica justifica a dúvida. O primeiro exemplo é um caso simples dos problemas abordados pelas técnicas de análise de **séries temporais**; o segundo exemplo é o caso típico de análise de **dados longitudinais** e será apresentado na Seção 6.4. Ambos são apresentados aqui com a finalidade de mostrar como as técnicas de análise de regressão podem ser empregadas para analisar modelos mais gerais do que aqueles governados pelo paradigma de Gauss-Markov (ver Nota de Capítulo 1).

**Exemplo 6.5:** Na Tabela 6.4 apresentamos valores do peso de um bezerro observado a cada duas semanas após o nascimento com o objetivo de avaliar seu crescimento nesse período. O gráfico de dispersão correspondente está

disposto na Figura 6.16.

**Tabela 6.4:** Peso (kg) de um bezerro nas primeiras 26 semanas após o nascimento

Semana	Peso	Semana	Peso
0	32,0	14	81,1
2	35,5	16	84,6
4	39,2	18	89,8
6	43,7	20	97,4
8	51,8	22	111,0
10	63,4	24	120,2
12	76,1	26	134,2



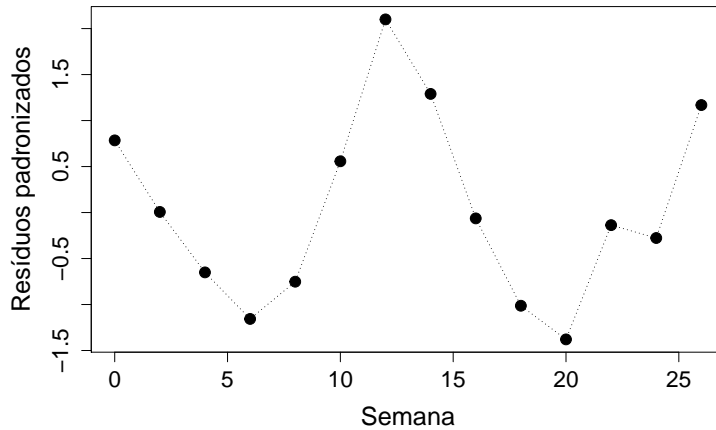
**Figura 6.16:** Gráfico de dispersão para os dados da Tabela 6.4

Tendo em vista o gráfico de dispersão apresentado na Figura 6.16, um possível modelo seria

$$y_t = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + e_t, \quad (6.10)$$

$i = 1, \dots, 14$  em que  $y_t$  representa o peso do bezerro no instante  $t$ ,  $\alpha$  denota o valor esperado de seu peso ao nascer,  $\beta$  e  $\gamma$  representam os coeficientes dos termos linear e quadrático da curva que rege a variação temporal do peso esperado no intervalo de tempo estudado e  $e_t$  denota um erro aleatório com média 0 e variância  $\sigma^2$ . Utilizamos  $t$  como índice para salientar que as observações são colhidas sequencialmente ao longo do tempo.

O coeficiente de determinação ajustado,  $R_{aj}^2 = 0,987$  indica que o ajuste (por mínimos quadrados) do modelo com  $\hat{\alpha} = 29,9$  (2,6),  $\hat{\beta} = 2,7$  (2,5) e  $\hat{\gamma} = 0,05$  (0,02) é excelente (sob essa ótica, obviamente). Por outro lado, o gráfico de resíduos apresentado na Figura 6.17 mostra sequências de resíduos positivos seguidas de sequências de resíduos negativos, sugerindo uma possível correlação positiva entre eles (**autocorrelação**).



**Figura 6.17:** Resíduos estudentizados obtidos do ajuste do modelo (6.10)

Uma maneira de contornar esse problema, é modificar os componentes aleatórios do modelo para incorporar essa possível autocorrelação nos erros. Nesse contexto, podemos considerar o modelo (6.10) com

$$e_t = \rho e_{t-1} + u_t, \quad t = 1, \dots, n \quad (6.11)$$

em que  $u_t \sim N(0, \sigma^2)$ ,  $t = 1, \dots, n$  são variáveis aleatórias independentes e  $e_0$  é uma constante (geralmente igual a zero). Essas suposições implicam que  $\text{Var}(e_t) = \sigma^2 / (1 - \rho^2)$  e que  $\text{Cov}(e_t, e_{t-s}) = \rho^s [\sigma^2 / (1 - \rho^2)]$ .

Para testar a hipótese de que os erros são não correlacionados pode-se utilizar a **estatística de Durbin-Watson**:

$$D = \frac{\sum_{t=2}^n (\hat{e}_t - \hat{e}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n \hat{e}_t^2}, \quad (6.12)$$

em que  $\hat{e}_t$ ,  $t = 1, \dots, n$  são os resíduos obtidos do ajuste do modelo (6.10) por mínimos quadrados. Expandindo (6.12) obtemos

$$\begin{aligned} D &= \frac{\sum_{t=2}^n \hat{e}_t^2}{\sum_{t=1}^n \hat{e}_t^2} + \frac{\sum_{t=2}^n \hat{e}_{t-1}^2}{\sum_{t=1}^n \hat{e}_t^2} - 2 \frac{\sum_{t=2}^n \hat{e}_t \hat{e}_{t-1}}{\sum_{t=1}^n \hat{e}_t^2} \\ &\approx 2 - 2 \frac{\sum_{t=2}^n \hat{e}_t \hat{e}_{t-1}}{\sum_{t=1}^n \hat{e}_t^2}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Se os resíduos não forem correlacionados, então  $\sum_{t=2}^n \hat{e}_t \hat{e}_{t-1} \approx 0$  e consequentemente,  $D \approx 2$ ; se, por outro lado, os resíduos tiverem uma forte correlação positiva, esperamos que  $\sum_{t=2}^n \hat{e}_t \hat{e}_{t-1} \approx \sum_{t=2}^n \hat{e}_t^2$  e então  $D \approx 0$ ; finalmente, se os resíduos tiverem uma grande correlação negativa, esperamos que  $\sum_{t=2}^n \hat{e}_t \hat{e}_{t-1} \approx -\sum_{t=2}^n \hat{e}_t^2$  e nesse caso,  $D \approx 4$ . Durbin and Watson (1950, 1951, 1971) produziram tabelas da distribuição da estatística  $D$  que podem ser utilizadas para avaliar a suposição de que os erros não são correlacionados.

O valor da estatística de Durbin-Watson para os dados do Exemplo 6.5 sob o modelo (6.10) é  $D = 0,91$  ( $p < 0,0001$ ), sugerindo um alto grau de autocorrelação dos resíduos. Uma estimativa do coeficiente de autocorrelação  $\rho$  é 0,50. Nesse caso, o modelo (6.10) - (6.11) poderá ser ajustado pelo **método de mínimos quadrados generalizados** ou por métodos de **Séries Temporais**. Para detalhes sobre essas técnicas o leitor pode consultar Kutner et al. (2004) ou Morettin e Tolói (2018), respectivamente.

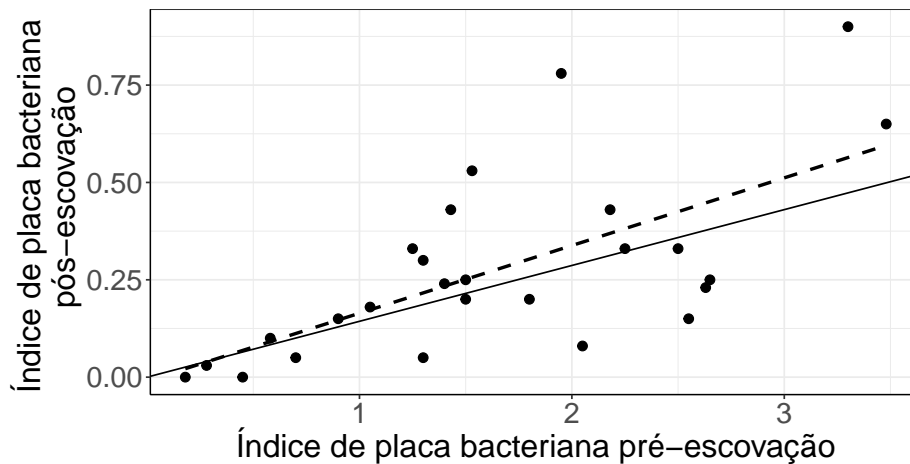
**Exemplo 6.6:** Os dados dispostos na Tabela 6.5 são extraídos de um estudo conduzido na Faculdade de Odontologia da Universidade de São Paulo e correspondem a medidas de um índice de placa bacteriana obtidas de 26 crianças em idade pré-escolar, antes e depois do uso de uma escova de dentes experimental (Hugger) e de uma escova convencional (dados disponíveis no arquivo `placa`). O objetivo do estudo era comparar os dois tipos de escovas com respeito à eficácia na remoção da placa bacteriana. Os dados do estudo foram analisados por Singer and Andrade (1997) e são apresentados aqui apenas com intuito didático para mostrar a flexibilidade dos modelos de regressão. Analisamos somente os dados referentes à escova experimental e não incluímos a variável sexo dado que a análise dos dados completos não indicou diferenças entre meninas e meninos com relação à remoção da placa bacteriana.

**Tabela 6.5:** Índices de placa bacteriana antes e depois da escovação com uma escova de dentes experimental

ident	antes	depois	ident	antes	depois
1	2,18	0,43	14	1,40	0,24
2	2,05	0,08	15	0,90	0,15
3	1,05	0,18	16	0,58	0,10
4	1,95	0,78	17	2,50	0,33
5	0,28	0,03	18	2,25	0,33
6	2,63	0,23	19	1,53	0,53
7	1,50	0,20	20	1,43	0,43
8	0,45	0,00	21	3,48	0,65
9	0,70	0,05	22	1,80	0,20
10	1,30	0,30	23	1,50	0,25
11	1,25	0,33	24	2,55	0,15
12	0,18	0,00	25	1,30	0,05
13	3,30	0,90	26	2,65	0,25

Embora as duas variáveis (índices de placa bacteriana antes e depois da escovação) correspondam essencialmente a variáveis respostas, é possível considerar uma **análise condicional**, tomando o índice pré escovação como variável explicativa ( $x_i$ ) e o índice pós escovação como variável resposta ( $y_i$ ). Nesse contexto, a pergunta que se deseja responder é “qual é o valor esperado do índice pós escovação **dado** um determinado valor do índice pré escovação?”.





**Figura 6.18:** Gráfico de dispersão para os dados da Tabela 6.5; curva sólida para o modelo de regressão linear simples sem intercepto e curva interrompida para o modelo linearizado (6.20).

O gráfico de dispersão dos dados da Tabela 6.5 está apresentado na Figura 6.18 (a linha tracejada corresponde ao modelo de regressão linear simples ajustado aos dados originais) em que se pode notar um aumento da dispersão do índice de placa observado pós escovação com o aumento do índice pré escovação. Isso invalida a adoção de um modelo como (6.1) cujo ajuste exige homoscedasticidade (variância constante).

Singer and Andrade (1997) analisaram os dados do estudo completo por meio de um modelo não linear da forma

$$y_i = \beta x_i^\gamma e_i, \quad i = 1, \dots, 26, \quad (6.14)$$

em que  $\beta > 0$  e  $\gamma$  são parâmetros desconhecidos e  $e_i$  são erros (multiplicativos) positivos, justificando-o por meio das seguintes constatações:

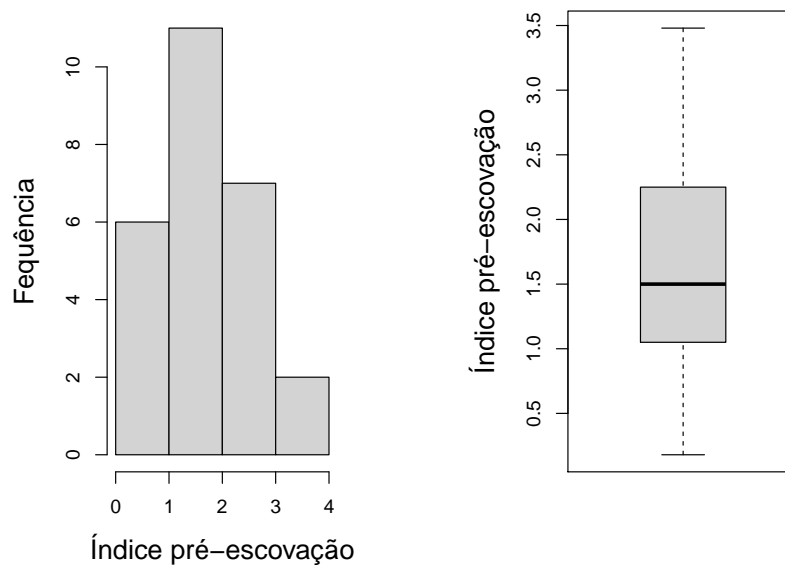
- i) os índices de placa bacteriana são positivos ou nulos;
- ii) a relação entre  $X$  e  $Y$  deve ser modelada por uma função que passa pela origem (uma medida nula de  $X$  implica uma medida nula de  $Y$ );
- iii) espera-se que a variabilidade de  $Y$  seja menor para valores menores de  $X$ , pois o índice de placa pós escovação deve ser menor ou igual ao índice pré escovação.

Note que  $y/x$  denota a taxa de redução do índice de placa e  $E(y)/x$  denota a taxa esperada de redução do índice de placa. Por (6.14), temos

$$\frac{E(y_i)}{x_i} = \frac{\beta x_i^\gamma E(e_i)}{x_i} = \beta x_i^{\gamma-1} E(e_i),$$

lembrando que  $E(e_i) > 0$ . Logo, se  $\gamma = 1$ , essa taxa de redução esperada é constante; se  $\gamma > 1$  a taxa de redução esperada aumenta e se  $\gamma < 1$ , ela diminui com o aumento do índice de placa  $x_i$ . Por outro lado, quanto menor for  $\beta$  ( $0 < \beta < 1$ ), maior será a redução do índice de placa.

Na Figura 6.19 apresentamos o histograma de  $X$  e o respectivo *boxplot*, mostrando que a distribuição do índice de placa pré escovação é moderadamente assimétrica à direita. Embora não faça sentido construir o histograma e o *boxplot* correspondente ao índice de placa bacteriana pós escovação  $Y$  (pois sob o modelo, sua média depende de  $X$ ), é razoável supor que a distribuição condicional de  $Y$  dado  $X$  também seja assimétrica.



**Figura 6.19:** Histograma e *boxplot* para o índice de placa bacteriana pré escovação.

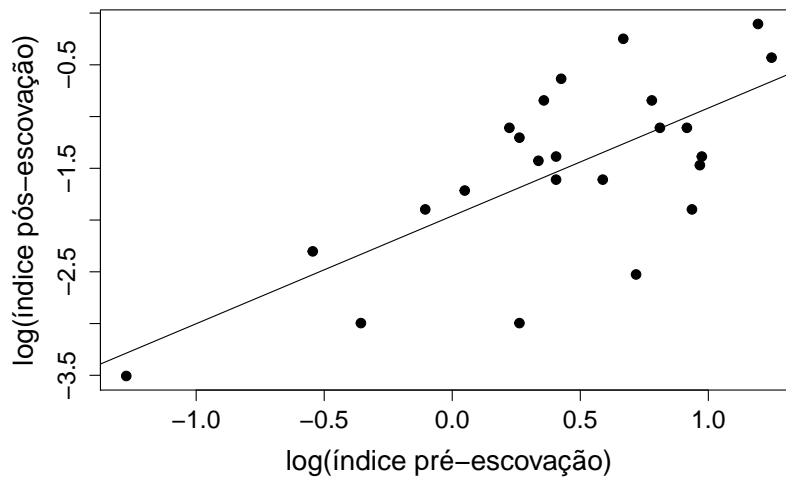
Esses resultados sugerem que uma transformação da forma  $z^{(\theta)}$ , com  $0 \leq \theta < 1$ , pode ser adequada para tornar os dados mais simétricos e estabilizar a variância (consulte a Seção 3.10 para detalhes sobre transformações de variáveis). Poderíamos considerar, por exemplo, os casos  $\theta = 0$ , ou seja, a transformação logarítmica,  $\theta = 1/3$  (raiz cúbica) ou  $\theta = 1/2$  (raiz quadrada). A transformação logarítmica é mais conveniente, pois permite a **linearização** do modelo, deixando-o no formato de um modelo de regressão linear simples para o qual dispomos de técnicas padrão de ajuste. Esse modelo, no entanto, exige que eliminemos os dois pares de casos para os quais

$Y = 0$ , reduzindo para 24 o número de observações. O modelo resultante obtido com a transformação logarítmica é

$$y_i^* = \beta^* + \gamma x_i^* + e_i^*, \quad i = 1, \dots, 24, \quad (6.15)$$

em que  $y_i^* = \log(y_i)$ ,  $x_i^* = \log(x_i)$ ,  $\beta^* = \log \beta$  e erros  $e_i^* = \log(e_i)$ , que supomos ter média 0 e variância  $\sigma^2$ . Se, adicionalmente, supusermos que  $e_i^*$  tem distribuição Normal, os erros originais,  $e_i$  terão distribuição log-normal, definida apenas para valores positivos, o que é compatível com as suposições adotadas para o modelo (6.14).

Na Figura 6.20 apresentamos o diagrama de dispersão entre  $\log x_i$  e  $\log y_i$  sugerindo que a transformação induz uma menor dispersão dos dados, embora ainda haja um maior acúmulo de pontos para valores “grandes” de  $X$ .



**Figura 6.20:** Gráfico de dispersão para os dados da Tabela 6.5 sob transformação logarítmica.

Usando o método de mínimos quadrados, a reta ajustada é

$$\hat{y}_i^* = -1,960 + 1,042x_i^*. \quad (6.16)$$

que corresponde a

$$\hat{y}_i = 0,141x_i^{1,042}, \quad (6.17)$$

na concepção original, já que  $\hat{\beta} = \exp(\hat{\beta}^*) = \exp(-1,960) = 0.141$ . Note que  $\hat{\beta} < 1$  e  $\hat{\gamma}$  tem valor muito próximo de 1. Podemos testar a hipótese  $\gamma = 1$ , para avaliar se esse resultado traz evidência suficiente para concluir que a taxa de redução do índice de placa bacteriana na população para a qual se deseja fazer inferência é constante. Para testar  $H_0 : \gamma = 1$  contra a alternativa  $H_A : \gamma > 1$  usamos a estatística

$$t = \frac{\hat{\gamma} - 1}{S / \sqrt{\sum (x_i^* - \bar{x}^*)^2}}$$

cuja distribuição sob  $H_0$  é  $t$  com  $n - 2$  graus de liberdade (veja a Seção 5.2 e Bussab e Morettin, 2017, por exemplo). O valor-p correspondente ao valor observado da estatística  $t$  é

$$p = P(\hat{\gamma} > 1,042) = P\left[t_{22} > \frac{1,042 - 1}{S} \sqrt{\sum (x_i^* - \bar{x}^*)^2}\right].$$

Como  $\sum_i x_i^* = 10,246$ ,  $\bar{x}^* = 0,427$ ,  $\sum_i y_i^* = -36,361$ ,  $\bar{y}^* = -1,515$ ,  $\sum_i (x_i^* - \bar{x}^*)^2 = \sum_i (x_i^*)^2 - 24(\bar{x}^*)^2 = 12,149 - 24 \times 0,182 = 7,773$ , obtemos  $S^2 = 7,773/22 = 0,353$  e  $S = 0,594$ . Então

$$p = P[t_{22} > 0,42 \times 2,788/0,594] = P[t_{22} > 1,971] \approx 0,06$$

indicando que não há evidências fortes para rejeitar  $H_0$ . Como consequência, podemos dizer que a taxa esperada de redução da placa,

$$E(y_i)/x_i = \beta E(e_i),$$

é constante. Como concluímos que  $\gamma = 1$ , o modelo linear nos logaritmos das variáveis (6.15) fica reduzido a

$$y_i^* = \beta^* + x_i^* + e_i^*, \quad (6.18)$$

e para estimar  $\beta^*$  basta considerar a soma de quadrados dos erros

$$Q(\beta^*) = \sum_i (y_i^* - \beta^* - x_i^*)^2,$$

derivá-la em relação a  $\beta^*$  e obter o estimador de mínimos quadrados de  $\beta^*$  como

$$\hat{\beta}^* = \bar{y}^* - \bar{x}^*.$$

No nosso caso,  $\hat{\beta}^* = -1,515 - 0,427 = -1,942$ , e o modelo ajustado é

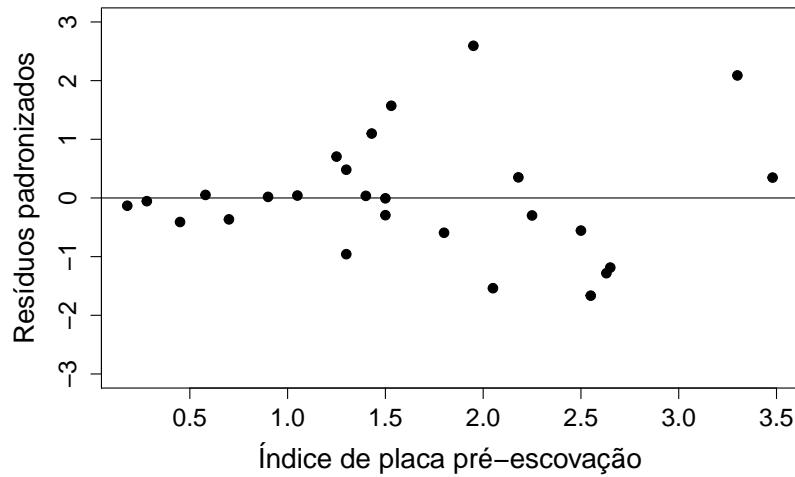
$$\hat{y}_i^* = -1,942 + x_i^* \quad (6.19)$$

que em termos das variáveis originais corresponde a

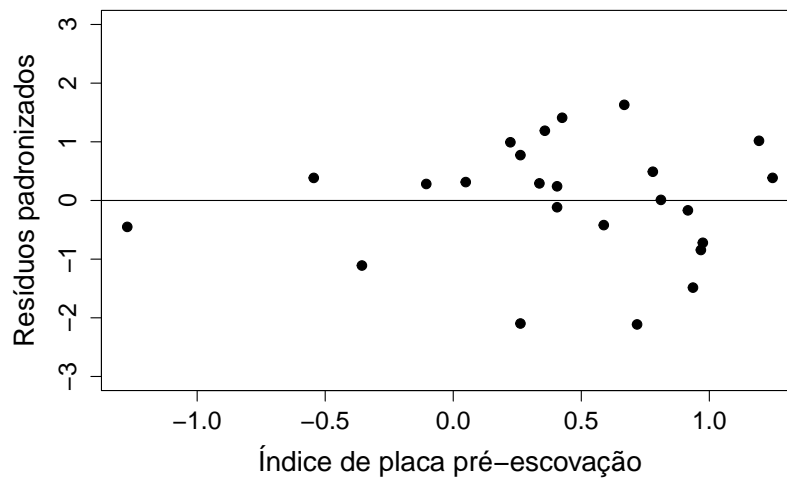
$$\hat{y}_i = 0,1434x_i, \quad i = 1, \dots, 24. \quad (6.20)$$

Esse modelo corresponde a uma reta que passa pela origem e está representada por meio de uma linha sólida na Figura 6.18.

Os resíduos dos modelos (6.14) e (6.15) estão representados nas Figuras 6.21 e 6.22, respectivamente. Esses gráficos sugerem que os resíduos dos dois modelos estão aleatoriamente distribuídos em torno de zero, mas não são totalmente compatíveis com a distribuição adotada, pois sua variabilidade não é constante. Para uma análise do conjunto de dados do qual este exemplo foi extraído e em que a suposição de heteroscedasticidade é levada em conta, o leitor deve consultar Singer and Andrade (1997).



**Figura 6.21:** Gráfico de resíduos padronizados para o ajuste do modelo de regressão linear aos dados da Tabela 6.5.



**Figura 6.22:** Gráfico de resíduos padronizados para o ajuste do modelo de regressão linear aos dados logaritmizados da Tabela 6.5.

### 6.3 Regressão linear múltipla

Com  $p$  variáveis explicativas  $X_1, \dots, X_p$  e uma variável resposta  $Y$ , o **modelo de regressão linear múltipla** é expresso como

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_p x_{ip} + e_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.21)$$

O coeficiente  $\beta_0$  é o chamado **intercepto** e a variável explicativa associada a ele,  $x_{i0}$ , tem valor constante igual a 1. Para completar a especificação do modelo, supõe-se que os erros  $e_i$  são não correlacionados, tenham média zero e variância comum (desconhecida)  $\sigma^2$ .

Se quisermos testar hipóteses a respeito dos coeficientes do modelo ou construir intervalos de confiança para eles por meio de estatísticas com distribuições exatas, a suposição de que a distribuição de frequências dos erros é Normal deve ser adicionada. O modelo (6.21) tem  $p + 2$  parâmetros desconhecidos, a saber,  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$  e  $\sigma^2$ , que precisam que ser estimados com base nos dados observados.

Definindo  $x_{i0} = 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ , podemos escrever (6.21) na forma

$$y_i = \sum_{j=0}^p \beta_j x_{ij} + e_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Minimizando a soma dos quadrados dos erros  $e_i$ , *i.e.*,

$$Q(\beta_0, \dots, \beta_p) = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - \sum_{j=0}^p \beta_j x_{ij}]^2,$$

em relação a  $\beta_0, \dots, \beta_p$  obtemos os **estimadores de mínimos quadrados**  $\hat{\beta}_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ , de modo que

$$\hat{y}_i = \sum_{j=0}^p \hat{\beta}_j x_{ij}, \quad i = 1, \dots, n$$

são os **valores estimados** (sob o modelo). Os termos

$$\hat{e}_i = y_i - \hat{y}_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (6.22)$$

são os **resíduos**, cuja análise é fundamental para avaliar se modelos da forma (6.21) se ajustam bem aos dados.

Para efeitos computacionais os dados correspondentes a problemas de regressão linear múltipla devem ser dispostos como indicado na Tabela 6.6.

**Tabela 6.6:** Matriz de dados

$Y$	$X_1$	$X_2$	$\cdots$	$X_p$
$y_1$	$x_{11}$	$x_{12}$	$\cdots$	$x_{1p}$
$y_2$	$x_{21}$	$x_{22}$	$\cdots$	$x_{2p}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$y_n$	$x_{n1}$	$x_{n2}$	$\cdots$	$x_{np}$

Em geral, a variável correspondente ao intercepto (que é constante e igual a um) não precisa ser incluída na matriz de dados; os pacotes computacionais incluem-na naturalmente no modelo a não ser que se indique o contrário.

Para facilitar o desenvolvimento metodológico, convém expressar o modelo na forma matricial

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e}. \quad (6.23)$$

em que  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^\top$  é o vetor cujos elementos são os valores da variável resposta  $Y$ ,  $\mathbf{X} = (\mathbf{1}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p)$  é a matriz cujos elementos são os valores das variáveis explicativas, com  $\mathbf{x}_j = (x_{1j}, \dots, x_{nj})^\top$  contendo os valores da variável  $X_j$ ,  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p)^\top$  contém os respectivos coeficientes e  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)^\top$  é o vetor de **erros aleatórios**.

**Exemplo 6.7:** Os dados da Tabela 6.7 (disponíveis no arquivo `esteira`) foram extraídos de um estudo em que um dos objetivos era avaliar o efeito do índice de massa corpórea (IMC) e da carga aplicada numa esteira ergométrica no consumo de oxigênio (VO2) numa determinada fase do exercício. Para associar a distribuição do consumo de oxigênio ( $Y$ ) com as informações

**Tabela 6.7:** VO2, IMC e carga na esteira ergométrica para 28 indivíduos

ident	VO2 (mL/kg/min)	IMC (kg/m <sup>2</sup> )	carga (W)	ident	VO2 (mL/kg/min)	IMC (kg/m <sup>2</sup> )	carga (W)
1	14,1	24,32	71	15	22,0	22,45	142
2	16,3	27,68	91	16	13,2	30,86	62
3	9,9	23,93	37	17	16,2	25,79	86
4	9,5	17,50	32	18	13,4	33,56	86
5	16,8	24,46	95	19	11,3	22,79	40
6	20,4	26,41	115	20	18,7	25,65	105
7	11,8	24,04	56	21	20,1	24,24	105
8	29,0	20,95	104	22	24,6	21,36	123
9	20,3	19,03	115	23	20,5	24,48	136
10	14,3	27,12	110	24	29,4	23,67	189
11	18,0	22,71	105	25	22,9	21,60	135
12	18,7	20,33	113	26	26,3	25,80	189
13	9,5	25,34	69	27	20,3	23,92	95
14	17,5	29,93	145	28	31,0	24,24	151

sobre IMC ( $X_1$ ) e carga na esteira ergométrica ( $X_2$ ), consideramos o seguinte modelo de regressão linear múltipla:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + e_i, \quad (6.24)$$

$i = 1, \dots, 28$  com as suposições usuais sobre os erros (média zero, variância constante  $\sigma^2$  e não correlacionados). Aqui, o parâmetro  $\beta_1$  representa a variação esperada no VO2 por unidade do IMC para indivíduos com a mesma carga na esteira. O parâmetro  $\beta_2$  tem interpretação semelhante com a substituição de IMC por carga na esteira e carga na esteira por IMC. Como não temos dados para indivíduos com IMC menor que 17,50 e carga menor que 32, o parâmetro  $\beta_0$  deve ser interpretado como um fator de ajuste do plano que aproxima a verdadeira função que relaciona o valor esperado da variável resposta com as variáveis explicativas na região em que há dados disponíveis. Se substituíssemos  $X_1$  por  $X_1 - 17,50$  e  $X_2$  por  $X_2 - 32$ , o termo  $\beta_0$  corresponderia ao VO2 esperado para um indivíduo com IMC = 17,50 submetido a uma carga igual a 32 na esteira ergométrica.

O modelo (6.24) pode ser expresso na forma matricial (6.23) com

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 14,1 \\ 16,3 \\ \vdots \\ 31,0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 24,32 & 71 \\ 1 & 27,68 & 91 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 24,34 & 151 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{28} \end{bmatrix}.$$

Para problemas com diferentes tamanhos de amostra ( $n$ ) e diferentes números de variáveis explicativas ( $p$ ), basta alterar o número de elementos do vetor de respostas  $\mathbf{y}$  e do vetor de coeficientes  $\boldsymbol{\beta}$  e modificar a matriz com os valores das variáveis explicativas, alterando o número de linhas e colunas convenientemente. Note que o modelo de regressão linear simples também pode ser expresso em notação matricial; nesse caso, a matriz  $\mathbf{X}$  terá 2 colunas e o vetor  $\boldsymbol{\beta}$ , dois elementos ( $\alpha$  e  $\beta$ ).

Uma das vantagens da expressão do modelo de regressão linear múltipla em notação matricial é que o método de mínimos quadrados utilizado para estimar o vetor de parâmetros  $\boldsymbol{\beta}$  no modelo (6.23) pode ser desenvolvido de maneira universal e corresponde à minimização da forma quadrática

$$Q(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{e}^\top \mathbf{e} = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^\top (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^n e_i^2. \quad (6.25)$$

Por meio da utilização de operações matriciais, obtém-se a seguinte expressão para os estimadores de mínimos quadrados

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{y}. \quad (6.26)$$

Sob a suposição de que  $E(\mathbf{e}) = \mathbf{0}$  e  $\text{Var}(\mathbf{e}) = \sigma^2 \mathbf{I}_n$ , em que  $\mathbf{I}_n$  denota a matriz identidade de dimensão  $n$ , temos

- i)  $E(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{\beta}$ ,
- ii)  $\text{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma^2 (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1}$ .

Além disso, se adicionarmos a suposição de que os erros têm distribuição Normal, pode-se mostrar que o estimador (6.26) tem uma distribuição Normal multivariada, o que permite a construção de intervalos de confiança para ou testes de hipóteses sobre os elementos (ou combinações lineares deles) de  $\boldsymbol{\beta}$  por meio de estatísticas com distribuições exatas. Mesmo sem a suposição de normalidade para os erros, um recurso ao **Teorema Limite Central** (ver Nota de Capítulo 1) permite mostrar que a distribuição **aproximada** do estimador (6.26) é Normal, com média a  $\boldsymbol{\beta}$  e matriz de covariâncias  $\sigma^2 (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1}$ .

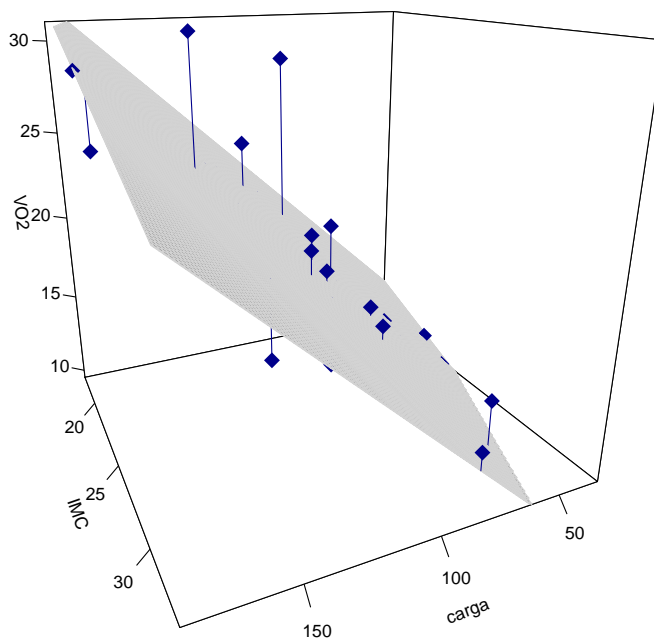
Um estimador não enviesado de  $\sigma^2$  é

$$\begin{aligned} S^2 &= [n - (p + 1)]^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})^\top (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) \\ &= [n - (p + 1)]^{-1} \mathbf{y}^\top [\mathbf{I}_n - \mathbf{X}(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top] \mathbf{y}. \end{aligned}$$

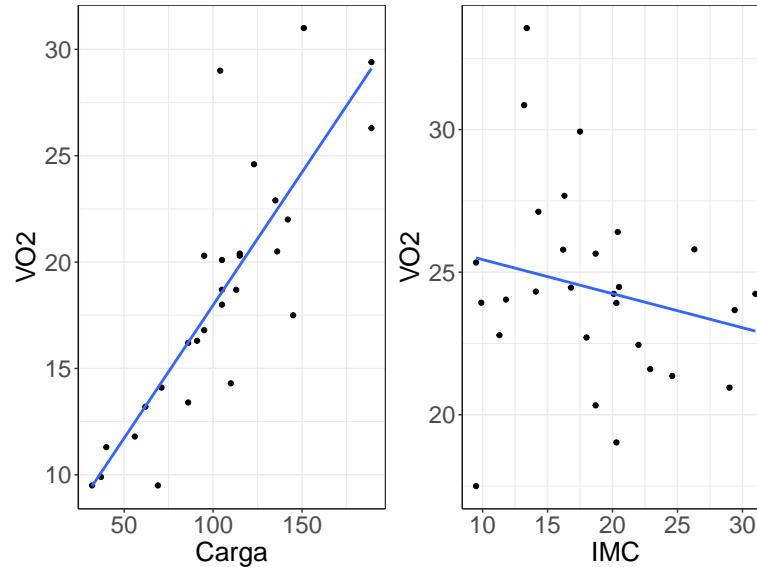


Com duas variáveis explicativas, o gráfico de dispersão precisa ser construído num espaço tridimensional, que ainda pode ser representado em duas dimensões; para mais do que 2 variáveis explicativas, o gráfico de dispersão requer um espaço com mais do que três dimensões que não pode ser representado no plano. Por isso, uma alternativa é construir gráficos de dispersão entre a variável resposta e cada uma das variáveis explicativas.

Para os dados da Tabela 6.7, o gráfico de dispersão com três dimensões incluindo o plano correspondente ao modelo de regressão múltipla ajustado está disposto na Figura 6.23. Os gráficos de dispersão correspondentes a cada uma das duas variáveis explicativas estão dispostos na Figura 6.24 e indicam que a distribuição do VO2 varia positivamente com a carga na esteira e negativamente com o IMC.



**Figura 6.23:** Gráficos de dispersão tridimensional para os dados da Tabela 6.7.



**Figura 6.24:** Gráficos de dispersão para os dados da Tabela 6.7.

O uso da função `lm()` conduz aos seguintes resultados.

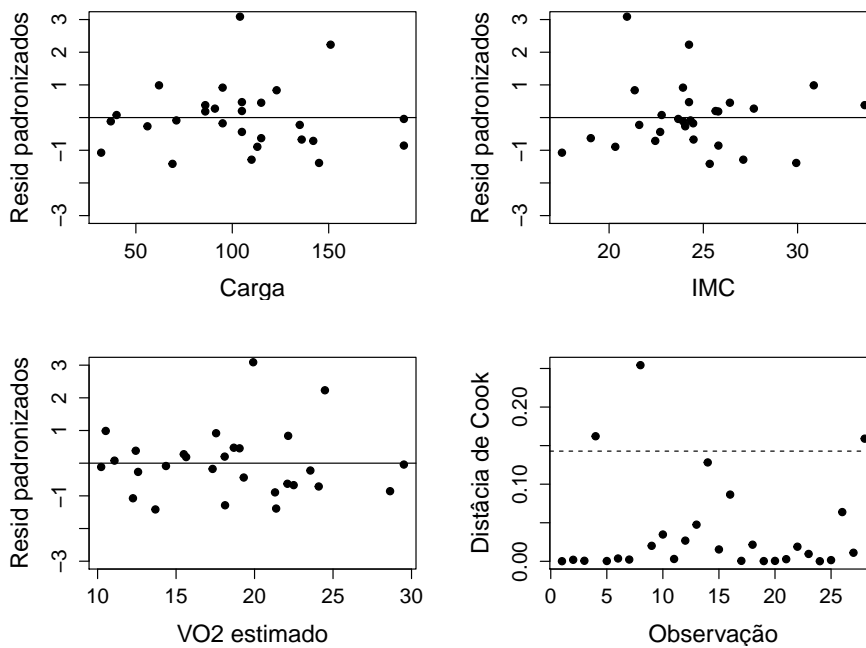
```
lm(formula = VO2 ~ IMC + carga, data = esteira)
Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 15.44726    4.45431   3.468  0.00191 **
IMC          -0.41317    0.17177  -2.405  0.02389 *
carga         0.12617    0.01465   8.614 5.95e-09 ***
Residual standard error: 3.057 on 25 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.759, Adjusted R-squared:  0.7397
F-statistic: 39.36 on 2 and 25 DF,  p-value: 1.887e-08
```

Esses resultados indicam que os coeficientes (erro padrão) correspondentes ao ajuste do modelo (6.24) aos dados da Tabela 6.7 são  $\hat{\beta}_0 = 15,45$  (4,45),  $\hat{\beta}_1 = 0,13$  (0,01) e  $\hat{\beta}_2 = -0,41$  (0,17). Então, segundo o modelo, o valor esperado do VO2 para indivíduos com o mesmo IMC aumenta de 0,13 unidades para cada aumento de uma unidade da carga na esteira; similarmente, o valor esperado do VO2 para indivíduos submetidos à mesma carga na esteira diminui de 0,41 unidades com o aumento de uma unidade no IMC.

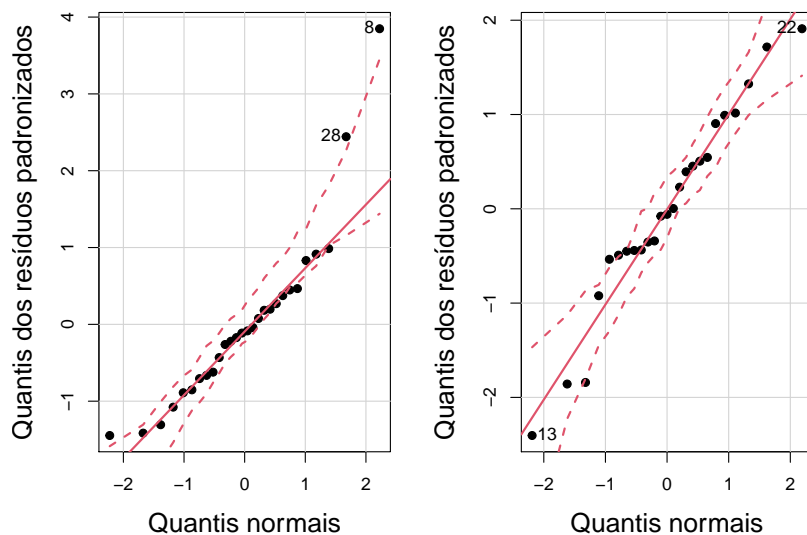
Embora o coeficiente de determinação  $R_{aj}^2 = 0,74$  sugira a adequação do modelo, convém avaliá-la por meio de outras ferramentas diagnósticas. No caso de regressão linear múltipla, gráficos de resíduos podem ter cada uma das variáveis explicativas ou os valores ajustados no eixo das abscissas. Para o exemplo, esses gráficos estão dispostos na Figura 6.25 juntamente com o gráfico contendo as distâncias de Cook.

Os gráficos de resíduos padronizados não indicam um comprometimento da hipótese de homoscedasticidade embora seja possível suspeitar de dois ou três pontos discrepantes (correspondentes aos indivíduos com identificação

4, 8 e 28) que também são salientados no gráfico das distâncias de Cook. A identificação desses pontos está baseada num critério bastante utilizado (não sem controvérsias) na literatura em que resíduos associados a distâncias de Cook maiores que  $4/n$  [ou  $4/(n - p)$ ] são considerados resíduos associados a **pontos influentes**. Em todo o caso, convém lembrar que o propósito dessas ferramentas é essencialmente exploratório e que as decisões sobre a exclusão de pontos discrepantes ou a escolha do modelo dependem de outras considerações. Esses pontos também fazem com que a suposição de normalidade possa ser posta em causa como se observa pelo painel esquerdo da Figura 6.26.



**Figura 6.25:** Gráficos de resíduos padronizados e distâncias de Cook para o ajuste do modelo (6.24) aos dados da Tabela 6.7.

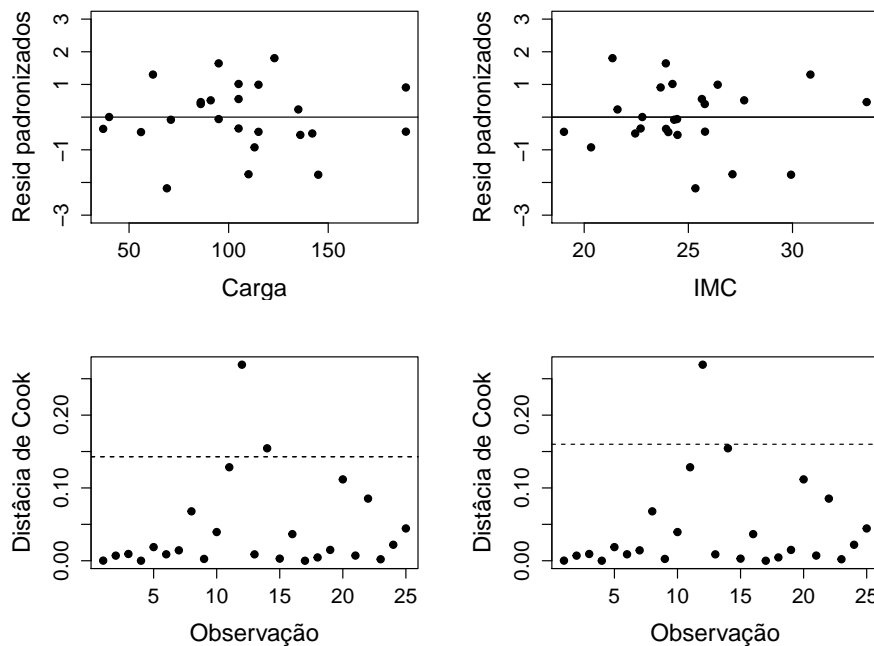


**Figura 6.26:** Gráficos QQ correspondentes ao ajuste do modelo (6.24) aos dados da Tabela 6.7 com (painel esquerdo) e sem (painel direito) os pontos com rótulos 4, 8 e 28.

O ajuste do modelo aos 25 dados obtidos com a exclusão dos pontos rotulados 4, 8 e 28 é obtido por meio dos comandos

```
esteirasem <- subset(dados, (dados$ident!=4 & dados$ident!=8 &
                             dados$ident!=28))
esteirasem.fit <- lm(V02 ~ IMC + carga, data = esteirasem)
summary(esteirasem.fit)
Coefficients:
                Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  14.89307     3.47071   4.291 0.000296 ***
IMC           -0.35631     0.12606  -2.827 0.009823 **
carga         0.11304     0.01052  10.743 3.23e-10 ***
Residual standard error: 1.987 on 22 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.8581, Adjusted R-squared:  0.8452
```

O coeficiente de determinação correspondente é  $R_{aj}^2 = 0,85$ . Os gráficos de dispersão, resíduos padronizados e de distâncias de Cook correspondentes estão dispostos na Figura 6.27 e também sugerem um ajuste melhor.



**Figura 6.27:** Gráficos de dispersão, resíduos padronizados e de distância de Cook correspondentes ao ajuste do modelo (6.24) aos dados da Tabela 6.7 sem os pontos com rótulos 4, 8 e 28.

Uma estimativa do valor esperado do VO<sub>2</sub> **para indivíduos** com IMC = 25 submetido a uma carga na esteira igual a 100 e o correspondente intervalo de confiança podem ser obtidos por meio dos comandos

```
> beta0 <- esteirasem.fit$coefficients[1]
> beta1 <- esteirasem.fit$coefficients[2]
> beta2 <- esteirasem.fit$coefficients[3]
>
> yestim <- beta0 + beta1*25 + beta2*100
> round(yestim, 2)
  17.29
> s <- summary(esteirasem.fit)$sigma
> xtxinv <-summary(esteirasem.fit)$cov.unscaled
> s
[1] 1.987053
> xtxinv
      (Intercept)          IMC          carga
(Intercept)  3.050826884 -1.044085e-01 -3.970913e-03
IMC          -0.104408474  4.024411e-03  4.174432e-05
carga       -0.003970913  4.174432e-05  2.804206e-05
> xval <- c(1, 25, 100)
> varyestim <-s^2*xval%*%xtxinv%*%xval
> liminfic95 <- yestim - 1.96**sqrt(varyestim)
```

```

> limsupic95 <- yestim + 1.96**sqrt(varyestim)
> round(liminfic95, 2)
  15.98
> round(limsupic95, 2)
  18.6

```

A previsão para o valor do VO2 de **um indivíduo** é a mesma que aquela obtida para a estimação do correspondente valor esperado, ou seja 17,29. No entanto ao intervalo de previsão associado deve ser acrescentada a variabilidade da resposta relativamente à sua média (ver Nota de Capítulo 2). Esse intervalo é obtido com os comandos

```

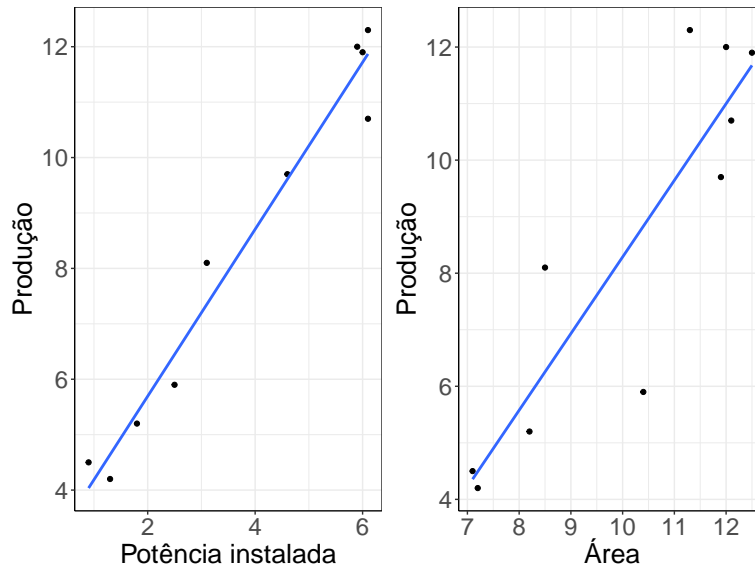
> liminfip95 <- yestim - 1.96*sqrt(varyestim + s^2)
> limsupip95 <- yestim + 1.96*sqrt(varyestim + s^2)
> round(liminfi95, 2)
  [,1]
[1,] 13.32
> round(limsupip95, 2)
  [,1]
[1,] 21.26

```

**Exemplo 6.8:** Os dados dispostos na Tabela 6.8 (disponíveis no arquivo `producao`) contêm informações sobre a produção (ton), potência instalada (1000 kW) e área construída ( $m^2$ ) de 10 empresas de uma certa indústria. O objetivo é avaliar como a produção média varia em função da potência instalada e área construída. Os gráficos de dispersão entre a variável resposta (produção) e cada uma das variáveis explicativas estão dispostos na Figura 6.28 e sugerem que essas duas variáveis são linearmente associadas com a produção.

**Tabela 6.8:** Produção (ton), potência instalada (1000 kW) e área construída (100  $m^2$ ) de empresas de uma certa indústria

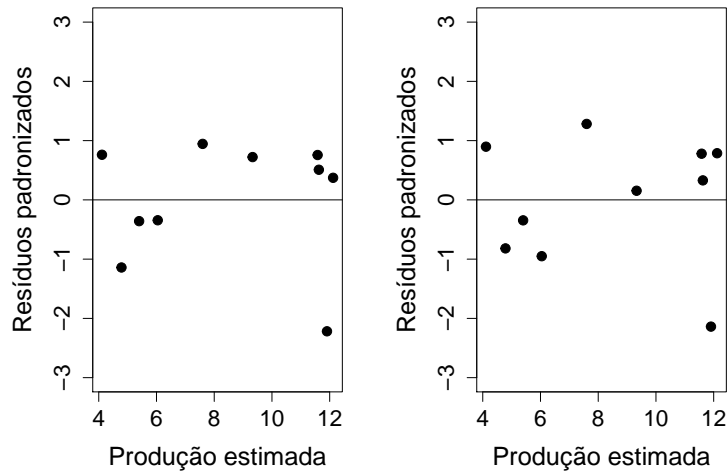
Produção	4,5	5,9	4,2	5,2	8,1	9,7	10,7	11,9	12,0	12,3
Potência	0,9	2,5	1,3	1,8	3,1	4,6	6,1	6,0	5,9	6,1
Área	7,1	10,4	7,2	8,2	8,5	11,9	12,1	12,5	12,0	11,3



**Figura 6.28:** Gráficos de dispersão correspondentes aos dados da Tabela 6.8.

Estimativas dos coeficientes (com erros padrões entre parênteses) correspondentes ao intercepto, potência instalada e área construída, de um modelo de regressão linear múltipla ajustado aos dados são, respectivamente,  $\hat{\beta}_0 = 4,41 (1,74)$ ,  $\hat{\beta}_1 = 1,75 (0,26)$  e  $\hat{\beta}_2 = -0,26 (0,26)$ . O coeficiente de determinação associado é  $R^2 = 0,972$ . Chama a atenção, o valor negativo do coeficiente relativo à área construída, pois o gráfico de dispersão da Figura 6.28 sugere uma associação positiva. A justificativa está no fato de as duas variáveis explicativas serem altamente correlacionadas (coeficiente de correlação de Pearson = 0,93) de forma que a contribuição de uma delas não acrescenta poder de explicação da produção média na presença da outra. Um teste da hipótese de que  $\beta_2 = 0$  produz  $p = 0,34$  sugerindo que esse coeficiente pode ser considerado nulo. Em resumo, a potência instalada é suficiente para explicar a variação da produção média.

O ajuste de um modelo de regressão linear simples tendo unicamente a potência instalada como variável explicativa indica que o intercepto e o coeficiente associado à essa variável são estimados, respectivamente, por  $\hat{\beta}_0 = 2,68 (0,42)$  e  $\hat{\beta}_1 = 1,50 (0,10)$  com um coeficiente de determinação  $R^2 = 0,9681$ . Gráficos de resíduos padronizados correspondentes aos dois modelos estão apresentados na Figura 6.29 e corroboram a conclusão de que apenas a variável potência instalada é suficiente para a explicação da variação da produção média.



**Figura 6.29:** Gráficos de resíduos padronizados correspondentes aos modelos ajustados aos dados da Tabela 6.8 com duas (painel esquerdo) ou uma (painel direito) variável explicativa (potência).

Note que o valor do coeficiente de determinação do modelo com duas variáveis explicativas  $R^2 = 0,9723$  é maior do que aquele correspondente ao modelo que inclui apenas uma delas  $R^2 = 0,9681$ . Pela definição desse coeficiente, quanto mais variáveis forem acrescentadas ao modelo, maior será ele. Por esse motivo, convém utilizar o **coeficiente de determinação ajustado** que inclui uma penalidade pelo acréscimo de variáveis explicativas. Para o exemplo, temos  $R_{aj}^2 = 0,9644$  quando duas variáveis explicativas são consideradas e  $R_{aj}^2 = 0,9641$  quando apenas uma delas é incluída no modelo (ver Nota de Capítulo 3 para detalhes).

Uma outra ferramenta útil para avaliar a importância marginal de uma variável explicativa na presença de outras é o **gráfico da variável adicionada**. Consideremos o modelo de regressão linear múltipla

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + e_i, \quad i = 1, \dots, n$$

com as suposições usuais. Para avaliar a importância marginal da variável  $X_2$  na presença da variável  $X_1$ , o gráfico da variável adicionada é obtido por meio dos seguintes passos

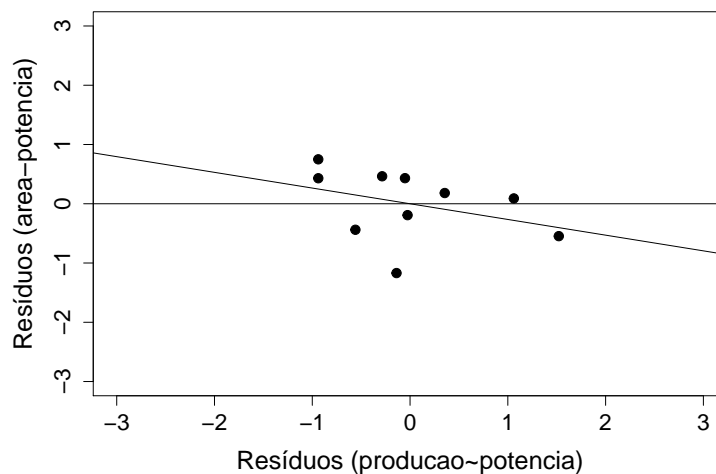
- i) Obtenha os resíduos  $\hat{e}_{1i}$  do modelo  $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + e_i$ .
- ii) Obtenha os resíduos  $\hat{d}_{1i}$  do modelo  $x_{2i} = \gamma_0 + \gamma_1 x_{1i} + d_{1i}$ .
- iii) Construa o gráfico de dispersão de  $\hat{e}_{1i}$  em função de  $\hat{d}_{1i}$ .

Uma tendência “relevante” nesse gráfico indica que a variável  $X_2$  contribui para explicar a variação na média da variável resposta. Na realidade,



a inclinação de uma reta ajustada aos valores de  $\hat{e}_{1i}$  em função de  $\hat{d}_{1i}$  é exatamente o coeficiente de  $X_2$  no modelo original.

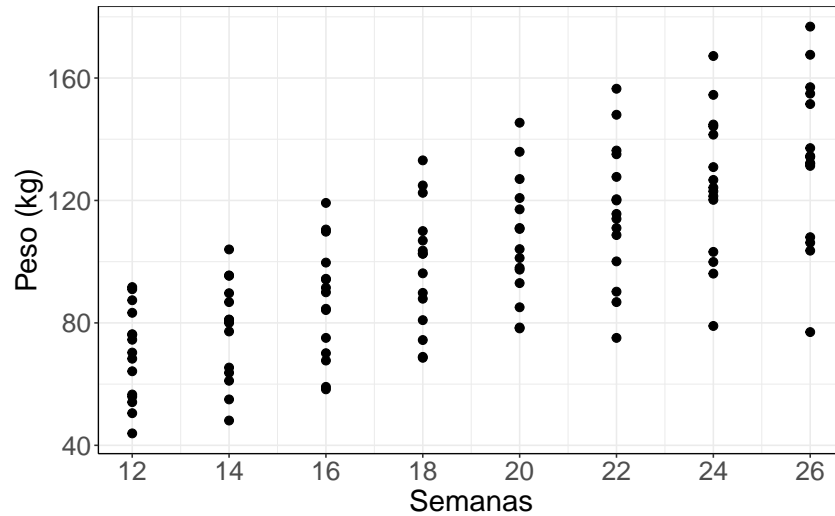
Para o exemplo da Tabela 6.8 o gráfico da variável adicionada está apresentado na Figura 6.30. O coeficiente da reta ajustada ( $-0,26$ ) não é significativo, sugerindo que a variável  $X_2$  não precisa ser utilizada para explicar a variação na média da variável resposta. Compare a inclinação (negativa) da reta representada nessa figura com aquela (positiva) da reta representada no painel direito da Figura 6.28.



**Figura 6.30:** Gráfico da variável adicionada correspondente ao modelo ajustado aos dados da Tabela 6.8.

## 6.4 Regressão para dados longitudinais

Consideremos os dados do Exemplo 2.3 (disponíveis no arquivo `bezerros` e dispostos na Tabela 2.2) correspondentes a um estudo cujo objetivo é avaliar a variação de peso de bezerros entre a 12ª e 26ª semanas após o nascimento. Como cada animal é avaliado em 8 instantes (semanas 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24 e 26), convém dispor os dados no formato da planilha 2.3 em que ficam caracterizadas tanto a variável resposta (peso) quanto a variável explicativa (tempo). O gráfico de dispersão correspondente está apresentado na Figura 6.31.



**Figura 6.31:** Gráfico de dispersão para os dados da Tabela 2.2.

Esse gráfico sugere que o crescimento dos animais pode ser representado pelo seguinte modelo de regressão:

$$y_{ij} = \alpha + \beta(x_j - 12) + e_{ij}, \quad (6.27)$$

em que  $y_{ij}$  corresponde ao peso do  $i$ -ésimo animal no  $j$ -ésimo instante de observação,  $x_j$  corresponde ao número de semanas pós nascimento no  $j$ -ésimo instante de observação e os erros  $e_{ij}$  têm média zero, variância constante  $\sigma^2$  e são não correlacionados. Aqui o parâmetro  $\alpha$  denota o peso esperado para animais na 12a semana pós nascimento e  $\beta$  corresponde ao ganho esperado de peso por semana.

Como cada animal é pesado várias vezes, a suposição de que os erros  $e_{ij}$  não são correlacionados pode não ser adequada, pois animais com peso acima ou abaixo da média na 12a semana tendem a manter esse padrão ao longo das observações. Para avaliar esse aspecto, convém construir um **gráfico de perfis** em que as observações realizadas num mesmo animal são ligadas por segmentos de reta, como indicado na Figura 6.32. A correlação entre as observações realizadas no mesmo animal fica evidenciada no gráfico do desenhista disposto na Figura 6.33.

Como no gráfico de perfis a variabilidade da resposta é similar em todos os instantes de observação e os perfis individuais têm aproximadamente as mesmas inclinações e além disso, no gráfico do desenhista podem-se notar correlações lineares com magnitudes semelhantes entre as medidas realizadas em cada par de instantes de observação, um modelo alternativo que incorpora essas características é um **modelo linear misto** dado por

$$y_{ij} = \alpha + \beta(x_j - 12) + a_i + e_{ij}, \quad (6.28)$$

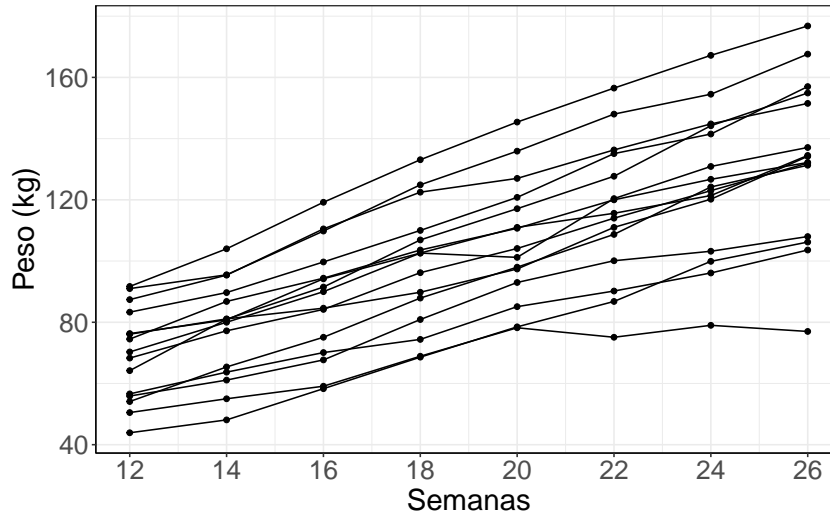


Figura 6.32: Gráfico de perfis para os dados da Tabela 2.2.

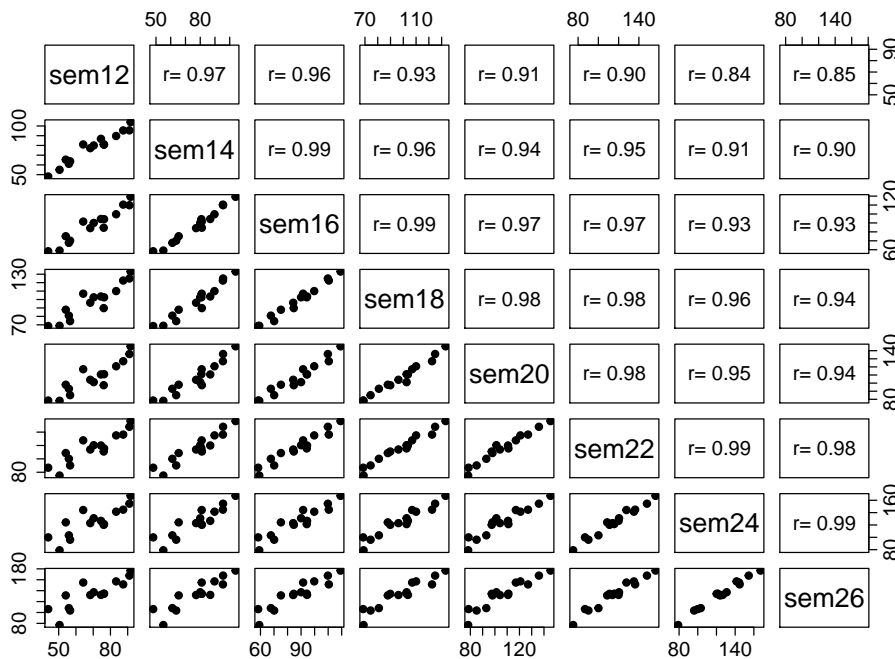


Figura 6.33: Gráfico do desenhista para os dados da Tabela 2.2.

em que os termos  $y_{ij}$ ,  $x_j$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $e_{ij}$  são definidos como no modelo (6.27) e  $a_i$  é um **efeito aleatório** com média zero e variância  $\sigma_a^2$ , independente de  $e_{ij}$ . Esse modelo é homoscedástico, com variância de  $y_{ij}$  igual a  $\sigma_a^2 + \sigma^2$  e covariância entre  $y_{ij}$  e  $y_{ik}$ ,  $j \neq k$  igual a  $\sigma_a^2$ . Essencialmente, esse modelo considera que o crescimento de cada bezerro pode ser modelado por uma reta com a mesma inclinação  $\beta$ , porém com intercepto  $\alpha + a_i$  que varia de bezerro para bezerro. O intercepto tem um componente aleatório porque os animais constituem uma amostra de uma população para a qual se quer fazer inferência. Os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  constituem as características populacionais de interesse.

As estimativas dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  obtidas do ajuste dos modelos (6.27) e (6.28) são iguais  $\hat{\alpha} = 69,9$  e  $\hat{\beta} = 4,7$ , porém os erros padrões correspondentes são menores sob o modelo (6.28), nomeadamente, 5,6 *versus* 7,8 para  $\hat{\alpha}$  e 0,1 *versus* 0,4 para  $\hat{\beta}$ .

Como existem três tipos de resíduos para essa classe de modelos, ferramentas diagnósticas são bem mais complexas do que aquelas apropriadas para os modelos lineares usais. Detalhes sobre a análise de modelos mistos podem ser obtidos em Singer et al. (2018).

## 6.5 Regressão logística

**Exemplo 6.9.** O conjunto de dados apresentado na Tabela 6.9 (disponível no arquivo `inibina`) foi obtido de um estudo cuja finalidade era avaliar a utilização da inibina B como marcador da reserva ovariana de pacientes submetidas à fertilização *in vitro*. A variável explicativa é a diferença entre a concentração sérica de inibina B após estímulo com o hormônio FSH e sua concentração sérica pré estímulo e a variável resposta é a classificação das pacientes como boas ou más respondedoras com base na quantidade de óocitos recuperados. Detalhes podem ser obtidos em Dzik et al. (2000).

A diferença entre esse problema e aqueles estudados nas seções anteriores está no fato de a variável resposta ser dicotômica e não contínua. Se definirmos a variável resposta  $Y$  com valor igual a 1 no caso de resposta positiva e igual a zero no caso de resposta negativa, a resposta esperada será igual à probabilidade  $p = E(Y)$  de que pacientes tenham resposta positiva. Essencialmente, o objetivo da análise é modelar essa probabilidade como função da variável explicativa. Em vez de modelar essa resposta esperada, convém modelar uma função dela, a saber o logaritmo da chance de resposta positiva (ver Seção 4.2) para evitar estimativas de probabilidades com valores fora do intervalo (0, 1). O modelo correspondente pode ser escrito como

$$\log \frac{P(Y_i = 1|X = x)}{P(Y_i = 0|X = x)} = \alpha + \beta x_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.29)$$

ou equivalentemente (ver Exercício 20), como

$$P(Y_i = 1|X = x) = \frac{\exp(\alpha + \beta x_i)}{1 + \exp(\alpha + \beta x_i)}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.30)$$

**Tabela 6.9:** Concentração de inibina B antes e após estímulo hormonal em pacientes submetidas a fertilização *in vitro*

ident	resposta	inibpre	inibpos	ident	resposta	inibpre	inibpos
1	pos	54,03	65,93	17	pos	128,16	228,48
2	pos	159,13	281,09	18	pos	152,92	312,34
3	pos	98,34	305,37	19	pos	148,75	406,11
4	pos	85,30	434,41	20	neg	81,00	201,40
5	pos	127,93	229,30	21	neg	24,74	45,17
6	pos	143,60	353,82	22	neg	3,02	6,03
7	pos	110,58	254,07	23	neg	4,27	17,80
8	pos	47,52	199,29	24	neg	99,30	127,93
9	pos	122,62	327,87	25	neg	108,29	129,39
10	pos	165,95	339,46	26	neg	7,36	21,27
11	pos	145,28	377,26	27	neg	161,28	319,65
12	pos	186,38	1055,19	28	neg	184,46	311,44
13	pos	149,45	353,89	29	neg	23,13	45,64
14	pos	33,29	100,09	30	neg	111,18	192,22
15	pos	181,57	358,45	31	neg	105,82	130,61
16	pos	58,43	168,14	32	neg	3,98	6,46

pos: resposta positiva

neg: resposta negativa

Neste contexto, o parâmetro  $\alpha$  é interpretado como o logaritmo da chance de resposta positiva para pacientes com  $x_i = 0$  (concentrações de inibina pré e pós estímulo iguais) e o parâmetro  $\beta$  corresponde ao logaritmo da razão as chances de resposta positiva para pacientes em que a variável explicativa difere por uma unidade (ver Exercício 21).

O ajuste desse modelo é realizado pelo **método de máxima verossimilhança**. Para detalhes sobre o método de máxima verossimilhança, o leitor poderá consultar Bussab e Morettin (2017) ou Bickel e Doksum (2015), entre outros. A função de verossimilhança a ser maximizada é

$$\ell(\alpha, \beta | \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \prod_{i=1}^n [p(x_i)]^{y_i} [1 - p(x_i)]^{1-y_i}$$

com

$$p(x_i) = \frac{\exp(\alpha + \beta x_i)}{1 + \exp(\alpha + \beta x_i)}.$$

Sua maximização pode ser concretizada por meio da maximização de seu logaritmo

$$L(\alpha, \beta | \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \left\{ y_i \log[p(x_i)] + (1 - y_i) \log[1 - p(x_i)] \right\}.$$

Os estimadores de máxima verossimilhança de  $\alpha$  e  $\beta$  correspondem à solução das **equações de estimação**

$$\sum_{i=1}^n \left\{ y_i - \frac{\exp(\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i)}{1 + \exp(\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i)} \right\} = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^n x_i \left\{ y_i - \frac{\exp(\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i)}{1 + \exp(\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i)} \right\} = 0.$$

Como esse sistema de equações não tem solução explícita, deve-se recorrer a métodos iterativos como os métodos **Newton-Raphson** ou **Fisher scoring**. Para detalhes, o leitor poderá consultar Paulino e Singer (2006), por exemplo.

O uso da função `glm()` produz os resultados a seguir:

```
> modelo1 <- glm(formula = resposta ~ difinib, family = binomial,
                 data = dados)
```

Coefficients:

```
              Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept) -2.310455   0.947438  -2.439  0.01474 *
inib          0.025965   0.008561   3.033  0.00242 **
(Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)
Null deviance: 43.230  on 31  degrees of freedom
Residual deviance: 24.758  on 30  degrees of freedom
AIC: 28.758
Number of Fisher Scoring iterations: 6
```

As estimativas dos parâmetros (com erro padrão entre parênteses)  $\alpha$  e  $\beta$  correspondentes ao modelo ajustado aos dados da Tabela 6.9 são, respectivamente,  $\hat{\alpha} = -2,310$  (0,947) e  $\hat{\beta} = 0,026$  (0,009). Consequentemente, a chance de resposta positiva para pacientes com mesmo nível de inibina B pré e pós estímulo hormonal é  $\exp(\hat{\alpha}) = 0,099$  (0,094). Essa chance fica multiplicada por  $\exp(\hat{\beta}) = 1,026$  (0,009) para cada aumento de uma unidade na diferença entre os níveis de inibina B pré e pós estímulo hormonal.<sup>2</sup>

Dada a natureza não linear do modelo adotado, intervalos de confiança para essa chance e para essa razão de chances devem ser calculados a partir da exponenciação dos limites dos intervalos de confiança associados aos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ . Para os dados do exemplo em análise, esses intervalos de confiança podem ser obtidos como

```
> ic95chance0 <- exp(modelo1$coefficients[1] +
                   c(-1, 1) * 1.96*sqrt(summary(modelo1)$cov.scaled[1,1]))
> ic95chance0
[1] 0.01549197 0.63541545
> ic95razaochances <- exp(modelo1$coefficients[2] +
                          c(-1, 1) * 1.96*sqrt(summary(modelo1)$cov.scaled[2,2]))
> ic95razaochances
[1] 1.009228 1.043671
```

<sup>2</sup>Os erros padrões de  $\exp(\hat{\alpha})$  e  $\exp(\hat{\beta})$  são calculados por meio do **método Delta**. Veja a Nota de Capítulo 6.

A função `predict.glm()` pode ser usada para estimar a probabilidade de que a resposta seja positiva, dado um valor da variável explicativa. Os dados da Tabela 6.10 indicam diferentes níveis da diferença inibina B pré e pós estímulo hormonal e as correspondentes probabilidades de resposta positiva prevista pelo modelo.

**Tabela 6.10:** Diferenças entre os níveis de inibina B pré e pós estímulo hormonal e probabilidades de resposta positiva previstas

Difinib	10	50	100	200	300	400	500
Prob	0,11	0,27	0,57	0,95	0,99	1,00	1,00

Por exemplo, o valor 0,57 correspondente a uma diferença inibina B pré e pós igual a 100 foi obtido calculando-se

$$\hat{P}(X = 1|X = 100) = \frac{\exp\{-2,310455 + (0,025965)(100)\}}{1 + \exp\{-2,310455 + (0,025965)(100)\}}. \quad (6.31)$$

Para classificar a resposta como positiva ou negativa, é preciso converter essas probabilidades previstas em rótulos de classes, “positiva” ou “negativa”. Considerando respostas positivas como aquelas cuja probabilidade seja maior do que 0,7, digamos, podemos utilizar a função `table()` para obter a seguinte tabela:

```

                resposta
glm.pred negativa positiva
negativa      11         5
positiva       2         14

```

Os elementos da diagonal dessa tabela indicam os números de observações corretamente classificadas. Ou seja, a proporção de respostas corretas será  $(11+14)/32=78\%$ . Esse valor depende do limiar fixado, 0,7, no caso. Um *default* usualmente fixado é 0,5, e nesse caso, a proporção de respostas corretas pode diminuir. A utilização de Regressão Logística nesse contexto de classificação será detalhada no Capítulo 8.

Uma das vantagens do modelo de regressão logística é que, com exceção do intercepto, os coeficientes podem ser interpretados como razões de chances e suas estimativas são as mesmas independentemente de os dados terem sido obtidos prospectiva ou retrospectivamente (veja a Seção 4.2).

Quando todas as variáveis envolvidas são categorizadas, é comum apresentar os dados na forma de uma tabela de contingência e nesse caso, as estimativas também podem ser obtidas pelo método de **mínimos quadrados generalizados** (para detalhes, consulte Paulino e Singer (2006), por exemplo).

**Exemplo 6.10:** Num estudo epidemiológico, 1448 pacientes com problemas cardíacos foram classificados segundo o sexo (feminino ou masculino), idade

(< 55 anos ou  $\geq 55$  anos) e status relativo à hipertensão arterial (sem ou com). Por meio de um procedimento de cineangiocoronariografia, o grau de lesão das artérias coronarianas foi classificado como < 50% ou  $\geq 50\%$ . Os dados estão resumidos na Tabela 6.11.

**Tabela 6.11:** Frequência de pacientes avaliados em um estudo epidemiológico

Sexo	Idade	Hipertensão arterial	Grau de lesão	
			< 50%	$\geq 50\%$
Feminino	< 55	sem	31	17
Feminino	< 55	com	42	27
Feminino	$\geq 55$	sem	55	42
Feminino	$\geq 55$	com	94	104
Masculino	< 55	sem	80	112
Masculino	< 55	com	70	130
Masculino	$\geq 55$	sem	74	188
Masculino	$\geq 55$	com	68	314

**Fonte:** Singer, J.M. e Ikeda, K. (1996).

Nesse caso, um modelo de regressão logística apropriado (escrito de forma geral) para a análise é

$$\log\{P(Y_{ijk} = 1)/[1 - P(Y_{ijk} = 1)]\} = \alpha + \beta x_i + \gamma v_j + \delta w_k, \quad (6.32)$$

$i = 1, \dots, I$ ,  $j = 1, \dots, J$ ,  $k = 1, \dots, K$ , em que  $Y_{ijk} = 1$  se um paciente do sexo  $i$  ( $i = 1$ : feminino,  $i = 2$ : masculino), idade  $j$  ( $j = 1$ : < 55,  $j = 2$ :  $\geq 55$ ) e status relativo à hipertensão  $k$  ( $k = 1$ : sem,  $k = 2$ : com) tiver lesão coronariana  $\geq 50\%$  e  $Y_{ijk} = 0$  em caso contrário. Aqui,  $I$ ,  $J$  e  $K$  são iguais a 2 e  $x_1 = 0$  e  $x_2 = 1$  para pacientes femininos ou masculinos, respectivamente,  $v_1 = 0$  e  $v_2 = 1$  para pacientes com idades < 55 ou  $\geq 55$ , respectivamente e  $w_1 = 0$  e  $w_2 = 1$  para pacientes sem ou com hipertensão, respectivamente. O parâmetro  $\alpha$  corresponde ao logaritmo da chance de lesão coronariana  $\geq 50\%$  para mulheres não hipertensas com menos de 55 anos (consideradas como referência); o parâmetro  $\beta$  corresponde ao logaritmo da razão entre a chance de lesão coronariana  $\geq 50\%$  para homens não hipertensos com menos de 55 anos e a chance correspondente para mulheres com as mesmas características (de idade e de hipertensão); o parâmetro  $\gamma$  corresponde ao logaritmo da razão entre a chance de lesão coronariana  $\geq 50\%$  para pacientes com 55 anos ou mais e a chance correspondente para pacientes com as mesmas características (sexo e hipertensão) e menos de 55 anos; o parâmetro  $\delta$  corresponde ao logaritmo da razão entre a chance de lesão coronariana  $\geq 50\%$  para pacientes hipertensos e a chance correspondente para pacientes com as mesmas características (de sexo e de idade) não hipertensos.

Usando-se o pacote ACD e a função `loglinWLS()`, as estimativas dos parâmetros obtidas pelo método de mínimos quadrados generalizados (com



**Tabela 6.12:** Estimativas (e intervalos de confiança de 95%) para a chance e razões de chances associadas aos dados da Tabela 6.11

	Estimativa	Limite inferior	Limite superior
Chance de lesão $\geq 50\%$ mulheres $< 55$ não hipertensas	0,40	0,30	0,54
Razão de chances para sexo masculino	3,43	2,69	4,38
Razão de chances para idade $\geq 55$	1,95	1,55	2,48
Razão de chances para hipertensão	1,51	1,20	1,89

erros padrões entre parênteses) são:  $\hat{\alpha} = -0,91$  (0,15),  $\hat{\beta} = 1,23$  (0,13),  $\hat{\gamma} = 0,67$  (0,12),  $\hat{\delta} = 0,41$  (0,12). Um intervalo de confiança aproximado com coeficiente de confiança de 95% correspondente à chance de lesão coronariana  $\geq 50\%$  para mulheres não hipertensas com menos de 55 anos pode ser obtido por meio da exponenciação dos limites de um intervalo de confiança para o parâmetro  $\alpha$ ; o mesmo procedimento pode ser empregado para a obtenção de intervalos de confiança para as razões de chances associadas ao sexo, idade e status de hipertensão. Esses intervalos estão dispostos na Tabela 6.12.

Se os 1448 pacientes avaliados no estudo puderem ser considerados como uma amostra aleatória de uma população de interesse, a chance de lesão coronariana  $\geq 50\%$  para uma mulher não hipertensa com idade  $< 55$  é de 0,40 [IC(95%) = 0,30 a 0,54]. Independentemente dessa suposição, *i.e.*, mesmo que essa chance tenha um valor R desconhecido, ela fica multiplicada por 3,43 [IC(95%) = 2,69 a 4,38] para homens não hipertensos e de mesma idade, por 1,95 [IC(95%) = 1,55 a 2,48] para mulheres não hipertensas com idade  $\geq 55$  ou por 1,51 [IC(95%) = 1,20 a 1,89] para mulheres hipertensas com idade  $< 55$ . O modelo ainda permite estimar as chances para pacientes com diferentes níveis dos três fatores, conforme indicado na Tabela 6.13. Quando o estudo não permite estimar a chance de lesão coronariana  $\geq 50\%$  para o grupo de referência (neste caso, mulheres não hipertensas com idade  $< 55$ ) como em estudos retrospectivos, as razões de chances estimadas continuam válidas. Nesse contexto, por exemplo, a chance de lesão coronariana  $\geq 50\%$  para homens hipertensos com idade  $\geq 55$  é  $1,95 \times 1,51$  a chance correspondente para homens não hipertensos com idade  $< 55$ . O cálculo do erro padrão dessa razão de chances depende de uma estimativa da matriz de covariâncias dos estimadores dos parâmetros do modelo e está fora do escopo deste texto. O leitor pode consultar Paulino e Singer (2006) para detalhes.

A avaliação da qualidade do ajuste de modelos de regressão é baseada em resíduos da forma  $y_i - \hat{y}_i$  em que  $y_i$  é a resposta observada para a  $i$ -ésima

**Tabela 6.13:** Estimativas das chances de lesão coronariana para  $\geq 50\%$  para pacientes com diferentes níveis dos fatores de risco obtidas com os dados da Tabela 6.11

Sexo	Idade	Hipertensão	Chance (lesão $\geq 50\%$ )/(lesão $< 50\%$ )
Fem	$< 55$	sem	R
Fem	$< 55$	com	$R \times 1,51$
Fem	$\geq 55$	sem	$R \times 1,95$
Fem	$\geq 55$	com	$R \times 1,51 \times 1,95$
Masc	$< 55$	sem	$R \times 3,43$
Masc	$< 55$	com	$R \times 3,43 \times 1,51$
Masc	$\geq 55$	sem	$R \times 3,43 \times 1,95$
Masc	$\geq 55$	com	$R \times 3,43 \times 1,95 \times 1,51$

unidade amostral e  $\hat{y}_i$  é o correspondente valor ajustado, *i.e.* predito pelo modelo. Para regressão logística a avaliação do ajuste é mais complexa, pois os resíduos podem ser definidos de diferentes maneiras. Apresentamos alguns detalhes na Nota de Capítulo 7.

O modelo de regressão logística pode ser generalizado para o caso em que a variável resposta tem mais do que dois possíveis valores. Por exemplo, num estudo em que se quer avaliar a associação entre textura, cor, gosto de um alimento e o seu destino comercial, a variável resposta pode ter as categorias “descarte”, “varejo nacional” ou “exportação”. Nesse caso, o modelo é conhecido como **regressão logística politômica** ou **regressão logística multinomial** e não será abordado neste texto. O leitor poderá consultar Paulino e Singer (2006) para detalhes. Para efeito de classificação, técnicas alternativas e mais empregadas na prática serão abordadas no Capítulo 8.

## 6.6 Notas de capítulo

### 1) Inferência baseada em modelos de regressão linear simples.

Para o modelo (6.1) fizemos a suposição de que os erros são não correlacionados, têm média 0 e variância constante  $\sigma^2$ . Geralmente, também se supõe que a variável explicativa  $X$  seja fixa. Se quisermos testar hipóteses sobre os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  ou construir intervalos de confiança para eles por meio de estatísticas com distribuições exatas, devemos fazer alguma suposição adicional sobre a distribuição dos erros. Usualmente, supõe-se que os  $e_i$  têm uma distribuição Normal. Se a distribuição dos erros tiver caudas mais longas (pesadas) do que as da distribuição Normal, os estimadores de mínimos quadrados podem se comportar de forma inadequada e estimadores robustos devem ser usados.

Como

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \sum_{i=1}^n w_i y_i,$$

com  $w_i = (x_i - \bar{x}) / \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ , o estimador  $\hat{\beta}$  é uma função linear das observações  $y_i$ . O mesmo vale para  $\hat{\alpha}$ . Utilizando esse resultado, pode-se demonstrar (veja a seção de exercícios) que

- $E(\hat{\alpha}) = \alpha$  e  $E(\hat{\beta}) = \beta$ , ou seja, os estimadores de mínimos quadrados são não enviesados.
- $\text{Var}(\hat{\alpha}) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 / [n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2]$ .
- $\text{Var}(\hat{\beta}) = \sigma^2 / \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ .
- $\text{Cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = -\sigma^2 \bar{x} / \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ .

Com a suposição adicional de normalidade, pode-se mostrar que

- $y_i \sim N(\alpha + \beta x_i, \sigma^2)$ .
- As estatísticas

$$t_{\hat{\alpha}} = \frac{\hat{\alpha} - \alpha}{S} \sqrt{\frac{n \sum (x_i - \bar{x})^2}{\sum x_i^2}}$$

e

$$t_{\hat{\beta}} = \frac{\hat{\beta} - \beta}{S} \sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

têm distribuição  $t$  de Student com  $(n - 2)$  graus de liberdade. Nesse contexto, os resíduos padronizados, definidos em (6.9) também seguem uma distribuição  $t$  de Student com  $(n - 2)$  graus de liberdade. Daí a denominação alternativa de resíduos estudentizados.

Com esses resultados é possível testar as hipóteses  $H_0 : \alpha = 0$  e  $H_0 : \beta = 0$ , bem como construir intervalos de confiança para esses parâmetros.

Um teorema importante conhecido como **Teorema de Gauss-Markov** (e que não depende da suposição de normalidade dos erros) afirma que os estimadores de mínimos quadrados têm variância mínima na classe dos estimadores não enviesados que sejam funções lineares das observações  $y_i$ .

Quando os erros não seguem uma distribuição Normal, mas o tamanho da amostra é suficientemente grande, pode-se mostrar com o auxílio do **Teorema Limite Central** que sob certas condições de regularidade (usualmente satisfeitas na prática), os estimadores  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta}$  têm distribuições aproximadamente normais com variâncias que podem ser estimadas pelas expressões indicadas nos itens b) e c) indicados anteriormente. Detalhes podem ser obtidos em Sen et al. (2009).

## 2) Estimação e previsão sob modelos de regressão linear simples.

Um dos objetivos da análise de regressão é fazer previsões sobre a variável resposta com base em valores das variáveis explicativas. Por simplicidade trataremos do caso de regressão linear simples. Uma estimativa para o valor esperado  $E(Y|X = x_0)$  da variável resposta  $Y$  dado um valor  $x_0$  da variável explicativa é  $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x_0$  e com base nos resultados apresentados na Nota de Capítulo 1 pode-se mostrar que a variância de  $\hat{y}$  é

$$\text{Var}(\hat{y}) = \sigma^2 \left[ \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right].$$

Então, os limites superior e inferior para um **intervalo de confiança** aproximado com coeficiente de confiança de 95% para o **valor esperado** de  $Y$  dado  $X = x_0$  são

$$\hat{y} \pm 1,96S \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}$$

com  $S^2$  denotando uma estimativa de  $\sigma^2$ . Sem muito rigor, podemos dizer que esse intervalo deve conter o verdadeiro valor esperado de  $E(Y|X = x)$ , *i.e.*, a média de  $Y$  para todas as observações em que  $X = x_0$ . Isso não significa que esperamos que o intervalo contenha o verdadeiro valor de  $Y$ , digamos  $Y_0$  para uma unidade de investigação para a qual  $X = x_0$ . Nesse caso precisamos levar em conta a variabilidade de  $Y|X = x_0$  em torno de seu valor esperado  $E(Y|X = x_0)$ .

Como  $Y_0 = \hat{y} + e_0$ , sua variância é

$$\text{Var}(Y_0) = \text{Var}(\hat{y}) + \text{Var}(e_0) = \sigma^2 \left[ \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right] + \sigma^2.$$

Então, os limites superior e inferior de um **intervalo de previsão** (aproximado) para  $Y_0$  são

$$\hat{y} \pm 1,96S \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}.$$

Note que se aumentarmos indefinidamente o tamanho da amostra, a amplitude do intervalo de confiança para o valor esperado tenderá para zero, porém a amplitude do intervalo de previsão correspondente a uma unidade específica tenderá para  $2 \times 1,96 \times \sigma$ .

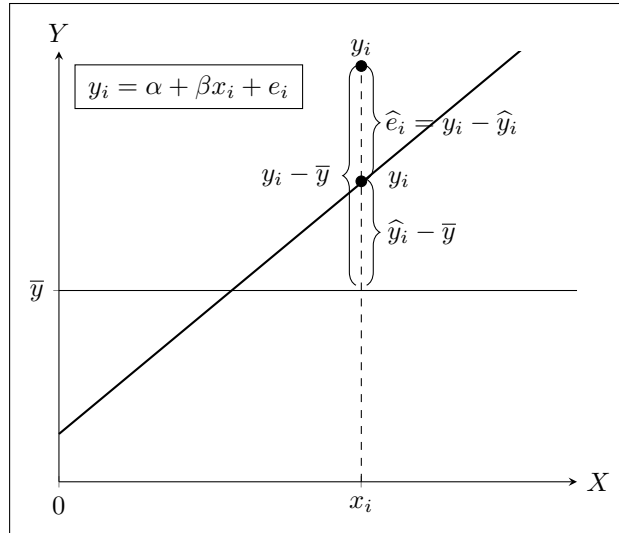
## 3) Coeficiente de determinação.

Consideremos um conjunto de dados pareados  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  de duas variáveis contínuas  $X$  e  $Y$ . Se não levamos em conta a variável  $X$  para explicar a variabilidade da variável  $Y$  como no modelo de

regressão linear simples, a melhor previsão para  $Y$  é  $\bar{y}$  e uma estimativa da variância de  $Y$  é dada por  $S^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 / (n - 1)$ . Para relacionar esse resultado com aquele obtido por meio de um modelo de regressão linear para os mesmos dados, podemos escrever

$$y_i - \bar{y} = (y_i - \hat{y}_i) + (\hat{y}_i - \bar{y}).$$

Uma representação gráfica dessa relação está apresentada na Figura 6.34.



**Figura 6.34:** Representação gráfica da decomposição da soma de quadrados.

Pode-se mostrar (ver Exercício 15) que

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n \hat{e}_i^2 + \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2$$

ou, de forma abreviada,

$$SQTot = SQRes + SQReg.$$

Esse resultado indica que a soma de quadrados total ( $SQTot$ ) pode ser decomposta num termo correspondente à variabilidade dos resíduos ( $SQRes$ ) e em outro correspondente à regressão ( $SQReg$ ). Quanto maior for esse último termo, maior é a evidência de que a variável  $X$  é útil para explicar a variabilidade da variável  $Y$ . Tendo em vista a expressão (6.6), pode-se calcular a soma de quadrados devida à regressão por meio de

$$SQReg = \hat{\beta}^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Nesse contexto, a estatística  $R^2 = SQReg/SQTot$  corresponde à porcentagem da variabilidade de  $Y$  explicada pelo modelo, ou seja, pela introdução da variável  $X$  no modelo mais simples,  $y_i = \mu + e_i$ .

Como a soma de quadrados  $SQReg$  (e conseqüentemente, o coeficiente  $R^2$ ) sempre aumenta quando mais variáveis explicativas são introduzidas no modelo, convém considerar uma penalidade correspondente ao número de variáveis explicativas. Nesse sentido, para comparação de modelos com números diferentes de variáveis explicativas, costuma-se utilizar o **coeficiente de determinação ajustado**

$$R_{aj}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{n - 1}{n - p - 1} = 1 - \frac{SQRes/(n - p - 1)}{SQTot/(n - 1)}$$

em que  $p$  é o número de variáveis explicativas do modelo. Lembrando que

$$R^2 = 1 - \frac{SQRes}{SQTot} = 1 - \frac{SQRes/n}{SQTot/n},$$

o coeficiente  $R_{aj}^2$  é obtido por meio de um aumento maior no numerador do que no denominador de  $R^2$ , com mais intensidade quanto maior for o número de variáveis explicativas.

#### 4) Distância de Cook.

A distância de Cook é uma estatística que mede a mudança nos valores preditos pelo modelo de regressão quando eliminamos uma das observações. Denotando por  $\hat{\mathbf{y}}$  o vetor (de dimensão  $n$ ) com os valores preditos obtidos do ajuste do modelo baseado nas  $n$  observações e por  $\hat{\mathbf{y}}^{(-i)}$  o correspondente vetor com valores preditos (de dimensão  $n$ ) obtido do ajuste do modelo baseado nas  $n - 1$  observações restantes após a eliminação da  $i$ -ésima, a distância de Cook é definida como

$$D_i = \frac{(\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{y}}^{(-i)})^\top (\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{y}}^{(-i)})}{(p + 1)S}$$

em que  $p$  é o número de coeficientes de regressão e  $S$  é uma estimativa do desvio padrão. É possível mostrar que a distância de Cook ( $D_i$ ) pode ser calculada sem a necessidade de ajustar o modelo com a omissão da  $i$ -ésima observação por meio da expressão

$$D_i = \frac{1}{p + 1} \hat{e}_i^2 \frac{h_{ii}}{(1 - h_{ii})^2},$$

lembrando que

$$h_{ii} = \frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}.$$

Para o modelo de regressão linear simples,  $p = 2$ . Detalhes podem ser obtidos em Kutner et al. (2004).

5) **Influência local e alavancagem.**

Influência local é o efeito de uma pequena variação no valor da variável resposta nas estimativas dos parâmetros do modelo. Consideremos uma observação  $(x_j, y_j)$  e quantifiquemos o efeito de uma mudança de  $y_j$  para  $y_j + \Delta y_j$  nos valores de  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta}$ . Com esse propósito, observando que

$$\hat{\beta} + \Delta\hat{\beta}(y_j) = \frac{\sum_{i \neq j} (x_i - \bar{x})y_i + (x_j - \bar{x})(y_j + \Delta y_j)}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2},$$

podemos concluir que

$$\Delta\hat{\beta}(y_j) = \frac{(x_j - \bar{x})\Delta y_j}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (6.33)$$

Este resultado indica que, fixado  $\Delta y_j$ , a variação em  $\hat{\beta}$  é diretamente proporcional a  $x_j - \bar{x}$  e inversamente proporcional a  $(n-1)S^2$ . Portanto, o efeito da variação no valor de  $y_j$  será grande se  $x_j$  estiver bastante afastado da média dos  $x_i$  e se a variabilidade dos  $x_i$  for pequena.

Lembrando que a estimativa do intercepto é

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} = \frac{\sum_i y_i}{n} - \hat{\beta}\bar{x},$$

quando  $y_j$  é substituído por  $y_j + \Delta y_j$ , teremos

$$\hat{\alpha} + \Delta\hat{\alpha}(y_j) = \frac{\sum_{i \neq j} y_i + (y_j + \Delta y_j)}{n} - (\hat{\beta} + \Delta\hat{\beta})\bar{x},$$

e portanto

$$\Delta\hat{\alpha}(y_j) = \frac{\Delta y_j}{n} - (\Delta\hat{\beta})\bar{x},$$

ou ainda

$$\Delta\hat{\alpha}(y_j) = \left[ \frac{1}{n} - \frac{\bar{x}(x_j - \bar{x})}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} \right] \Delta y_j. \quad (6.34)$$

Se  $x_j = \bar{x}$ , então  $\Delta\hat{\beta} = 0$ , mas  $\Delta\hat{\alpha} = \Delta y_j/n$ , ou seja,  $\Delta y_j$  não afeta a inclinação mas afeta o intercepto. Gráficos de (6.33) e (6.34) em função dos índices de cada observação indicam para que pontos a variação nos valores da variável resposta tem maior influência nas estimativas dos parâmetros.

**Alavancagem** (*leverage*) mede o efeito de uma variação na ordenada de um ponto particular  $(x_j, y_j)$  sobre o valor ajustado  $\hat{y}_j$ . Observe que

$$\hat{y}_j - \bar{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x_j - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}\bar{x}) = \hat{\beta}(x_j - \bar{x})$$

e portanto

$$\hat{y}_j = \frac{\sum_i y_i}{n} + \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})y_i}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} (x_j - \bar{x}),$$

e quando  $y_j$  é alterado para  $y_j + \Delta y_j$ , temos

$$\hat{y}_j + \Delta \hat{y}_j = \frac{\sum_i y_i + \Delta y_j}{n} + \frac{\sum_i (x_i - \bar{x}) y_i + (x_j - \bar{x}) \Delta y_j}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} (x_j - \bar{x})$$

e, então,

$$\Delta \hat{y}_j = \left[ \frac{1}{n} + \frac{(x_j - \bar{x})^2}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} \right] \Delta y_j = h_{jj} \Delta y_j.$$

O fator  $h_{jj}$  é chamado **repercussão** e depende, basicamente, da distância entre  $x_j$  a  $\bar{x}$ . Para qualquer acréscimo no valor de  $\hat{y}_j$ , ou seja, se  $x_j$  for muito menor ou muito maior que  $\bar{x}$ , o ponto  $(x_j, y_j)$  vai “empurrar” a ordenada do ponto,  $y_j$ , correspondente para baixo ou para cima, respectivamente.

### 6) Método Delta.

Considere um parâmetro  $\beta$  para o qual se dispõe de um estimador  $\hat{\beta}$  cuja variância é  $\sigma_{\hat{\beta}}^2$  e suponha que haja interesse em obter a variância de uma função  $g(\hat{\beta})$ . Por meio de uma expansão de Taylor, pode-se mostrar que sob certas condições usualmente válidas na prática,

$$\text{Var}[g(\hat{\beta})] \approx [g'(\hat{\beta})]^2 \sigma_{\hat{\beta}}^2,$$

em que  $g'(\hat{\beta})$  denota a primeira derivada de  $g$  calculada no ponto  $\hat{\beta}$ .

No caso multivariado, em que  $\hat{\beta}$  é um estimador de dimensão  $p \times 1$  com matriz de covariâncias  $\text{Var}(\hat{\beta}) = \mathbf{V}(\hat{\beta})$  sob certas condições usualmente satisfeitas na prática, a variância de uma função  $g(\hat{\beta})$  pode ser aproximada por

$$\text{Var}[g(\hat{\beta})] \approx [\partial g(\hat{\beta}) / \partial \hat{\beta}]^\top \mathbf{V}(\hat{\beta}) [\partial g(\hat{\beta}) / \partial \hat{\beta}]$$

em que  $[\partial g(\hat{\beta}) / \partial \hat{\beta}] = [\partial g(\hat{\beta}) / \partial \hat{\beta}_1, \dots, \partial g(\hat{\beta}) / \partial \hat{\beta}_p]^\top$ .

Detalhes podem ser obtidos em Sen et al. (2009).

### 7) Análise do ajuste de modelos de regressão logística.

Nos casos em que todas as variáveis explicativas utilizadas num modelo de regressão logística são categorizadas, podemos agrupar as respostas  $y_i$  segundo os diferentes padrões definidos pelas combinações dos níveis dessas variáveis. Quando o modelo envolve apenas uma variável explicativa dicotômica (Sexo, por exemplo), há apenas dois padrões, nomeadamente, M e F. Se o modelo envolver duas variáveis explicativas dicotômicas (Sexo e Faixa etária com dois níveis,  $\leq 40$  anos e  $> 40$  anos, por exemplo), estaremos diante de uma situação com quatro padrões, a saber, (F e  $\leq 40$ ), (F e  $> 40$ ), (M e  $\leq 40$ ) e (M e  $> 40$ ). A introdução de uma ou mais variáveis explicativas contínuas no modelo, pode gerar um número de padrões igual ao número de observações.



Consideremos um caso com  $p$  variáveis explicativas  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)^\top$  e sejam  $M$  o número de padrões (correspondente ao número de valores distintos de  $\mathbf{x}$ ) e  $m_j$ ,  $j = 1, \dots, M$ , o número de observações com o mesmo valor  $\mathbf{x}_j$  de  $\mathbf{x}$ . Note que no caso mais comum, em que existe pelo menos uma variável contínua,  $m_j \approx 1$  e  $M \approx n$ . Além disso, seja  $\tilde{y}_j$  o número de respostas  $Y = 1$  entre as  $m_j$  unidades amostrais com o mesmo valor  $\mathbf{x}_j$ . O valor ajustado  $\hat{y}_j$  correspondente a  $\tilde{y}_j$  é

$$\hat{y}_j = m_j \hat{p}_j = m_j \frac{\exp(\mathbf{x}_j^\top \hat{\boldsymbol{\beta}})}{1 + \exp(\mathbf{x}_j^\top \hat{\boldsymbol{\beta}})},$$

em que  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  é o estimador do vetor de parâmetros de modelo.

O **resíduo de Pearson** é definido como

$$\hat{e}_j = \frac{\tilde{y}_j - m_j \hat{p}_j}{\sqrt{m_j \hat{p}_j (1 - \hat{p}_j)}}$$

e uma medida resumo para a avaliação do ajuste do modelo é a **estatística de Pearson**

$$Q_P = \sum_{j=1}^M \hat{e}_j^2.$$

Para  $M$  suficientemente grande, a estatística  $Q_P$  tem distribuição aproximada  $\chi^2$  com  $M - (p + 1)$  graus de liberdade quando o modelo está bem ajustado.

Para evitar problemas com a distribuição aproximada de  $Q_P$  quando  $M \approx n$ , convém agrupar os dados de alguma forma. Hosmer e Lemeshow (1980, 2013) sugerem que os dados sejam agrupados segundo percentis das probabilidades  $\hat{p}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  estimadas sob o modelo. Por exemplo, podem-se considerar  $g = 10$  grupos, sendo o primeiro formado pelas unidades amostrais com os 10% menores valores das probabilidades estimados (ou seja, aquelas para as quais  $\hat{p}_i$  sejam menores os iguais ao primeiro decil; o segundo grupo deve conter as unidades amostrais para as quais  $\hat{p}_i$  estejam entre o primeiro e o segundo decil etc. O último grupo conterá as unidades amostrais cujas probabilidades estimadas sejam maiores que o nono decil. Com esse procedimento, cada grupo deverá conter  $n_j^* = n/10$  unidades amostrais. A estatística proposta por esses autores é

$$\hat{C} = \sum_{j=1}^g \frac{(o_j - n_j^* \bar{p}_j)^2}{n_j^* \bar{p}_j (1 - \bar{p}_j)}$$

com  $o_j = \sum_{i=1}^{c_j} y_i$  denotando o número de respostas  $Y = 1$  dentre as unidades amostrais incluídas no  $j$ -ésimo grupo ( $c_j$  representa o número de padrões de covariáveis encontrados no  $j$ -ésimo grupo) e  $\bar{p}_j = \sum_{i=1}^{c_j} m_i \hat{p}_i / n_j^*$  denota a média das probabilidades estimadas no

$j$ -ésimo grupo. A estatística  $\widehat{C}$  tem distribuição aproximada  $\chi^2$  com  $g - 2$  graus de liberdade quando o modelo estiver correto.

Os chamados **resíduos da desviância** (*deviance residuals*) são definidos a partir da logaritmo da função de verossimilhança e também podem ser utilizados com o propósito de avaliar a qualidade do ajuste de modelos de regressão logística. O leitor poderá consultar Hosmer and Lemeshow (2000) para detalhes.

#### 8) Regressão resistente.

Os estimadores  $\widehat{\alpha}$  e  $\widehat{\beta}$  em (6.7) e (6.6) considerados para o ajuste do modelo (6.1) a um conjunto de dados  $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$  são baseados em  $\bar{x}, \bar{y}$  e nos desvios em relação a essas médias. Esses estimadores podem ser severamente afetados pela presença de observações discrepantes (*outliers*). Como alternativa, podemos considerar modelos de **regressão resistente**, em que os estimadores são baseados em medianas.

Para o ajuste desses modelos, inicialmente, dividimos o conjunto de  $n$  pontos em três grupos de tamanhos aproximadamente iguais. Chamemos esses grupos de E, C e D (de esquerdo, central e direito). Se  $n = 3k$ , cada grupo terá  $k$  pontos. Se  $n = 3k + 1$ , colocamos  $k$  pontos nos grupos E e D e  $k + 1$  pontos no grupo C. Finalmente, se  $n = 3k + 2$ , colocamos  $k + 1$  pontos nos grupos E e D e  $k$  pontos no grupo C.

Para cada grupo, obtemos um **ponto resumo**, cujas coordenadas são a mediana dos  $x_i$  e a mediana dos  $y_i$  naquele grupo. Denotemos esses pontos por  $(x_E, y_E), (x_C, y_C), (x_D, y_D)$ .

Os estimadores resistentes de  $\beta$  e  $\alpha$  são dados respectivamente, por

$$b_0 = \frac{y_D - y_E}{x_D - x_E},$$

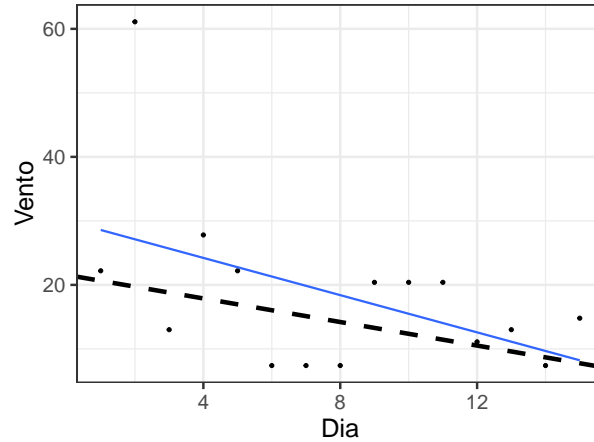
e

$$a_0 = \frac{1}{3} [(y_E - b_0 x_E) + (y_C - b_0 x_C) + (y_D - b_0 x_D)].$$

Convém notar as diferenças entre  $b_0$  e (6.6) e entre  $a_0$  e (6.7). A correspondente reta resistente ajustada é

$$\widetilde{y}_i = a_0 + b_0 x_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

**Exemplo 6.11** Consideremos novamente os dados da Tabela 6.2 aos quais um modelo de regressão linear simples foi ajustado; tanto o gráfico de dispersão apresentado na Figura 6.8 quanto o gráfico de resíduos (Figura 6.9) revelam um ponto discrepante, (2; 61,1) que afeta as estimativas dos parâmetros do modelo. O gráfico de dispersão com a reta de mínimos quadrados e com a reta resistente está disposto na Figura 6.35.



**Figura 6.35:** Gráfico de dispersão com retas de mínimos quadrados (linha cheia) e resistente (linha tracejada) correspondentes ao ajuste do modelo de regressão linear simples aos dados da Tabela 6.3.

Como nesse caso  $n = 3 \times 5$ , consideramos os grupos E, C e D com 5 pontos cada. Os pontos resumo são  $(x_E, y_E) = (3, 0; 22, 2)$ ,  $(x_C, y_C) = (8, 0; 7, 4)$  e  $(x_D, y_D) = (13, 0; 13, 0)$  e as correspondentes estimativas resistentes são  $b_0 = -0,92$  e  $a_0 = 21,56$ . Portanto, a reta resistente estimada ou ajustada é

$$\tilde{v}_t = 21,56 - 0,92t.$$

Esta reta não é tão afetada pelo ponto discrepante (que não foi eliminado da análise).

### 9) Formulação geral do modelo de regressão

O modelo de regressão múltipla (6.21) pode ser escrito na forma

$$y_i = f(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta}) + e_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (6.35)$$

em que

$$f(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta}) = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_p x_{ip},$$

com  $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{ip})^\top$  e  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p)^\top$ . Esse modelo pode ser generalizado como

$$f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{j=0}^{M-1} \beta_j \phi_j(\mathbf{x}),$$

em que  $\phi_j(\cdot)$ ,  $j = 0, \dots, M-1$  com  $\phi_0(x) = 1$  são funções pertencentes a uma base de funções. Essa formulação é útil no contexto das **redes neurais** apresentadas no Capítulo 14.

Em notação matricial, temos

$$f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\beta}^\top \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}),$$

com  $\boldsymbol{\phi} = (\phi_0, \dots, \phi_{M-1})^\top$ .

O caso  $\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$  corresponde ao modelo de regressão linear múltipla. Outras bases comumente usadas são:

- a) polinômios [ $\phi_j(x) = x^j$ ];
- b) *splines*;
- c) gaussiana [ $\phi_j(x) = \exp\{-(x - \mu_j)/(2s)\}^2$ ], com  $\mu_j$  denotando parâmetros de posição e  $s$  denotando o parâmetro de dispersão;
- d) sigmoide [ $\phi_j(x) = \sigma\{(x - \mu_j)/s\}$ ] em que,  $\sigma(a)$  pode ser qualquer uma das funções (a)–(d) da Seção 13.3.
- e) Fourier, em que [ $\phi_j(x)$ ] é uma cossenoide [ver Morettin (2014)].
- f) ondaletas, em que [ $\phi_j(x)$ ] é uma ondaleta [ver Morettin (2014)].

Toda a teoria de mínimos quadrados assim como as técnicas de regularização (ver Capítulo 11) podem ser aplicados a essa formulação mais geral.

## 6.7 Exercícios

- 1) Considere o modelo

$$y_i = \beta x_i + e_i, \quad i = 1, \dots, n$$

em que  $E(e_i) = 0$  e  $\text{Var}(e_i) = \sigma^2$  são erros aleatórios não correlacionados.

- a) Obtenha o estimador de mínimos quadrados de  $\beta$  e proponha um estimador não enviesado para  $\sigma^2$ .
  - b) Especifique a distribuição aproximada do estimador de  $\beta$ .
  - c) Especifique um intervalo de confiança aproximado para o parâmetro  $\beta$  com coeficiente de confiança  $\gamma$ ,  $0 < \gamma < 1$ .
- 2) Considere o modelo especificado no Exercício 1 e mostre que o parâmetro  $\beta$  corresponde à variação esperada para a variável  $Y$  por unidade de variação da variável  $X$ .  
**Sugestão:** Subtraia  $E(y_i|x_i)$  de  $E(y_i|x_i + 1)$ .
  - 3) Para investigar a associação entre tipo de escola (particular ou pública), cursada por calouros de uma universidade e a média no curso de Cálculo I, obtiveram-se os seguintes dados:

Escola	Média no curso de Cálculo I									
Particular	8,6	8,6	7,8	6,5	7,2	6,6	5,6	5,5	8,2	
Pública	5,8	7,6	8,0	6,2	7,6	6,5	5,6	5,7	5,8	

Seja  $y_i$  a nota obtida pelo  $i$ -ésimo aluno,  $x_i = 1$  se o aluno cursou escola particular e  $x_i = -1$  se o aluno cursou escola pública,  $i = 1, \dots, 18$ . Considere o modelo  $y_i = \alpha + \beta x_i + e_i$ ,  $i = 1, \dots, 18$ , em que os  $e_i$  são erros aleatórios não correlacionados com  $E(e_i) = 0$  e  $\text{Var}(e_i) = \sigma^2$ .

- i) Interprete os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ .
  - ii) Estime  $\alpha$  e  $\beta$  pelo método de mínimos quadrados. Obtenha também uma estimativa de  $\sigma^2$ .
  - iii) Avalie a qualidade do ajuste do modelo por meio de técnicas de diagnóstico.
  - iv) Construa intervalos de confiança para  $\alpha$  e  $\beta$ .
  - v) Com base nas estimativas obtidas no item ii), construa intervalos de confiança para os valores esperados das notas dos alunos das escolas particulares e públicas.
  - vi) Ainda utilizando o modelo proposto, especifique e teste a hipótese de que ambos os valores esperados são iguais.
  - vii) Repita os itens i)-vi) definindo  $x_i = 1$  se o aluno cursou escola particular e  $x_i = 0$  se o aluno cursou escola pública,  $i = 1, \dots, 18$ .
- 4) Num estudo realizado na Faculdade de Medicina da Universidade de São Paulo foram colhidos dados de 16 pacientes submetidos a transplante inter vivos e em cada um deles obtiveram-se medidas tanto do peso ( $g$ ) real do lobo direito do fígado quanto de seu volume ( $cm^3$ ) previsto pré operatoricamente por métodos ultrassonográficos. O objetivo é estimar o peso real por meio do volume previsto. Os dados estão dispostos na Tabela 6.14.
- i) Proponha um modelo de regressão linear simples para analisar os dados e interprete seus parâmetros.
  - ii) Construa um gráfico de dispersão apropriado.
  - iii) Ajuste o modelo e utilize ferramentas de diagnóstico para avaliar a qualidade do ajuste.
  - iv) Construa intervalos de confiança para seus parâmetros.
  - v) Construa uma tabela com intervalos de confiança para o peso esperado do lobo direito do fígado correspondentes a volumes (estimados ultrassonograficamente) de 600, 700, 800, 900 e 1000  $cm^3$ .
  - vi) Repita os itens anteriores considerando um modelo linear simples sem intercepto. Qual dos dois modelos você acha mais conveniente? Justifique a sua resposta.

**Tabela 6.14:** Peso real e volume obtido ultrassonograficamente do lobo direito do fígado de pacientes submetidos a transplante

Volume USG ( $cm^3$ )	Peso real ( $g$ )	Volume USG ( $cm^3$ )	Peso real ( $g$ )
656	630	737	705
692	745	921	955
588	690	923	990
799	890	945	725
766	825	816	840
800	960	584	640
693	835	642	740
602	570	970	945

- 5) Os dados da Tabela 6.15 são provenientes de uma pesquisa cujo objetivo é propor um modelo para a relação entre a área construída de um determinado tipo de imóvel e o seu preço.

**Tabela 6.15:** Área e Preço de imóveis

Imóvel	Área ( $m^2$ )	Preço (R\$)
1	128	10.000
2	125	9.000
3	200	17.000
4	4.000	200.000
5	258	25.000
6	360	40.000
7	896	70.000
8	400	25.000
9	352	35.000
10	250	27.000
11	135	11.000
12	6.492	120.000
13	1.040	35.000
14	3.000	300.000

- i) Construa um gráfico de dispersão apropriado para o problema.
- ii) Ajuste um modelo de regressão linear simples e avalie a qualidade do ajuste (obtenha estimativas dos parâmetros e de seus erros padrões, calcule o coeficiente de determinação e construa gráficos de resíduos e um gráfico do tipo QQ).
- iii) Ajuste o modelo linearizável (por meio de uma transformação logarítmica)

$$y = \beta x^\gamma e$$

em que  $y$  representa o preço e  $x$  representa a área e avalie a qualidade do ajuste comparativamente ao modelo linear ajustado no item ii); construa um gráfico de dispersão com os dados transformados.

- iv) Utilizando o modelo com o melhor ajuste, construa intervalos de confiança com coeficiente de confiança (aproximado) de 95% para os preços esperados de imóveis com  $200m^2$ ,  $500m^2$  e  $1000m^2$ .
- 6) Os dados abaixo correspondem ao faturamento de empresas similares de um mesmo setor industrial nos últimos 15 meses.

mês	jan	fev	mar	abr	mai	jun	jul	ago
vendas	1,0	1,6	1,8	2,0	1,8	2,2	3,6	3,4
mês	set	out	nov	dez	jan	fev	mar	
vendas	3,3	3,7	4,0	6,4	5,7	6,0	6,8	

Utilize técnicas de análise de regressão para quantificar o crescimento do faturamento de empresas desse setor ao longo do período observado, Com essa finalidade:

- a) Proponha um modelo adequado, interpretando todos os parâmetros e especificando as suposições.
- b) Estime os parâmetros do modelo e apresente os resultados numa linguagem não técnica.
- c) Utilize técnicas de diagnóstico para avaliar o ajuste do modelo.
- 7) A Tabela 6.16 contém dados obtidos de diferentes institutos de pesquisa coletados entre fevereiro de 2008 e março de 2010 e correspondem às porcentagens de eleitores favoráveis a cada um dos dois principais candidatos à presidência do Brasil.
- a) Construa um diagrama de dispersão apropriado, evidenciando os pontos correspondentes a cada um dos candidatos.
- b) Especifique um modelo polinomial de segundo grau, homocedástico, que represente a variação da preferência eleitoral de cada candidato ao longo do tempo.
- c) Ajuste o modelo especificado no item anterior.
- d) Avalie o ajuste do modelo e verifique, por meio de testes de hipóteses adequadas, se ele pode ser simplificado; em caso afirmativo, ajuste o modelo mais simples.
- e) Com base no modelo escolhido, estime a porcentagem esperada de eleitores favoráveis a cada um dos candidatos em 3 de outubro de 2010 e construa um intervalo de confiança para a diferença entre essas porcentagens esperadas.
- f) Faça uma crítica da análise e indique o que poderia ser feito para melhorá-la (mesmo que não saiba implementar suas sugestões).

**Tabela 6.16:** Porcentagem de eleitores favoráveis

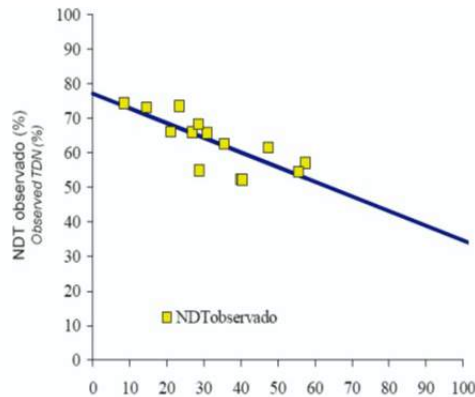
Fonte	Data	Dilma	Serra	Fonte	Data	Dilma	Serra
sensus	16/02/2008	4,5	38,2	sensus	13/08/2009	19	39,5
dataf	27/03/2008	3	38	ibope	04/09/2009	14	34
sensus	25/04/2008	6,2	36,4	sensus	14/09/2009	21,7	31,8
sensus	19/09/2008	8,4	38,1	ibope	20/11/2009	17	38
dataf	28/11/2008	8	41	vox	30/11/2009	17	39
sensus	30/11/2008	10,4	46,5	vox	07/12/2009	18	39
ibope	12/12/2008	5	42	dataf	14/12/2009	23	37
sensus	14/12/2008	13,3	42,8	vox	18/12/2009	27	34
dataf	30/01/2009	11	41	sensus	17/01/2010	27	33,2
sensus	19/03/2009	16,3	45,7	ibope	29/01/2010	25	36
dataf	27/03/2009	16	38	dataf	06/02/2010	28	32
sensus	28/05/2009	23,5	40,4	ibope	25/02/2010	30	35
ibope	29/05/2009	18	38	dataf	27/03/2010	27	36
dataf	01/06/2009	17	36	vox	31/03/2010	31	34

- 8) Uma fábrica de cadeiras dispõe dos seguintes dados sobre sua produção mensal:

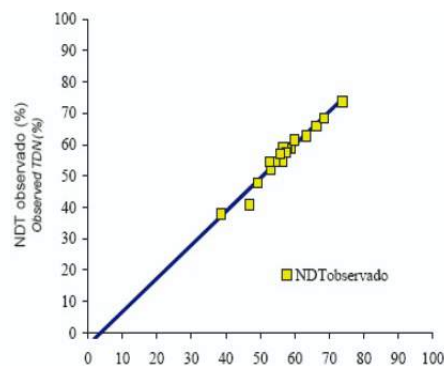
Número de cadeiras produzidas	105	130	141	159	160	172
Custos fixos e variáveis (R\$)	1700	1850	1872	1922	1951	1970

- a) Proponha um modelo de regressão linear simples para a relação entre o custo e o número de cadeiras produzidas e interprete os parâmetros.
- b) Utilize um intervalo de confiança com coeficiente de confiança de 95% para estimar o custo esperado de produção para 200 cadeiras. Observe que o modelo proposto tem respaldo estatístico para valores do número de cadeiras variando entre 105 e 172; inferência para valores fora desse intervalo dependem da suposição de que o modelo também é válido nesse caso.
- c) Admitindo que o preço de venda é de R\$ 20,00 por unidade, qual a menor quantidade de cadeiras que deve ser produzida para que o lucro seja positivo?
- 9) Considere a seguinte reta de regressão ajustada a um conjunto de dados em que se pretendia estimar o volume de certos recipientes ( $V$ ) a partir de seus diâmetros ( $D$ ):  $E(V) = 7,68 + 0,185D$
- Podemos dizer que:
- a) O volume esperado não pode ser estimado a partir do diâmetro.
- b) O coeficiente de correlação linear entre as duas variáveis é nulo.
- c) Há um aumento médio de 0,185 unidades no volume com o aumento de uma unidade de diâmetro.
- d) O valor estimado do volume é 7,68 unidades para diâmetros iguais a 1 unidade.
- 10) No artigo intitulado “Estimativas do Valor Energético a partir de Características Químicas e Bromatológicas dos Alimentos” (Rev. Bras. Zootec., 30: 1837-1856, 2001) estudou-se a disponibilidade de energia de alimentos considerando os nutrientes digestíveis totais (NDT) e também as análises químicas e metabólicas das dietas. Nele se apresentam os gráficos indicados nas Figuras 6.36 e 6.37:





**Figura 6.36:** Relação entre o NDT e a fibra em detergente ácido (FDA) nas dietas totais. A linha contínua representa a reta obtida pela equação de regressão  $NDT=77,13-0,4250 \text{ FDA}$  ( $R^2=0,59$  ;  $P<0,01$ ).



**Figura 6.37:** Relação entre o NDT e a digestibilidade da matéria seca (DMS) nas dietas totais. A linha contínua representa a reta obtida pela equação de regressão  $NDT=3,84+1,064 \text{ DMS}$  ( $R^2=0,96$  ;  $P<0,01$ ).

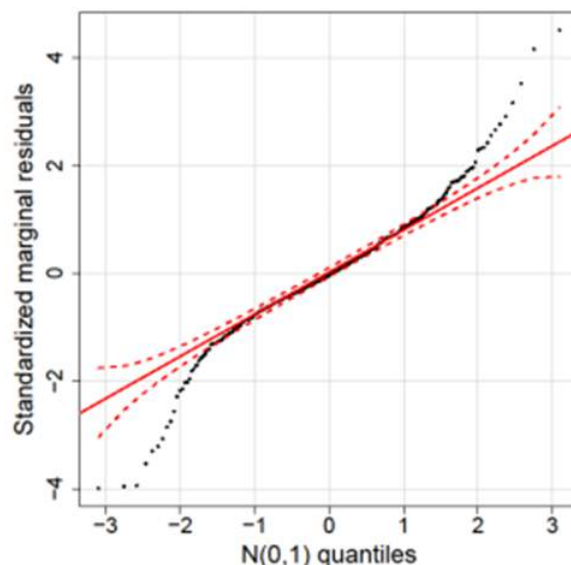
- a) Qual variável (FDA ou DMS) tem maior correlação linear com o NDT? Justifique.
  - b) Calcule o valor esperado de NDT para porcentagem da digestibilidade da matéria seca igual a 47.
- 11) Para avaliar o efeito da dose ( $D$ ) de uma certa droga na redução da pressão arterial ( $RedPA$ ) controlando o sexo ( $S$ ) do paciente, o seguinte modelo de regressão foi ajustado a um conjunto de dados:

$$E(RedPA) = 2 + 0,3S + 1,2(D - 10)$$

em que  $S = 0$  (Masculino) e  $S = 1$  (Feminino). Indique a resposta correta:

- a) A redução esperada da  $PA$  (mmHg) para uma dose de 20 mg é igual para homens e mulheres.
- b) Com dose de 10 mg, a redução de  $PA$  esperada para mulheres é menor do que para homens.
- c) O coeficiente da variável Sexo não poderia ser igual a 0,3.

- d) Uma dose de 20 mg reduz a *PA* esperada para homens de 12 mmHg  
 e) Nenhuma das anteriores.
- 12) O gráfico QQ da Figura ?? corresponde ao ajuste de um modelo de regressão linear múltipla.



**Figura 6.38:** Gráfico QQ correspondente ajuste de um modelo de regressão linear múltipla.

Pode-se afirmar que:

- a) Há indicações de que a distribuição dos erros é Normal.  
 b) Há evidências de que a distribuição dos erros é assimétrica.  
 c) Há evidências de que a distribuição dos erros tem caudas mais leves do que aquelas da distribuição Normal.  
 d) Há evidências de que a distribuição dos erros tem caudas mais pesadas que aquelas da distribuição Normal.  
 e) Nenhuma das anteriores.
- 13) Para o Exemplo 6.2, use a função `lm()` para ajustar o modelo contendo termos quadrático e cúbico.
- 14) Considere o modelo ajustado para o Exemplo 6.3, usando a função `lm()` e avalie a qualidade do ajuste utilizando todas as técnicas de diagnóstico discutidas neste capítulo.
- 15) Mostre que  $SQTot = SQRes + SQReg$ .
- 16) Os dados disponíveis no arquivo `profilaxia` são provenientes de um estudo realizado na Faculdade de Odontologia da Universidade de São Paulo para avaliar o efeito do uso contínuo de uma solução para bochecho no pH da placa bacteriana dentária. O pH da placa dentária retirada de 21 voluntários antes e depois de um período de uso de uma solução para bochecho foi avaliado ao longo de 60 minutos após a adição de sacarose ao meio em que as unidades experimentais foram colocadas.

- a) Construa um gráfico de perfis para os dados obtidos antes do período de uso da solução para bochecho. Obtenha a matriz de covariâncias bem como o gráfico do desenhista correspondente.
  - b) Concretize as solicitações do item a) para os dados obtidos após a utilização da solução para bochecho.
  - c) Construa gráficos de perfis médios para os dados obtidos antes e depois da utilização da solução para bochecho colocando-os no mesmo painel.
  - d) Com base nos resultados dos itens a)-c), proponha um modelo de regressão polinomial que permita a comparação dos parâmetros correspondentes.
- 17) Os dados disponíveis no arquivo **esforco** são oriundos de um estudo realizado na Faculdade de Medicina da Universidade de São Paulo para avaliar pacientes com insuficiência cardíaca. Foram estudados 87 pacientes com algum nível de insuficiência cardíaca avaliada pelo critério NYHA, além de 40 pacientes controle (coluna K). Para cada paciente foram registradas algumas características físicas (altura, peso, superfície corporal, idade, sexo). Eles foram submetidos a um teste de esforço cardiopulmonar em cicloergômetro em que foram medidos a frequência cardíaca, o consumo de oxigênio, o equivalente ventilatório de oxigênio, o equivalente ventilatório de dióxido de carbono, o pulso de oxigênio e a pressão parcial de dióxido de carbono ao final da expiração, em três momentos diferentes: no limiar anaeróbio, no ponto de compensação respiratória e no pico do exercício.

Ajuste um modelo linear tendo como variável resposta o consumo de oxigênio no pico do exercício (coluna AW) e como variáveis explicativas a carga na esteira ergométrica (coluna AU), a classificação NYHA (coluna K) além de frequência cardíaca (coluna AV), razão de troca respiratória (coluna AX), peso (coluna H), sexo (coluna D) e idade (coluna F). Com essa finalidade, você deve:

- a) Construir gráficos de dispersão convenientes.
  - b) Interpretar os diferentes parâmetros do modelo.
  - c) Estimar os parâmetros do modelo e apresentar os respectivos erros padrões.
  - d) Avaliar a qualidade do ajuste do modelo por meio de gráficos de diagnóstico (resíduos, QQ, distância de Cook, etc).
  - e) Identificar as variáveis significativas.
  - f) Reajustar o modelo com base nas conclusões do item (e) e avaliar o seu ajuste.
  - g) Apresentar conclusões evitando jargão técnico.
- 18) Para estudar a associação entre gênero (1=Masc, 0=Fem) e idade (anos) e a preferência (1=sim, 0=não) pelo refrigerante Kcola, o seguinte modelo de regressão logística foi ajustado aos dados de 50 crianças escolhidas ao acaso:

$$\log \left\{ \frac{\pi_i(x_i, w_i)}{1 - \pi_i(x_i, w_i)} \right\} = \alpha + \beta x_i + \gamma(w_i - 5),$$

em que  $x_i$  ( $w_i$ ) representa o gênero (idade) da  $i$ -ésima criança e  $\pi_i(x_i, w_i)$  a probabilidade de uma criança do gênero  $x_i$  e idade  $w_i$  preferir Kcola. As seguintes estimativas para os parâmetros foram obtidas:

Parâmetro	Estimativa	Erro padrão	Valor p
$\alpha$	0,69	0,12	< 0,01
$\beta$	0,33	0,10	< 0,01
$\gamma$	-0,03	0,005	< 0,01

- a) Interprete os parâmetros do modelo por intermédio de chances e razões de chances.
  - b) Com as informações acima, estime a razão de chances de preferência por Kcola correspondente à comparação de crianças do mesmo gênero com 10 e 15 anos.
  - c) Construa intervalos de confiança (com coeficiente de confiança aproximado de 95%) para  $\exp(\beta)$  e  $\exp(\gamma)$  e traduza o resultado em linguagem não técnica.
  - d) Estime a probabilidade de meninos com 15 anos preferirem Kcola.
- 19) Mostre que as expressões (6.29) e (6.30) são equivalentes e que garantem que a probabilidade de que  $Y = 1$  estará no intervalo  $(0, 1)$  independentemente dos valores de  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $x_i$ .
  - 20) Mostre que o parâmetro  $\beta$  no modelo (6.29) corresponde ao logaritmo da razão de chances de resposta positiva para pacientes com diferença de uma unidade na variável explicativa.
  - 21) Os dados da Tabela 6.17 contem dados de uma investigação cujo objetivo era estudar a relação entre a duração de diabete e a ocorrência de retinopatia (uma moléstia dos olhos). Ajuste um modelo de regressão logística para avaliar a intensidade dessa relação.

**Sugestão:** Considere o ponto médio de cada intervalo como valor da variável explicativa.

**Tabela 6.17:** Frequências de retinopatia

Duração da Diabete (anos)	Retinopatia	
	Sim	Não
0 - 2	17	215
3 - 5	26	218
6 - 8	39	137
9 - 11	27	62
12 - 14	35	36
15 - 17	37	16
18 - 20	26	13
21 - 23	23	15

- 22) Considere os dados do arquivo `endometriose2`. Com objetivo inferencial, ajuste um modelo de regressão logística, tendo `endometriose` como variável resposta e `idade`, `dormenstrual`, `dismenorreia` e `tipoesteril` como variáveis explicativas. Interprete os coeficientes do modelo em termos de chances e razões de chances.

---

# Análise de Sobrevivência

All models are wrong, but some are useful.

George Box

## 7.1 Introdução

Análise de Sobrevivência lida com situações em que o objetivo é avaliar o tempo decorrido até a ocorrência de um ou mais eventos, como a morte ou cura de pacientes submetidos a um certo tratamento, a quebra de um equipamento mecânico ou o fechamento de uma conta bancária. Em Engenharia, esse tipo de problema é conhecido sob a denominação de **Análise de Confiabilidade**.

Nesse contexto, duas características são importantes: as definições do tempo de sobrevivência e do evento, também chamado de **falha**.<sup>1</sup> Nosso objetivo aqui é apresentar os principais conceitos envolvidos nesse tipo de análise. O leitor pode consultar Colosimo e Giolo (2006) ou Lee and Wang (2003) entre outros para uma exposição mais detalhada.

Um dos problemas encontrados em estudos de sobrevivência é que nem sempre o instante de ocorrência do evento e conseqüentemente, o tempo exato de sobrevivência são conhecidos. Essa característica é conhecida como **censura** (à direita). No entanto, sabe-se que o tempo é maior que um determinado valor chamado de **tempo de censura** (ver Nota de Capítulo 1). No caso de estudos na área de saúde, possíveis razões para censura são

- i) o evento não ocorre antes do fim do estudo;
- ii) há perda de contacto com o paciente durante o estudo;
- iii) o paciente sai do estudo por outros motivos (morte por outra razão/fim do tratamento devido a efeitos colaterais etc.).

Por esse motivo, a variável resposta de estudos de sobrevivência é definida pelo par  $(T, \delta)$  em que  $T$  é o tempo associado a cada unidade amostral e  $\delta$  é um indicador de censura, com valor 1 quando ocorre a falha e 0 em caso contrário (censura). Um exemplo de organização de dados dessa natureza está apresentado na Tabela 7.1.

---

<sup>1</sup>Apesar dessa terminologia, falha pode ter tanto uma conotação negativa, como a morte de um paciente, quanto positiva, como a sua cura.

**Tabela 7.1:** Modelo para organização de dados censurados

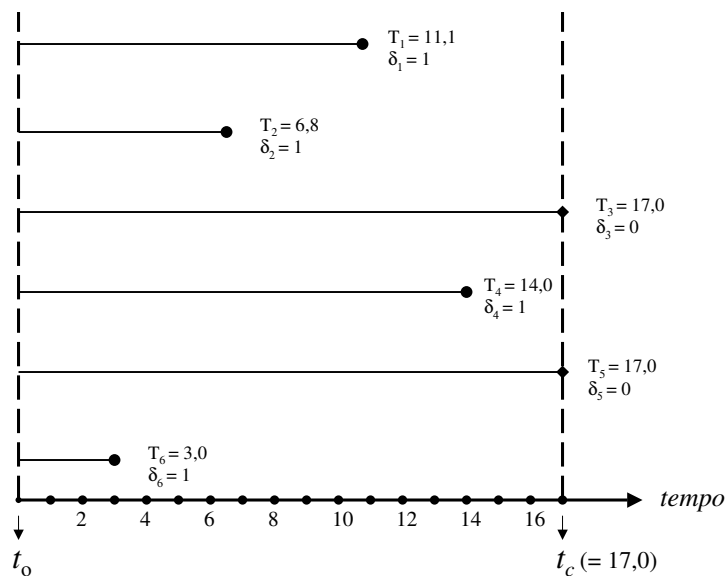
Unidade amostral	Tempo	Censura
A	5.0	1
B	12.0	0
C	3.5	0
D	8.0	0
E	6.0	0
F	3.5	1

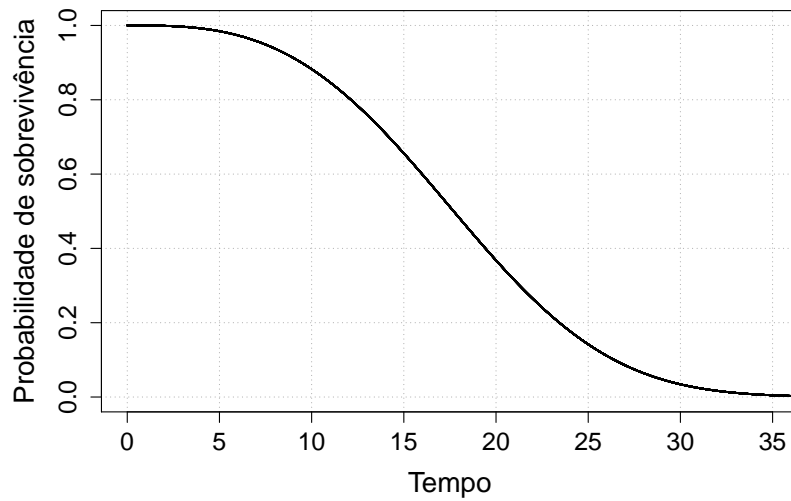
Um esquema indicando a estrutura de dados de sobrevivência está disposto na Figura 7.1 em que  $t_0$  e  $t_c$  indicam, respectivamente, os instantes de início e término do estudo. Os casos com  $\delta = 1$  indicam falhas e aqueles com  $\delta = 0$  indicam censuras.

Para caracterizar a variável resposta (que é positiva) usualmente emprega-se a **função de sobrevivência** definida como

$$S(t) = P(T > t) = 1 - P(T \leq t) = 1 - F(t)$$

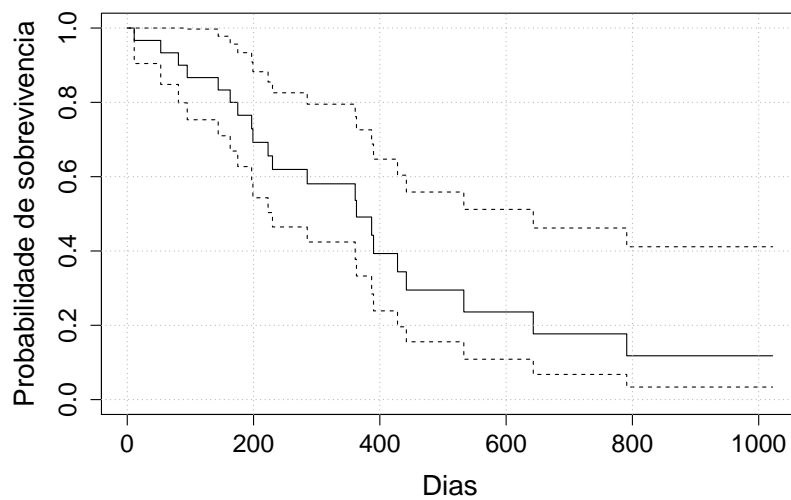
em que  $F(t)$  é a função distribuição acumulada da variável  $T$ . Essencialmente, a função de sobrevivência calculada no instante  $t$  é a probabilidade de sobrevivência por mais do que  $t$ . Uma representação gráfica da função de sobrevivência está apresentada na Figura 7.2.

**Figura 7.1:** Representação esquemática de dados de sobrevivência.



**Figura 7.2:** Função de sobrevivência teórica.

Na prática, como os tempos em que ocorrem falhas são medidos como variáveis discretas, a função de sobrevivência tem o aspecto indicado na Figura 7.3. Os “saltos” ocorrem nos instantes em que há falhas. Em muitos casos, as censuras também são representadas nesse tipo de gráfico como veremos adiante.



**Figura 7.3:** Função de sobrevivência observada.

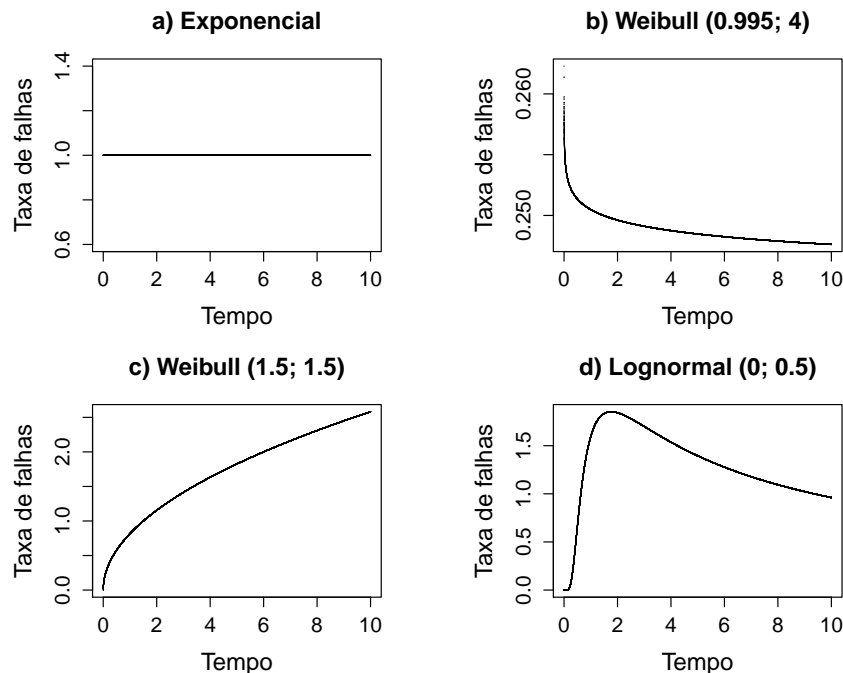
Outra função de interesse na análise de dados de sobrevivência é a **função de risco** (*hazard function*) também conhecida como **função de taxa de falhas**,

definida como

$$h(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T < t + dt | T \geq t)}{dt} \approx \frac{P(T = t)}{P(T > t)}.$$

Essencialmente, essa função corresponde ao “potencial instantâneo de ocorrência do evento de interesse por unidade de tempo, dado que a falha não ocorreu até o instante  $t$ ”, ou seja, “ao risco de ocorrência do evento de interesse no instante  $t$  para uma unidade amostral ainda não sujeita ao evento”. Note que  $h(t) \geq 0$  e não tem um valor máximo (pode ser infinito). Na prática, essa função dá uma ideia do comportamento da taxa condicional de falha e fornece informação para a escolha de um modelo probabilístico adequado ao fenômeno estudado.

Exemplos de funções de risco com diferentes padrões estão apresentados na Figura 7.4. No painel a), o risco de falha é constante e corresponde ao risco para pessoas saudias, por exemplo; nesse caso, um modelo probabilístico adequado é o **modelo exponencial**. No painel b), o risco de falha decresce com o tempo e usualmente é empregado para representar riscos pós cirúrgicos; um modelo probabilístico adequado nesse caso é um modelo **modelo Weibull**. No painel c), o risco de falha cresce com o tempo e usualmente é empregado para representar o risco para pacientes com alguma doença grave; um modelo probabilístico adequado também é um modelo Weibull. No painel d), inicialmente o risco de falha cresce e posteriormente decresce, sendo adequado para situações em que um tratamento tem um certo tempo para fazer efeito, por exemplo; um modelo probabilístico adequado nesse caso, é o **modelo log normal**.



**Figura 7.4:** Exemplos de funções de risco

As funções de sobrevivência e de risco contêm a mesma informação e cada uma delas pode ser obtida a partir da outra por meio das relações

$$h(t) = -\frac{S'(t)}{S(t)} \quad \text{e} \quad S(t) = \exp\left[-\int_0^t h(s) ds\right]$$



em que  $S'(t)$  indica a derivada de  $S$  calculada no instante  $t$ .

A **função de risco acumulado** (ou de **taxa de falhas acumuladas**) é definida como

$$H(t) = \int_0^t h(s) ds.$$

Os objetivos operacionais da Análise de Sobrevivência são:

- a) estimar e interpretar a função de sobrevivência;
- b) interpretar funções de risco;
- c) comparar funções de sobrevivência (ou funções de risco);
- d) averiguar a contribuição de fatores de interesse (variáveis explicativas) para a ocorrência de falhas.

## 7.2 Estimação da função de sobrevivência

Para dados não censurados, a função distribuição empírica da variável  $T$  é

$$\hat{F}(t) = \frac{\text{número de observações } \leq t}{\text{número de observações}}$$

e conseqüentemente, um estimador da função de sobrevivência é  $\hat{S}(t) = 1 - \hat{F}(t)$ . Para dados censurados, o **estimador de Kaplan-Meier** também conhecido como **estimador do limite de produtos** (*product limit estimator*) é o mais utilizado na prática e é baseado na representação da sobrevivência num instante  $t$  como um produto de probabilidades condicionais de sobrevivência a intervalos de tempo disjuntos anteriores a  $t$ . Consideremos um exemplo em que o tempo até a cura de uma moléstia é medido em dias e que ocorreram falhas nos instantes  $t = 2$ ,  $t = 5$  e  $t = 8$ ; a função de sobrevivência calculada no dia 10 (aqui interpretada como a probabilidade de cura após o décimo dia) pode ser calculada a partir de

$$\begin{aligned} S(10) &= P(T > 10) = P(T > 10 \cap T > 8) = P(T > 10 | T > 8) P(T > 8) \\ &= P(T > 10 | T > 8) P(T > 8 | T > 5) P(T > 5) \\ &= P(T > 10 | T > 8) P(T > 8 | T > 5) P(T > 5 | T > 2) P(T > 2). \end{aligned}$$

Lembrando que  $t_{(0)} = t_0 = 0$  corresponde ao início do estudo, e que  $S(0) = P(T > 0) = 1$ , podemos generalizar esse resultado, obtendo

$$S[t_{(j)}] = \prod_{i=1}^j P[T > t_{(i)} | P(T > t_{(i-1)})].$$

Na prática, para a estimação da função de sobrevivência, os instantes ordenados  $t_{(j)}$  de interesse são aqueles em que ocorreram falhas ou censuras. Definindo  $R[t_{(i)}]$  como o número de unidades em risco, *i.e.*, para as quais o evento de interesse não ocorreu ou que não foram censuradas até o instante  $t_{(i)}$  e  $M_i$  como o número de falhas ocorridas exatamente nesse instante, uma estimativa da probabilidade de que uma unidade sobreviva ao instante  $t_{(i)}$  é

$$P(T > t_{(i)}) = \{R[t_{(i)}] - M_i\} / R[t_{(i)}] = 1 - M_i / R[t_{(i)}].$$

Nesse contexto, o estimador de Kaplan-Meier para a curva de sobrevivência é definido como

$$\hat{S}(t) = 1 \text{ se } t < t_{(1)}$$

e

$$\widehat{S}(t) = \prod_{t_{(i)} < t} \{1 - M_i/R[t_{(i)}]\} \text{ se } t_{(i)} < t.$$

A variância desse estimador pode ser estimada pela **fórmula de Greenwood**

$$\widehat{\text{Var}}[\widehat{S}(t)] = [\widehat{S}(t)]^2 \sum_{t_{(i)} < t} \frac{M_i}{R[t_{(i)}]\{R[t_{(i)}] - M_i\}}.$$

Para detalhes, consulte Lee e Wang (2003), entre outros. O **tempo médio de acompanhamento limitado à duração do estudo ( $T$ )** é definido como

$$\mu_T = \int_0^T S(t) dt.$$

e pode ser estimado pela área sob a curva baseada no estimador de Kaplan-Meier

$$\widehat{\mu}_T = \sum_{t_{(k)} \leq T} \widehat{S}(t_{(k-1)})[t_{(k)} - t_{(k-1)}].$$

Essencialmente,  $\widehat{\mu}_T$  corresponde à soma das áreas dos retângulos cujas bases são os *plateaux* definidos pelas falhas consecutivas no gráfico de  $\widehat{S}(t)$  (veja a Figura 7.3). Um estimador da variância de  $\widehat{\mu}_T$  é

$$\widehat{\text{Var}}(\widehat{\mu}_T) = \sum_{j=1}^D \left\{ \sum_{i=j}^D [\widehat{S}(t_{(i)})[t_{(i+1)} - t_{(i)}]]^2 \frac{M_j}{R_{(j)}[R_{(j)} - M_j]} \right\}$$

em que  $R[t_{(j)}]$  representa o número de unidades em risco,  $M_j$  é o número de falhas ocorridas exatamente nesse instante e  $D$  representa o número de instantes distintos em que ocorreram eventos.

Além disso, um estimador do **tempo mediano de sobrevivência** é

$$\widehat{t}_{med} = \{\inf t : \widehat{S}(t) \leq 0.5\}$$

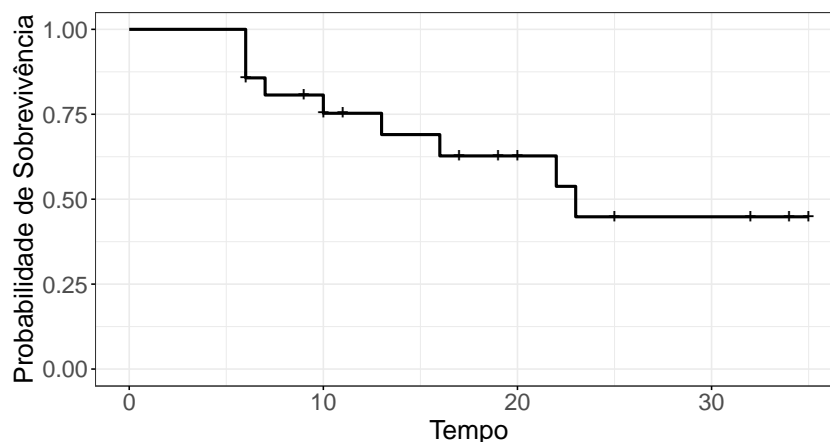
ou seja, é o menor valor de  $t$  para o qual o valor da função de sobrevivência  $\widehat{S}(t)$  é menor ou igual a 0,5. De uma forma mais geral, um estimador do  $p$ -ésimo quantil ( $0 < p < 1$ ) do tempo de sobrevivência é  $\widehat{t}_p = \{\inf t : \widehat{S}(t) \leq 1 - p\}$ . Expressões para as correspondentes variâncias são bastante complicadas e não são indicadas neste texto. Em geral, os pacotes computacionais calculam intervalos de confiança para os quantis.

**Exemplo 7.1:** Consideremos um conjunto de  $n = 21$  unidades para as quais os tempos de falhas ou censuras (representadas por +) são 6, 6, 6, 7, 10, 13, 16, 22, 23, 6+, 9+, 10+, 11+, 17+, 19+, 20+, 25+, 32+, 32+, 34+, 35+. Para efeito do cálculo do estimador de Kaplan-Meier, convém dispor os dados com o formato das quatro primeiras colunas da Tabela 7.2.

**Tabela 7.2:** Formato apropriado para cálculo do estimador de Kaplan-Meier (Exemplo 7.1)

$j$	Tempo $t_{(j)}$	Falhas em $t_{(j)}$	Censuras em $(t_{(j-1)}, t_{(j)})$	Unidades em risco ( $R[t_{(j)}]$ )	$\hat{S}[t_{(j)}]$
0	0	0	0	21	1
1	6	3	0	21	$1 \times 18/21 = 0,86$
2	7	1	1	$17 = 21 - (3 + 1)$	$0,86 \times 16/17 = 0,81$
3	10	1	1	$15 = 17 - (1 + 1)$	$0,81 \times 14/15 = 0,75$
4	13	1	2	$12 = 15 - (1 + 2)$	$0,75 \times 11/12 = 0,69$
5	16	1	0	$11 = 12 - (1 + 0)$	$0,69 \times 10/11 = 0,63$
6	22	1	3	$7 = 11 - (1 + 3)$	$0,63 \times 6/7 = 0,54$
7	23	1	0	$6 = 7 - (1 + 0)$	$0,54 \times 5/6 = 0,45$

Um gráfico da função de sobrevivência estimada pelo método de Kaplan-Meier está apresentado na Figura 7.5. Os “saltos” representam as falhas e as cruzes representam as censuras. Esse gráfico pode ser obtido por meio das funções `Surv()`, `survfit()` e `ggsurvplot()` dos pacotes `survival` e `survminer`.

**Figura 7.5:** Curva de sobrevivência estimada para o Exemplo 7.1.

Para o Exemplo 7.1, o tempo médio de acompanhamento é 23,3 (com erro padrão 2,8) e o tempo mediano de sobrevivência é 23,0 (com erro padrão 5,3).

**Exemplo 7.2:** Num estudo realizado no Instituto de Ciências Biológicas (ICB) da Universidade de São Paulo, o objetivo era verificar se lesões em áreas do sistema nervoso de ratos influenciam o padrão de memória. Com essa finalidade, três grupos de ratos foram submetidos a diferentes tipos de cirurgias, a saber,

GRUPO 1: em que lesões pequenas foram induzidas no giro denteado dorsal (região supostamente envolvida com memória espacial);

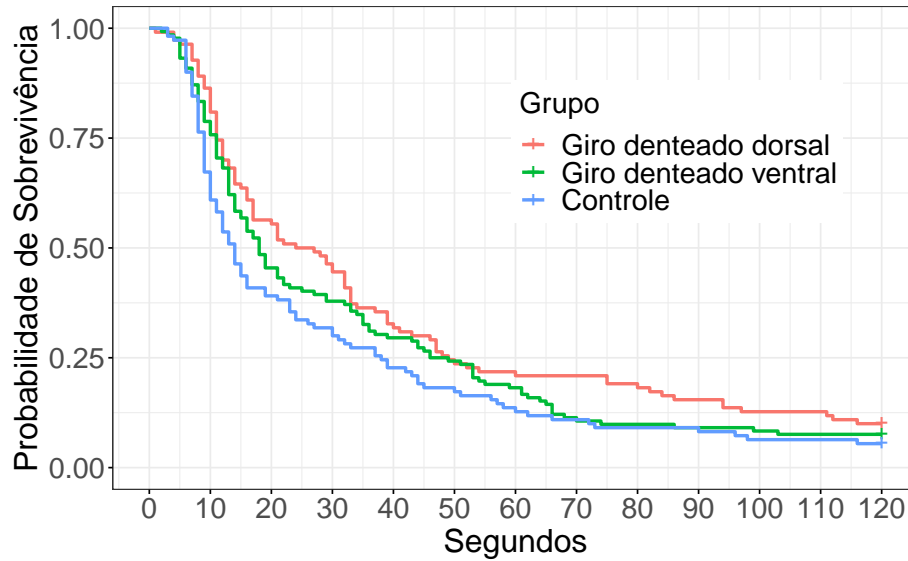
GRUPO 2: em que lesões pequenas foram induzidas no giro denteado ventral;

GRUPO 3: (controle) em que apenas o trauma cirúrgico (sem lesões induzidas) foi aplicado.

Após a recuperação da cirurgia, os ratos foram submetidos a um treinamento em que eram deixados em uma piscina de água turva contendo uma plataforma fixa. Se não encontrasse a plataforma em até 2 minutos, o rato era conduzido até ela. Após uma semana, mediu-se o tempo até o rato encontrar a plataforma. Nesse estudo, a variável resposta é o tempo até o encontro da plataforma (evento ou falha). A origem do tempo é o instante em que o animal é colocado na piscina. A censura ocorreu para os animais que não encontraram a plataforma em até 2 minutos. Os dados estão disponíveis no arquivo `piscina`.

Estimativas para as curvas de sobrevivência referentes ao Exemplo 7.2 estão dispostas na Figura 7.6 e estatísticas daí decorrentes, na Tabela 7.3. Os comandos utilizados para a obtenção desses resultados são

```
surv_object <- Surv(time = ratos$Tempo, event = ratos$Delta)
mod1 <- survfit(surv_object ~ ratos$Grupo, data = ratos)
summary(mod1)
print(survfit(surv_object ~ ratos$Grupo, data = ratos), print.rmean=TRUE)
quant <- quantile(mod1, probs = c(0.25, 0.5, 0.75))
km <- ggsurvplot(mod1, data = ratos, xlab = "Segundos",
                 ylab = "Probabilidade de Sobrevivência",
                 conf.int = F, palette = 'colors', legend = c(0.7, 0.7),
                 legend.title = "Grupo",
                 legend.labs = c("Giro denteado dorsal", "Giro denteado ventral",
                                 "Controle"), break.x.by = 10,
                 ggtheme = theme_bw() + theme(aspect.ratio = 0.6),
                 font.x = c(20), font.y = c(20), font.tickslab = c(18),
                 font.legend = c(18))
```



**Figura 7.6:** Curvas de sobrevivências estimadas para os dados do Exemplo 7.2.

**Tabela 7.3:** Medidas resumo com erros padrões ou intervalos de confiança aproximados (95%) entre parênteses (Exemplo 7.2)

Tratamento	Censuras	Tempo Médio	Primeiro Quartil	Tempo Mediano	Terceiro Quartil
Grupo 1	10,0%	39,5 (3,5)	11	26 (17-33)	49 )
Grupo 2	7,6%	33,3 (2,8)	11	18 (15-25)	48
Grupo 3	5,5%	28,6 (3,0)	9	14 (11-19)	38

Em muitos casos, os arquivos com dados de sobrevivência contêm as datas de início do estudo e ocorrência do evento de interesse ou de censura e essas datas precisam ser transformadas em intervalos de tempo.

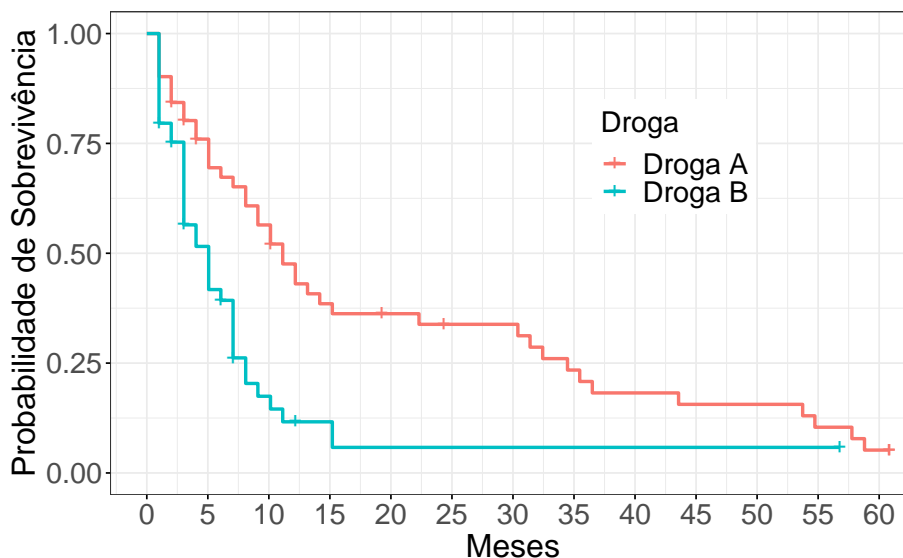
**Exemplo 7.3:** Os dados disponíveis no arquivo `hiv` foram obtidos de um estudo cujo objetivo era avaliar o efeito do uso de drogas intravenosas no tempo de sobrevivência de pacientes HIV positivos e têm o formato indicado na Tabela 7.4.

**Tabela 7.4:** Formato dos dados correspondentes ao Exemplo 7.3

ident	datainicio	datafim	idade	droga	delta
1	15mai90	14out90	46	0	1
2	19set89	20mar90	35	1	0
3	21abr91	20dez91	30	1	1
4	03jan91	04abr91	30	1	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
98	02abr90	01abr95	29	0	0
99	01mai91	30jun91	35	1	0
100	11mai89	10jun89	34	1	1

Nesse exemplo, a variável `delta = 1` indica a ocorrência do evento (óbito) e `delta = 0`, uma censura.

No exemplo, a primeira dificuldade é ler as datas no formato indicado utilizando alguma função do R. Uma sugestão é utilizar o comando `find/replace` ou equivalente na própria planilha em que os dados estão disponíveis e substituir `jan` por `/01/`, por exemplo. Em seguida pode-se utilizar a função `as.Date()` para transformar as datas no formato `dd/mm/aa` no número de dias desde 01 de janeiro de 1970, com datas anteriores assumindo valores negativos, deixando os dados no formato indicado na Tabela 7.1. Consequentemente, o intervalo de tempo entre as datas de início do estudo e aquela de ocorrência do evento ou de censura pode ser calculado por diferença. A partir daí podem-se utilizar as mesmas funções empregadas para análise do dados do Exemplo 7.2 para gerar as curvas de Kaplan-Meier dispostas na Figura 7.7.

**Figura 7.7:** Curvas de sobrevivência estimadas para o Exemplo 7.3.

**Tabela 7.5:** Estatísticas descritivas com erros padrões ou intervalos de confiança entre parênteses para os dados do Exemplo 7.3

Tratamento	Censuras	Tempo Médio	Primeiro Quartil	Tempo Mediano	Terceiro Quartil
Droga A	17,6%	20,3 (2,9)	5,1	11,1 (8,1 - 30,4)	34,5
Droga B	22,4%	8,4 (2,6)	3,0	5,1 (3,0 - 7,1)	8,1

### 7.3 Comparação de curvas de sobrevivência

Um dos problemas oriundos de estudos como aquele descrito no Exemplo 7.1 é a comparação das curvas de sobrevivência associadas aos tratamentos. Para efeito didático, simplifiquemos o problema, restringindo-nos à comparação das curvas de sobrevivência de dois grupos. Essencialmente, queremos saber se, com base nas curvas de Kaplan-Meier,  $\hat{S}_1(t)$  e  $\hat{S}_2(t)$ , obtidas de duas amostras podemos concluir que as curvas de sobrevivência  $S_1(t)$  e  $S_2(t)$ , associadas às populações de onde as amostras foram selecionadas, são iguais. Uma alternativa disponível para esse propósito é o teste *log rank*, baseado na comparação de valores esperados e observados.

Sejam  $t_{(j)}$ ,  $j = 1, \dots, J$  os tempos ordenados em que ocorreram falhas em qualquer dos dois grupos. Para cada um desses tempos, sejam  $R_{1j}$  e  $R_{2j}$  os números de unidades em risco nos grupos 1 e 2, respectivamente e seja  $R_j = R_{1j} + R_{2j}$ . Similarmente, sejam  $O_{1j}$  e  $O_{2j}$ , respectivamente, os números de falhas nos grupos 1 e 2 no tempo  $t_{(j)}$  e seja  $O_j = O_{1j} + O_{2j}$ . Dado o número de falhas (em ambos os grupos) ocorridas no tempo  $t_{(j)}$  é  $O_j$ , a estatística  $O_{1j}$  tem uma distribuição hipergeométrica quando a hipótese de igualdade das funções de sobrevivência é verdadeira. Sob essas condições, o valor esperado e a variância de  $O_{1j}$  são, respectivamente,

$$E(O_{1j}) = E_{1j} = O_{1j} \frac{O_j}{R_j} \quad \text{e} \quad \text{Var}(O_{1j}) = V_j = \frac{O_j(R_{1j}/R_j)(R_j - O_j)}{R_j - 1}.$$

A estatística *log rank* de teste,

$$LR = \frac{\sum_{j=1}^J [O_{1j} - E_{1j}]^2}{\sum_{j=1}^J V_j},$$

tem uma distribuição aproximada  $\chi_1^2$  (qui quadrado com um grau de liberdade) sob a hipótese nula.

A comparação das curvas de sobrevivência correspondentes aos efeitos das duas drogas consideradas no Exemplo 7.3 pode ser concretizada por meio do comando

```
survdif(Surv(hiv$tempomeses,hiv$delta) ~ hiv$droga)
```

cujo resultado é

```

      N Observed Expected (O-E)^2/E (O-E)^2/V
hiv$droga=0 51      42      54.9      3.02      11.9
hiv$droga=1 49      38      25.1      6.60      11.9
Chisq= 11.9 on 1 degrees of freedom, p= 6e-04
```

sugerindo uma diferença significativa ( $p < 0,001$ ) entre as curvas (populacionais) associadas.

Extensões desse teste para a comparação de três ou mais curvas de sobrevivência assim como outros testes construídos para os mesmos propósitos podem ser encontrados nas referências citadas no início deste capítulo. Para o Exemplo 7.2, a estatística de teste obtida com essa generalização tem valor 6,4 que comparado com uma distribuição qui-quadrado com 2 graus de liberdade sugere que as curvas de sobrevivência (populacionais) associadas aos três grupos são diferentes ( $p = 0,40$ ).

## 7.4 Regressão para dados de sobrevivência

Problemas em que o objetivo é avaliar o efeito de variáveis explicativas na distribuição do tempo de falhas (sobrevivência) são similares àqueles tratados no Capítulo 6 com a diferença de que a variável resposta (tempo) só pode assumir valores positivos. A distribuição adotada deve ser escolhida entre aquelas que têm essa característica como as distribuições exponencial, Weibull, log normal ou Birnbaum-Saunders entre outras. Modelos nessa classe são chamados **modelos paramétricos** e geralmente são expressos na forma do **modelo de tempo de falha acelerado** (*accelerated failure time models*),

$$\log(T) = \alpha + \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\beta} + \sigma e,$$

em que  $\alpha$  e  $\boldsymbol{\beta}$  são parâmetros,  $\mathbf{x}$  é um vetor com valores de variáveis explicativas,  $\sigma > 0$  é uma constante conhecida e  $e$  é um erro aleatório com distribuição de forma conhecida. Com uma única variável explicativa dicotômica com valores 0 ou 1, o modelo é

$$\log(T) = \alpha + \beta x + \sigma e.$$

O tempo de falha para uma unidade com  $x = 0$  é  $T_0 = \exp(\alpha + \sigma e)$ ; para uma unidade com  $x = 1$ , o tempo de falha é  $T_1 = \exp(\alpha + \beta + \sigma e)$ . Então, se  $\beta > 0$ , teremos  $T_1 > T_0$ ; por outro lado, se  $\beta < 0$ , teremos  $T_1 < T_0$  o que implica que a covariável  $x$  **acelera** ou **desacelera** o tempo de falha. A relação entre algumas distribuições para  $T$  e  $\log(T)$  está indicada na Tabela 7.6.

**Tabela 7.6:** Relação entre algumas distribuições para  $T$  e  $\log(T)$

Distribuição de	
$T$	$\log(T)$
exponencial	Valores extremos
Weibull	Valores extremos
log logística	logística
log normal	normal

Esses modelos podem ser ajustados por meio do método da máxima verossimilhança. A função `survreg()` pode ser utilizada com esse propósito. Detalhes podem ser obtidos nas referências citadas no início do capítulo.

Os comandos e o resultado do ajuste de um modelo de tempo de falha acelerado Weibull aos dados do Exemplo 7.2 são

```
> survreg(formula = Surv(ratos$Tempo, ratos$Delta) ~ factor(ratos$Grupo),
           data = ratos, dist = "weibull", scale = 1)
           Value Std. Error      z      p
```



```
(Intercept)          3.783      0.101 37.64 <2e-16
factor(ratos$Grupo)2 -0.199      0.135 -1.47 0.1407
factor(ratos$Grupo)3 -0.373      0.140 -2.66 0.0078
Scale fixed at 1
Weibull distribution
Loglik(model)= -1491.2   Loglik(intercept only)= -1494.7
Chisq= 7.1 on 2 degrees of freedom, p= 0.029
Number of Newton-Raphson Iterations: 4
```

Esses resultados sugerem que animais do Grupo 2 têm o tempo de falha retardado por um fator  $\exp(-0.199) = 0,82$  (IC95%: 0,79 - 0,85) relativamente aos animais do Grupo 1; para os animais do Grupo 3, esse fator de desaceleração é  $\exp(-0.373) = 0,69$  (IC95%: 0,66 - 0,72) relativamente aos animais do Grupo 1.

Uma alternativa são os **modelos semiparamétricos** em que se destaca o **modelo de riscos proporcionais** (*proportional hazards model*) também conhecidos como **modelos de regressão de Cox** e expressos como

$$h(t|\mathbf{X} = \mathbf{x}) = h_0(t) \exp(\boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{x}),$$

em que  $h_0(t)$  representa a função de risco basal, arbitrária, mas não negativa, *i.e.*, para  $\mathbf{X} = \mathbf{0}$  e  $\exp(\boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{x})$  é a **função de risco relativo** com parâmetros  $\boldsymbol{\beta}$  e cujo valor no ponto  $\mathbf{x}$  corresponde ao quociente entre o risco de falha para uma unidade com variáveis explicativas iguais a  $\mathbf{x}$  e o o risco de falha para uma unidade com variáveis explicativas iguais a  $\mathbf{0}$ .

Essa classe de modelos é uma das mais utilizadas na análise de dados de sobrevivência e tem as seguintes vantagens:

- i) não requer a especificação da forma da função de risco;
- ii) os resultados obtidos por meio da formulação mais simples (com apenas dois grupos) são equivalentes àqueles obtidos com o teste *log rank*;
- iii) permite a avaliação de várias variáveis explicativas simultaneamente.

Consideremos um estudo em que pacientes com as mesmas características são submetidos de forma aleatória a dois tratamentos: placebo ( $x = 0$ ) e ativo ( $x = 1$ ). Então, sob o modelo de Cox temos:

$$\frac{h(t|x=1)}{h(t|x=0)} = \frac{h_0(t) \exp(\alpha + \beta)}{h_0(t) \exp(\alpha)} = \exp(\beta),$$

indicando que para qualquer valor de  $t$  o risco relativo de falha é constante. Daí a denominação de riscos proporcionais. Por essa razão, o modelo de Cox só deve ser considerado nessa situação (ver Nota de Capítulo 2). Uma ferramenta útil para avaliação dessa suposição é o gráfico das curvas de sobrevivência obtido por intermédio do estimador de Kaplan-Meier. Análise de resíduos também pode ser utilizada com esse propósito.

O ajuste de modelos de riscos proporcionais pode ser realizado por meio das funções `coxph()` e `cox.zph()`. Para os dados do Exemplo 7.3, esses comandos e resultados correspondentes são

```
> coxmod1 <- coxph(formula = Surv(hiv$tempomeses, hiv$delta) ~ hiv$droga)
      coef exp(coef) se(coef)      z      p
hiv$droga 0.8309    2.2953    0.2418  3.436 0.00059
Likelihood ratio test=11.6 on 1 df, p=0.0006593
n= 100, number of events= 80
```

```

> summary(coxmod1)
      exp(coef) exp(-coef) lower .95 upper .95
hiv$droga  2.295    0.4357    1.429    3.687
> cox.zph(coxmod1)
      chisq df    p
hiv$droga 0.555  1 0.46
GLOBAL    0.555  1 0.46

```

e sugerem que a hipótese de riscos proporcionais é aceitável ( $p = 0,46$ ). Além disso, o fator droga é significativamente ( $p < 0,001$ ) importante para o padrão de sobrevivência dos pacientes, indicando que o risco de óbito para pacientes tratados com a Droga B é 2,30 (IC95%: 1,43 - 3.68) vezes o risco de óbito para pacientes tratados com a Droga A.

## 7.5 Notas de capítulo

### 1) Tipos de censura

Três tipos de censura podem ser consideradas em estudos de sobrevivência:

- a) **censura à direita**, para a qual se conhece o instante em que uma característica de interesse (por exemplo, contaminação pelos vírus HIV) ocorreu porém a falha (por exemplo, morte do paciente) não foi observada após a inclusão da unidade no estudo.
- b) **censura à esquerda**, para a qual não se conhece o instante de ocorrência da característica de interesse porém a falha foi observada após a inclusão da unidade no estudo.
- c) **censura intervalar**, para a qual não se conhece o instante em que a falha ocorreu, mas sabe-se que ocorreu num intervalo de tempo conhecido.

### 2) Riscos não proporcionais

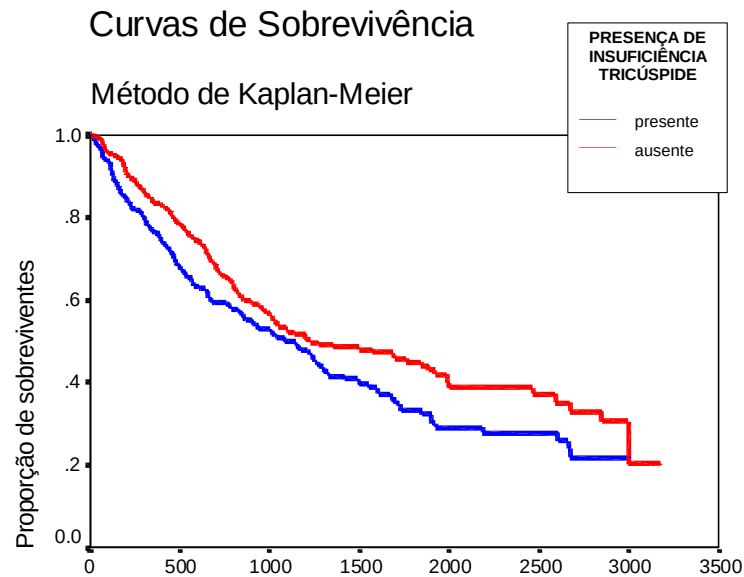
Para situações em que os riscos não são proporcionais, algumas alternativas podem ser consideradas para o modelo de Cox, lembrando que não são isentas de dificuldades de interpretação. Entre elas, destacamos

- a) Determinação dos instantes de tempo em que ocorrem mudanças no padrão da sobrevivência.
- b) Ajuste de modelos diferentes para intervalos de tempo distintos.
- c) Refinamento do modelo com a inclusão de variáveis explicativas dependentes do tempo.
- d) Introdução de estratos.

## 7.6 Exercícios

- 1) Suponha que 6 ratos foram expostos a um material cancerígeno. Os tempos até o desenvolvimento de um tumor com certas características forma registrados para cada um dos animais. Os ratos A, B e C desenvolvem o tumor em 10, 15 e 25 semanas, respectivamente. O rato D morreu sem tumor na vigésima semana de observação. O estudo terminou após 30 semanas, sem que os ratos E e F apresentassem o tumor.

- a) Defina cuidadosamente a resposta do estudo.
  - b) Identifique o tipo de resposta (falha ou censura) para cada um dos ratos do estudo.
  - c) Construa uma planilha de dados adequada para a análise por meio de alguma função do pacote R.
- 2) Os dados do arquivo **freios** são tempos de vida (em quilômetros) de pastilhas de freios de uma amostra de 40 carros (de mesmo modelo) selecionada aleatoriamente. Cada veículo foi monitorado para verificar a existência de influência dos seguintes fatores na duração das pastilhas: Ano do modelo (1 ou 2), Região de uso do carro (N: Norte ou S: Sul, Condições de dirigibilidade (A: predominantemente na cidade, B: predominantemente em estrada ou C: Uso misto).
- a) Construa as curvas de sobrevivência de Kaplan-Meier considerando cada um dos fatores separadamente.
  - b) Teste a hipótese de que os níveis de cada fator (individualmente) não alteram a durabilidade das pastilhas (use o teste log-rank ou outro teste mais conveniente).
  - c) Considere apenas os fatores significativamente associados ao tempo de falha, construa as curvas de Kaplan-Meier correspondentes e calcule os tempos médios e medianos de sobrevivência das pastilhas de freios.
- 3) Num estudo realizado no Instituto do Coração da FMUSP, candidatos a transplante foram acompanhados durante o período de espera por um coração. O tempo até o evento de interesse (aqui chamado de tempo de sobrevivência) foi definido como o número de dias decorridos entre a primeira consulta de avaliação e o procedimento cirúrgico. Para detalhes, consulte Pedroso de Lima et al. (2000). Entre possíveis fatores que poderiam influenciar o tempo até o transplante está a presença de insuficiência tricúspide. Para avaliar a importância desse fator, foram construídas curvas de sobrevivência pelo método de Kaplan-Meier e realizada uma análise baseada no modelo de riscos proporcionais de Cox, com ajuste por sexo, idade e etiologia. Os resultados estão indicados na Figura 7.8 e na Tabela 7.7.



**Figura 7.8:** Curva de sobrevivência estimada para o estudo de transplante cardíaco

**Tabela 7.7:** Resultados para a variável explicativa “Insuficiência tricúspide” obtidos por meio do modelo de Cox para o estudo de transplante cardíaco.

Número de casos	Valor p	Risco relativo	Intervalo de confiança (95%)	
			lim inferior	lim superior
868	0,039	1,25	1,01	1,54

- a) Estime descritivamente a proporção de pacientes com e sem insuficiência tricúspide cujo tempo até a ocorrência do transplante é de 1500 dias.
  - b) Existem evidências de que a presença de insuficiência tricúspide contribui para um pior prognóstico? Justifique sua resposta.
  - c) Interprete o risco relativo apresentado na Tabela 7.7.
  - d) Qual a razão para se incluir um intervalo de confiança na análise?
- 4) Os dados da Tabela 7.8 foram extraídos de um estudo cuja finalidade era avaliar o efeito da contaminação de um estuário por derramamento de petróleo na fauna local. Cada um de oito grupos de 32 siris (*Calinectes danae*) foi submetido a um tratamento obtido da classificação cruzada dos níveis de dois factores, a saber, Contaminação por petróleo (sim ou não) e Salinidade de aclimação (0.8%, 1.4%, 2.4%, 3.4%). Os animais foram observados por setenta e duas horas e o número de sobreviventes foi registado a cada 12 horas. Detalhes podem ser encontrados em Paulino e Singer (2006).

**Tabela 7.8:** Dados de sobrevivência de siris

Grupo	Salinidade	Tempo (horas)					
		12	24	36	48	60	72
Petróleo	0.8%	30	26	20	17	16	15
	1.4%	32	31	31	29	27	22
	2.4%	32	30	29	26	26	21
	3.4%	32	30	29	27	27	21
Controle	0.8%	31	27	25	19	18	18
	1.4%	32	31	31	31	31	30
	2.4%	32	31	31	28	27	26*
	3.4%	32	32	30	30	29*	28

\* = um animal foi retirado do estudo

- a) Para cada um dos oito tratamentos, construa tabelas com o formato da Tabela 7.9.

**Tabela 7.9:** Dados de sobrevivência de siris do grupo Controle submetido à salinidade 3,4% no formato de tabela atuarial

Intervalo	Em risco	Sobre- vivos	Mortos	Retirados do estudo
0 - 12	32	32	0	0
12 - 24	32	32	0	0
24 - 36	32	30	2	0
36 - 48	30	30	0	0
48 - 60	30	29	0	1
60 - 72	29	28	1	0

- b) Construa curvas de sobrevivência obtidas por meio do estimador de Kaplan-Meier.
- c) Utilize testes *log-rank* para avaliar o efeito da contaminação por petróleo e da salinidade na sobrevivência dos siris.
- 5 O arquivo **sondas** contém dados de pacientes com câncer que recebem um de dois tipos de sondas (protpla e WST) para facilitar o fluxo de fluidos do órgão. Uma possível complicação do uso dessas sondas é que após algum tempo pode ocorrer obstrução. O número de dias até a obstrução (ou censura devido ao término do estudo/óbito) é apresentado na coluna rotulada “evento”.
- a) Construa curvas de sobrevivência para pacientes submetidos a cada um dos tipos de sonda. Coloque as curvas em um mesmo gráfico e, a partir delas, obtenha o tempo médio e o tempo mediano para obstrução em cada tipo de sonda. Comente os resultados.
- b) Utilize o teste *log-rank* para comparar as duas curvas.
- c) Defina dois grupos de pacientes com base na idade mediana denotando-os “jovens” e “idosos”. Construa 4 estratos, formados pela combinação

dos níveis de idade e tipo de sonda e obtenha as curvas de sobrevivência correspondentes.

- 6) O arquivo **rehabcardio** contém dados de um estudo cujo objetivo era avaliar a sobrevivência de pacientes infartados submetidos ou a tratamento clínico ou a um programa de exercícios. Com essa finalidade, considere que
- i) o evento de interesse é definido como revascularização miocárdica, ocorrência de um segundo infarto ou óbito pós admissão no estudo;
  - ii) os pacientes foram acompanhados até 31/12/2000;
  - iii) datas incompatíveis com a data de nascimento devem ser descartadas.

Construa curvas de Kaplan-Meier para comparar o padrão de sobrevivência dos pacientes submetidos a cada grupo e com base nelas, estime o primeiro quartil e o tempo médio de sobrevivência correspondentes.

---

# PARTE II: APRENDIZADO SUPERVISIONADO

A ideia fundamental do aprendizado supervisionado é utilizar preditores (dados de entrada ou *inputs*) para prever uma ou mais respostas (dados de saída ou *outputs*), que podem ser quantitativas ou qualitativas (categorias, atributos ou fatores). O caso de respostas qualitativas corresponde a problemas de **classificação** e aquele de respostas quantitativas, a problemas de **previsão**. Nos Capítulos 8, 9 e 10, consideramos métodos utilizados para a classificação de unidades de investigação em dois ou mais grupos (cujos elementos são de alguma forma parecidos entre si) com base em preditores. Por exemplo, pode-se querer classificar clientes de um banco como bons ou maus pagadores de um empréstimo com base nos salários, idades, classe social etc. Esses métodos envolvem tanto técnicas clássicas de regressão logística, função discriminante linear, método do vizinho mais próximo, quanto aqueles baseados em árvores e em algoritmos de suporte vetorial (*support vector machines*). O Capítulo 11 é dedicado a problemas de previsão, ou seja, em que se pretende prever o **valor esperado** de uma variável resposta ou o **valor específico** para uma unidade de investigação. Por exemplo, pode haver interesse em prever o saldo médio de clientes de um banco com base em salários, idades, classe social etc. A previsão pode ser concretizada seja por meio de técnicas de regressão seja por meio de métodos baseados em árvores e em algoritmos de suporte vetorial.

Uma fronteira de decisão linear (FDL) pode ser uma reta, no caso de duas variáveis, ou, em geral, um hiperplano.

Há diversas maneiras pelas quais FDL podem ser obtidas, dentre as quais destacamos:

- i) Ajuste de modelos de regressão linear para as variáveis indicadoras de grupos. Esta abordagem faz parte de uma classe de métodos que modelam **funções discriminantes**  $\delta_k(x)$  para cada classe e classifica  $x$  na classe com o maior valor de sua função discriminante. Uma dessas funções é a *função discriminante linear de Fisher*. Veja a Seção 8.3.
- ii) Métodos que modelam a probabilidade a posteriori  $P(G = k|X = x)$ , em que  $G(x)$  é um preditor com valores num conjunto discreto  $\mathcal{G}$ . Se essa probabilidade for uma função linear, obteremos uma FDL.
- iii) Outro método popular usa regressão logística, estudado na no Capítulo 6.





# Classificação por meio de técnicas clássicas

## 8.1 Introdução

Consideremos um conjunto de dados,  $(\mathbf{x}_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , em que  $\mathbf{x}_i$  representa os valores  $p$  variáveis preditoras (ou explicativas) e  $y_i$  representa o valor de uma variável resposta indicadora da classe a que o  $i$ -ésimo elemento pertence. As técnicas utilizadas para classificação são baseadas em algoritmos que, a partir dos valores das variáveis preditoras associados a um elemento do conjunto de dados, permitam classificá-la em uma das classes identificadas pelos valores da variável resposta segundo algum critério. Em geral, esses algoritmos são utilizados para classificar um ou mais novos elementos do conjunto de **dados para previsão**, para os quais dispomos apenas dos valores das variáveis preditoras, em uma das classes.

Se tivermos  $p$  variáveis preditoras e uma resposta dicotômica (*i.e.*, duas classes), um **classificador** é uma função que mapeia um espaço  $p$ -dimensional sobre  $\{-1, 1\}$ . Formalmente, seja  $(\mathbf{X}, Y)$  um vetor aleatório, tal que  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^p$  e  $Y \in \{-1, 1\}$ . Então, um classificador é uma função  $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \{-1, 1\}$ .

A acurácia de um estimador de  $g$ , digamos  $\hat{g}$ , pode ser avaliada pela **função erro** ou **risco** que é a probabilidade de erro,  $L(g) = P\{g(\mathbf{X}) \neq Y\}$ . Um estimador de  $L(g)$ , chamado de **taxa de erros**, é a proporção de erros gerados pela aplicação de  $\hat{g}$  aos elementos do conjunto de dados, ou seja,

$$\hat{L}(\hat{g}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(y_i \neq \hat{y}_i), \quad (8.1)$$

com  $\hat{y}_i = \hat{g}(x_i)$  indicando o rótulo (-1 ou 1) da classe prevista por meio de  $\hat{g}$ . Se  $I(y_i \neq \hat{y}_i) = 0$ , o  $i$ -ésimo elemento estará classificado corretamente.

Sob o enfoque de aprendizado automático, o objetivo é comparar diferentes modelos para identificar aquele com menor taxa de erros. Nesse contexto, a partir de um conjunto de **dados de treinamento**,  $(\mathbf{x}_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , constrói-se o algoritmo, cuja acurácia é avaliada em um conjunto de **dados de validação**, com elemento típico denotado aqui, por  $(\mathbf{x}_0, y_0)$ . O interesse é minimizar a **taxa de erros de teste** associada ao conjunto de dados de validação que pode ser estimada por

$$\text{Média}[I(y_0 \neq \hat{y}_0)],$$

em que a média é calculada relativamente aos elementos desse conjunto. O classificador (ou modelo) ótimo é aquele que minimiza (8.1). Com o objetivo de classificar

os elementos do conjunto original de dados, deve-se ajustar o classificador ótimo ao conjunto de dados disponíveis (treinamento e validação) e utilizar a estimativa  $\hat{g}$  daí obtida para classificar os elementos do conjunto de dados para previsão.

Quando dispomos de apenas um conjunto de dados, podemos recorrer ao processo de **validação cruzada** (ver Nota de Capítulo 2) para dividi-lo em conjuntos de dados de treinamento e de dados de validação.

Neste capítulo, concretizaremos o processo de classificação por meio de técnicas clássicas como regressão logística, análise discriminante linear (que inclui a função discriminante linear de Fisher) e o método do vizinho mais próximo. Mencionaremos, também algumas extensões, como análise discriminante quadrática e regularizada. Outras técnicas serão consideradas nos capítulos subsequentes.

## 8.2 Classificação por regressão logística

Juntamente com os modelos de regressão múltipla, os modelos de **regressão logística** estudados no Capítulo 6 estão entre os mais utilizados com o objetivo de classificação. Para ilustrá-los, consideremos o seguinte exemplo.

**Exemplo 8.1:** Os dados da Tabela 8.1 foram extraídos de um estudo realizado no Hospital Universitário da Universidade de São Paulo com o objetivo de avaliar se algumas medidas obtidas ultrassonograficamente poderiam ser utilizadas como substitutas de medidas obtidas por métodos de ressonância magnética, considerada como padrão ouro para avaliação do deslocamento do disco da articulação temporomandibular (doravante referido simplesmente como disco). Distâncias cápsula-côndilo (em mm) com boca aberta ou fechada (referidas, respectivamente, como distância aberta ou fechada no restante do texto) foram obtidas ultrassonograficamente de 104 articulações e o disco correspondente foi classificado como deslocado (1) ou não (0) segundo a avaliação por ressonância magnética. A variável resposta é o *status* do disco (1 = deslocado ou 0 = não). Mais detalhes podem ser obtidos em Elias et al. (2006).

Com intuito didático, consideremos um modelo logístico para a chance de deslocamento do disco, tendo apenas a distância aberta como variável preditora. Nesse contexto, o modelo (6.29) corresponde a

$$\log[\theta(x_i; \alpha, \beta)]/[1 - \theta(x_i; \alpha, \beta)] = \alpha + x_i\beta, \quad (8.2)$$

$i = 1, \dots, 104$  em que  $\theta(x_i; \alpha, \beta)$  representa a probabilidade de deslocamento do disco quando o valor da distância aberta é  $x_i$ ,  $\alpha$  denota o logaritmo da chance de deslocamento do disco quando a distância aberta tem valor  $x_i = 0$  e  $\beta$  é interpretado como a variação no logaritmo da chance de deslocamento do disco por unidade de variação da distância aberta.

**Tabela 8.1:** Dados de um estudo odontológico

Dist aberta	Dist fechada	Desloc disco	Dist aberta	Dist fechada	Desloc disco	Dist aberta	Dist fechada	Desloc disco
2.2	1.4	0	0.9	0.8	0	1.0	0.6	0
2.4	1.2	0	1.1	0.9	0	1.6	1.3	0
2.6	2.0	0	1.4	1.1	0	4.3	2.3	1
3.5	1.8	1	1.6	0.8	0	2.1	1.0	0
1.3	1.0	0	2.1	1.3	0	1.6	0.9	0
2.8	1.1	1	1.8	0.9	0	2.3	1.2	0
1.5	1.2	0	2.4	0.9	0	2.4	1.3	0
2.6	1.1	0	2.0	2.3	0	2.0	1.1	0
1.2	0.6	0	2.0	2.3	0	1.8	1.2	0
1.7	1.5	0	2.4	2.9	0	1.4	1.9	0
1.3	1.2	0	2.7	2.4	1	1.5	1.3	0
1.2	1.0	0	1.9	2.7	1	2.2	1.2	0
4.0	2.5	1	2.4	1.3	1	1.6	2.0	0
1.2	1.0	0	2.1	0.8	1	1.5	1.1	0
3.1	1.7	1	0.8	1.3	0	1.2	0.7	0
2.6	0.6	1	0.8	2.0	1	1.5	0.8	0
1.8	0.8	0	0.5	0.6	0	1.8	1.1	0
1.2	1.0	0	1.5	0.7	0	2.3	1.6	1
1.9	1.0	0	2.9	1.6	1	1.2	0.4	0
1.2	0.9	0	1.4	1.2	0	1.0	1.1	0
1.7	0.9	1	3.2	0.5	1	2.9	2.4	1
1.2	0.8	0	1.2	1.2	0	2.5	3.3	1
3.9	3.2	1	2.1	1.6	1	1.4	1.1	0
1.7	1.1	0	1.4	1.5	1	1.5	1.3	0
1.4	1.0	0	1.5	1.4	0	0.8	2.0	0
1.6	1.3	0	1.6	1.5	0	2.0	2.1	0
1.3	0.5	0	4.9	1.2	1	3.1	2.2	1
1.7	0.7	0	1.1	1.1	0	3.1	2.1	1
2.6	1.8	1	2.0	1.3	1	1.7	1.2	0
1.5	1.5	0	1.5	2.2	0	1.6	0.5	0
1.8	1.4	0	1.7	1.0	0	1.4	1.1	0
1.2	0.9	0	1.9	1.4	0	1.6	1.0	0
1.9	1.0	0	2.5	3.1	1	2.3	1.6	1
2.3	1.0	0	1.4	1.5	0	2.2	1.8	1
1.6	1.0	0	2.5	1.8	1			

Dist aberta: distância cápsula-côndilo com boca aberta (mm)

Dist fechada: distância cápsula-côndilo com boca fechada (mm)

Desloc disco: deslocamento do disco da articulação temporomandibular (1=sim, 0=não)

Conseqüentemente, a razão de chances do deslocamento do disco correspondente a uma diferença de  $d$  unidades da distância aberta será  $\exp(d \times \beta)$ . Como não temos dados correspondentes a distâncias abertas menores que 0,5, convém substituir os valores  $x_i$  por valores “centrados”, ou seja por  $x_i^* = x_i - x_0$ . Uma possível escolha para  $x_0$  é o mínimo de  $x_i$ , que é 0,5. Essa transformação na variável explicativa altera somente a interpretação do parâmetro  $\alpha$  que passa a ser o logaritmo da chance de deslocamento do disco quando a distância aberta tem valor  $x_i = 0,5$ .

Usando a função `glm()` obtemos os seguintes resultados:

```
glm(formula = deslocamento ~ (distanciaAmin), family = binomial,
     data = disco)
Coefficients:
                Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept)    -5.8593     1.1003  -5.325 1.01e-07 ***
distanciaAmin   3.1643     0.6556   4.827 1.39e-06 ***
---
(Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)
Null deviance: 123.11 on 103 degrees of freedom
Residual deviance: 71.60 on 102 degrees of freedom
AIC: 75.6
Number of Fisher Scoring iterations: 6
```

Estimativas (com erros padrões entre parênteses) dos parâmetros desse modelo ajustado por máxima verossimilhança aos dados da Tabela 8.1, são,  $\hat{\alpha} = -5,86$  (1,10) e  $\hat{\beta} = 3,16$  (0,66) e então, segundo o modelo, uma estimativa da chance de deslocamento do disco para articulações com distância aberta  $x = 0,5$  (que corresponde à distância aberta transformada  $x^* = 0,0$ ) é  $\exp(-5,86) = 0,003$ ; um intervalo de confiança (95%) para essa chance pode ser obtido exponenciando os limites ( $LI$  e  $LS$ ) do intervalo para o parâmetro  $\alpha$ , nomeadamente,

$$\begin{aligned} LI &= \exp[\hat{\alpha} - 1,96EP(\hat{\alpha})] = \exp(-5,86 - 1,96 \times 1,10) = 0,000, \\ LS &= \exp[\hat{\alpha} + 1,96EP(\hat{\alpha})] = \exp(-5,86 + 1,96 \times 1,10) = 0,025. \end{aligned}$$

Os limites de um intervalo de confiança para a razão de chances correspondentes a um variação de uma unidade no valor da distância aberta podem ser obtidos de maneira similar e são 6,55 e 85,56. Refira-se ao Exercício 19 para entender a razão pela qual a amplitude desse intervalo é aparentemente muito grande.

Substituindo os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  por suas estimativas  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta}$  em (8.2) podemos estimar a probabilidade de sucesso (deslocamento do disco, no exemplo sob investigação); por exemplo, para uma articulação cuja distância aberta seja 2,1 (correspondente à distância aberta transformada igual a 1,6), a estimativa dessa probabilidade é

$$\hat{\theta} = \exp(-5,86 + 3,16 \times 1,6) / [1 + \exp(-5,86 + 3,16 \times 1,6)] = 0,31.$$

Lembrando que o objetivo do estudo é substituir o processo de identificação de deslocamento do disco realizado via ressonância magnética por aquele baseado na medida da distância aberta por meio de ultrassonografia, podemos estimar as probabilidades de sucesso para todas as articulações e identificar um **ponto de corte**  $d_0$ , segundo o qual distâncias abertas com valores acima dele sugerem decidirmos pelo deslocamento do disco e distâncias abertas com valores abaixo dele sugerem a decisão oposta. Obviamente, não esperamos que todas as decisões tomadas dessa forma sejam corretas e conseqüentemente, a escolha do ponto de corte deve ser feita com o objetivo de minimizar os erros (decidir pelo deslocamento quando ele não existe ou *vice versa*).

Nesse contexto, um contraste entre as decisões tomadas com base em um determinado ponto de corte  $d_0$  e o padrão ouro definido pela ressonância magnética para todas as 104 articulações pode ser resumido por meio da Tabela 8.2, em que as frequências da diagonal principal correspondem a decisões corretas e aquelas da diagonal secundária às decisões erradas.

**Tabela 8.2:** Frequência de decisões para um ponto de corte  $d_0$ 

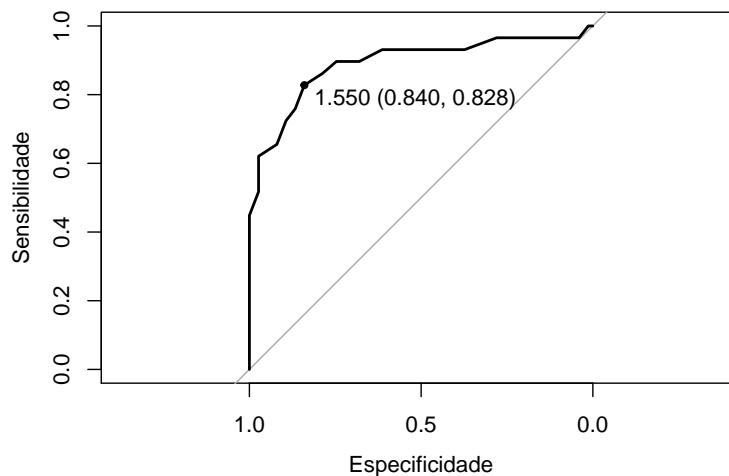
		Deslocamento real do disco	
		sim	não
Decisão baseada na distância aberta $d_0$	sim	$n_{11}$	$n_{12}$
	não	$n_{21}$	$n_{22}$

O quociente  $n_{11}/(n_{11} + n_{21})$  é conhecido como **sensibilidade** do processo de decisão e é uma estimativa da probabilidade de decisões corretas quando o disco está realmente deslocado. O quociente  $n_{22}/(n_{12} + n_{22})$  é conhecido como **especificidade** do processo de decisão e é uma estimativa da probabilidade de decisões corretas quando o disco realmente não está deslocado. A situação ideal é aquela em que tanto a sensibilidade quanto a especificidade do processo de decisão são iguais a 100%. Consulte a Seção 4.2 para detalhes sobre sensibilidade e especificidade.

O problema a resolver é determinar o ponto de corte  $d_{eq}$  que gere o melhor equilíbrio entre sensibilidade e especificidade. Com essa finalidade, podemos construir tabelas com o mesmo formato da Tabela 8.2 para diferentes pontos de corte e um gráfico cartesiano entre a sensibilidade e especificidade obtida de cada uma delas. Esse gráfico, conhecido como **curva ROC** (*Receiver Operating Characteristic*) gerado para os dados da Tabela 8.1 por meio dos comandos

```
g <- roc(deslocamento ~ distanciaAmin, data = disco)
plot(g, print.thres=T, xlab = "Especificidade",
      ylab = "Sensibilidade")
```

está apresentado na Figura 8.1.



**Figura 8.1:** Curva ROC para os dados da Tabela 8.1 baseada no modelo (8.2) com distância aberta como variável preditora.

O ponto de corte ótimo é aquele mais próximo do vértice superior esquerdo (em que tanto a sensibilidade quanto a especificidade seriam iguais a 100%). Para o

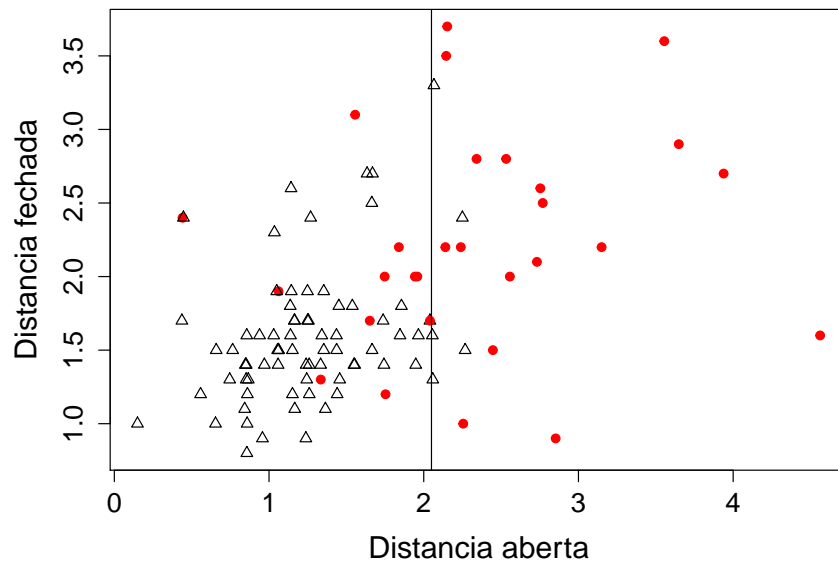
exemplo, esse ponto está salientado na Figura 8.1 e corresponde à distância aberta com valor  $d_{eq} = 2,05$  ( $= 1,55 + 0,5$ ). A sensibilidade e a especificidade associadas à decisão baseada nesse ponto de corte, são, respectivamente, 83% e 84% e as frequências de decisões corretas ou incorretas estão indicadas na Tabela 8.3.

**Tabela 8.3:** Frequência de decisões para um ponto de corte para distância aberta  $d_{eq} = 2,05$

		Deslocamento real do disco	
		sim	não
Decisão baseada na distância aberta $d_{max} = 2,05$	sim	24	12
	não	5	63

Com esse procedimento de decisão a porcentagem de acertos (**acurácia**) é 84% [ $= (24 + 63)/104$ ]. A porcentagem de **falsos positivos** é 16% [ $= 12/(12 + 63)$ ] e a porcentagem de **falsos negativos** é 17% [ $= 5/(24 + 5)$ ].

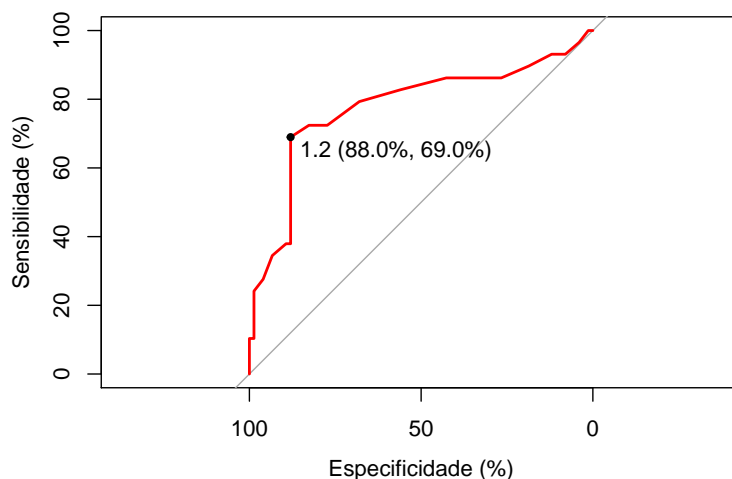
Um gráfico de dispersão com o correspondente ponto de corte de equilíbrio baseado apenas na distância aberta está apresentado na Figura 8.2 com símbolos vermelhos indicando casos com deslocamento do disco e em preto indicando casos sem deslocamento. Os valores de ambas as distâncias foram ligeiramente alterados para diminuir a superposição nos pontos.



**Figura 8.2:** Gráfico de dispersão para os dados da Tabela 8.1 com ponto de corte de equilíbrio baseado apenas na distância aberta.

Uma análise similar, baseada na distância fechada (transformada por meio da subtração de seu valor mínimo (0,4) gera a curva ROC apresentada na Figura 8.3

e frequências de decisões apresentada na Tabela 8.4.



**Figura 8.3:** Curva ROC para os dados da Tabela 8.1 baseada no modelo (8.2) com distância fechada como variável explicativa.

**Tabela 8.4:** Frequência de decisões baseadas na distância fechada com  $d_{eq} = 1,6$ .

		Deslocamento real do disco	
		sim	não
Decisão baseada na distância fechada $d_{max} = 1,6$	sim	20	9
	não	9	66

A acurácia associada a processo de decisão baseado apenas na distância fechada, 83% [= (20 + 66)/104] é praticamente igual àquela obtida com base apenas na distância aberta; no entanto aquele processo apresenta um melhor equilíbrio entre sensibilidade e especificidade (83% e 84%, respectivamente, *versus* 69% e 88%).

Se quisermos avaliar o processo de decisão com base nas observações das distâncias aberta e fechada simultaneamente, podemos considerar o modelo

$$\log[\theta(x_i; \alpha, \beta, \gamma)]/[1 - \theta(x_i; \alpha, \beta, \gamma)] = \alpha + x_i\beta + w_i\gamma, \quad (8.3)$$

$i = 1, \dots, 104$  em que  $w_i$  corresponde à distância fechada observada na  $i$ -ésima articulação. Neste caso,  $\gamma$  corresponde à razão entre a chance de deslocamento do disco para articulações com distância fechada  $w + 1$  e a chance de deslocamento do disco para articulações com distância fechada  $w$  para aquelas com mesmo valor da distância aberta; uma interpretação similar vale para o parâmetro  $\beta$ . Estimativas dos parâmetros (com erros padrões entre parênteses) do modelo (8.3) obtidas após a transformação das variáveis explicativas segundo o mesmo figurino adotado nas análises univariadas são  $\hat{\alpha} = -6,38$  (1,19),  $\hat{\beta} = 2,83$  (0,67) e  $\hat{\gamma} = 0,98$  (0,54). A estimativa do parâmetro  $\gamma$  é apenas marginalmente significativa, ou seja a inclusão da variável explicativa distância fechada não acrescenta muito poder de discriminação

além daquele correspondente à distância aberta. Uma das razões para isso é que as duas variáveis são correlacionadas (com coeficiente de correlação de Pearson igual a 0,46). Esse fenômeno é chamado **confundimento** e se essa correlação for suficientemente alta os resultados com uma ou várias variáveis preditoras são, em geral, bem parecidos.

A determinação de pontos de corte para modelos com duas ou mais variáveis explicativas é bem mais complexa do que no caso univariado e não será abordada neste texto. Para efeito de comparação com as análises anteriores, as frequências de decisões obtidas com os pontos de corte utilizados naquelas estão dispostas na Tabela 8.5, e correspondem a uma sensibilidade de 62%, especificidade de 97% e acurácia de 88%.

**Tabela 8.5:** Frequência de decisões correspondentes a pontos de corte  $d_{eq} = 2,05$  para distância aberta e  $d_{eq} = 1,6$  para distância fechada

		Deslocamento real do disco	
		sim	não
Decisão baseada em	sim	18	2
ambas as distâncias	não	11	73

Numa segunda análise, agora sob o paradigma de aprendizado automático, a escolha do modelo ótimo é baseada apenas nas porcentagens de classificação correta (acurácia) obtidas por cada modelo num conjunto de dados de validação a partir de seu ajuste a um conjunto de dados de treinamento. Como neste caso não dispomos desses conjuntos *a priori*, podemos recorrer à técnica de **validação cruzada** mencionada na Seção 1.3 e detalhada na Nota de Capítulo 2. Neste exemplo, utilizamos validação cruzada de ordem 5 com 5 repetições (VC5/5), em que o conjunto de dados é dividido em dois, cinco vezes, gerando cinco conjuntos de dados de treinamento e de teste. A análise é repetida cinco vezes em cada conjunto e a acurácia média obtida das 25 análises serve de base para a escolha do melhor modelo. Comparamos quatro modelos de regressão logística, os dois primeiros com apenas uma das variáveis preditoras (distância aberta ou distância fechada), o terceiro com ambas incluídas aditivamente e o último com ambas as distâncias e sua interação. Esse tipo de análise pode ser concretizado por meio dos pacotes `caret` e `proc`. Os comandos para o ajuste do modelo com apenas a distância aberta como variável explicativa são

```
set.seed(369321)
train_control = trainControl(method="repeatedcv", number=5,
                             repeats=5)
model1 = train(deslocamento ~ distanciaAmin, data=disco,
               method="glm", family=binomial, trControl=train_control)
Generalized Linear Model
104 samples
  1 predictor
  2 classes: '0', '1'
No pre-processing
Resampling: Cross-Validated (5 fold, repeated 5 times)
Summary of sample sizes: 83, 83, 83, 83, 84, 84, ...
Resampling results:
```



```

Accuracy  Kappa
0.8410476  0.5847185
disco\$predito1 = predict(model1, newdata=disco, type="raw")
table(disco\$deslocamento, disco\$predito1)
  0  1
0 69  6
1 10 19

```

A estatística *Kappa* apresentada juntamente com a acurácia serve para avaliar a concordância entre o processo de classificação e a classificação observada (veja a Seção 4.2). Para o ajuste com o método LOOCV, basta substituir a especificação `method="repeatedcv"` por `method="LOOCV"`.

Os resultados correspondentes aos ajustes obtidos por validação cruzada VC5/5 e por validação cruzada LOOCV estão dispostos na Tabela 8.6.

**Tabela 8.6:** Acurácia obtida por validação cruzada para as regressões logísticas ajustados aos dados do Exemplo 8.1

Modelo	Variáveis	Acurácia VC5/5	Acurácia LOOCV
1	Distância aberta	84,8 %	84,6 %
2	Distância fechada	75,2 %	74,0 %
3	Ambas (aditivamente)	85,7 %	85,6 %
4	Ambas + Interação	83,6 %	83,6 %

Com ambos os critérios, o melhor modelo é aquele que inclui as duas variáveis preditoras de forma aditiva. Para efeito de classificar uma nova articulação (para a qual só dispomos dos valores das variáveis preditoras, o modelo selecionado deve ser ajustado ao conjunto de dados original (treinamento + validação) para obtenção dos coeficientes do classificador.

A seleção obtida por meio de aprendizado automático corresponde ao modelo (8.3). Embora a variável Distância fechada seja apenas marginalmente significativa, sua inclusão aumenta a proporção de acertos (acurácia) de 84% no modelo que inclui apenas Distância aberta para 86%.

Como a divisão do conjunto original nos subconjuntos de treinamento e de validação envolve uma escolha aleatória, os resultados podem diferir (em geral de forma desprezável) para diferentes aplicações dos mesmos comandos, a não ser que se especifique a semente do processo aleatório de divisão por meio do comando `set.seed()`.

O modelo de **regressão logística politômica (ou multinomial)** *i.e.*, em que o número de classes é  $K > 2$ , mencionado no Capítulo 6, não é muito usado pelos seguintes motivos [James et al. (2017)]:

- i) Esse tipo de modelo requer modelar diretamente  $P(Y = k | \mathbf{X} = \mathbf{x})$ ,  $k = 1, \dots, K$  sujeito à restrição  $\sum_{k=1}^K P(Y = k | \mathbf{X} = \mathbf{x}) = 1$ . Um método alternativo é a **Análise Discriminante Linear**, estudada a seguir, que consiste em modelar a distribuição preditora separadamente em cada classe e depois usar o teorema de Bayes para estimar essas probabilidades condicionais.
- ii) Quando as classes são bem separadas, as estimativas baseadas em regressão logística politômica são muito instáveis, o contrário ocorrendo com a Análise

Discriminante Linear. Se  $n$  for pequeno e a distribuição das variáveis preditoras em cada classe for aproximadamente normal, análise discriminante linear é mais estável que regressão logística multinomial

- iii) Análise Discriminante Linear é mais popular quando temos mais de duas classes.

## 8.3 Análise discriminante linear

Consideremos novamente um conjunto de dados,  $(\mathbf{x}_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , em que  $\mathbf{x}_i$  representa os valores  $p$  variáveis preditoras (ou explicativas) e  $y_i$  representa o valor de uma variável resposta indicadora de uma classe a que o  $i$ -ésimo elemento pertence. O problema consiste em classificar cada elemento do conjunto de dados em uma das  $K \geq 2$  classes definidas pela variável resposta. Os modelos de regressão logística são mais facilmente utilizados quando  $K = 2$ . As técnicas abordadas nesta seção, tanto sob o enfoque bayesiano quanto sob a perspectiva frequentista também são adequadas para  $K > 2$ . Na primeiro caso, é necessário conhecer (ou estimar) as densidades das variáveis preditoras e usualmente supõe-se que sejam gaussianas. No segundo caso não há necessidade de se conhecer essas densidades.

### 8.3.1 Classificador de Bayes

Seja  $\pi_k$  a probabilidade a priori de que um elemento com valor das variáveis preditoras  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)$  pertença à classe  $C_k$ ,  $k = 1, \dots, K$  e seja  $f_k(\mathbf{x})$  a função densidade de probabilidade da variável preditora  $\mathbf{X}$  para valores  $\mathbf{x}$  associados a elementos dessa classe. Por um abuso de notação escrevemos  $f_k(\mathbf{x}) = P(\mathbf{X} = \mathbf{x} | Y = k)$  (que a rigor só vale no caso discreto). Pelo teorema de Bayes,

$$P(Y = k | \mathbf{X} = \mathbf{x}) = p_k(\mathbf{x}) = \frac{\pi_k f_k(\mathbf{x})}{\sum_{\ell=1}^K \pi_\ell f_\ell(\mathbf{x})}, \quad k = 1, \dots, K, \quad (8.4)$$

é a probabilidade a posteriori de que um elemento com valor das variáveis preditoras igual a  $\mathbf{x}$  pertença à  $k$ -ésima classe. Para calcular essa probabilidade é necessário conhecer  $\pi_k$  e  $f_k(\mathbf{x})$ ; em muitos casos, supõe-se que para os elementos da  $k$ -ésima classe, os valores de  $\mathbf{X}$  tenham uma distribuição  $N_p(\boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma})$ , ou seja, com média que depende da classe  $k$  e matriz de covariâncias comum a todas as classes.

Suponha que  $\mathbf{X} \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^p$ . Uma **regra de classificação**,  $R$ , consiste em dividir  $\mathcal{X}$  em  $K$  regiões disjuntas  $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_K$ , tal que se  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_k$ , o elemento correspondente é classificado em  $C_k$ .

A probabilidade (condicional) de classificação incorreta, *i.e.*, de classificar um elemento com valor das variáveis preditoras  $\mathbf{x}$  em  $C_k$ , quando de fato ele pertence a  $C_j$ ,  $j \neq k$  usando a regra  $R$ , é

$$p(C_k | C_j, R) = \int_{\mathcal{X}_k} f_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (8.5)$$

Se  $k = j$  em (8.5), obtemos a probabilidade de classificação correta do elemento com valor das variáveis preditoras  $\mathbf{x}$  em  $C_k$ .

Em muitos casos é possível incluir um **custo** de classificação incorreta, denotado por  $Q(C_k | C_j)$  no procedimento de classificação. Usualmente, esses custos não são iguais e admite-se que  $Q(C_k | C_k) = 0$ ,  $k = 1, \dots, K$ . O custo médio de classificação

incorreta segundo a regra  $R$  é dado por

$$\delta(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K \pi_k \left[ \sum_{k=1, j \neq k}^K p(C_j | C_k, R) Q(C_j | C_k) \right]. \quad (8.6)$$

O **Classificador de Bayes** é obtido por meio da minimização desse custo médio, supondo os custos de classificação incorreta iguais, ou seja, o elemento com valor das variáveis preditoras  $\mathbf{x}$  deve ser classificado em  $C_k$ , se

$$\delta_k(\mathbf{x}) = \sum_{k=1, j \neq k}^K \pi_j f_j(\mathbf{x}) \quad (8.7)$$

for mínima,  $k = 1, \dots, K$ . Minimizar (8.7) é equivalente a classificar  $\mathbf{x}$  em  $C_k$  se

$$\pi_k f_k(\mathbf{x}) = \max_{1 \leq j \leq K} [\pi_j f_j(\mathbf{x})], \quad (8.8)$$

pois devemos excluir a  $k$ -ésima parcela de (8.7) que seja máxima, relativamente a todas as possíveis exclusões de parcelas. Em particular, se  $K = 2$ , elementos com valor das variáveis preditoras igual a  $\mathbf{x}$  devem ser classificados em  $C_1$  se

$$\frac{f_1(\mathbf{x})}{f_2(\mathbf{x})} \geq \frac{\pi_2}{\pi_1}, \quad (8.9)$$

e em  $C_2$  n caso contrário. Veja Johnson e Wichern (1998) e Ferreira (2011), para detalhes.

Suponha o caso  $K = 2$  com variáveis  $\mathbf{x}$  seguindo distribuições normais, com médias  $\boldsymbol{\mu}_1$  para elementos da classe  $C_1$ ,  $\boldsymbol{\mu}_2$  para elementos da classe  $C_2$  e matriz de covariâncias  $\boldsymbol{\Sigma}$  comum. Usando (8.4), obtemos

$$P(Y = k | \mathbf{X} = x) = \frac{\pi_k \exp\{-(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_k)^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_k) / 2\}}{\sum_{\ell=1}^K \pi_\ell \exp\{-(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_\ell)^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_\ell) / 2\}}, \quad k = 1, 2. \quad (8.10)$$

Então, elementos com valores das variáveis preditoras iguais a  $\mathbf{x}$  são classificados em  $C_1$  se

$$\mathbf{d}^\top \mathbf{x} = (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{x} \geq \frac{1}{2} (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\mu}_2) + \log(\pi_2 / \pi_1). \quad (8.11)$$

em que  $\mathbf{d}$  contém os coeficientes da função discriminante.

No caso geral ( $K \geq 2$ ), o classificador de Bayes associa um elemento com valor das variáveis preditoras igual a  $\mathbf{x}$  à classe para a qual

$$\delta_k(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mu}_k^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{x} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}_k^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}_k + \log \pi_k \quad (8.12)$$

for **máxima**. Em particular, para  $p = 1$ , devemos maximizar

$$\delta_k(x) = x \frac{\mu_k}{\sigma^2} - \frac{\mu_k^2}{2\sigma^2} + \log \pi_k. \quad (8.13)$$

Quando há apenas duas classes,  $C_1$  e  $C_2$ , um elemento com valor da variável preditora igual a  $x$  deve ser classificado na classe  $C_1$

$$dx = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma^2} x \geq \frac{\mu_1^2 - \mu_2^2}{2\sigma^2} + \log \frac{\pi_2}{\pi_1} \quad (8.14)$$

e na classe  $C_2$ , caso contrário. Veja os Exercícios 8.1 e 8.2.

As fronteiras de Bayes [valores de  $\mathbf{x}$  para os quais  $\delta_k(\mathbf{x}) = \delta_\ell(\mathbf{x})$ ] são obtidas como soluções de

$$\boldsymbol{\mu}_k^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{x} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}_k^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}_k + \log \pi_k = \boldsymbol{\mu}_\ell^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{x} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}_\ell^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}_\ell + \log \pi_\ell, \quad (8.15)$$

para  $k \neq \ell$ .

No paradigma bayesiano, os termos utilizados para cálculo das probabilidades a posteriori (8.4) são conhecidos, o que na prática não é realista. No caso  $p = 1$  pode-se aproximar o classificador de Bayes substituindo  $\pi_k$ ,  $\boldsymbol{\mu}_k$ ,  $k = 1, \dots, K$  e  $\sigma^2$  pelas estimativas

$$\hat{\pi}_k = n_k/n$$

em que  $n_k$  corresponde ao número dos  $n$  elementos do conjunto de dados de treinamento na classe  $k$ ,

$$\bar{x}_k = \frac{1}{n_k} \sum_{i:y_i=k} x_i, \quad \text{e} \quad S^2 = \frac{1}{n-K} \sum_{k=1}^K \sum_{i:y_i=k} (x_i - \hat{\mu}_k)^2.$$

Com esses estimadores, a fronteira de decisão de Bayes corresponde a solução de

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)x = (\bar{x}_1^2 - \bar{x}_2^2)/2 + [\log(\hat{\pi}_2/\hat{\pi}_1)]S^2. \quad (8.16)$$

No caso  $K = 2$  e  $p \geq 2$ , os parâmetros  $\boldsymbol{\mu}_1$ ,  $\boldsymbol{\mu}_2$  e  $\boldsymbol{\Sigma}$  são desconhecidas e têm que ser estimadas a partir de amostras das variáveis preditoras associadas aos elementos de  $C_1$  e  $C_2$ . Com os dados dessas amostras, podemos obter estimativas  $\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2, \mathbf{S}_1$  e  $\mathbf{S}_2$ , das respectivas médias e matrizes de covariâncias. Uma estimativa não enviesada da matriz de covariâncias comum  $\boldsymbol{\Sigma}$  é

$$\mathbf{S} = \frac{(n_1 - 1)\mathbf{S}_1 + (n_2 - 1)\mathbf{S}_2}{n_1 + n_2 - 2}. \quad (8.17)$$

Quando  $\pi_1 = \pi_2$ , elementos com valor das variáveis preditoras igual a  $\mathbf{x}$  são classificados em  $C_1$  se

$$\mathbf{d}^\top \mathbf{x} = (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)^\top \mathbf{S}^{-1} \mathbf{x} \geq \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)^\top \mathbf{S}^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_1 + \bar{\mathbf{x}}_2). \quad (8.18)$$

Nesse contexto, (8.18) é denominada **função discriminante linear** de Fisher.

**Exemplo 8.2.** Suponha que  $f_1(\mathbf{x})$  seja a densidade de uma distribuição normal padrão e  $f_2(x)$  seja a densidade de uma distribuição normal com média 2 e variância 1. Supondo  $\pi_1 = \pi_2 = 1/2$ , elementos com valor das variáveis preditoras igual a  $\mathbf{x}$  são classificados em  $C_1$  se  $f_1(\mathbf{x})/f_2(\mathbf{x}) \geq 1$  o que equivale a

$$\frac{f_1(\mathbf{x})}{f_2(\mathbf{x})} = e^{-x^2/2} e^{(x-2)^2/2} \geq 1,$$

ou seja, se  $x \leq 1$ . Consequentemente, as duas probabilidades de classificação incorretas são iguais a 0,159.

**Exemplo 8.3:** Consideremos os dados do arquivo `inibina`, analisados por meio de regressão logística no Exemplo 6.9. Um dos objetivos é classificar as pacientes como tendo resposta positiva ou negativa ao tratamento com inibina com base na variável preditora `difinib = inibpos-inibpre`. Das 32 pacientes do conjunto de dados,

59,4% apresentaram resposta positiva (classe  $C_1$ ) e 40,5% apresentaram resposta negativa (classe  $C_0$ ). Estimativas das médias das duas classes são, respectivamente,  $\bar{x}_1 = 202,7$  e  $\bar{x}_0 = 49,0$ . Estimativas das correspondentes variâncias são  $S_1^2 = 31630,5$  e  $S_0^2 = 2852,8$  e uma estimativa da variância comum é  $S^2 = (18 \times S_1^2 + 12 \times S_0^2)/30 = 20119,4$ . De (8.14) obtemos o coeficiente da função de discriminação  $d = (\bar{x}_1 - \bar{x}_0)/S^2 = 0,0076$ . Para decidir em que classe uma paciente com valor de  $d_{\text{finib}} = x$  deve ser alocada, devemos comparar  $dx$  com  $(\bar{x}_1^2 - \bar{x}_0^2)/(2S^2) + [\log(\hat{\pi}_0/\hat{\pi}_1)] = 0,58191$ .

Esses resultados podem ser concretizada por meio da função `lda()` do pacote MASS. Os comandos e resultados da aplicação dessa função estão indicados abaixo

```
lda(inibina$resposta ~ inibina$difinib, data = inibina)
Prior probabilities of groups:
negativa positiva
 0.40625  0.59375
Group means:
      inibina$difinib
negativa      49.01385
positiva      202.70158
Coefficients of linear discriminants:
              LD1
inibina$difinib 0.007050054
```

A função considera as proporções de casos negativos (41%) e positivos (59%) no conjunto de dados de treinamento como probabilidades *a priori*, dado que elas não foram especificadas no comando.

O coeficiente da função discriminante (0.00705) corresponde à combinação linear de `difinib` usada para a decisão difere daquele obtido acima (0,0076) pois a função `lda()` considera uma transformação com a finalidade de deixar os resultados com variância unitária (o que não influi na classificação).

Uma tabela relacionando a classificação predita com os valores reais da resposta pode ser obtido por meio dos comandos

```
> predito <- predict(fisher)
> table(predito$class, inibina$resposta)
      negativa positiva
negativa      9      2
positiva      4     17
```

indicando que a probabilidade de classificação correta é 81%, ligeiramente superior ao que foi conseguido com o emprego de regressão logística (ver Exemplo 6.9). Histogramas para os valores da função discriminante calculada para cada elemento do conjunto de dados estão dispostos na Figura 8.4.

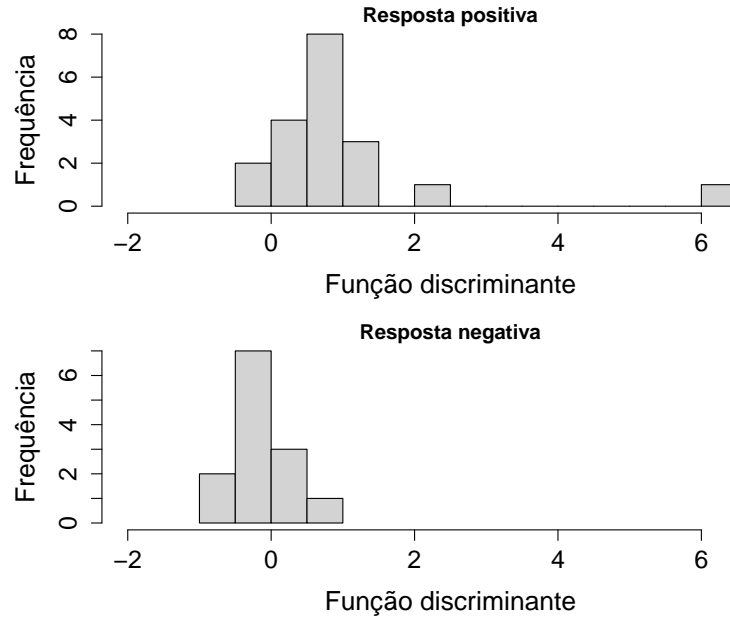


Figura 8.4: Histogramas para valores da função discriminante

**Exemplo 8.4.** Consideremos agora uma análise dos dados do arquivo `disco` por meio do classificador de Bayes. Tomemos as variáveis `distanciaA` e `distanciaF` “centradas” como no Exemplo 8.1 para variáveis preditoras e a variável `deslocamento` com valores 1 ou 0 para variável resposta. Para efeito de predição, dividimos o conjunto de dados aleatoriamente em dois, o primeiro para treinamento com 70% das observações e o segundo, com 30% delas para validação. Para isso, podemos usar os seguintes comandos

```
disco$distanciaAmin <- disco$distanciaA - 0.5
disco$distanciaFmin <- disco$distanciaF - 0.4
disco$deslocamento <- as.factor(disco$deslocamento)
set.seed(123)
aux = sort(sample(nrow(disco), nrow(disco)*.7))
train <- disco[aux,]
valid <- disco[-aux,]
```

Com os dados do conjunto `train` podemos calcular os vetores de médias  $\bar{\mathbf{x}}_0 = (1,11; 0,77)^\top$ ,  $\bar{\mathbf{x}}_1 = (2,10; 1,34)^\top$  e as matrizes de covariâncias

$$\mathbf{S}_0 = \begin{bmatrix} 0,2094 & 0,0913 \\ 0,0913 & 0,1949 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} 1,0082 & 0,0676 \\ 0,0676 & 0,5719 \end{bmatrix}$$

para a construção da matriz de covariâncias ponderada por meio de (8.17)

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0,4034 & 0,0856 \\ 0,0856 & 0,2864 \end{bmatrix}.$$

Com esses resultados, podemos obter os coeficientes da função discriminante,

$$\mathbf{d} = (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_0)^\top \mathbf{S}^{-1} = (2,1640; 1,3318)^\top \quad (8.19)$$

que deve ser comparada com

$$\frac{1}{2}(\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_0)^\top \mathbf{S}^{-1}(\bar{\mathbf{x}}_1 + \bar{\mathbf{x}}_0) + \log(\hat{\pi}_0/\hat{\pi}_1) = 5.9810$$

para a decisão. Os comandos da função `lda()` para a obtenção dos resultados são

```
mod1 <- lda(deslocamento ~ distanciaAmin + distanciaFmin, data = train,
            method = "moment")
Prior probabilities of groups:
  0  1
0.75 0.25
Group means:
  distanciaAmin distanciaFmin
0      1.112963      0.7722222
1      2.100000      1.3388889
Coefficients of linear discriminants:
              LD1
distanciaAmin 1.2728242
distanciaFmin 0.7833402
```

Embora os coeficientes da função discriminante sejam diferentes daqueles indicados em (8.19) em razão da padronização utilizada, os resultados são equivalentes. A tabela de confusão correspondente ao dados do conjunto de validação obtida por meio dos comandos

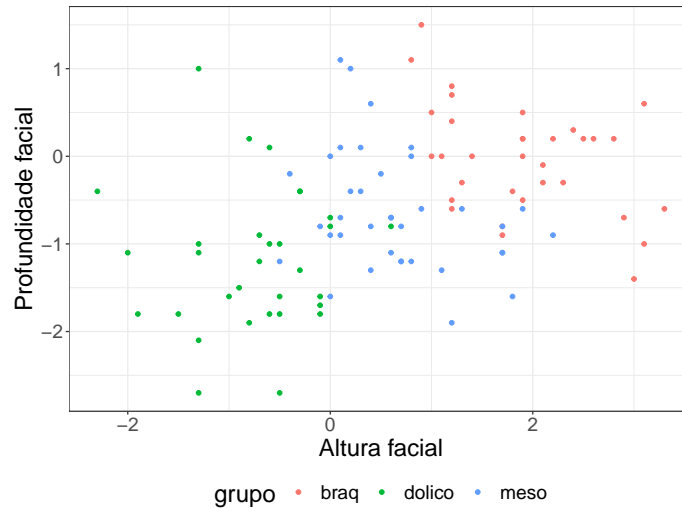
```
pred1 <- predict(mod1, valid)
pred1$class
table(pred1$class, valid$deslocamento)
```

é

```
  0  1
0 21  3
1  0  8
```

e corresponde a uma taxa de erros de 9,4%.

**Exemplo 8.5.** Os dados do arquivo `tipofacial` foram extraídos de um estudo odontológico realizado pelo Dr. Flávio Cotrim Vellini. Um dos objetivos era utilizar medidas entre diferentes pontos do crânio para caracterizar indivíduos com diferentes tipos faciais, a saber, braquicéfalos, mesocéfalos e dolicocefalos. O conjunto de dados contém observações de 11 variáveis em 101 pacientes. Para efeitos didáticos, utilizaremos apenas a altura facial (`altfac`) e a profundidade facial (`proffac`) como variáveis predictoras. A Figura 8.5 mostra um gráfico de dispersão com os três grupos (correspondentes à classificação do tipo facial).



**Figura 8.5:** Gráfico de dispersão com identificação dos três tipos faciais.

O objetivo aqui é utilizar o classificador de Bayes para decidir pelo tipo facial com base nos valores das duas variáveis preditoras, com 70% dos dados servindo para treinamento e os 30% restantes para validação. Os comandos da função `lda()` para concretização da análise e os correspondentes resultados são

```
set.seed(123)
aux = sort(sample(nrow(tipofacial), nrow(tipofacial)*.7))
train <- tipofacial[aux,]
valid <- tipofacial[-aux,]
mod1 <- lda(grupo ~ proffac + altfac, data=train, method="moment")
```

Prior probabilities of groups:

braq	dolico	meso
0.3571429	0.2857143	0.3571429

Group means:

	proffac	altfac
braq	0.068	1.836
dolico	-1.185	-0.810
meso	-0.556	0.596

Coefficients of linear discriminants:

	LD1	LD2
proffac	-0.8394032	-1.1376476
altfac	-1.3950292	0.5394292

Proportion of trace:

LD1	LD2
0.9999	0.0001

Os coeficientes LD1 e LD2 em conjunto com as probabilidades *a priori* associadas aos três grupos são utilizados no cálculo de (8.12) para cada elemento do conjunto de treinamento. Em cada caso, a decisão é classificar o elemento com maior valor de  $\delta_k(\mathbf{x})$ ,  $k = \text{braq}, \text{dolico}, \text{meso}$  no grupo correspondente. Como exemplo, apresentamos valores de  $\delta_k(\mathbf{x})$  para 6 elementos do conjunto de treinamento com a classificação associada, obtidas por meio dos comandos `pred1 <- predict(mod1, train)` e `pred1$posterior`

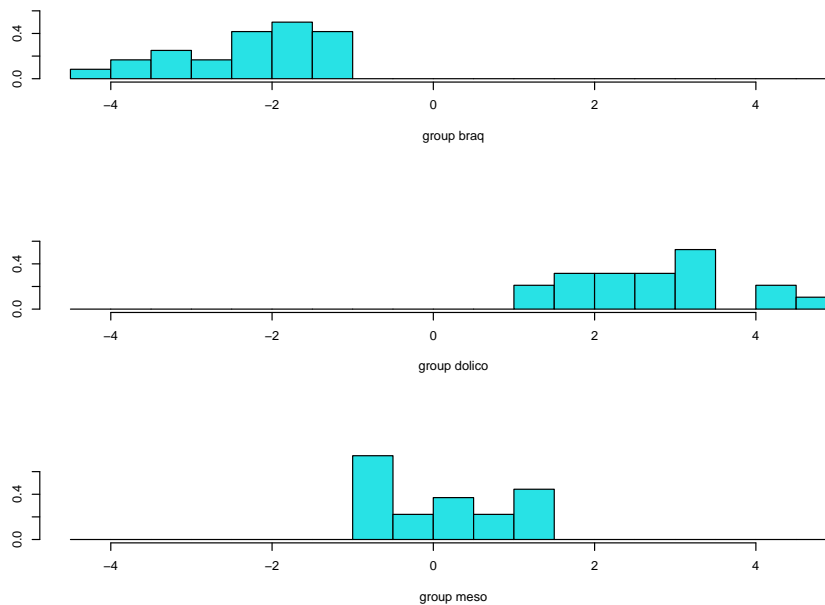


```

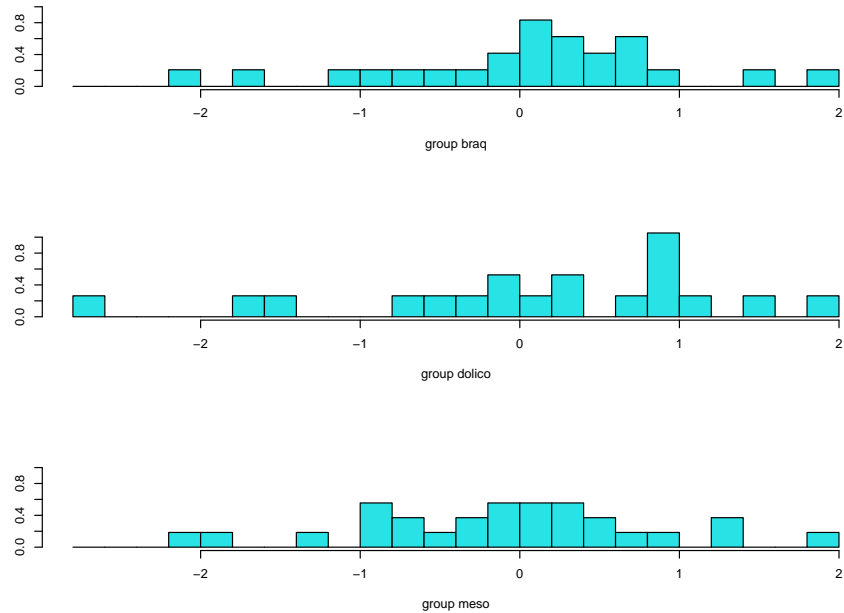
posterior
  braq  dolico  meso  classificação
28  8.2e-01  7.0e-05  0.17934    braq
29  4.5e-01  1.6e-03  0.54931    meso
30  9.5e-01  3.8e-06  0.04761    braq
31  3.7e-01  2.5e-03  0.63169    meso
32  9.6e-01  2.0e-06  0.03642    braq
34  3.0e-07  9.9e-01  0.00751    dolico

```

Os valores rotulados como **Proportion of trace** sugerem que uma das funções discriminantes é responsável pela explicação de 99,9% da variabilidade dos dados. Esse fato pode ser comprovado por meio dos histogramas correspondentes, apresentados nas Figuras 8.6 e 8.7.



**Figura 8.6:** Gráfico de dispersão com identificação dos três tipos faciais.



**Figura 8.7:** Gráfico de dispersão com identificação dos três tipos faciais.

Predições para os elementos do conjunto de validação e a tabela de confusão correspondente podem ser obtidas por meio dos comandos

```
pred2 <- predict(mod1, valid)
table(pred2$class, valid$grupo)
      braq dolico meso
braq    8     0    1
dolico  0     8    0
meso    0     3   11
```

e indicam uma taxa de erros de 13%.

### 8.3.2 Classificador linear de Fisher

Consideremos novamente o caso de duas classes (ou populações),  $C_1$  e  $C_2$  para as quais pretendemos obter um classificador com base em um vetor de variáveis preditoras,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)^\top$ .

A ideia de Fisher é considerar uma combinação linear  $W = \mathbf{d}^\top \mathbf{x}$ , com  $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_p)^\top$  de modo que o conjunto de variáveis preditoras seja transformado numa variável escalar  $W$  que servirá para discriminar as duas classes. Sejam  $\mu_{1W}$  e  $\mu_{2W}$ , respectivamente, as médias de  $W$  obtidas dos valores de  $\mathbf{x}$  associadas aos elementos das classes  $C_1$  e  $C_2$ .

O princípio usado para a classificação consiste em selecionar a combinação linear que maximiza a distância quadrática entre essas duas médias, relativamente à variabilidade dos valores de  $W$ .

Como na seção anterior, uma suposição adicional da proposta de Fisher é que as matrizes de covariâncias

$$\boldsymbol{\Sigma}_i = E(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_i)(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_i)^\top, \quad (8.20)$$

$i = 1, 2$ , em que  $\boldsymbol{\mu}_1 = E(\mathbf{x}|C_1)$  e  $\boldsymbol{\mu}_2 = E(\mathbf{x}|C_2)$ , sejam iguais para as duas classes, isto é,  $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \boldsymbol{\Sigma}_2 = \boldsymbol{\Sigma}$ . Então

$$\sigma_W^2 = \text{Var}(\mathbf{d}^\top \mathbf{x}) = \mathbf{d}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{d}$$

também será igual para ambas as classes.

Logo,

$$\mu_{1W} = E(W|C_1) = \mathbf{d}^\top \boldsymbol{\mu}_1 \quad \text{e} \quad \mu_{2W} = E(W|C_2) = \mathbf{d}^\top \boldsymbol{\mu}_2$$

e a razão a maximizar é

$$\begin{aligned} \frac{(\mu_{1W} - \mu_{2W})^2}{\sigma_W^2} &= \frac{(\mathbf{d}^\top \boldsymbol{\mu}_1 - \mathbf{d}^\top \boldsymbol{\mu}_2)^2}{\mathbf{d}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{d}} = \frac{\mathbf{d}^\top (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)^\top \mathbf{d}}{\mathbf{d}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{d}} \\ &= \frac{(\mathbf{d}^\top \boldsymbol{\delta})^2}{\mathbf{d}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{d}}, \end{aligned} \quad (8.21)$$

com  $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2$ . Não é difícil ver que a razão é maximizada se

$$\mathbf{d} = c\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\delta} = c\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2) \quad (8.22)$$

para todo  $c \neq 0$ .

No caso  $c = 1$ , obtemos a **função discriminante linear de Fisher**

$$W = \mathbf{d}^\top \mathbf{x} = (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{x}. \quad (8.23)$$

e o valor máximo da razão (8.21) é  $\boldsymbol{\delta}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\delta}$ .

A variância de  $W$ , nesse caso, é

$$\sigma_W^2 = (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2),$$

denominada **distância de Mahalanobis** entre as médias das duas populações normais multivariadas.

Seja

$$\mu = \frac{\mu_{1W} + \mu_{2W}}{2} = \frac{1}{2}(\mathbf{d}^\top \boldsymbol{\mu}_1 + \mathbf{d}^\top \boldsymbol{\mu}_2), \quad (8.24)$$

o ponto médio entre as médias (univariadas) obtidas das combinações lineares das variáveis preditoras associadas aos elementos das duas classes. Em virtude de (8.22), esse ponto médio pode ser expresso como

$$\mu = \frac{(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\mu}_2)}{2}. \quad (8.25)$$

Consequentemente

$$E(W|C_1) - \mu \geq 0 \quad \text{e} \quad E(W|C_2) - \mu < 0.$$

Então, para um novo elemento com valor das variáveis preditoras igual a  $\mathbf{x}_0$ , seja  $w_0 = (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{x}_0$  e uma **regra de classificação** é

- Classifique o elemento para o qual o valor das variáveis preditoras é  $\mathbf{x}_0$  em  $C_1$  se  $w_0 \geq \mu$ ,
- Classifique-o em  $C_2$  se  $w_0 < \mu$ .

Na prática,  $\boldsymbol{\mu}_1$ ,  $\boldsymbol{\mu}_2$  e  $\boldsymbol{\Sigma}$  são desconhecidas e têm que ser estimadas a partir de amostras das variáveis preditoras associadas aos elementos de  $C_1$  e  $C_2$ , denotadas por  $\mathbf{X}_1 = [\mathbf{x}_{11}, \dots, \mathbf{x}_{1n_1}]$ , uma matriz com dimensão  $p \times n_1$  e  $\mathbf{X}_2 = [\mathbf{x}_{21}, \dots, \mathbf{x}_{2n_2}]$ , uma matriz com dimensão  $p \times n_2$ , como vimos na seção anterior.

A função discriminante linear estimada é  $\hat{\mathbf{d}}^\top \mathbf{x} = (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)^\top \hat{\mathbf{S}}^{-1} \mathbf{x}$ . Para um elemento com valor das variáveis explicativas igual a  $\mathbf{x}_0$ , seja  $w_0 = \hat{\mathbf{d}}^\top \mathbf{x}_0$  e a regra de classificação é:

- Classifique o elemento para o qual o valor das variáveis preditoras é  $\mathbf{x}_0$  em  $C_1$  se  $w_0 \geq \hat{\mu}$ .
- Classifique-o em  $C_2$  se  $w_0 < \hat{\mu}$ ,

em que  $\hat{\mu} = (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)^\top \mathbf{S}^{-1}(\bar{\mathbf{x}}_1 + \bar{\mathbf{x}}_2)$ .

Outra suposição comumente adotada é que as variáveis preditoras têm distribuição Normal multivariada. Nesse caso, a solução encontrada por meio da função discriminante linear de Fisher é ótima. A técnica aqui abordada pode ser generalizada para três ou mais classes.

**Exemplo 8.6.** Essencialmente, o classificador linear de Fisher é equivalente ao classificador linear de Bayes com pesos iguais para as duas classes. A análise dos dados do Exemplo 8.4 por meio do classificador linear de Fisher pode ser implementada por meio do comando

```
mod1<-lda(deslocamento ~ distanciaAmin + distanciaFmin, data=train,
          method="moment", prior=c(0.5, 0.5))
```

Deixamos a comparação dos resultados para o leitor.

## 8.4 Classificador do vizinho mais próximo

No caso de duas classes, pode-se mostrar que (8.21) é minimizada por um classificador que associa cada elemento à classe mais provável, dados os valores das variáveis preditoras. Quando dispomos de apenas uma variável preditora  $X$ , o **classificador de Bayes** associa um elemento do conjunto de dados com valor da variável preditora igual a  $x_0$  à classe  $j$  para a qual

$$P(Y = j|X = x_0) \tag{8.26}$$

é a maior possível, ou seja, o elemento será associado à Classe 1 se  $P(Y = 1|X = x_0) > 0,5$  e à Classe 2, se  $P(Y = 0|X = x_0) < 0,5$ . A **fronteira de Bayes** é  $P(Y = 1|X = x_0) = 0,5$ . O classificador de Bayes produz a menor taxa de erros de validação possível, dada por  $1 - \max_j P(Y = j|X = x_0)$ . A **taxa de erro de Bayes global** é  $1 - E(\max_j P(Y = j|X))$ , obtida com base na média de todas as taxas de erro sobre todos os valores possíveis de  $j$ .

Na prática como não conhecemos a distribuição condicional de  $Y$ , dado  $X$ , precisamos estimá-la, o que pode ser efetivado por meio do método do  **$K$ -ésimo vizinho mais próximo** (*K-nearest neighbor*, KNN). O algoritmo associado a esse método é:

- Fixe  $K$  e uma observação do conjunto de dados de validação,  $x_0$ ;
- Identifique  $K$  pontos do conjunto de dados que sejam os mais próximos de  $x_0$  segundo alguma medida de distância; denote esse conjunto por  $\mathcal{V}_0$ ;
- Estime a probabilidade condicional de que o elemento selecionado do conjunto de dados pertença à Classe  $j$  como a fração dos pontos de  $\mathcal{V}_0$  cujos valores de  $Y$  sejam iguais a  $j$ , ou seja, como

$$P(Y = j|X = x_0) = \frac{1}{K} \sum_{i \in \mathcal{V}_0} I(y_i = j). \tag{8.27}$$

- Classifique esse elemento com valor  $x_0$  na classe associada à maior probabilidade.

A função `knn()` do pacote `caret` pode ser utilizada com essa finalidade.

**Exemplo 8.7.** Consideremos, novamente, os dados do arquivo `inibina` utilizando a variável `difinib` como preditora e adotemos a estratégia de validação cruzada por meio do método LOOCV (ver a Nota de Capítulo 1). Além disso, avaliemos o efeito de considerar entre 1 e 5 vizinhos mais próximos no processo de classificação. Os comandos necessários para a concretização da análise são

```
set.seed(2327854)
trControl <- trainControl(method = "LOOCV")
fit <- train(resposta ~ difinib, method = "knn", data = inibina
            tuneGrid = expand.grid(k = 1:5),
            trControl = trControl, metric = "Accuracy")
```

Os resultados correspondentes são

```
k-Nearest Neighbors
32 samples
 1 predictor
 2 classes: 'negativa', 'positiva'
No pre-processing
Resampling: Leave-One-Out Cross-Validation
Summary of sample sizes: 31, 31, 31, 31, 31, 31, ...
Resampling results across tuning parameters:
  k Accuracy Kappa
  1  0.71875  0.4240000
  2  0.78125  0.5409836
  3  0.81250  0.6016598
  4  0.78125  0.5409836
  5  0.81250  0.6016598
Accuracy was used to select the optimal model using the largest value.
The final value used for the model was k = 5.
```

Segundo esse processo, o melhor resultado (com  $K=5$  vizinhos) gera uma acurácia (média) de 81.3%, ligeiramente maior do que aquela obtida por meio do classificador de Byes no Exemplo 8.3. A tabela de classificação obtida por meio do ajuste do modelo final ao conjunto de dados original, juntamente com estatísticas descritivas pode ser obtida por meio dos comandos

```
predito <- predict(fit)
confusionMatrix(predito, inibina$resposta)
```

que geram os seguintes resultados

```
Confusion Matrix and Statistics
          Reference
Prediction negativa positiva
negativa      9          1
positiva      4         18
              Accuracy : 0.8438
              95% CI : (0.6721, 0.9472)
              No Information Rate : 0.5938
              P-Value [Acc > NIR] : 0.002273
              Kappa : 0.6639
```

McNemar's Test P-Value : 0.371093  
 Sensitivity : 0.6923  
 Specificity : 0.9474  
 Pos Pred Value : 0.9000  
 Neg Pred Value : 0.8182  
 Prevalence : 0.4062  
 Detection Rate : 0.2812  
 Detection Prevalence : 0.3125  
 Balanced Accuracy : 0.8198  
 'Positive' Class : negativa

## 8.5 Algumas extensões

Nesta seção abordamos brevemente Análise Discriminante Quadrática e Análise Discriminante Regularizada.

O classificador obtido por meio de Análise Discriminante Quadrática supõe, como na Análise Discriminante Linear usual, que as observações são extraídas de uma distribuição gaussiana multivariada, mas não necessita da suposição de homocedasticidade (matrizes de covariâncias iguais), ou seja, admite que cada classe esteja associada uma matriz de covariância,  $\Sigma_k$ .

Como no caso da Análise Discriminante Linear, não é difícil ver que o classificador de Bayes associa um elemento com valor das variáveis preditoras igual a  $\mathbf{x}$  à classe para a qual a função quadrática

$$\begin{aligned}\delta_k(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_k)^\top \Sigma_k^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_k) - \frac{1}{2} \log |\Sigma_k| + \log \pi_k \\ &= -\frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \Sigma_k^{-1} \mathbf{x} + \mathbf{x}^\top \Sigma_k^{-1} \boldsymbol{\mu}_k - \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}_k^\top \Sigma_k^{-1} \boldsymbol{\mu}_k - \frac{1}{2} \log |\Sigma_k| + \log \pi_k.\end{aligned}\quad (8.28)$$

é **máxima**. Como os elementos de (8.28) não são conhecidos, pode-se estimá-los por meio de

$$\bar{\mathbf{x}}_k = \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} \mathbf{x}_i, \quad \mathbf{S}_k = \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_k)^\top$$

e  $\hat{\pi}_k = n_k/n$ , em que  $n_k$  é o número de observações na classe  $k$  e  $n$  é o número total de observações no conjunto de dados. O primeiro termo do segundo membro da primeira igualdade de (8.28) é a distância de Mahalanobis.

O número de parâmetros a estimar,  $Kp(p+1)/2$ , é maior que no caso de Análise Discriminante Linear, na qual a matriz de covariâncias é comum. Além disso, a versão linear apresenta variância substancialmente menor mas viés maior do que a versão quadrática. A Análise Discriminante Quadrática é recomendada se o número de dados for grande; em caso contrário, convém usar Análise Discriminante Linear.

A Análise Discriminante Regularizada foi proposta por Friedman (1989) e é um compromisso entre Análise Discriminante Linear e Análise Discriminante Quadrática. O método proposto por Friedman consiste em “encolher” (*shrink*) as matrizes de covariâncias da Análise Discriminante Quadrática em direção a uma matriz de covariâncias comum. Friedman (1989) propõe o seguinte procedimento de regularização

$$\Sigma_k(\lambda, \gamma) = (1 - \gamma) \Sigma_k(\lambda) + \frac{\gamma}{p} \text{tr}[\Sigma_k(\lambda)] \mathbf{I}, \quad (8.29)$$

em que  $\text{tr}(\mathbf{A})$  indica o traço da matriz  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade e

$$\Sigma_k(\lambda) = \lambda \mathbf{S}_k + (1 - \lambda) \Sigma \quad (8.30)$$

com  $\Sigma = \sum n_k \Sigma_k / n$ .

O parâmetro  $\lambda \in [0,1]$  controla o grau segundo o qual a matriz de covariâncias ponderada pode ser usada e  $\gamma \in [0,1]$  controla o grau de encolhimento ao autovalor médio. Na prática,  $\lambda$  e  $\gamma$  são escolhidos por meio de LOOVC para cada ponto de uma grade no quadrado unitário.

Quando  $\lambda = 1$  e  $\gamma = 0$ , a Análise Discriminante Regularizada reduz-se à Análise Discriminante Linear. Se  $\lambda = 0$  e  $\gamma = 0$ , o método reduz-se à Análise Discriminante Quadrática. Se  $p > n_k$ , para todo  $k$  e  $p < n$ ,  $\Sigma_k$  é singular, mas nem a matriz ponderada  $\Sigma$  nem  $\Sigma_k(\lambda)$  em (8.30) o são. Se  $p > n$ , todas essas matrizes são singulares e a matriz  $\Sigma_k(\lambda, \gamma)$  é regularizada por (8.29).

Essas análises podem ser concretizadas por meio das funções `qda()` do pacote `MASS` e `rda()` do pacote `klaR`.

**Exemplo 8.8.** Vamos considerar novamente o conjunto de dados `disco` do Exemplo 8.1. Na segunda análise realizada por meio de regressão logística, a classificação foi concretizada via validação cruzada VC5/5 e LOOCV tendo como variáveis preditoras a distância aberta, a distância fechada ou ambas. A melhor acurácia, 85,7% foi obtida com ambas as variáveis preditoras e VC5/5. Agora, consideramos a classificação realizada por intermédio de Análises Discriminantes Linear, Quadrática e Regularizada, separando os dados em um conjunto de treinamento contendo 80% (83) dos elementos, selecionados aleatoriamente, e em um conjunto de validação com os restantes 21 elementos. Lembremos que  $y = 1$  corresponde a discos deslocados e  $y = 0$  a discos não deslocados.

As acurácias obtidas por meio de Análise Discriminante Linear e Análise Discriminante Quadrática foram, respectivamente, 90% e 85%. A concretização dessas análises é objeto de exercícios.

## 8.6 Notas de capítulo

### 1) Validação cruzada

Validação cruzada é a denominação atribuída a um conjunto de técnicas utilizadas para avaliar o erro de previsão de modelos estatísticos. O erro de previsão é uma medida da precisão com que um modelo pode ser usado para prever o valor de uma nova observação *i.e.*, uma observação diferente daquelas utilizadas para o ajuste do modelo.

Em modelos de regressão o erro de previsão é definido como  $EP = E(y_0 - \hat{y})^2$  em que  $y_0$  representa uma nova observação e  $\hat{y}$  é a previsão obtida pelo modelo. O **erro quadrático médio** ( $MSE$ ) dos resíduos pode ser usado como uma estimativa do erro de previsão ( $EP$ ), mas tende, em geral, a ser muito otimista, ou seja, a subestimar o seu verdadeiro valor. Uma razão é que os mesmos dados são utilizados para ajustar e avaliar o modelo.

No processo de validação cruzada, o modelo é ajustado a um subconjunto dos dados (**dados de treinamento**) e o resultado é empregado num outro subconjunto (**dados de validação**) para avaliar se ele tem um bom desempenho ou não.

O algoritmo proposto por Efron e Tibshirani (1993), conhecido por **LOOCV** (*Leave-One-Out Cross Validation*) e bastante utilizado nesse processo é o seguinte:

- i) Dadas  $n$  observações,  $y_1, \dots, y_n$ , o modelo é ajustado  $n$  vezes, em cada uma delas eliminando uma observação e o valor previsto para essa ob-

servação, denotado por  $\hat{y}_{-i}$ , é calculado com base no resultado obtido com as demais  $n - 1$ .

ii) O erro de previsão é estimado por

$$MSE_{(-i)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_{-i})^2. \quad (8.31)$$

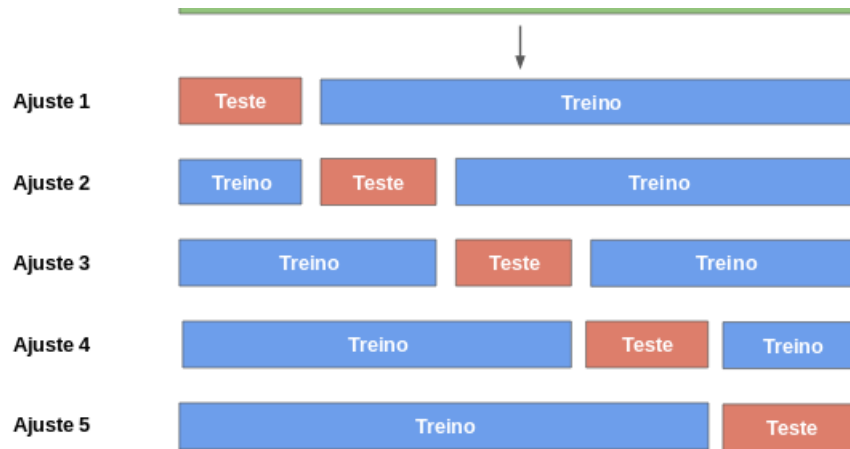
Como alternativa para (8.31) pode-se considerar

$$MSE_{(-i)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{y_i - \hat{y}_{-i}}{1 - h_i} \right)^2, \quad (8.32)$$

em que  $h_i$  é a **alavanca** (*leverage*), definida por

$$h_i = \frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2}.$$

Na chamada **validação cruzada de ordem  $k$**  (*k-fold cross validation*) o conjunto de dados original é subdividido em dois, sendo um deles utilizado como conjunto de treinamento e o segundo como conjunto de validação. Esse processo é repetido  $k$  vezes (usualmente, considera-se  $k = 5$  ou  $k = 10$ ) com conjuntos de treinamento e validação diferentes como mostra o esquema indicado na Figura 8.8 para o caso  $k = 5$ .



**Figura 8.8:** Representação esquemática da divisão dos dados para validação cruzada de ordem  $k = 5$ .

O correspondente erro de previsão é estimado por

$$MSE_{(k-fold)} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k MSE_i. \quad (8.33)$$

em que o erro quadrático médio ( $MSE$ ) obtido no  $i$ -ésimo ajuste,  $i = 1, \dots, k$ ,  $MSE_i = \sum (y_{0j} - \hat{y}_{0j})^2 / n_i$  com  $y_{0j}$ ,  $\hat{y}_{0j}$  e  $n_i$  denotando, respectivamente os valores observado e predito para a  $j$ -ésima observação e o número de observações no  $i$ -ésimo conjunto de validação.



Nos casos em que o interesse é classificação, o  $MSE$  é substituído pela **taxa de erros** associada a um classificador  $\hat{g}$  obtido do ajuste do modelo aos dados de treinamento  $\mathcal{T} = \{(\mathbf{x}_1^{(T)}, y_1^{(T)}), \dots, (\mathbf{x}_t^{(T)}, y_t^{(T)})\}$ . Essa taxa é definida como

$$TE = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v I[y_i^{(\mathcal{V})} \neq \hat{y}_i^{(\mathcal{V})}] \quad (8.34)$$

em que  $\hat{y}_i^{(\mathcal{V})}$  denota uma observação do conjunto de dados de validação,  $\mathcal{V} = \{(\mathbf{x}_1^{(\mathcal{V})}, y_1^{(\mathcal{V})}), \dots, (\mathbf{x}_v^{(\mathcal{V})}, y_v^{(\mathcal{V})})\}$ ,  $\hat{y}_i^{(\mathcal{V})}$ , o valor predito correspondente obtido por meio do classificador  $\hat{g}$  e a média é calculada em relação a todos os dados desse conjunto.

## 2) Teste de McNemar

É um teste para dados qualitativos pareados, dispostos numa tabela de contingência  $2 \times 2$  [McNemar (1947)]. Considere a Tabela 8.7 com resultados (positivo ou negativo) de dois testes aplicados em  $n$  indivíduos escolhidos ao acaso de uma população:

**Tabela 8.7:** Resultado de dois testes para  $n$  indivíduos

Teste 1	Teste 2		
	Positivo	Negativo	
Positivo	$n_{11}$	$n_{12}$	$n_{1+}$
Negativo	$n_{21}$	$n_{22}$	$n_{2+}$
	$n_{+1}$	$n_{+2}$	$n$

Nessa tabela,  $n_{ij}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = 1, 2$  denota a frequência de indivíduos com resposta no nível  $i$  do Teste 1 e nível  $j$  do Teste 2. Sejam  $n_{i+}$ ,  $i = 1, 2$  e  $n_{+j}$ ,  $j = 1, 2$  os totais de suas linhas e colunas, respectivamente. Além disso, sejam  $\hat{p}_{ij} = n_{ij}/n$ ,  $i, j = 1, 2$ ,  $\hat{p}_{i+} = n_{i+}/n$  e  $\hat{p}_{+j} = n_{+j}/n$  estimativas das respectivas probabilidades associadas à população da qual os indivíduos foram selecionados, nomeadamente,  $p_{ij}$ ,  $p_{i+}$  e  $p_{+j}$ .

A hipótese nula de homogeneidade marginal afirma que as duas probabilidades marginais associadas à cada teste são iguais, isto é,  $p_{11} + p_{12} = p_{11} + p_{21}$  e  $p_{21} + p_{22} = p_{12} + p_{22}$ , ou seja,  $p_{1+} = p_{+1}$  e  $p_{2+} = p_{+2}$ , o que é equivalente a

$$H_0 : p_{12} = p_{21} \quad \text{versus} \quad H_1 : p_{12} \neq p_{21}.$$

A estatística de MacNemar é

$$M = \frac{(n_{12} - n_{21})^2}{n_{12} + n_{21}}, \quad (8.35)$$

cuja distribuição sob a hipótese  $H_0$  é qui-quadrado com 1 grau de liberdade. Se  $n_{12}$  e  $n_{21}$  forem pequenos (*e.g.*, soma  $< 25$ ), então  $M$  não é bem aproximada pela distribuição qui-quadrado e um teste binomial exato pode ser usado. Se  $n_{12} > n_{21}$ , o valor- $p$  exato é

$$p = 2 \sum_{i=n_{12}}^N \binom{N}{i} (0,5)^i (0,5)^{N-i},$$

com  $N = n_{12} + n_{21}$ .

Edwards (1948) propôs a seguinte correção de continuidade para  $M$ :

$$M = \frac{(|n_{12} - n_{21}| - 1)^2}{n_{12} + n_{21}}.$$

O teste de McNemar pode ser usado para comparar técnicas de classificação no caso de algoritmos usados em conjuntos de dados grandes e que não podem ser repetidos via algum método de reamostragem, como validação cruzada.

Com o objetivo de avaliar a probabilidade de erro de tipo I, Dietterich (1998) comparou 5 testes para determinar se um algoritmo de classificação é melhor do que um outro em um determinado conjunto de dados e concluiu que os seguintes testes não devem ser usados:

- a) teste para a diferença de duas proporções;
- b) teste  $t$  pareado baseado em partições aleatórias dos conjuntos de treinamento/validação;
- c) teste  $t$  pareado baseado em validação cruzada com 10 repetições.

Todos esses testes exibem probabilidades de erro de tipo I altas, o que não ocorre com o teste de McNemar.

### 3) Comparação de classificadores

A comparação de dois classificadores  $g_1$  e  $g_2$  quanto à previsão para os elementos de um conjunto de dados de validação, pode ser respondida medindo-se a acurácia de cada um e aplicando o teste de McNemar. Com essa finalidade, dividimos o conjunto de dados original em um conjunto de treinamento  $\mathcal{T}$  (com  $n$  observações) e um conjunto validação  $\mathcal{V}$  (com  $m$  observações). Treinamos os algoritmos  $g_1$  e  $g_2$  no conjunto  $\mathcal{T}$ , obtendo os classificadores  $\hat{g}_1$  e  $\hat{g}_2$  e utilizamos os elementos do conjunto  $\mathcal{V}$  para comparação. Para cada  $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ , registramos como esse ponto foi classificado e construímos a Tabela 8.8.

**Tabela 8.8:** Comparação de dois classificadores

Classificação pelo Classificador $\hat{g}_1$	Classificação pelo Classificador $\hat{g}_2$	
	correta	errônea
correta	$n_{11}$	$n_{12}$
errônea	$n_{21}$	$n_{22}$

Aqui,  $\sum_i \sum_j n_{ij} = m$ . Rejeitando-se  $H_0$ , os dois algoritmos terão desempenho diferentes quando treinados em  $\mathcal{T}$ .

Note que esse teste tem dois problemas: primeiro, não mede diretamente a variabilidade devida à escolha de  $\mathcal{T}$ , nem a aleatoriedade interna do algoritmo, pois um único conjunto de treinamento é escolhido. Segundo, ele não compara os desempenhos dos algoritmos em conjuntos de treinamento de tamanho  $n + m$ , mas sobre conjuntos de tamanho  $m$ , em geral bem menor do que  $n$ .

## 8.7 Exercícios

- 1) Prove (8.12) e (8.13).
- 2) Verifique a veracidade da igualdade (8.28).
- 3) Reanalise os dados do Exemplo 8.4 por meio da função discriminante linear de Fisher incluindo ambas as variáveis preditoras.
- 4) Reanalise os dados do Exemplo 8.3 considerando duas variáveis preditoras `inibpre` e `inibpos` e validação cruzada de ordem  $k$  com diferentes valores de  $k$ . Avalie o efeito da semente nos resultados.
- 5) Analise os dados do arquivo `endometriose2` por meio das técnicas de classificação descritas neste capítulo, utilizando validação cruzada com diferentes parâmetros. Compare-as e discuta os resultados.
- 6) Considere os dados do arquivo `endometriose2`. Com propósitos de previsão, ajuste modelos de regressão logística com validação cruzada de ordem 5 tendo `endometriose` como variável resposta e
  - i) `idade`, `dormenstrual`, `dismenorreia` ou `tipoesteril` separadamente como variáveis explicativas (4 modelos);
  - ii) cada par das variáveis do item i) como variáveis explicativas (6 modelos);
  - iii) cada trio das variáveis do item i) como variáveis explicativas (4 modelos);
  - iv) as quatro variáveis do item i) como variáveis explicativas (1 modelo).Escolha o melhor modelo com base na acurácia.
- 7) Use os métodos de regressão logística e classificador KNN para os dados do arquivo `Iris`, com as quatro variáveis comprimento de pétala e sépala, largura de pétala e sépala.
- 8) Use os métodos discutidos nesse capítulo para os dados do arquivo `cifose`.
- 9) Use o conjunto de dados do Exemplo 8.1 e distância aberta como variável preditora. Use LOOCV e o classificador KNN, com vizinhos mais próximos de 1 a 5.
  - a) Qual o melhor classificador baseado na acurácia?
  - b) Obtenha a matriz de confusão e realize o teste de McNemar.
  - c) Obtenha a sensibilidade e a especificidade e explique seus significados nesse caso.
- 10) Compare os classificadores construídos no Exercício 7 usando o teste de McNemar.
- 11) Para os dados do Exercício 5, compare os classificadores usando regressão logística, classificador bayesiano e função discriminante linear de Fisher.
- 12) Prove (8.22).
- 13) Para os dados do Exemplo 8.1 obtenha classificadores produzidos com Análise Discriminante Quadrática e Análise Discriminante Regularizada.

- 14 Considere o caso de duas populações exponenciais, uma com média 1 e outra com média 0,5. Supondo  $\pi_1 = \pi_2$ , encontre o classificador de Bayes. Quais são as probabilidades de classificação incorreta? Construa um gráfico, mostrando a fronteira de decisão e as regiões de classificação em cada população. Generalize para o caso das médias serem  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$ , respectivamente.
- 15) Simule 200 observações de cada distribuição exponencial do Exercício 14. Usando os dados para estimar os parâmetros, supostos agora desconhecidos, obtenha o classificador de Bayes, a fronteira de decisão e as probabilidades de classificação incorreta com a regra obtida no exercício anterior. Compare.
- 16) Obtenha a função discriminante linear de Fisher para os dados gerados no Exercício 15. Compare-a com o classificador de Bayes.
- 17) Como fica a função discriminante linear de Fisher se as matrizes de covariâncias forem diferentes? Idem para o classificador bayesiano.
- 18) No contexto do Exemplo 8.1, obtenha um intervalo de confiança com coeficiente de confiança aproximado de 95% para a variação na chance de deslocamento do disco associada a um aumento de 0,1 unidades na distância aberta.
- 19) Como ficaria a regra de classificação (8.18) no caso de  $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$ ?
- 20) Simule 200 observações de cada distribuição normal do Exemplo 8.2. Usando os dados para estimar os parâmetros, supostos agora desconhecidos, obtenha o classificador de Bayes, a fronteira de decisão e as probabilidades de classificação incorreta com a regra obtida no exemplo. Compare com aquelas obtidas no exemplo.

# Algoritmos de Suporte Vetorial

Life is complicated, but not uninteresting.

Jerzy Neyman

## 9.1 Introdução

Algoritmos de Suporte Vetorial, conhecidos na literatura anglo-saxônica como *Support Vector Machines* (SVM) foram introduzidos por V. Vapnik e coautores trabalhando no AT&T Bell Laboratories e englobam técnicas úteis para classificação, com inúmeras aplicações, dentre as quais, destacamos reconhecimento de padrões, classificação de imagens, reconhecimento de textos escritos à mão, expressão de genes em DNA etc.<sup>1</sup> Em particular, Cortes e Vapnik (1995) desenvolveram essa classe de algoritmos para classificação binária.

Vapnik e Chervonesky (1964, 1974) foram, talvez, os primeiros a usar o termo **Aprendizado com Estatística** (*Statistical Learning*) em conexão com problemas de reconhecimento de padrões e inteligência artificial. Algoritmos de suporte vetorial são generalizações não lineares do algoritmo *Generalized Portrait*, desenvolvido por Vapnik e Chervonesky (1964). Um excelente tutorial sobre o tema pode ser encontrado em Smola e Schölkopf (2004). Outras referências importantes são Vapnik (1995, 1998), Hastie et al. (2017) e James et al. (2017).

Os algoritmos de suporte vetorial competem com outras técnicas bastante utilizadas, como Modelos Lineares Generalizados (MLG), Modelos Aditivos Generalizados (MAG), Redes Neurais, modelos baseados em árvores etc. A comparação com esses métodos é usualmente focada em três características: interpretabilidade do modelo usado, desempenho na presença de valores atípicos e poder preditivo. Por exemplo, os MLG têm baixo desempenho na presença de valores atípicos, valor preditivo moderado e boa interpretabilidade. Por outro lado, os algoritmos de suporte vetorial têm desempenho moderado na presença de valores atípicos, alto poder preditivo e baixa interpretabilidade. Em geral, a construção do modelo baseado nesses algoritmos é realizada com base num **conjunto de dados de treinamento** e a

---

<sup>1</sup>Embora a tradução literal do termo proposto por Vapnik seja **Máquinas** de Suporte Vetorial, optamos por utilizar **Algoritmos** de Suporte Vetorial para que o leitor não pense que algum tipo de máquina esteja ligado a essas técnicas. Aparentemente, Vapnik utilizou esse termo para enfatizar o aspecto computacional intrínseco à aplicação dos algoritmos.

avaliação de sua capacidade preditiva é concretizada num **conjunto de dados de validação**.

A abordagem de Cortes e Vapnik (1995) para o problema de classificação baseia-se nas seguintes premissas (Meyer, 2018):

- a) **Separação de classes:** procura-se o melhor hiperplano separador (ver Nota de Capítulo 1) das classes, maximizando a **margem** (distância) entre os pontos mais próximos das duas classes. Os pontos sobre as fronteiras dessas classes são chamados **vetores suporte** (*support vectors*).
- b) **Superposição de classes:** pontos de uma classe que estão no outro lado do hiperplano separador são ponderados com baixo peso para reduzir sua influência.
- c) **Não linearidade:** quando não é possível encontrar um separador linear, utilizamos um **kernel**<sup>2</sup> para mapear os dados do conjunto original em um espaço de dimensão mais alta [chamado de **espaço característico** (*feature space*)]. Os hiperplanos separadores são construídos nesse espaço. O sucesso das aplicações dos algoritmos de suporte vetorial depende da escolha desse *kernel*. Os *kernels* mais populares são: gaussiano, polinomial, de base exponencial (*exponential radial basis*), *splines* e, mais recentemente, aqueles baseados em ondaletas (veja a Nota de Capítulo 5).
- d) **Solução do problema:** envolve otimização quadrática e pode ser resolvida com técnicas conhecidas.

Essencialmente, um algoritmo de suporte vetorial é implementado por um código computacional. No R há pacotes como o `e1071` e a função `svm()` desenvolvidos com essa finalidade. Outras alternativas são o pacote `kernlab` e a função `ksvm()`.

Nas seções seguintes apresentamos os conceitos que fundamentam os algoritmos de suporte vetorial. Detalhes técnicos são abordados nas Notas de Capítulo.

## 9.2 Fundamentação dos algoritmos de suporte vetorial

Nesta seção, apresentamos as ideias básicas sobre algoritmos de suporte vetorial, concentrando-nos no problema de classificação dicotômica, *i.e.*, em que os dados devem ser classificadas em uma de duas classes possíveis. Para ideias sobre o caso de mais de duas classes, veja a Nota de Capítulo 6. Adotaremos uma abordagem heurística, mais próxima daquela usualmente empregada no Aprendizado com Estatística ou Aprendizado Automático, deixando para as Notas de Capítulo 3, 4 e 5 a abordagem original (e mais formal).

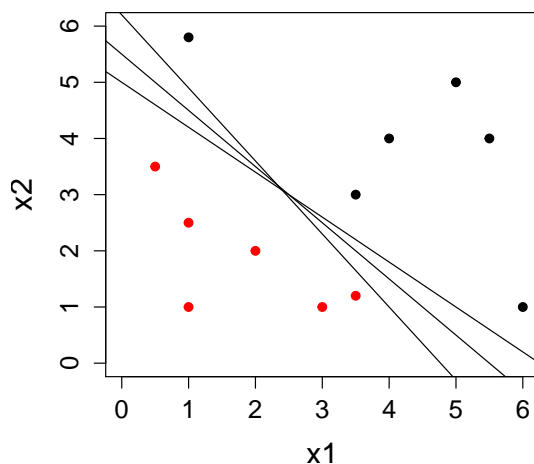
Seja  $\mathcal{X}$  o **espaço dos dados (ou dos padrões)**; em geral,  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^p$  em que  $p$  corresponde ao número de variáveis preditoras e seja a resposta  $y \in \{-1, 1\}$ . Por exemplo, podemos ter dados de várias variáveis preditoras (idade, peso, taxa de colesterol etc.) e uma variável resposta (doença cardíaca, com  $y = 1$  em caso afirmativo e  $y = -1$  em caso negativo) observadas em vários indivíduos (nos conjuntos de dados de treinamento e de validação). Nesse caso, o problema de classificação consiste na determinação de dois subconjuntos de  $\mathcal{X}$ , um dos quais estará associado a indivíduos com doença cardíaca e o outro a indivíduos sãos. O classificador

<sup>2</sup>Optamos por manter a palavra em inglês em vez de utilizar **núcleo**, que é a tradução em português.

indicará em qual das classes deveremos incluir novos indivíduos pertencentes a um **conjunto de previsão** para os quais conhecemos apenas os valores das variáveis preditoras. A escolha do classificador é feita com base em seu desempenho no **conjunto de dados de validação**. Quando esse conjunto não está disponível, costuma-se usar a técnica de **validação cruzada**. Veja a Nota de Capítulo 1 do Capítulo 8.

Vamos considerar três situações:

- 1) Os subconjuntos de  $\mathcal{X}$  são perfeitamente separáveis por uma fronteira linear como na Figura 9.1. Note que podemos ter mais de uma reta separando os dois subconjuntos. Nesse caso, o separador é conhecido como **classificador de margem máxima**. Para os dados dispostos na Figura 9.1, esse classificador está representado na Figura 9.3. Para duas variáveis preditoras, o separador é uma reta; para três variáveis preditoras, o separador é um plano. No caso de  $p$  variáveis preditoras, o separador é um **hiperplano** de dimensão  $p - 1$ .
- 2) Não há um hiperplano que separe os dois subconjuntos de  $\mathcal{X}$ , como no exemplo apresentado na Figura 9.2, que corresponde à Figura 9.1 com pontos trocados de lugar. O separador, neste caso também é uma reta, conhecida como **classificador de margem flexível**. Um exemplo está apresentado na Figura 9.4.
- 3) Um separador linear pode não conduzir a resultados satisfatórios exigindo a definição de fronteiras de separação não lineares. Para isso, recorremos ou a funções não lineares das variáveis preditoras ou a *kernels* para mapear o espaço dos dados em um espaço de dimensão maior. O separador neste caso é o **classificador de margem não linear**. Um exemplo está representado na Figura 9.8.



**Figura 9.1:** Dois subconjuntos de pontos perfeitamente separáveis por uma reta.

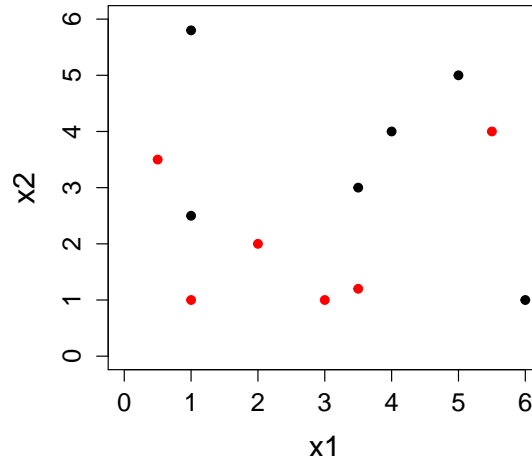


Figura 9.2: Dois subconjuntos de pontos não separáveis por uma reta.

### 9.3 Classificador de margem máxima

No caso de duas variáveis preditoras, o hiperplano separador é uma reta com equação

$$\alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 = 0.$$

Essa reta separa o plano em duas regiões, uma em que  $\alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 > 0$  e outra em que  $\alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 < 0$ .

Consideremos agora o caso com  $n$  observações das variáveis preditoras  $X_1, \dots, X_p$ , dispostas na forma de uma matriz  $\mathbf{X}$ , de ordem  $n \times p$ . Seja  $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{ip})^\top$ , o vetor correspondente à  $i$ -ésima linha de  $\mathbf{X}$ . Além disso, sejam  $y_1, \dots, y_n \in \{-1, 1\}$ , os valores da variável resposta indicadora de duas classes e seja  $\mathcal{T} = \{(\mathbf{x}_1, y_1), \dots, (\mathbf{x}_n, y_n)\}$  o conjunto de dados de treinamento. Dado um vetor  $\mathbf{x}_0 = (x_{10}, \dots, x_{p0})^\top$  de variáveis preditoras associado a um elemento do conjunto de previsão, o objetivo é classificá-lo em uma das duas classes.

Queremos desenvolver um classificador usando um hiperplano separador no espaço  $\mathbb{R}^p$  com base no conjunto de treinamento  $\mathcal{T}$  ou seja, construir uma função  $f(\mathbf{x}) = \alpha + \boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{x}$  com  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^\top$ , tal que

$$\begin{aligned} \alpha + \boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{x}_i &> 0, & \text{se } y_i = 1, \\ \alpha + \boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{x}_i &< 0, & \text{se } y_i = -1. \end{aligned}$$

Classificaremos o elemento cujo valor das variáveis preditoras é  $\mathbf{x}_0$  a partir do sinal de  $f(\mathbf{x}_0) = \alpha + \boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{x}_0$ ; se o sinal for positivo, esse elemento será classificado na Classe 1 (para a qual  $y = 1$ , digamos), e se o sinal for negativo, na Classe 2 (para a qual  $y = -1$ ). Em qualquer dos dois casos,  $y_i(\alpha + \boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{x}_i) \geq 0$ .

Como vimos, podem existir infinitos hiperplanos separadores se os dados de treinamento estiverem perfeitamente separados. A sugestão de Vapnik e colaboradores é escolher um hiperplano, chamado de **hiperplano de margem máxima** que esteja o mais afastado das observações das variáveis preditoras do conjunto de treinamento. A **margem** é a menor distância entre o hiperplano e os pontos do conjunto de treinamento.

O classificador de margem máxima é a solução (se existir) do seguinte problema de otimização:

$$\text{maximizar}_{(\alpha, \boldsymbol{\beta})} m(\alpha, \boldsymbol{\beta}) \quad (9.1)$$



sujeito a  $\sum_{i=1}^p \beta_i^2 = 1$  e  $y_i(\alpha + \beta^\top \mathbf{x}_i) \geq m(\alpha, \beta)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Dizemos que  $m = m(\alpha, \beta)$  é a **margem** do hiperplano e cada observação (valores das variáveis preditoras) estará do lado correto do hiperplano se  $m > 0$ .

Os chamados **vetores suporte** são definidos pelos pontos cujas distâncias ao hiperplano separador sejam iguais à margem e se situam sobre as **fronteiras de separação** que são retas paralelas cujas distâncias ao hiperplano separador são iguais à margem. O classificador depende desses vetores, mas não dos demais (vetores correspondentes aos valores das variáveis preditoras).

A distância  $m$  do hiperplano separador a um ponto do conjunto de treinamento é

$$m = |f(\mathbf{x})|/\|\beta\|,$$

em que o denominador indica a norma do vetor  $\beta$ .

Como o interesse está nos pontos que são corretamente classificados, devemos ter  $y_i f(\mathbf{x}_i) > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Então

$$\frac{y_i f(\mathbf{x}_i)}{\|\beta\|} = \frac{y_i(\alpha + \beta^\top \mathbf{x}_i)}{\|\beta\|}, \quad (9.2)$$

e queremos escolher  $\alpha$  e  $\beta$  de modo a maximizar essa distância. A margem máxima é encontrada resolvendo

$$\operatorname{argmax}_{\alpha, \beta} \left\{ \frac{1}{\|\beta\|} \min_i [y_i(\alpha + \beta^\top \mathbf{x}_i)] \right\}. \quad (9.3)$$

A solução de (9.3) é complicada e sua **formulação canônica** pode ser convertida num problema mais fácil por meio do uso de multiplicadores de Lagrange. Veja a Nota de Capítulo 2 para mais detalhes sobre esse problema.

**Exemplo 9.1.** Consideremos os 12 pontos dispostos na Figura 9.1, sendo 6 em cada classe. Usando a função `svm()` do pacote `e1071` obtemos o seguinte resultado

```
svm(formula = type ~ ., data = my.data, type = "C-classification",
kernel = "linear", scale = FALSE)
```

Parameters:

```
SVM-Type: C-classification
SVM-Kernel: linear
cost: 1
gamma: 0.5
```

Number of Support Vectors: 3

```
( 1 2 )
```

Number of Classes: 2

Levels:

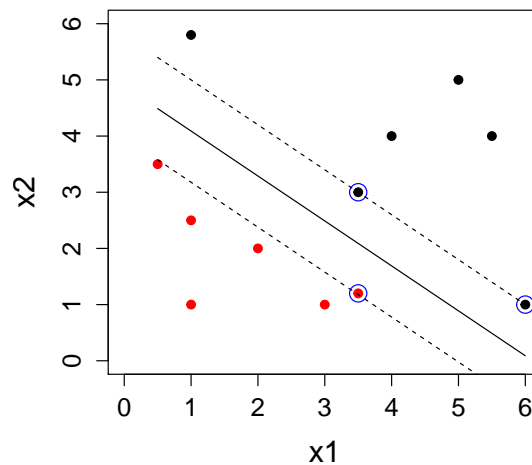
```
-1 1
```

Observe que a função usa o *kernel* linear, que corresponde ao classificador de margem máxima. Neste caso, o parâmetro `gamma` corresponde a uma constante conveniente [veja a expressão (9.16) da Nota de Capítulo 2]. A interpretação do parâmetro `cost` será explicada adiante. Os coeficientes do hiperplano separador, que nesse caso é uma reta, podem ser obtidos por meio dos comandos

```
alpha = svm.model$rho
beta = t(svm.model$coefs) %*% svm.model$SV
> alpha
[1] 5.365853
```

```
> beta
      x1      x2
[1,] -0.8780489 -1.097561
```

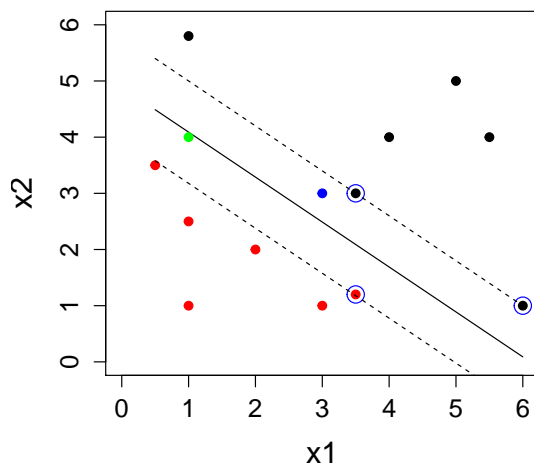
A equação do hiperplano separador, disposto na Figura 9.3 é  $5,366 - 0,878X_1 - 1,098X_2 = 0$ . Na mesma figura, indicamos as fronteiras de separação e os vetores suporte, dados pela solução de (9.1).<sup>3</sup> Neste caso há três vetores suporte (indicados por círculos azuis), um na Classe 1 (ponto em vermelho) e dois na Classe 2 (pontos em preto). Os demais pontos estão em lados separados, delimitados pelas fronteiras de separação (não há pontos entre as fronteiras). A margem é  $m = 1/(0,878^2 + 1,098^2)^{1/2} = 0,711$  (veja a Nota de Capítulo 2).



**Figura 9.3:** Hiperplano (reta) separador, margem, fronteiras e vetores suporte.

Consideremos agora dois novos elementos, para os quais conhecemos apenas os valores da variável preditora, digamos,  $\mathbf{x}_0^*$  e  $\mathbf{x}_1^*$ , o primeiro na Classe 1 ( $y_0 = 1$ ) e o segundo na Classe 2 ( $y_0 = -1$ ) e vamos classificá-los, usando o algoritmo. No contexto de Aprendizado com Estatística, o conjunto contendo esses dois pontos é o chamado conjunto de previsão. Por meio da função `predict()`, obtemos a Figura 9.4, que mostra a classificação correta de ambos os elementos (representados nas cores verde e azul).

<sup>3</sup>Note que os coeficientes  $\beta_1 = 0,8780489$  e  $\beta_2 = -1,097561$  não satisfazem a restrição indicada em (9.1), pois foram obtidos por meio da formulação canônica do problema em que a restrição é imposta ao numerador de (9.2). Para detalhes, consulte a Nota de Capítulo 2.



**Figura 9.4:** Classificação de novos elementos indicados pelas cores verde (Classe 1) e azul (Classe 2).

Se o problema acima não tiver solução, não existirá hiperplano separador, como é o caso apresentado na Figura 9.2. Nesse caso precisamos recorrer a um classificador que quase separa as duas classes. É o que veremos na próxima seção.

## 9.4 Classificador de margem flexível

Se não existir um hiperplano separador, como aquele do Exemplo 9.1, elementos do conjunto de dados podem estar do lado errado da margem ou mesmo do hiperplano, correspondendo nesse caso a classificações erradas.

O **classificador de margem flexível**, também conhecido como **classificador baseado em suporte vetorial**<sup>4</sup> é escolhido de modo a classificar corretamente a maioria dos elementos do conjunto de dados, o que se consegue com a introdução de **variáveis de folga**,  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^\top$ , no seguinte problema de otimização:

$$\text{maximizar}_{(\alpha, \beta, \xi)} m(\alpha, \beta, \xi) \quad (9.4)$$

sujeito a  $\sum_{i=1}^p \beta_i^2 = 1$ ,  $y_i(\alpha + \beta^\top \mathbf{x}_i) \geq m(\alpha, \beta, \xi)(1 - \xi_i)$ ,  $\xi_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^n \xi_i \leq C$  em que  $C$  é uma constante positiva. Mais detalhes sobre a constante  $C$  serão apresentados posteriormente.

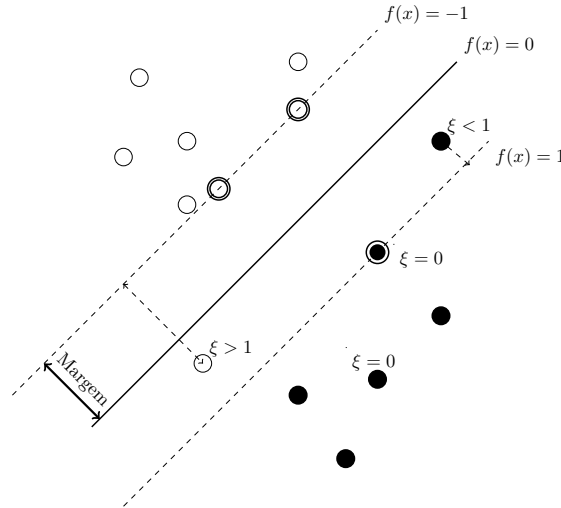
As variáveis de folga permitem que elementos do conjunto de dados estejam do lado errado da margem ou do hiperplano. Elementos tais que  $\xi_i = 0$  são corretamente classificados e estão ou sobre a fronteira de separação ou do lado correto dela. Elementos para os quais  $0 < \xi_i \leq 1$  estão dentro da região delimitada pelas fronteiras de separação, mas do lado correto do hiperplano, e elementos para os quais  $\xi_i > 1$  estão do lado errado do hiperplano e serão classificados erroneamente. Veja a Figura 9.5, extraída de Bishop (2006) em que a margem  $m$  está normalizada apropriadamente. Mais detalhes podem ser obtidos nas Notas de Capítulo 3 e 4.

<sup>4</sup>Embora esse tipo de classificador seja conhecido como *support vector classifier* ou *soft margin classifier*, optamos por denominá-lo “classificador de margem flexível” para diferenciá-lo do “classificador de margem máxima”, que também é baseado em vetores suporte.

Como o objetivo é maximizar a margem, podemos minimizar

$$C \sum_{i=1}^n \xi_i + \frac{1}{2} \|\beta\|^2, \quad (9.5)$$

em que  $C > 0$  controla o equilíbrio entre a penalidade das variáveis de folga e a margem.



**Figura 9.5:** Detalhes sobre o classificador de margem flexível.

Qualquer elemento classificado erroneamente satisfaz  $\xi_i > 1$  e um limite superior para o número de classificações errôneas é  $\sum_{i=1}^n \xi_i$ . O objetivo, então é minimizar (9.5) sujeito às restrições de (9.4). Detalhes podem ser obtidos na Nota de Capítulo 4.

A constante  $C \geq 0$  pode ser interpretada como o **custo** (em termos do número e da gravidade das classificações erradas) permitidas pelo algoritmo. Se  $C = 0$ , o problema se reduz ao de obtenção do classificador de margem máxima (se as classes forem separáveis). Quando  $C$  aumenta, a margem fica mais larga e consequentemente, o número de classificações erradas diminui; o contrário ocorre quando  $C$  decresce. O valor de  $C$  também está ligado à relação viés-variância: quando a constante  $C$  é pequena, o viés é pequeno e a variância é grande; se  $C$  é grande, o viés é grande e a variância é pequena (veja o Exercício 1).

A constante  $C$  normalmente é escolhida por **validação cruzada** (veja a Nota de Capítulo 1 do Capítulo 8). O pacote `e1071` tem uma função, `tune()`, que realiza esse procedimento para diferentes valores de  $C$ , com o intuito de escolher o melhor modelo. Na realidade, essa função permite escolher a melhor combinação da constante  $C$  e do parâmetro `gamma`, que tem relevância quando se usam *kernels* não lineares. Para valores de `gamma` grandes, o algoritmo tenta classificar todas os elementos do conjunto de treinamento exatamente, podendo gerar sobreajuste. Para *kernels* lineares, `gamma` é uma constante igual a 0,5 (veja o Exercício 5).

**Exemplo 9.1 (continuação):** Consideremos agora os dados dispostos na Figura 9.2 em que os subconjuntos de  $\mathcal{X}$  não são perfeitamente separáveis. Nesse caso, a utilização da função `tune()` do pacote `e1071` gera o seguinte resultado, indicando que a melhor opção é considerar  $C = 4$  e `gamma` = 0,5.

```

Parameter tuning of 'svm':
- sampling method: 10-fold cross validation
- best parameters:
  gamma cost
    0.5    4
- best performance: 0.5
- Detailed performance results:
  gamma cost error dispersion
1  0.5    4  0.50  0.4714045
2  1.0    4  0.60  0.4594683
3  2.0    4  0.70  0.4216370
4  0.5    8  0.65  0.4743416
5  1.0    8  0.65  0.4743416
6  2.0    8  0.70  0.4216370
7  0.5   16  0.65  0.4743416
8  1.0   16  0.65  0.4743416
9  2.0   16  0.70  0.4216370

```

Com os parâmetros selecionados, as funções `svm()` e `summary()` geram o seguinte resultado, indicando que há 8 vetores suporte, 4 em cada subconjunto de  $\mathcal{X}$ .

```

svm(formula = type ~ ., data = my.data, type = "C-classification",
kernel = "linear", gamma = 0.5, cost = 4, scale = FALSE)
Parameters:
  SVM-Type:  C-classification
  SVM-Kernel: linear
           cost: 4
           gamma: 0.5
Number of Support Vectors:  8
( 4 4 )
Number of Classes:  2
Levels:
-1 1

```

Um gráfico indicando os vetores suporte e as regiões de classificação correspondentes está apresentado na Figura 9.6.

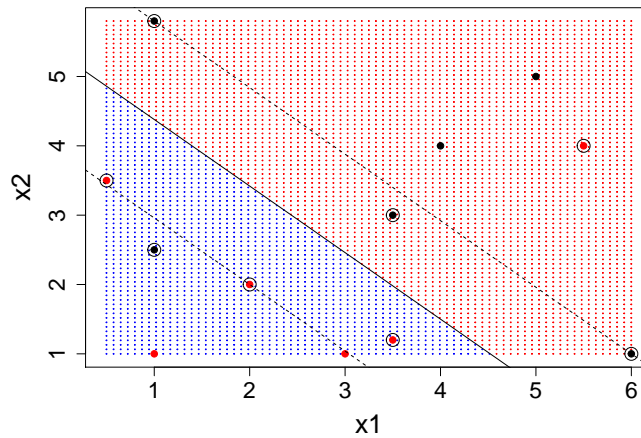
A equação do hiperplano classificador é

$$3,760 - 0,676x_1 - 0,704x_2 = 0$$

ou equivalentemente,

$$x_2 = 3,760/0,704 - 0,676/0,704x_1 = 5,339 - 0,960x_1.$$

A margem correspondente é  $m = 1/(0,676^2 + 0,704^2)^{1/2} = 1,025$ . Para detalhes, consulte as Notas de Capítulo 2 e 3.



**Figura 9.6:** Vetores suporte para os dados da Figura 9.2

Com os comandos `svm.pred <- predict(svm.modelo, my.data)` e `table(svm.pred, ys)` pode-se obter uma tabela com a verdadeira classificação dos elementos do conjunto de treinamento assim como a classificação determinada pelo algoritmo. No exemplo, há 2 elementos erroneamente classificados conforme indicado na Tabela 9.1.

**Tabela 9.1:** Coordenadas e classificação dos elementos do Exemplo 9.1 com posições trocadas e classificação predita pelo algoritmo

observação	x1	x2	y	y predito
1	0.5	3.5	1	1
2	1.0	1.0	1	1
3	1.0	2.5	-1	<b>1</b>
4	2.0	2.0	1	1
5	3.0	1.0	1	1
6	3.5	1.2	1	1
7	1.0	5.8	-1	-1
8	3.5	3.0	-1	-1
9	4.0	4.0	-1	-1
10	5.0	5.0	-1	-1
11	5.5	4.0	1	<b>-1</b>
12	6.0	1.0	-1	-1

**Exemplo 9.2.** Consideremos os dados do arquivo `tipofacial` analisados no Exemplo 8.5. Um dos objetivos era utilizar medidas entre diferentes pontos do crânio para caracterizar indivíduos com diferentes tipos faciais, a saber, braquicéfalos, mesocéfalos e dolicocefalos. O conjunto de dados contém observações de 11 variáveis em 101 pacientes. Para efeitos didáticos, utilizaremos apenas a altura facial e a profundidade facial como variáveis predictoras. A Figura 8.5 do Capítulo 8 mostra

um gráfico de dispersão com os três grupos (correspondentes à classificação do tipo facial).

Utilizando a função `tune.svm()` do pacote `e1071` por meio dos seguintes comandos

```
> escolhaparam <- tune.svm(grupo ~ altfac + proffac, data = face,
  gamma = 2^(-2:2), cost = 2^2:5,
  na.action(na.omit(c(1, NA))))
> summary(escolhaparam)
```

obtemos os resultados, apresentados abaixo, que indicam que as melhores opções para os parâmetros  $C$  e  $\gamma$  (por meio de validação cruzada de ordem 10) são  $C = 4$  e  $\gamma = 2$ . No entanto, como pretendemos utilizar um *kernel* linear, necessariamente  $\gamma = 0,5$  e esse parâmetro pode ser omitido no ajuste do modelo.

```
Parameter tuning of 'svm':
- sampling method: 10-fold cross validation
- best parameters:
  gamma cost
    2     4
- best performance: 0.1281818
- Detailed performance results:
  gamma cost   error dispersion
1   0.25     4 0.1481818 0.1774759
2   0.50     4 0.1681818 0.1700348
3   1.00     4 0.1681818 0.1764485
4   2.00     4 0.1281818 0.1241648
5   4.00     4 0.1581818 0.1345127
6   0.25     5 0.1481818 0.1774759
7   0.50     5 0.1681818 0.1700348
8   1.00     5 0.1481818 0.1503623
9   2.00     5 0.1281818 0.1148681
10  4.00     5 0.1772727 0.1453440
```

Por intermédio da função `svm()` com o parâmetro  $C = 4$  obtemos o seguinte resultado com o classificador de margem flexível:

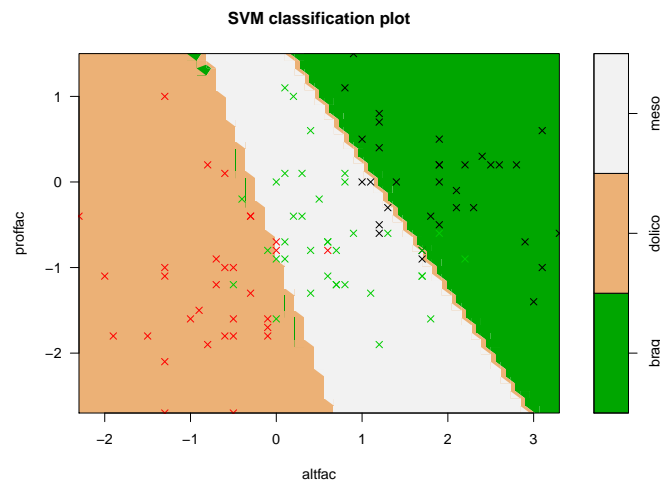
```
svm.model <- svm(grupo ~ altfac + proffac, data = face,
  kernel = "linear", cost=4)
summary(svm.model)
Parameters:
  SVM-Type: C-classification
  SVM-Kernel: linear
  cost: 4
Number of Support Vectors: 43
( 12 10 21 )
Number of Classes: 3
Levels:
  braq dolico meso
```

A tabela de classificação obtida com os comandos apresentados abaixo, indica o número de classificações certas (85) e erradas (16).

```
svm.pred <- predict(svm.model, face)
table(pred = svm.pred, true = face\$grupo)
      true
pred   braq dolico meso
braq   26    0    2
dolico  0   28    4
meso    7    3   31
```

Na Figura 9.7 apresentamos o gráfico de classificação correspondente, obtido por meio do comando

```
plot(svm.model, face, proffac ~ altfac, svSymbol = 4, dataSymbol = 4,
      cex.lab=1.8, main="", color.palette = terrain.colors)
```



**Figura 9.7:** Classificação do tipo facial obtida pelo classificador de margem flexível (símbolos vermelhos = dolicocefalos, verdes = mesocéfalos, pretos = braquicéfalos).

Uma das características importantes dos classificadores baseados em vetores suporte é que apenas os elementos do conjunto de dados que se situam sobre as fronteiras de separação ou do lado errado das mesmas afetam o hiperplano. Valores das variáveis preditoras associadas aos elementos do conjunto de dados que se situam no lado correto das fronteiras de separação podem ser alterados (mantendo suas classificações) sem que o hiperplano separador seja afetado.

## 9.5 Classificador de margem não linear

Na seção anterior apresentamos um algoritmo de classificação usado quando as fronteiras são lineares. Se quisermos considerar fronteiras não lineares, precisamos aumentar a dimensão do espaço de dados (espaço característico) por meio de outras funções, polinomiais ou não, para determinar as fronteiras de separação. No caso de duas variáveis preditoras,  $X_1$  e  $X_2$ , por exemplo, poderíamos considerar o espaço determinado por  $X_1, X_2, X_1^2, X_2^3$ . Uma alternativa mais conveniente e mais atrativa para aumentar a dimensão do espaço característico consiste na utilização de *kernels*.



Pode-se demonstrar que um classificador linear como aquele definido em (9.4) depende somente dos vetores suporte e pode ser escrito na forma

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i \in S} \gamma_i \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_i \rangle + \delta, \quad (9.6)$$

em que  $S$  indica o conjunto dos vetores suporte, os  $\gamma_i$  são funções de  $\alpha$  e  $\beta$  e  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  indica o produto interno dos vetores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ . Uma das vantagens de se utilizar *kernels* na construção de classificadores é que eles dependem somente dos vetores suporte e não de todos os demais associados aos elementos do conjunto de dados o que implica uma redução considerável no custo computacional.

O classificador de margem flexível usa um *kernel* linear, da forma

$$K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \sum_{k=1}^p x_{ik} x_{jk} = \mathbf{x}_i^\top \mathbf{x}_j.$$

Se quisermos definir um classificador em um espaço característico de dimensão maior, podemos incluir polinômios de grau maior ou mesmo outras funções na sua definição. Os *kernels* mais utilizados na prática são:

- a) lineares:  $K(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mathbf{x}_1^\top \mathbf{x}_2$ ;
- b) polinomiais:  $K(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = (a + \mathbf{x}_1^\top \mathbf{x}_2)^d$ ;
- c) radiais:  $K(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \exp(-\gamma \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^2)$ , com  $\gamma > 0$  constante.
- d) tangentes hiperbólicas:  $K(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \tanh(\theta + k \mathbf{x}_1^\top \mathbf{x}_2)$ .

Os **classificadores de margem não linear** são obtidos combinando-se classificadores de margem flexível com *kernels* não lineares, de modo que

$$f(\mathbf{x}) = \alpha + \sum_{i \in S} \gamma_i K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) + \delta. \quad (9.7)$$

**Exemplo 9.3.** Consideremos uma análise alternativa para os dados do Exemplo 9.2, utilizando um *kernel* polinomial de grau 3. Os comandos e resultados da reanálise dos dados por meio do classificador de margem não linear são:

```

escolhaparam <- tune.svm(grupo ~ altfac + proffac, data = face,
                        kernel = "polynomial", degree=3,
                        gamma = 2^(-1:2), cost = 2^2:6)
> summary(escolhaparam)
Parameter tuning of 'svm':
- sampling method: 10-fold cross validation
- best parameters:
  degree gamma cost
    3     0.5     4
- best performance: 0.1681818

- Detailed performance results:
  degree gamma cost   error dispersion
1       3     0.5     4 0.1681818 0.09440257
2       3     1.0     4 0.1772727 0.12024233
3       3     2.0     4 0.1872727 0.11722221
4       3     4.0     4 0.1872727 0.11722221
5       3     0.5     5 0.1972727 0.11314439

```

```

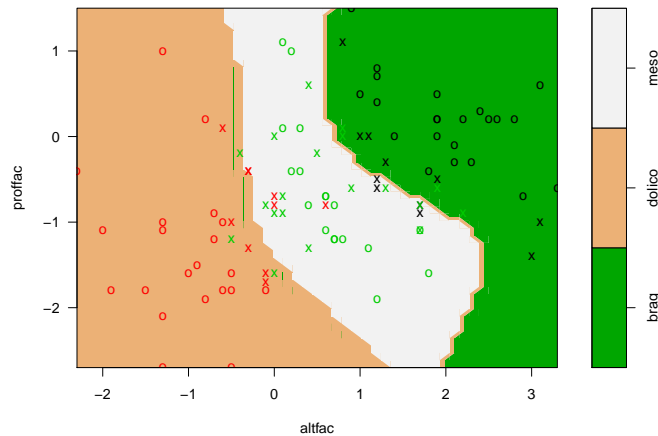
6      3      1.0      5 0.1772727 0.12024233
7      3      2.0      5 0.1872727 0.11722221
8      3      4.0      5 0.1872727 0.11722221
9      3      0.5      6 0.1872727 0.12634583
10     3      1.0      6 0.1772727 0.12024233
11     3      2.0      6 0.1872727 0.11722221
12     3      4.0      6 0.1872727 0.11722221
svm.model <- svm(grupo ~ altfac + proffac, data=face,
                 type='C-classification', kernel='polynomial',
                 degree=3, gamma=1, cost=4, coef0=1, scale=FALSE)
summary(svm.model)
Parameters:
  SVM-Type: C-classification
 SVM-Kernel: polynomial
      cost: 4
      degree: 3
      coef.0: 1
Number of Support Vectors: 40
( 11 10 19 )Number of Classes: 3
Levels:
 braq dolico meso

```

A correspondente tabela de classificação é

	true		
pred	braq	dolico	meso
braq	29	0	4
dolico	0	26	3
meso	4	5	30

e o gráfico associado está apresentado na Figura 9.8.



**Figura 9.8:** Classificação do tipo facial obtida pelo classificador de margem não linear (símbolos vermelhos = dolicocefalos, verdes = mesocéfalos, pretos = braquicéfalos).

Neste exemplo, o número de classificações erradas (16) é igual aquele do caso do classificador de margem flexível.

Com base nesses resultados, podemos classificar indivíduos para os quais dispomos apenas dos valores das variáveis preditoras. Com essa finalidade, consideremos o seguinte conjunto de previsão com 4 indivíduos:

```
paciente altfac proffac
1      102    1.4    1.0
2      103    3.2    0.1
3      104   -2.9   -1.0
4      105    0.5    0.9
```

Por meio dos seguintes comandos

```
svm.model <- svm(grupo ~ altfac + proffac, data=face, type='C-classification',
                 kernel='polynomial', degree=3, gamma=1, cost=4, coef0=1,
                 scale=FALSE, probability=TRUE)
prednovos <- predict(svm.model, teste, probability=TRUE)
```

obtemos a tabela com as probabilidades de classificação de cada um dos 4 indivíduos

```
      1      2      3      4
braq  braq dolico meso
attr(,"probabilities")
      braq      dolico      meso
1 0.954231749 0.0193863931 0.0263818582
2 0.961362058 0.0006154201 0.0380225221
3 0.008257919 0.9910764215 0.0006656599
4 0.254247666 0.1197179567 0.6260343773
Levels: braq dolico meso
```

O processo classifica os indivíduos 102 e 103 como braquicéfalos, o indivíduo 103 como doliocéfalo e o 104, como mesocéfalo.

## 9.6 Regressão por algoritmos de suporte vetorial

Embora tenhamos usado problemas de classificação para ilustrar os algoritmos de suporte vetorial, eles também podem ser usados para previsão. Essencialmente, o problema tratado aqui tem a mesma natureza daqueles tratados nas seções anteriores. A diferença está na variável resposta,  $Y$ , que é quantitativa e pode assumir qualquer valor real. Apresentamos as ideias da técnica por meio de exemplos, deixando os detalhes para as notas de capítulo.

Dado um conjunto de treinamento,  $\mathcal{T} = \{(\mathbf{x}_1, y_1), \dots, (\mathbf{x}_n, y_n)\}$ , o objetivo é obter uma função  $f(\mathbf{x}_i)$ , a mais achatada (*flat*) possível tal que  $|y_i - f(\mathbf{x}_i)| < \epsilon$ ,  $i = 1, \dots, n$  em que  $\epsilon > 0$  é o maior erro que estamos dispostos a cometer. Por exemplo,  $\epsilon$  pode ser a máxima perda que admitimos ao negociar com ações dadas certas características obtidas do balanço de um conjunto de empresas.

No caso de funções lineares, o objetivo é determinar  $\alpha$  e  $\beta$  tais que  $|f(\mathbf{x}_i)| = |\alpha + \beta^\top \mathbf{x}_i| \leq \epsilon$ . A condição de que  $f(\mathbf{x})$  seja a mais achatada possível corresponde a que  $\beta$  seja pequeno, ou seja o problema a resolver pode ser expresso como

$$\text{minimizar } \frac{1}{2} \|\beta\|^2 \text{ sujeito a } \begin{cases} y_i - \beta^\top \mathbf{x}_i - \alpha \leq \epsilon, \\ \alpha + \beta^\top \mathbf{x}_i - y_i \leq \epsilon \end{cases} \quad (9.8)$$

Nem sempre as condições (9.8) podem ser satisfeitas e nesse caso, assim como nos modelos de classificação, podemos introduzir variáveis de folga  $\xi_i$  e  $\xi_i^*$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,

que permitem flexibilizar a restrição de que o máximo erro permitido seja  $\epsilon$ . O problema a resolver nesse contexto é

$$\text{minimizar } \frac{1}{2} \|\beta\|^2 + \sum_{i=1}^n C(\xi + \xi^*) \text{ sujeito a } \begin{cases} y_i - \beta^\top \mathbf{x}_i - \alpha \leq \epsilon + \xi_i, \\ \alpha + \beta^\top \mathbf{x}_i - y_i \leq \epsilon + \xi_i^* \\ \xi_i, \xi_i^* > 0 \end{cases} \quad (9.9)$$

A constante  $C > 0$  determina um compromisso entre o achatamento da função  $f$  e o quanto estamos dispostos a tolerar erros com magnitude maior do que  $\epsilon$ .

As soluções de (9.8) ou (9.9) podem ser encontradas mais facilmente usando a formulação dual (ver Nota de Capítulo 3). No caso de modelos lineares, a previsão para um elemento com valor das variáveis preditoras igual a  $\mathbf{x}_0$  é obtida de

$$f(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^n \hat{\lambda}_i K(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_i) + \hat{\alpha},$$

em que  $\hat{\lambda}_i$  são multiplicadores de Lagrange,  $K(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_i)$  é um *kernel*,  $\hat{\alpha} = y_i - \epsilon - \hat{\beta}^\top \mathbf{x}_i$ ,  $\hat{\beta} = \sum_{i=1}^n \hat{\lambda}_i \mathbf{x}_i$ . Os vetores suporte são aqueles para os quais os multiplicadores de Lagrange  $\hat{\lambda}_i$  são positivos. Se optarmos por um *kernel* linear,  $K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = \langle \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_i \rangle$ .

**Exemplo 9.4.** Consideremos os dados da Tabela 6.1 com o objetivo de estudar a relação entre a distância com que motoristas conseguem distinguir um certo objeto e sua idade. O diagrama de dispersão e a reta de mínimos quadrados ajustada ( $y = 174,2 - 1,0x$ ) correspondentes estão apresentados na Figura 9.9.

O ajuste de uma regressão com suporte vetorial baseada num *kernel* linear com os parâmetros *default* pode ser obtido por meio dos comandos

```
> model1 <- svm(x, y, kernel="linear")
> summary(model1)
Parameters:
  SVM-Type:  eps-regression
  SVM-Kernel: linear
      cost:  1
      gamma: 1
      epsilon: 0.1
Number of Support Vectors:  23

> betahat <- model1$rho
[1] -0.08572489
>
> coef1 <- sum(model1$coefs*x[model1$index])
> alphahat <- coef1/model1$rho
[1] 172.8264
```

de forma que a função previsora corresponde à  $f(x) = 172,9 - 0,09x$ . A previsão para as distâncias segundo esse modelo pode ser obtida por meio do comando `yhat1 <- predict(model1, x)`. O *RMSE* correspondente pode ser obtido por meio do comando `rmse(yhat1, y)` é 16,51464 (maior do que o *RMSE* associado ao ajuste por meio de mínimos quadrados, que é 16,02487).

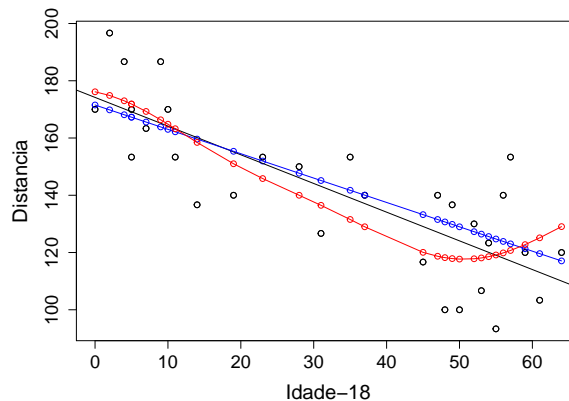
Um modelo mais flexível pode ser ajustado com um *kernel* radial do tipo  $K(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \exp(-\gamma \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^2)$  com  $\gamma > 0$  constante. Nesse caso, convém realizar uma análise de sensibilidade com validação cruzada para a seleção da melhor combinação dos valores do máximo erro  $\epsilon$  que estamos dispostos a cometer e do custo de penalização,  $C$ . Isso pode ser concretizado por meio dos comandos

```
> sensib <- tune(svm, y ~ x, ranges = list(epsilon = seq(0,1,0.1),
      cost = 2^(2:9)))
Parameter tuning of 'svm':
- sampling method: 10-fold cross validation
- best parameters:
  epsilon cost
    0.8    8
- best performance: 275.8086
```

Com esses resultados, realizamos um ajuste por meio de um *kernel* radial com parâmetros  $C = 8$  e  $\epsilon = 0.8$ , obtendo

```
> model2 <- svm(x, y, kernel="radial", cost=8, epsilon=0.8)
> summary(model2)
Parameters:
  SVM-Type:  eps-regression
  SVM-Kernel: radial
      cost:  8
      gamma: 1
      epsilon: 0.8
Number of Support Vectors: 6
```

O *RMSE* para esse modelo é 15,84272, menor do que aqueles obtidos por meio dos demais ajustes. Um gráfico com os ajustes por mínimos quadrados (em preto) e por regressões com suporte vetorial baseadas em *kernels* linear (em azul) e radial (em vermelho) está apresentado na Figura 9.9.



**Figura 9.9:** Regressão SVM para os dados da Tabela 6.1

Algoritmos de suporte vetorial no contexto de regressão também podem ser utilizados com o mesmo propósito de suavização daquele concretizado pelo método *lowess* (ver Nota de Capítulo 2 do Capítulo 5). Nesse contexto, a suavidade do ajuste deve ser modulada pela escolha do parâmetro  $\epsilon$ . Valores de  $\epsilon$  pequenos (próximos de zero) geram curvas mais suaves e requerem muitos vetores suporte, podendo produzir sobreajuste. Valores de  $\epsilon$  grandes (próximos de 1.0, por exemplo) geram curvas menos suaves e requerem menos vetores suporte. O parâmetro  $C$  tem influência no equilíbrio entre as magnitudes da margem e das variáveis de folga. Em geral, o valor desse parâmetro deve ser selecionado por meio de uma análise de sensibilidade concretizada por validação cruzada.

**Exemplo 9.5.** Para o ajuste de um modelo de regressão por vetores suporte aos mesmos dados utilizados na Figura 5.14, inicialmente avaliamos a escolha ótima do parâmetro  $C$  e  $\gamma$ .

```
> escolhaparam <- tune.svm(x, y, gamma = 2^(-1:1), cost = 2^(2:4))
> summary(escolhaparam)
Parameter tuning of 'svm':
- sampling method: 10-fold cross validation
- best parameters:
  gamma cost
    0.5    4
- best performance: 1447.839
```

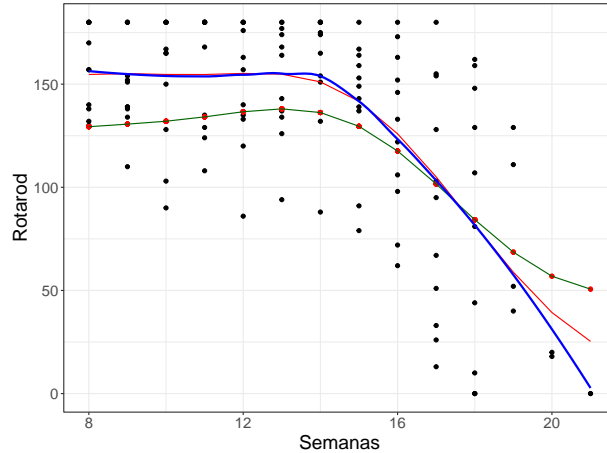
Com base nesse resultado, ajustamos o modelo de regressão por vetores suporte com  $\epsilon = 0.5$ , obtendo

```
> rotarodVS1 <- svm(y~x, kernel="radial", degree=5, cost=4, gamma=0.5,
                    epsilon=0.5)
> summary(rotarodVS1)
Parameters:
  SVM-Type:  eps-regression
  SVM-Kernel: radial
            cost: 4
            gamma: 0.5
            epsilon: 0.5
Number of Support Vectors: 62
```

Alternativamente, ajustamos o modelo de regressão por vetores suporte com  $\epsilon = 0.5$ , obtendo

```
> rotarodVS2 <- svm(y~x, kernel="radial", degree=5, cost=4, gamma=0.5,
                    epsilon=1.0)
> summary(rotarodVS2)
Parameters:
  SVM-Type:  eps-regression
  SVM-Kernel: radial
            cost: 4
            gamma: 0.5
            epsilon: 1
Number of Support Vectors: 22
```

Os valores preditos pelo modelo nos dois casos podem ser obtidos por meio da função `predict()` servem para a construção da Figura 9.10,



**Figura 9.10:** Regressão SVM para o Exemplo 8.5 com  $\epsilon = 0,5$  em vermelho,  $\epsilon = 1,0$  em verde e *lowess* em azul.

As três curvas sugerem um modelo de regressão segmentada.

## 9.7 Notas de capítulo

### 1) Hiperplano separador

Num espaço de dimensão  $p$ , um hiperplano é um **subespaço** de dimensão  $p - 1$  definido por

$$\alpha + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_p X_p = 0. \quad (9.10)$$

Um ponto com coordenadas  $(x_1, \dots, x_p)$  satisfazendo (9.10) situa-se no hiperplano. Se  $\alpha + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_p x_p > 0$ , esse ponto situa-se num “lado” do hiperplano e se  $\alpha + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_p x_p < 0$ , o ponto situa-se no outro “lado” desse hiperplano.<sup>5</sup> Dessa forma, o hiperplano separa o espaço  $p$  dimensional em duas partes.

### 2) Classificador de margem máxima

Nesta seção, baseada em Bishop (2006), procuramos detalhar o algoritmo utilizado para obtenção do hiperplano separador

$$f(\mathbf{x}) = \alpha + \beta^\top \mathbf{x}. \quad (9.11)$$

Consideremos o espaço característico  $\mathcal{T} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$  e as respostas  $y_1, \dots, y_n$  com  $y_i \in \{-1, 1\}$ , definindo o conjunto de treinamento. Um novo elemento com valor das variáveis predictoras  $\mathbf{x}_0$  é classificado de acordo com o sinal de  $f(\mathbf{x}_0)$ .

Suponha que exista um hiperplano separador, de modo que  $\alpha$  e  $\beta$  sejam tais que  $f(\mathbf{x}) > 0$  para pontos com  $y = +1$  e  $f(\mathbf{x}) < 0$ , para pontos com  $y = -1$ , de modo que  $yf(\mathbf{x}) > 0$  para qualquer elemento do conjunto de treinamento.

<sup>5</sup>O conceito de lado é intuitivo quando o hiperplano é uma reta ou um plano, o que não acontece para dimensões maiores. No caso geral, dizemos que um ponto do espaço complementar ao hiperplano está num dos “lados” desse hiperplano se o produto interno do vetor correspondente ao ponto com o vetor normal for positivo e que está no outro lado, se esse produto interno for negativo.

Podem existir muitos hiperplanos que separam as classes exatamente, como na Figura 9.1. O classificador de margem máxima tem como objetivo maximizar a margem que é a menor distância entre o hiperplano separador e qualquer ponto do conjunto de treinamento.

Para entender o procedimento de otimização, considere a distância de um ponto  $\mathbf{x}$  ao hiperplano cuja equação é  $f(\mathbf{x}) = 0$ , nomeadamente

$$d = |f(\mathbf{x})|/\|\boldsymbol{\beta}\|,$$

em que denominador indica a norma do vetor  $\boldsymbol{\beta}$ . Como o interesse está nos pontos associados a elementos do conjunto de dados que são corretamente classificados, devemos ter  $y_i f(\mathbf{x}_i) > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Logo, a distância entre qualquer ponto  $\mathbf{x}_i$  e o hiperplano é

$$\frac{y_i f(\mathbf{x}_i)}{\|\boldsymbol{\beta}\|} = \frac{y_i(\alpha + \boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{x}_i)}{\|\boldsymbol{\beta}\|}. \quad (9.12)$$

A margem é a distância do hiperplano ao ponto  $\mathbf{x}$  mais próximo e queremos escolher  $\alpha$  e  $\boldsymbol{\beta}$  de modo a maximizar essa distância. A margem máxima é obtida por meio da resolução de

$$\operatorname{argmax}_{\alpha, \boldsymbol{\beta}} \left\{ \frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}\|} \min \left[ y_i(\alpha + \boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{x}_i) \right] \right\}. \quad (9.13)$$

A solução de (9.13) é complicada mas é possível obtê-la por meio da utilização de **multiplicadores de Lagrange**. Note que se multiplicarmos  $\alpha$  e  $\boldsymbol{\beta}$  por uma constante, a distância de um ponto  $\mathbf{x}$  ao hiperplano separador não se altera (veja o Exercício 1). Logo podemos considerar a transformação  $\alpha^* = \alpha/f(\mathbf{x})$  e  $\boldsymbol{\beta}^* = \boldsymbol{\beta}/f(\mathbf{x})$  e para o ponto mais próximo do hiperplano, digamos  $\mathbf{x}^*$ ,

$$y^*(\alpha + \boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{x}^*) = 1. \quad (9.14)$$

Consequentemente,  $d = \|\boldsymbol{\beta}\|^{-1}$ . Deste modo, para todos os elementos do conjunto de treinamento teremos

$$y_i(\alpha + \boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{x}_i) \geq 1, \quad i = 1, \dots, n. \quad (9.15)$$

Esta relação é chamada **representação canônica do hiperplano separador**. Dizemos que há uma **restrição ativa** para os pontos em que há igualdade; para os pontos em que vale a desigualdade, dizemos que há uma **restrição inativa**. Como sempre haverá um ponto que está mais próximo do hiperplano, sempre haverá uma restrição ativa.

Então, o problema de otimização implica maximizar  $\|\boldsymbol{\beta}\|^{-1}$ , que é equivalente a minimizar  $\|\boldsymbol{\beta}\|^2$ . Na linguagem de Vapnik (1995), isso equivale a escolher  $f(\mathbf{x})$  de maneira que seja a mais achatada (*flat*) possível, que por sua vez implica que  $\boldsymbol{\beta}$  deve ser pequeno. Isso corresponde à resolução do problema de **programação quadrática**

$$\operatorname{argmin}_{\alpha, \boldsymbol{\beta}} \left\{ \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\beta}\|^2 \right\}, \quad (9.16)$$

sujeito a (9.15). O fator 1/2 é introduzido por conveniência.



Com esse objetivo, para cada restrição de (9.15), introduzimos os multiplicadores de Lagrange  $\lambda_i \geq 0$ , obtendo a função lagrangeana

$$L(\alpha, \beta, \lambda) = \frac{1}{2} - \sum_{i=1}^n \lambda_i [y_i(\alpha + \beta^\top \mathbf{x}_i) - 1], \quad (9.17)$$

em que  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^\top$ . O sinal negativo no segundo termo de (9.17) justifica-se porque queremos minimizar em relação a  $\alpha$  e  $\beta$  e maximizar em relação a  $\lambda$ .

Derivando (9.17) em relação a  $\beta$  e a  $\lambda$ , obtemos

$$\beta = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i \mathbf{x}_i \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i = 0. \quad (9.18)$$

Substituindo (9.18) em (9.17), obtemos a chamada **representação dual** do problema da margem máxima, no qual maximizamos

$$\tilde{L}(\lambda) = \sum_{i=1}^n \lambda_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j y_i y_j K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j), \quad (9.19)$$

com respeito a  $\lambda$ , sujeito às restrições

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (9.20)$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i = 0. \quad (9.21)$$

Em (9.19),  $K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{y}$  é um *kernel* linear, que será estendido para algum *kernel* mais geral com a finalidade de ser aplicado a espaços característicos cuja dimensão excede o número de dados como indicado na Seção 9.2.3. Esse *kernel* deve ser positivo definido.

Para classificar um novo elemento com valor das variáveis preditoras igual a  $\mathbf{x}_0$  usando o modelo treinado, avaliamos o sinal de  $f(\mathbf{x}_0)$ , que por meio de (9.18), pode ser escrito como

$$f(\mathbf{x}_0) = \alpha + \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i K(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_i). \quad (9.22)$$

Pode-se demonstrar (veja Bishop, 2006), que esse tipo de otimização restrita satisfaz certas condições, chamadas de **Condições de Karush-Kuhn-Tucker**, que implicam

$$\begin{aligned} \lambda_i &\geq 0, \\ y_i f(\mathbf{x}_i) - 1 &\geq 0, \\ \lambda_i (y_i f(\mathbf{x}_i) - 1) &= 0. \end{aligned} \quad (9.23)$$

Para cada ponto, ou  $\lambda_i = 0$  ou  $y_i f(\mathbf{x}_i) = 1$ . Um ponto para o qual  $\lambda_i = 0$  não aparece em (9.22) e não tem influência na classificação de novos pontos.

Os pontos restantes são chamados **vetores suporte** e satisfazem  $y_i f(\mathbf{x}_i) = 1$ ; logo esses pontos estão sobre as fronteiras de separação, como na Figura 9.5. O valor de  $\alpha$  pode ser encontrado a partir de

$$y_i \left( \sum_{j \in S} \lambda_j y_j K(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_j) + \alpha \right) = 1, \quad (9.24)$$

em que  $S$  é o conjunto dos vetores suporte. Multiplicando essa expressão por  $y_i$ , observando que  $y_i^2 = 1$  e tomando a média de todas as equações sobre  $S$ , obtemos

$$\alpha = \frac{1}{n_S} \sum_{i \in S} \left( y_i - \sum_{j \in S} \lambda_i y_i K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \right), \quad (9.25)$$

em que  $n_S$  é o número de vetores suporte.

### 3) Classificador de margem flexível

Consideremos o caso em que os dois subconjuntos do espaço dos dados  $\mathcal{X}$  podem se sobrepor. Precisamos modificar o classificador de margem máxima para permitir que alguns pontos do conjunto de treinamento sejam classificados erroneamente. Para isso introduzimos uma penalidade, que cresce com a distância ao hiperplano separador. Isso é conseguido pela introdução de **variáveis de folga** (*slack*)  $\xi_i \geq 0, i = 1, \dots, n$ , uma para cada dado.

Então,  $\xi_i = 0$  para pontos sobre as fronteiras de separação ou dentro do espaço delimitado por elas, *i.e.*, delimitado por  $f(\mathbf{x}) = -1$  e  $f(\mathbf{x}) = 1$  e  $\xi_i$ , dado pela distância do ponto à fronteira mais próxima, para os outros pontos. Assim, um ponto que estiver sobre o hiperplano  $f(\mathbf{x}) = 0$  terá  $\xi_i = 1$  e pontos com  $\xi_i > 1$  são classificados erroneamente. Nesse caso, a restrição (9.15) será substituída por

$$y_i(\alpha + \beta^\top \mathbf{x}_i) \geq 1 - \xi_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (9.26)$$

com  $\xi_i \geq 0$ . Elementos do conjunto de dados para os quais  $\xi_i = 0$  são corretamente classificados e estão sobre uma fronteira de separação ou do lado correto dela. Elementos para os quais  $0 < \xi_i \leq 1$  estão dentro do espaço delimitado pelas fronteiras de separação, mas do lado correto do hiperplano, e elementos para os quais  $\xi_i > 1$  estão do lado errado do hiperplano e são classificados erroneamente. Veja a Figura 9.5.

Nesse contexto, estamos diante de uma **margem flexível** ou **suave**. O objetivo é maximizar a margem e, para isso, minimizamos

$$C \sum_{i=1}^n \xi_i + \frac{1}{2} \|\beta\|^2, \quad (9.27)$$

em que  $C > 0$  controla o equilíbrio entre a penalidade das variáveis de folga e a margem.

Qualquer elemento classificado erroneamente satisfaz  $\xi_i > 1$ ; então  $\sum_{i=1}^n \xi_i$  é a soma das distâncias dos elementos classificados erroneamente às fronteiras de separação. Como essas distâncias são todas maiores que 1, impor um limite para  $C > \sum_{i=1}^n \xi_i$  corresponde a limitar o número de elementos classificados erroneamente.

Para minimizar (9.27) sujeito a (9.26) e  $\xi_i > 0$  consideramos o lagrangeano

$$\begin{aligned} L(\alpha, \beta, \xi, \lambda, \mu) &= \frac{1}{2} \|\beta\|^2 + C \sum_{i=1}^n \xi_i \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \lambda_i [y_i f(\mathbf{x}_i) + \xi_i - 1] - \sum_{i=1}^n \mu_i \xi_i, \end{aligned} \quad (9.28)$$

em que  $\lambda_i \geq 0, \mu_i \geq 0$  são multiplicadores de Lagrange. Derivando (9.29) com relação a  $\beta, \alpha, \xi_i$ , obtemos

$$\beta = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i \mathbf{x}_i, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i = 0 \quad (9.29)$$

e

$$\lambda_i = C - \mu_i. \quad (9.30)$$

Substituindo (9.29) - (9.30) em (9.29), temos

$$\tilde{L}(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i - \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j y_i y_j K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j), \quad (9.31)$$

que é uma expressão idêntica ao caso separável, com exceção das restrições, que são diferentes. Como  $\lambda_i \geq 0$  são multiplicadores de Lagrange e como  $\mu_i \geq 0$ , de (9.30) segue que  $\lambda_i \leq C$ . Logo, precisamos maximizar (9.31) com respeito às variáveis duais  $\lambda_i$ , sujeito a

$$0 \leq \lambda_i \leq C, \quad (9.32)$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (9.33)$$

Novamente, estamos diante de um problema de programação quadrática. A previsão para um novo elemento com valor das variáveis predictoras igual a  $\mathbf{x}_0$  é obtida avaliando o sinal de  $f(\mathbf{x}_0)$  em (9.11). Substituindo (9.29) em (9.11) obtemos

$$f(\mathbf{x}_0) = \alpha + \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i K(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_i). \quad (9.34)$$

Pontos para os quais  $\lambda_i = 0$  não contribuem para (9.34). Os restantes constituem os vetores de suporte. Para esses,  $\lambda_i > 0$  e, por (9.36), devem satisfazer

$$y_i f(\mathbf{x}_i) = 1 - \xi_i. \quad (9.35)$$

No caso de classificadores de margem flexível, as condições de Karush-Kuhn-Tucker são

$$\lambda_i \geq 0, \quad y_i f(\mathbf{x}_i) - 1 + \xi_i \geq 0, \quad (9.36)$$

$$\lambda_i [y_i f(\mathbf{x}_i) - 1 + \xi_i] = 0,$$

$$\mu_i \geq 0, \quad \xi_i \geq 0,$$

$$\mu_i \xi_i = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (9.37)$$

Procedendo como no caso de classificadores de margem máxima, obtemos

$$\alpha = \frac{1}{N_{\mathcal{M}}} \sum_{i \in \mathcal{M}} \left( y_i - \sum_{j \in \mathcal{S}} \lambda_j y_j K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \right), \quad (9.38)$$

em que  $\mathcal{M}$  é o conjunto do pontos tais que  $0 < \lambda_i < C$ .

Se  $\lambda_i < C$ , então, por (9.30),  $\mu_i > 0$  e por (9.37), temos  $\xi = 0$  e tais pontos estão em uma das fronteiras de separação. Elementos para os quais  $\lambda_i = C$  estão dentro do espaço delimitado pelas fronteiras de separação e podem ser classificados corretamente se  $\xi_i \leq 1$  e incorretamente se  $\xi_i > 1$ .

4) **Classificador de margem não linear**

Seja  $\mathcal{X}$  o conjunto de dados (ou de padrões). A função  $K : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  é um *kernel* se existir um espaço vetorial com produto interno,  $\mathcal{H}$  (usualmente um espaço de Hilbert) e uma aplicação  $\Phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{H}$ , tal que, para todos  $x, y \in \mathcal{X}$ , tivermos

$$K(x, y) = \langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle. \quad (9.39)$$

A aplicação  $\Phi$  é conhecida como aplicação característica e  $\mathcal{H}$ , como espaço característico.

Por exemplo, tomemos  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$  e  $\mathcal{H} = \mathbb{R}^3$  e definamos

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3, \\ (x_1, x_2) &\rightarrow (x_1^2, x_2^2, \sqrt{2}x_1x_2). \end{aligned}$$

Então, se  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^\top$  e  $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^\top$ , é fácil verificar que

$$\langle \Phi(\mathbf{x}), \Phi(\mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle;$$

logo  $K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \Phi(\mathbf{x}), \Phi(\mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  é um *kernel*.

Para tornar o algoritmo de suporte vetorial não linear, notamos que ele depende somente de produtos internos entre os vetores de  $\mathcal{X}$ ; logo, é suficiente conhecer  $K(\mathbf{x}, \mathbf{x}^\top) = \langle \Phi(\mathbf{x}), \Phi(\mathbf{x}^\top) \rangle$ , e não  $\Phi$  explicitamente. Isso permite formular o problema de otimização, substituindo (9.29) por

$$\beta = \sum_{i=1}^n \alpha_i \Phi(\mathbf{x}_i), \quad (9.40)$$

com  $f(\mathbf{x})$  dado por (9.7). Agora,  $\beta$  não é mais dado explicitamente como antes. Além disso, o problema de otimização é realizado no espaço característico e não em  $\mathcal{X}$ .

Os *kernels* a serem usados têm que satisfazer certas condições de admissibilidade. Veja Smola e Schölkopf (2004) para detalhes. Os *kernels* mencionados na Seção 9.2.3 são admissíveis.

5) **Classificação com mais de duas classes**

Para casos em que há mais de duas classes, duas abordagens são possíveis:

a) **Classificação *uma contra uma* (*one-versus-one*)**

Se tivermos  $K$  classes, são construídos  $\binom{K}{2}$  classificadores, cada um com duas classes. Para um elemento do conjunto de validação com valor das variáveis preditoras igual a  $\mathbf{x}$ , contamos quantas vezes esse elemento é associado a cada uma das  $K$  classes. O classificador final é obtido associando o elemento do conjunto de validação à classe em que recebeu mais associações dentre as  $\binom{K}{2}$  classificações duas a duas.

(b) **Classificação *uma contra todas* (*one-versus-all*)**

Consideramos  $K$  classificadores, cada vez comparando uma classe com as restantes  $K - 1$  classes. Sejam  $\alpha_k, \beta_{1k}, \dots, \beta_{pk}$  os parâmetros associados ao  $k$ -ésimo classificador. Para um elemento do conjunto de validação com valor das variáveis preditoras igual a  $\mathbf{x}^*$ , vamos associá-lo à classe para a qual  $\alpha_k + \beta_{1k}x_1^* + \dots + \beta_{pk}x_p^*$  seja a maior possível.

Os resultados obtidos podem ser inconsistentes. Veja Bishop (2006), para outras sugestões.

### 6) Algoritmos de Suporte Vetorial para regressão

No problema clássico de regressão, para obter os estimadores de mínimos quadrados, minimizamos a soma de quadrados dos resíduos (6.5). Em problemas de regularização e seleção de variáveis, acrescenta-se a essa soma de quadrados de resíduos um termo de **penalização** que depende de uma norma do vetor de parâmetros,  $\beta$ , digamos. Se usarmos a norma  $L_2$ ,  $\|\beta\|^2$ , obtemos o que se chama de regressão **Ridge**. Com a norma  $L_1$ ,  $\|\beta\|$ , obtemos o que se chama de regressão **Lasso** conforme indicado na Seção 11.2.

No lugar da soma de quadrados de resíduos, Vapnik (1995) sugere uma função dos erros chamada  $\varepsilon$ -**insensitiva**, que gera um erro nulo se a diferença entre a previsão  $f(\mathbf{x})$  e o valor real  $y$  em valor absoluto for menor do que  $\varepsilon > 0$ . Essa função é definida por

$$E_\varepsilon[f(\mathbf{x}), y] = \begin{cases} 0, & \text{para } |f(\mathbf{x}) - y| < \varepsilon \\ |f(\mathbf{x}) - y| - \varepsilon, & \text{em caso contrário,} \end{cases} \quad (9.41)$$

Para funções lineares,  $f(\mathbf{x}) = \alpha + \beta^\top \mathbf{x}$  a ideia é, então, minimizar

$$C \sum_{i=1}^n E_\varepsilon[f(\mathbf{x}_i) - y_i] + \frac{1}{2} \|\beta\|^2, \quad (9.42)$$

com  $C$  indicando um parâmetro de regularização. Como mencionado na Seção 9.4, podemos introduzir variáveis de folga para cada ponto  $\mathbf{x}_i$ . Neste caso, precisamos de duas,  $\xi_i \geq 0$  e  $\xi_i^* \geq 0$ , sendo  $\xi_i > 0$  para pontos tais que  $y_i > f(\mathbf{x}_i) + \varepsilon$  e  $\xi_i^* > 0$  para pontos tais que  $y_i < f(\mathbf{x}_i) - \varepsilon$  (veja a Figura 9.5). Para que um ponto  $\mathbf{x}_i$  esteja dentro do espaço delimitado pelas fronteiras de separação devemos ter

$$f(\mathbf{x}_i) - \varepsilon \leq y_i \leq f(\mathbf{x}_i) + \varepsilon. \quad (9.43)$$

A introdução das variáveis de folga permite que pontos estejam fora do espaço delimitado pelas fronteiras de separação, desde que elas sejam diferentes de zero, e então para  $i = 1, \dots, n$  devem valer as condições

$$\begin{aligned} y_i &\leq f(\mathbf{x}_i) + \varepsilon + \xi_i, \\ y_i &\geq f(\mathbf{x}_i) - \varepsilon - \xi_i^*. \end{aligned}$$

A função a minimizar é

$$C \sum_{i=1}^n (\xi_i + \xi_i^*) + \frac{1}{2} \|\beta\|^2, \quad (9.44)$$

com as restrições  $\xi_i \geq 0$ ,  $\xi_i^* \geq 0$ . Usando multiplicadores de Lagrange  $\lambda_i, \lambda_i^*, \mu_i, \mu_i^*$ , todos não negativos e otimizando o lagrangeano, que é função de  $\alpha, \beta$  e das variáveis de folga, obtemos

$$\beta = \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda_i^*) \mathbf{x}_i, \quad (9.45)$$

$$\sum_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda_i^*) = 0, \quad (9.46)$$

$$\lambda_i + \mu_i = C, \quad (9.47)$$

$$\lambda_i^* + \mu_i^* = C, \quad i = 1, \dots, n. \quad (9.48)$$

Usando essas equações na função lagrangeana obtemos o problema dual, que consiste em maximizar um lagrangeano que é função de  $\lambda_i$  e  $\lambda_i^*$ . O correspondente problema de maximização restrita requer  $\lambda_i \leq C$ ,  $\lambda_i^* \leq C$ , com  $\lambda_i \geq 0$ ,  $\lambda_i^* \geq 0$ . Substituindo  $\beta$ , as previsões para novos pontos são dadas por

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda_i^*) K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) + \alpha. \quad (9.49)$$

Os vetores suporte são aqueles que contribuem para (9.49), ou seja, são tais que  $\lambda_i \neq 0$ ,  $\lambda_i^* \neq 0$  ou seja, que estão sobre a uma das fronteiras de separação ou ou fora do espaço delimitado por elas.

Nesse caso, as condições de Karush-Kuhn-Tucker são

$$\begin{aligned} \lambda_i [\varepsilon + \xi_i + f(\mathbf{x}_i) - y_i] &= 0, \\ \lambda_i^* [\varepsilon + \xi_i^* - y_i + f(\mathbf{x}_i)] &= 0, \\ (C - \lambda_i) \xi_i &= 0, \\ (C - \lambda_i^*) \xi_i^* &= 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (9.50)$$

Então  $\alpha = y_i - \varepsilon - \beta^\top \mathbf{x}_i$  com  $\beta$  dado por (9.45).

## 9.8 Exercícios

- 1) No contexto do classificador de margem máxima, mostre que se multiplicarmos os coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$  por uma constante, a distância de qualquer ponto ao hiperplano separador não se alterará.
- 2) Explique a relação entre valores de  $C$  em (9.9) e viés-variância.
- 3) Reanalise os dados do Exemplo 9.3 usando um *kernel* radial.
- 4) No Exemplo 9.3 foram usados 2 atributos. Reanalise o exemplo, usando 4 atributos e note que a acurácia da classificação melhora sensivelmente.
- 5) Considere os pontos da Figura ?? e obtenha as fronteiras de separação por meio dos classificadores de margens flexível e não linear.
- 6) Use a função `tune()` do pacote `e1071` para escolher o melhor modelo para os Exemplos 9.2 e 9.3.
- 7) Simule um conjunto de dados com  $n = 200$  e  $p = 2$ , tal que as observações pertençam a duas classes com uma fronteira de decisão não linear. Por exemplo, você pode simular duas variáveis  $N(0,1)$ ,  $X_1$  e  $X_2$  e tomar uma função não linear delas.
  - (a) Construa um gráfico de dispersão com símbolos (ou cores) para indicar os elementos de cada classe.

- (b) Separe os dados em conjunto de treinamento e de validação. Obtenha o classificador de margem máxima, tendo  $X_1$  e  $X_2$  como variáveis preditoras. Obtenha as previsões para o conjunto de validação e a acurácia do classificador.
  - (c) Obtenha o classificador de margem flexível, tendo  $X_1$  e  $X_2$  como variáveis preditoras. Obtenha as previsões para o conjunto de validação e a taxa de erros de classificação.
  - (d) Obtenha o classificador de margem não linear, usando um kernel apropriado. Calcule a taxa de erros de classificação.
  - (e) Compare os dois classificadores usando o teste de McNemar.
- 8) Considere o conjunto de dados `iris` (disponível no R por meio do comando `data(iris)`) e as variáveis *Sepal Length*, *Sepal Width*, *Petal Length* e *Petal Width* como preditoras para a variável categórica *Species*. Use o pacote `e1071`.
- (a) Use a função `scatterplot3d()` do pacote `scatterplot3d` para ter uma ideia da separação entre as classes.
  - (b) Obtenha a matriz de correlações das variáveis preditoras e verifique se alguma variável preditora poderia ser omitida. Justifique sua resposta.
  - (c) Separe 70% das observações para o conjunto de treinamento e o restante para o conjunto de validação. Usando o `default` da função `svm()` para o conjunto de treinamento, analise os resultados e responda: (i) qual o kernel usado? (ii) qual é o número de vetores suporte? quantos em cada classe? quais são os níveis da variável *Species*?
  - (d) Agora use os kernels linear, polinomial e sigmoide no conjunto de treinamento e repita a análise.
  - (e) Usando a função `predict()` e as matrizes de confusão para cada modelo, escolha o melhor *kernel*.
  - (f) Em cada caso, construa um gráfico em que o hiperplano separador esteja representado e obtenha a margem. [Exercício baseado em Portela et al. (2017)]





# Árvores e Florestas

## 10.1 Introdução

Modelos baseados em árvores foram desenvolvidos na década de 1980 por Leo Breiman e associados e são bastante utilizados tanto para classificação quanto para previsão. Esses modelos envolvem uma segmentação do espaço gerado pelas variáveis preditoras em algumas regiões nas quais ou a moda (no caso de variáveis respostas categorizadas) ou a média (no caso de variáveis respostas contínuas) são utilizadas como valor predito. A definição dessas regiões apoia-se em alguma medida de erro de previsão (ou de classificação).

Em geral, as árvores são construídas a partir de um conjunto de **dados de treinamento** e testadas em um conjunto de **dados de validação**. Os modelos de árvores de decisão são conceitualmente e computacionalmente simples e bastante populares em função de sua interpretabilidade, apesar de serem menos precisos que modelos de regressão, em geral.

Generalizações dos modelos originais, conhecidas como **florestas aleatórias** (*random forests*) costumam apresentar grande precisão, mesmo quando comparadas com modelos lineares, porém pecam pela dificuldade de interpretação. A referência básica para esse tópico é Breiman et al. (1984). O texto de Hastie e Tibshirani (1990) também contém resultados úteis sobre o tema.

Para prever o valor de uma variável resposta  $Y$  (no caso de variáveis contínuas) ou classificar os elementos do conjunto de treinamento em uma de suas categorias (no caso de variáveis categorizadas) a partir de um conjunto de variáveis preditoras  $X_1, \dots, X_p$ , o algoritmo usado na construção de árvores de decisão consiste essencialmente na determinação das regiões (retângulos mutuamente exclusivos) em que o espaço das variáveis preditoras é particionado. A metodologia desenvolvida por Breiman et al. (1994), conhecida como **CART** (de *Classification And Regression Trees*) fundamenta-se na seguinte estratégia:

- a) Considere uma partição do espaço das variáveis preditoras (conjuntos dos possíveis valores de  $X_1, \dots, X_p$ ) em  $M$  regiões,  $R_1, \dots, R_M$ .
- b) Para cada elemento pertencente a  $R_j$ , o previsor (ou categoria) de  $Y$  (que designaremos  $\hat{Y}_{R_j}$ ) será a moda (no caso discreto), a média (no caso contínuo) ou a classe de  $Y$  com maior frequência (no caso categorizado) entre os pontos com valores de  $X_1, \dots, X_p$  em  $R_j$ .

Embora a partição do espaço das variáveis preditoras seja arbitrária, usualmente ela é composta por retângulos  $p$ -dimensionais construídos de modo a minimizar alguma medida de erro de previsão ou de classificação (que explicitaremos

posteriormente). Como esse procedimento geralmente não é computacionalmente factível dado o número de partições possíveis mesmo com  $p$  moderado, usa-se uma **divisão binária recursiva** (*recursive binary splitting*) que é uma abordagem “de cima para baixo e ambiciosa” (ou gananciosa) (*top-down and greedy*) segundo James et al. (2013). A primeira locução justifica-se pelo fato de o procedimento ter início no topo da árvore (em que os elementos estão todos na mesma região do espaço das variáveis preditoras) e a segunda, porque a melhor decisão é tomada em cada passo, sem avaliar se uma decisão melhor não poderia ser tomada num passo futuro.

De modo geral, podemos dizer que um algoritmo ambicioso faz a busca por uma solução ótima local em cada estágio com o propósito de encontrar uma solução ótima global. Em muitas situações, uma estratégia ambiciosa não produz uma solução ótima global, mas pode resultar em soluções ótimas locais que aproximam uma solução ótima global de modo razoável. Veremos, na Seção 10.3, que o algoritmo *boosting* é ambicioso no contexto de modelos aditivos.

Dado o vetor de variáveis preditoras  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)^\top$ , o algoritmo consiste dos seguintes passos:

- i) Selecione uma variável preditora  $X_j$  e um limiar (ou ponto de corte)  $t$ , de modo que a divisão do espaço das variáveis preditoras nas regiões  $\{\mathbf{X} : X_j < t\}$  e  $\{\mathbf{X} : X_j \geq t\}$  corresponda ao menor erro de predição (ou de classificação).
- (ii) Para todos os pares  $(j, t)$ , considere as regiões

$$R_1(j, t) = \{\mathbf{X} : X_j < t\}, \quad R_2(j, t) = \{\mathbf{X} : X_j \geq t\}$$

e encontre o par  $(j, s)$  que minimiza o erro de predição (ou de classificação) adotado.

- iii) Repita o procedimento, agora dividindo uma das duas regiões encontradas, obtendo três regiões; depois divida cada uma dessas três regiões minimizando o erro de predição (ou de classificação).
- iv) Continue o processo até que algum critério de parada (obtenção de um número mínimo fixado de elementos em cada região, por exemplo) seja satisfeito.

## 10.2 Classificação por árvores

Quando a variável resposta  $Y$  é categorizada, o objetivo é identificar a classe mais provável (**classe modal**) associada aos valores  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)^\top$  das variáveis preditoras. Neste caso, uma medida de erro de classificação, comumente denominada **taxa de erros de classificação** (*TEC*) é a proporção de elementos do conjunto de treinamento que não pertencem à classe majoritária. Outras medidas de erro de classificação, como o **índice de Gini** ou a **entropia cruzada** também podem ser usadas (veja a Nota de Capítulo 1).

Admitamos que a variável resposta tenha  $K$  classes e que o espaço de variáveis preditoras seja particionado em  $M$  regiões. Designamos por  $\hat{p}_{mk}$ , a proporção de elementos do conjunto de treinamento na  $m$ -ésima região,  $m = 1, \dots, M$ , pertencentes à  $k$ -ésima classe  $k = 1, \dots, K$ , ou seja,

$$\hat{p}_{mk} = \frac{1}{n_m} \sum_{\mathbf{x}_i \in R_m} I(y_i = k), \quad (10.1)$$

com  $n_m$  indicando o número de elementos na região  $R_m$ . A regra de classificação consiste em classificar os elementos do conjunto de treinamento que pertencem à região  $R_m$  (ou ao nó  $m$ ) na classe

$$k(m) = \arg \max_k \hat{p}_{mk},$$

chamada **classe majoritária** no nó  $m$ .

A **taxa de erros de classificação** dos elementos pertencentes à  $m$ -ésima região é

$$TEC_m = 1 - \max_k (\hat{p}_{mk}).$$

Utilizaremos um exemplo para descrever o processo de construção de uma árvore de decisão. Vários pacotes (`tree`, `partykit`, `rpart`) podem ser utilizados com esse propósito. Cada um desses pacotes é regido por parâmetros que controlam diferentes aspectos da construção das árvores e não pretendemos discutir-los. O leitor interessado deverá consultar os manuais correspondentes com o objetivo de nortear uma seleção adequada para problemas específicos.

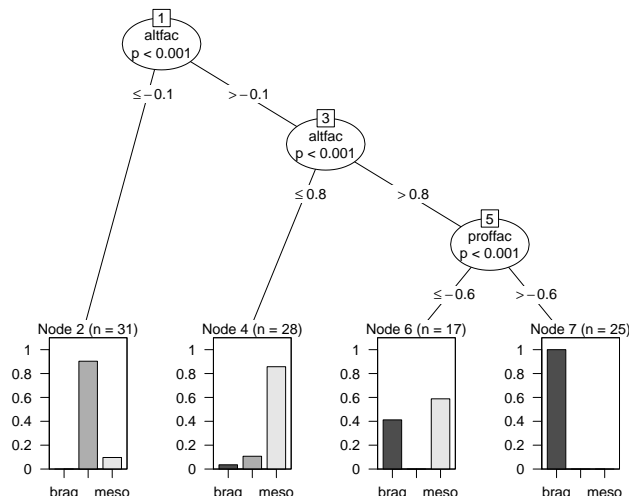
**Exemplo 10.1.** Consideremos novamente os dados analisados no Exemplo 9.2, disponíveis no arquivo `tipofacial`, extraídos de um estudo cujo objetivo era avaliar se duas ou mais medidas ortodônticas poderiam ser utilizadas para classificar indivíduos segundo o tipo facial (braquicéfalo, mesocéfalo ou dolicocefalo). Como no Exemplo 9.2, para efeitos didáticos consideramos apenas duas variáveis preditoras, correspondentes a duas distâncias de importância ortodôntica, nomeadamente, a altura facial (`altfac`) e a profundidade facial (`proffac`). Os comandos do pacote `partykit` (com os parâmetros `default`) para a construção da árvore de classificação e do gráfico correspondente seguem juntamente com os resultados

```
> facetree <- ctree(grupo ~ altfac + proffac, data=face)
Model formula:
grupo ~ altfac + proffac
Fitted party:
[1] root
|   [2] altfac <= -0.1: dolico (n = 31, err = 9.7%)
|   [3] altfac > -0.1
|   |   [4] altfac <= 0.8: meso (n = 28, err = 14.3%)
|   |   [5] altfac > 0.8
|   |   |   [6] proffac <= -0.6: meso (n = 17, err = 41.2%)
|   |   |   [7] proffac > -0.6: braq (n = 25, err = 0.0%)
Number of inner nodes: 3
Number of terminal nodes: 4
> plot(facetree)
```

A variável preditora principal e o correspondente ponto de corte que minimiza a taxa de erros de classificação são `altfac` e  $t = -0,1$ , com  $TEC_1 = 9,7\%$ . Indivíduos com valores `altfac`  $\leq -0,1$  (região  $R_1$ ) são classificados como dolicocefalo. Para indivíduos com valores de `altfac`  $> -0,1$ , a classificação depende do valor de `proffac`. Nesse caso, se `altfac` estiver entre  $-0,1$  e  $0,8$ , (região  $R_2$ ), classificamos o indivíduo como mesocéfalo com  $TEC_2 = 14,3\%$ ; se, por outro lado, `altfac`  $> 0,8$  e `proffac`  $\leq -0,6$ , também classificamos o indivíduo como mesocéfalo (região  $R_3$ ), com  $TEC_3 = 41,2\%$ ; agora, se `altfac`  $> 0,8$  e `proffac`  $> -0,6$ , o indivíduo deve ser classificado como braquicéfalo (região  $R_4$ ), com  $TEC_4 = 0,0\%$ .

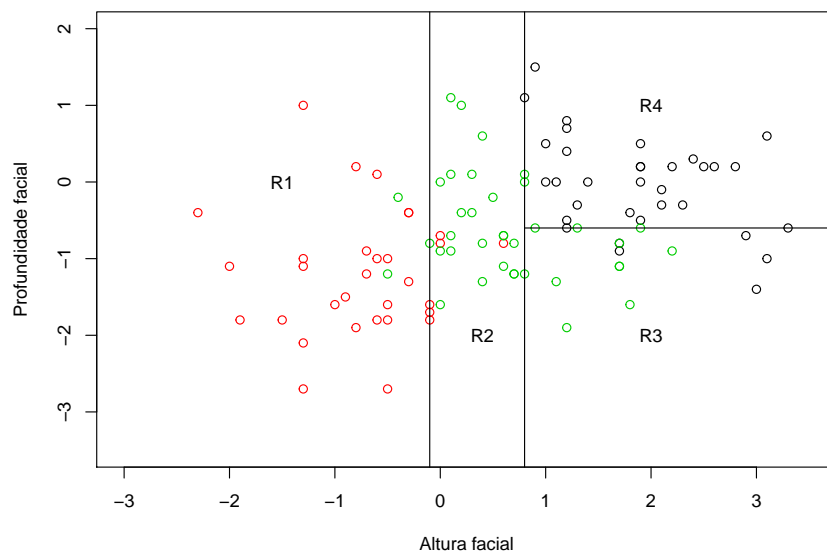
Na Figura 10.1, os símbolos ovais, que indicam divisões no espaço das variáveis preditoras são chamados de **nós internos** e os retângulos, que indicam as divisões

finais são conhecidos por **nós terminais** ou **folhas** da árvore. Neste exemplo, temos 3 nós internos e 4 nós terminais. Os segmentos que unem os nós são os **galhos** da árvore. Os gráficos de barras apresentados em cada nó terminal indicam a frequência relativa com que os indivíduos que satisfazem as restrições definidoras de cada galho são classificados nas diferentes categorias da variável resposta.



**Figura 10.1:** Árvore de decisão para os dados do Exemplo 10.1.

As regiões em que o espaço das variáveis predictoras foi particionado estão indicadas na Figura 10.2.



**Figura 10.2:** Partição do espaço das variáveis predictoras do Exemplo 10.1 (círculos vermelhos = dolicocéfalos, verdes = mesocéfalos, pretos = braucicéfalos).

Uma tabela com a classificação real (nas linhas) e predita por meio da árvore de classificação (nas colunas) é obtida por meio do comando `predict()`

table

	braq	dolico	meso
braq	25	0	0
dolico	0	28	3
meso	8	3	34

e indica uma taxa de erros de classificação de 13,9% ( $= 14/101 \times 100\%$ ).

Um dos problemas associados à construção de árvores de decisão está relacionado com o **sobreajuste** (*overfitting*). Se não impusermos uma regra de parada para a construção dos nós, o processo é de tal forma flexível que o resultado final pode ter tantos nós terminais quantas forem as observações, gerando uma árvore em que cada elemento do conjunto de treinamento é classificado perfeitamente. Para contornar esse problema, pode-se considerar o procedimento conhecido como **poda**, que engloba técnicas para limitar o número de nós terminais das árvores. A ideia que fundamenta essas técnicas está na construção de árvores com menos nós e, conseqüentemente, com menor variância e maior interpretabilidade. O preço a pagar é um pequeno aumento no viés. Para detalhes, consulte a Nota de Capítulo 2.

**Exemplo 10.2.** Consideremos agora os dados do arquivo `coronarias` provenientes de um estudo cujo objetivo era avaliar fatores prognósticos para lesão obstrutiva coronariana (L03) com categorias 1  $:\geq 50\%$  ou 0  $:\lt 50\%$ . Embora tenham sido observadas cerca de 70 variáveis preditoras, aqui trabalharemos com `SEXO` (0=fem, 1=masc), `IDADE1` (idade), `IMC` (índice de massa corpórea), `DIAB` (diabetes: 0=não, 1=sim), `TRIG` (concentração de triglicérides) e `GLIC` (concentração de glicose). Com propósito didático eliminamos casos em que havia dados omissos em alguma dessas variáveis, de forma que 1034 pacientes foram considerados na análise.

Os comandos do pacote `rpart` para a construção da árvore de classificação com os resultados correspondentes seguem

```
> lesaoobs <- rpart(formula = L03 ~ GLIC + SEXO + IDADE1 + DIAB + TRIG
+ IMC, data = coronarias3, method = "class", xval = 20,
+ minsplit = 10, cp = 0.005)
> printcp(lesaoobs)
Variables actually used in tree construction:
[1] GLIC IDADE1 IMC SEXO TRIG
Root node error: 331/1034 = 0.32012
n= 1034
      CP nsplit rel error  xerror  xstd
1 0.0453172    0  1.00000 1.00000 0.045321
2 0.0392749    3  0.85801 0.97281 0.044986
3 0.0135952    4  0.81873 0.88218 0.043733
4 0.0090634    6  0.79154 0.87915 0.043687
5 0.0075529    7  0.78248 0.88822 0.043823
6 0.0060423   11  0.75227 0.92749 0.044386
7 0.0050000   13  0.74018 0.97885 0.045062
```

A função `rpart()` tem um procedimento de **validação cruzada** embutido, ou seja, usa um subconjunto dos dados (o conjunto de treinamento) para construir a árvore e outro (o conjunto de validação) para avaliar a taxa de erros de previsão repetindo o processo várias vezes (ver a Nota de Capítulo 1 do Capítulo 8). Cada linha da tabela representa um nível diferente da árvore.

A taxa de erro do **nó raiz** (**Root node error**) corresponde à decisão obtida quando todas as observações do conjunto de dados são classificadas na categoria

$LO3 > 50\%$ . O termo **rel error** corresponde ao erro relativo de classificação dos elementos do conjunto de treinamento obtido por intermédio da árvore. O termo **xerror** mede o erro relativo de classificação dos elementos do conjunto de validação obtido por intermédio da árvore construída com os dados do conjunto de treinamento. A coluna rotulada **xstd** contém o erro padrão associado à taxa de erros **xerror**.

O produto **Root node error**  $\times$  **rel error** corresponde ao valor absoluto da taxa de erros obtida no conjunto de treinamento ( $0,263 = 0,320 \times 0,740$  para a árvore com 13 subdivisões). O produto **Root node error**  $\times$  **xerror** corresponde ao valor absoluto da taxa de erros obtida no conjunto de validação e corresponde a uma medida mais objetiva da acurácia da previsão ( $0,313 = 0,320 \times 0,979$  para a árvore com 13 subdivisões).

A árvore gerada pode ser representada graficamente por meio do comando

```
> rpart.plot(lesaoobs, clip.right.labs = TRUE, under = FALSE,
             extra = 101, type=4)
```

e está disposta na Figura 10.3

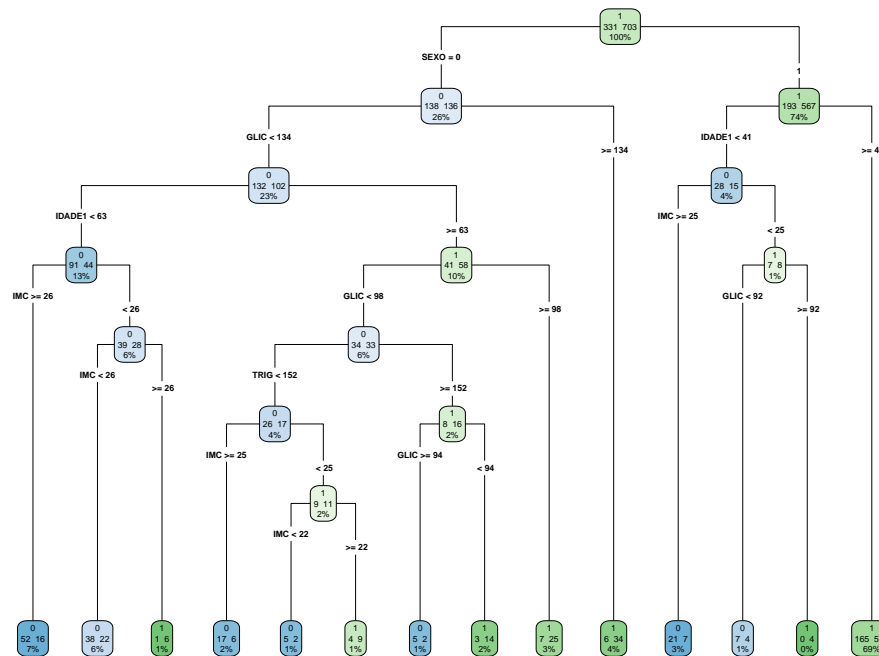


Figura 10.3: Árvore de decisão para os dados do Exemplo 10.2.

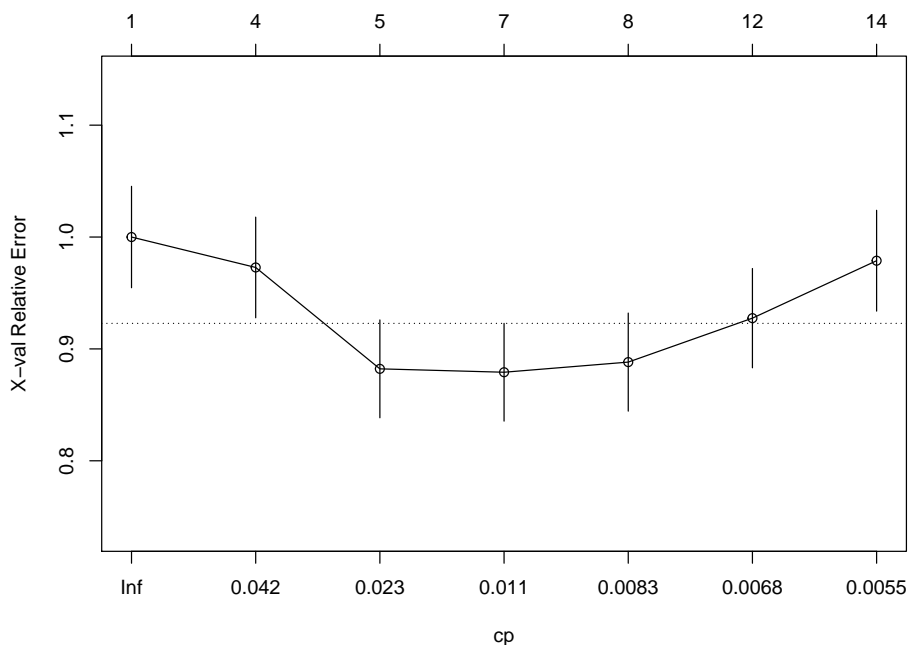
A tabela com a classificação real (nas linhas) e predita pela árvore (nas colunas) é obtida por meio do comando

```
> table(coronarias3$LO3, predict(lesaoobs, type="class"))
      0  1
0 145 186
1  59 644
```

e indica um erro de classificação de  $23,4\% = (186 + 59)/1034$ .

Uma regra empírica para se efetuar a poda da árvore consiste em escolher a **menor árvore** para a qual o valor de **xerror** é menor que a soma do menor valor observado de **xerror** com seu erro padrão **xstd**. No exemplo e estudo, o menor valor de **xerror** é 0,87915 e o de seu erro padrão **xstd** é 0,043687 de maneira que a árvore a ser construída por meio de poda deverá ser a menor para a qual o valor de **xerror** seja menor que  $0,922837 (= 0,87915 + 0,043687)$ , ou seja a árvore com 4 subdivisões e 5 nós terminais.

Alternativamente, pode-se examinar o **parâmetro de complexidade** (*complexity parameter*)  $CP$ , que serve para controlar o tamanho da árvore e corresponde ao menor incremento no custo do modelo necessário para a consideração de uma nova subdivisão. Um gráfico (obtido com o comando `plotcp()`) em que a variação desse parâmetro é apresentada em função do número de nós, pode ser visto na Figura 10.4 (veja a Nota de Capítulo 2).



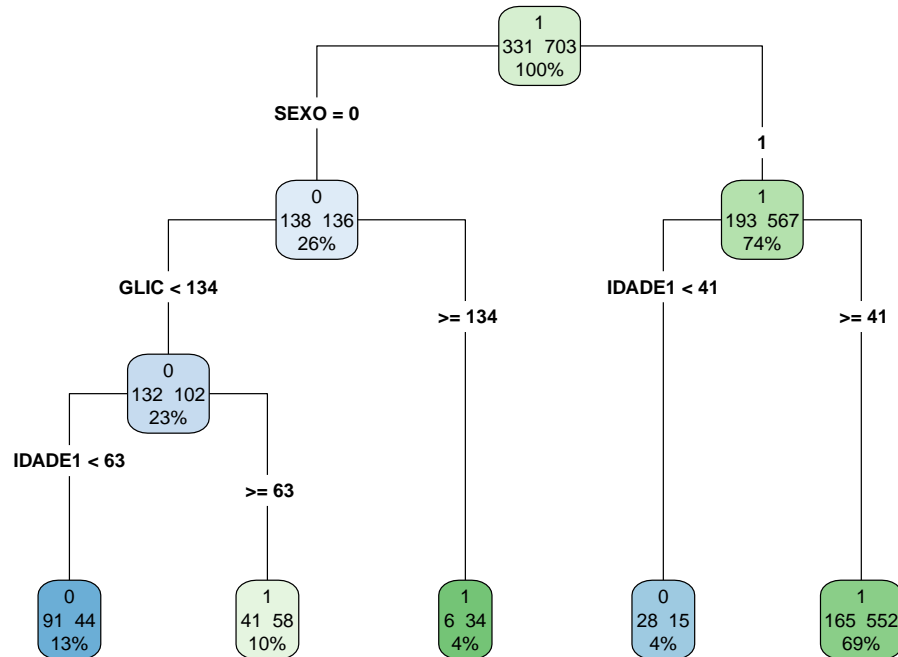
**Figura 10.4:** Gráfico  $CP$  para o ajuste da árvore aos dados do Exemplo 10.2.

Na Figura 10.4, procura-se o nível para o qual o parâmetro  $CP$  é mínimo. Para o exemplo, esse nível está entre 0,011 e 0,023, sugerindo que a árvore obtida no exemplo deve ser podada. Os valores que aparecem na parte superior do gráfico correspondem aos números de nós terminais e indicam que a árvore construída com o valor de  $CP$  no intervalo indicado deve ter entre 5 e 7 nós terminais, corroborando o resultado obtido por intermédio da avaliação das taxas de erro. A poda juntamente com o gráfico da árvore podada e a tabela com os correspondentes valores preditos podem ser obtidos com os comandos

```
> lesaobspoda <- prune(lesaobobs, cp = 0.015, "CP", minsplit=20, xval=25)
> rpart.plot(lesaobspoda, clip.right.labs = TRUE, under = FALSE,
             extra = 101, type=4)
> rpart.rules(lesaobspoda, cover = TRUE)
L03                                     cover
```

0.33 when SEXO is 0 & IDADE1 < 63 & GLIC < 134	13%
0.35 when SEXO is 1 & IDADE1 < 41	4%
0.59 when SEXO is 0 & IDADE1 >= 63 & GLIC < 134	10%
0.77 when SEXO is 1 & IDADE1 >= 41	69%
0.85 when SEXO is 0 & GLIC >= 134	4%

A árvore podada está representada graficamente na Figura 10.5.



**Figura 10.5:** Árvore (podada) ajustada aos dados do Exemplo 10.2.

O número indicado na parte superior de cada nó da Figura 10.5 indica a classe majoritária, na qual são classificadas os elementos do conjunto de treinamento; o valor à esquerda no centro do nó representa a frequência desses elementos pertencentes à classe  $LO3 = 0$  e o valor à direita corresponde à frequência daqueles pertencentes à classe  $LO3 = 1$ . Na última linha aparece a porcentagem de elementos correspondentes a cada nó terminal. A tabela de classificação para o conjunto de dados original (treinamento + validação) obtida a partir da árvore podada é

	0	1
0	119	212
1	59	644

Nessa tabela, as linhas indicam a classificação real e as colunas informam a classificação predita pela árvore podada. O erro de classificação, 26,2%, é ligeiramente maior que o erro obtido com a árvore original, bem mais complexa.



## 10.3 *Bagging, boosting e florestas*

De um modo geral, árvores de decisão produzem resultados com grande variância, ou seja, dependendo de como o conjunto de dados é subdividido em conjuntos de treinamento e de validação, as árvores produzidas podem gerar resultados diferentes. As técnicas que descreveremos nesta seção têm a finalidade de reduzir essa variância.

### 10.3.1 *Bagging*

A técnica de **agregação *bootstrap*** (*bootstrap aggregating*) ou, simplesmente ***bagging***, é um método para gerar múltiplas versões de um previsor (ou classificador) a partir de vários conjuntos de treinamento e, com base nessas versões, construir um previsor (ou classificador) agregado. A variância desse previsor agregado deve ser menor do que a variância de cada um dos previsores individuais, com o mesmo espírito do que observamos com a variância da média de diferentes valores de uma variável relativamente à variância de um único valor.

A ideia básica é considerar um conjunto de **previsores (classificadores) fracos** de modo a obter um **previsor (classificador) forte**. Classificadores fracos têm taxas de erro de classificação altas. No caso binário, por exemplo, isso corresponde a uma taxa próxima de 0,50, que seria obtida com uma decisão baseada num lançamento de moeda. Um classificador forte, por outro lado, tem uma taxa de erro de classificação baixa.

Como em geral não dispomos de vários conjuntos de treinamento, a alternativa é utilizar réplicas *bootstrap* do conjunto de treinamento disponível para a obtenção das versões do preditor (ou classificador) que serão agregadas. Detalhes sobre a técnica *bootstrap* podem ser obtidos na Nota de Capítulo 3.

Para facilitar a exposição, consideremos um **problema de regressão** cujo objetivo é prever uma variável resposta quantitativa  $Y$  a partir de um conjunto de dados de treinamento  $(\mathbf{x}_1, y_1), \dots, (\mathbf{x}_n, y_n)$ . Nesse caso, a técnica consiste em obter  $B$  réplicas *bootstrap* desse conjunto, para cada conjunto de treinamento *bootstrap*,  $b = 1, \dots, B$ , construir uma árvore de decisão, determinar, a partir dessa árvore, o previsor de  $Y$ , digamos  $\hat{f}^b(\mathbf{x})$ , e agregá-los obtendo o previsor

$$\hat{f}_{\text{bag}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \hat{f}^b(\mathbf{x}).$$

No caso de classificação, para um determinado valor das variáveis predictoras associado a um elemento do conjunto de treinamento,  $\mathbf{x}$ , calcula-se o classificador  $\hat{c}^b(\mathbf{x})$  em cada uma das  $B$  árvores geradas e adota-se como valor do classificador agregado  $\hat{c}_{\text{bag}}(\mathbf{x})$ , a classe  $k^*$  correspondente àquela com maior ocorrência. Esse procedimento é conhecido como escolha pelo **voto majoritário**. Especificamente,

$$\hat{c}_{\text{bag}}(\mathbf{x}) = \operatorname{argmax}_k [\#\{(b|\hat{c}^b(\mathbf{x}) = k)\}],$$

em que  $\#\{A\}$  denota a cardinalidade do conjunto  $A$ .

Com uma ordem de grandeza de 200 réplicas *bootstrap* em geral se conseguem bons resultados (veja a Nota de Capítulo 3).

Para mais detalhes sobre *bagging*, veja Breiman (1996) e a Nota de Capítulo 4. Aspectos teóricos sobre *bagging* podem ser vistos em Bühlmaan e Yu (2002). Esses autores também apresentam uma proposta de uma variante, chamada *subagging* (subsample aggregating), que tem vantagens computacionais, além de obter preditores com variâncias e erros quadráticos médios menores.

**Exemplo 10.3.** A técnica *bagging* pode ser aplicada aos dados do Exemplo 10.2 por meio dos comandos

```
> set.seed(054)
> # train bagged model
> lesaoobsbag <- bagging(formula = L03 ~ SEXO + IDADE1+ GLIC,
+ data = coronarias3, nbagg = 200, coob = TRUE,
+ control = rpart.control(minsplit = 20, cp = 0.015))
> lesaoobspred <- predict(lesaoobsbag, coronarias3)
> table(coronarias3$L03, predict(lesaoobsbag, type="class"))
      0  1
0 117 214
1  78 625
```

Variando a semente do processo aleatório, as taxas de erros de classificação giram em torno de 27% a 28%.

Quatro das 200 árvores obtidas em cada réplica *bootstrap* podem ser obtidas por meio dos comandos apresentados a seguir e estão representadas na Figura 10.6

```
as.data.frame(coronarias4)
clr12 = c("#8dd3c7", "#ffffb3", "#bebada", "#fb8072")
n = nrow(coronarias4)
par(mfrow=c(2,2))
sed=c(1,10,22,345)
for(i in 1:4){
  set.seed(sed[i])
  idx = sample(1:100, size=n, replace=TRUE)
  cart = rpart(L03 ~ DIAB + IDADE1 + SEXO, data=coronarias4[idx,], model=TRUE)
  prp(cart, type=1, extra=1, box.col=clr12[i])
}
```

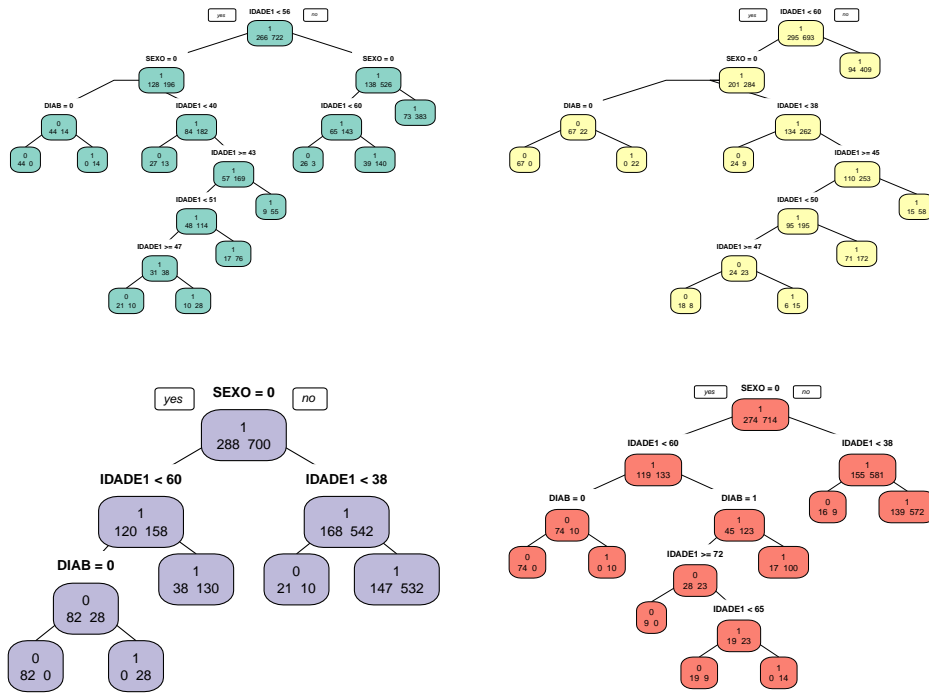


Figura 10.6: Algumas árvores obtidas por *bagging* para os dados do Exemplo 10.2.

### 10.3.2 Boosting

O termo *boosting* refere-se um algoritmo genérico aplicável ao ajuste de vários modelos, entre os quais destacamos árvores de decisão, regressão e modelos aditivos generalizados, discutidos no Capítulo 11. O objetivo dessa classe de algoritmos é reduzir o viés e a variância em modelos utilizados para aprendizado supervisionado.

Diferentemente da técnica *bagging*, em que  $B$  árvores são geradas independentemente por meio de *bootstrap*, com cada elemento do conjunto de dados de treinamento tendo a mesma probabilidade de ser selecionado em cada réplica *bootstrap*, no procedimento *boosting*, as  $B$  árvores são geradas **seqüencialmente** a partir do conjunto de treinamento original, com probabilidades de seleção (pesos) diferentes atribuídos aos seus elementos. Elementos mal classificados em uma árvore recebem pesos maiores para seleção na árvore subsequente (obtida do mesmo conjunto de treinamento), com a finalidade de dirigir a atenção aos casos em que a classificação é mais difícil.

O classificador final é obtido por meio da aplicação seqüencial dos  $B$  classificadores fracos gerados com as diferentes árvores. Em cada passo, a classificação de cada elemento é baseada no princípio do voto majoritário. Além dos pesos atribuídos aos elementos do conjunto de treinamento no processo de geração dos classificadores fracos, o procedimento *boosting* atribui pesos a cada um deles, em função das correspondentes taxas de erros de classificação. Essencialmente, o classificador forte pode ser expresso como

$$\hat{c}_{boost}(\mathbf{x}) = \sum_{b=1}^B \hat{c}^b(\mathbf{x})\alpha(b) \tag{10.2}$$

em que  $\alpha(b)$  é o peso atribuído ao classificador  $\hat{c}^b(\mathbf{x})$ .

Para entender o que seja um classificador fraco, considere o modelo aditivo

$$y_i = f(\mathbf{x}_i) + u_i = \sum_{m=1}^M \beta_m f_m(\mathbf{x}_i) + u_i, \quad (10.3)$$

em que  $y_i$  é um valor da variável resposta (contínua ou categórica),  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^p$  é o vetor com os valores das variáveis predictoras,  $u_i$  é um erro aleatório e  $f(\mathbf{x}_i)$  é uma função base ou **preditor** ou **classificador fraco**. Veremos, no Capítulo 11, que podemos usar, por exemplo, *splines* e polinômios locais para essas funções.

O objetivo é estimar a função ótima  $f^*$  que minimiza o valor esperado de uma **função perda**  $L$ , para alguma classe de funções, ou seja,

$$f^* = \arg \min_f E[L(\mathbf{y}, f(\mathbf{x}))],$$

com  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^\top$ ,  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1^\top, \dots, \mathbf{x}_n^\top)^\top$ ,  $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{in})^\top$ . Concentrar-nos emos na perda quadrática, de modo que o problema reduz-se a estimar  $E(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ , ou seja, o problema de otimização tem a forma

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = \arg \min_f R(f, \mathbf{x}), \quad (10.4)$$

em que

$$R(f, \mathbf{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [y_i - f(\mathbf{x}_i)]^2. \quad (10.5)$$

Obtemos, nesse caso de perda quadrática, o *L<sub>2</sub>-boosting*. Também podem-se considerar outras funções perda, como a função perda exponencial. Veja Hastie et al. (2017), por exemplo.

Esse procedimento pode ser usado para seleção de modelos e é robusto com relação à existência de multicolinearidade. Se por um lado, o procedimento *bagging* raramente reduz o viés quando comparado com aquele obtido com uma única árvore de decisão, por outro, ele tem a característica de evitar o sobreajuste. Essas características são invertidas com o procedimento *boosting*.

Existem vários algoritmos para a implementação de *boosting*. O mais usado é o algoritmo conhecido como **AdaBoost** (de *adaptive boosting*), desenvolvido por Freund e Schapire (1997). Dada a dificuldade do processo de otimização de (10.4), esse algoritmo utiliza um processo iterativo de otimização que produz bons resultados, embora não sejam ótimos.

Consideremos, inicialmente, um problema de classificação binária (com  $Y \in \{-1, 1\}$ ) a partir de um conjunto de treinamento com  $n$  elementos. No algoritmo **AdaBoost**, o classificador sempre parte de um único nó [conhecido como **toco** (*stump*)] em que cada elemento tem peso  $1/n$ . O algoritmo para ajuste consiste dos seguintes passos:

- 1) Atribua pesos  $w_i(b) = 1/n$  aos  $n$  elementos do conjunto de treinamento.
- 2) Para  $b = 1, \dots, B$ 
  - a) Ajuste o classificador  $\hat{c}^b(\mathbf{x})$  aos elementos do conjunto de treinamento usando os pesos  $w_i(b)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .
  - b) Calcule a taxa de erros

$$\text{erro}(b) = \sum_{i=1}^n w_i(b) I[\hat{c}^b(\mathbf{x}_i) \neq y_i] / \sum_{i=1}^n w_i(b).$$

- c) Calcule o peso do classificador  $\hat{c}^b(\mathbf{x})$  por meio de

$$\alpha(b) = \log\{[1 - \text{erro}(b)]/\text{erro}(b)\}.$$

Quanto menor a taxa de erros do classificador, maior será o peso atribuído a ele.

- d) Atualize os pesos dos elementos do conjunto de treinamento como

$$w_i(b+1) = w_i(b) \exp\{\alpha(b)I[\hat{c}^b(\mathbf{x}_i) \neq y_i]\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

O peso dos elementos corretamente classificadas não se altera; elementos mal classificados têm o peso aumentado. A justificativa para os pesos exponenciais pode ser encontrada em Hastie et al. (2017).

- e) Normalize os pesos para que  $\sum_{i=1}^n w_i(b) = 1$ .

- 3) Obtenha o classificador  $\hat{c}_{boost}(\mathbf{x}) = \text{sign}\{\sum_{b=1}^B \alpha(b)\hat{c}^b(\mathbf{x})\}$  em que  $\text{sign}(a) = 1$  se  $a > 0$  ou  $-1$  em caso contrário.

Para variáveis respostas com  $K$  categorias, podemos utilizar o algoritmo  $K$  vezes por meio dos seguintes passos

- i) A partir do conjunto de treinamento original  $\{(\mathbf{x}_1, y_1), \dots, (\mathbf{x}_n, y_n)\}$ , gere  $K$  subconjuntos  $\mathcal{C}_k = \{(\mathbf{x}_1, y_{1k}), \dots, (\mathbf{x}_n, y_{nk})\}$ ,  $k = 1, \dots, K$  com

$$y_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{se } (\mathbf{x}_i, y_i) \in \mathcal{C}_k, \\ -1, & \text{se } (\mathbf{x}_i, y_i) \notin \mathcal{C}_k. \end{cases}$$

de forma que cada um deles corresponda a um conjunto com resposta binária.

- ii) Utilize o algoritmo **AdaBoost** em cada um dos  $K$  subconjuntos, obtendo uma classificação  $\hat{c}_{boost}^k(\mathbf{x}_i)$  para cada elemento do conjunto original.  
 iii) Utilize o princípio do voto majoritário para obter a classificação  $\hat{c}_{boost}(\mathbf{x}_i)$ .

Nesse contexto, algoritmos para implementação de *boosting* envolvem 3 parâmetros:

- i) o número de árvores,  $B$ , que pode ser determinado por validação cruzada (ver Nota de Capítulo 1 do Capítulo 8);  
 ii) um **parâmetro de encolhimento** (*shrinkage*),  $\lambda > 0$ , pequeno, da ordem de 0,01 ou 0,001, que controla a velocidade do aprendizado;  
 iii) o número de divisões em cada árvore,  $d$ ; como vimos, o **AdaBoost**, usa  $d = 1$  e, em geral, esse valor funciona bem.

O algoritmo pode ser implementado por meio do pacote **adabag**.

**Exemplo 10.4** Consideremos novamente os dados do Exemplo 10.2. A classificação por meio de *boosting* pode ser obtida por meio do comando

```
coronarias3boost <- boosting(L03 ~ GLIC + SEXO + IDADE1 + DIAB + TRIG
+ IMC, data=coronarias3, boos=TRUE, mfinal=100)
```

Além de detalhes sobre os passos gerados pelo algoritmo, o comando `print()` gera um índice de importância de cada variável (ver Nota de Capítulo 1) que no exemplo considerado é

```
$importance
  DIAB      GLIC    IDADE1      IMC      SEXO      TRIG
1.297693 21.897930 16.931859 28.975228  3.593586 27.303704
```

A classificação predita pelo modelo é obtida por meio dos comandos

```
coronarias3boost.pred <- predict.boosting(coronarias3boost,
                                          newdata=coronarias3)
coronarias3boost.pred$confusion
      Observed Class
Predicted Class  0  1
                0 327  2
                1   4 701
```

e corresponde a um erro de classificação igual a  $6/1034 = 0,6\%$ , consideravelmente menor do que aquele obtido por meio de *bagging*.

Para mais detalhes sobre *boosting*, veja Hastie et al. (2017, cap. 10) e Bühlmann e van de Geer (2011, cap. 12).

### 10.3.3 Florestas aleatórias

Tanto *bagging* ou *boosting* quanto florestas aleatórias têm o mesmo objetivo no contexto de árvores de decisão: diminuir a variância e o viés. Enquanto os dois primeiros enfoques envolvem um conjunto de  $B$  árvores utilizando o mesmo conjunto de  $p$  variáveis preditoras em cada um deles, o enfoque conhecido por **florestas aleatórias** utiliza diferentes conjuntos das variáveis preditoras na construção de cada árvore. Pode-se dizer que esse procedimento acrescenta *bagging* ao conjunto das  $p$  variáveis preditoras e nesse sentido, introduz mais aleatoriedade e diversidade no processo de construção do modelo agregado. Intuitivamente, a utilização de florestas aleatórias para tomada de decisão corresponde à síntese da opinião de indivíduos com diferentes fontes de informação sobre o problema em questão.

Considere um conjunto de treinamento com  $n$  elementos,  $(\mathbf{x}_i, y_i), i = 1, \dots, n$  em que  $\mathbf{x}_i$  é um vetor com os valores de  $p$  variáveis preditoras associadas ao  $i$ -ésimo deles. O algoritmo para classificação por meio de florestas aleatórias com base nesse conjunto envolve os seguintes passos:

- i) Utilize *bagging* para selecionar amostras aleatórias do conjunto de treinamento, ou seja, construa novos conjuntos de dados a partir da seleção de amostras com reposição do conjunto original. Em geral, o número de elementos selecionados em cada amostra é da ordem de  $2/3$  dos  $n$  elementos do conjunto original. Os elementos restantes fazem parte da chamada **amostra fora do saco** (*out of bag samples - OOB samples*) e são utilizados para cálculo da taxa de erros de classificação.
- ii) Na construção de cada nó de cada árvore, em vez de escolher a melhor variável preditora dentre as  $p$  disponíveis no conjunto de treinamento, opte pela melhor delas dentre um conjunto de  $m < p$  selecionadas ao acaso. Usualmente, escolhe-se  $m \approx \sqrt{p}$ .
- iii) Não pode as árvores.
- iv) Para cada árvore construída, obtenha um classificador  $\hat{c}_b, b = 1, \dots, B$  e a correspondente classificação  $\hat{c}_b(\mathbf{x}) = k$  para os elementos do conjunto de dados.
- v) A categoria  $k^*$  escolhida para a observação  $\mathbf{x}$  é aquela em que o elemento do conjunto de treinamento com valor das variáveis preditoras igual a  $\mathbf{x}$  foi classificado pelo maior número de árvores (a escolha pelo voto majoritário).

Em geral, florestas aleatórias produzem resultados menos variáveis do que aqueles obtidos por meio de *bagging*. Preditores fortes obtidos por meio de *bagging* serão frequentemente selecionados nas divisões do nó raiz, de forma que as árvores geradas podem ser muito semelhantes o que não contribui para a redução da variabilidade das predições. Isso não acontece com florestas aleatórias, pois cada preditor forte não tende a ser selecionado para a divisão de todos os nós, gerando resultados menos correlacionados cuja “média” (obtida pelo voto majoritário), geralmente reduz a variabilidade.

A acurácia do ajuste por árvores aleatórias é tão boa quanto a do algoritmo **AdaBoost** e, às vezes, melhor. O resultado obtido por intermédio do algoritmo de árvores aleatórias é, em geral, mais robusto com relação a valores atípicos e ruído além de ser mais rápido do que aqueles obtidos por meio de *bagging* ou *boosting*. O pacote **randomForest** pode ser empregado para implementar a técnica de florestas aleatórias.

Para mais informação e resultados teóricos, veja Breiman (2001).

**Exemplo 10.5** Voltemos ao conjunto de dados examinado no Exemplo 10.2. Os conjuntos de treinamento e de validação podem ser obtidos por meio dos comandos

```
> set.seed(100)
> train <- sample(nrow(coronarias3), 0.7*nrow(coronarias3),
                 replace = FALSE)
> TrainSet <- coronarias3[train,]
> ValidSet <- coronarias3[-train,]
```

e a floresta aleatória (com os parâmetros *default*), por meio de

```
> model1 <- randomForest(L03 ~ GLIC + SEXO + IDADE1 + DIAB + TRIG +
                        IMC + HA + COL, data = TrainSet, importance = TRUE)
                        Type of random forest: classification
                        Number of trees: 500
No. of variables tried at each split: 2
                        OOB estimate of error rate: 28.63%
Confusion matrix:
      0  1 class.error
0 70 158  0.6929825
1 49 446  0.0989899
```

Para um ajuste mais fino do modelo, pode-se usar

```
> model2 <- randomForest(L03 ~ GLIC + SEXO + IDADE1 + DIAB + TRIG +
                        IMC + HA + COL, data = TrainSet, ntree = 500, mtry = 6,
                        importance = TRUE)
```

obtendo-se o seguinte resultado

```
                        Type of random forest: classification
                        Number of trees: 500
No. of variables tried at each split: 6
                        OOB estimate of error rate: 30.57%
Confusion matrix:
      0  1 class.error
0 80 148  0.6491228
1 73 422  0.1474747
```

As tabelas de classificação para os conjuntos de treinamento e de validação são geradas pelos comandos

```
> predTrain <- predict(model2, TrainSet, type = "class")
> table(predTrain, TrainSet$L03)
predTrain  0  1
           0 228  0
           1  0 495
> predValid <- predict(model2, ValidSet, type = "class")
> table(predValid, ValidSet$L03)
predValid  0  1
           0 41 36
           1 62 172
```

A classificação para o conjunto de dados original (com 1034 observações) é obtida por meio de

```
> predValid <- predict(model2, coronarias3, type = "class")
> table(predValid, coronarias3$L03)
predValid  0  1
           0 269 36
           1  62 667
```

indicando um erro de previsão de  $(36 + 62)/1034 = 9,5\%$ , consideravelmente menor do que aqueles obtidos pelas demais técnicas de classificação consideradas.

## 10.4 Árvores para regressão

Consideremos uma situação com variáveis preditoras  $X_1, \dots, X_p$  e uma variável resposta quantitativa  $Y$ . Quando a relação linear entre variáveis resposta e preditoras for compatível com um modelo linear (no caso de uma relação polinomial, por exemplo), o uso de regressão linear é conveniente e obtemos modelos com interpretabilidade e poder preditivo satisfatórios. Quando essa condição não for satisfeita (no caso de modelos não lineares, por exemplo), o uso de árvores pode ser mais apropriado. Além disso, algumas das variáveis preditoras podem ser qualitativas e nesse caso não é necessário transformá-las em **variáveis fictícias** (*dummy variables*) como no caso de modelos de regressão usuais.

A ideia subjacente é similar àquela empregada em modelos de classificação: subdividir o espaço gerado pelas variáveis explicativas em várias regiões e adotar como previsores, as respostas médias em cada região. As regiões são selecionadas de forma a produzir o menor **erro quadrático médio** ou o menor **coeficiente de determinação**.

A construção de árvores de regressão pode ser concretizada por meio dos pacotes `tree` e `rpart` entre outros. Ilustraremos a construção de uma árvore para regressão por meio de um exemplo.

**Exemplo 10.6.** Os dados do arquivo `antracose` foram extraídos de um estudo cuja finalidade era avaliar o efeito da idade (`idade`), tempo vivendo em São Paulo (`tmunic`), horas diárias em trânsito (`htransp`), carga tabágica (`cargatabag`), classificação sócio-econômica (`ses`), densidade de tráfego na região onde o indivíduo morou (`densid`) e distância mínima entre a residência a vias com alta intensidade de tráfego (`distmin`) num índice de antracose (`antracose`) que é uma medida de



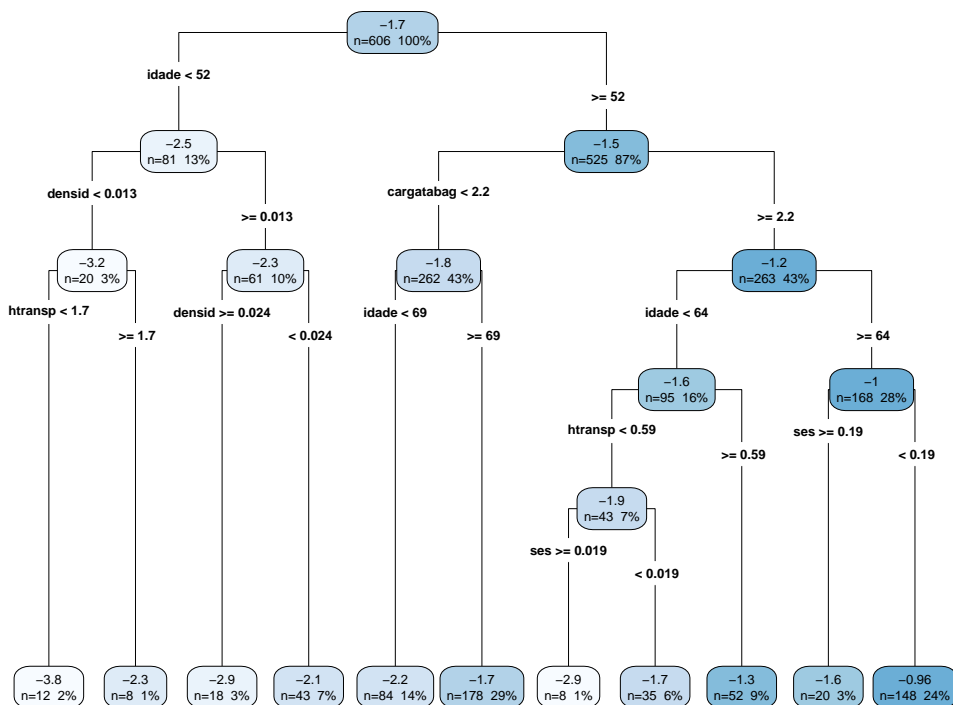
fuligem (*black carbon*) depositada no pulmão. Como esse índice varia entre 0 e 1, consideramos

$$\text{logrc} = \log[\text{índice de antracose}/(1 - \text{índice de antracose})]$$

como variável resposta. O objetivo aqui é apenas didático. Leitores interessados devem consultar Takano et al. (2019) para uma análise mais detalhada.

Inicialmente, construímos uma árvore de regressão para os dados por meio de validação cruzada. Os comandos do pacote `rpart` para gerar a árvore apresentada na Figura 10.7 são

```
> pulmaotree2 <- rpart(formula = logrc ~ idade + tmunic + htransp +
  cargatabag + ses + densid + distmin, data=pulmao,
  method="anova", xval = 30, cp=0.010)
> rpart.plot(pulmaotree2, clip.right.labs = TRUE, under = FALSE,
  extra = 101, type=4)
```



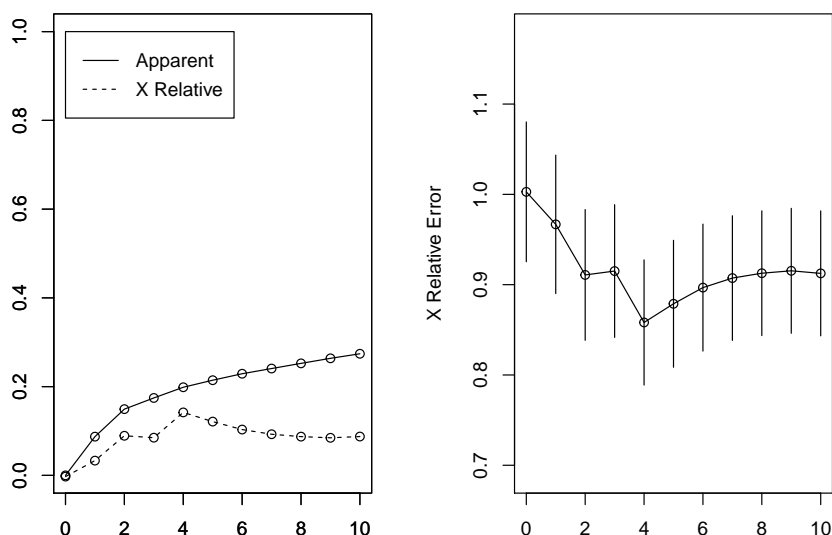
**Figura 10.7:** Árvore de decisão para os dados do Exemplo 10.6.

Os valores apresentados na parte superior de cada nó são as previsões associadas às regiões correspondentes. Na parte inferior encontram-se o número e a porcentagem de elementos incluídos em cada região.

Para evitar um possível sobreajuste da árvore proposta, convém avaliar o efeito de seu tamanho segundo algum critério. No pacote `rpart` esse critério é baseado no parâmetro de complexidade ( $CP$ ) que está relacionado com o número de nós terminais e na relação  $1 - R^2$  em que  $R^2$  tem a mesma interpretação do coeficiente de determinação utilizado em modelos lineares.

Com essa finalidade, podemos utilizar o comando `rsq.rpart` (`pulmaotree2`) que gera a tabela com os valores de  $CP$  e os gráficos apresentados na Figura 10.8.

```
Variables actually used in tree construction:
[1] cargatabag densid htransp idade ses
Root node error: 765.87/606 = 1.2638
n= 606
      CP nsplit rel error  xerror  xstd
1  0.087230      0  1.00000 1.00279 0.077419
2  0.062020      1  0.91277 0.96678 0.076624
3  0.025220      2  0.85075 0.91078 0.072406
4  0.024106      3  0.82553 0.91508 0.073489
5  0.015890      4  0.80142 0.85814 0.069326
6  0.014569      5  0.78553 0.87882 0.070312
7  0.011698      6  0.77097 0.89676 0.070309
8  0.011667      7  0.75927 0.90730 0.069025
9  0.011347      8  0.74760 0.91268 0.069066
10 0.010289      9  0.73625 0.91536 0.069189
11 0.010000     10  0.72596 0.91250 0.069202
```



**Figura 10.8:** Efeito do número de divisões para a árvore ajustada aos dados do Exemplo 10.6

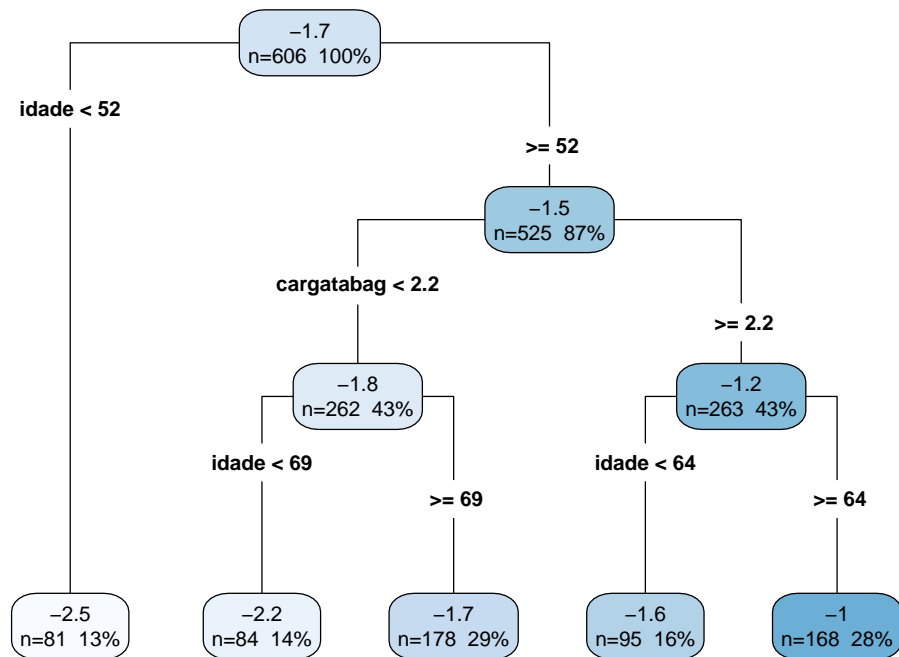
Utilizando o mesmo critério aplicado no caso de classificação, a sugestão é podar a árvore, fixando o número de subdivisões em 4, correspondendo a 5 nós terminais. O gráfico da árvore podada (disposto na Figura 10.9), além da regras de partição do espaço das variáveis explicativas podem ser obtidos com os comandos

```
> cpmin <- pulmaotree2$cptable[which.min(pulmaotree2$cptable[, "xerror"]),
  "CP"]
> pulmaotree2poda <- prune(pulmaotree2, cp = cpmin)
> rpart.plot(pulmaotree2poda, clip.right.labs = TRUE, under = FALSE,
  extra = 101, type=4)
> pulmaotree2poda$cptable
```

```

      CP nsplit rel error   xerror   xstd
1 0.08722980      0 1.0000000 1.0027880 0.07741860
2 0.06201953      1 0.9127702 0.9667786 0.07662398
3 0.02521977      2 0.8507507 0.9107847 0.07240566
4 0.02410635      3 0.8255309 0.9150809 0.07348898
5 0.01588985      4 0.8014246 0.8581417 0.06932582
> rpart.rules(pulmaotree2poda, cover = TRUE)
logrc
-2.5 when idade < 52                                cover
-2.2 when idade is 52 to 69 & cargatabag < 2.2      13%
-1.7 when idade >= 69 & cargatabag < 2.2           14%
-1.6 when idade is 52 to 64 & cargatabag >= 2.2    29%
-1.0 when idade >= 64 & cargatabag >= 2.2          16%
-1.0 when idade >= 64 & cargatabag >= 2.2          28%

```



**Figura 10.9:** Árvore podada ajustada aos dados do Exemplo 10.6

Valores preditos para o conjunto de dados com o respectivo *RMSE* são obtidos por meio dos comandos

```

> rmse = function(actual, predicted) {
+   sqrt(mean((actual - predicted) ^ 2))
+ }
> rmse(predpulmatree2poda, pulmao$logrc)
[1] 1.006402

```

Convém notar que embora a utilização de árvores de decisão gere um modelo bem mais simples do que aquele obtido por meio de análise regressão, os objetivos são

bem diferentes. Nesse contexto, o modelo baseado em árvores deve ser utilizado apenas quando o objetivo é fazer previsões, pois pode deixar de incluir variáveis importantes para propósitos inferenciais. No Exemplo 10.6, uma das variáveis mais importantes para entender o processo de deposição de fuligem no pulmão é o número de horas gastas em trânsito. Essa variável foi incluída significativamente no ajuste do modelo de regressão mas não o foi no modelo baseado em árvores.

Para mais detalhes sobre árvores para regressão, veja a Nota de Capítulo 5. Há um algoritmo *boosting* aplicável na construção de árvores para regressão. Veja Hastie et al. (2017, cap. 10) para detalhes.

## 10.5 Notas de capítulo

### 1) Critérios para avaliação de árvores de classificação

Como alternativa para as taxas de erros de classificação, pode-se usar o **índice de Gini** definido como

$$G_m = \sum_{k=1}^K \hat{p}_{mk}(1 - \hat{p}_{mk}),$$

que, essencialmente, corresponde à soma das variâncias das proporções de classificação em cada classe. Quando o valor de  $\hat{p}_{mk}$  para um dado nó  $m$  estiver próximo de 1 para uma dada categoria  $k$  e estiver próximo de zero para as demais categorias, o índice de Gini correspondente estará próximo de zero, indicando que para esse nó, uma das  $K$  categorias concentrará uma grande proporção dos elementos do conjunto de dados; poucos deles serão classificadas nas demais  $K - 1$  categorias. Quanto mais concentrados em uma categoria forem as classificações em um dado nó, tanto maior será o seu grau de **pureza**.

Nesse contexto, Breiman (1984) define a **importância relativa** de uma variável  $X_j$  no desenvolvimento da árvore. Com esse objetivo, definamos a variação da impureza do nó  $m$  correspondente à variável  $X_j$  como

$$\Delta(X_j, G_m) = G_m - p_{mE}G_{mE} - p_{mD}G_{mD}$$

em que  $G_{mE}$  e  $G_{mD}$  são respectivamente os índices de Gini associados aos nós gerados à esquerda e à direita do nó  $m$  pela variável  $X_j$  e  $p_{mE}$  e  $p_{mD}$  são as correspondentes proporções de elementos classificados nesses nós. A importância da variável  $X_j$  para o classificador  $\hat{c}(\mathbf{x})$  é

$$Imp[X_j, \hat{c}(\mathbf{x})] = \sum_{m \in M^*} \Delta(X_j, G_m)$$

em que  $M^*$  é o conjunto de nós internos da árvore gerada pelo classificador  $\hat{c}(\mathbf{x})$ . A importância relativa da variável  $X_j$  é definida como

$$ImpRel[X_j, \hat{c}(\mathbf{x})] = \frac{Imp[X_j, \hat{c}(\mathbf{x})]}{\max_{X_j} Imp[X_j, \hat{c}(\mathbf{x})]}.$$

Outra medida utilizada com o mesmo propósito e que tem características similares àquelas do coeficiente de Gini é a **entropia cruzada**, definida como

$$ET_m = \sum_{k=1}^K \hat{p}_{mk} \log(\hat{p}_{mk}).$$

Para detalhes, consulte James et al. (2017).

## 2) Poda de árvores

Normalmente, árvores com muitos nós terminais apresentam bom desempenho no conjunto de treinamento mas podem estar sujeitas a sobreajuste, e não produzir boas classificações no conjunto de validação. Árvores com um número menor de regiões (ou subdivisões) constituem uma boa alternativa, produzindo resultados com menor variância e melhor interpretação. O procedimento chamado **poda** (*pruning*) pode ser usado com esse fim. A poda pode ser realizada na própria construção da árvore (**pré poda**) ou após sua finalização (**pós poda**). No primeiro caso, a poda é obtida por meio da especificação de um critério de parada, como a determinação do número mínimo de elementos do conjunto de dados em cada nó terminal.

A poda propriamente dita consiste na construção de uma árvore com muitos nós terminais e segundo algum critério e na eliminação de alguns deles, obtendo uma árvore menor. Essencialmente, o procedimento consiste em construir a árvore até que o decréscimo no critério de avaliação (taxa de classificações erradas, por exemplo) gerada em cada divisão exceda algum limiar (em geral alto), obtendo-se uma **sub-árvore**.

Usar esse procedimento até se obter o menor erro de classificação pode não ser factível e o que se faz é considerar uma sequência de árvores indexada por um parâmetro de poda  $\alpha \geq 0$  tal que para cada  $\alpha$  seja construída uma sub-árvore  $A$  que minimize o **parâmetro de complexidade**

$$CP(\alpha) = \sum_{j=1}^{|A|} \sum_{i: \mathbf{x}_i \in R_j} (y_i - \hat{y}_{R_j})^2 + \alpha |A|, \quad (10.6)$$

em que  $|A|$  é o número de nós terminais de  $A$ ,  $R_j$  é a região (retângulo) correspondente ao  $j$ -ésimo nó terminal e  $\hat{y}_{R_j}$  é a categoria prevista associada à região  $R_j$ . O valor de  $\alpha$  é escolhido por validação cruzada.

## 3) *Bootstrap*

Com o progresso de métodos computacionais e com capacidade cada vez maior de lidar com grandes conjuntos de dados, o cálculo de erros padrões, vieses etc. pode ser concretizado sem recorrer a uma teoria, que muitas vezes pode ser muito complicada ou simplesmente não existir. Um desses métodos é o chamado ***bootstrap***, introduzido por B. Efron em 1979. A ideia que fundamenta o método ***bootstrap*** é reamostrar o conjunto de dados disponível para estimar um parâmetro  $\theta$ , com a finalidade de criar dados replicados. A partir dessas replicações, pode-se avaliar a variabilidade de um estimador proposto para  $\theta$  sem recorrer a cálculos analíticos.

Considere, por exemplo, um conjunto de dados  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$  a ser utilizado para estimar a mediana populacional,  $Md$ , por meio da mediana amostral  $md(\mathcal{X}) = \text{med}(x_1, \dots, x_n)$ . O algoritmo ***bootstrap*** correspondente envolve os seguintes passos

- i) Gere uma amostra aleatória simples **com reposição**, de tamanho  $n$ ,  $\mathcal{X}^* = \{x_1^*, \dots, x_n^*\}$  dos dados  $\mathcal{X}$ , chamada de **amostra *bootstrap***. Por exemplo, suponha que  $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ . Um amostra ***bootstrap*** é, por exemplo,  $\mathcal{X}^* = \{x_4, x_3, x_3, x_1, x_2\}$ .

- ii) Repita o processo de amostragem, gerando  $B$  amostras *bootstrap* independentes, denotadas  $\mathcal{X}_1^*, \dots, \mathcal{X}_B^*$ .
- iii) Para cada amostra *bootstrap*, calcule uma réplica *bootstrap* do estimador proposto, ou seja, de  $\text{md}(\mathcal{X}^*)$ , obtendo

$$\text{md}(\mathcal{X}_1^*), \dots, \text{md}(\mathcal{X}_B^*). \quad (10.7)$$

- iv) O estimador *bootstrap* do erro padrão de  $\text{md}(\mathcal{X})$  é definido como

$$\widehat{\text{ep}}_B(\text{md}) = \left[ \frac{\sum_{b=1}^B (\text{md}(\mathcal{X}_b^*) - \overline{\text{md}})^2}{B-1} \right]^{1/2},$$

com

$$\overline{\text{md}} = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \text{md}(\mathcal{X}_b^*),$$

ou seja, o estimador *bootstrap* do erro padrão da mediana amostral é o desvio padrão amostral do conjunto (10.7).

No caso geral de um estimador  $\hat{\theta} = t(\mathcal{X})$ , basta substituir  $\text{md}(\mathcal{X}^*)$  por  $t(\mathcal{X}^*)$  no algoritmo descrito acima.

A experiência indica que um valor razoável para o número de amostras *bootstrap* é  $B = 200$ . Para mais detalhes, consulte Efron e Tibshirani (1993).

#### 4) Árvores para regressão

Considere um conjunto de treinamento com  $n$  elementos  $(\mathbf{x}_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , sendo cada  $\mathbf{x}_i$  um vetor com  $p$  componentes. Se tivermos  $M$  regiões  $R_j$  definidas no espaço das variáveis preditoras, a resposta  $y$  é modelada por

$$y = f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^M f_j(\mathbf{x}) I(\mathbf{x} \in R_j). \quad (10.8)$$

Adotando como critério de otimalidade a minimização da soma de quadrados  $SQ = \sum_{i=1}^n [y_i - f(\mathbf{x}_i)]^2$ , o melhor preditor  $\hat{f}_j$  é a média dos  $y_i$  na região  $R_j$ , ou seja,

$$\hat{f}_j = \text{média}(y_i : \mathbf{x}_i \in R_j).$$

A árvore é então obtida por meio do algoritmo **ambicioso** descrito nos passos i)-iv) da Seção 10.1.

#### 5) *Bagging*: noções sobre a teoria

Nesta nota, baseamo-nos em Breiman (1996). Outra referência importante sobre este tópico é Bühlmann e Yu (2002). Considere o conjunto de dados de treinamento  $\mathcal{T} = \{(\mathbf{x}_i, y_i), i = 1, \dots, n\}$ , em que os valores da variável respostas,  $y_i$ , podem ser rótulos, no caso de classificação ou respostas numéricas, no caso de regressão e  $\mathbf{x}_i$  são vetores cujos elementos são os valores de  $p$  variáveis preditoras. Seja  $f(\mathbf{x}, \mathcal{T})$  um previsor de  $Y$  baseado em  $\mathcal{T}$ .

Considere também uma sequência de conjuntos de dados de treinamento  $\{\mathcal{T}_k\}$ , cada um consistindo de  $n$  elementos independentes e com a mesma distribuição  $\mathcal{P}$  dos elementos de  $\mathcal{T}$ . Nosso objetivo é usar esses conjuntos de dados de treinamento para obter um previsor melhor do que  $f(\mathbf{x}, \mathcal{T})$ .

No caso de regressão, o previsor proposto corresponde a uma estimativa do valor esperado dos previsores  $f(\mathbf{x}, \mathcal{T}_k)$ , ou seja, de

$$f_A(\mathbf{x}) = E_{\mathcal{P}} [f(\mathbf{x}, \mathcal{T})],$$

em que  $E_{\mathcal{P}}$  é o valor esperado sob a distribuição de probabilidades  $\mathcal{P}$  dos elementos de  $\mathcal{T}$  e o índice  $A$  denota agregação.

No caso de classificação, se  $f(\mathbf{x}, \mathcal{T})$  prevê a classe  $j \in \{1, \dots, M\}$ , o valor previsto da resposta é obtido por voto majoritário, ou seja, se  $n_j = \#\{k : f(\mathbf{x}, \mathcal{T}_k) = j\}$ ,

$$f_A(\mathbf{x}) = \arg \max_j n_j.$$

Normalmente, há um só conjunto de dados de treinamento  $\mathcal{T}$  e a sequência de conjuntos  $\{\mathcal{T}_k\}$  pode ser ser obtida via *bootstrap*. Para as  $B$  réplicas *bootstrap*,  $\{\mathcal{T}^{(b)}, b = 1, \dots, B\}$ , construímos previsores  $f(\mathbf{x}, \mathcal{T}^{(b)})$ ,  $b = 1, \dots, B$  e o **agregador bootstrap**, conhecido por **bagging** é

$$f_B(\mathbf{x}) = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B f(\mathbf{x}, \mathcal{T}^{(b)})$$

no caso de regressão; para classificação, o agregador *bootstrap* é obtido por votação majoritária.

A distribuição dos elementos de  $\mathcal{T}^{(b)}$  é uma aproximação da distribuição dos elementos de  $\mathcal{T}$ .

A ideia é que *bagging* aumenta a acurácia do previsor e nesse contexto, é importante avaliar se o procedimento *bagging* é **estável** ou **instável**. Um procedimento é dito estável se pequenas mudanças numa réplica de  $\mathcal{T}$  produzem pequenas mudanças em  $f$ , implicando que  $f_B \approx f$ . O procedimento é dito instável se pequenas mudanças em  $\mathcal{T}$  implicam grandes mudanças em  $f$ .

Breiman (1994) fez várias simulações com diversos previsores e chegou à conclusão que redes neurais, árvores de regressão e classificação e seleção de subconjuntos (*subset selection*) em regressão são procedimentos instáveis, mas o algoritmo KNN é estável. Para processos instáveis, *bagging* funciona bem. Nas simulações, Breiman verificou que a redução do erro de classificação foi de 20% a 47% e que a redução do *MSE* foi de 22% a 46%. Para processos estáveis, concluiu que *bagging* não é uma boa ideia.

### **Bagging para Regressão**

Suponha que cada elemento  $(\mathbf{x}, y)$  em  $\mathcal{T}$  seja extraído independentemente da distribuição de probabilidades  $\mathcal{P}$  de forma que o previsor agregado é

$$f_A(\mathbf{x}, \mathcal{P}) = E_{\mathcal{P}} [f(\mathbf{x}, \mathcal{T})]. \quad (10.9)$$

Suponha que  $(\mathbf{x}, y)$  seja uma variável aleatória com distribuição  $\mathcal{P}$  e independente de  $\mathcal{T}$ . O erro quadrático de previsão de  $f$  é

$$MSE_{\mathcal{P}} = E_{\mathcal{P}} \{E_{(\mathbf{x}, y)} [y - f(\mathbf{x}, \mathcal{T})]^2\}.$$

e o  $MSE_{\mathcal{P}}$  do preditor agregado  $f_A$  é

$$MSE_{\mathcal{P}}(A) = E_{(\mathbf{x}, y)} [y - f_A(\mathbf{x}, \mathcal{T})]^2.$$

Podemos escrever

$$MSE_{\mathcal{P}} = E(y^2) - 2E(yf_A) + E_{(\mathbf{x},y)}[E_{\mathcal{P}}f^2(\mathbf{x},\mathcal{T})]$$

Usando o fato de que  $[E(Z)]^2 \leq E(Z^2)$  no terceiro termo da igualdade anterior temos

$$MSE_{\mathcal{P}} \geq E(y - f_A)^2 = MSE_{\mathcal{P}}(A).$$

Consequentemente,  $f_A$  tem  $MSE$  de previsão menor do que o  $MSE$  de previsão de  $f$ . A magnitude da diferença entre os dois  $MSE$  dependerá de quão desiguais são os dois membros de

$$[E_{\mathcal{P}}f(\mathbf{x},\mathcal{T})]^2 \leq E_{\mathcal{P}}f^2(\mathbf{x},\mathcal{T}). \quad (10.10)$$

Se  $f(\mathbf{x},\mathcal{T})$  não mudar muito para diferentes réplicas de  $\mathcal{T}$ , então os dois membros de (10.10) devem ser quase iguais e não há ganhos ao se aplicar *bagging*. Por outro lado, quanto mais variável for  $f(\mathbf{x},\mathcal{T})$ , o procedimento *bagging* diminui o  $MSE_{\mathcal{P}}$ . Além disso, sabemos que  $f_A$  sempre melhora  $f$  em termos de acurácia. Todavia, o estimador agregado não é  $f_A(\mathbf{x},\mathcal{P})$  mas

$$f_B(\mathbf{x}) = f_A(\mathbf{x}, P_{\mathcal{T}}),$$

em que  $P_{\mathcal{T}}$  é a **distribuição empírica**, ou seja, tem massa  $1/n$  em cada ponto  $(\mathbf{x}_i, y_i) \in \mathcal{T}$ . Em outras palavras,  $P_{\mathcal{T}}$  é uma aproximação *bootstrap* de  $\mathcal{P}$ .

Para  $f_B(\mathbf{x})$  podemos considerar dois casos: por um lado, se o processo for instável, pode haver melhora por meio de *bagging*; por outro, se o processo for estável,  $f_B \approx f_A(\mathbf{x}, P_{\mathcal{T}})$  e  $f_B$  não será um preditor tão acurado para extrações de  $\mathcal{P}$  quanto  $f_A(\mathbf{x}, \mathcal{P})$ , que é aproximadamente igual a  $f(\mathbf{x}, \mathcal{T})$ . Para alguns conjuntos de dados, o preditor  $f(\mathbf{x}, \mathcal{T})$  pode ter  $MSE$  muito grande e então, procedimentos *bagging* não produzem resultados adequados.

### **Bagging para classificação**

No caso de classificação,  $f(\mathbf{x}, \mathcal{T})$  prevê um rótulo  $j \in \{1, \dots, M\}$ . Dada a estrutura apresentada no caso de regressão, a **probabilidade de classificação correta** para  $\mathcal{T}$  fixo é

$$P(\mathcal{T}) = p = P[Y = f(\mathbf{x}, \mathcal{T})],$$

que pode ser escrita como

$$p = \sum_j P[f(\mathbf{x}, \mathcal{T}) = j | Y = j] P(Y = j).$$

Se denotarmos por  $Q(j, \mathbf{x}) = P_{\mathcal{T}}[f(\mathbf{x}, \mathcal{T}) = j]$ , então podemos escrever

$$p = \sum_j E[Q(j, \mathbf{x}) | Y = j] P(Y = j) = \sum_j \int Q(j, \mathbf{x}) P(j | \mathbf{x}) dP_X(\mathbf{x}).$$

O classificador agregado é

$$f_A(\mathbf{x}) = \arg \max_i P(i, \mathbf{x}),$$

de modo que a probabilidade de classificação correta associada é

$$p_A = \sum_j \int I[\arg \max_i Q(i, \mathbf{x}) = j] P(j | \mathbf{x}) dP_X(\mathbf{x}).$$



Com algumas manipulações algébricas, obtemos

$$p_A = \int_{\mathbf{x} \in C} \max_j P(j|\mathbf{x}) dP_X(\mathbf{x}) + \int_{\mathbf{x} \in C^c} \sum_j I[f_A(\mathbf{x}) = j] P(j|\mathbf{x}) dP_X(\mathbf{x}),$$

em que  $C = \{\mathbf{x} : \arg \max_j P(j|\mathbf{x}) = \arg \max_j Q(j|\mathbf{x})\}$ .

A taxa de classificação correta máxima é obtida com o previsor

$$Q^*(\mathbf{x}) = \arg \max_j P(j|\mathbf{x}),$$

e é dada por

$$r^* = \int \max_j P(j|\mathbf{x}) dP_X(\mathbf{x}).$$

Comparando  $p$  com  $p_A$ , se  $\mathbf{x} \in C$ , o termo  $\sum_j Q(j|\mathbf{x})P(j|\mathbf{x})$  pode ser menor que  $\max_j P(j|\mathbf{x})$  e, desse modo, mesmo que  $P_X(C) \approx 1$ , o previsor não agregado  $f$  pode estar longe de ser ótimo.

No entanto,  $f_A$  é quase ótimo e, portanto, a agregação pode transformar previsores bons em previsores quase ótimos. Por outro lado, diferentemente do caso de regressão, previsores pobres podem ser transformados em previsores piores!

A conclusão é que, agregando-se classificadores instáveis, podemos melhorá-los e, agregando classificadores estáveis, não.

## 10.6 Exercícios

- 1) Use a função `predict()` e depois a função `table()` para avaliar o poder preditivo para a árvore do Exemplo 10.1.
- 2) Para o conjunto de dados `iris`, use somente os comprimentos de pétalas e sépalas para construir a árvore. Obtenha as regiões em que o espaço característico é dividido e represente-as num gráfico usando o comando `partition.tree()` do pacote `tree`.
- 3) Descreva formalmente as regiões determinadas na Figura 10.2.
- 4) Descreva formalmente algumas regiões que determinam as árvores da Figura 10.5.
- 5) Efetue a poda da árvore correspondente ao Exemplo 10.6, tomando o tamanho da árvore igual a 6. Compare os resultados com aqueles apresentados no texto.
- 6) Separe o conjunto `iris` em um conjunto de treinamento (100 observações, por exemplo) e um conjunto teste (50 observações). Com as funções `predict()` e `table()`, avalie as taxas de erro de classificação quando efetuamos uma poda.
- 7) Use as técnicas *bagging*, *boosting* e floresta aleatória para os conjuntos de dados `tipofacial` e `coronarias`. Que técnica produz o menor erro de classificação para cada um desses conjuntos?
- 8) Consideremos os dados de crianças submetidas a uma cirurgia da coluna para corrigir cifose congênita, disponíveis em XXXXXXXXXXXX. Veja Chambers e Hastie (1992). As variáveis observadas são:

$Y$ : cifose: uma variável qualitativa (atributo), com os valores **ausente** e **presente**, indicando se cifose estava ausente ou presente após a cirurgia.

$X_1$ : Age: idade em meses;

$X_2$ : Number: o número de vértebras envolvidas;

$X_3$ : Start: o número da primeira vértebra (a partir do topo) operada.

- a) Use o pacote **tree** para obter uma árvore para esse conjunto de dados, usando as três variáveis preditoras,  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$ .
  - b) Qual é a taxa de erro de classificação?
  - c) Descreva algumas regiões determinadas por essa árvore.
  - d) Obtenha uma árvore usando somente os preditores  $X_1$  e  $X_3$ . Construa o gráfico das regiões determinadas nesse caso.
- 9) Os dados do arquivo **esteira** contêm informações de 16 variáveis, sendo 4 qualitativas (Etiologia, Sexo, Classe funcional NYHA e Classe funcional WEBER) além de 13 variáveis quantitativas [Idade, Altura, Peso, Superfície corporal, Índice de massa corpórea (IMC), Carga, Frequência cardíaca (FC), VO2 RER, VO2/FC, VE/VO2, VE/VCO2] em diversas fases (REP, LAN, PCR e PICO) de avaliação de um teste de esforço realizado em esteira ergométrica. A descrição completa das variáveis está disponível no arquivo dos dados. Use as variáveis Carga, Idade, IMC e Peso na fase LAN (limiar anaeróbico) como preditores e VO2 (consumo de oxigênio) como resposta. Para efeito do exercício, essas variáveis, com as respectivas unidades de medida, serão denotadas como:
- $Y$ : consumo de oxigênio (VO2), em  $mL/kg/min$ ;
- $X_1$ : carga na esteira, em  $W$  (Watts);
- $X_2$ : índice de massa corpórea (IMC), em  $kg/m^2$ .
- $X_3$ : Idade, em anos;
- $X_4$ : Peso, em  $kg$ .
- Use o pacote **gbm** para implementar a técnica **boosting**.
- a) Obtenha a influência relativa das variáveis preditoras e a respectiva representação gráfica. Quais são as variáveis preditoras mais importantes?
  - b) Como o consumo de oxigênio varia com a CARGA e com o IMC? Obtenha os gráficos correspondentes.
  - c) Use a função **predict()** para prever o VO2 para o conjunto de validação. Qual é o erro quadrático médio correspondente?
- 10) Use o conjunto de dados disponível no arquivo **esteira2** e as variáveis CARGA e IMC para cultivar uma floresta. Obtenha as previsões para o conjunto de dados de validação e obtenha o erro quadrático médio de previsão. Compare os resultados com aqueles obtidos via *boosting* no exercício anterior.
- 11) Considere o conjunto de dados disponível no arquivo **rehabcardio**, utilizando  $X_1$  =HDL,  $X_2$ =LDL,  $X_3$  =Trigl,  $X_4$ =Glicose e  $X_5$ =Peso como variáveis preditoras e  $Y$ =Diabete (presente=1, ausente=0), como variável resposta. Utilize um subconjunto em que as amostras têm todas as medidas completas. Construa árvores usando *bagging* e floresta aleatória. Escolha o melhor classificador por meio da taxa de erro de classificação.

# Regularização e Modelos Aditivos Generalizados

## 11.1 Introdução

O objetivo das técnicas abordadas neste capítulo é selecionar modelos de regressão que, segundo algum critério, sejam melhores para prever valores de uma variável contínua. Assim como no caso de problemas de classificação, a estratégia do aprendizado estatístico consiste em ajustar vários modelos a um conjunto de dados de treinamento e escolher aquele que gere as melhores previsões com dados de um conjunto de dados de validação. Em geral, esse processo é concretizado por meio de validação cruzada (ver Nota de Capítulo 1 do Capítulo 8). Dentre os modelos consideradas para previsão, abordaremos modelos de regularização e modelos aditivos generalizados.

Os critérios usados para a escolha do melhor modelo são o erro quadrático médio ( $MSE$ ) ou sua raiz quadrada ( $RMSE$ ) e o coeficiente de determinação ( $R^2$ ) cujas definições estão nas Seções 1.6 e 6.2.

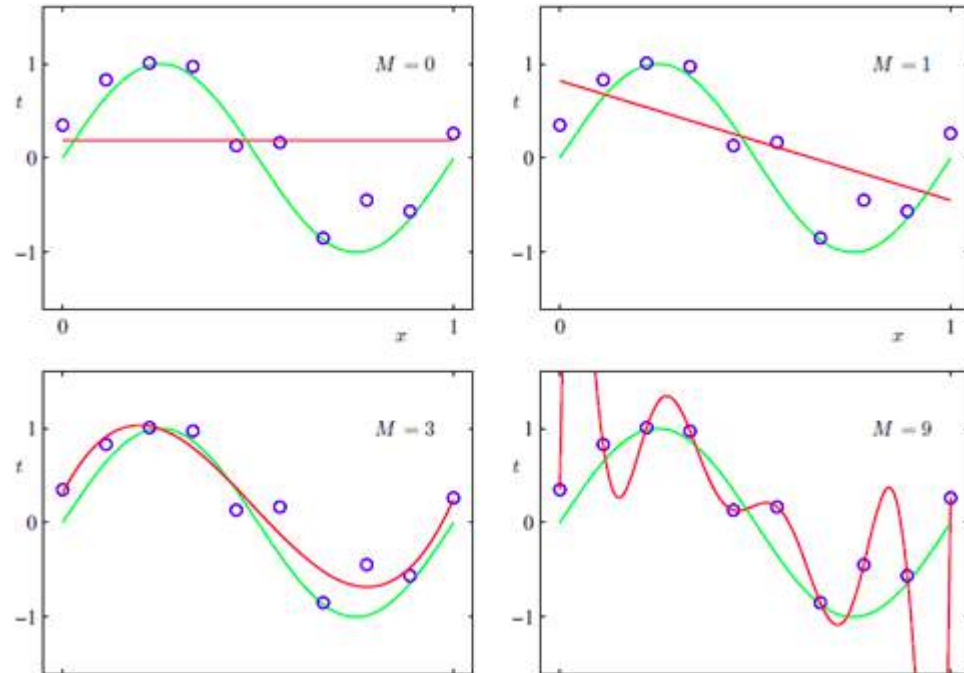
## 11.2 Regularização

Consideremos um exemplo proposto em Bishop (2006), cujo objetivo é ajustar um modelo de regressão polinomial a um conjunto de 10 pontos gerados por meio da expressão  $y_i = \text{sen}(2\pi x_i) + e_i$  em que  $e_i$  segue uma distribuição Normal com média nula e variância  $\sigma^2$ . Os dados estão representados na Figura 11.1 por pontos em azul. A curva verde corresponde a  $y_i = \text{sen}(2\pi x_i)$ ; em vermelho estão representados os ajustes baseados em regressões polinomiais de graus, 0, 1, 3 e 9. Claramente, a curva baseada no polinômio do terceiro grau consegue reproduzir o padrão da curva geradora dos dados sem, no entanto, predizer os dados com total precisão. A curva baseada no polinômio de grau 9, por outro lado, tem um ajuste perfeito, mas não reproduz o padrão da curva utilizada para gerar os dados. Esse fenômeno é conhecido como **sobreajuste** (*overfitting*).

O termo **regularização** refere-se a um conjunto de técnicas utilizadas para especificar modelos que se ajustem a um conjunto de dados evitando o sobreajuste. Essencialmente, essas técnicas servem para ajustar modelos de regressão com uma função de perda que contém um termo de penalização. Esse termo tem a finalidade de reduzir a influência de coeficientes responsáveis por flutuações excessivas.

Embora haja várias técnicas de regularização, consideraremos apenas três: a regularização  $L_2$ , ou **Ridge**, a regularização  $L_1$  ou **Lasso** (*least absolute shrinkage*

and selection operator) e uma mistura dessas duas, chamada de **Elastic Net**.



**Figura 11.1:** Ajuste de modelos polinomiais a um conjunto de dados hipotéticos.

O componente de regularização da técnica *Lasso* usa uma soma de valores absolutos dos parâmetros e um **coeficiente de penalização** que os encolhe para zero. Essa técnica serve para seleção de modelos porque associa pesos nulos a parâmetros que têm contribuição limitada para efeito de previsão. Isso implica uma **solução esparsa**.<sup>1</sup> Na regularização *Ridge*, por outro lado, o termo de regularização usa uma soma de quadrados dos parâmetros e um termo de penalização que força alguns pesos a serem pequenos, mas não os anula e conseqüentemente, não conduz a soluções esparsas. Essa técnica de regularização não é robusta com relação a valores atípicos, pois pode conduzir a valores muito grandes do termo de penalização.

Neste capítulo seguimos as ideias apresentadas em Hastie et al. (2017), James et al. (2017) e Medeiros (2019).

### 11.2.1 Regularização $L_2$ (*Ridge*)

A técnica de regressão *Ridge* foi introduzida por Hoerl e Kennard (1970) para tratar do problema da multicolinearidade mas também pode ser utilizada para corrigir problemas ligados ao sobreajuste. Consideremos o modelo de regressão

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \dots + \beta_p x_{pt} + e_t, \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad (11.1)$$

<sup>1</sup>Dizemos que um modelo é esparsa se a maioria dos elementos do correspondente vetor de parâmetros é nula ou desprezável.

com as  $p$  variáveis preditoras reunidas no vetor  $\mathbf{x}_t = (x_{1t}, \dots, x_{pt})^\top$ ,  $y_t$  representando a variável resposta,  $e_t$  indicando erros de média zero e  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p)^\top$  denotando os parâmetros a serem estimados. Os **estimadores de mínimos quadrados penalizados** correspondem à solução de

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{Ridge}(\lambda) = \arg \min_{\boldsymbol{\beta}} \left[ \sum_{t=1}^n (y_t - \boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{x}_t)^2 + \lambda \sum_{j=1}^p \beta_j^2 \right], \quad (11.2)$$

em que  $\lambda$  é o coeficiente de regularização, que controla a importância relativa entre a minimização da soma de quadrados dos erros [o primeiro termo do segundo membro de (11.2)] e o termo de penalização  $\lambda \sum_{j=1}^p \beta_j^2$ . Se  $\lambda = \infty$ , não há variáveis a serem incluídas no modelo e se  $\lambda = 0$ , obtemos os estimadores de mínimos quadrados usuais. A escolha de  $\lambda$  deve ser um dos componentes da estratégia para a determinação de estimadores regularizados. Dizemos que  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{Ridge}(\lambda)$  é o **estimador Ridge**. Pode-se mostrar que

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{Ridge}(\lambda) = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{y}, \quad (11.3)$$

em que  $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1^\top, \dots, \mathbf{x}_n^\top)^\top$  é a matriz de especificação do modelo e  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^\top$  é o vetor de respostas.

Algumas propriedades dessa classe de estimadores são:

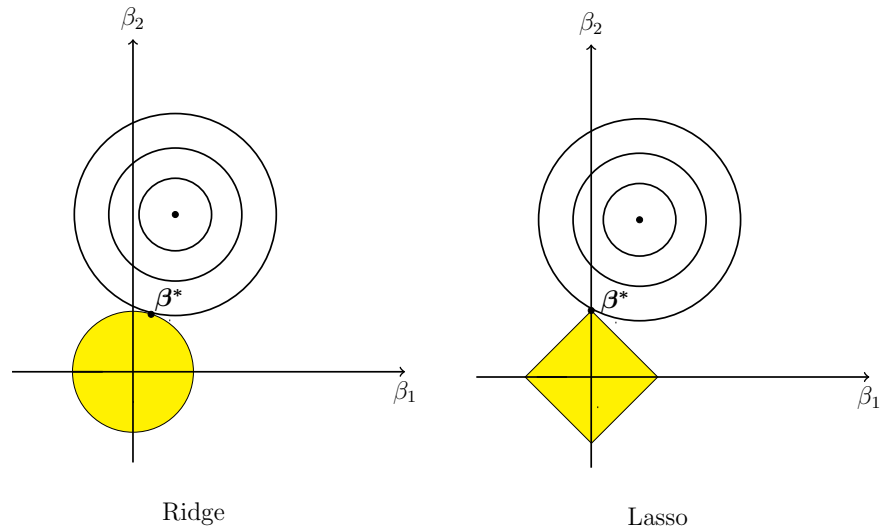
- 1) Em geral, o estimador *Ridge* não é consistente. Sua consistência assintótica vale sob condições sobre  $\lambda$  e  $n$ .
- 2) O estimador *Ridge* é enviesado para os parâmetros não nulos.
- 3) A técnica de regularização *Ridge* não serve para a seleção de modelos.
- 4) A escolha do coeficiente de regularização  $\lambda$  pode ser feita via validação cruzada ou por meio de algum critério de informação. Detalhes são apresentados na Nota de Capítulo 10.

Obter o mínimo em (11.2) é equivalente a minimizar a soma de quadrados não regularizada  $[\sum_{t=1}^n (y_t - \boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{x}_t)^2]$  sujeita à restrição

$$\sum_{j=1}^p \beta_j^2 \leq m, \quad (11.4)$$

para algum valor apropriado  $m$ , ou seja, é um problema de otimização com **multiplicadores de Lagrange**. Convém lembrar que o intercepto não é considerado no termo de penalização, dado que o interesse está na associação entre as variáveis preditoras e a variável resposta.

Na Figura (11.2) apresentamos um esquema com o valor ótimo do vetor  $\boldsymbol{\beta}$ , indicado por  $\boldsymbol{\beta}^*$ ; a região circular corresponde à restrição (11.4) e os círculos representam as curvas de nível da função erro não regularizada.



**Figura 11.2:** Esparsidade do modelo: (a) *Ridge*; (b) *Lasso*.

### 11.2.2 Regularização $L_1$ (*Lasso*)

Consideremos, agora, o **estimador *Lasso***, obtido de

$$\hat{\beta}_{Lasso}(\lambda) = \arg \min_{\beta} \left[ \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_t - \beta^\top \mathbf{x}_t)^2 + \lambda \sum_{j=1}^p |\beta_j| \right], \quad (11.5)$$

Neste caso, a restrição (11.4) é substituída por

$$\sum_{j=1}^p |\beta_j| \leq m. \quad (11.6)$$

No painel (b) da Figura 11.2, podemos observar que a regularização *Lasso* pode gerar uma solução esparsa, ou seja com algum elemento do vetor  $\hat{\beta}_{Lasso}$  igual a zero ( $\beta_1^*$ , na figura). No painel (a), correspondente ao estimador *Ridge*, ambos os componentes de  $\beta^*$  são positivos.

Algumas propriedades estatísticas do estimador *Lasso* são:

- 1) O estimador *Lasso* encolhe para zero os parâmetros que correspondem a preditores redundantes.
- 2) O estimador *Lasso* é enviesado para parâmetros não nulos.
- 3) Sob certas condições, o estimador *Lasso* seleciona as variáveis relevantes do modelo atribuindo pesos nulos aos respectivos coeficientes.

- 4) Quando  $p = n$ , ou seja, quando o número de variáveis preditoras é igual ao número de observações, a técnica *Lasso* corresponde à aplicação de um **limiar brando** (*soft threshold*) a  $Z_j = \mathbf{x}_j^\top \mathbf{y}/n$ , ou seja,

$$\hat{\beta}_j(\lambda) = \text{sinal}(Z_j) (|Z_j| - \lambda/2)_+, \quad (11.7)$$

em que  $(x)_+ = \max\{x, 0\}$ .

Para outras propriedades, veja Medeiros (2019) e Bühlmann e van de Geer (2011).

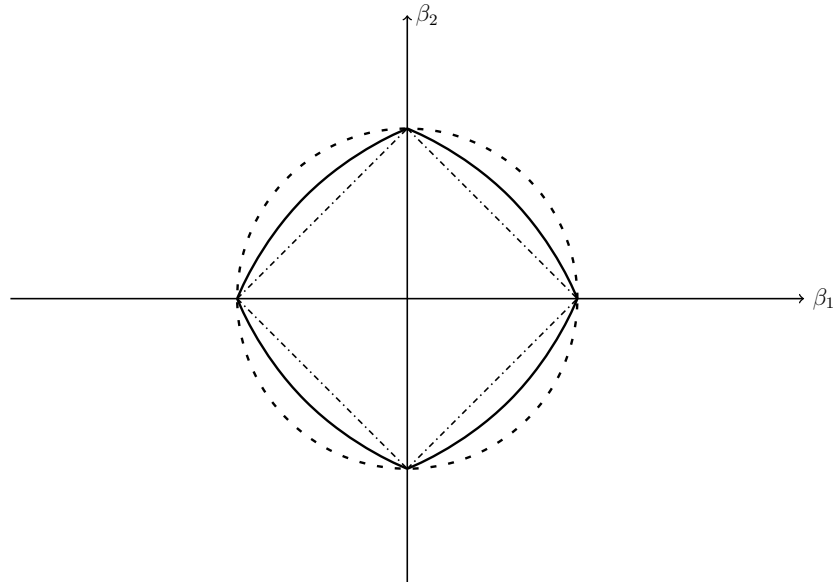
### 11.2.3 Outras propostas

O estimador *Elastic Net* (*EN*) é definido por

$$\hat{\beta}_{EN}(\lambda_1, \lambda_2) = \arg \min_{\beta} \left[ \sum_{t=1}^n \frac{1}{n} (y_t - \beta^\top \mathbf{x}_t)^2 + \lambda_1 \sum_{i=1}^p \beta_i^2 + \lambda_2 \sum_{i=1}^p |\beta_i| \right], \quad (11.8)$$

em que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são coeficientes de regularização.

Na Figura 11.3 apresentamos esquematicamente uma região delimitada pela restrição  $J(\beta) \leq m$ , em que  $J(\beta) = \alpha \sum_{j=1}^p \beta_j^2 + (1 - \alpha) \sum_{j=1}^p |\beta_j|$ , para algum  $m$ , com  $\alpha = \lambda_2 / (\lambda_1 + \lambda_2)$ , além daquelas delimitadas pelas restrições *Ridge* e *Lasso*.



**Figura 11.3:** Geometria das restrições *Elastic Net* (curva contínua), *Ridge* (curva tracejada) e *Lasso* (curva pontilhada)

Pode-se mostrar que sob determinadas condições, o estimador *Elastic Net* é consistente.

O estimador **Lasso adaptativo** (adaLASSO) é definido por

$$\hat{\beta}_{AL}(\lambda) = \arg \min_{\beta} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_t - \beta^\top \mathbf{x}_t)^2 + \lambda \sum_{i=1}^p w_i |\tilde{\beta}_i|, \quad (11.9)$$

em que  $w_1, \dots, w_p$  são pesos não negativos pré definidos e  $\tilde{\beta}_i$ ,  $i = 1, \dots, p$  são estimadores iniciais (por exemplo, estimadores *Lasso*). Usualmente, toma-se  $w_j = |\tilde{\beta}_j|^{-\tau}$ , para  $0 < \tau \leq 1$ .

O estimador **Lasso adaptativo** é consistente sob condições não muito fortes.

A função `adalasso()` do pacote `parcor` pode ser usada para calcular esse estimador. O pacote `glmnet` pode ser usado para obter estimadores *Lasso* e *Elastic Net* sob modelos de regressão linear, regressão logística e multinomial, regressão Poisson além de modelos de Cox. Para detalhes, veja Friedman et al. (2010).

**Exemplo 11.1:** Consideremos novamente os dados do arquivo `antracose`, analisados no Exemplo 10.6. Esses dados foram extraídos de um estudo cuja finalidade era avaliar o efeito da idade (`idade`), tempo vivendo em São Paulo (`tmunic`), horas diárias em trânsito (`htransp`), carga tabágica (`cargatabag`), classificação sócio-econômica (`ses`), densidade de tráfego na região onde habitou (`densid`) e distância mínima entre a residência a vias com alta intensidade de tráfego (`distmin`) num índice de antracose (`antracose`) que é uma medida de fuligem (*black carbon*) depositada no pulmão. Como esse índice varia entre 0 e 1, consideramos

$$\text{logrc} = \log[\text{índice de antracose}/(1 - \text{índice de antracose})]$$

como variável resposta.

Os estimadores de mínimos quadrados para um modelo linear podem ser obtidos por meio dos comandos

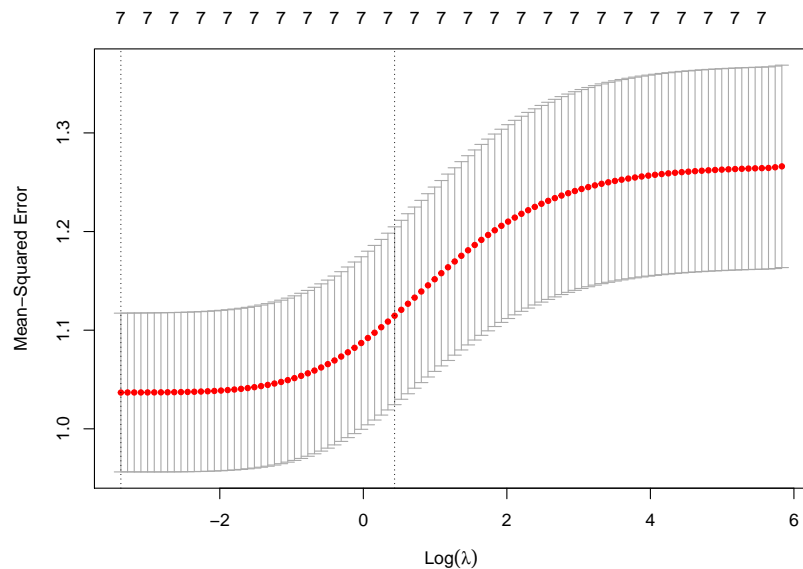
```
> pulmao_lm <- lm(logrc ~ idade + tmunic + htransp + cargatabag +
  ses + densid + distmin, data=pulmao)
> summary(pulmao_lm)
Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -3.977e+00  2.459e-01 -16.169 < 2e-16 ***
idade        2.554e-02  2.979e-03   8.574 < 2e-16 ***
tmunic       2.436e-04  2.191e-03   0.111 0.911485
htransp      7.505e-02  1.634e-02   4.592 5.35e-06 ***
cargatabag   6.464e-03  1.055e-03   6.128 1.61e-09 ***
ses          -4.120e-01  1.238e-01  -3.329 0.000926 ***
densid       7.570e+00  6.349e+00   1.192 0.233582
distmin      3.014e-05  2.396e-04   0.126 0.899950
```

```
Residual standard error: 1.014 on 598 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.1965, Adjusted R-squared:  0.1871
F-statistic: 20.89 on 7 and 598 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

O ajuste dos modelos de regressão *Ridge*, *Lasso* ou *Elastic net* podem ser obtido com o pacote `glmnet`. Ajustamos o modelo de regressão *Ridge* por meio de validação cruzada e obtemos o gráfico da Figura 11.4 em que o erro quadrático médio (*MSE*) é expresso em função do logaritmo do coeficiente de regularização  $\lambda$ .

```
> regridgecv = cv.glmnet(X, y, alpha = 0)
> plot(regridgecv)
```





**Figura 11.4:** Gráfico para avaliação do efeito do coeficiente de regularização (*Ridge*).

Os coeficientes do ajuste correspondentes ao valor mínimo do coeficiente  $\lambda$  juntamente com esse valor são obtidos com os comandos

```
> coef(regridgecv, s = "lambda.min")
8 x 1 sparse Matrix of class "dgCMatrix"
      1
(Intercept) -3.905299e+00
idade       2.456715e-02
tmunic     4.905597e-04
htransp    7.251095e-02
cargatabag 6.265919e-03
ses        -3.953787e-01
densid     7.368120e+00
distmin    3.401372e-05
> regridgecv$lambda.min
[1] 0.03410028
```

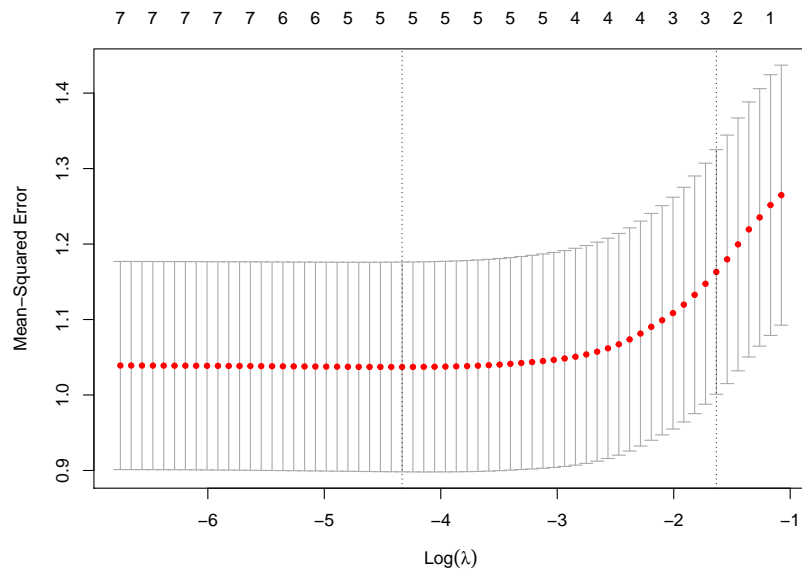
Com exceção das estimativas dos coeficientes das variáveis `tmunic` e `distmin` as demais foram encolhidas em direção a zero relativamente àquelas obtidas por mínimos quadrados.

Os valores preditos e a correspondente raiz quadrada do  $MSE$ , usualmente denotada  $RMSE$  são obtidos por meio de

```
> predict(regridgecv, X, s = "lambda.min")
> sqrt(regridgecv$cvm[regridgecv$lambda == regridgecv$lambda.min])
[1] 1.050218
```

O ajuste do modelo de regressão *Lasso* juntamente com o gráfico para a escolha do coeficiente  $\lambda$ , disposto na Figura 11.5 são obtidos com

```
> reglassocv = cv.glmnet(X, y, alpha = 1)
> plot(reglassocv)
```



**Figura 11.5:** Gráfico para avaliação do efeito do coeficiente de regularização (*Lasso*).

Os coeficientes correspondentes à regularização *Lasso*, o valor mínimo do coeficiente  $\lambda$  e o *RMSE* são obtidos por intermédio dos comandos

```
> coef(reglassocv, s = "lambda.min")
8 x 1 sparse Matrix of class "dgCMatrix"
      1
(Intercept) -3.820975473
idade      0.024549358
tmunic     .
htransp    0.069750435
cargatabag 0.006177662
ses        -0.365713282
densid     5.166969594
distmin    .

> reglassocv$lambda.min
[1] 0.01314064
> sqrt(reglassocv$cvm[reglassocv$lambda == reglassocv$lambda.min])
[1] 1.018408
```

Neste caso, todos os coeficientes foram encolhidos em direção ao zero, e aqueles correspondentes às variáveis *tmunic* e *distmin* foram anulados.

Para o modelo *Elastic Net* com  $\alpha = 0,5$  os resultados são

```
> regelncv = cv.glmnet(X, y, alpha = 0.5)
> regelncv$lambda.min
[1] 0.02884367
> coef(regelncv, s = "lambda.min")
8 x 1 sparse Matrix of class "dgCMatrix"
      1
(Intercept) -3.776354935
```

```

idade      0.024089256
tmunic     .
htransp    0.068289153
cargatabag 0.006070319
ses        -0.354080190
densid     4.889074555
distmin    .
> sqrt(regelncv$cvm[regelncv$lambda == regelncv$lambda.min])
[1] 1.0183

```

### 11.3 Modelos aditivos generalizados (*GAM*)

Modelos lineares têm um papel muito importante na análise de dados, tanto pela facilidade de ajuste quanto de interpretação. De uma forma geral, os modelos lineares podem ser expressos como

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 f_1(x_{i1}) + \dots + \beta_p f_p(x_{ip}) + e_i \quad (11.10)$$

$i = 1, \dots, n$  em que as funções  $f_i$  são conhecidas. No modelo de regressão polinomial de segundo grau, por exemplo,  $f_1(x_{i1}) = x_{i1}$  e  $f_2(x_{i2}) = x_{i2}^2$ . Em casos mais gerais, poderíamos ter  $f_1(x_{i1}) = x_{ij}$  e  $f_2(x_{i2}) = \exp(x_{i2})$ . Em muitos problemas reais, no entanto, nem sempre é fácil especificar a forma das funções  $f_i$  e uma alternativa proposta por Hastie e Tibshirani (1996) são os chamados **Modelos Aditivos Generalizados** (*Generalized Additive Models* - *GAM*) que são expressos como (11.10) sem a especificação da forma das funções  $f_i$ .

Quando a distribuição da variável resposta  $y_i$  pertence à **família exponencial**, o modelo pode ser considerado como uma extensão dos **Modelos Lineares Generalizados** (*Generalized Linear Models* - *GLM*) e é expresso como

$$g(\mu_i) = \beta_0 + \beta_1 f_1(x_{i1}) + \dots + \beta_p f_p(x_{ip}) \quad (11.11)$$

em que  $g$  é uma **função de ligação** e  $\mu_i = E(y_i)$  (ver Nota de Capítulo 3).

Existem diversas propostas para a representação das funções  $f_i$  que incluem o uso de *splines* naturais, *splines* suavizados e regressões locais. A suavidade dessas funções é controlada por parâmetros de suavização, que devem ser determinados *a priori*. Curvas muito suaves podem ser muito restritivas, enquanto curvas muito rugosas podem causar sobreajuste.

O procedimento de ajuste dos modelos aditivos generalizados depende da forma escolhida para as funções  $f_i$ . A utilização de *splines* naturais, por exemplo, permite a aplicação direta do método de mínimos quadrados, graças à sua construção a partir de **funções base**. Para *splines* penalizados, o processo de estimação envolve algoritmos um pouco mais complexos, como aqueles conhecidos sob a denominação de **retroajustamento** (*backfitting*). Para detalhes sobre o ajuste dos modelos aditivos generalizados, consulte Hastie e Tibshirani (1990) e Hastie et al. (2008).

Para entender o conceito de *splines*, consideremos o seguinte modelo linear com apenas uma variável explicativa

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + e_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (11.12)$$

A ideia subjacente aos modelos aditivos generalizados é a utilização de funções base e consiste na substituição do termo  $\beta_1 x_i$  em (11.12) por um conjunto de transformações conhecidas  $b_1(x_i), \dots, b_t(x_i)$ , gerando o modelo

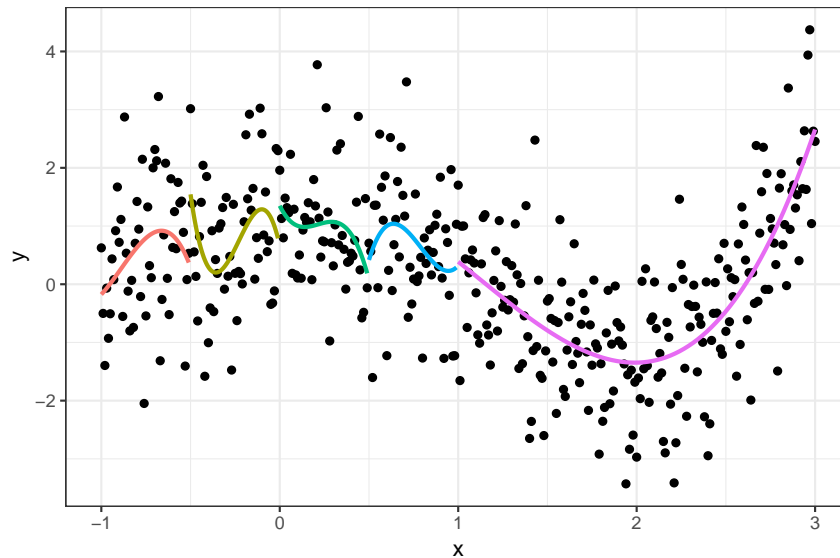
$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 b_1(x_i) + \dots + \alpha_t b_t(x_i) + e_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (11.13)$$

O modelo de regressão polinomial de grau  $t$  é um caso particular de (11.13) com  $b_j(x_i) = x_i^j$ ,  $j = 1, \dots, t$ .

Uma proposta para aumentar a flexibilidade da curva ajustada consiste em segmentar o domínio da variável preditora e ajustar diferentes polinômios de grau  $d$  aos dados de cada um dos intervalos gerados pela segmentação. Cada ponto de segmentação é chamado de **nó** e uma segmentação com  $k$  nós gera  $k + 1$  polinômios. Na Figura 11.6, apresentamos um exemplo com polinômios de terceiro grau e 4 nós. Nesse exemplo, a expressão (11.13) tem a forma

$$y_i = \begin{cases} \alpha_{01} + \alpha_{11}x_i + \alpha_{21}x_i^2 + \alpha_{31}x_i^3 + e_i, & \text{se } x_i \leq -0.5, \\ \alpha_{02} + \alpha_{12}x_i + \alpha_{22}x_i^2 + \alpha_{32}x_i^3 + e_i, & \text{se } -0.5 < x_i \leq 0, \\ \alpha_{02} + \alpha_{13}x_i + \alpha_{23}x_i^2 + \alpha_{33}x_i^3 + e_i, & \text{se } 0 < x_i \leq 0.5, \\ \alpha_{02} + \alpha_{14}x_i + \alpha_{24}x_i^2 + \alpha_{34}x_i^3 + e_i, & \text{se } 0.5 < x_i \leq 1, \\ \alpha_{05} + \alpha_{15}x_i + \alpha_{25}x_i^2 + \alpha_{35}x_i^3 + e_i, & \text{se } x_i > 1, \end{cases} \quad (11.14)$$

sendo que nesse caso, as funções base  $b_1(X), b_2(X), \dots, b_k(X)$  são construídas com a ajuda de funções indicadoras. Esse modelo é conhecido como **modelo polinomial cúbico segmentado**.



**Figura 11.6:** Polinômios de terceiro grau ajustados aos dados de cada região segmentada da variável  $X$ . Os nós são os pontos  $x = -0.5$ ,  $x = 0$ ,  $x = 0.5$  e  $x = 1$ .

A curva formada pela junção de cada um dos polinômios na Figura 11.6 não é contínua, apresentando “saltos” nos nós. Essa característica não é desejável, pois essas discontinuidades não são interpretáveis. Para contornar esse problema, podemos definir um *spline* de grau  $d$  como um polinômio segmentado de grau  $d$  com as  $d - 1$  primeiras derivadas contínuas em cada nó. Essa restrição garante a continuidade e suavidade (ausência de vértices) da curva obtida.

Utilizando a representação por bases (11.13), um *spline* cúbico com  $k$  nós pode ser expresso como

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 b_1(x_i) + \alpha_2 b_2(x_i) + \dots + \alpha_{k+3} b_{k+3}(x_i) + e_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (11.15)$$

para uma escolha apropriada de funções  $b_1(x), b_2(x), \dots, b_{k+3}(x)$ . Usualmente, essas funções envolvem três termos polinomiais, a saber,  $x, x^2$  e  $x^3$  e  $k$  termos  $h(x, c_1), \dots, h(x, c_k)$  da forma

$$h(x, c_j) = (x - c_j)_+^3 = \begin{cases} (x - c_j)^3, & \text{se } x < c_j, \\ 0, & \text{em caso contrário,} \end{cases}$$

sendo  $c_1, \dots, c_k$  indicando os nós. Com a inclusão do termo  $\alpha_0$ , o ajuste de um *spline* cúbico com  $k$  nós envolve a estimação de  $k+4$  parâmetros e, portanto, utiliza  $k+4$  graus de liberdade. Mais detalhes sobre a construção desses modelos podem ser encontrados em Hastie (2008) e James et al. (2017).

Além das restrições sobre as derivadas, podemos adicionar **restrições de fronteira**, exigindo que a função seja linear na região de  $x$  abaixo do menor nó e acima do maior nó. Essas restrições diminuem a variância dos valores extremos gerados pelo preditor, produzindo estimativas mais estáveis. Um *spline* cúbico com restrições de fronteira é chamado de *spline* natural.

No ajuste de *splines* cúbicos ou naturais, o número de nós determina o grau de suavidade da curva e a sua escolha pode ser feita por *validação cruzada* conforme indicado em James et al. (2017). De uma forma geral, a maior parte dos nós é posicionada nas regiões do preditor com mais informação, isto é, com mais observações. Por pragmatismo, para modelos com mais de uma variável explicativa, costuma-se adotar o mesmo número de nós para todos os preditores.

Os *splines* suavizados constituem uma classe de funções suavizadoras que não utilizam a abordagem por funções bases. De maneira resumida, um *spline* suavizado é uma função  $f$  que minimiza

$$\sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i)]^2 + \lambda \int f''(u)^2 du \quad (11.16)$$

em que  $f''$  corresponde à segunda derivada da função  $f$  e indica sua curvatura; quanto maior for a curvatura maior a penalização. O primeiro termo dessa expressão garante que  $f$  se ajustará bem aos dados, enquanto o segundo penaliza a sua variabilidade, isto é, controla a suavidade de  $f$ , que é regulada pelo parâmetro  $\lambda$ . A função  $f$  se torna mais suave conforme  $\lambda$  aumenta. A escolha desse parâmetro é geralmente feita por validação cruzada.

Outro método bastante utilizado no ajuste funções não lineares para a relação entre a variável preditora  $X$  e a variável resposta  $Y$  é conhecido como **regressão local**. Essencialmente, esse método consiste em ajustar modelos de regressão simples em regiões em torno de cada observação  $x_0$  da variável preditora  $X$ . Essas regiões são formadas pelos  $k$  pontos mais próximos de  $x_0$ , sendo que o parâmetro  $s = k/n$  determina o quão suave ou rugosa será a curva ajustada. O ajuste é feito por meio de mínimos quadrados ponderados, com pesos inversamente proporcionais à distância entre cada ponto dessa região e  $x_0$ . Assim, os pontos na vizinhança de  $x_0$  mais afastados recebem peso menor. Para uma excelente exposição sobre *splines* e penalização o leitor pode consultar Eilers and Marx (1996).

Modelos lineares generalizados podem ser ajustados utilizando-se a função `gam()` do pacote `mgcv`. Essa função permite a utilização de *splines* como função suavizadora. Para regressão local, é necessário usar a função `gam()` do pacote `gam`. Também é possível utilizar o pacote `caret`, a partir da função `train()` e `method = "gam"`.

**Exemplo 11.2:** Consideremos os dados do arquivo `esforco` com o objetivo de prever os valores da variável `vo2fcpico` (VO2/FC no pico do exercício) a partir

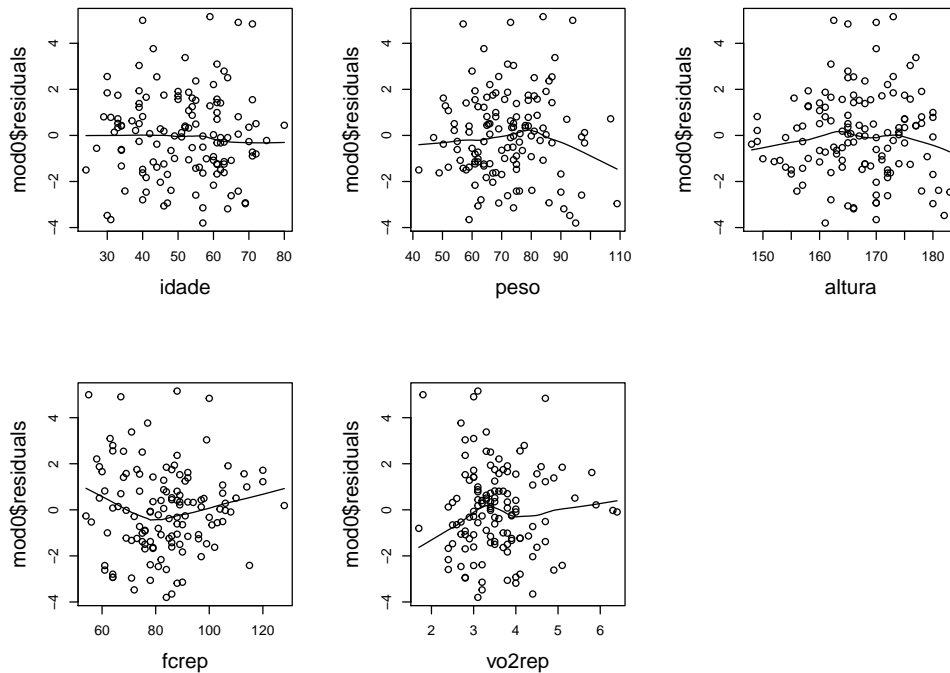
das variáveis NYHA, idade, altura, peso, fcrep (frequência cardíaca em repouso) e vo2rep (VO2 em repouso). Um modelo inicial de regressão linear múltipla também pode ser ajustado por meio dos seguintes comandos da função `gam`

```
mod0 <- gam(vo2fcpico ~ NYHA + idade + altura + peso + fcrep
            + vo2rep, data=esforco)
```

Como não especificamos nem a distribuição da resposta, nem a função de ligação, a função `gam` utiliza a distribuição Normal com função de ligação logarítmica, conforme indica o resultado.

```
Family: gaussian
Link function: identity
Formula:
vo2fcpico ~ NYHA + idade + altura + peso + fcrep + vo2rep
Parametric coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -4.80229    4.43061  -1.084 0.280642
NYHA1       -0.45757    0.50032  -0.915 0.362303
NYHA2       -1.78625    0.52629  -3.394 0.000941 ***
NYHA3       -2.64609    0.56128  -4.714 6.75e-06 ***
NYHA4       -2.43352    0.70532  -3.450 0.000780 ***
idade       -0.05670    0.01515  -3.742 0.000284 ***
altura       0.09794    0.02654   3.690 0.000342 ***
peso         0.08614    0.01739   4.953 2.48e-06 ***
fcrep       -0.07096    0.01318  -5.382 3.84e-07 ***
vo2rep       0.35564    0.24606   1.445 0.151033
---
R-sq.(adj) =  0.607   Deviance explained = 63.5%
GCV =  4.075   Scale est. = 3.7542    n = 127
```

Para avaliar a qualidade do ajuste, produzimos gráficos de dispersão entre os resíduos do ajuste e cada uma das variáveis preditoras. Esses gráficos estão dispostos na Figura 11.7 e sugerem relações possivelmente não lineares pelo menos em alguns casos.



**Figura 11.7:** Gráficos de dispersão (com curva *lowess*) entre `vo2fcpico` e cada variável preditora contínua considerada no Exemplo 11.2.

Uma alternativa é considerar modelos GAM do tipo (11.10) em que as funções  $f_i$  são expressas em termos de *splines*. Em particular, um modelo GAM com *splines* cúbicos para todas as variáveis explicativas contínuas pode ser ajustado por meio dos comandos

```
mod1 <- gam(vo2fcpico ~ NYHA + s(idade) + s(altura) + s(peso) +
            s(fcrep) + s(vo2rep), data=esforco)
```

gerando os seguintes resultados

```
Family: gaussian
Link function: identity
Formula:
vo2fcpico ~ NYHA + s(idade) + s(altura) + s(peso) + s(fcrep) +
            s(vo2rep)
```

Parametric coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	10.2101	0.3207	31.841	< 2e-16 ***
NYHA1	-0.5498	0.4987	-1.103	0.272614
NYHA2	-1.8513	0.5181	-3.573	0.000522 ***
NYHA3	-2.8420	0.5664	-5.018	1.99e-06 ***
NYHA4	-2.5616	0.7031	-3.643	0.000410 ***

---

Approximate significance of smooth terms:

	edf	Ref.df	F	p-value
s(idade)	1.000	1.000	15.860	0.00012 ***

```

s(altura) 5.362  6.476  3.751  0.00142 **
s(peso)   1.000  1.000 22.364  6.32e-06 ***
s(fcrep)  1.742  2.185 16.236  3.95e-07 ***
s(vo2rep) 1.344  1.615  0.906  0.47319
---
R-sq.(adj) =  0.64  Deviance explained = 68.2%
GCV = 3.9107  Scale est. = 3.435      n = 127

```

O painel superior contém estimativas dos componentes paramétricos do modelo e o painel inferior, os resultados referentes aos termos suavizados. Neste caso apenas a variável categorizada NYHA não foi suavizada, dada sua natureza não paramétrica.

A coluna rotulada **edf** contém os graus de liberdade efetivos associados a cada variável preditora. Para cada variável preditora contínua não suavizada, perde-se um grau de liberdade; para as variáveis suavizadas a atribuição de graus de liberdade é mais complexa em virtude do número de funções base e número de nós utilizados no processo de suavização. A linha rotulada **GCV** (*Generalized Cross Validation*) está associada com a escolha (por validação cruzada) do parâmetro de suavização.

A suavização é irrelevante apenas para a variável **vo2rep** e dado que ela também não apresentou contribuição significativa no modelo de regressão linear múltipla, pode-se considerar um novo modelo GAM obtido com a sua eliminação. Os resultados correspondentes, apresentados a seguir, sugerem que todas as variáveis preditoras contribuem significativamente para explicar sua relação com a variável resposta,

Formula:

```
vo2fcpico ~ NYHA + s(idade) + s(altura) + s(peso) + s(fcrep)
```

Parametric coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	10.2301	0.3202	31.948	< 2e-16 ***
NYHA1	-0.5818	0.4985	-1.167	0.245650
NYHA2	-1.8385	0.5161	-3.563	0.000539 ***
NYHA3	-2.9669	0.5512	-5.382	4.04e-07 ***
NYHA4	-2.4823	0.6980	-3.556	0.000551 ***

---

Approximate significance of smooth terms:

	edf	Ref.df	F	p-value
s(idade)	1.000	1.000	16.322	9.59e-05 ***
s(altura)	5.311	6.426	3.857	0.00115 **
s(peso)	1.000	1.000	22.257	6.56e-06 ***
s(fcrep)	1.856	2.337	14.865	8.39e-07 ***

---

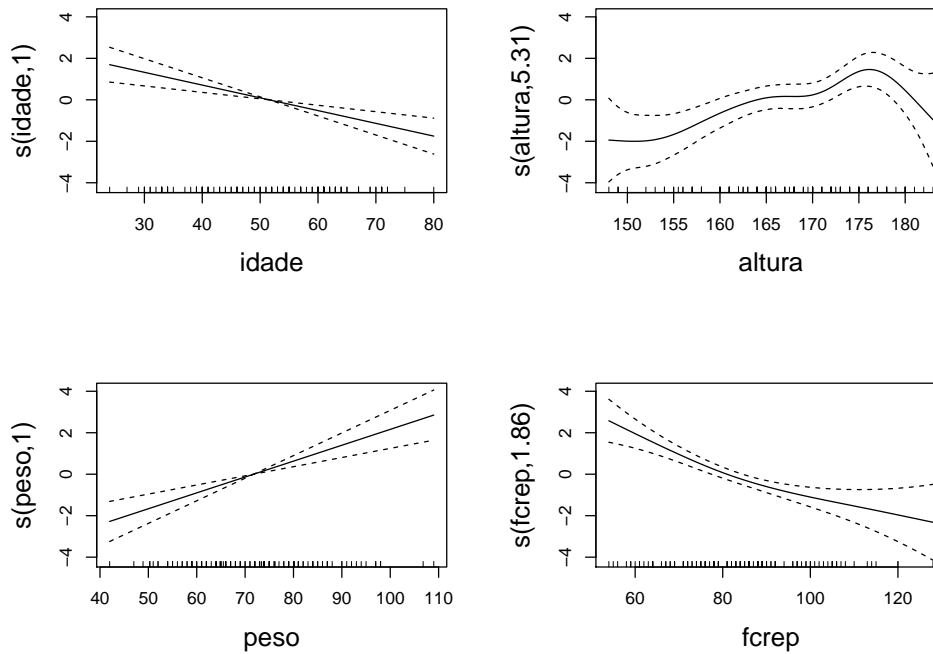
```

R-sq.(adj) =  0.64  Deviance explained = 67.8%
GCV = 3.8663  Scale est. = 3.435      n = 127

```

Como o número efetivo de graus de liberdade para **idade** e **peso** são iguais a 1, elas se comportam de forma linear no modelo. Os gráficos dispostos na Figura 11.8, produzidos por meio do comando `plot(mod2, se=TRUE)` evidenciam esse fato; além disso mostram a natureza “mais não linear” da variável **altura** (com **edf**= 5.311).





**Figura 11.8:** Funções suavizadas (com bandas de confiança) obtidas por meio do modelo GAM para os dados do Exemplo 11.2.

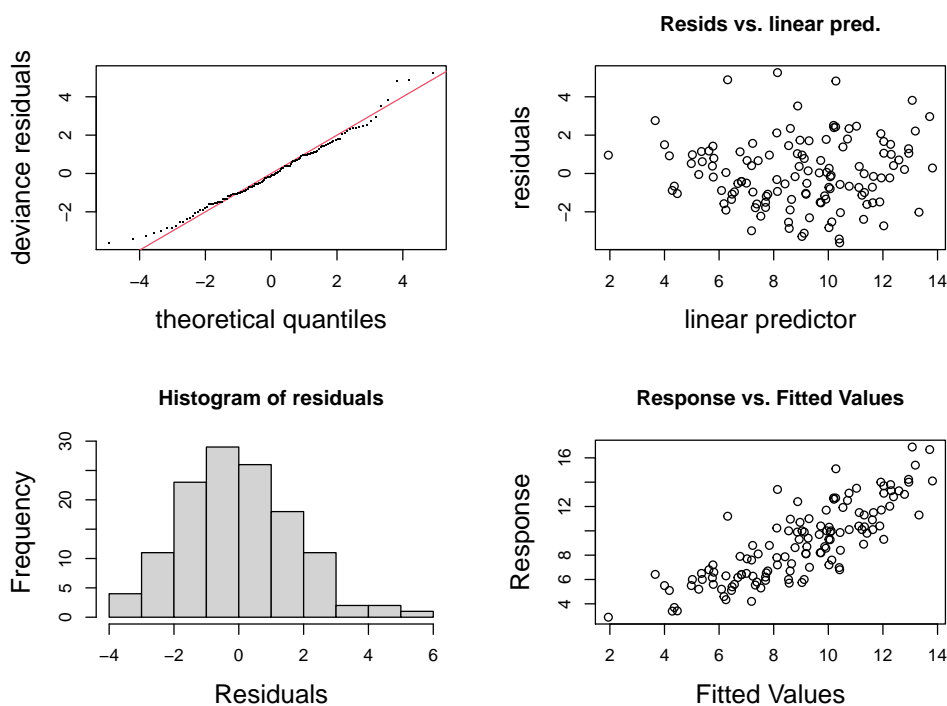
Uma avaliação da qualidade do ajuste pode ser realizada por meio de uma análise de resíduos e de comparação dos valores observados e preditos. Para essa finalidade, o comando `gam.check(mod2)` gera os gráficos apresentados na Figura 11.9 que não evidenciam problemas no ajuste.

Além disso, é possível comparar os modelos por meio de uma **análise de desviância**, que pode ser obtida com o comando `anova(mod0, mod1, mod2, test="F")`.

#### Analysis of Deviance Table

```
Model 1: vo2fcpico ~ NYHA + idade + altura + peso + fcrep +
vo2rep
Model 2: vo2fcpico ~ NYHA + s(idade) + s(altura) + s(peso) +
s(fcrep) + + s(vo2rep)
Model 3: vo2fcpico ~ NYHA + s(idade) + s(altura) + s(peso) +
s(fcrep)
```

	Resid. Df	Resid. Dev	Df	Deviance	F	Pr(>F)
1	117.00	439.24				
2	109.72	383.18	7.2766	56.052	2.2425	0.03404 *
3	111.24	387.58	-1.5129	-4.399	0.8465	0.40336



**Figura 11.9:** Gráficos diagnósticos para o ajuste do modelo GAM aos dados do Exemplo 11.2.

Esses resultados mostram que ambos os modelos GAM são essencialmente equivalentes ( $p = 0.403$ ) mas significativamente mais adequados ( $p = 0.034$ ) que o modelo de regressão linear múltipla.

A previsão para um novo conjunto dados em que apenas os valores das variáveis predictoras estão disponíveis pode ser obtida por meio da função `predict(mod2, newdata=esforcoprev, se=TRUE, type="response")`. Consideremos, por exemplo, o seguinte conjunto com dados de 5 novos pacientes

idade	altura	peso	NYHA	fcrep	vo2rep
66	159	50	2	86	3,4
70	171	77	4	108	4,8
64	167	56	2	91	2,5
42	150	67	2	70	3,0
54	175	89	2	91	2,9

O resultado da previsão com o modelo adotado é

```
$fit
  1          2          3          4          5
4.632615  5.945157  5.928703  7.577097 10.273719
$se.fit
  1          2          3          4          5
0.6747203  0.7155702  0.6255449  0.7731991  0.5660150
```

## 11.4 Notas de capítulo

### 1) Viés da regularização *Ridge*.

Fazendo  $\mathbf{R} = \mathbf{X}^\top \mathbf{X}$ , a expressão do estimador *Ridge* (11.2) pode ser expressa como

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{Ridge}(\lambda) = (\mathbf{I} + \lambda \mathbf{R}^{-1})^{-1} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{MQ}, \quad (11.17)$$

em que  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{MQ}$  denota o estimador de mínimos quadrados ordinários. A esperança condicional de (11.17), dada  $\mathbf{X}$ , é

$$E[\hat{\boldsymbol{\beta}}_{Ridge}(\lambda)] = (\mathbf{I} + \lambda \mathbf{R}^{-1})^{-1} \boldsymbol{\beta} \neq \boldsymbol{\beta}. \quad (11.18)$$

### 2) Escolha do parâmetro $\lambda$

A escolha do parâmetro de regularização  $\lambda$  pode ser baseada em **validação cruzada** ou em algum critério de informação.

Pode-se provar que

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{Ridge}(\lambda) = \mathbf{V} \text{diag} \left( \frac{d_1}{d_1^2 + \lambda}, \frac{d_2}{d_2^2 + \lambda}, \dots, \frac{d_p}{d_p^2 + \lambda} \right) \mathbf{U}^\top \mathbf{y},$$

em que  $\mathbf{X} = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{V}^\top$  é a decomposição em valores singulares de  $\mathbf{X}$  com  $\mathbf{U}$  denotando uma matriz ortogonal de dimensão  $n \times p$ ,  $\mathbf{V}$  uma matriz ortogonal de dimensão  $p \times p$  e  $\mathbf{D}$  uma matriz diagonal com dimensão  $p \times p$ , contendo os correspondentes valores singulares  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_p \geq 0$  (raízes quadradas dos valores próprios de  $\mathbf{X}^\top \mathbf{X}$ ).

Seja  $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_M\}$  uma grade de valores para  $\lambda$ . Para a escolha de um valor apropriado para  $\lambda$ , podemos usar um critério de informação do tipo

$$\hat{\lambda} = \arg \min_{\lambda \in \Lambda} [-\log \text{verossimilhança} + \text{penalização}],$$

como

$$\begin{aligned} AIC &= \log[\hat{\sigma}^2(\lambda)] + \text{gl}(\lambda) \frac{2}{n}, \\ BIC &= \log[\hat{\sigma}^2(\lambda)] + \text{gl}(\lambda) \frac{\log n}{n}, \\ HQ &= \log[\hat{\sigma}^2(\lambda)] + \text{gl}(\lambda) \frac{\log \log n}{n}, \end{aligned}$$

em que  $\text{gl}(\lambda)$  é o número de graus de liberdade associado a  $\lambda$ , nomeadamente

$$\text{gl}(\lambda) = \text{tr} [\mathbf{X}(\mathbf{X}^\top \mathbf{X} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{X}^\top] = \sum_{j=1}^p \frac{d_j^2}{d_j^2 + \lambda},$$

e

$$\hat{\sigma}^2(\lambda) = \frac{1}{n - \text{gl}(\lambda)} \sum_{t=1}^n [y_t - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{Ridge}(\lambda)^\top \mathbf{x}_t]^2.$$

### 3) Modelos Lineares Generalizados

Com a finalidade de avaliar a relação entre variáveis respostas com distribuição na classe da **família exponencial** e variáveis explicativas, Nelder e Wederburn (1972) propuseram os chamados **Modelos Lineares Generalizados** (*Generalized Linear Models*).

A função densidade (de probabilidade) de variáveis com distribuição na família exponencial pode ser expressa de uma forma geral como

$$f(y|\theta, \phi) = \exp\{[a(\phi)]^{-1}[y\theta - b(\theta)]\} + c(y, \theta), \quad (11.19)$$

em que  $\theta$  e  $\phi$  são parâmetros e  $a, b$  e  $c$  são funções conhecidas. Pode-se mostrar que

$$E(y) = \mu = b'(\theta) = db(\theta)/d\theta$$

e que

$$\text{Var}(y) = a(\phi)b''(\theta) = a(\phi)d^2b(\theta)/d\theta^2 = a(\phi)V(\mu),$$

com

$$V(\mu) = d^2b(\theta)/d\theta^2 = d\mu(\theta)/d\theta. \quad (11.20)$$

A expressão (11.20) é conhecida como **função de variância** e relaciona a variância e o valor esperado de  $y$ .

Muitas distribuições podem ser expressas na forma (11.19). Em particular, para mostrar que a distribuição Normal com parâmetros  $\mu$  e  $\sigma^2$  pertence a essa família, basta fazer

$$a(\theta) = \sigma^2, \quad \theta = \mu, \quad b(\theta) = \theta^2/2, \quad \text{e } c(y, \theta) = -[y^2/\sigma^2 + \log(2\pi\sigma^2)]/2.$$

Para a distribuição binomial com parâmetros  $n$  e  $p$ , os termos de (11.19) são

$$a(\phi) = 1, \quad \theta = \log[p/(1-p)], \quad b(\theta) = -n \log(1-p)$$

e

$$c(y, \phi) = \log\{n!/[y!(n-y)!]\}.$$

O modelo linear generalizado para variáveis da família exponencial é definido como

$$g(\mu) = \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\beta},$$

em que  $\mathbf{x}$  é um vetor com os valores de variáveis explicativas,  $\boldsymbol{\beta}$  é um vetor de coeficientes a serem estimados e  $g$ , conhecida como **função de ligação**, essencialmente identifica a função do valor esperado que se pretende modelar linearmente. Para a distribuição Normal, definindo  $g(\mu)$  como a função identidade, o modelo se reduz ao modelo linear gaussiano padrão. Para a distribuição binomial, definindo  $g(\mu)$  como  $\log[\mu/(1-\mu)]$ , obtemos o modelo de regressão logística.

A vantagem dessa formulação generalizada é que vários modelos podem ser ajustados por meio de um único algoritmo. Dada uma amostra aleatória  $[(y_1, \mathbf{x}_1), \dots, (y_n, \mathbf{x}_n)]^\top$  em que a distribuição de  $Y$  pertence à família exponencial, a função log-verossimilhança é

$$\ell(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) = \ell(\boldsymbol{\beta}|\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \{\phi[y_i\theta_i - b(\theta_i)] + c(y_i, \phi)\}, \quad (11.21)$$

com  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)^\top$  e  $\mu_i = E(y_i) = b'(\theta_i) = g^{-1}(\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta})$ .

Em geral, a maximização de (11.21) requer métodos iterativos como aqueles discutidos no Apêndice A. Nesse contexto, o algoritmo de Newton-Raphson pode ser implementado por meio do processo iterativo

$$\boldsymbol{\beta}^{(k+1)} = \boldsymbol{\beta}^{(k)} + [\mathbf{I}(\boldsymbol{\beta}^{(k)})]^{-1} \mathbf{u}(\boldsymbol{\beta}^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots$$

em que

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\beta}) = \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta}|\mathbf{y})}{\partial \boldsymbol{\beta}} \quad \text{e} \quad \mathbf{I}(\boldsymbol{\beta}) = -\mathbf{E} \left\{ \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\beta}|\mathbf{y})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}^T} \right\}$$

denotam, respectivamente, a **função escore** e a correspondente matriz de **informação de Fisher**.

## 11.5 Exercícios

- 1) Considere os dados dispostos na Tabela 11.1 correspondentes a preços de ações da Telebrás e do índice da Bolsa de Valores de São Paulo (IBV), de 2 de janeiro a 24 de fevereiro de 1995.
  - a) Construa um gráfico de dispersão para os dados dessa tabela e identifique um modelo de regressão a ser ajustado aos dados, interpretando os seus parâmetros.
  - b) Ajuste o modelo identificado no item a) por meio do método de mínimos quadrados e avalie a qualidade de seu ajuste por meio de ferramentas de diagnóstico.
- 2) Obtenha os estimadores *Ridge*, *Lasso* e *Elastic Net* para os dados do Exemplo 6.7.
- 3) Idem, para os dados do Exemplo 6.11, agora tendo a frequência cardíaca como variável resposta.
- 4) Reanalise os dados do Exemplo 11.2 adotando uma distribuição gama com função de ligação logarítmica para a variável resposta. Compare os resultados com aqueles obtidos sob a suposição de normalidade.

**Tabela 11.1:** Preços de ações da Telebrás e Índice da Bolsa de Valores de São Paulo (2/1/1995 a 24/2/1995)

Obs	Telebrás	IBV	Obs	Telebrás	IBV
1	34,99	43,19	20	30,41	38,85
2	32,09	39,68	21	31,34	39,90
3	32,56	40,37	22	30,78	38,98
4	30,31	38,27	23	31,44	39,44
5	28,91	36,28	24	30,59	38,30
6	26,10	32,70	25	28,63	36,37
7	28,25	34,99	26	27,60	35,56
8	30,41	38,41	27	26,38	34,01
9	32,00	41,04	28	25,26	33,08
10	31,25	40,56	29	24,98	32,95
11	32,37	42,10	30	24,56	31,92
12	30,87	40,79	31	23,02	30,69
13	28,63	38,09	32	20,96	28,64
14	29,56	38,62	33	22,45	30,23
15	28,44	37,58	34	21,61	29,62
16	29,28	38,40	35	19,74	27,93
17	29,84	39,27	36	20,49	28,72
18	28,35	37,84	37	23,02	32,17
19	27,32	35,81	38	23,48	32,71

---

# PARTE III: APRENDIZADO NÃO SUPERVISIONADO

Na terceira parte do texto, apresentamos métodos utilizados para agrupar dados e reduzir a dimensão de um conjunto de variáveis com a mesma natureza, *i.e.*, sem a distinção entre variáveis explicativas e respostas. Neste contexto, o objetivo é o entendimento da estrutura de associação entre as variáveis. Com essa finalidade, consideramos análise de agrupamentos, análise de componentes principais e análise de componentes independentes.





# Análise de Agrupamentos

## 12.1 Introdução

O objetivo do conjunto de técnicas conhecido como **Análise de Agrupamentos** (*Cluster Analysis*) é reunir “dados” pertencentes a um determinado espaço em “grupos” de acordo com alguma medida de distância, de modo que as distâncias entre os elementos de um mesmo grupo sejam “pequenas”. A Análise de Agrupamentos é, às vezes, chamada de **segmentação de dados**. O espaço mencionado acima pode ser um espaço euclidiano, eventualmente de dimensão grande, ou pode ser um espaço não euclidiano, por exemplo aquele que caracteriza documentos a serem agrupados segundo certas características como assunto tratado, correção gramatical etc. A Análise de Agrupamentos está inserida no conjunto de técnicas conhecido por **Aprendizado Não Supervisionado**, ou seja, em que todas as variáveis do conjunto de dados são consideradas sem distinção entre preditoras e respostas. O objetivo é descrever associações e padrões entre essas variáveis. Com essa finalidade, podemos usar várias técnicas de agrupamento, e neste capítulo iremos discutir algumas delas.

A Análise de Agrupamentos é usada em muitas áreas e aplicações, como:

- i) Segmentação de imagens como em **fMRI** (imagens por ressonância magnética funcional), em que se pretende particionar as imagens em áreas de interesse. Veja, por exemplo, Sato et al. (2007).
- ii) Bioinformática, em que o objetivo é a análise de expressão de genes gerados de *microarrays* ou sequenciamento de DNA ou de proteínas. Veja Hastie et al. (2009) ou Fujita et al. (2007), por exemplo.
- iii) Reconhecimento de padrões de objetos e caracteres, como em identificação de textos escritos à mão.
- iv) Redução (ou compressão) de grandes conjuntos de dados, a fim de escolher grupos de dados de interesse.

Para motivar o problema, comecemos com um exemplo.

**Exemplo 12.1:** Consideremos as medidas das variáveis altura ( $X_1$ , em cm), peso ( $X_2$ , em kg), idade ( $X_3$ , em anos) e sexo ( $X_4$ , M ou F) de 12 indivíduos, dispostas nas colunas 2, 3, 4 e 5 na Tabela 12.1.

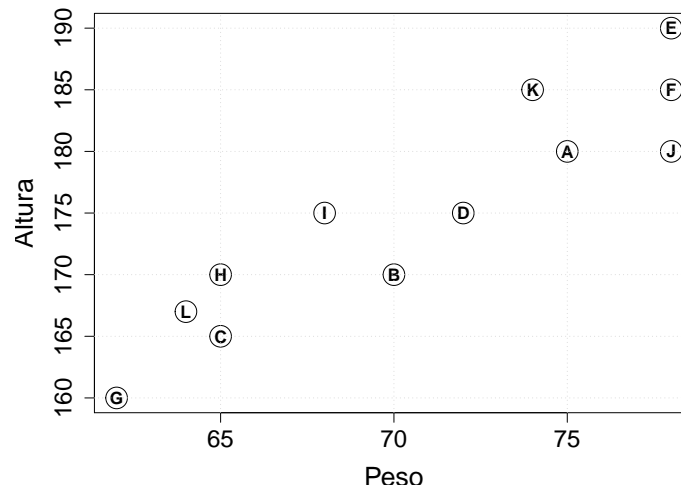
Nessa tabela, a média de cada variável é indicada por  $\mu$  e o desvio padrão por  $\sigma$ . Nas colunas 6, 7 e 8 dispomos os valores das variáveis padronizadas, ou seja, obtidas por meio da transformação

$$Z_i = (X_i - \mu_{X_i})/\sigma_i, \quad i = 1,2,3. \quad (12.1)$$

**Tabela 12.1:** Dados de 12 indivíduos

Indivíduo	Altura	Peso	Idade	Sexo	Altura Peso Idade		
					Padronizados		
A	180	75	30	M	0,53	0,72	0,38
B	170	70	28	F	-0,57	-0,13	-0,02
C	165	65	20	F	-1,12	-0,97	-1,61
D	175	72	25	M	-0,02	0,21	-0,61
E	190	78	28	M	1,63	1,23	-0,02
F	185	78	30	M	1,08	1,23	0,38
G	160	62	28	F	-1,67	-1,48	-0,02
H	170	65	19	F	-0,57	-0,97	-1,81
I	175	68	27	M	-0,02	-0,47	-0,22
J	180	78	35	M	0,53	1,23	1,38
K	185	74	35	M	1,08	0,55	1,38
L	167	64	32	F	-0,90	-1,14	0,78
$\mu$	175,17	70,75	28,08	–	0	0	0
$\sigma$	9,11	5,91	5,02	–	1	1	1

Para a variável  $X_4$  (sexo), esta padronização, é claro, não faz sentido. Na Figura 12.1 apresentamos um gráfico de dispersão de  $X_3$  versus  $X_2$ .

**Figura 12.1:** Gráfico de Altura *versus* Peso para os dados da Tabela 12.1.

Com a finalidade de agrupar pontos que estejam próximos, precisamos escolher uma distância. A distância euclidiana é bastante utilizada com esse propósito. Dados dois pontos num espaço de dimensão 2,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  e  $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ , a distância euclidiana entre eles é definida por

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

No caso geral de um espaço euclidiano  $p$ -dimensional, a distância é definida por

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_p - y_p)^2}.$$

Além da distância euclidiana, podemos usar outras distâncias, como

$$d_1 = |x_1 - y_1| + \dots + |x_p - y_p| : \text{distância } L_1 \text{ ou Manhattan,} \quad (12.2)$$

$$d_2 = \max_{1 \leq i \leq p} |x_i - y_i| : \text{distância } L_\infty. \quad (12.3)$$

Para espaços não euclidianos, há outras definições de distância, como a distância de Hamming, cosseno, Jaccard, edit etc. Detalhes são apresentados na Nota de Capítulo 1.

Escolhida uma distância, podemos construir a correspondente **matriz de similaridade**, que no caso de  $n$  unidades amostrais é uma matriz de dimensão  $n \times n$ ,  $\mathbf{D} = [d(i, j)]_{i, j=1}^n$ , simétrica, com os elementos da diagonal principal iguais a zero. É comum considerar uma matriz reduzida, de ordem  $(n-1) \times n$ , e sem os termos acima (ou abaixo) da diagonal principal para evitar os valores nulos da diagonal principal além dos valores redundantes. A Tabela 12.2 contém a matriz de similaridade para os dados da Tabela 12.1 obtida com a distância euclidiana.

**Tabela 12.2:** Matriz de similaridade, distância euclidiana

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
B	11,18										
C	18,03	7,07									
D	5,83	5,38	12,21								
E	10,44	21,54	28,18	16,16							
F	5,83	17,00	23,85	11,66	<b>5,00</b>						
G	23,85	12,81	5,83	18,03	34,00	29,68					
H	14,14	<b>5,00</b>	<b>5,00</b>	8,60	23,85	19,85	10,44				
I	8,60	5,39	10,44	4,00	18,03	14,14	16,16	5,83			
J	<b>3,00</b>	12,81	19,85	7,81	10,00	<b>5,00</b>	25,61	16,40	11,18		
K	<b>5,10</b>	15,52	21,93	10,20	6,40	<b>4,00</b>	27,73	17,49	11,66	6,40	
L	17,03	6,71	<b>2,24</b>	11,31	26,93	22,80	7,28	<b>3,16</b>	8,94	19,10	20,59

As distâncias salientadas em negrito na Tabela 12.2 em ordem crescente, nomeadamente,

$$\begin{aligned} d(C, L) &= 2,24 & d(B, H) &= 5,00 \\ d(A, J) &= 3,00 & d(C, H) &= 5,00 \\ d(H, L) &= 3,16 & d(E, F) &= 5,00 \\ d(D, I) &= 4,00 & d(F, J) &= 5,00 \\ d(F, K) &= 4,00 & d(A, K) &= 5,10. \end{aligned}$$

nos dão uma ideia de como agrupar os indivíduos.

## 12.2 Estratégias de agrupamento

Segundo [Hastie et al. \(2009\)](#), os algoritmos de agrupamento podem ser classificados como:

- a) **combinatórios**: trabalham diretamente com os dados, não havendo referência à sua distribuição;

- b) **baseados em modelos:** supõem que os dados constituem uma amostra aleatória simples de uma população cuja densidade de probabilidade é uma mistura de densidades componentes, cada qual descrevendo um grupo;
- c) **caçadores de corcovas** (*bump hunters*): estimam, de modo não paramétrico, as modas das densidades. As observações mais próximas a cada moda definem os grupos.

Os algoritmos combinatórios, por sua vez, podem ser classificados em dois sub-grupos:

- i) **Algoritmos hierárquicos:** que ainda podem ser subdivididos em **aglomerativos** e **divisivos**. No primeiro caso, o procedimento utilizado para o agrupamento inicia-se com a classificação de cada ponto em um grupo e em seguida, combinam-se os grupos com base em suas proximidades, usando alguma definição de proximidade (como uma distância). O processo termina quando um número pré-fixado de grupos é atingido ou quando por alguma razão (de cunho interpretativo) formam-se grupos indesejáveis. No segundo caso, todos os pontos são inicialmente considerados em um único grupo que é subdividido sucessivamente até que alguma regra de parada seja satisfeita. Neste texto, usaremos apenas o método aglomerativo.
- ii) **Algoritmos de partição ou obtidos por associação de pontos:** os grupos obtidos formam uma partição do conjunto de pontos original. Os pontos são considerados em alguma ordem e cada um deles é associado ao grupo ao qual ele melhor se ajusta. O método chamado de **K-médias** pertence a esse grupo de algoritmos.

Num espaço euclidiano munido de alguma distância entre pontos, os grupos podem ser caracterizados pelo seu **centróide** (média das coordenadas dos pontos). Para espaços não euclidianos precisamos outra maneira para caracterizar os grupos.

Em conjuntos de pontos muito grandes quase todos os pares de pontos têm distâncias muito parecidas entre si. Esse fato está relacionado com aquilo que se chama de **maldição da dimensionalidade** (*curse of dimensionality*).

Não existe um algoritmo que seja mais recomendado para todos os casos. A interpretação dos grupos resultantes deve ser levada em conta na escolha do algoritmo mais adequado a cada problema.

## 12.3 Algoritmos hierárquicos

Ilustraremos o funcionamento de um algoritmo hierárquico por meio de um exemplo.

**Exemplo 12.1 (continuação).** Consideremos as variáveis  $X_2$  (peso) e  $X_3$  (altura) representadas no diagrama de dispersão da Figura 12.1. Adotemos a distância euclidiana para avaliar a proximidade entre dois pontos no espaço euclidiano associado. Cada grupo a ser formado será representado pelo seu centróide e a regra de agrupamento consistirá em agregar os grupos para os quais a distância entre os respectivos centróides seja a menor possível. Os passos para a implementação do algoritmo são:

- i) Considerar cada ponto como um grupo de forma que seu centróide é definido pelas próprias coordenadas.
- ii) Consultar a Tabela 12.2 e agrupar  $C = (65, 165)$  e  $L = (64, 167)$  que são os pontos mais próximos com  $d(C, L) = \sqrt{5,00} = 2,24$ . Esses dois pontos formam o primeiro agrupamento,  $\mathcal{G}_1 = \{C, L\}$  com centróide definido por

$c(C,L) = (166, 64,5)$ . A distância entre esses pontos, 2,24, será chamada **nível do agrupamento ou de junção**.

- iii) Em seguida, recalcular as distâncias entre os novos grupos,  $A, B, CL, D, E, F, G, H, I, J, K$ . Apenas as distâncias de cada ponto (grupo) ao centróide do grupo  $\mathcal{G}_1 = \{C,L\}$  serão alteradas. Consultar novamente a Tabela 12.2, observando que a distância entre  $A = (75, 180)$  e  $J = (78, 180)$  é 3,00, indicando que esses pontos devem formar um novo grupo  $\mathcal{G}_2 = \{A,J\}$ , com centróide  $c(\mathcal{G}_2) = (76,5, 180)$  e nível de agrupamento 3,00.
- iv) Consultar novamente a Tabela 12.2, observar que a distância entre  $D = (72, 175)$  e  $I = (68, 175)$  é 4,00 e agregá-los no grupo  $\mathcal{G}_3 = \{D,I\}$ , com centróide  $c(\mathcal{G}_3) = (70, 175)$  e nível de agrupamento 4,00.
- v) Observar em seguida que os pontos mais próximos são  $F = (78, 185)$  e  $K = (74, 185)$ , com distância 4,00 e formar o grupo  $\mathcal{G}_4 = \{F,K\}$ , com centróide  $c(\mathcal{G}_4) = (76, 185)$  e nível de agrupamento 4,00.
- vi) Notar que a distância do ponto  $H = (65, 170)$  ao centróide do grupo  $\mathcal{G}_1$  é  $d(H, c(\mathcal{G}_1)) \approx 4,03$  e formar um novo grupo  $\mathcal{G}_5 = \{C,H,L\}$ , com centróide  $c(\mathcal{G}_5) = (64,7, 167,3)$  e nível de agrupamento 4,03.
- vii) A seguir, agrupar  $B = (70, 170)$  com  $\mathcal{G}_3 = \{D,I\}$ , notando que a distância entre  $B$  e o centróide desse grupo é 5,00, que é o nível de junção correspondente. O novo grupo é  $\mathcal{G}_6 = \{B,D,I\}$ , com centróide  $c(\mathcal{G}_6) = (70, 173,3)$ .
- viii) Agrupar agora,  $\mathcal{G}_2 = \{A,J\}$  e  $\mathcal{G}_4 = \{F,K\}$ , cuja distância entre centróides é 5,02, formando o grupo  $\mathcal{G}_7 = \{A,F,J,K\}$ , com centróide  $c(\mathcal{G}_7) = (76,25, 182,5)$  e nível de agrupamento 5,02.
- ix) Agregar o ponto  $G = (62,160)$  ao grupo  $\mathcal{G}_5 = \{C,H,L\}$ , obtendo o novo grupo  $\mathcal{G}_8 = \{C,G,H,L\}$ , com centróide  $c(\mathcal{G}_8) = (64, 165,5)$  e nível de agrupamento 7,31.
- x) Finalmente, agregar o ponto  $E = (78,190)$  ao grupo  $\mathcal{G}_7 = \{A,F,J,K\}$ , obtendo o grupo  $\mathcal{G}_9 = \{A,E,F,J,K\}$ , com centróide  $c(\mathcal{G}_9) = (76,6, 184)$  e nível de agrupamento 7,50.

Os agrupamentos formados pelo algoritmo estão representados na Figura 12.2. Podemos prosseguir, agrupando dois desses grupos (aqueles associados com a menor distância entre os respectivos centróides) e, finalmente, agregar os dois grupos restantes.

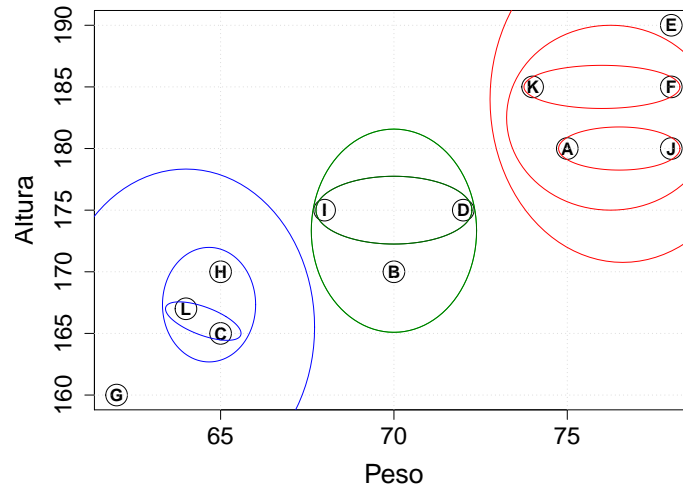


Figura 12.2: Agrupamentos obtidos para o Exemplo 12.1

Um gráfico chamado **dendrograma**) resume o procedimento e está representado na Figura 12.3. No eixo vertical da figura colocamos os níveis de agrupamento e no horizontal, os pontos de modo conveniente. Nessa figura, usamos a distância euclidiana.

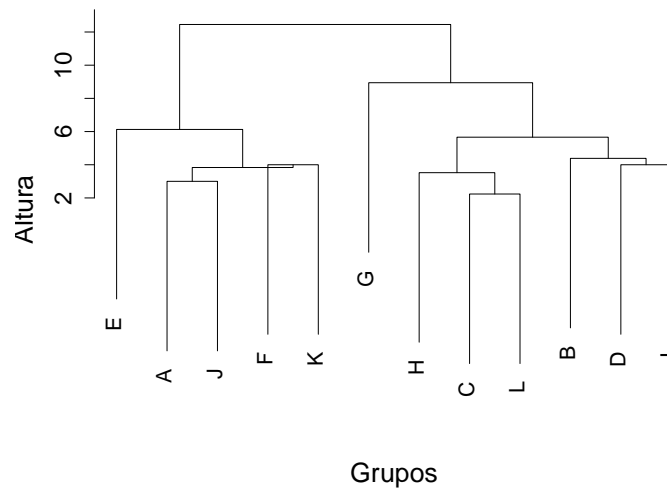


Figura 12.3: Dendrograma para o Exemplo 12.1

Na Tabela 12.3 temos um resumo do método hierárquico, usando distância Euclidiana e centróides, para agrupar os pontos do Exemplo 12.1.

**Tabela 12.3:** Resumo do procedimento de agrupamento para o Exemplo 12.1

Passo	Agrupamento	Nível
1	C, L	2,24
2	A, J	3,00
3	D, I	4,00
4	F, K	4,00
5	H, CL	4,03
6	B, DI	5,00
7	AJ, KF	5,02
8	G, CHL	7,31
9	E, AFJK	7,50

O primeiro dos três grupos representados na Figura 12.2 contém as pessoas menos pesadas e mais baixas (4 pessoas), o segundo contém pessoas com pesos e alturas intermediárias (3 pessoas) e o terceiro contém as pessoas mais pesadas e mais altas (5 pessoas). Se esse for objetivo, podemos parar aqui. Se o objetivo for obter dois grupos, um com pessoas mais baixas e menos pesadas e, outro, com pessoas mais altas e mais pesadas, continuamos o processo de agrupamento, obtendo os grupos  $\mathcal{G}_{10} = \{B, C, D, G, H, I, L\}$  e  $\mathcal{G}_9 = \{A, E, F, J, K\}$ .

Um dos objetivos da construção de grupos é **classificar** um novo indivíduo em algum dos grupos obtidos. O problema da classificação está intimamente ligado ao problema de Análise de Agrupamentos e já foi tratado em capítulos anteriores.

Um pacote que pode ser usado para agrupamento é o `cluster` para o qual é preciso especificar a distância (`euclidian`, `maximum`, `manhattan` etc.) a ser adotada e o método de agrupamento (`centroid`, `average`, `median` etc.). O pacote contém várias funções para mostrar em que grupo estão as unidades, obter o dendrograma etc. Os *scripts* para o Exemplo 12.1 estão na página do livro.

## 12.4 Algoritmos de partição: K-médias

O objetivo do algoritmo K-médias é agregar os pontos em  $K$  grupos, de tal modo que a soma dos quadrados das distâncias dos pontos aos centros dos agrupamentos (*clusters*) seja minimizada. É um método baseado em centróides e pertence à classe de algoritmos de partição e requer que o espaço seja euclidiano. Usualmente, o valor de  $K$  é conhecido e deve ser fornecido pelo usuário mas é possível obtê-lo por tentativa e erro.

O algoritmo mais comum nessa classe foi proposto por Hartigan e Wong (1979) é bastante usado como *default* em pacotes computacionais. Outros algoritmos são os de MacQueen (1967), Lloyd (1957) e Forgy (1965). A função `kmeans()` do pacote `cluster` pode ser utilizada para construir agrupamentos com base no algoritmo de Hartigan e Wong (1979).

A ideia que fundamenta o algoritmo consiste em definir grupos em que a variação interna seja minimizada. Em geral, essa variação interna corresponde à soma dos quadrados das distâncias euclidianas entre pontos de um grupo e o centróide correspondente,

$$W(\mathcal{G}_k) = \sum_{\mathbf{x}_i \in \mathcal{G}_k} \|\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_k\|^2, \quad (12.4)$$

em que  $\mathbf{x}_i$  é um ponto no grupo  $\mathcal{G}_k$  e  $\boldsymbol{\mu}_k$  é a centróide correspondente.

O algoritmo consiste nos seguintes passos:

- i) Especifique  $K$  e selecione  $K$  pontos que pareçam estar em diferentes grupos.
- ii) Considere esses pontos como os centróides iniciais desses grupos.
- iii) Associe cada ponto ao centróide mais próximo com base na distância euclidiana;
- iv) Para cada um dos  $K$  grupos, recalcule o centróide após a inclusão dos pontos.
- v) Minimizar, iterativamente, a soma de quadrados total dentro dos grupos, até que os centróides não mudem muito (o pacote `kmeans` usa 10 iterações como *default*).

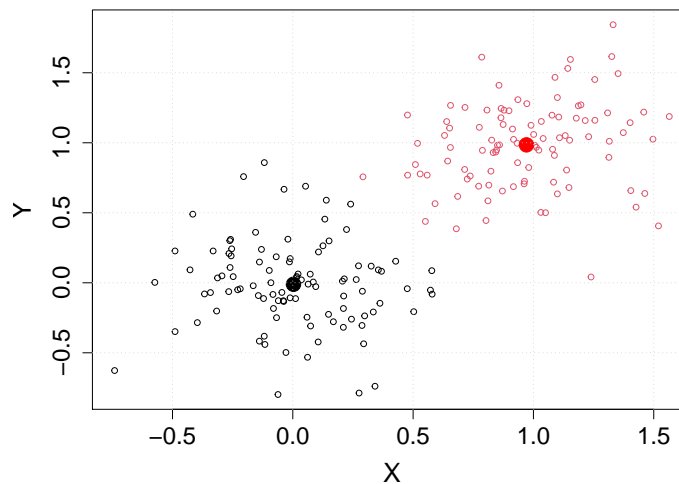
A soma total de quadrados dentro dos grupos é definida por

$$\sum_{j=1}^K W(\mathcal{G}_j) = \sum_{j=1}^K \sum_{x_i \in \mathcal{G}_j} \|\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_i\|^2. \quad (12.5)$$

Como o algoritmo K-médias é baseado na distância euclidiana, convém padronizar as variáveis quando estão expressas com diferentes unidades de medida, especialmente no caso em que uma ou mais variáveis têm valores muito diferentes. Por exemplo, para agrupar automóveis com base no preço (R\$) e na potência do motor (CV), o preço será a variável dominante no cálculo da distância euclidiana se não houver padronização.

Ilustremos a utilização do algoritmo por meio de um exemplo simulado.

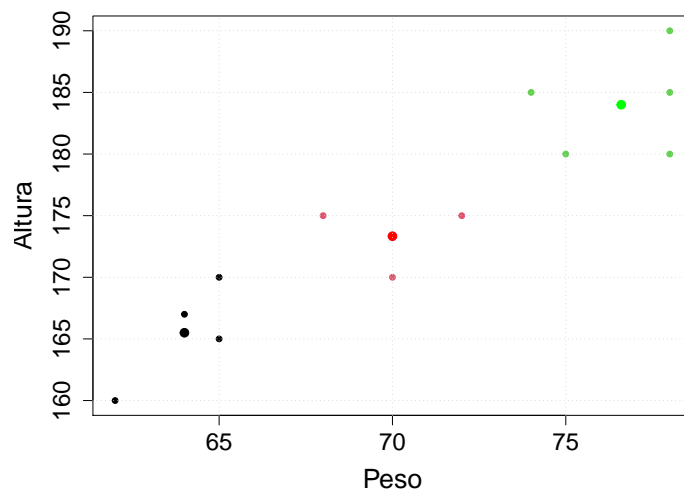
**Exemplo 12.2:** Consideremos 100 observações simuladas de duas variáveis com distribuições normais, com médias 0 e desvios padrões 0,3 e outras 100 de duas variáveis normais com médias 1 e com os mesmos desvios padrões 0,3. Na Figura 12.4 apresentamos os dois grupos com os respectivos centróides, resultantes da aplicação do algoritmo **K-médias** com  $K = 2$ .



**Figura 12.4:** Dados e centróides obtidos por meio do pacote `kmeans` para os dados simulados (Exemplo 12.2)



**Exemplo 12.3:** Consideremos as variáveis Peso e Altura da Tabela 12.1. Aproveitando o resultado do procedimento hierárquico usado na primeira análise, fixemos o número de grupos  $K = 3$ . O gráfico da Figura 12.5 corresponde ao resultado do agrupamento realizado por meio do algoritmo K-means obtido por meio da função `kmeans`. Nessa figura identificamos os três grupos (com tamanhos 3, 4 e 5) além dos respectivos centróides com diferentes cores. As coordenadas dos centróides, obtidas por meio da função são (63,67; 164,00), (68,75; 172,50) e (76,60; 184,00). As somas de quadrados dentro dos grupos são respectivamente, 30,67; 51,75; 85,20. A soma de quadrados total entre grupos é 87,10.



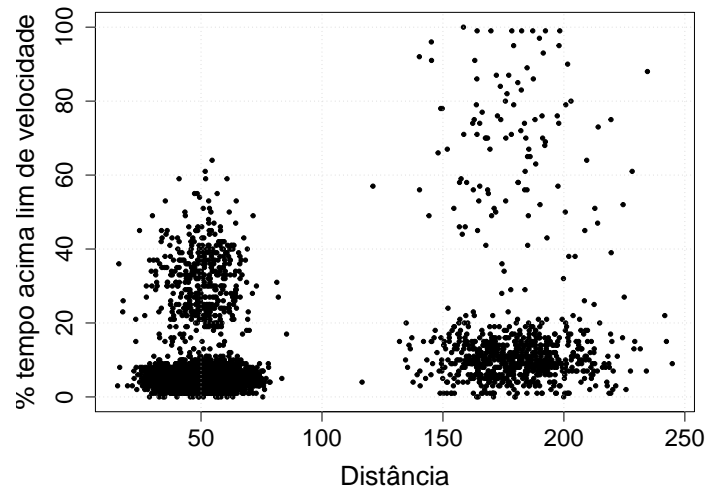
**Figura 12.5:** Dados e centróides dos três grupos obtidos por meio do pacote `kmeans` para o Exemplo 12.1

**Exemplo 12.4:** Consideremos os dados disponíveis em

[https://raw.githubusercontent.com/datascienceinc/learn-data-science/master/Introduction-to-K-means-Clustering/Data/data\\_1024.csv](https://raw.githubusercontent.com/datascienceinc/learn-data-science/master/Introduction-to-K-means-Clustering/Data/data_1024.csv).

correspondentes a um conjunto de 4.000 motoristas encarregados de fazer entregas de determinados produtos em setores urbano e rural. Dentre as variáveis existentes no arquivo de dados, selecionamos apenas duas, nomeadamente,  $X_1$ : distância média percorrida por cada motorista (em milhas) e  $X_2$ : porcentagem média do tempo em que o motorista esteve acima do limite de velocidade por mais de 5 milhas por hora. Uma análise detalhada dos dados pode ser obtida em Trevino (2016). Os dados e os *scripts* baseados em funções do pacote R estão na página do livro.

Na Figura 12.6 apresentamos um diagrama de dispersão referente às duas variáveis, no qual salientam-se claramente dois grupos: Grupo 1, contendo os motoristas que fazem entregas no setor urbano e Grupo 2, contendo motoristas que fazem entregas no setor rural.



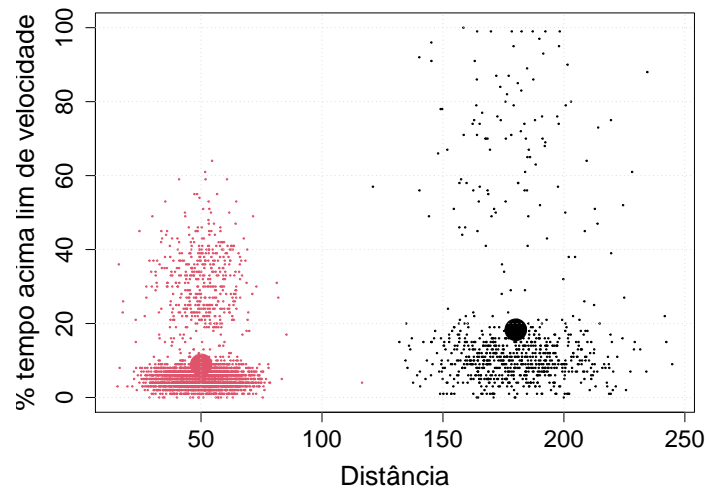
**Figura 12.6:** Gráfico de dispersão de  $X_1$  versus  $X_2$  para o Exemplo 12.4

O agrupamento obtido por meio do algoritmo K-médias com  $K = 2$  aplicado às variáveis padronizadas determina dois grupos cujos centróides, definidos em termos das variáveis originais são

Grupo 1: Centróide = (180,31, 18,31) [motoristas do setor rural]

Grupo 2: Centróide = (50,07, 8,83) [motoristas do setor urbano].

Os grupos estão claramente representados na Figura 12.7 e refletem a separação observada no gráfico de dispersão.



**Figura 12.7:** Grupos obtidos por meio do algoritmo K-médias com  $K=2$  para o Exemplo 12.4.

Uma utilização do mesmo algoritmo com  $K = 4$ , gera os seguintes 4 grupos, em que os motoristas também são separados de acordo com o respeito ao limite de velocidade além da divisão em zonas urbana ou rural:

Grupo 1: Centróide = (177,83, 70,29) [motoristas do setor rural, acima do limite

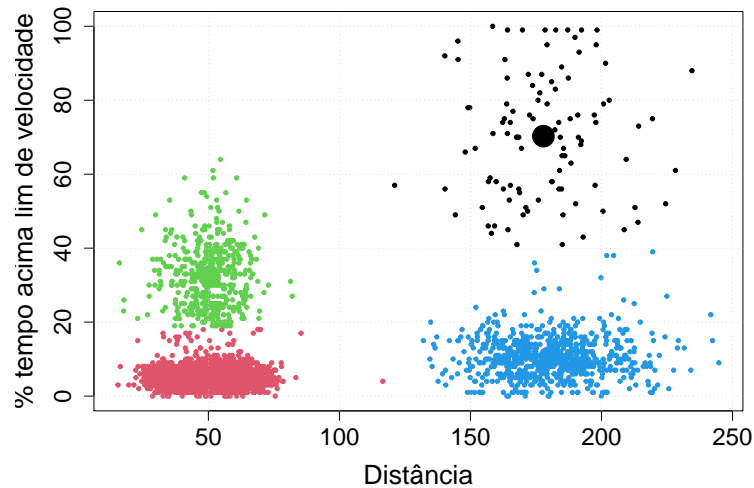
de velocidade]

Grupo 2: Centróide = (50,02,5,20) [motoristas do setor urbano, dentro do limite de velocidade]

Grupo 3: Centróide = (50,20,32,37) [motoristas do setor urbano, acima do limite de velocidade]

Grupo 4: Centróide = (180,43,10,53) [motoristas do setor rural, dentro do limite de velocidade]

O gráfico correspondente está disposto na Figura 12.8.



**Figura 12.8:** Grupos obtidos por meio do algoritmo K-médias com  $K=4$  para o Exemplo 12.4.

**Exemplo 12.5:** Dados sobre tráfego de veículos em uma cidade podem ser úteis para vários propósitos: identificar horas de tráfego intenso (*rush hours*), efeito de feriados, impacto do clima, entendimento sobre circulação nas várias regiões da cidade (áreas residenciais, de escolas, negócios, estradas etc.) e podem ajudar as agências responsáveis no planejamento. Detalhes sobre o tema podem ser obtidos de Jaiswal (2018). Nesse contexto, consideremos dados de viagens de motoristas do **Uber** na cidade de Nova Iorque (NYC), disponíveis no sítio

[www.kaggle.com/fivethirtyeight/uber-pickups-in-new-york-city/data](http://www.kaggle.com/fivethirtyeight/uber-pickups-in-new-york-city/data)

Esse conjunto de dados contém cerca de 4,5 milhões de viagens do Uber de abril a setembro de 2014, além de outros dados do Uber de 2015 e de outras companhias. NYC tem 5 distritos: Brooklyn, Queens, Manhattan, Bronx e Staten Island. Com finalidade didática, restringir-nos-emos aos dados de 2014, que têm informação detalhada sobre a localização do início das viagens com as seguintes colunas:

Date/Time: dia e hora do início da viagem;

Lat: a latitude da localidade correspondente;

Lon: a longitude da localidade;

Base: o código da base da companhia afiliada àquela corrida.

Alguns dados disponíveis no arquivo têm a seguinte estrutura:

```
head(apr14, n=10)
```

	Date.Time	Lat	Lon	Base	Year	Month	Day
1	2014-04-01 00:11:00	40.7690	-73.9549	B02512	2014	4	1
2	2014-04-01 00:17:00	40.7267	-74.0345	B02512	2014	4	1
3	2014-04-01 00:21:00	40.7316	-73.9873	B02512	2014	4	1
4	2014-04-01 00:28:00	40.7588	-73.9776	B02512	2014	4	1
5	2014-04-01 00:33:00	40.7594	-73.9722	B02512	2014	4	1
6	2014-04-01 00:33:00	40.7383	-74.0403	B02512	2014	4	1
7	2014-04-01 00:39:00	40.7223	-73.9887	B02512	2014	4	1
8	2014-04-01 00:45:00	40.7620	-73.9790	B02512	2014	4	1
9	2014-04-01 00:55:00	40.7524	-73.9960	B02512	2014	4	1
10	2014-04-01 01:01:00	40.7575	-73.9846	B02512	2014	4	1

Os rótulos dos arquivos disponíveis no sítio são da forma `uber-raw-data-month.csv`, em que **month** deve ser substituído por `apr14`, `aug14`, `jul14`, `jun14`, `may14`, `sept14`. Em nosso exemplo, vamos usar somente os dados de abril de 2014. Para ler os dados usamos o comando:

```
> read.csv("https://raw.githubusercontent.com/fivethirtyeight/uber-tlc-foil-response/master/uber-trip-data/uber-raw-data-apr14.csv")
```

Estatísticas descritivas para as variáveis do conjunto de dados podem ser obtidas com o comando `summary(apr14)`, gerando os seguintes resultados:

```
summary(apr14)
      Date.Time      Lat      Lon
4/7/2014 20:21:00 :   97  Min.   :40.07  Min.   : -74.77
4/7/2014 20:22:00 :   87  1st Qu.:40.72  1st Qu.: -74.00
4/30/2014 17:45:00 :   78  Median :40.74  Median : -73.98
4/30/2014 18:43:00 :   70  Mean   :40.74  Mean   : -73.98
4/30/2014 19:00:00 :   70  3rd Qu.:40.76  3rd Qu.: -73.97
4/30/2014 16:55:00 :   67  Max.   :42.12  Max.   : -72.07
(Other)           :564047
```

Por meio dos pacotes `kmeans` e `ggmap` obtemos a Figura 12.9. Detalhes dos *scripts* necessários, estão na página do livro.

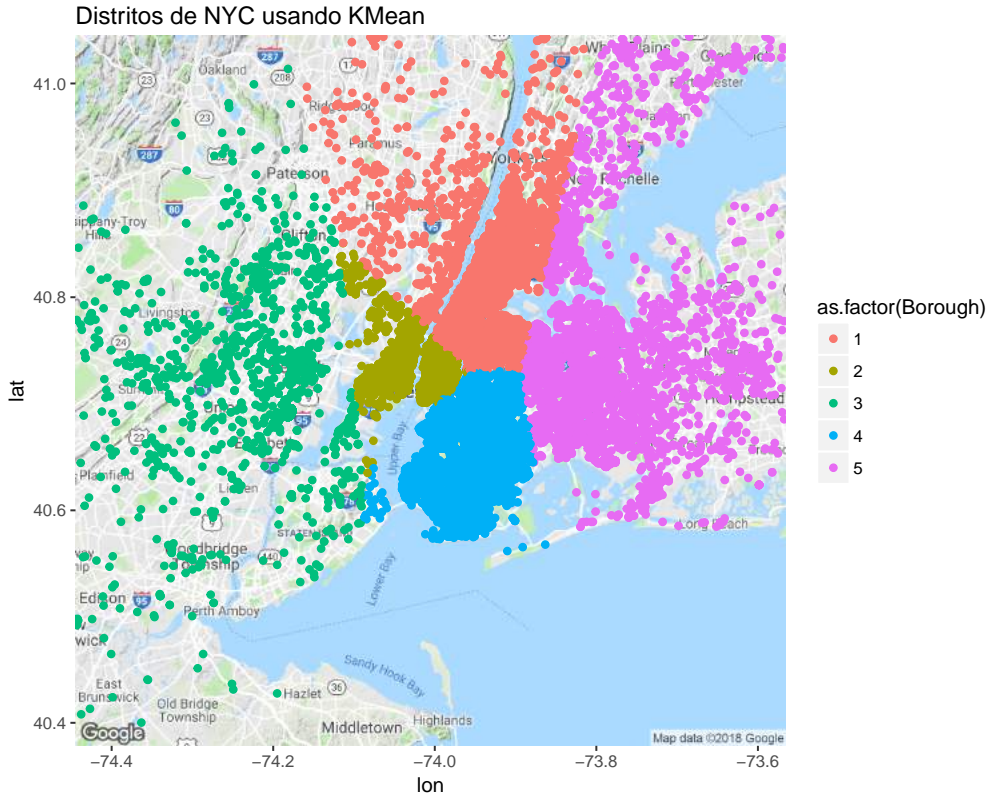


Figura 12.9: Grupos obtidos para o Exemplo 12.5

## 12.5 Notas de capítulo

### 1) Distâncias para espaços não euclidianos

Para espaços não euclidianos há outras formas de distância. No caso de seqüências (*strings*)  $x = x_1x_2 \cdots x_n$  e  $y = y_1y_2 \cdots y_n$ , uma distância conveniente é a distância *edit*, que corresponde ao número de inserções e exclusões de caracteres necessários para converter  $x$  em  $y$ . Consideremos, por exemplo, as seqüências  $x = abcd$  e  $y = acde$ . A distância *edit* entre essas seqüências é  $d_e(x,y) = 2$ , pois temos que excluir  $b$  e inserir  $e$  depois do  $d$  para concretizar a conversão. Uma outra maneira de obter essa distância é considerar a subsequência mais longa comum a  $x$  e  $y$ . No exemplo, é  $acd$ . A distância *edit* é dada  $d_e(x,y) = \ell(x) + \ell(y) - 2\ell(SML)$ , em que  $\ell$  indica o comprimento de cada seqüência e *SML* representa “subseqüência mais longa”. No exemplo,  $d_e(x,y) = 4 + 4 - 2 \times 3 = 2$ .

Outra distância que pode ser usada para a obtenção de agrupamentos é a **distância Hamming**, que corresponde ao número de posições em que dois vetores (de mesma dimensão) diferem. Por exemplo, se  $x = 110010$  e  $y = 100101$ , então a distância Hamming entre eles é  $d_H(x,y) = 4$ .

Um problema associado a agrupamentos em espaços não euclidianos é a representação de grupos, pois não podemos, por exemplo, calcular os centróides correspondentes. No exemplo acima, o problema seria como representar uma seqüência entre  $x$  e  $y$ ? Usando a distância *edit* poder-se-ia selecionar algo

parecido ao centróide (o **grupóide**) escolhendo-se a sequência que minimiza, por exemplo, a soma das distâncias dessa com as outras sequências do grupo previamente selecionado.

## 2) Classificação de algoritmos aglomerativos

Consideremos dois grupos quaisquer,  $A$  e  $B$ , obtidos por meio de algum algoritmo hierárquico e a distância entre eles,  $d(A,B)$ . Comumente usamos algoritmos aglomerativos que segundo Hastie et al.(2009), ainda podem ser classificados como:

- a) **Algoritmos com ligação simples** (*single linkage*), para os quais adota-se a distância mínima entre os pares, ou seja,

$$d_{SL}(A,B) = \min_{i \in A, j \in B} d(i,j). \quad (12.6)$$

Esse procedimento também é conhecido como algoritmo do **vizinho mais próximo**.

- b) **Algoritmos com ligação completa** (*complete linkage*), para os quais toma-se a máxima distância entre os pares:

$$d_{CL}(A,B) = \max_{i \in A, j \in B} d(i,j). \quad (12.7)$$

- c) **Algoritmos com ligação média** (*group average*), em que se adota a distância média entre os grupos:

$$d_{GA}(A,B) = \frac{1}{N_A N_B} \sum_{i \in A} \sum_{j \in B} d(i,j). \quad (12.8)$$

Aqui,  $N_A$  e  $N_B$  indicam os números de observações em cada grupo.

Ligações simples produzem grupos com **diâmetros** grandes e ligações completas produzem grupos com diâmetros pequenos; agrupamentos com ligação média representam um compromisso entre esses dois extremos (veja o Exercício 4).

## 3) Matriz cofenética

A matriz cofenética contém as distâncias entre os objetos obtidas a partir do dendrograma. Para os dados do Exemplo 12.1, a matriz cofenética pode ser obtida por meio dos comandos

```
options(digits=3)
dados1 <- dados[,-1]
distancia <- dist(dados1, method = "euclidean")
hclust_euclid <- hclust(distancia, method = 'centroid')
> cophenetic(hclust_euclid)
```

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	12.45										
3	12.45	5.66									
4	12.45	4.39	5.66								
5	6.13	12.45	12.45	12.45							
6	3.83	12.45	12.45	12.45	6.13						
7	12.45	8.94	8.94	8.94	12.45	12.45					
8	12.45	5.66	3.52	5.66	12.45	12.45	8.94				
9	12.45	4.39	5.66	4.00	12.45	12.45	8.94	5.66			
10	3.00	12.45	12.45	12.45	6.13	3.83	12.45	12.45	12.45		
11	3.83	12.45	12.45	12.45	6.13	4.00	12.45	12.45	12.45	3.83	
12	12.45	5.66	2.24	5.66	12.45	12.45	8.94	3.52	5.66	12.45	12.45

Por exemplo, a distância entre os pontos  $C$  e  $L$  no Exemplo 12.1 corresponde ao nível em que os dois foram agrupados, nesse caso, 2,24. Essa matriz pode ser comparada com a matriz de distâncias obtida dos dados,

```
> distancia <- dist(dados1, method = "euclidean")
      1      2      3      4      5      6      7      8      9      10     11
2  11.18
3  18.03  7.07
4   5.83  5.39 12.21
5  10.44 21.54 28.18 16.16
6   5.83 17.00 23.85 11.66  5.00
7  23.85 12.81  5.83 18.03 34.00 29.68
8  14.14  5.00  5.00  8.60 23.85 19.85 10.44
9   8.60  5.39 10.44  4.00 18.03 14.14 16.16  5.83
10  3.00 12.81 19.85  7.81 10.00  5.00 25.61 16.40 11.18
11  5.10 15.52 21.93 10.20  6.40  4.00 27.73 17.49 11.66  6.40
12 17.03  6.71  2.24 11.31 26.93 22.80  7.28  3.16  8.94 19.10 20.59
```

Note que as distâncias obtidas nas duas matrizes são diferentes a não ser nos casos em que cada grupo consiste de uma única unidade.

Uma medida da proximidade entre essas duas matrizes é o chamado **coeficiente de correlação cofenético**, que corresponde ao coeficiente de correlação entre os elementos de uma com os elementos da outra situados nas mesmas posições. Para o Exemplo 12.1, esse valor é 0,80 e pode ser considerado um valor adequado (veja o Exercício 6).

#### 4) Outros algoritmos

Embora concentramo-nos em exemplos com duas variáveis, é possível considerar casos com mais variáveis, desde que seu número seja menor que o número de unidades. Para mais que duas dimensões, alguns algoritmos foram propostos e são, basicamente, variantes de algoritmos hierárquicos e de  $K$ -médias. Entre eles, destacamos

- a) **Algoritmo BFR** [(Bradley, Fayyad e Reina, (1998)]. É uma variante do algoritmo  $K$ -médias para o caso de um espaço euclidiano de alta dimensão mas é baseado numa suposição muito forte: em cada dimensão, a forma dos agrupamentos deve seguir uma distribuição normal ao redor do respectivo centróide e além disso, as variáveis definidoras das dimensões devem ser independentes. Consequentemente, os grupos devem ter a forma de um elipsóide, com os eixos paralelos aos eixos associados à dimensão considerada, podendo eventualmente ser um círculo. Os eixos do elipsóide não podem ser oblíquos aos eixos associados à dimensão. Esse algoritmo não está contemplado no R.
- b) **Algoritmo CURE** (de *Clustering Using Representatives*). Usa procedimentos hierárquicos e os grupos podem ter quaisquer formas mas também não está disponível no R. No entanto, ele pode ser obtido no pacote `pyclustering`, que usa as linguagens Python e  $C_{++}$ .
- c) **Density-based algorithms** (DBSCAN): dado um conjunto de pontos em algum espaço, esse algoritmo agrupa pontos que estão dispostos em uma vizinhança com maior densidade, identificando os pontos que estão em regiões de baixa densidade como *outliers*. Para detalhes, consulte Ester et al. (1996).

## 12.6 Exercícios

- 1) Considere as variáveis Altura e Idade da Tabela 12.1 e obtenha os agrupamentos usando a distância euclidiana e o método do centróide. Construa o dendrograma correspondente.
- 2) Repita o exercício anterior com as variáveis Peso e Idade.
- 3) Repita os Exercícios 1 e 2 usando a distância  $L_1$  (ou Manhattan).
- 4) O **raio** de um grupo é a distância máxima entre os seus pontos e o centróide. O **diâmetro** de um grupo é a máxima distância entre quaisquer dois pontos do grupo. Encontre o raio e o diâmetro para os problemas correspondentes aos Exercícios 1 e 2.
- 5) Considere as sequências *abcd*, *acde*, *aecdb* e *ecadb*. Obtenha o grupóide desse grupo considerando a distância *edit* e como critério a soma das distâncias entre sequências.
- 6) Obtenha a matriz cofenética e o coeficiente de correlação cofenético para o Exemplo 12.1. Use os seguintes comandos do pacote `cluster`:

```
d<-dist(dados,method="euclidian")
hc<-hclust(d, method="centroid")
d.coph<- cophenetic(hc)
cor(dist(df), d.coph)
```

- 7) Considere o Exemplo 12.5 e obtenha os dados de todos os meses (abril a setembro) de 2014. Reproduza os cálculos do exemplo com esses dados. Consulte os *scripts* do capítulo.



# Redução de dimensionalidade

When the number of factors coming into play is too large, scientific methods in most cases fail.

A. Einstein

## 13.1 Introdução

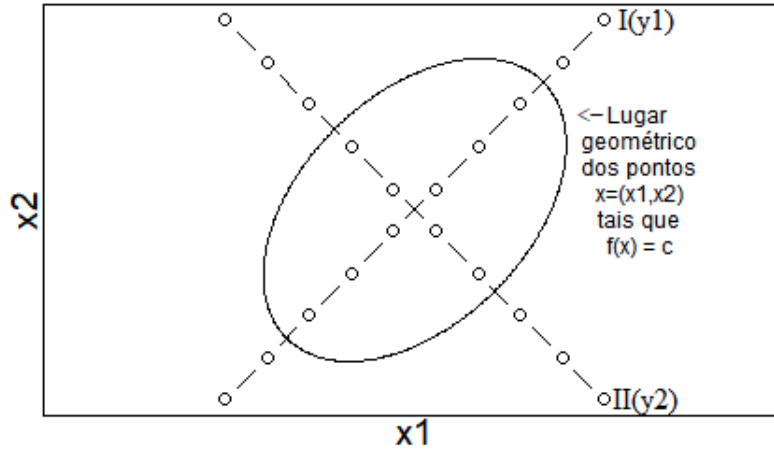
As técnicas de Análise de Componentes Principais, Análise de Fatorial e Análise de Componentes independentes têm como objetivo reduzir a dimensionalidade de observações multivariadas com base em sua estrutura de dependência. Essas técnicas são usualmente aplicadas a conjuntos de dados com um grande número de variáveis. A ideia que as permeia é a obtenção de poucos fatores, funções das variáveis observadas, que conservam, pelo menos aproximadamente, sua estrutura de covariância. Esses poucos fatores podem substituir as variáveis originais em análises subsequentes, servindo, por exemplo, como variáveis explicativas em modelos de regressão. Por esse motivo, a interpretação dessas novas variáveis (fatores) é muito importante.

## 13.2 Análise de Componentes Principais

A técnica de Componentes Principais fundamenta-se numa transformação ortogonal dos eixos de coordenadas de um sistema multivariado. A orientação dos novos eixos é determinada por meio da partição sequencial da variância total das observações em porções cada vez menores de modo que ao primeiro eixo transformado corresponda o maior componente da partição da variância, ao segundo eixo transformado, a parcela seguinte e assim por diante. Se os primeiros eixos forem tais que uma “grande” parcela da variância seja explicada por eles, poderemos desprezar os demais e trabalhar apenas com os primeiros em análises subsequentes.

Consideremos duas variáveis  $X_1$  e  $X_2$  com distribuição normal bivariada com vetor de médias  $\mu$  e matriz de covariâncias  $\Sigma$ . O gráfico correspondente aos pontos em que a função densidade de probabilidade é constante é uma elipse; um exemplo está apresentado na Figura 13.1.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Admitimos dados com distribuição normal apenas para finalidade didática. Em geral, essa suposição não é necessária.



**Figura 13.1:** Contorno de densidade constante de uma distribuição normal bivariada.

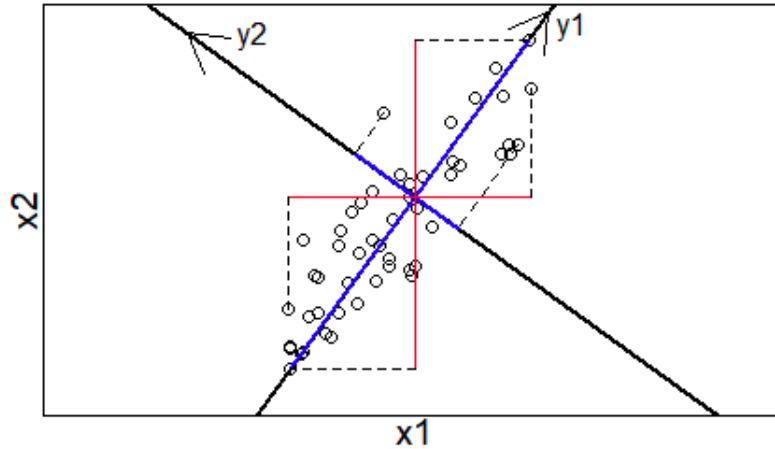
À medida em que a correlação entre  $X_1$  e  $X_2$  aumenta, o comprimento do diâmetro maior da elipse também aumenta e o do diâmetro menor diminui até que a elipse se degenera em um segmento de reta no caso limite em que as variáveis são perfeitamente correlacionadas, *i.e.*, em que o correspondente coeficiente de correlação linear é igual a 1. Na Figura 13.1, o eixo I corresponde à direção do diâmetro maior e o eixo II, à direção do diâmetro menor. O eixo I pode ser expresso por intermédio de uma combinação linear de  $X_1$  e  $X_2$ , ou seja

$$Y_1 = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2. \quad (13.1)$$

No caso extremo, em que  $X_1$  e  $X_2$  são perfeitamente correlacionadas, toda a variabilidade pode ser explicada por meio de  $Y_1$ . Quando a correlação entre  $X_1$  e  $X_2$  não é perfeita,  $Y_1$  explica apenas uma parcela de sua variabilidade. A outra parcela é explicada por meio de um segundo eixo, a saber

$$Y_2 = \gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2. \quad (13.2)$$

Na Figura 13.2 apresentamos um gráfico de dispersão correspondente a  $n$  observações  $(X_{1i}, X_{2i})$  do par  $(X_1, X_2)$ .



**Figura 13.2:** Gráfico de dispersão de  $n$  observações do par  $(X_1, X_2)$ .

A variabilidade no sistema de eixos correspondente a  $(X_1, X_2)$  pode ser expressa como

$$\sum_{i=1}^n (X_{1i} - \bar{X}_1)^2 + \sum_{i=1}^n (X_{2i} - \bar{X}_2)^2,$$

em que  $\bar{X}_1$  e  $\bar{X}_2$  são, respectivamente, as médias dos  $n$  valores de  $X_{1i}$  e  $X_{2i}$ . No sistema de eixos correspondente a  $(Y_1, Y_2)$ , a variabilidade é expressa como

$$\sum_{i=1}^n (Y_{1i} - \bar{Y}_1)^2 + \sum_{i=1}^n (Y_{2i} - \bar{Y}_2)^2,$$

em que  $\bar{Y}_1$  e  $\bar{Y}_2$  têm interpretações similares a  $\bar{X}_1$  e  $\bar{X}_2$ . Se a correlação entre  $X_1$  e  $X_2$  for “grande”, é possível obter valores de  $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$  de tal forma que  $Y_1$  e  $Y_2$  em (13.1) e (13.2) sejam tais que

$$\sum_{i=1}^n (Y_{1i} - \bar{Y}_1)^2 \gg \sum_{i=1}^n (Y_{2i} - \bar{Y}_2)^2.$$

Nesse caso, podemos utilizar apenas  $Y_1$  como variável para explicar a variabilidade de  $X_1$  e  $X_2$ .

Para descrever o processo de obtenção das componentes principais, consideremos o caso geral em que  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  corresponde a uma amostra aleatória de uma variável  $\mathbf{x} = (X_1, \dots, X_p)^\top$  com  $p$  componentes e para a qual o vetor de médias é  $\boldsymbol{\mu}$  e a matriz de covariâncias é  $\boldsymbol{\Sigma}$ . Sejam  $\bar{\mathbf{x}} = n^{-1} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i$  e  $\mathbf{S} = (n-1)^{-1} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^\top$ , respectivamente o correspondente vetor de médias amostrais e a matriz de covariâncias amostral. A técnica consiste em procurar sequencialmente  $p$  combinações lineares (denominadas componentes principais) de  $X_1, \dots, X_p$  tais que à primeira corresponda a maior parcela de sua variabilidade, à segunda, a segunda maior parcela e assim por diante e que, além disso, sejam não correlacionadas entre si. A primeira componente principal é a combinação linear

$$Y_1 = \boldsymbol{\beta}_1^\top \mathbf{x} = \beta_{11}X_1 + \dots + \beta_{1p}X_p$$

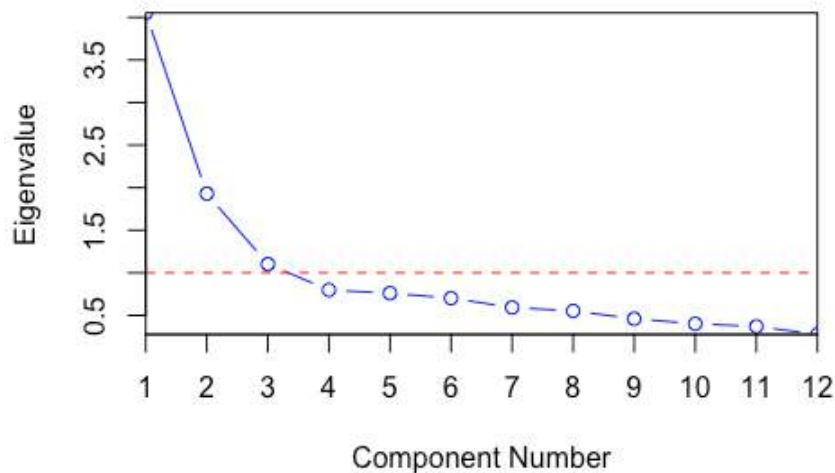
com  $\beta_1 = (\beta_{11}, \dots, \beta_{1p})^\top$ , para a qual a variância  $\text{Var}(Y_1) = \beta_1^\top \Sigma \beta_1$  é máxima. Uma estimativa da primeira componente principal calculada com base na amostra é a combinação linear  $\hat{Y}_1 = \hat{\beta}_1^\top \mathbf{x}$  para a qual  $\text{Var}(\hat{Y}_1) = \hat{\beta}_1^\top \hat{\mathbf{S}} \hat{\beta}_1$  é máxima. Este problema não tem solução sem uma restrição adicional, pois se tomarmos  $\hat{\beta}_1^* = c \hat{\beta}_1$  com  $c$  denotando uma constante arbitrária, podemos tornar a variância  $\text{Var}(Y_1) = \text{Var}(\hat{\beta}_1^* \mathbf{x})$  arbitrariamente grande, tomando  $c$  arbitrariamente grande. A restrição adicional mais usada consiste em padronizar  $\beta_1$  por meio de  $\beta_1^\top \beta_1 = 1$ . Conseqüentemente, o problema de determinação da primeira componente principal se resume a obter  $\hat{\beta}_1$  tal que a forma quadrática

$$\beta_1^\top \Sigma \beta_1$$

seja maximizada sob a restrição  $\beta_1^\top \beta_1 = 1$ . A solução desse problema pode ser encontrada por meio da aplicação de **multiplicadores de Lagrange**. Dada a primeira componente principal, obtém-se a segunda,  $\hat{\beta}_2$ , por meio da maximização de  $\beta_2^\top \Sigma \beta_2$  sob a restrição  $\beta_2^\top \beta_2 = 1$  e  $\beta_1^\top \beta_2 = 0$  (para garantir a ortogonalidade). Note que a ortogonalidade das componentes principais implica que a soma de suas variâncias seja igual à variância total do conjunto das variáveis originais. Esse procedimento é repetido até a determinação da  $p$ -ésima componente principal. Para detalhes, ver a Nota de Capítulo 1.

As componentes principais estimadas são os autovetores  $\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_p$  da matriz  $\mathbf{S}$  e suas variâncias são os autovalores  $\hat{\lambda}_1 \geq \hat{\lambda}_2 \geq \dots \geq \hat{\lambda}_p$  correspondentes. Como a variância total do sistema é  $\text{tr}(\mathbf{S}) = \sum_{i=1}^p \hat{\lambda}_i$ , a contribuição da  $i$ -ésima componente principal é  $\hat{\lambda}_i / \text{tr}(\mathbf{S})$ . Lembrando que  $\mathbf{S} = \sum_{i=1}^p \hat{\lambda}_i \hat{\beta}_i \hat{\beta}_i^\top$  podemos verificar quão bem ela pode ser aproximada com um menor número de componentes principais. Detalhes podem ser obtidos na Nota de Capítulo 2.

Na prática, a determinação do número de componentes principais a reter como novo conjunto de variáveis para futuras análises pode ser realizada por meio do **gráfico do cotovelo** (*elbow plot*), também conhecido como **gráfico da escarpa sedimentar** (*scree plot*), que consiste num gráfico cartesiano com os autovalores no eixo vertical e os índices correspondentes às suas magnitudes (em ordem decrescente) no eixo das abscissas. Um exemplo está apresentado na Figura 13.3.



**Figura 13.3:** Exemplo de gráfico da escarpa sedimentar (ou do cotovelo).

A ideia é acrescentar componentes principais até que sua contribuição para a explicação da variância do sistema não seja “relevante”. Com base na Figura 13.3, apenas as duas primeiras componentes principais poderiam ser suficientes, pois a contribuição das seguintes é apenas marginal. Para outras alternativas gráficas ou não, veja a Nota de Capítulo 4.

Suponhamos que  $r$  componentes principais,  $Y_1, \dots, Y_r$  explicam uma parcela “substancial” da variabilidade do sistema multivariado. Então para a  $k$ -ésima unidade amostral, podemos substituir os valores das variáveis originais, nomeadamente,  $\mathbf{x}_k = (x_{1k}, \dots, x_{pk})^\top$ , pelos correspondentes **escores** associados às componentes principais,  $\hat{y}_{1k}, \dots, \hat{y}_{rk}$  com  $\hat{y}_{ik} = \hat{\beta}_i^\top \mathbf{x}_k$ .

Infelizmente, nem a matriz de covariâncias nem os correspondentes autovalores são invariantes relativamente a mudanças de escala. Em outras palavras, mudanças nas unidades de medida das variáveis  $X_1, \dots, X_p$  podem acarretar mudanças na forma e na posição dos elipsoides correspondentes a pontos em que a função densidade é constante. É difícil interpretar combinações lineares de variáveis com unidades de medida diferentes e uma possível solução é padronizá-las por meio de transformações do tipo  $Z_{ij} = (X_{ij} - \bar{X}_i)/S_i$  em que  $\bar{X}_i$  e  $S_i$  representam, respectivamente a média e o desvio padrão de  $X_i$  antes da obtenção das componentes principais. A utilização da matriz de correlações  $\mathbf{R}$  obtida por meio dessa transformação pode ser utilizada na determinação das componentes principais; no entanto, os resultados são, em geral, diferentes e não é possível passar de uma solução a outra por meio de uma mudança de escala dos coeficientes. Se as variáveis de interesse forem medidas com as mesmas unidades, é preferível extrair as componentes principais utilizando a matriz de covariâncias  $\mathbf{S}$ .

Lembrando que a  $i$ -ésima componente principal é  $Y_i = \beta_{i1}X_1 + \dots + \beta_{ip}X_p$ , se as variáveis  $X_1, \dots, X_p$  tiverem variâncias similares ou forem variáveis padronizadas, os coeficientes  $\beta_{ij}$  indicam a importância e a direção da  $j$ -ésima variável relativamente à  $i$ -ésima componente principal. Nos casos em que as variâncias das variáveis originais são diferentes, convém avaliar sua importância relativa na definição das componentes principais por meio dos correspondentes coeficientes de correlação. O vetor de covariâncias entre as variáveis originais e a  $i$ -ésima componente principal é

$$\text{Cov}(\mathbf{I}_p \mathbf{X}, \beta_i \mathbf{X}) = \mathbf{I}_p \Sigma \beta_i = \Sigma \beta_i = \lambda_i \beta_i$$

pois  $(\Sigma - \lambda_i \mathbf{I}_p) \beta_i = \mathbf{0}$  (ver Nota de Capítulo 1). Uma estimativa desse vetor de covariâncias é  $\hat{\lambda}_i \hat{\beta}_i$ . Consequentemente, uma estimativa do coeficiente de correlação entre a  $j$ -ésima variável original e a  $i$ -ésima componente principal é

$$\widehat{\text{Corr}}(X_j, \beta_{ij}) = \frac{\hat{\lambda}_i \hat{\beta}_{ij}}{\sqrt{\hat{\lambda}_i} S_j} = \frac{\sqrt{\hat{\lambda}_i} \hat{\beta}_{ij}}{S_j}$$

em que  $S_j$  é o desvio padrão de  $X_j$ .

As componentes principais podem ser encaradas como um conjunto de variáveis latentes (ou fatores) não correlacionados que servem para descrever o sistema multivariado original sem as dificuldades relacionadas com sua estrutura de correlação. Os coeficientes associados a cada componente principal servem para descrevê-las em termos das variáveis originais. A comparação entre elementos do conjunto de dados realizada por meio da componente principal  $Y_i$  é independente da comparação baseada na componente  $Y_j$ . No entanto, essa comparação pode ser ilusória se essas componentes principais não tiverem uma interpretação simples. Como, em geral, isso não é a regra, costuma-se utilizar essa técnica como um passo intermediário

para a obtenção de um dos possíveis conjuntos de combinações lineares ortogonais das variáveis originais passíveis de interpretação como variáveis latentes. Esses conjuntos estão relacionados entre si por meio de rotações rígidas (transformações ortogonais) e são equivalentes em termos da aproximação das correlações entre as variáveis originais. Apesar de essas rotações rígidas implicarem uma perda da característica de ordenação das componentes principais em termos de porcentagem de explicação da variabilidade do sistema multivariado, muitas vezes produzem ganhos interpretativos. Os métodos mais utilizados para essas rotações são discutidos na Seção 13.3.

Há muitas opções computacionais para a análise de componentes principais no sistema R, dentre as quais destacamos as funções `prcomp()` e `princomp()`, do pacote `stats` e `pca` do pacote `FactoMineR`. Como há vários métodos tanto para a extração quanto para a rotação das componentes principais, nem sempre os resultados coincidem. A análise deve ser realizada por tentativa e erro tendo como objetivo um sistema com interpretação adequada.

**Exemplo 13.1:** Num estudo em que se pretendia avaliar o efeito de variáveis climáticas na ocorrência de suicídios por enforcamento na cidade de São Paulo foram observadas  $X_1$  = temperatura máxima,  $X_2$  = temperatura mínima,  $X_3$  = temperatura média,  $X_4$  = precipitação e  $X_5$  = nebulosidade diárias para o período de 01/08/2006 e 31/07/2006. Os dados estão disponíveis em no arquivo `suicidios`,

Para reduzir o número de variáveis a serem utilizadas como variáveis explicativas numa regressão logística tendo como variável resposta a ocorrência de suicídios por enforcamento nesse período consideramos uma análise de componentes principais. Há diferentes pacotes para a implementação da análise de componentes principais, dentre os quais citamos `prcomp`, `princomp` e `nFactors`, que adotamos na análise.

Inicialmente, obtivemos a matriz de correlações dos dados por meio do comando

```
R <- cor(suicidios1, method = "pearson")
      tempmax tempmin tempmed precip nebul
tempmax  1.000   0.71   0.922 -0.024 -0.33
tempmin  0.712   1.00   0.896  0.194  0.16
tempmed  0.922   0.90   1.000  0.089 -0.15
precip   -0.024  0.19   0.089  1.000  0.29
nebul    -0.332  0.16  -0.149  0.288  1.00
```

As componentes principais obtidas dessa matriz de correlações e o gráfico do cotovelo apresentado na Figura 13.4 podem ser obtidas por meio dos comandos

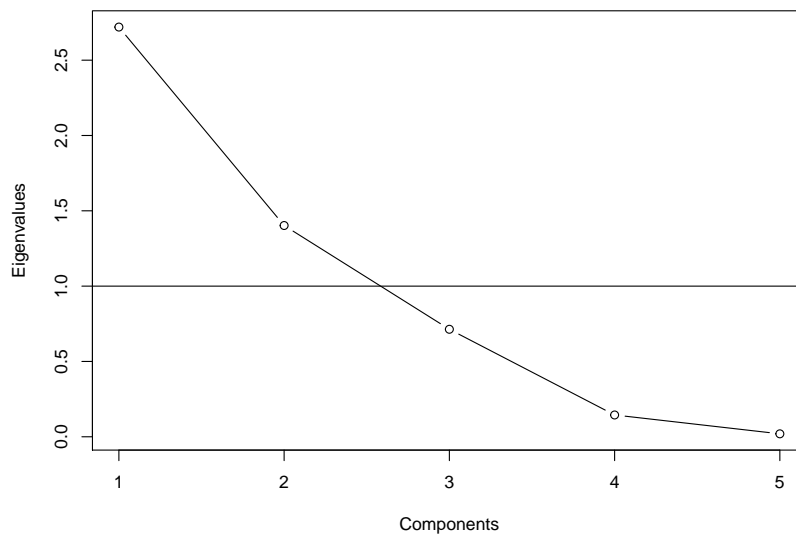
```
pca <- principalComponents(R)
plotuScree(R)
abline(h=1)
```

Os coeficientes das cinco componentes bem como as porcentagens da variância total do sistema explicada por cada uma delas (além da porcentagem acumulada correspondente) estão indicados na Tabela 13.1.

**Tabela 13.1:** Coeficientes das componentes principais e porcentagens da variância explicada: Exemplo 13.1

Variável	Componentes principais				
	CP1	CP2	CP3	CP4	CP5
Temperatura máxima	-0,94	-0,22	-0,05	-0,26	0,06
Temperatura mínima	-0,90	0,29	0,19	0,24	0,06
Temperatura média	-0,99	-0,002	0,03	0,001	-0,11
Precipitação	-0,11	0,75	-0,65	-0,02	0,002
Nebulosidade	0,17	0,84	0,50	0,14	-0,007
% Variância	54,4	28,1	14,3	2,9	0,4
% Acumulada	54,4	82,5	96,8	99,7	100,0

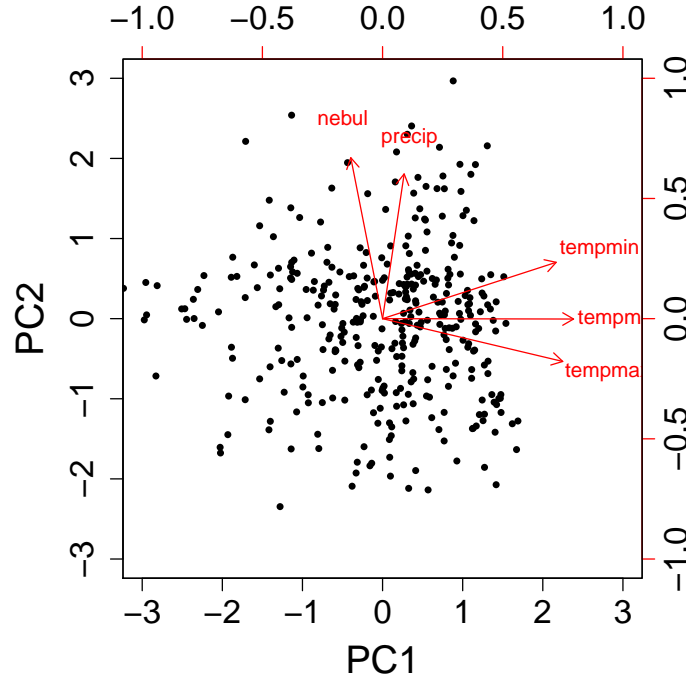
Uma análise do gráfico da escarpa sedimentar representado na Figura 13.4, conjuntamente com um exame da variância acumulada na Tabela 13.1 sugere que apenas duas componentes principais podem ser empregadas como resumo, retendo 82,5% da variância total. A primeira componente principal pode ser interpretada como “percepção térmica” e segunda, como “percepção de acinzentamento”. Valores dessas novas variáveis para cada unidade amostral são calculadas como  $CP_1 = -0,94*tempmax - 0,90*tempmin - 0,99*tempmed - 0,11*precip + 0,17*nebul$  e  $CP_2 = -0,22*tempmax + 0,29*tempmin - 0,99 - 0,002tempmed + 0,75*precip + 0,84 * nebul$ , com as variáveis originais devidamente padronizadas.

**Figura 13.4:** Gráfico do cotovelo para os dados do Exemplo 13.1.

O gráfico *biplot*, conveniente para representar a relação entre as duas componentes principais e as variáveis originais é obtido por meio dos comandos

```
pca1 <- principal(suicidios1, nfactor=2, rotate="none")
pca1
biplot(pca1, main="", cex.axis=1.6, cex.lab=1.8, cex=1.6)
```

e está disposto na Figura 13.5.



**Figura 13.5:** Gráfico *biplot* para os dados do Exemplo 13.1.

Nesse gráfico, pode-se notar uma concentração das variáveis referentes à temperatura na direção da componente principal PC1 e uma concentração das variáveis referentes ao aspecto visual do céu na direção da componente principal PC2.

### 13.3 Análise fatorial

Primeiramente observemos que para explicar as relações entre  $p$  variáveis são necessárias  $p$  componentes principais; por esse motivo, o modelo adotado pode não ser o ideal. O fato de as componentes principais não serem correlacionadas e ordenadas com variâncias decrescentes e o fato de que a técnica corresponde a uma fatoração da matriz de covariâncias das variáveis originais fazem com que a aproximação obtida quando consideramos apenas as primeiras componentes principais seja razoável. No entanto, essa técnica pode introduzir um erro sistemático na reprodução das correlações originais, pois podem existir uma ou mais dessas variáveis que sejam muito mais correlacionadas com as componentes principais desprezadas do que com aquelas retidas na análise.

Outra observação importante, é que a análise de componentes principais utiliza toda a informação sobre cada uma das variáveis originais, embora seja razoável imaginar que uma parcela de sua variabilidade seja específica, nada tendo a ver com as demais variáveis do conjunto sob investigação. Além disso, pode-se suspeitar que os “verdadeiros fatores” responsáveis pela geração das observações tenham todos a mesma importância ou que sejam correlacionados entre si.

Alguns desses problemas podem ser solucionados por meio da técnica de Análise Fatorial. A ideia que a fundamenta está baseada na partição da variância de cada variável do sistema multivariado em dois termos: um correspondente a uma **variância comum** (a todas as variáveis) e outro, correspondente a uma **variância específica** para cada variável. Além disso, supõe-se que as correlações entre as



$p$  variáveis são geradas por um número  $m < p$  de **variáveis latentes** conhecidas como **fatores**.

A vantagem dessa técnica relativamente àquela de componentes principais está na habilidade de reprodução da estrutura de correlações originais por meio de um pequeno número de fatores sem os erros sistemáticos que podem ocorrer quando simplesmente desprezamos algumas componentes principais.

As desvantagens da Análise Fatorial estão na determinação do número de fatores e na maior dificuldade de cálculo dos **escores fatoriais** que são os valores dessas variáveis latentes associadas a cada unidade e na existência de múltiplas soluções. Na realidade a estrutura de correlação das variáveis originais pode ser igualmente reproduzida por qualquer outro conjunto de variáveis latentes de mesma dimensão. A não ser que se imponham restrições adicionais, infinitas soluções equivalentes sempre existirão.

Consideremos uma variável vetorial  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)^\top$  com média  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_p)^\top$  e matriz de covariâncias  $\boldsymbol{\Sigma}$  (com elementos  $\sigma_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, p$ ). O modelo utilizado para Análise Fatorial de dados provenientes da observação das  $p$  variáveis,  $x_1, \dots, x_p$ , é

$$x_i - \mu_i = \lambda_{i1}F_1 + \dots + \lambda_{im}F_m + e_i = \sum_{j=1}^m \lambda_{ij}F_j + e_i, \quad i = 1, \dots, p, \quad (13.3)$$

em que  $m < p$ ,  $F_j$  é o  $j$ -ésimo **fator comum** a todas as variáveis,  $\lambda_{ij}$  é o parâmetro (chamado de **carga fatorial**) que indica a importância desse fator na composição da  $i$ -ésima variável e  $e_i$  é um **fator específico** para essa variável. Em notação matricial, o modelo pode ser escrito como

$$\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{f} + \mathbf{e} \quad (13.4)$$

em que  $\boldsymbol{\Lambda}$  é a matriz com dimensão  $p \times m$  de cargas fatoriais,  $\mathbf{f} = (F_1, \dots, F_m)^\top$  é o vetor cujos elementos são os fatores comuns e  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_p)^\top$  é um vetor cujos elementos são os fatores específicos. Adicionalmente, supomos que  $E(\mathbf{f}) = \mathbf{0}$ ,  $\text{Cov}(\mathbf{f}) = \mathbf{I}_m$ ,  $E(\mathbf{e}) = \mathbf{0}$ ,  $\text{Cov}(\mathbf{e}) = \boldsymbol{\psi} = \text{diag}(\psi_1, \dots, \psi_p)$  e que  $\text{Cov}(\mathbf{f}, \mathbf{e}) = \mathbf{0}$ . Os elementos não nulos de  $\boldsymbol{\psi}$  são as **variâncias específicas**.

Para avaliar a relação entre a estrutura de covariâncias de  $\mathbf{x}$  e os fatores, observemos que

$$\begin{aligned} \text{Cov}(x_i, x_k) &= \text{Cov}\left(\sum_{j=1}^m \lambda_{ij}F_j + e_i, \sum_{\ell=1}^m \lambda_{k\ell}F_\ell + e_k\right) \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{\ell=1}^m \lambda_{ij}\lambda_{k\ell}E(F_jF_\ell) + E(e_i e_k) \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{\ell=1}^m \lambda_{ij}\lambda_{k\ell} + E(e_i e_k). \end{aligned} \quad (13.5)$$

Consequentemente,  $\text{Cov}(x_i, x_k) = \sigma_{ik} = \sum_{j=1}^m \lambda_{ij}\lambda_{kj}$  se  $i \neq k$  e  $\text{Cov}(x_i, x_i) = \sigma_{ii} = \sum_{j=1}^m \lambda_{ij}^2 + \psi_i$ . O termo  $\sum_{j=1}^m \lambda_{ij}^2$  é conhecido por **comunalidade** da  $i$ -ésima variável. Em notação matricial, podemos escrever

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}^\top + \boldsymbol{\psi} \quad (13.6)$$

e o objetivo é estimar os elementos de  $\boldsymbol{\Lambda}$  e  $\boldsymbol{\psi}$ .

Em Análise de Componentes Principais, consideramos o modelo linear  $\mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{x}$  em que  $\mathbf{y}$  é o vetor cujos elementos são as componentes principais e  $\mathbf{B} = (\boldsymbol{\beta}_1^\top, \dots, \boldsymbol{\beta}_p^\top)^\top$  é a matriz cuja  $i$ -ésima linha contém os coeficientes da  $i$ -ésima componente principal. Nesse caso a matriz de covariâncias de  $\mathbf{x}$  é fatorada como

$$\boldsymbol{\Sigma} = \sum_{i=1}^p \lambda_i \boldsymbol{\beta}_i \boldsymbol{\beta}_i^\top = \boldsymbol{\Lambda}^* \boldsymbol{\Lambda}^{*\top},$$

em que  $\boldsymbol{\Lambda}^* = (\sqrt{\lambda_1} \boldsymbol{\beta}_1, \dots, \sqrt{\lambda_p} \boldsymbol{\beta}_p)^\top$ . Em Análise Fatorial, a matriz de covariâncias de  $\mathbf{x}$  é fatorada como em (13.6), com  $\boldsymbol{\Lambda} = (\sqrt{\lambda_1} \boldsymbol{\beta}_1, \dots, \sqrt{\lambda_m} \boldsymbol{\beta}_m)^\top$ , ou seja com  $\boldsymbol{\Lambda}$  contendo menos termos ( $m < p$ ) do que  $\boldsymbol{\Lambda}^*$ ; a diferença é remetida para a matriz  $\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Sigma} - \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\Lambda}^\top$ , que é aproximada por  $\boldsymbol{\psi} = \text{diag}(\boldsymbol{\Psi})$  no modelo.

Além disso, enquanto a fatoração de  $\boldsymbol{\Sigma}$  é única em Análise de Componentes Principais, ela não o é em Análise Fatorial, pois se  $\mathbf{T}$  for uma matriz ortogonal (*i.e.*,  $\mathbf{T}\mathbf{T}^\top = \mathbf{I}_m$ ), obteremos

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\Lambda}^\top + \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{T} \mathbf{T}^\top \boldsymbol{\Lambda}^\top + \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{T} (\boldsymbol{\Lambda} \mathbf{T})^\top + \boldsymbol{\psi}$$

e embora as cargas fatoriais  $\boldsymbol{\Lambda} \mathbf{T}$  sejam diferentes das cargas fatoriais  $\boldsymbol{\Lambda}$ , a habilidade de reproduzir a matriz de covariâncias  $\boldsymbol{\Sigma}$  não se altera. Escolhendo matrizes ortogonais diferentes, podemos determinar cargas fatoriais diferentes. A escolha de uma transformação conveniente será discutida posteriormente.

Uma análise fatorial consiste dos seguintes passos:

- a) Estimacão dos parâmetros do modelo ( $\lambda_{ij}$  e  $\psi_i$ ) a partir de um conjunto de observaes das variáveis  $X_1, \dots, X_p$ .
- b) Interpretao dos fatores determinados a partir das cargas fatoriais obtidas em a). Com esse objetivo considera-se a **rotao** dos fatores por meio de transformaes ortogonais.
- c) Estimacão dos valores dos fatores comuns, chamados **escores fatoriais** para cada unidade amostral a partir dos valores das cargas fatoriais e das variáveis observadas.

Existem duas classes de métodos para estimacão dos parâmetros do modelo fatorial. Na primeira classe consideramos o **método de máxima verossimilhança** e na segunda, métodos heurísticos como o **método do fator principal** ou o **método do centroide**.

Para o método de máxima verossimilhança, supomos adicionalmente que as variáveis  $X_1, \dots, X_p$  seguem uma distribuo normal multivariada e que o número de fatores  $m$  é conhecido. Os estimadores são obtidos por meio da soluço do sistema de equaes

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \boldsymbol{\psi}^{-1} \boldsymbol{\Lambda} &= \boldsymbol{\Lambda} (\mathbf{I}_m + \boldsymbol{\Lambda}^\top \boldsymbol{\psi}^{-1} \boldsymbol{\Lambda}) \\ \text{diag}(\mathbf{S}) &= \text{diag}(\boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\Lambda}^\top + \boldsymbol{\psi}) \end{aligned} \quad (13.7)$$

que deve ser resolvido por meio de métodos iterativos. A funo de verossimilhança está explicitada na Nota de Capítulo 3. Mais detalhes podem ser encontrados em Morrison (1972), por exemplo.

Uma das vantagens desse método é que mudanças de escala das variáveis originais alteram os estimadores apenas por uma mudança de escala. Se uma das variáveis  $X_1, \dots, X_p$  for multiplicada por uma constante, os estimadores das cargas

fatoriais correspondentes ficam multiplicados pela mesma constante e o estimador da variância específica associada fica multiplicado pelo quadrado da constante. Dessa forma, podemos fazer os cálculos com as variáveis padronizadas, substituindo a matriz de covariâncias amostral  $\mathbf{S}$  pela correspondente matriz de correlações amostrais  $\mathbf{R}$  e posteriormente escrever os resultados em termos das unidades de medida originais.

O método do fator principal está intimamente relacionado com a técnica utilizada na análise de componentes principais. Segundo esse método, os fatores são escolhidos obedecendo à ordem decrescente de sua contribuição à comunalidade total do sistema multivariado. Nesse contexto, o processo tem início com a determinação de um fator  $F_1$  cuja contribuição à comunalidade total é a maior possível; em seguida, um segundo fator não correlacionado com  $F_1$  e tal que maximize a comunalidade residual é obtido. O processo continua até que a comunalidade total tenha sido exaurida.

Na prática, as comunalidades e as variâncias específicas devem ser estimadas com base nos dados amostrais. Embora existam vários métodos idealizados para essa finalidade, nenhum se mostra superior aos demais. Dentre os estimadores mais comuns para a comunalidade de uma variável  $X_i$ , destacamos:

- i) o quadrado do **coeficiente de correlação múltipla** entre a variável  $X_i$  e as demais;
- ii) o maior valor absoluto dos elementos de  $i$ -ésima linha da matriz de correlações amostrais;
- iii) estimadores obtidos de análises preliminares por meio de processos iterativos.

Outro problema prático é a determinação do número de fatores a incluir na análise. Os critérios mais utilizados para esse fim são:

- i) determinação do número de fatores por meio de algum conhecimento *a priori* sobre a estrutura dos dados;
- ii) número de componentes principais correspondentes a autovalores da matriz  $\mathbf{R}$  maiores que 1;
- iii) explicação de certa proporção (escolhida arbitrariamente) da comunalidade ou da variância total.

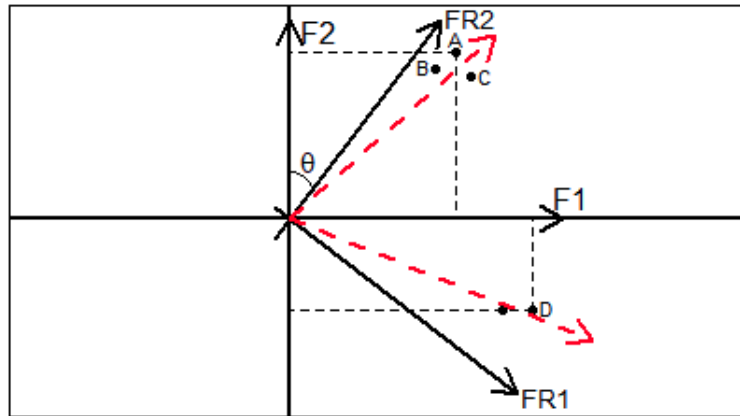
Além disso, existem técnicas gráficas e não gráficas para a escolha do número de fatores a reter. Detalhes são apresentados na Nota de Capítulo 4.

Um algoritmo comumente utilizado para a obtenção das cargas fatoriais e das variâncias específicas é

- i) Obter as  $p$  componentes principais com base na matriz de correlações amostrais  $\mathbf{R}$ .
- ii) Escolher  $m$  fatores segundo um dos critérios mencionados.
- iii) Substituir os elementos da diagonal principal de  $\mathbf{R}$  por estimadores das comunalidades correspondentes estimadas por meio de um dos métodos descritos acima, obtendo a chamada **matriz de correlações reduzida**,  $\mathbf{R}^*$ .
- iv) Extrair  $m$  fatores da matriz  $\mathbf{R}^*$ , obtendo novos estimadores das comunalidades que vão substituir aqueles obtidos anteriormente na diagonal principal.
- v) Repetir o processo dos itens ii) - iv) até que a diferença entre dois conjuntos sucessivos de estimadores das comunalidades seja desprezável.

O método do centroide foi desenvolvido por Thurstone (1947) para simplificar os cálculos mas não é muito utilizado em virtude das recentes facilidades computacionais; os resultados obtidos por intermédio desse método não diferem muito daqueles obtidos pelo método do fator principal.

Como a interpretação dos fatores numa análise fatorial é uma característica importante em aplicações práticas, pode-se utilizar a técnica de **rotação** para obter resultados mais palatáveis. Consideremos um exemplo em que cinco variáveis  $A, B, C, D$  e  $E$  são representadas num espaço fatorial bidimensional conforme a Figura 13.6.



**Figura 13.6:** Representação de cinco variáveis num espaço vetorial bidimensional.

Como ilustrado na Tabela 13.2, as cargas fatoriais relativas ao fator  $F_1$  são altas e positivas para todas as variáveis. Por outro lado, apenas as variáveis  $A, B$  e  $C$  têm cargas positivas no fator  $F_2$ ; as cargas das variáveis  $D$  e  $E$  são negativas nesse fator.

**Tabela 13.2:** Cargas fatoriais para as variáveis  $A, B, C, D$  e  $E$

Variável	Fatores iniciais		Fatores rotacionados	
	$F_1$	$F_2$	$FR_1$	$FR_2$
A	0,75	0,63	0,14	0,95
B	0,69	0,57	0,14	0,90
C	0,80	0,49	0,18	0,92
D	0,85	-0,42	0,94	0,09
E	0,76	-0,42	0,92	0,07

Dois aglomerados de variáveis podem ser identificados na Figura 13.6: um formado pelas variáveis  $A, B$  e  $C$  e o outro pelas variáveis  $D$  e  $E$ . Apesar disso, esses aglomerados não são evidentes nas cargas fatoriais da Tabela 13.2. Uma rotação dos fatores (com os eixos rotulados  $FR_1$  e  $FR_2$ ) como aquela indicada na figura juntamente com as novas cargas fatoriais apresentadas na Tabela 13.2 ressaltam a separação entre os dois conjuntos de variáveis. Na solução inicial, cada variável é explicada por dois fatores enquanto que na solução obtida com a rotação

dos fatores, apenas um deles é suficiente. Note que as variáveis A, B e C estão mais relacionadas com o fator FR2 e enquanto as variáveis D e E relacionam-se preferencialmente com o fator FR1.

Em princípio, também podemos considerar rotações oblíquas, que são bem mais flexíveis, pois os fatores não precisam ser necessariamente ortogonais. Essa característica pode até ser considerada mais realista, pois a ortogonalidade não é determinante da relação entre os fatores. Os eixos realçados em vermelho na Figura 13.6 correspondem a uma dessas rotações oblíquas.

O objetivo de qualquer rotação é obter fatores interpretáveis e com a estrutura mais simples possível. Nesse sentido, Thurstone (1947) sugere condições para se obter uma estrutura mais simples, nomeadamente

- i) Cada linha da matriz de cargas fatoriais  $\Lambda$  deve conter pelo menos um valor nulo.
- ii) Cada coluna da matriz de cargas fatoriais deveria ter pelo menos tantos valores nulos quantas forem as colunas.
- iii) Para cada par de colunas deve haver algumas variáveis com cargas fatoriais pequenas numa delas e altas na outra.
- iv) Para cada par de colunas uma grande porcentagem das variáveis deve ter cargas fatoriais não nulas em ambas.
- v) Para cada par de colunas deve haver somente um pequeno número de variáveis com cargas fatoriais altas em ambas.

Como consequência dessas sugestões,

- i) Muitas variáveis (representadas como vetores no espaço dos fatores) devem ficar próximas dos eixos.
- ii) Muitas variáveis devem ficar próximas da origem quando o número de fatores for grande.
- iii) Somente um pequeno número de variáveis fica longe dos eixos.

A principal crítica às sugestões de Thurstone é que na prática poucas são as situações que admitem uma simplificação tão grande. O que se procura fazer é simplificar as linhas e colunas da matriz de cargas fatoriais e os métodos mais comumente empregados com essa finalidade são:

- **Método Varimax**, em que se procura simplificar a complexidade fatorial, tentando-se obter fatores com poucos valores grandes e muitos valores nulos ou pequenos na respectiva coluna da matriz de cargas fatoriais. Após uma rotação Varimax, cada variável original tende a estar associada com poucos (preferencialmente, um) fatores e cada fator tende a se associar com poucas variáveis. Esse é o método mais utilizado na prática.
- **Método Quartimax**, em que se procura maximizar o número de fatores necessários para explicar cada variável. Em geral, esse método produz um fator em que muitas variáveis têm cargas altas ou médias, o que nem sempre é conveniente para a interpretação.
- **Método Equimax**, uma mistura dos métodos Varimax e Quartimax.
- **Método Promax**, utilizado para rotações oblíquas.

Um dos objetivos tanto de Análise de Componentes Principais quanto de Análise Fatorial é substituir as  $p$  variáveis originais  $X_1, \dots, X_p$  por um número menor, digamos,  $m$ , em análises subsequentes. No caso de componentes principais, podem-se utilizar as estimativas  $\hat{y}_{ik} = \hat{\beta}_i \mathbf{x}_k$ ,  $i = 1, \dots, m$  para substituir os valores  $\mathbf{x}_k$  observados para a  $k$ -ésima unidade amostral. Esse processo é mais complicado em Análise Fatorial, em que lidamos com a obtenção dos valores dos fatores  $F_1, \dots, F_m$  (denominados **escores fatoriais**), pois como não são observáveis, não podem ser estimados no sentido usual. Para esse propósito, o **método de Bartlett** (1937) consiste em considerar (13.4) como um modelo de regressão heterocedástico em que se supõe que as matrizes de cargas fatoriais,  $\mathbf{\Lambda}$  e de variâncias específicas  $\boldsymbol{\psi}$ , são conhecidas e se considera o termo  $\mathbf{e}$  como um vetor de erros. Minimizando

$$Q(\mathbf{f}) = \mathbf{e}^\top \boldsymbol{\psi}^{-1} \mathbf{e} = (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu} - \mathbf{\Lambda} \mathbf{f})^\top \boldsymbol{\psi}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu} - \mathbf{\Lambda} \mathbf{f})$$

obtemos

$$\hat{\mathbf{f}} = [\mathbf{\Lambda}^\top \boldsymbol{\psi}^{-1} \mathbf{\Lambda}]^{-1} \mathbf{\Lambda}^\top \boldsymbol{\psi}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$$

e substituindo  $\mathbf{\Lambda}$ ,  $\boldsymbol{\psi}$  e  $\boldsymbol{\mu}$ , respectivamente, por estimativas  $\hat{\mathbf{\Lambda}}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\psi}}$  e  $\bar{\mathbf{x}}$ , podemos construir os escores fatoriais para a  $k$ -ésima unidade amostral como

$$\hat{\mathbf{f}}_k = [\hat{\mathbf{\Lambda}}^\top \hat{\boldsymbol{\psi}}^{-1} \hat{\mathbf{\Lambda}}]^{-1} \hat{\mathbf{\Lambda}}^\top \hat{\boldsymbol{\psi}}^{-1} (\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}).$$

Alternativamente, no **método de regressão**, supõe-se que os fatores comuns,  $\mathbf{f}$  e específicos,  $\mathbf{e}$ , são independentes e têm distribuições normais multivariadas com dimensões  $m$  e  $p$ , respectivamente, de forma que o par  $(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}, \mathbf{f})^\top$  também tem uma distribuição normal multivariada de dimensão  $p + m$  com matriz de covariâncias

$$\begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Lambda}^\top + \boldsymbol{\psi} & \mathbf{\Lambda} \\ \mathbf{\Lambda}^\top & \mathbf{I}_m \end{bmatrix}.$$

Utilizando propriedades da distribuição normal multivariada, segue que a distribuição condicional de  $\mathbf{f}$  dado  $\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}$  também é normal multivariada com vetor de médias

$$E(\mathbf{f} | \mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{\Lambda}^\top [\mathbf{\Lambda} \mathbf{\Lambda}^\top + \boldsymbol{\psi}]^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$$

e matriz de covariâncias

$$\text{Cov}(\mathbf{f} | \mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{I}_m - \mathbf{\Lambda}^\top [\mathbf{\Lambda} \mathbf{\Lambda}^\top + \boldsymbol{\psi}]^{-1} \mathbf{\Lambda}.$$

O termo  $\mathbf{\Lambda}^\top [\mathbf{\Lambda} \mathbf{\Lambda}^\top + \boldsymbol{\psi}]^{-1}$  corresponde aos coeficientes de uma regressão multivariada tendo os fatores como variáveis respostas e  $\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}$  como variáveis explicativas. Utilizando as estimativas  $\hat{\mathbf{\Lambda}}$  e  $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ , podemos calcular os escores fatoriais para a  $k$ -ésima unidade amostral (com valores das variáveis originais  $\mathbf{x}_k$ ) por meio de

$$\hat{\mathbf{f}}_k = \hat{\mathbf{\Lambda}}^\top [\hat{\mathbf{\Lambda}} \hat{\mathbf{\Lambda}}^\top + \hat{\boldsymbol{\psi}}]^{-1} (\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}).$$

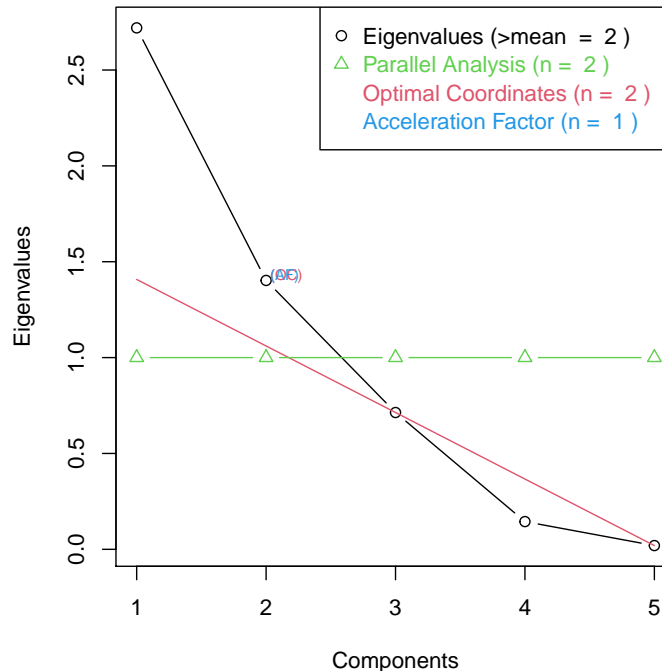
**Exemplo 13.1. (continuação).** Nesse exemplo, optamos por conservar duas componentes principais que explicavam 82,5% da variância total. Os gráficos do cotovelo na Figura 13.4 e *biplot* na Figura 13.5 justificam a escolha. Reanalisamos os dados empregando Análise Fatorial.

Inicialmente podemos utilizar as técnicas de determinação do número de fatores descritas na Nota de Capítulo 4. Os comandos do pacote `nFactors` necessários para produzir o gráfico da Figura 13.7 são

```

ev <- eigen(cor(suicidios1))
ap <- parallel(subject=nrow(suicidios1), var=ncol(suicidios1),
  rep=100, cent=0.95)
nS <- nSree(x=ev$values, aparallel=ap$eigen$qevpeq)
plotnSree(nS, main="")

```



**Figura 13.7:** Soluções gráficas e não gráficas para a determinação do número de fatores na análise dos dados do Exemplo 13.1.

Na Figura 13.7, a curva preta corresponde ao gráfico do cotovelo, a curva verde, ao limite indicado pela análise paralela e a curva vermelha indica uma das retas geradas pelo algoritmo da coordenada ótima. Tanto a avaliação visual do gráfico do cotovelo quanto as propostas produzidas pela análise paralela e por meio do algoritmo da coordenada ótima sugerem que 2 fatores devem ser retidos. A análise do fator de aceleração, por outro lado, não recomenda a utilização de Análise Fatorial neste caso.

Tendo em vista esses resultados, aparentemente, uma análise com 2 fatores parece apropriada. Os comandos e resultados do ajuste do modelo com 2 fatores obtidos por meio da função `factanal()` do pacote `stats` são

```

factanal(x = suicidios1, factors = 2, rotation = "varimax")
Uniquenesses:
tempmax tempmin tempmed precip nebul
0.062 0.025 0.005 0.895 0.477
Loadings:

```

```

          Factor1 Factor2
tempmax  0.930  -0.271
tempmin  0.891   0.426
tempmed  0.997
precip   -0.162  0.314
nebul    -0.162  0.705
          Factor1 Factor2
SS loadings  2.685  0.852
Proportion Var 0.537  0.170
Cumulative Var 0.537  0.707
Test of the hypothesis that 2 factors are sufficient.
The chi square statistic is 10.9 on 1 degree of freedom.
The p-value is 0.000941

```

O termo *Uniqueness* (ruído) é a diagonal da matriz  $\psi$  e corresponde à proporção da variabilidade que não pode ser explicada pela combinação linear dos fatores (variância específica). Um valor alto indica que apenas uma pequena parcela de sua variância pode ser explicada pelos fatores. Esse é o caso da variável Precipitação (*precip*) e com menos intensidade, da variável Nebulosidade (*nebul*).

A matriz  $\Lambda$  com as cargas fatoriais está indicada com *Loadings*. A comunalidade associada a cada variável (correspondente à soma dos quadrados das cargas fatoriais) também pode ser obtida pelo comando

```

apply(fa$loadings^2, 1, sum)
tempmax tempmin tempmed precip nebul
  0.938   0.975   0.995   0.105   0.523

```

Embora os resultados sugiram que dois fatores não sejam suficientes para a explicação adequada da variabilidade ( $p < 0,001$ ), a função não permite considerar três fatores, pois não aceita valor maior do que dois para cinco variáveis. A proporção da variância explicada pelos fatores é 70,7%, menor do que aquela obtida por meio de componentes principais.

O gráfico *biplot*, conveniente para representar a relação entre os dois fatores e as variáveis originais e apresentado na Figura 13.8 é obtido por meio dos comandos

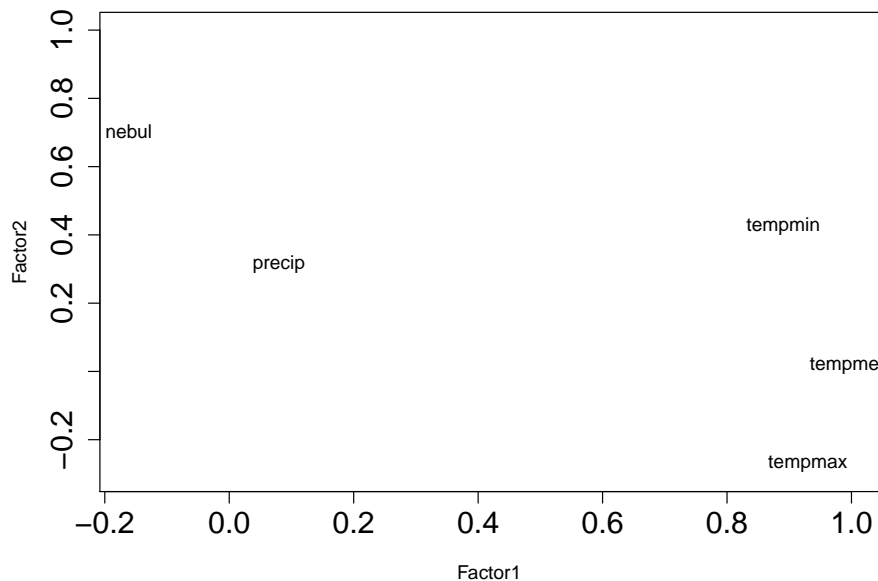
```

load <- fa$loadings[,1:2]
plot(load, type="n", cex=1.8, cex.axis = 1.6, ylim=c(-0.3, 1.0))
text(load, labels=names(suicidios1), cex.lab=1.8, col="black")

```

e indica uma relação similar àquela apresentada na Figura 13.5, em que Fator 1 está relacionado com as variáveis que envolvem temperatura e que o Fator 2, com aquelas associadas à claridade.





**Figura 13.8:** Gráfico do Fator 1 *versus* Fator 2 para os dados do Exemplo 13.1.

Utilizando a fatoração (13.6) e lembrando que estamos trabalhando com a matriz de correlações, a estimativa de  $\mathbf{R}$  obtida pelo modelo é

	tempmax	tempmin	tempmed	precip	nebul
tempmax	1.000	0.71	0.922	-0.011	-0.34
tempmin	0.713	1.00	0.896	0.205	0.16
tempmed	0.922	0.90	1.000	0.085	-0.15
precip	-0.011	0.21	0.085	1.000	0.21
nebul	-0.341	0.16	-0.148	0.209	1.00

e a matriz residual estimada é

	tempmax	tempmin	tempmed	precip	nebul
tempmax	0.000	0.001	0.000	0.013	-0.009
tempmin	0.001	0.000	0.000	0.011	-0.001
tempmed	0.000	0.000	0.000	-0.003	0.001
precip	0.013	0.011	-0.003	0.000	-0.079
nebul	-0.009	-0.001	0.001	-0.079	0.000

Os valores dessa matriz são próximos de zero sugerindo que o modelo fatorial adotado é adequado.

**Exemplo 13.2:** Num estudo planejado para avaliar o nível de poluição atmosférica por meio de medidas de elementos químicos depositados em cascas de árvores, obtiveram-se observações da concentração de Al, Ba, Cu, Fe, Zn, P, Cl, Mg e Ca entre outros elementos em 193 unidades (184 sem observações omissas) da espécie *Tipuana tipu* na cidade de São Paulo. Esses dados estão disponíveis no arquivo `arvores`. O objetivo aqui é obter um conjunto de fatores que permita identificar características comuns a essas variáveis. Os resultados provenientes de uma análise de componentes principais concretizada por meio do comando

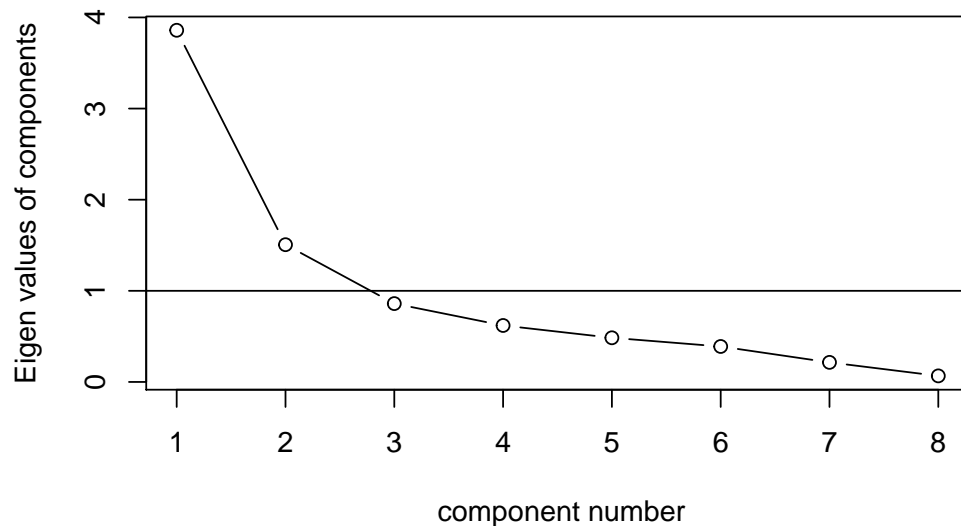
```
> pca<-principal(elem1, nfactor=9, rotate="none")
> VSS.scree(elem1, main="")
```

estão dispostos na Tabela 13.3.

**Tabela 13.3:** Coeficientes de componentes principais (CP) para os dados do Exemplo 13.2

	CP1	CP2	CP3	CP4	CP5	CP6	CP7	CP8	CP9
Al	0.90	-0.11	0.09	0.21	-0.16	0.19	-0.08	-0.17	0.17
Ba	0.88	-0.16	0.09	0.10	-0.10	0.27	0.09	0.31	-0.01
Cu	0.82	0.18	-0.05	-0.23	0.31	-0.18	-0.31	0.08	0.01
Fe	0.95	-0.10	0.07	0.10	-0.03	0.10	0.00	-0.18	-0.19
Zn	0.83	0.16	-0.13	-0.22	0.29	-0.21	0.31	-0.05	0.05
P	0.25	0.69	-0.25	0.53	-0.20	-0.28	0.00	0.05	-0.01
Cl	0.17	0.53	0.60	-0.42	-0.39	-0.07	0.01	0.00	0.00
Mg	-0.24	0.22	0.78	0.35	0.40	0.05	0.02	0.00	0.00
Ca	-0.20	0.77	-0.33	-0.12	0.15	0.47	0.00	-0.04	0.00
% Var	0.45	0.17	0.13	0.08	0.07	0.06	0.02	0.02	0.01
% Acum	0.45	0.61	0.75	0.83	0.89	0.95	0.97	0.99	1.00

Uma análise da porcentagem da variância explicada pelas componentes principais juntamente com um exame do gráfico da escarpa sedimentar correspondente, apresentado na Figura 13.9, sugere que três componentes, que explicam 75% da variância total do sistema de variáveis originais poderiam contemplar uma representação adequada.



**Figura 13.9:** Gráfico da escarpa sedimentar para os dados do Exemplo 13.2.

As cargas fatoriais correspondentes a uma análise fatorial com três fatores rotacionados obliquamente juntamente com as comunalidades e especificidades correspondentes podem ser obtidas por meio do pacote `nFactors` com os comandos

```
fa2 <- fa(elem1, nfactors = 3, rotate = "oblimin", fm="minres")
print(fa2, digits=2)
print(fa2$loadings, cutoff = 0.35)
print(fa2$loadings)
```

e estão dispostos na Tabela 13.4.

**Tabela 13.4:** Cargas fatoriais, comunalidades e especificidades correspondentes a uma análise fatorial para os dados do Exemplo 13.2

	Fator 1	Fator 2	Fator 3	Comunalidade	Especificidade
Al	0.91	-0.11	0.03	0.82	0.18
Ba	0.86	-0.13	0.00	0.75	0.25
Cu	0.75	0.27	-0.04	0.66	0.34
Fe	0.97	-0.08	0.01	0.95	0.05
Zn	0.74	0.27	-0.13	0.68	0.32
P	0.20	0.47	0.05	0.25	0.75
Cl	0.22	0.27	0.39	0.22	0.78
Mg	-0.04	0.02	0.73	0.54	0.46
Ca	-0.21	0.67	0.01	0.49	0.51

Para facilitar a interpretação pode-se considerar o comando

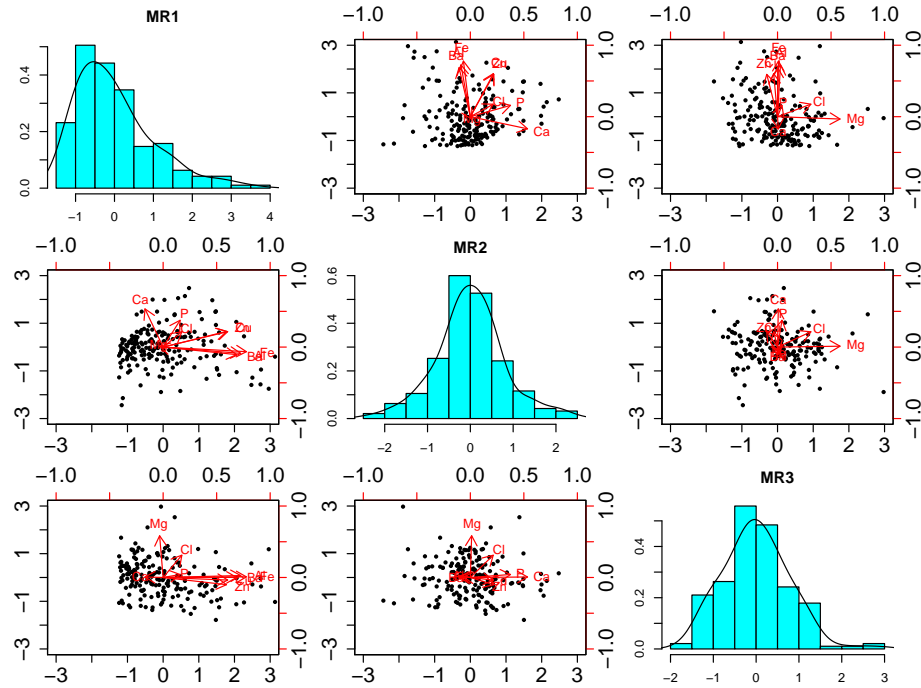
```
print(fa2$loadings, cutoff = 0.35)
```

com o qual apresentamos as cargas fatoriais maiores que 0,35, obtendo

```
Loadings:
  MR1  MR2  MR3
Fe  0.972
Cu  0.754
Zn  0.740
Ba  0.858
Mg                0.730
Al  0.906
P                0.469
Cl                0.390
Ca                0.668
```

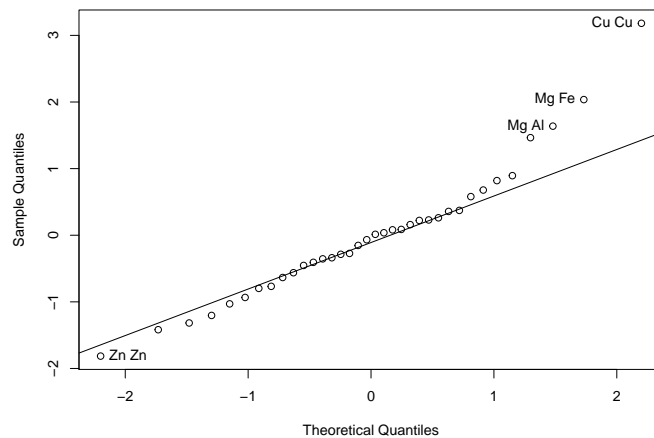
O Fator 1 tem cargas fatoriais concentradas nos elementos Al, Ba, Cu, Fe e Zn, que estão associados à poluição de origem veicular gerada por desgaste de freios e ressuspensão de poeira; o Fator 2, com cargas fatoriais concentradas em P e Ca e o Fator 3, com cargas fatoriais concentradas em Cl e Mg estão relacionados com macro e micronutrientes importantes para a saúde arbórea.

Esse resultado também pode ser observado por meio do gráfico da Figura 13.10, gerado por meio do comando `biplot(fa2)`.



**Figura 13.10:** Gráfico *biplot* correspondente aos três fatores considerados para os dados do Exemplo 13.2.

O gráfico QQ obtido por meio do comando `plot(resid(fa2))` disposto na Figura 13.11 pode ser usado para avaliar a distribuição dos resíduos do modelo (13.4).



**Figura 13.11:** Gráfico QQ para os resíduos do modelo (13.4) ajustado aos dados do Exemplo 13.2.

## 13.4 Análise de componentes independentes

A **Análise de Componentes Independentes** (*Independent Component Analysis* - ICA) é um método para obter componentes que não tenham as restrições da Análise Fatorial, ou seja, que não sejam dependentes da suposição de normalidade, sob a qual esta última tem resultados mais adequados.

O desenvolvimento da Análise de Componentes Independentes é relativamente recente, tendo ímpeto na década de 1980 no contexto de redes neurais e encontra aplicações em processamento de sinais biomédicos, separação de sinais de áudio, séries temporais financeiras etc. As principais referências nessa área são Hyvärinen e Oja (1997), Hyvärinen (1999), Hyvärinen et al. (1999) e Stone (2004). Nesta seção baseamo-nos nas ideias de Hyvärinen e Oja (2000) e Gegembauer (2010).

Consideremos um conjunto de dados com  $p$  variáveis,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)^\top$  e a transformação

$$y_i = \sum_{j=1}^p w_{ij}x_j, \quad i = 1, \dots, q, \quad (13.8)$$

em que  $q < p$  e os  $w_{ij}$  são coeficientes. Reunindo os coeficientes  $w_{ij}$  em uma matriz  $\mathbf{W}$ , de ordem  $q \times p$ , e os  $y_i$  num vetor  $\mathbf{y}$ , de ordem  $q \times 1$ , obtemos

$$\mathbf{y} = \mathbf{W}\mathbf{x}. \quad (13.9)$$

A diferença entre Análise de Componentes Independentes, Análise de Componentes Principais e Análise Fatorial está nos pesos  $\mathbf{W}$ , que são escolhidos de modo que as variáveis  $y_i$  sejam independentes e **não gaussianas**.

A Análise de Componentes Independentes é um caso particular da técnica conhecida por **Separação Cega de Fontes** (*Blind Source Separation*), considerada no contexto de séries temporais. Um exemplo muito citado nesse contexto é o do problema da festa de coquetéis (*cocktail party problem*), descrito a seguir.

Consideremos um conjunto de pessoas conversando na mesma sala emitindo sinais de fala ou um conjunto de telefones celulares emitindo suas ondas de rádio. Suponhamos que haja vários sensores ou receptores em diferentes posições, com cada mistura das fontes originais gravada com pesos diferentes.

Com o objetivo de simplificar a exposição, digamos que existem três fontes que dão origem aos sinais  $s_1(t)$ ,  $s_2(t)$  e  $s_3(t)$  e também três sinais observados, denotados por  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  e  $x_3(t)$ , correspondentes às amplitudes dos sinais gravados no tempo  $t$ . Os  $x_i(t)$  são combinações lineares dos  $s_i(t)$  com coeficientes constantes  $a_{ij}$ , que por sua vez, indicam as misturas dos pesos e dependem da distância entre as fontes e os sensores supostamente desconhecidos:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a_{11}s_1(t) + a_{12}s_2(t) + a_{13}s_3(t) \\ x_2(t) &= a_{21}s_1(t) + a_{22}s_2(t) + a_{23}s_3(t) \\ x_3(t) &= a_{31}s_1(t) + a_{32}s_2(t) + a_{33}s_3(t). \end{aligned} \quad (13.10)$$

Em geral, não conhecemos nem valores  $a_{ij}$  nem os sinais originais  $s_i(t)$ . Gostaríamos de estimar os sinais originais a partir das misturas

$$x_i(t)$$

. Este é o problema conhecido como **Separação Cega de Fontes**. O termo “cega” significa que temos pouca ou nenhuma informação sobre as fontes.

Suponhamos que os coeficientes de mistura,  $a_{ij}$ , sejam suficientemente diferentes para que a matriz que os englobam seja invertível. Então, existe uma matriz

$\mathbf{W}$  com elementos  $w_{ij}$ , tais que

$$s_i(t) = w_{i1}x_1(t) + w_{i2}x_2(t) + w_{i3}x_3(t), \quad i = 1, 2, 3. \quad (13.11)$$

Se conhecêssemos os pesos  $a_{ij}$  em (13.10), a matriz  $\mathbf{W}$  seria a inversa da matriz definida pelos coeficientes de mistura  $a_{ij}$ .

A questão é saber como os coeficientes  $w_{ij}$  em (13.11) podem ser estimados. Essencialmente, observamos os sinais gravados  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  e queremos obter uma matriz  $\mathbf{W}$  de modo que a representação seja dada pelos sinais originais  $s_1$ ,  $s_2$  e  $s_3$ . Uma solução simples pode ser encontrada quando os sinais são estatisticamente independentes. De fato, a suposição de que os sinais são não gaussianos é suficiente para determinar os coeficientes  $w_{ij}$ , desde que

$$y_i(t) = w_{i1}x_1(t) + w_{i2}x_2(t) + w_{i3}x_3(t), \quad i = 1, 2, 3, \quad (13.12)$$

sejam estatisticamente independentes. Se os sinais  $y_i$  forem independentes, então eles serão iguais aos sinais originais  $s_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  (a menos da multiplicação por um escalar).

O problema descrito acima nos leva à seguinte definição da Análise de Componentes Independentes no caso geral: dado um vetor de variáveis aleatórias  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)^\top$ , supostamente geradas como uma mistura linear de componentes independentes  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_p)^\top$ , temos

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s}, \quad (13.13)$$

em que  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  é uma matriz desconhecida com dimensão  $p \times p$ . A Análise de Componentes Independentes consiste em estimar tanto a matriz  $\mathbf{A}$  quanto os sinais  $s_i$  apenas observando os  $x_i$ . Neste caso, supomos que o número de componentes independentes  $s_i$  é igual ao número de variáveis observadas; na realidade esta suposição não é necessária.

Pode-se demonstrar que este problema está bem definido, isto é, que o modelo em (13.13) pode ser estimado se e somente se os componentes  $s_i$  são não gaussianos. Veja de Hyvärinen e Oja (2000) para detalhes.

Isto é uma necessidade fundamental que também explica a principal diferença entre Análise de Componentes Independentes e Análise Fatorial, na qual a normalidade dos dados precisa ser levada em conta para que os resultados sejam adequados.

De fato, a Análise de Componentes Independentes pode ser considerada como uma Análise Fatorial não gaussiana, visto que nesse caso também modelamos os dados como uma mistura linear de alguns fatores latentes.

Algoritmos numéricos são uma parte integral dos métodos de estimação neste contexto. Esses métodos numéricos tipicamente envolvem a otimização de alguma função objetivo e o algoritmo de otimização mais básico utiliza o **método do gradiente** (veja o Apêndice A).

Em particular, o **algoritmo de ponto fixo** chamado **FastICA** tem sido usado para explorar uma estrutura específica dos problemas de Análise de Componentes Independentes. Uma aplicação desses métodos é a determinação do nível máximo de não normalidade aceitável medido pelo valor absoluto do **excesso de curtose**.

A curtose  $K(X)$  de uma variável aleatória  $X$  está definida na Nota de Capítulo 7 do Capítulo 3. O excesso de curtose é definido por  $e(X) = K(X) - 3$ , sendo 3 a curtose de uma distribuição normal.

Admitindo que a matriz  $\mathbf{A}$  tenha inversa  $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{W}$ , obtemos

$$\mathbf{s} = \mathbf{W}\mathbf{x}. \quad (13.14)$$

Há duas ambiguidades no procedimento da Análise de Componentes Independentes. A primeira é que não podemos determinar as variâncias dos elementos  $s_i$ , pois se os multiplicarmos por uma constante  $C$ , basta dividir as colunas correspondentes de  $\mathbf{A}$  por  $C$  para obter o mesmo resultado. Para evitar esse problema, podemos centrar as componentes, isto é, considerar  $E(s_i) = 0$ , para todo  $i$  e fixar as magnitudes das componentes independentes de modo que  $E(s_i^2) = 1$ , para todo  $i$ .

A segunda ambiguidade é que, contrariamente ao que ocorre com a Análise de Componentes Principais, não podemos determinar a **ordem** das componentes independentes, pois como  $\mathbf{s}$  e  $\mathbf{A}$  são desconhecidas, podemos mudar livremente a ordem dos termos em (13.13).

Para obter componentes independentes, podemos escolher duas formas como substitutas (*proxy*) de independência, que por sua vez determinam a forma do algoritmo de Análise de Componentes Independentes a usar:

- i) Minimização da informação mútua;
- ii) Maximização da não gaussianidade.

A família de algoritmos que usa minimização da informação mútua é baseada em medidas como a **Divergência de Kullback-Leibler** e **Máxima Entropia**. A família que aborda a “não gaussianidade”, usa **curtose** e **negentropia**. Veja Gegenbauer (2010) para definições e detalhes.

Convém fazer um pré-processamento dos dados antes de proceder à análise. Os algoritmos usam centragem (subtração da média para obter um sinal de média zero), branqueamento e redução da dimensionalidade, usualmente concretizado via Análise de Componentes Principais e decomposição em valores singulares. O branqueamento assegura que todas as dimensões são tratadas igualmente antes que o algoritmo seja aplicado.

Sejam duas variáveis,  $X$  e  $Y$ , independentes e conseqüentemente, não correlacionadas. Uma propriedade um pouco mais forte que não correlação é a **brancura** (*whiteness*). Branquear um vetor de média zero,  $\mathbf{y}$ , significa tornar seus componentes não correlacionados com variâncias unitárias, ou seja, fazer com que

$$E[\mathbf{y}\mathbf{y}^T] = \mathbf{I}. \quad (13.15)$$

Conseqüentemente, branquear o vetor  $\mathbf{x}$  corresponde a obter uma matriz  $\mathbf{V}$  tal que

$$\mathbf{z} = \mathbf{V}\mathbf{x}, \quad (13.16)$$

de forma que o vetor  $\mathbf{z}$  seja **branco**. Um método bastante popular para o branqueamento é baseado na **decomposição em valores singulares** (*singular value decomposition* - SVD) da matriz de covariâncias da variável centrada, digamos  $\tilde{\mathbf{x}}$ , ou seja, considerar

$$E[\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}^T] = \mathbf{E}\mathbf{D}\mathbf{E}^T, \quad (13.17)$$

em que  $\mathbf{E}$  é a matriz ortogonal de autovetores de  $E[\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}^T]$  e  $\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, \dots, d_p)$  é a matriz diagonal com os autovalores na diagonal principal. O branqueamento pode então ser feito por meio da matriz de branqueamento

$$\mathbf{V} = \mathbf{E}\mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{E}^T \quad (13.18)$$

e transforma  $\mathbf{A}$  em  $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{E}\mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{E}^T\mathbf{A}$ , tal que

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{E}\mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{E}^T\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}}.$$

Esse procedimento torna  $\tilde{\mathbf{A}}$  ortogonal, pois

$$E[\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}^T] = \tilde{\mathbf{A}}E(\mathbf{s}\mathbf{s}^T)\tilde{\mathbf{A}}^T = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{A}}^T = \mathbf{I}$$

dado que  $\mathbf{s}$  é um vetor cujos elementos são variáveis independentes com variância unitária. Como consequência, o processo de branqueamento reduz o número de parâmetros a estimar, de  $p^2$  para  $p(p-1)/2$ , devido à ortogonalidade da matriz  $\tilde{\mathbf{A}}$ .

Há vários algoritmos para a análise de componentes independentes de um conjunto de dados, dentre os quais, mencionamos:

- i) Algoritmo do Gradiente usando a curtose,
- ii) Algoritmo de Ponto Fixo usando curtose,
- iii) Algoritmo do Gradiente usando negentropia,
- iv) Algoritmo de Ponto Fixo usando negentropia,
- v) Algoritmos para Estimação de Máxima Verossimilhança.

Veja Gegendbauer (2010) para detalhes.

Algoritmos computacionais utilizados para a análise de componentes independentes podem ser implementados por meio das funções `infomax()`, `FastICA()` e `JADE()` contempladas no pacote `ica`. Outros pacotes também disponíveis são: `fastICA` e `ProDenICA`. Este último foi desenvolvido por T. Hastie e R. Tibshirani e apresenta a particularidade de estimar a densidade de cada componente.

**Exemplo 13.3.** Consideremos novamente os dados do Exemplo 13.2, em que 9 variáveis (Al, Ba, Cu, Fe, Zn, P, Cl, Mg e Ca) foram observadas em 193 unidades, das quais 190 não contêm dados omissos. Os comandos do pacote `fastICA` para a obtenção das 9 componentes independentes de um modelo saturado e de algumas matrizes geradas pelo algoritmo são

```
aci <- fastICA(tip1, 9, alg.typ = "parallel", fun = "logcosh",
              alpha = 1, method = "R", row.norm = FALSE,
              maxit = 200, tol = 0.0001, verbose = TRUE)
# matriz de dados centrada X (5 linhas)
aci$X[1:5,]
# matriz de branqueamento
aci$K
# matriz de dados branqueada (5 linhas)
Xbranq <- aci$X%*%aci$K
Xbranq[1:5,]
# matriz de mistura A
aci$A
# matriz de desmisturacao (un-mixing) W
aci$W
# matriz de sinais (componentes independentes) S (5 linhas)
aci$S[1:5,]
```

Os resultados são

```
aci$X[1:5,]
      Fe      Cu      Zn      Ba      Mg      Al      P      Cl      Ca
5  -818 -0.319  20.4   82   694  -356 -153.1  509  5865
6 -1037 -1.269 -86.0 -345 -184  -654  136.9  172  4210
9   -890 -0.069   5.1 -356   91  -508   -4.1  -34 23224
10  -956 -1.869 -77.8 -244  -36  -608   11.9 -175  8623
11  -436 -0.739   1.7  -89  -904  -400  -68.1 -140  7727
```



```

aci$K
      [,1]      [,2]      [,3]      [,4]      [,5]      [,6]      [,7]      [,8]      [,9]
[1,] -3.6e-06 -5.3e-04 -1.4e-04  1.9e-03  6.6e-04  1.7e-04  2.7e-05 -1.3e-03  4.0e-04
[2,] -7.1e-10 -7.6e-07 -5.6e-08  3.8e-06  3.7e-06 -5.0e-06 -5.8e-06  2.1e-04 -7.4e-01
[3,] -3.1e-08 -3.2e-05  6.1e-06  2.1e-04  2.5e-04 -1.6e-04 -4.5e-04  1.5e-02  1.0e-02
[4,] -1.6e-06 -2.2e-04 -4.7e-05 -2.2e-03  2.6e-03  7.4e-05 -8.3e-04 -4.1e-04  1.2e-05
[5,]  1.4e-08  1.0e-04 -1.1e-03 -5.1e-06  4.7e-05  3.5e-04 -1.3e-05  2.3e-04 -9.5e-07
[6,] -2.4e-06 -3.4e-04 -9.9e-05 -1.6e-03 -2.7e-03  1.3e-05  9.1e-04  9.8e-04  4.6e-05
[7,]  7.2e-07 -2.3e-05 -1.5e-05  4.7e-05 -7.8e-04 -3.5e-04 -5.9e-03 -9.9e-04  1.2e-06
[8,]  3.6e-07 -1.4e-05 -9.4e-05  2.2e-05  1.2e-04 -4.5e-03  4.7e-04 -5.1e-04  4.7e-04
[9,]  1.1e-04 -2.9e-05 -7.0e-06 -3.3e-06  5.2e-06  2.5e-05  4.7e-05 -1.5e-05  1.1e-05

```

```

Xbranq[1:5,]
      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8] [,9]
5  0.63 0.435 -0.728 -1.202 0.87 -2.01 0.994 0.949 0.406
6  0.46 0.704  0.383 -0.222 0.07 -0.99 -0.833 -0.808 -0.248
9  2.49 0.068 -0.073 -0.208 -0.03 0.57 0.913 0.573 -0.038
10 0.93 0.520 0.199 -0.390 0.35 0.81 -0.088 -0.512 0.196
11 0.83 0.074 1.086 -0.031 0.58 0.44 0.412 0.053 0.389

```

```

aci$A
      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8] [,9]
[1,] 332.2 0.57 28.6 99.0 -104 234 134.4 3.8 -3624
[2,] -20.4 1.57 24.4 -21.3 -164 -63 -7.9 1.4 626
[3,] 188.0 0.57 17.4 69.6 243 139 122.0 19.2 7226
[4,] -1049.3 -1.26 -50.1 -409.9 369 -561 12.6 -11.9 1501
[5,] 159.1 0.19 -7.1 40.1 704 -26 -30.6 19.9 -3294
[6,] 401.1 0.60 15.8 216.2 182 512 -24.5 3.1 -2558
[7,] 9.9 -0.10 -5.6 -295.2 27 -45 -1.4 -15.2 346
[8,] 42.3 0.28 9.2 1.2 159 35 15.4 230.4 1137
[9,] -201.8 -0.65 -72.5 -63.9 -27 -32 10.8 -1.2 -351

```

```

aci$W
      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8] [,9]
[1,] -0.390 0.0673 0.773 0.1665 -0.353 -0.277 0.038 0.1216 -0.037
[2,] -0.188 0.0012 -0.347 0.8325 0.084 -0.342 0.069 -0.0541 0.141
[3,] 0.068 0.1916 -0.372 -0.2078 -0.796 -0.303 -0.015 -0.2183 0.067
[4,] 0.076 0.1120 -0.027 -0.2541 0.269 -0.512 0.732 0.0267 -0.215
[5,] -0.267 0.1066 -0.105 -0.2594 0.319 -0.522 -0.636 -0.0310 -0.244
[6,] -0.127 -0.0561 0.171 0.0051 0.120 0.086 0.068 -0.9607 -0.045
[7,] -0.840 0.0283 -0.309 -0.1933 -0.024 0.317 0.222 0.0962 -0.030
[8,] 0.092 0.3093 -0.050 0.2584 -0.127 0.239 -0.011 0.0076 -0.868
[9,] -0.023 -0.9139 -0.074 -0.0104 -0.174 -0.123 0.014 0.0273 -0.335

```

```

aci$S[1:5,]
      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8] [,9]
5  -1.20 -0.076 -0.180 0.74 -0.11 0.379 -1.28 2.20 -0.86
6  0.44 0.096 0.112 0.57 -0.40 -0.918 -0.39 0.79 0.99
9  -1.78 0.333 1.727 0.52 -0.90 -0.088 0.20 -0.15 -0.57
10 -0.65 -0.291 0.614 0.44 -0.30 -0.584 -0.40 -0.77 0.39
11 -0.83 -0.030 0.068 -0.24 -1.00 -0.740 -0.25 -0.53 -0.29

```

Com base nesses resultados, podemos escrever, por exemplo,

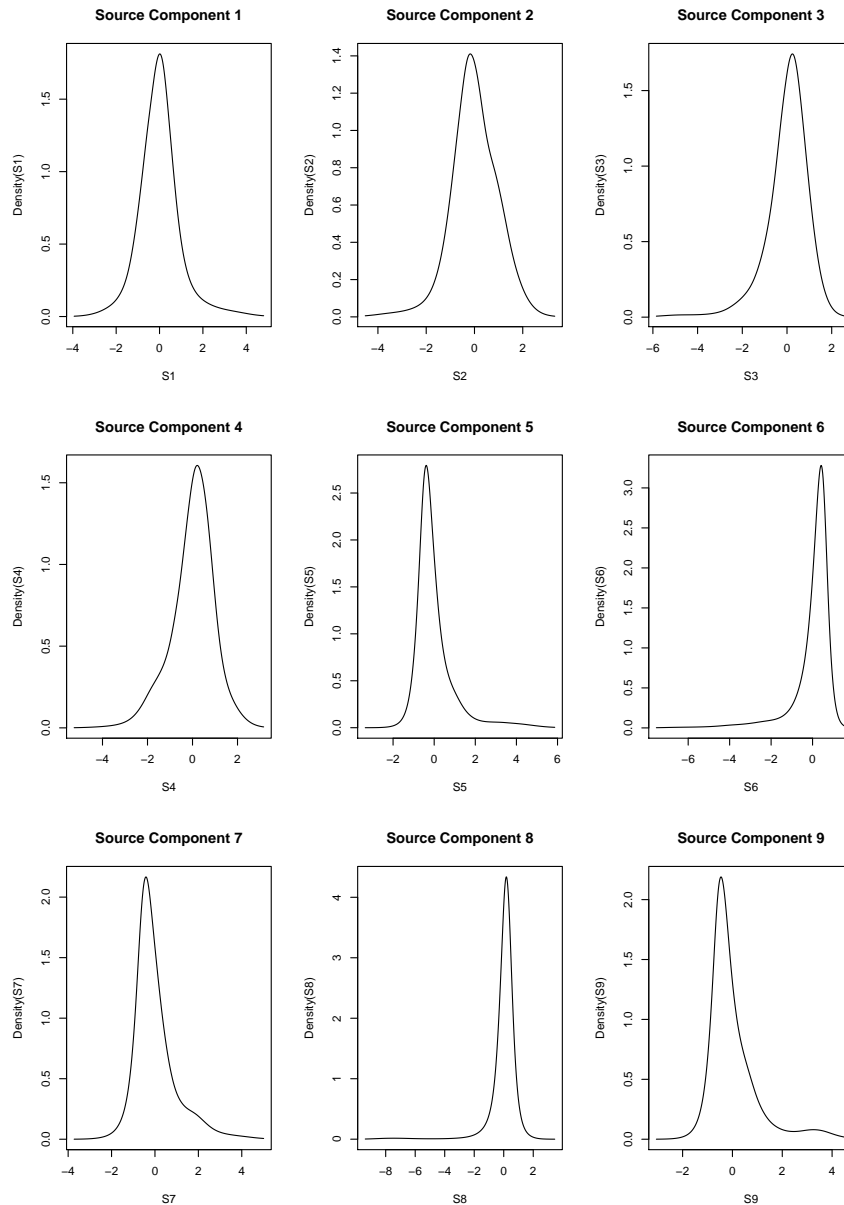
$$x_1 = 332,2s_1 + 0,57s_2 + 28,6s_3 + 99,0s_4 - 104s_5 + 234s_6 + 134,4s_7 + 3,8s_8 - 3624s_9$$

Por outro lado,

$$s_1 = -0,390x_1 + 0,0673x_2 + 0,773x_3 + 0,1665x_4 - 0,353x_5 - 0,277x_6 + 0,038x_7 + 0,1216x_8 - 0,037x_9$$

lembrando que  $x_i$  corresponde ao valor centrado da  $i$ -ésima variável.

As densidades estimadas das componentes independentes obtidas por meio do pacote ProDenICA estão apresentadas na Figura 13.12.



**Figura 13.12:** Gráficos das densidades das componentes independentes para o Exemplo 13.3.

Não há muitas sugestões sobre a determinação do número de componentes independentes a reter. Uma sugestão é ajustar modelos com diferentes números

de componentes e comparar alguma distância entre as matrizes de dados original centrada e a estimada. Uma opção é usar a norma de Frobenius, ou seja a soma de quadrados de todos os elementos da matriz. No exemplo isso pode ser concretizado por meio dos comandos

```
aci1 <- fastICA(tip1, n.comp = 3, alg.typ = "parallel",
               fun = "logcosh", alpha = 1, method = "R",
               row.norm = FALSE, maxit = 200,
tol = 0.0001, verbose = TRUE)
```

```
Xestim1 <- aci1$S%*%aci1$A
dif <- aci1$X - Xestim1
normdif <- norm(dif, type="F")
normdif
```

Variando o número de componentes, obtemos os resultados dispostos na Tabela 13.5.

**Tabela 13.5:** Norma de Frobenius para comparação avaliação do número de componentes a reter na análise de componentes independentes do Exemplo 13.3

Componentes	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Distância	24589	13738	6686	5263	3870	2428	892	19	0

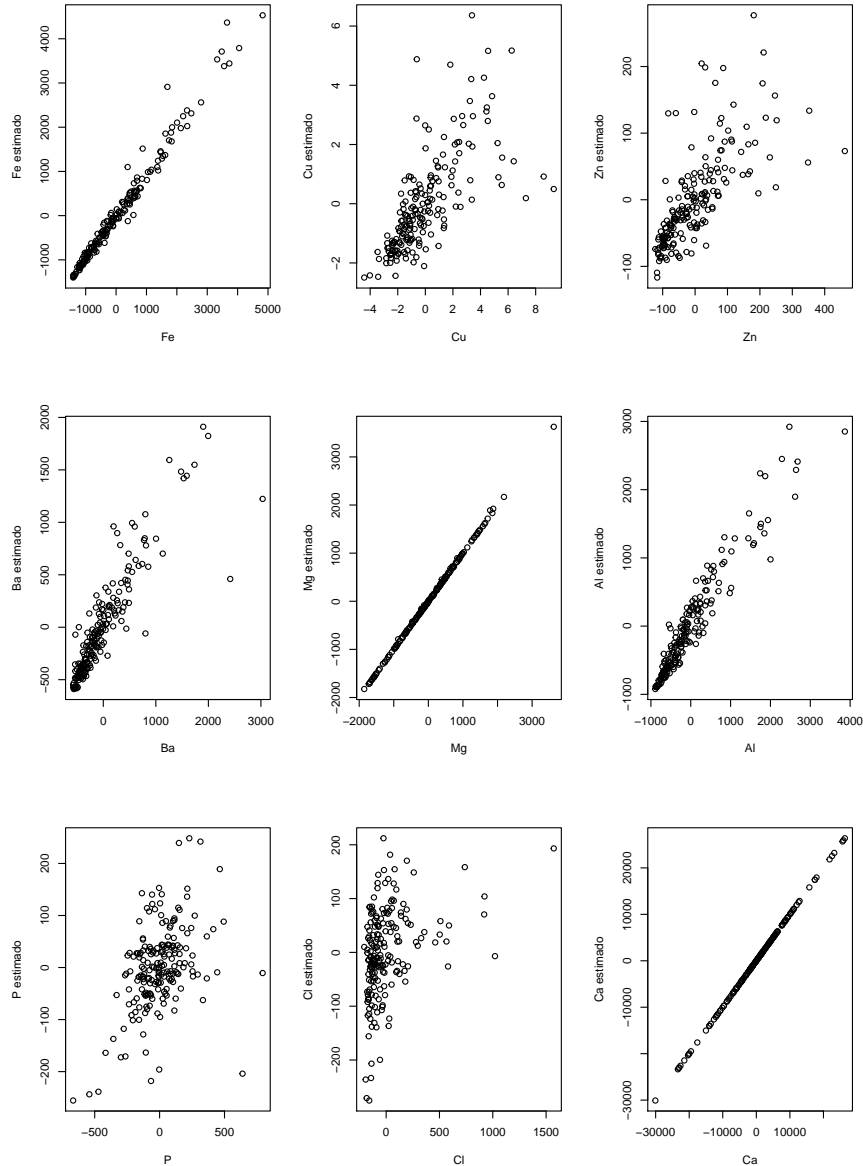
Com o mesmo espírito adotado no gráfico do cotovelo, poderíamos adotar 3 ou 4 componentes independentes para explicar a variabilidade dos dados originais. Nesse caso, a função inicialmente projeta a matriz  $\mathbf{X}$  nas 3 componentes principais por meio de  $\mathbf{xKW} = \mathbf{s}$  em que  $\mathbf{K}$  é a matriz de pré branqueamento. As matrizes de mistura ( $\mathbf{A}$ ) e desmistura ( $\mathbf{W}$ ) e  $\mathbf{K}$  obtidas com o ajuste do modelo com 3 componentes independentes são

```
aci1$A
  [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8] [,9]
[1,] -116 -0.37 -22 -55 853 -66 -20 49 -2563
[2,] 1188 1.54 64 499 -91 771 23 25 -3610
[3,] -138 -0.50 -19 -50 -227 -85 -75 -62 -8205
```

```
aci1$W
  [,1] [,2] [,3]
[1,] -0.27 -0.39 -0.88
[2,] 0.26 -0.91 0.33
[3,] -0.93 -0.14 0.35
```

```
aci1$K
  [,1] [,2] [,3]
[1,] -3.6e-06 -5.3e-04 -1.4e-04
[2,] -7.1e-10 -7.6e-07 -5.6e-08
[3,] -3.1e-08 -3.2e-05 6.1e-06
[4,] -1.6e-06 -2.2e-04 -4.7e-05
[5,] 1.4e-08 1.0e-04 -1.1e-03
[6,] -2.4e-06 -3.4e-04 -9.9e-05
[7,] 7.2e-07 -2.3e-05 -1.5e-05
[8,] 3.6e-07 -1.4e-05 -9.4e-05
[9,] 1.1e-04 -2.9e-05 -7.0e-06
```

Para avaliar o juste do modelo, pode-se construir gráficos de dispersão entre os valores originais (centrados) de cada variável e os correspondentes valores preditos. Com as 3 componentes adotadas, esses gráficos estão dispostos na Figura 13.13



**Figura 13.13:** Gráficos das densidades das componentes independentes para o Exemplo 13.3.

Os gráficos sugerem um bom ajuste para as variáveis com exceção do P e do Cl. Também podemos calcular as correlações entre cada variável e as 3 componentes independentes por meio do comando `cor(aciX, aci1S)` obtendo o seguinte resultado, que é similar àquele encontrado por meio de uma Análise Fatorial

[,1] [,2] [,3]

Fe	-0.98	-0.094	-0.12
Cu	-0.65	-0.155	-0.21
Zn	-0.65	-0.216	-0.19
Ba	-0.88	-0.095	-0.09
Mg	0.10	0.963	-0.25
Al	-0.95	-0.079	-0.11
P	-0.12	-0.103	-0.40
Cl	-0.11	0.214	-0.27
Ca	0.39	-0.270	-0.88

## 13.5 Notas de capítulo

### 1) Obtenção das componentes principais

Para obtenção da primeira componente principal com base nos dados amostrais, considere a função

$$h(\boldsymbol{\beta}_1, \lambda) = \boldsymbol{\beta}_1^\top \mathbf{S} \boldsymbol{\beta}_1 - \lambda_1 (\boldsymbol{\beta}_1^\top \boldsymbol{\beta}_1 - 1)$$

em que  $\lambda$  é o multiplicador de Lagrange. A derivada de  $h(\boldsymbol{\beta}_1, \lambda)$  em relação a  $\boldsymbol{\beta}_1$  é

$$\partial h(\boldsymbol{\beta}_1, \lambda) / \partial \boldsymbol{\beta}_1 = 2\mathbf{S} \boldsymbol{\beta}_1 - 2\lambda \boldsymbol{\beta}_1.$$

e a derivada de  $h(\boldsymbol{\beta}_1, \lambda)$  em relação a  $\lambda$  é  $\partial h(\boldsymbol{\beta}_1, \lambda) / \partial \lambda_1 = \boldsymbol{\beta}_1^\top \boldsymbol{\beta}_1 - 1$ .

Então, devemos resolver a equação  $\partial h(\boldsymbol{\beta}_1, \lambda) / \partial \boldsymbol{\beta}_1 = \mathbf{0}$  sob a restrição  $\boldsymbol{\beta}_1^\top \boldsymbol{\beta}_1 = 1$ , ou seja, determinar  $\hat{\lambda}$  e  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_1$  tais que

$$(\mathbf{S} - \hat{\lambda} \mathbf{I}) \hat{\boldsymbol{\beta}}_1 = \mathbf{0} \quad (13.19)$$

sob a restrição  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^\top \hat{\boldsymbol{\beta}}_1 = 1$ . Para que esse sistema tenha uma solução não nula é necessário que

$$\det(\mathbf{S} - \hat{\lambda} \mathbf{I}_p) = 0,$$

ou seja, que  $\hat{\lambda}$  seja um **autovalor** de  $\mathbf{S}$  e que  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_1$  seja o **autovetor** correspondente.

Sejam  $\hat{\lambda}_1 \geq \hat{\lambda}_2 \geq \dots \geq \hat{\lambda}_p$  os  $p$  autovalores de  $\mathbf{S}$ . Para determinar qual deles devemos escolher com a finalidade de maximizar  $\boldsymbol{\beta}_1^\top \mathbf{S} \boldsymbol{\beta}_1$ , basta multiplicar  $(\mathbf{S} - \hat{\lambda} \mathbf{I}) \boldsymbol{\beta}_1 = \mathbf{0}$  por  $\boldsymbol{\beta}_1^\top$ , obtendo a equação

$$\boldsymbol{\beta}_1^\top \mathbf{S} \boldsymbol{\beta}_1 - \hat{\lambda} \boldsymbol{\beta}_1^\top \boldsymbol{\beta}_1 = 0.$$

Lembrando que  $\boldsymbol{\beta}_1^\top \boldsymbol{\beta}_1 = 1$ , a solução é  $\hat{\lambda}_1 = \boldsymbol{\beta}_1^\top \mathbf{S} \boldsymbol{\beta}_1$ . Então para maximizar  $\boldsymbol{\beta}_1^\top \mathbf{S} \boldsymbol{\beta}_1$  devemos escolher  $\hat{\lambda}$  como o maior autovalor de  $\mathbf{S}$  e  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_1$ , o autovetor correspondente. A primeira componente principal será  $\hat{y}_1 = \hat{\boldsymbol{\beta}}_1^\top \mathbf{x}$  e sua variância é  $\hat{\lambda}_1$ .

A segunda componente principal é a combinação linear  $y_2 = \boldsymbol{\beta}_2^\top \mathbf{x}$  tal que  $\boldsymbol{\beta}_2^\top \boldsymbol{\beta}_2 = 1$ ,  $\boldsymbol{\beta}_2^\top \boldsymbol{\beta}_1 = 0$  e  $\boldsymbol{\beta}_2^\top \mathbf{S} \boldsymbol{\beta}_2$  seja máxima. Neste caso, devemos maximizar a função

$$h(\boldsymbol{\beta}_2, \lambda, \nu) = \boldsymbol{\beta}_2^\top \mathbf{S} \boldsymbol{\beta}_2 - \lambda (\boldsymbol{\beta}_2^\top \boldsymbol{\beta}_2 - 1) - \nu (\boldsymbol{\beta}_2^\top \boldsymbol{\beta}_1)$$

em que os multiplicadores de Lagrange são  $\lambda$  e  $\nu$ . Para isso, devemos resolver a equação

$$\partial h(\boldsymbol{\beta}_2, \lambda, \nu) / \partial \boldsymbol{\beta}_2 = 2(\mathbf{S} \boldsymbol{\beta}_2 - \lambda \mathbf{I}_p) \boldsymbol{\beta}_2 - \nu \boldsymbol{\beta}_1 = \mathbf{0} \quad (13.20)$$

sob as restrições  $\beta_2^\top \beta_2 = 1$  e  $\beta_2^\top \beta_1 = 0$ . Multiplicando (13.20) por  $\beta_1^\top$ , obtemos

$$2\beta_1^\top \mathbf{S}\beta_2 - 2\lambda\beta_1^\top \beta_2 - \nu\beta_1^\top \beta_1 = 0;$$

a restrição  $\beta_1^\top \beta_1 = 1$  implica  $2\beta_1^\top \mathbf{S}\beta_2 - \nu = 0$ . Agora, multiplicando (13.19) por  $\beta_2^\top$  e lembrando que  $\beta_2^\top \beta_1 = 0$ , obtemos  $\beta_1^\top \mathbf{S}\beta_2 = 0$ , concluindo que  $\nu = 0$ . Consequentemente, de (13.20), segue que

$$(\mathbf{S} - \hat{\lambda}\mathbf{I})\hat{\beta}_2 = \mathbf{0}.$$

Logo,  $\hat{\beta}_2$  deve ser um autovetor de  $\mathbf{S}$  e como  $\hat{\beta}_1^\top \mathbf{S}\hat{\beta}_1 \geq \hat{\beta}_2^\top \mathbf{S}\hat{\beta}_2$ , a segunda componente principal corresponde ao autovetor associado ao segundo maior autovetor de  $\mathbf{S}$ . Então, a segunda componente principal será  $\hat{y}_2 = \hat{\beta}_2^\top \mathbf{x}$  e sua variância será  $\hat{\lambda}_2$ .

Repetindo esse procedimento, podemos obter as demais componentes principais.

## 2) Decomposição de matrizes simétricas

Toda matriz simétrica real  $\Sigma$  pode ser escrita como  $\Sigma = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^\top$  em que  $\mathbf{P}$  é uma matriz ortogonal e  $\mathbf{A}$  é uma matriz diagonal com os autovalores de  $\Sigma$  ao longo da diagonal principal. Então,  $\Sigma = \mathbf{P}\mathbf{A}^{1/2}\mathbf{A}^{1/2}\mathbf{P}^\top$  em que  $\mathbf{A}^{1/2}$  é uma matriz diagonal com as raízes quadradas dos elementos não nulos de  $\mathbf{A}$  ao longo da diagonal principal. Fazendo  $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{A}^{1/2}$ , obtemos

$$\Sigma = \mathbf{A}\mathbf{A}^\top = \lambda_1\beta_1\beta_1^\top + \dots + \lambda_p\beta_p\beta_p^\top$$

em que  $\beta_i$  é o autovetor de  $\Sigma$  correspondente ao  $i$ -ésimo autovalor.

## 3) Distribuição de Wishart e a obtenção do sistema (13.7)

Quando  $\mathbf{X}$  tem distribuição normal,  $(n-1)\mathbf{S}$  segue uma distribuição Wishart com  $n-1$  graus de liberdade, cuja função densidade é

$$f(\mathbf{S}) = C|\mathbf{S}|^{(n-p-2)/2}|\Sigma|^{-(n-1)/2}\exp\{-(n-1)/2\text{tr}(\Sigma^{-1}\mathbf{S})\}.$$

Dada a fatoração  $\Sigma = \mathbf{A}\mathbf{A}^\top + \psi$ , o logaritmo da função densidade a ser maximizada é

$$\begin{aligned} L(\mathbf{A}, \psi) = \log(C) &+ [(n-p-2)/2]\log(\mathbf{S}) \\ &- [(n-1)/2]\log|\mathbf{A}\mathbf{A}^\top + \psi| \\ &- [(n-1)/2]\text{tr}[(\mathbf{A}\mathbf{A}^\top + \psi)^{-1}\mathbf{S}]. \end{aligned}$$

Igualando a  $\mathbf{0}$  as derivadas de  $L(\mathbf{A}, \psi)$  em relação a  $\mathbf{A}$  e  $\psi$  obtemos o sistema (13.7).

## 4) Determinação do número de fatores.

Podemos considerar vários critérios:

- i) **Gráfico do cotovelo** (*scree plot*): é devido a Cattell (1966) e consiste do gráfico dos autovalores em função do número de fatores (ou componentes principais). A ideia é determinar o ponto **cotovelo** (*elbow*) em que a inclinação da curva correspondente muda drasticamente.

- ii) **Regra de Kaiser-Guttman:** é devida a Guttman (1954) e Kaiser (1960) e é baseada no gráfico do cotovelo, mas consideram-se apenas componentes ou fatores com autovalores maiores do que 1. Esse é o gráfico que temos usado.
- iii) **Análise Paralela:** é devida a Horn (1965) e propõe reter somente autovalores que sejam superiores ou iguais à média dos autovalores obtidos de  $k$  matrizes de correlações calculadas com  $n$  observações aleatórias.

A estratégia da Análise Paralela é baseada no seguinte algoritmo:

- a) Gere  $n$  variáveis aleatórias com distribuição  $N(0,1)$  independentemente para  $p$  variáveis;
  - b) calcule a correspondente matriz de correlações de Pearson;
  - c) calcule os autovalores dessa matriz;
  - d) repita passos a)- c)  $k$  vezes;
  - e) calcule uma medida de localização (média, mediana,  $p$ -quantil etc.) para os  $k$  vetores de autovalores;
  - f) substitua o valor 1 da regra de Kaiser-Guttman pela medida de localização adotada no item e), ou seja, adote como número de fatores a reter, o número de autovalores maiores que essa medida de localização.
- iv) **Coordenada ótima do teste do cotovelo:** é baseada no seguinte algoritmo
- a) No gráfico do cotovelo, ligue sequencialmente, o ponto correspondente ao  $p$ -ésimo autovalor ao  $(p-i)$ -ésimo,  $i = 1, \dots, p-1$  por meio de retas.
  - b) Verifique se o  $[p - (i + 1)]$ -ésimo autovalor observado é maior do que aquele projetado pela reta correspondente ligando o  $(p - i)$ -ésimo ao  $p$ -ésimo autovalor,  $i = 1, \dots, p - 1$ .
  - c) O número de fatores a reter é o maior número de autovetores observados com valores superiores àquele projetados desde que satisfaçam a regra de Kaiser-Guttman ou o limite estabelecido pela análise paralela.
- v) **Fator de aceleração do teste do cotovelo:** coloca ênfase na coordenada para a qual a inclinação da curva muda abruptamente e pode ser implementado por meio do seguinte algoritmo
- a) Calcule sequencialmente para  $i = 2, \dots, p - 1$  o **fator de aceleração**

$$af(i) = f''(i) = f(i + 1) - 2f(i) - f(i - 1),$$

em que  $f(i)$  corresponde ao valor do  $i$ -ésimo autovalor.

- b) O número de fatores a reter corresponde à posição anterior àquelq em que  $af(i)$  é máximo, desde que seja respeitada a regra de Kaiser-Guttman ou aquela correspondente à análise paralela.

## 13.6 Exercícios

- 1) Prove a relação (13.5),
- 2) Determine as componentes principais para os seguintes conjuntos de dados:

- i) Um conjunto de dados bastane analisado é o *texture-food*, que consiste em 50 observações de medidas de textura de um alimento na forma de massa (*pastry*). As variáveis são:

Oil: porcentagem de óleo na massa;

Density: a densidade do produto (quanto maior o valor, maior a densidade);

Crispy: uma medida da crocância do produto, numa escala de 7 a 15;

Fracture: o ângulo, em graus, pelo qual a massa pode ser dobrada, antes de quebrar;

Hardness: medida da força requerida antes da quebra.

Os dados são simulados, mas com as características de um problema industrial. Os dados podem ser obtidos de <https://openmv.net/info/food-texture>.

- ii) Conjunto de dados **Iris**.  
 iii) [colocar mais um conjunto de dados](#)

Para cada caso, com base nos diversos procedimentos apresentados (gráficos e não gráficos), indique o número de componentes principais a considerar e tente interpretá-las.

- 3) Para os mesmo conjuntos de dados do exercício anterior, realize análises fatoriais e responda as mesmas questões relativamente ao número de fatores em cada caso.
- 4) Faça a análise de componentes independentes para os 498 dados e 15 variáveis do conjunto de dados do Exemplo 13.2.
- 5) Prove (13.15), calculando  $E(\mathbf{y}\mathbf{y}^\top)$  e fixando o seu determinante igual a 1.
- 6) Obtenha as componentes independentes para os dados do Exemplo 13.1.
- 7) Prove a equação (13.20).
- 8) [Hyvärinen e Oja (2000)]: Suponha  $p = 2$  e as componentes independentes  $S_1$  e  $S_2$  com densidades uniformes no intervalo  $|S_i| \leq \sqrt{3}$ ,  $i = 1, 2$ .
- (i) Determine a densidade conjunta de  $(S_1, S_2)$ .
- (ii) Suponha  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ . Obtenha  $(X_1, X_2)$  em função de  $S_1$  e  $S_2$  e obtenha a distribuição conjunta de  $(X_1, X_2)$ .
- 9) Obtenha as componentes independentes para os dados do Exercício 2.



---

## PARTE IV: TÓPICOS ADICIONAIS

Na quarta parte do texto, apresentamos alguns tópicos que têm a ver com os capítulos precedentes. As redes neurais, que estão presentes desde a década de 1940, passaram a ter um papel de destaque com o advento do aprendizado profundo (*deep learning*) e megadados. Em particular, o treinamento de uma rede envolve métodos de otimização, como o método gradiente descendente, daí introduzimos no Apêndice A noções de otimização. Nos Apêndices B e C introduzimos noções de simulação e de algoritmos de dados aumentados, entre os quais destacamos o algoritmo EM.



# Redes neurais

It doesn't matter how subtle my calculations may be, if they don't agree with empirical fact, then into the shredder they go.

Bradley Efron

## 14.1 Introdução

Uma **rede neural** é um conjunto de algoritmos construídos para identificar relações entre as variáveis de um conjunto de dados por intermédio de um processo que tenta imitar a maneira com que neurônios interagem no cérebro. Cada “neurônio” numa rede neural é uma função à qual dados são alimentados e transformados numa resposta como em modelos de regressão. Essa resposta é repassada para um ou mais neurônios da rede que ao final do processo produz um resultado ou uma recomendação. Por exemplo, para um conjunto de clientes de um banco que solicitam empréstimos [as **entradas** (*inputs*)] (saldo médio, idade, nível educacional etc.) são alimentados à rede neural que gera **saídas** (*outputs*) do tipo: “negar o empréstimo”, “conceder o empréstimo” ou “solicitar mais informações”. Neste texto, pretendemos dar uma ideia do que são e de como se implementam redes neurais. O leitor deverá consultar Goodfellow et al. (2016), Pereira et al. (2020) e Bishop (2006) entre outros para uma exposição mais detalhada.

Redes neurais são caracterizadas por uma arquitetura que corresponde à maneira como os neurônios estão organizados em camadas. Há três classes de arquiteturas comumente utilizadas (Pereira et al., 2020):

- 1) Rede neural com uma camada de entrada e uma de saída (conhecida como *perceptron*).
- 2) Rede neural multicamadas, também conhecida por rede do tipo **proalimentada** (*feedforward*) em que há uma ou mais camadas escondidas com as entradas de cada neurônio de uma camada obtidas de neurônios da camada precedente.
- 3) Rede neural recorrente, em que pelo menos um neurônio conecta-se com um neurônio da camada precedente, criando um ciclo de **retroalimentação** (*feedback*).

As contribuições pioneiras para a área de Redes Neurais<sup>1</sup> foram as de McCulloch e Pitts (1943), que introduziram a ideia a partir de algoritmos computacionais e de Hebb (1949), que postulou a primeira regra para aprendizado organizado.

<sup>1</sup>Também denominadas redes neuronais, termo derivado de neurônio.

## 14.2 Perceptron

Rosenblatt (1958) introduziu o algoritmo *perceptron* como o primeiro modelo de aprendizado supervisionado. A ideia do algoritmo é atribuir pesos  $w_i$  aos dados de entrada  $\mathbf{x}$ , iterativamente, para a tomada de decisão. No caso de classificação binária, o objetivo é classificar um dado de entrada em uma de duas classes, rotuladas aqui por  $+1$  e  $-1$ .

O algoritmo *perceptron* (programado para um computador IBM 704) foi implementado em uma máquina chamada Mark I, planejada para reconhecimento de imagens (veja a Nota de Capítulo 1). O modelo subjacente consiste de uma combinação linear das entradas, incorporando um viés externo. O resultado dessa combinação linear é comparado com um limiar, definido por meio de uma **função de ativação**, que essencialmente é uma **função degrau** ou **sigmoide**.

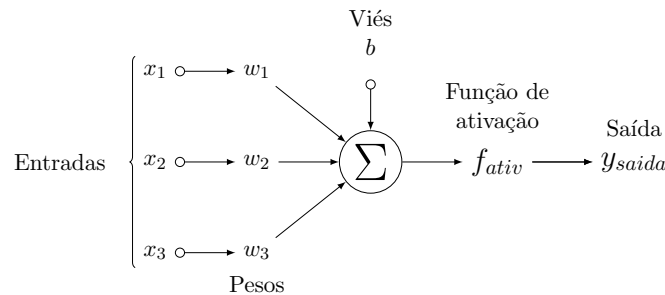
Se  $\mathbf{x} = (1, x_1, \dots, x_p)^\top$  representa um dado de entrada e  $\mathbf{w} = (-b, w_1, \dots, w_p)^\top$ , o vetor de pesos associados a cada um de seus elementos, calcula-se, inicialmente a combinação linear

$$v = \sum_{i=0}^p w_i x_i = \mathbf{w}^\top \mathbf{x}. \quad (14.1)$$

Dada uma **função de ativação**  $f(v)$ , o elemento cujos dados geraram o valor  $v$  é classificado na classe  $+1$  se  $f(v) \geq b$  ou na classe  $-1$ , se  $f(v) < b$ , ou seja,

$$f(v) = \begin{cases} 1, & \text{se } v \geq b \\ -1, & \text{se } v < b. \end{cases} \quad (14.2)$$

O parâmetro  $b$  é o **viés**. Rosenblatt propôs um algoritmo (regra de aprendizado), segundo a qual os pesos são atualizados a fim de se obter uma fronteira de decisão linear para discriminar entre duas classes linearmente separáveis. Essa ideia está representada graficamente na Figura 14.1.



**Figura 14.1:** Diagrama de um *perceptron*.

O algoritmo *Perceptron* consiste dos seguintes passos

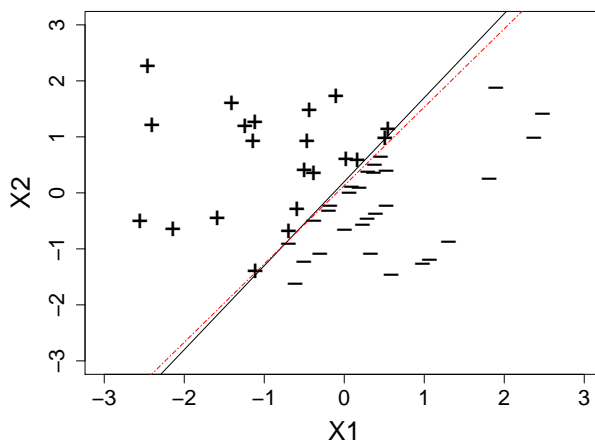
- i) Inicialize todos os pesos como sendo zero ou valores aleatórios pequenos;
- ii) Para cada dado  $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{ip})^\top$  do conjunto de treinamento:
  - a) calcule os valores da saída por meio de (14.1) - (14.2);
  - b) atualize os pesos segundo a seguinte regra de aprendizado

$$\Delta w_j = \eta(\text{alvo}_i - \text{saída}_i)x_{ij},$$

em que  $\eta$  é a taxa de aprendizado (um valor entre 0 e 1)<sup>2</sup>, **alvo** é o verdadeiro rótulo da classe ( $y_i$ ) e **saída** é o rótulo da classe prevista. Todos os pesos são atualizados simultaneamente. Por exemplo, para duas variáveis,  $x_{i1}$  e  $x_{i2}$ , os pesos  $w_0, w_1$  e  $w_2$  devem ser atualizados. Nos casos para os quais o *perceptron* prevê o rótulo da classe verdadeira,  $\Delta w_j = 0$ , para todo  $j$ . Nos casos com previsão incorreta,  $\Delta w_j = 2\eta x_{ij}$  ou  $\Delta w_j = -2\eta x_{ij}$ .

A convergência do *perceptron* somente é garantida se as duas classes são linearmente separáveis. Se não forem, podemos fixar um número máximo de iterações (conhecidas como **épocas**) ou um limiar para o número máximo tolerável de classificações erradas (veja a Nota de Capítulo 2).

**Exemplo 14.1.** Consideremos 50 valores simulados de duas variáveis,  $X_1$  e  $X_2$ , geradas segundo uma distribuição normal padrão com a classe  $Y$  igual a  $+1$  se  $X_2 > 1,5X_1 + 0,2$  e igual a  $-1$  em caso contrário. As observações e a reta  $X_2 = 1,5 \times X_1 + 0,2$  (linha sólida) além daquela gerada pelo *perceptron* (linha tracejada) estão dispostas na Figura 14.2.



**Figura 14.2:** Dados do Exemplo 14.1 com reta simulada (linha sólida) e gerada pelo *perceptron* (linha tracejada).

Existem várias propostas de algoritmos para a implementação do *perceptron*. Neste texto, consideramos aquela disponível em

<https://sokolj.com/Single-Layer-Perceptron-Implementation/>.

Uma aplicação desse algoritmo aos dados do Exemplo 14.1 com um limite inferior para a taxa de decisões corretas igual a 99% e limite para o número de épocas igual a 2000, gerou os seguintes resultados

```
[1] -10.681626    7.633474
$bias
[1] -1
```

<sup>2</sup>Embora a taxa de aprendizado afete a convergência dos algoritmos mais gerais de redes neurais, pode-se demonstrar que sua escolha não muda a convergência do *perceptron* e por esse motivo, utiliza-se  $\eta = 1$  na sua implementação.

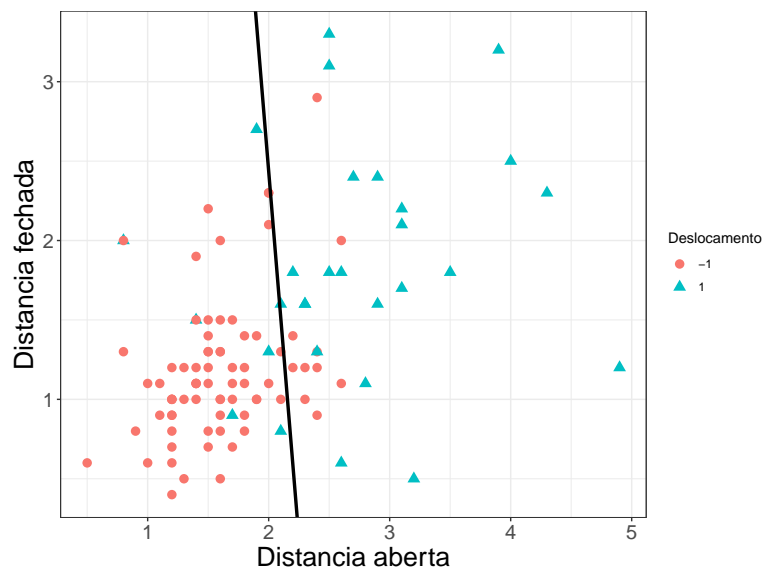
```

>true_count_percentage
TRUE
1
$epochs
[1] 9

```

que correspondem à reta  $X_2 = 0.131002 + 1.399314X_1$ , apresentada na Figura 14.2. Note que devido à separabilidade dos dois grupos, o algoritmo convergiu em apenas 9 épocas com uma taxa de acertos de 100%.

**Exemplo 14.2.** Consideremos novamente o conjunto de dados do arquivo `disco`, objeto do Exemplo 8.1. O objetivo do estudo era classificar articulações temporomandibulares com disco deslocado ou não a partir de duas distâncias medidas ultrassonograficamente na face. Os dados estão dispostos na Figura 14.3.



**Figura 14.3:** Dados de dois grupos (com ou sem deslocamento do disco) do conjunto `disco` com duas variáveis e reta *perceptron*.

Por intermédio do algoritmo utilizado no Exemplo 14.1, com um limite inferior para a taxa de decisões corretas igual a 95% e limite para o número de épocas igual a 2000, obtivemos os resultados

```

$weights
[1] 29.6 3.2
$bias
[1] -67
>true_count_percentage
TRUE
0.9038462
$epochs
[1] 2001

```

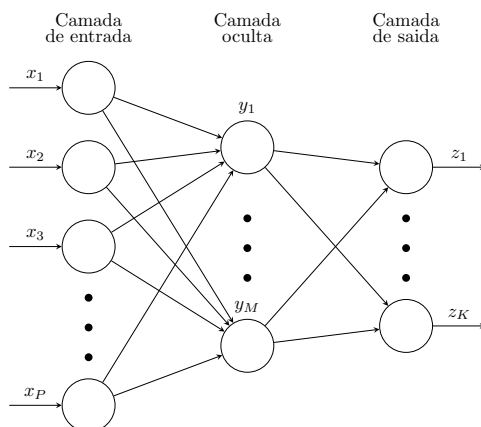
que correspondem à reta  $X_2 = 20.9375 - 9.25X_1$ , também apresentada na Figura 14.3. Neste caso o algoritmo foi interrompido na época 2000, com a porcentagem

de classificações corretas igual a 90%. No Exemplo 8.1 a porcentagem de decisões corretas obtida por meio de regressão logística foi de 85,7%.

### 14.3 Redes com camadas escondidas

Uma das redes neurais mais simples que consiste de entradas, de uma camada intermediária escondida e de saídas. Os elementos de  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)^\top$  indicam as entradas, aqueles de  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_K)^\top$  denotam as saídas, os de  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_M)^\top$  (não observáveis) constituem a camada escondida e  $\boldsymbol{\alpha}_j = (\alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jp})^\top$ ,  $j = 1, \dots, M$ ,  $\boldsymbol{\beta}_k = (\beta_{k1}, \dots, \beta_{kM})^\top$ ,  $k = 1, \dots, K$ , respectivamente, são os pesos.

Para regressão, há uma única saída ( $K = 1$ ); para classificação binária,  $K = 2$  e  $Z$  pode ter dois valores, +1 ou -1. Para classificação em mais do que 2 classes,  $K > 2$ . Esse modelo de redes neurais pode ser representado graficamente como na Figura 14.4.



**Figura 14.4:** Rede neural com uma camada escondida.

A rede neural disposta esquematicamente na Figura 14.4 pode ser descrita pelas equações:

$$Y_j = h(\alpha_{0j} + \boldsymbol{\alpha}_j^\top \mathbf{X}), \quad j = 1, \dots, M, \quad (14.3)$$

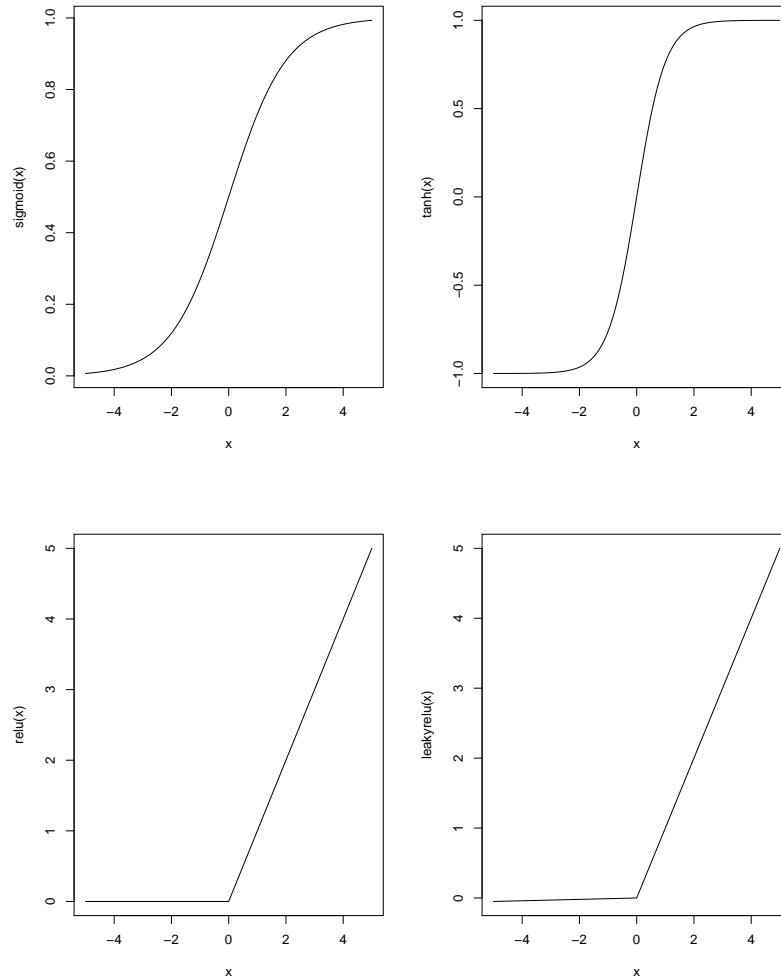
$$Z_k = g(\beta_{0k} + \boldsymbol{\beta}_k^\top \mathbf{Y}), \quad k = 1, \dots, K. \quad (14.4)$$

As funções  $h$  e  $g$  são as **funções de ativação** e as mais comumente empregadas neste contexto são

- função logística (ou sigmoide):  $f(x) = (1 + e^{-x})^{-1}$
- função tangente hiperbólica:  $f(x) = [e^x - e^{-x}] / [e^x + e^{-x}]$
- função ReLU (*rectified linear unit*):  $f(x) = \max(0, x)$ .
- função ReLU com vazamento (*leaky ReLU*):

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x > 0, \\ 0,01x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Gráficos dessas funções estão representados na Figura 14.5.



**Figura 14.5:** Algumas funções de ativação.

A função ReLU com vazamento é bastante utilizada, pois seu gradiente pode ser facilmente calculado e permite uma otimização mais rápida do que aquela associada à função sigmoide. Entretanto, ela não é derivável na origem, e no algoritmo de retroalimentação, por exemplo, necessitamos derivabilidade. A mesma função de ativação pode ser empregada em (14.3) e (14.4). Os pesos  $\alpha_{0j}$  e  $\beta_{0k}$  têm o mesmo papel de  $b$  no perceptron e representam vieses.

No lugar de (14.3)-(14.4), podemos considerar a saída da rede neural expressa na forma

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \varphi \left( \sum_{j=0}^{M-1} w_j \phi_j(\mathbf{x}) \right), \quad (14.5)$$

em que  $\phi_j, j = 0, \dots, M - 1$  são funções que dependem das funções de ativação adotadas,  $\varphi(\cdot)$  é a função identidade no caso de regressão, uma função não linear no caso de classificação e  $w_j$  são pesos a serem determinados. Com essa formulação, os seguintes passos são usualmente utilizados na análise de redes neurais (Bishop, 2006):



(i) Considere as **ativações**

$$a_j = \sum_{i=0}^p w_{ji}^{(1)} x_i, \quad j = 1, \dots, M, \quad (14.6)$$

em que, para  $j = 1, \dots, M$ , incluímos os vieses  $w_{j0}^{(1)}$  nos vetores de pesos  $\mathbf{w}_j^{(1)} = (w_{j0}^{(1)}, w_{j1}^{(1)}, \dots, w_{jp}^{(1)})^\top$ , fazendo  $x_0 = 1$ . O índice (1) no expoente de  $\mathbf{w}_j$  indica a primeira camada da rede neural.

(ii) Cada ativação  $a_j$  é transformada por meio de uma **função de ativação**  $h(\cdot)$  (dentre aquelas apresentadas acima, por exemplo), resultando em

$$y_j = h(a_j). \quad (14.7)$$

Dizemos que os  $y_j$  são as **unidades escondidas**.

(iii) Considere as **ativações de saída**

$$a_k = \sum_{j=0}^M w_{kj}^{(2)} y_j, \quad k = 1, \dots, K, \quad (14.8)$$

em que, novamente incluímos os vieses  $w_{k0}^{(2)}$  no vetor  $\mathbf{w}$ .

(iv) Finalmente, essas ativações são transformadas por meio de uma nova função de ativação ( $b$ ), resultando nas saídas  $Z_k$  da rede neural. Para problemas de regressão,  $Z_k = a_k$  e para problemas de classificação,

$$Z_k = b(a_k), \quad (14.9)$$

com  $b(a)$ , em geral, correspondendo à função logística indicada acima.

Combinando os passos indicados, obtemos

$$f_k(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = b \left[ \sum_{j=0}^M w_{kj}^{(2)} h \left( \sum_{i=0}^p w_{ji}^{(1)} x_i \right) \right]. \quad (14.10)$$

O procedimento utilizado para obter (14.10) é chamado **proalimentação** (*forward propagation*) da informação.

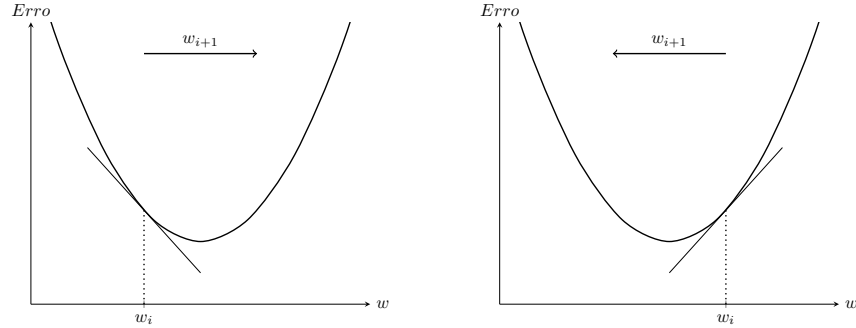
A nomenclatura empregada em redes com essa estrutura difere segundo autores e pacotes computacionais, podendo ser chamada de rede neural com 3 camadas ou de rede neural com uma camada escondida. Bishop (2006) sugere chamá-la de rede neural com duas camadas, referindo-se aos pesos  $w_{ji}^{(1)}$  e  $w_{kj}^{(2)}$ . O pacote `neuralnet` estipula o número de neurônios,  $M$ , na camada escondida.

A rede neural pode ser generalizada por meio da inclusão de camadas adicionais.

## 14.4 O algoritmo retropropagação (*backpropagation*)

O ajuste de modelos de redes neurais é baseado na minimização de uma função perda relativamente aos pesos. No caso de regressão, essa função perda usualmente é a soma dos quadrados dos resíduos (*sum of squared errors - SSE*) e no caso de

classificação, em geral, usa-se a entropia. Nos dois casos, o ajuste de uma rede neural baseia-se em um algoritmo chamado de **retropropagação** (*backpropagation*). Nesse algoritmo atualiza-se o gradiente da função perda de maneira que os pesos sejam modificados na direção oposta àquela indicada pelo sinal do gradiente até que um mínimo seja atingido. Uma representação gráfica desse processo está indicada na Figura 14.6.



**Figura 14.6:** Direção de mudança dos pesos no algoritmo retropropagação.

Se a derivada da função perda for negativa, o peso é aumentado; em caso, contrário, se a derivada da função perda for positiva o peso sofre um decréscimo.

Comumente usa-se o método do **decréscimo do gradiente** (*gradient descent*) ou suas variações, como **decréscimo estocástico do gradiente** (*stochastic gradient descent*). Veja Rumelhart et al. (1986a, 1986b) para detalhes.

Para a implementação do algoritmo, é necessário escolher valores iniciais e de regularização (usando uma função penalizadora), porque o algoritmo de otimização não é convexo e é instável. Em geral, o problema de otimização da rede neural pode ser posto na forma:

$$\hat{\mathbf{w}} = \arg \min_{\mathbf{w}} \tilde{Q}_n(\mathbf{w}) = \arg \min_{\mathbf{w}} [\lambda_1 Q_n(\mathbf{w}) + \lambda_2 Q^*(\mathbf{w})], \quad (14.11)$$

em que  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ ,

$$Q_n(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^n [y_i - f(\mathbf{x}_i, \mathbf{w})]^2, \quad (14.12)$$

e  $Q^*(\mathbf{w})$  denota um termo de regularização, que pode ser escolhido entre aqueles estudados no Capítulo 11 (*lasso*, *ridge* ou *elastic net*).

Podemos idealizar uma rede neural como em (14.5), ou seja, como uma função não linear paramétrica (determinística) de uma entrada  $\mathbf{x}$ , tendo  $\mathbf{z}$  como saída. Consideremos os vetores do conjunto de treinamento,  $\mathbf{x}_i$ , os vetores alvos (saídas)  $\mathbf{z}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  e a soma dos quadrados dos erros (14.12) que queremos minimizar, ligeiramente modificada como

$$Q_n(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \|z_i - f(\mathbf{x}_i, \mathbf{w})\|^2. \quad (14.13)$$

Tratemos primeiramente o problema de regressão, considerando a rede neural com um erro aleatório  $e_i$  acrescentado antes da saída, de modo a associar ao algoritmo um modelo probabilístico. Por simplicidade, consideremos a saída

$\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)^\top$  e os erros com distribuição Normal, com média zero e variância  $\sigma^2$ , de modo que

$$\mathbf{z} \sim N_n[f(\mathbf{x}_i, \mathbf{w}), \sigma^2 \mathbf{I}].$$

Admitamos ainda que a função de ativação de saída é a função identidade. Organizando os vetores de entrada na matriz  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$ , a verossimilhança pode ser escrita como

$$L(\mathbf{z}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n \phi(z_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{w}, \sigma^2)$$

em que  $\phi$  denota a função densidade de uma distribuição normal. Maximizar a log-verossimilhança é equivalente a minimizar (14.12), e como resultado da minimização, obtemos o estimador de máxima verossimilhança  $\hat{\mathbf{w}}_{MV}$  dos pesos  $\mathbf{w}$  e consequentemente, o estimador de máxima verossimilhança de  $\sigma^2$ . Como  $Q_n(\mathbf{w})$  é uma função não linear não convexa, podemos obter máximos não locais da verossimilhança.

No caso de classificação binária, para a qual, por exemplo,  $z = +1$  indica a classe  $C_1$  e  $z = 0$  indica a classe  $C_2$ , consideremos uma rede neural com saída única  $z$  com função de ativação logística,

$$b(a) = \frac{1}{1 + e^{-a}},$$

de modo que  $0 \leq f(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \leq 1$ . Podemos interpretar  $f(\mathbf{x}, \mathbf{w})$  como  $P(z = 1|\mathbf{x})$  e  $1 - f(\mathbf{x}, \mathbf{w})$  como  $P(z = 0|\mathbf{x})$ . A distribuição de  $z$ , dado  $\mathbf{x}$ , é

$$f(z|\mathbf{x}, \mathbf{w}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{w})^z [1 - f(\mathbf{x}, \mathbf{w})]^{1-z}. \quad (14.14)$$

Considerando as observações de treinamento independentes e identicamente distribuídas, a função perda usual é a **entropia cruzada**

$$Q_n(\mathbf{w}) = - \sum_{i=1}^n [v_i \log v_i - (1 - v_i) \log(1 - v_i)], \quad (14.15)$$

em que  $v_i = f(\mathbf{x}_i, \mathbf{w})$ .

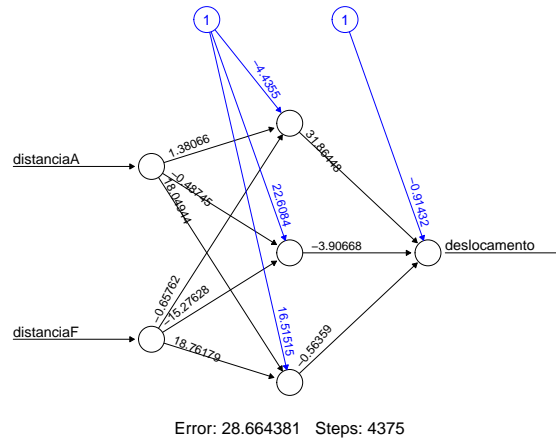
Para otimizar os pesos  $\mathbf{w}$ , ou seja, encontrar o valor que minimiza  $Q_n(\mathbf{w})$ , usualmente, precisamos obter o gradiente de  $Q_n$ , denotado  $\nabla Q_n$  e que aponta para a maior taxa de aumento de  $Q_n$ . Supondo que  $Q_n$  seja uma função contínua suave de  $\mathbf{w}$ , o valor mínimo ocorre no ponto em que o gradiente se anula. Em geral, procedimentos numéricos são usados com essa finalidade e há uma literatura extensa sobre o assunto. As técnicas que usam o gradiente, começam fixando-se um valor inicial  $\mathbf{w}^{(0)}$  para os pesos que são iterativamente atualizados por meio de

$$\mathbf{w}^{(r+1)} = \mathbf{w}^{(r)} - \lambda \nabla Q_n(\mathbf{w}^{(r)}),$$

em que  $\lambda$  é chamada de **taxa de aprendizado**. Esse método, chamado de **método de decréscimo do gradiente**, usa todo o conjunto de treinamento mas não é muito eficiente. Na prática, usa-se o algoritmo retropropagação descrito na Nota de Capítulo 3, para calcular o gradiente de (14.12) em uma rede neural.

**Exemplo 14.3.** Consideremos novamente os dados do Exemplo 14.2 e ajustemos uma rede neural com uma camada escondida, 3 neurônios, função de ativação logística (sigmoide) e entropia cruzada como função de perda (veja a Nota de Capítulo 1 do Capítulo 10). Os comandos do pacote `neuralnet` para implementação do modelo e construção do gráfico da Figura 14.7 são

```
> rn3disco <- neuralnet(data=disco, deslocamento ~ distanciaA +
  distanciaF, hidden=3, act.fct="logistic",
  linear.output=FALSE, err.fct ="ce")
> plot(rn3disco, information=TRUE)
```



**Figura 14.7:** Rede neural com uma camada escondida para o Exemplo 14.3 (setas pretas indicam pesos e setas azuis, interceptos).

Os resultados gerados pelo algoritmo após 4375 iterações são:

```
$result.matrix
                                [,1]
error                            2.866438e+01
reached.threshold                 9.160414e-03
steps                             4.375000e+03
Intercept.to.1layhid1            -4.435500e+00
distanciaA.to.1layhid1           1.380656e+00
distanciaF.to.1layhid1           -6.576245e-01
Intercept.to.1layhid2             2.260840e+01
distanciaA.to.1layhid2           -4.874531e-01
distanciaF.to.1layhid2           -1.527628e+01
Intercept.to.1layhid3             1.651515e+01
distanciaA.to.1layhid3           1.804944e+01
distanciaF.to.1layhid3           1.876179e+01
Intercept.to.deslocamento        -9.143182e-01
1layhid1.to.deslocamento         3.186448e+01
1layhid2.to.deslocamento        -3.906681e+00
1layhid3.to.deslocamento        -5.635863e-01
```

Neste exemplo,  $p = 2$ ,  $M = 3$  e  $K = 1$  de forma que as equações (14.3)-(14.4) são particularizadas como:

$$\begin{aligned} Y_1 &= -4,436 + 1,381 \text{ distanciaA} - 6,576 \text{ distanciaF} \\ Y_2 &= 22,608 - 0,487 \text{ distanciaA} - 15,276 \text{ distanciaF} \\ Y_3 &= 16,515 + 18,049 \text{ distanciaA} + 18,762 \text{ distanciaF.} \end{aligned}$$

A equação que define a classificação é

$$Z = -0,914 - 31,864Y_1 - 3,907Y_2 - 0,564Y_3.$$

Para avaliar os erros de predição relativamente aos dados do conjunto de treinamento (neste caso, o conjunto com todos os 104 elementos disponíveis), por meio de uma tabela de confusão, podemos utilizar os comandos

```
> predict <- compute(rn3disco, disco)
> result <- data.frame(actual = disco$deslocamento,
                       prediction = predict$net.result)
> roundedresult<-sapply(result, round, digits=0)
> roundedresultdf <- data.frame(roundedresult)
> table(roundedresultdf$actual, roundedresultdf$prediction)
```

que produzem a tabela

	0	1
0	73	2
1	8	21

indicando uma taxa de erros de  $9,6\% = 10/104$ .

Consideremos agora um conjunto de previsão com 5 observações de entradas, a saber

distanciaA	distanciaF
2.3	1.7
1.6	1.2
1.2	0.8
2.5	1.5
1.2	0.9

A previsão para os elementos desse conjunto são obtidas por meio dos comandos

```
Predict=compute(rn3disco, teste)
Predict$net.result
      [,1]
[1,] 0.76544019
[2,] 0.02229537
[3,] 0.01397846
[4,] 0.84845246
[5,] 0.01503041
```

Utilizando o limiar 0,5 para classificação, apenas os elementos 1 e 4 são incluídos no grupo com deslocamento do disco.

O problema de classificação é bem mais complexo quando a variável resposta tem  $K > 2$  categorias. As soluções mais simples consistem em ajustar  $M$  redes neurais com uma das seguintes estratégias

- OAA: **Uma contra todas** (*One Against All*) em que cada uma das  $M = K$  redes neurais envolvem a categoria  $i$  contra as demais.
- OAQ: **Uma contra outra** (*One Against One*) em que cada uma das  $M = K(K + 1)/2$  redes envolvem a categoria  $i$  contra a categoria  $j$ ,  $i, j = 1, \dots, K, i \neq j$ .
- PAQ:  **$P$  categorias contra  $Q$  categorias** (*P Against Q*) em que as categorias de resposta são agrupadas em duas categorias.

Nos três casos, o resultado depende de uma estratégia de decisão adicional. No caso OAO, três padrões de resultados são possíveis:

- i) A função de saída  $f_i(\mathbf{x}) = 1$  se a entrada  $\mathbf{x}$  corresponde à categoria  $i$  e  $f_i(\mathbf{x}) = 0$  se  $\mathbf{x}$  corresponde à categoria  $j \neq i$ . Nesse caso, a decisão pode ser representada por  $D(\mathbf{x}, f_1, \dots, f_K) = \operatorname{argmax}_{i=1, \dots, K}(f_i)$ .
- ii) A função de saída  $f_i(\mathbf{x}) = 0$ ,  $i = 1, \dots, K$ . Nesse caso a resposta seria “não sei”, mas uma solução consiste em utilizar os valores da função de ativação de saída para cada uma das  $K$  redes neurais e classificar  $\mathbf{x}$  na categoria para a qual se obteve o maior valor dessa função, ou seja  $D(\mathbf{x}, y_1, \dots, y_K) = \operatorname{argmax}_{i=1, \dots, K}(y_i)$ .
- iii) Mais do que uma das  $K$  redes neurais indicam  $f_i(\mathbf{x}) = 1$ . Nesse caso, a solução mais simples é indicar um empate entre as categorias para as quais o resultado foi coincidente. Alternativamente, a mesma estratégia considerada no item ii) poderia ser empregada.

Para os casos OAO e PAQ, além de mais detalhes sobre esse problema, o leitor poderá consultar Ou e Murphy (2007).

Redes neurais também podem ser utilizadas em problemas de regressão, como indicado no seguinte exemplo.

**Exemplo 14.4.** Consideremos novamente os dados do arquivo `esforco`, objeto do Exemplo 11.2, agora avaliados sob a perspectiva de redes neurais. As variáveis de entrada são `NYHA`, `idade`, `altura`, `peso`, `fcrep` (frequência cardíaca em repouso) e `vo2rep` (VO2 em repouso) e a variável a ser predita é `vo2fcpico` (VO2/FC no pico do exercício). Com esse propósito, adotamos uma rede neural com duas camadas escondidas, a primeira com três neurônios e a segunda com apenas um. Embora outras alternativas sejam adequadas para a utilização da variável categorizada `NYHA`, dada a sua natureza ordinal, é comum utilizar escores nesse contexto. Aqui, consideramos escores 0, 1, 2, 3 e 4 para indicar as categorias crescentes de gravidade da doença. Além disso, em função das diferentes magnitudes das variáveis de entrada convém normalizá-las ou padronizá-las para melhorar a eficiência do algoritmo. Neste caso, optamos por considerar a normalização  $x^* = [x - \min(x)] / [\max(x) - \min(x)]$ .

Separamos as 127 observações disponíveis em um conjunto de treinamento e outro para validação, com 90 e 37 observações, respectivamente. Os comandos para o ajuste da rede neural com função de ativação **tangente hiperbólica** são

```
> rn31train <- neuralnet(data=trainset, vo2fcpico ~ NYHA + idade +
  altura + peso + fcrep + vo2rep, hidden=c(3,1),
  linear.output=FALSE, act.fct="tanh")
```

Os resultados da última iteração, obtidos por intermédio do comando

```
rn31train$result.matrix
```

são

```
error                0.75315582
reached.threshold    0.00983606
steps                317.00000000
Intercept.to.1layhid1 8.87058762
NYHA.to.1layhid1     9.11759607
idade.to.1layhid1    6.70251176
altura.to.1layhid1   8.30167429
```

---

peso.to.1layhid1	6.94927774
fcrep.to.1layhid1	6.62172171
vo2rep.to.1layhid1	7.19444980
Intercept.to.1layhid2	-0.94689033
NYHA.to.1layhid2	0.68553149
idade.to.1layhid2	0.15610993
altura.to.1layhid2	-0.70991221
peso.to.1layhid2	-1.40042645
fcrep.to.1layhid2	0.74458406
vo2rep.to.1layhid2	-0.94519393
Intercept.to.1layhid3	-0.82760681
NYHA.to.1layhid3	-1.03059242
idade.to.1layhid3	-1.16923653
altura.to.1layhid3	1.91677280
peso.to.1layhid3	1.42828815
fcrep.to.1layhid3	-1.82273554
vo2rep.to.1layhid3	-1.26814494
Intercept.to.2layhid1	0.46516016
1layhid1.to.2layhid1	-1.36510688
1layhid2.to.2layhid1	0.78208637
1layhid3.to.2layhid1	-1.22107265
Intercept.to.vo2fcpico	-0.07411575
2layhid1.to.vo2fcpico	-0.99546738

Foram necessárias 317 iterações para a convergência e a soma de quadrados dos erros resultante foi 0.75315582. Essa soma de quadrados refere-se ao conjunto de dados normalizados. Utilizando a transformação inversa, pode-se obter os valores preditos na escala original e calcular a soma de quadrados dos erros nessa escala, que para esses dados de treinamento é 1,809. Utilizando o resultado da rede neural ajustada, também pode-se fazer a previsão para os dados do conjunto de validação e considerar a mesma transformação inversa para gerar as previsões na escala original; a soma de quadrados dos erros nesse caso é 2,105, que, como esperado é maior que a soma de quadrados dos erros para o conjunto de treinamento.

O comando `plot(rn31train)` permite gerar uma representação gráfica da rede ajustada, disposta na Figura 14.8.

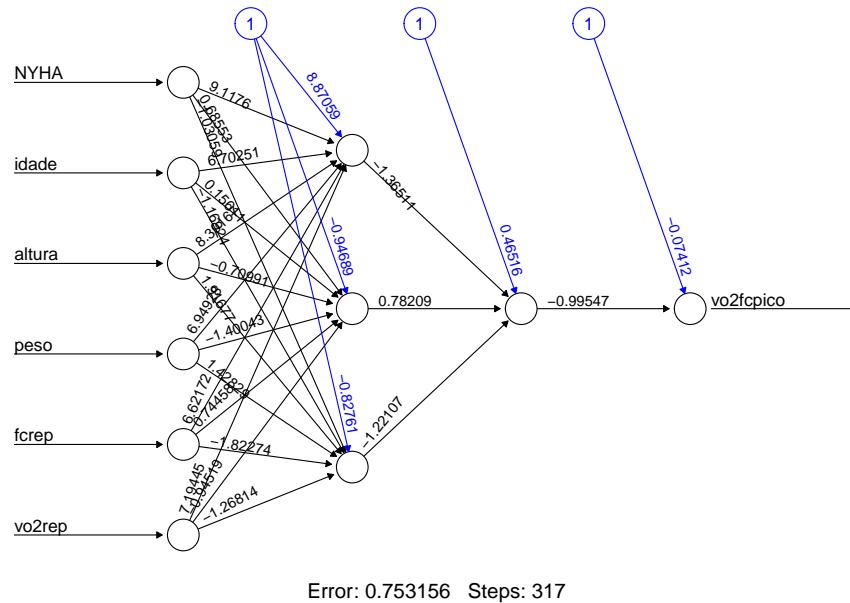


Figura 14.8: Rede neural com duas camadas escondidas para o Exemplo 14.4.

## 14.5 Aprendizado profundo (*Deep learning*)

O aprendizado com máquina, ou automático (*machine learning*) envolve procedimentos segundo os quais um sistema computacional adquire a habilidade de “aprender” extraindo padrões de conjuntos de dados. Tanto na programação clássica quanto no aprendizado automático, nada é conseguido sem dados, que podem tomar a forma de números, vetores, curvas, imagens, palavras etc. O desempenho de um algoritmo de aprendizado automático depende da representação desses dados por meio de funções pré-determinadas, como a logística, tangente hiperbólica etc. A escolha dessa representação é crucial para o bom desempenho dos algoritmos.

No caso de redes neurais com várias camadas intermediárias obtém-se o que é chamado **aprendizado profundo** (*deep learning*), em que o sistema computacional “aprende” a partir dos dados (e exemplos) em termos de uma hierarquia de conceitos, cada um definido por meio de sua relação com conceitos mais simples, ou ainda, “aprende” conceitos complicados a partir de conceitos simples.

Um exemplo de modelo de aprendizado profundo é o **perceptron multicamadas** (*multilayer perceptron*), que essencialmente é uma aplicação que transforma os dados de entrada em valores de saída por meio de composição de funções simples. Segundo Goodfellow et al. (2016), modelos de aprendizado profundo remontam à década de 1940, sob os rótulos de **Cibernética** (1940-1960), **conexcionismo acoplado a redes neurais** (1980-1990) e ressurgiu em 2006 com a nova denominação.

O aprimoramento desses algoritmos tornou-se necessário em função do crescimento exponencial da quantidade de dados facilmente disponíveis para a tomada de decisões. O tamanho dos conjuntos de dados que chegava à ordem de centenas ou milhares de observações na década de 1900-1980 (*small data*) expandiu-se para centenas de milhares após 1990 (*big data* ou **megadados**). Um exemplo que consiste de fotos de dígitos escritos a mão e é bastante estudado na área é o MNIST (*modified National Institute of Standards and Technology*). A partir do início deste século,



conjuntos de dados ainda maiores surgiram, contendo dezenas de milhões de dados, notadamente aqueles obtidos na Internet. Para analisar megadados foi necessário o desenvolvimento de CPU (*Central Processing Unit*) mais rápidas, GPU (*Graphic Processing Unit*), usadas em celulares, computadores pessoais, estações de trabalho e consoles de jogos, e que são muito eficientes em computação gráfica e processamento de imagens e, mais recentemente, das TPU (*tensor processing units*). As estruturas altamente paralelas dessas unidades de processamento as torna eficientes para algoritmos que processam grandes blocos de dados em paralelo.

Conforme Chollet (2018), possíveis aplicações podem envolver:

- classificação de imagens com nível quase humano (NQH);
- reconhecimento de fala com NQH;
- transcrições de textos escritos a mão com NQH;
- aperfeiçoamento de técnicas de aprendizado profundo;
- aperfeiçoamento de conversões texto-para-fala;
- carros autônomos com NQH;
- aperfeiçoamento de buscas na Internet;
- assistentes digitais, como o Google Now e Amazon Alexa;
- habilidade para responder questões sobre linguagens naturais.

Muitas aplicações ainda levarão muito tempo para serem factíveis e questões relativas ao seu desenvolvimento por sistemas computacionais, da inteligência ao nível humano, não devem ser seriamente consideradas no presente estágio de conhecimento. Em particular, muitas afirmações feitas nas décadas de 1960-1970 e 1980-1990 sobre **sistemas inteligentes** (*expert systems*) e inteligência artificial em geral, não se concretizaram e levaram a um decréscimo de investimento em pesquisa na área.

Em termos de software, há diversos pacotes para aprendizado automático e profundo, como **Theano**, **Torch**, **MXNet** e **TensorFlow**.

A complexidade dos algoritmos desenvolvidos com o propósito de análise de megadados é proporcional ao número de observações, número de preditores, número de camadas e número de épocas de treinamento. Para detalhes sobre esses tópicos, veja Hastie et al. (2017) e Chollet (2018).

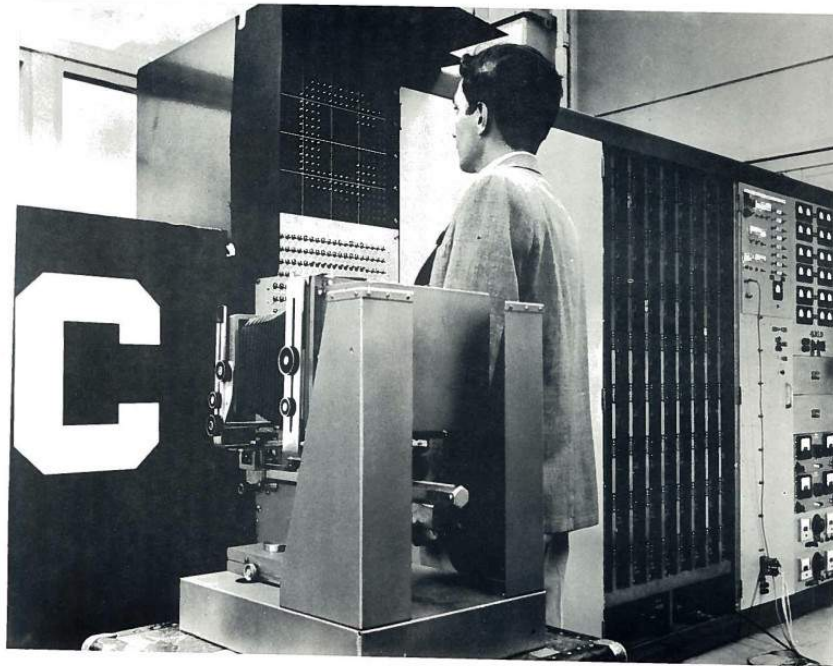
Para analisar redes neurais com várias camadas é possível usar o pacote **keras** do R, que por sua vez usa o pacote **Tensorflow** com capacidades CPU e GPU. Modelos *deep learning* que podem ser analisados incluem redes neurais recorrentes (*recurrent neural networks* - RNN), redes *Long Short-Term Memory* (LSTM), *Convolved Neural Network* (CNN), Multilayer Perceptron etc.

As redes LSTM são apropriadas para captar dependências de longo prazo e implementar previsão de séries temporais.

## 14.6 Notas de capítulo

### 1) O Perceptron Mark I

A seguinte fotografia do Perceptron Mark I foi retirada do relatório “PERCEPTRONS AND THE THEORY OF BRAIN MECHANISMS”, de março de 1961, Cornell Aeronautical Laboratory.



THE MARK I PERCEPTRON

## 2) Convergência do *perceptron*.

O algoritmo de aprendizado do *perceptron* pode ser formulado como

- a) Defina  $\text{sinal}(z) = 1$  se  $z \geq 0$  e  $\text{sinal}(z) = -1$  em caso contrário.
- b) Defina as entradas do algoritmo: número de iterações,  $T$ , e dados de treinamento  $(\mathbf{x}_t, y_t)$ ,  $t = 1, \dots, n$  com  $y_i \in \{-1, +1\}$  indicando os rótulos das classes.
- c) Inicialize o processo com pesos  $\mathbf{w} = 0$ .
- d) Para  $j = 1, \dots, T$  e  $t = 1, \dots, n$ 
  - i)  $y^* = \text{sinal}(\mathbf{w}^\top \mathbf{x}_t)$
  - ii) Se  $y^* \neq y_t$ , então  $\mathbf{w} = \mathbf{w} + y_t \mathbf{x}_t$ . Em caso contrário, não altere  $\mathbf{w}$ .

A convergência do perceptron é garantida pelo seguinte teorema.

**Teorema:** Suponha que exista algum parâmetro  $\mathbf{w}^*$  com norma euclidiana unitária e alguma constante  $\gamma > 0$  tal que, para todo  $t = 1, \dots, n$  tenhamos  $y_t(\mathbf{w}^{*\top} \mathbf{x}_t) \geq \gamma$ . Suponha, ainda, que para todo  $t = 1, \dots, n$ ,  $\|\mathbf{x}_t\| \leq R$  em que  $R$  é um número inteiro. Então, o algoritmo do perceptron converge depois de  $R^2/\gamma^2$  atualizações. A demonstração pode ser obtida de

[http:](http://www.cs.columbia.edu/~mcollins/courses/notes/perc.converge.pdf)

[//www.cs.columbia.edu/~mcollins/courses/notes/perc.converge.pdf](http://www.cs.columbia.edu/~mcollins/courses/notes/perc.converge.pdf)

## 3) Algoritmo de retropropagação (*backpropagation*)

Aqui vamos nos basear nas expressões (14.3)-(14.4) e em Hastie et al. (2017). Podemos usar também (14.6)-(14.10), conforme indicado em Bishop (2006). Façamos  $\mathbf{w} = (\alpha_0, \dots, \alpha_M, \beta_0, \dots, \beta_K)^\top$  e consideremos  $Q_n(\mathbf{w})$  escrita de modo geral como

$$Q_n(\mathbf{w}) = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^n [z_{ik} - f(\mathbf{x}_i, \mathbf{w})]^2,$$

e sejam  $\mathbf{y}_i = (y_{1i}, \dots, y_{Mi})^\top$  com

$$y_{mi} = h(\boldsymbol{\alpha}_m^\top \mathbf{x}_i).$$

Considerando as observações  $\mathbf{x}_i$  independentes e igualmente distribuídas como na Seção 14.4, escrevemos  $Q_n(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^n Q_i(\mathbf{w})$  e as derivadas

$$\partial Q_i / \partial \beta_{km} = -2[z_{ik} - f(\mathbf{x}_i, \mathbf{w})] f'(\boldsymbol{\beta}_k^\top \mathbf{y}_i) y_{mi}, \quad (14.16)$$

$$\partial Q_i / \partial \alpha_{m\ell} = -\sum_{k=1}^K 2[z_{ik} - f(\mathbf{x}_i, \mathbf{w})] f'(\boldsymbol{\beta}_k^\top \mathbf{y}_i) \beta_{km} h'(\boldsymbol{\alpha}_m^\top \mathbf{x}_i) x_{i\ell}.$$

A  $(r+1)$ -ésima iteração do algoritmo é dada por

$$\beta_{km}^{(r+1)} = \beta_{km}^{(r)} - \lambda_r \sum_{i=1}^n \frac{\partial Q_i}{\partial \beta_{km}^{(r)}}, \quad (14.17)$$

$$\alpha_{m\ell}^{(r+1)} = \alpha_{m\ell}^{(r)} - \lambda_r \sum_{i=1}^n \frac{\partial Q_i}{\partial \alpha_{m\ell}^{(r)}}, \quad (14.18)$$

em que  $\lambda_r$  é a taxa de aprendizagem. Escrevamos as derivadas dispostas em (14.16) como

$$\partial Q_i / \partial \beta_{km} = \delta_{ki} y_{mi}, \quad (14.19)$$

$$\partial Q_i / \partial \alpha_{m\ell} = s_{mi} x_{i\ell}, \quad (14.20)$$

em que  $\delta_{ki}$  e  $s_{mi}$  são os erros do modelo atual na saída e camadas escondidas, respectivamente. De suas definições, esses erros satisfazem

$$s_{mi} = h'(\boldsymbol{\alpha}_m^\top \mathbf{x}_i) \sum_{k=1}^K \beta_{km} \delta_{ki}, \quad (14.21)$$

conhecidas como **equações de retropropagação** (*backpropagation*) e que podem ser usadas para implementar (14.19) e (14.20) em dois passos: um para a frente, em que os pesos atuais são fixos e os valores previstos de  $f(\mathbf{x}, \mathbf{w})$  são calculados a partir de (14.21); um para trás, em que os erros  $\delta_{ki}$  são calculados e propagados via (14.19) e (14.20) para obter os erros  $s_{mi}$ . Os dois conjuntos de erros são então usados para calcular os gradientes para atualizar (14.16) via (14.19) e (14.20). Uma **época de treinamento** refere-se a uma iteração por todo o conjunto de treinamento.

## 14.7 Exercícios

- 1) Escreva explicitamente as equações que determinam a rede neural usando os pesos obtidos no Exemplo 14.4.
- 2) Considere o caso de classificação em  $K$  classes binárias e uma rede neural com  $K$  saídas, cada uma com função de ativação logística e  $z_k \in \{0,1\}$ ,  $k = 1, \dots, K$ , supostas independentes, dada a entrada  $\mathbf{x}$ . Mostre que a distribuição condicional é dada por

$$p(\mathbf{z}|\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \prod_{k=1}^K f_k(\mathbf{x}, \mathbf{w})^{z_k} [1 - f_k(\mathbf{x}, \mathbf{w})]^{1-z_k}$$

e que

$$Q_n(\mathbf{w}) = - \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^K [z_{ik} \log z_{ik} - (1 - z_{ik}) \log(1 - z_{ik})],$$

em que  $z_{ik} = f_k(\mathbf{x}_i, \mathbf{w})$ .

- 3) Considere agora, o caso de classificação em  $K$  classes mutuamente exclusivas. Cada dado  $\mathbf{x}_i$  é associado a uma dessas classes, com  $z_k \in \{1, \dots, K\}$  e as saídas interpretadas com  $f_k(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = p(z_k = 1 | \mathbf{x})$ . A função de ativação é

$$f_k(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \frac{e^{a_k(\mathbf{x}, \mathbf{w})}}{\sum_j e^{a_j(\mathbf{x}, \mathbf{w})}},$$

satisfazendo  $0 \leq f_k \leq 1$  e  $\sum_k f_k = 1$ .

Mostre que

$$Q_n(\mathbf{w}) = - \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^K z_{ik} \log f_k(\mathbf{x}_i, \mathbf{w}).$$

# Apêndices



# Otimização numérica

When the solution is simple, God is answering.

A. Einstein

## A.1 Introdução

Há, basicamente, duas classes de algoritmos de otimização: algoritmos baseados no gradiente de uma **função objetivo**, possivelmente definida no espaço  $\mathbb{R}^n$ , e **algoritmos não gradientes**. Os primeiros são indicados para maximizar funções objetivo suaves (ou seja, deriváveis) em que há informação confiável sobre o seu gradiente. Em caso contrário, devemos recorrer a métodos não gradientes. Neste texto vamos nos concentrar na primeira classe. Para alguns detalhes sobre métodos não gradientes, veja a Nota de Capítulo 1.

Essencialmente, nosso objetivo é apresentar alguns algoritmos utilizados para maximizar ou minimizar uma função  $f(\boldsymbol{\theta})$ , em que  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_d)^\top$  é um parâmetro  $d$ -dimensional.

Dentre os algoritmos mais utilizados, destacamos os algoritmos de Newton-Raphson, “scoring”, Gauss-Newton, Quase-Newton e EM (Esperança-Maximização). Em Estatística, esses algoritmos são geralmente utilizados para maximizar a função de verossimilhança ou, no caso de inferência bayesiana, a função densidade a posteriori. Uma característica desses algoritmos é que eles são procedimentos **iterativos** em que em determinado estágio computa-se o valor  $\boldsymbol{\theta}^{(i)}$  que é utilizado para obter um valor atualizado  $\boldsymbol{\theta}^{(i+1)}$  no estágio seguinte. Esse processo é repetido até que haja **convergência**, ou seja, até que a diferença entre os resultados de dois passos consecutivos seja arbitrariamente pequena, por exemplo, em que  $\|\boldsymbol{\theta}^{(i+1)} - \boldsymbol{\theta}^{(i)}\| < \varepsilon$  com  $\varepsilon > 0$ , escolhido convenientemente.

O contexto mais comum de aplicação desses algoritmos é o de estimação de parâmetros. No caso de funções de verossimilhança, busca-se o **estimador de máxima verossimilhança** do parâmetro  $\boldsymbol{\theta}$ . No caso da função densidade a posteriori, procura-se sua moda (ou modas). Esse tipo de algoritmo também é usado em redes neurais, em que se minimiza uma função de perda, que pode ser uma soma de quadrados como em regressão, ou a entropia, no caso de classificação.

Em modelos lineares com erros independentes e normais, a função de verossimilhança é quadrática e usualmente podemos obter o máximo em forma fechada, resolvendo um sistema de equações lineares nos parâmetros. Para modelos não lineares, a função de verossimilhança não é quadrática nos parâmetros e sua otimização envolve a solução de equações não lineares, em geral sem solução analítica. Alguns

exemplos são os modelos de regressão não linear, modelos ARMA (autorregressivos e de médias móveis) etc.

Em geral, para a maximização de uma função  $f$  em relação a um parâmetro  $d$ -dimensional  $\theta$ , consideramos:

$$\frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} = \mathbf{g}(\theta), \text{ com dimensão } d \times 1, \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial \theta \partial \theta^\top} = \mathbf{H}(\theta), \text{ com dimensão } d \times d. \quad (\text{A.2})$$

As funções  $\mathbf{g}(\theta)$  e  $\mathbf{H}(\theta)$  são conhecidas, respectivamente, por **gradiente** e **hessiano** da função  $f$ . Por exemplo, no caso bidimensional, em que  $\theta = (\theta_1, \theta_2)^\top$ , temos

$$\mathbf{g}(\theta) = (\partial f(\theta)/\partial \theta_1, \partial f(\theta)/\partial \theta_2)^\top,$$

$$\mathbf{H}(\theta) = \begin{bmatrix} \partial^2 f(\theta)/\partial \theta_1^2 & \partial^2 f(\theta)/\partial \theta_1 \partial \theta_2 \\ \partial^2 f(\theta)/\partial \theta_1 \partial \theta_2 & \partial^2 f(\theta)/\partial \theta_2^2 \end{bmatrix}.$$

Problemas de minimização muitas vezes podem ser reduzidos a problemas de maximização, pois maximizar  $f(\theta)$ , com respeito a  $\theta$ , é equivalente a minimizar  $-f(\theta)$ , com respeito a  $\theta$ .

Se  $\mathbf{g}(\theta)$  e  $\mathbf{H}(\theta)$  existirem e forem contínuas na vizinhança de  $\hat{\theta}$ , então  $\mathbf{g}(\hat{\theta}) = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{H}(\hat{\theta})$  negativa definida são condições suficientes para que  $\hat{\theta}$  seja um máximo local de  $f(\theta)$ . Essas condições não garantem, contudo, que  $\hat{\theta}$  seja um maximizador global de  $f(\theta)$ . Uma raiz nula da equação de estimação pode não ser um ponto de máximo ou mínimo, mas um **ponto de sela**, que é um máximo local com respeito a uma direção e um mínimo local com respeito a outra direção. Nesse caso, a matriz de segundas derivadas não é negativa definida.

Problemas de convergência dos algoritmos utilizados na maximização estão usualmente relacionados com a escolha de um valor inicial,  $\theta^{(0)}$ . Além disso, dependendo da forma de  $f(\theta)$ , o algoritmo pode convergir para um máximo local e não para um global.

A maioria dos procedimentos iterativos são **métodos gradientes**, ou seja, baseados no cálculo de derivadas de  $f(\theta)$ , e no caso uniparamétrico ( $d = 1$ ), são da forma

$$\theta^{(i+1)} = \theta^{(i)} + \lambda s(\theta^{(i)}), \quad (\text{A.3})$$

em que  $\theta^{(i)}$  é a aproximação atual do máximo,  $\theta^{(i+1)}$  é o estimador revisado,  $s(\theta)$  é um vetor de direção com dimensão  $d$  que depende do gradiente  $g(\theta)$  e  $\lambda > 0$  é o “tamanho do passo” para a mudança de  $\theta^{(i)}$ . Em geral,  $s(\theta) = V(\theta)g(\theta)$  com  $V(\theta)$  dependente do algoritmo usado para a maximização. Diferentes algoritmos baseados no método do **gradiente descendente** (*steepest descent*, ou *gradient descent*), *quadratic hill climbing*, método de Newton-Raphson etc. são tradicionalmente usados.

Dizemos que o procedimento iterativo **convergiu** se uma das seguintes condições for satisfeita:

- i)  $f[\theta^{(i+1)}]$  estiver próxima de  $f[\theta^{(i)}]$ ;
- ii)  $\theta^{(i+1)}$  estiver próximo de  $\theta^{(i)}$ ;
- iii)  $g[\theta^{(i+1)}]$  estiver próxima de  $g[\theta^{(i)}]$ .



Dado  $\varepsilon$ , um escalar pequeno positivo, então i) estará satisfeita se

$$|f[\theta^{(i+1)}] - f[\theta^{(i)}]| < \varepsilon.$$

No caso ii), para definir a convergência do algoritmo, podemos usar  $|\theta^{(i+1)} - \theta^{(i)}| < \varepsilon$ , se a solução envolver um valor pequeno ou  $|(\theta^{(i+1)} - \theta^{(i)})/\theta^{(i)}| < \varepsilon$ , se a solução for um valor grande. No caso multiparamétrico, ii) e iii) dependem de algum tipo de norma para medir a proximidade de dois vetores.

Os procedimentos iterativos podem depender de primeiras e segundas derivadas, que, em cada passo, devem ser calculadas analítica ou numericamente no valor atual,  $\theta^{(i)}$ . Por exemplo,  $\partial f(\theta)/\partial \theta_i$  pode ser calculada por

$$\frac{f[\theta^{(i)} + \delta] - f[\theta^{(i)}]}{\delta}$$

em que  $\delta$  é um passo de comprimento suficientemente pequeno. Derivadas segundas também podem ser calculadas numericamente de modo análogo.

**Exemplo A.1.** Consideremos a função

$$f(\theta) = \theta^2 - 4\theta + 3.$$

Então  $g(\theta) = df(\theta)/d\theta = 2\theta - 4$  e  $G(\theta) = d^2f(\theta)/d\theta^2 = 2 > 0$ . Logo  $\theta = 2$  é ponto de mínimo e o valor mínimo é  $-1$ . Tomemos  $\theta_1 = 0,5$  e  $\theta_2 = \theta_1 + \delta$ , com  $\delta = 0,01$ . Os verdadeiros valores da derivada em  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são  $-3$  e  $-2,98$ , respectivamente. Uma aproximação numérica da derivada no ponto  $\theta_1 = 0,5$  é dada por  $[f(0,51) - f(0,5)]/\delta = (1,2201 - 1,25)/(0,01) = -2,99$ , que está entre os dois valores acima.

Se denotarmos os dados observados da densidade  $f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})$  por meio do vetor  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ , a função de verossimilhança, denotada por  $L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$  é qualquer função de  $\boldsymbol{\theta}$  proporcional a  $f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})$ . O logaritmo da função de verossimilhança (simplesmente, log-verossimilhança) será representado por  $\ell(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$ . Se  $X_1, \dots, X_n$  são independentes e identicamente distribuídas, com densidade  $f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})$ , então  $\ell(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \ell_i(\boldsymbol{\theta}|x_i)$  e se além disso, as variáveis aleatórias  $X_i$  são gaussianas, a log-verossimilhança é quadrática.

No enfoque bayesiano, suponha que  $\boldsymbol{\theta}$  tenha densidade a priori  $p(\boldsymbol{\theta})$ . Então, o **Teorema de Bayes** pode ser utilizado para obtenção da densidade a posteriori (condicionada às observações  $\mathbf{x}$ ) como

$$p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\theta})}{f(\mathbf{x})}, \quad (\text{A.4})$$

em que  $f(\mathbf{x}) = \int_{\Theta} p(\boldsymbol{\theta})L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})d\boldsymbol{\theta}$  é a densidade de  $\mathbf{x}$  e  $\Theta$  representa o espaço paramétrico. Dado  $\mathbf{x}$ ,  $f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})$  pode ser vista como a verossimilhança  $L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$  e podemos escrever (A.4) como

$$p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}) \propto p(\boldsymbol{\theta})L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}), \quad (\text{A.5})$$

em que o inverso da constante de proporcionalidade é  $\int_{\Theta} p(\boldsymbol{\theta})L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})d\boldsymbol{\theta}$  quando a densidade a priori de  $\boldsymbol{\theta}$  for contínua e  $\sum_{\boldsymbol{\theta}} p(\boldsymbol{\theta})L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$  quando a densidade a priori de  $\boldsymbol{\theta}$  for discreta.

Um estimador de máxima verossimilhança de  $\boldsymbol{\theta}$  é um valor do parâmetro que maximiza  $L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$  ou  $\ell(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$ . Se a função de verossimilhança for derivável, unimodal e limitada superiormente, então o estimador de máxima verossimilhança (que é a moda, nesse caso)  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  é obtido derivando-se  $L$  ou  $\ell$ , com respeito aos componentes de

$\theta$ , igualando essa derivada a zero e resolvendo as  $d$  equações resultantes. Em geral, uma solução analítica em forma fechada dessas  $d$  **equações de estimação** não pode ser encontrada e precisamos recorrer a algum procedimento de otimização numérica para obter  $\hat{\theta}$ . Na Seção A.6 veremos aplicações com uso de pacotes computacionais do R.

Um instrumento importante na análise da verossimilhança é o conceito de **informação de Fisher**. Consideremos inicialmente, o caso unidimensional. A equação de estimação obtida por meio da maximização da log-verossimilhança é

$$g(\theta|\mathbf{x}) = \frac{d\ell(\theta|\mathbf{x})}{d\theta} = 0$$

em que nesse contexto, o gradiente  $g(\theta|\mathbf{x})$  é conhecido como **função escore**. Uma solução dessa equação é um estimador de máxima verossimilhança se

$$h(\theta|\mathbf{x}) = \frac{d^2\ell(\theta|\mathbf{x})}{d\theta^2} < 0.$$

A **informação de Fisher** sobre  $\theta$  contida em  $\mathbf{x}$  é definida por

$$I(\theta) = E_{\theta}[g(\theta|\mathbf{x})]^2 = E_{\theta}[h(\theta|\mathbf{x})], \quad (\text{A.6})$$

em que  $E_{\theta}$  denota a esperança relativa à distribuição de  $\mathbf{x}$ , calculada com o valor do parâmetro igual a  $\theta$ . Quando o verdadeiro valor do parâmetro é  $\theta_0$ , pode-se demonstrar sob condições de regularidade bastante gerais sobre a forma da função de verossimilhança, que a variância assintótica do estimador de máxima verossimilhança é

$$A\text{Var}_{\theta_0}(\hat{\theta}) = I(\theta_0)^{-1}. \quad (\text{A.7})$$

Como  $\theta_0$  não é conhecido, a precisão do estimador de máxima verossimilhança pode ser avaliada de duas maneiras, nomeadamente

i) **informação de Fisher estimada:**

$$[\widehat{I}(\hat{\theta})]^{-1} = \left\{ n^{-1} \sum_{i=1}^n E_{\theta} [d^2\ell(\theta|x_i)/d\theta^2]_{\theta=\hat{\theta}} \right\}^{-1};$$

ii) **informação observada:**

$$[-G(\hat{\theta})]^{-1} = - \left\{ n^{-1} \sum_{i=1}^n d^2\ell(\theta|x_i)/d\theta^2|_{\theta=\hat{\theta}} \right\}^{-1}.$$

No caso vetorial, em que  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_d)^{\top}$ , a **matriz de informação de Fisher** é definida por

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}) = E_{\boldsymbol{\theta}}\{[\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})][\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})]^{\top}\} = -E_{\boldsymbol{\theta}}[\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})]. \quad (\text{A.8})$$

## A.2 O método de Newton-Raphson

O procedimento de Newton-Raphson baseia-se na aproximação da função que se deseja maximizar por uma função quadrática. Para maximizar a log-verossimilhança,

$\ell(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$ , consideremos a expansão de Taylor de segunda ordem ao redor do máximo  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ :

$$\begin{aligned} \ell(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}) &\approx \ell(\tilde{\boldsymbol{\theta}}|\mathbf{x}) + (\boldsymbol{\theta} - \tilde{\boldsymbol{\theta}})^\top \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\tilde{\boldsymbol{\theta}}} + \\ &\quad \frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta} - \tilde{\boldsymbol{\theta}})^\top \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^\top} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\tilde{\boldsymbol{\theta}}} (\boldsymbol{\theta} - \tilde{\boldsymbol{\theta}}). \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Então, para  $\boldsymbol{\theta}$  numa vizinhança de  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ ,

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\tilde{\boldsymbol{\theta}}} \approx \frac{\partial \ell(\tilde{\boldsymbol{\theta}}|\mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\tilde{\boldsymbol{\theta}}} + (\boldsymbol{\theta} - \tilde{\boldsymbol{\theta}}) \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^\top} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\tilde{\boldsymbol{\theta}}},$$

e como o primeiro termo do segundo membro é igual a zero, obtemos

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}} \approx \boldsymbol{\theta} - \left[ \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^\top} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\tilde{\boldsymbol{\theta}}} \right]^{-1} \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\tilde{\boldsymbol{\theta}}}.$$

Para funções quadráticas em  $\boldsymbol{\theta}$  a convergência ocorre em uma iteração. De modo geral podemos escrever

$$\boldsymbol{\theta}^{(i+1)} \approx \boldsymbol{\theta}^{(i)} - [\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}^{(i)})]^{-1} \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}^{(i)}), \quad (\text{A.10})$$

em que  $\boldsymbol{\theta}^{(i)}$  é a aproximação do máximo na  $i$ -ésima iteração.

A sequência de iterações convergirá para um ponto de máximo se  $\mathbf{H}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) < \mathbf{0}$ , que acontecerá se a função a maximizar for convexa, o que pode não valer em geral. O procedimento não convergirá se o hessiano calculado no ponto de máximo for singular. O método pode ser modificado para assegurar que, em (A.10),  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}^{(i)})$  seja multiplicado por uma matriz negativa definida. Ver Goldfeld et al. (1966) para mais detalhes.

**Exemplo A.2.** Retomemos a função do Exemplo A.1 e iniciemos as iterações com  $\theta^{(0)} = 1,5$  o que implica  $g(\theta^{(0)}) = -1$  e  $G(\theta^{(0)}) = 2$ . Logo usando (A.10), obtemos

$$\theta^{(1)} \approx 1,5 + \frac{1}{2} = 2,$$

e é fácil verificar que nas demais iterações o valor de  $\theta^{(i)}$  é igual a 2, indicando a convergência em uma iteração.

Consideremos, agora, a função

$$f(\theta) = \theta^3 - 3\theta^2 + 1$$

que tem um ponto de máximo na origem e um ponto de mínimo em  $\theta = 2$ . Nesse caso,  $g(\theta) = 3\theta(\theta - 2)$  e  $G(\theta) = 6(\theta - 1)$ . O valor máximo é 1 e o valor mínimo é -3. Inicializemos o algoritmo com  $\theta^{(0)} = 1,5$  para determinar o ponto de mínimo. Então,  $g(1,5) = -2,25$  e  $G(1,5) = 3$ , de modo que na primeira iteração,

$$\theta^{(1)} \approx 1,5 + \frac{2,25}{3} = 2,25.$$

Continuando as iterações, obtemos  $\theta^{(2)} = 2,025$  e  $\theta^{(3)} = 2,0003$ , indicando a convergência para 2. Se começarmos com  $\theta^{(0)} = 0,5$ , na primeira iteração obtemos  $\theta^{(1)} = -0,25$ , mostrando que, como  $G(0,5) < 0$ , a primeira iteração direciona o estimador para o ponto de máximo.

### A.3 O método *scoring*

No método *scoring*, substitui-se o hessiano  $\mathbf{H}(\theta)$  pelo seu valor esperado, que é a matriz de informação de Fisher (A.6) com sinal negativo, sugerindo o esquema recursivo

$$\boldsymbol{\theta}^{(i+1)} = \boldsymbol{\theta}^{(i)} + [\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}^{(i)})]^{-1} \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}^{(i)}}. \quad (\text{A.11})$$

Como  $\mathbf{I}(\theta)$  é uma aproximação do hessiano, o método *scoring* tem taxa de convergência menor do que a do método de Newton-Raphson. A vantagem é que em determinadas situações, é mais fácil calcular  $\mathbf{I}(\theta)$  do que  $\mathbf{H}(\theta)$ .

**Exemplo A.3.** Considere uma distribuição de Cauchy, com densidade

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\pi[1 + (x - \theta)^2]}.$$

Para uma amostra  $\{x_1, \dots, x_n\}$  de  $X$ , a log-verossimilhança é

$$\ell(\theta) = - \sum_{i=1}^n \log\{\pi[1 + (x_i - \theta)^2]\},$$

de modo que o estimador de máxima verossimilhança de  $\theta$  é obtido resolvendo a equação de estimação

$$\frac{d\ell(\theta)}{d\theta} = 2 \sum_{i=1}^n (x_i - \theta) / [1 + (x_i - \theta)^2] = 0,$$

que não tem solução explícita. Como

$$\frac{d^2\ell(\theta)}{d\theta^2} = \sum_{i=1}^n \frac{2(x_i - \theta)^2 - 2}{[1 + (x_i - \theta)^2]^2},$$

a informação de Fisher é

$$I(\theta) = -E_{\theta} \left[ \frac{d^2\ell(\theta)}{d\theta^2} \right] = - \int \frac{d^2\ell(\theta)}{d\theta^2} L(\mathbf{x}|\theta) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \frac{n}{2}.$$

O processo iterativo (A.11) toma, então, a forma

$$\boldsymbol{\theta}^{(i+1)} \approx \boldsymbol{\theta}^{(i)} + \frac{4}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \boldsymbol{\theta}^{(i)})}{1 + (x_i - \boldsymbol{\theta}^{(i)})^2}.$$

### A.4 O método de Gauss-Newton

Frequentemente queremos minimizar somas de quadrados de erros da forma

$$f(\boldsymbol{\theta}) = \sum_t e_t^2(\boldsymbol{\theta}),$$

em que  $e_t = e_t(\boldsymbol{\theta})$  é um **erro**, que depende do valor dos parâmetros desconhecidos do modelo. Por exemplo, no modelo de regressão linear simples,

$$e_t(\boldsymbol{\theta}) = y_t - \alpha - \beta x_t,$$

com  $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta)^\top$ . O gradiente e o hessiano correspondentes são, respectivamente,

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) = 2 \sum_t \frac{\partial e_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} e_t(\boldsymbol{\theta}),$$

e

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) = 2 \sum_t \left[ \frac{\partial e_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \frac{\partial e_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^\top} + \frac{\partial^2 e_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^\top} e_t(\boldsymbol{\theta}) \right].$$

Neste caso, o processo iterativo correspondente ao método de Newton-Raphson é

$$\boldsymbol{\theta}^{(i+1)} = \boldsymbol{\theta}^{(i)} - \left[ \sum_t \left\{ \frac{\partial e_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \frac{\partial e_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^\top} + \frac{\partial^2 e_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^\top} e_t(\boldsymbol{\theta}) \right\} \right]_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}^{(i)}}^{-1} \sum_t \left[ \frac{\partial e_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right]_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}^{(i)}} e_t(\boldsymbol{\theta}),$$

Na prática, os valores que envolvem derivadas segundas são pequenos, comparados com os termos que envolvem derivadas primeiras, logo podemos usar o seguinte processo modificado

$$\boldsymbol{\theta}^{(i+1)} = \boldsymbol{\theta}^{(i)} - \left[ \sum_t \frac{\partial e_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \frac{\partial e_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^\top} \right]_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}^{(i)}}^{-1} \sum_t \left[ \frac{\partial e_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right]_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}^{(i)}} e_t(\boldsymbol{\theta}),$$

que denominamos método de Gauss-Newton. Fazendo  $\mathbf{z}_t[\boldsymbol{\theta}^{(i)}] = -\partial e_t(\boldsymbol{\theta})/\partial \boldsymbol{\theta}|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}^{(i)}}$ , obtemos

$$\boldsymbol{\theta}^{(i+1)} = \boldsymbol{\theta}^{(i)} + \left[ \sum_t \mathbf{z}_t(\boldsymbol{\theta}^{(i)}) \mathbf{z}_t(\boldsymbol{\theta}^{(i)})^\top \right]^{-1} \sum_t \mathbf{z}_t(\boldsymbol{\theta}^{(i)}) e_t(\boldsymbol{\theta}). \quad (\text{A.12})$$

Essa relação sugere interpretar o método de Gauss-Newton como uma sucessão de regressões ajustadas pelo método de mínimos quadrados. Em cada passo, os  $e_t(\boldsymbol{\theta})$  e os  $\mathbf{z}_t(\boldsymbol{\theta})$  são calculados no ponto  $\boldsymbol{\theta}^{(i)}$  e este é atualizado por uma regressão de  $e_t(\boldsymbol{\theta})$  sobre  $\mathbf{z}_t(\boldsymbol{\theta})$ .

Considere o modelo de regressão não linear

$$y_t = f(\mathbf{x}_t; \boldsymbol{\theta}) + e_t, \quad (\text{A.13})$$

em que  $e_t$  são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média 0 e variância  $\sigma^2$ ,  $\mathbf{x}_t$  é um vetor de variáveis preditoras com dimensão  $k$  e  $\boldsymbol{\theta}$  é um vetor de parâmetros desconhecidos com dimensão  $d$ . O objetivo é estimar  $\boldsymbol{\theta}$ , supondo que as variáveis preditoras são fixas e que a forma de  $f$  é conhecida. Sob condições de regularidade apropriadas, Fuller (1996) mostra que se os erros forem normais, o estimador de Gauss-Newton tem distribuição assintótica normal e é assintoticamente equivalente (em distribuição) ao estimador de máxima verossimilhança de  $\boldsymbol{\theta}$ .

**Exemplo A.4.** Consideremos um exemplo simples em que  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)^\top$  e  $f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) = \theta_1 \exp(\theta_2 x)$ , com  $x$  escalar. Então,

$$y_t = \theta_1 \exp(\theta_2 x_t) + e_t, \quad t = 1, \dots, T.$$

Consequentemente,

$$e_t(\boldsymbol{\theta}) = y_t - \theta_1 \exp(\theta_2 x_t),$$

e

$$\mathbf{z}_t(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{\partial e_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = [\exp(\theta_2 x_t), \theta_1 x_t \exp(\theta_2 x_t)]^\top.$$

Se

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \sum e^{2\theta_2 x_t} & \theta_1 \sum x_t e^{2\theta_2 x_t} \\ \theta_1 \sum x_t e^{2\theta_2 x_t} & \theta_1^2 \sum x_t^2 e^{2\theta_2 x_t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \sum e_t e^{\theta_2 x_t} \\ \theta_1 \sum e_t x_t e^{\theta_2 x_t} \end{bmatrix},$$

a expressão (A.12) se reduz a

$$\boldsymbol{\theta}^{(i+1)} = \boldsymbol{\theta}^{(i)} + [\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}^{(i)})]^{-1} \mathbf{b}(\boldsymbol{\theta}^{(i)}).$$

Uma vantagem deste método sobre o de Newton-Raphson é que ele usa somente primeiras derivadas. Se a matriz que substitui o hessiano for singular, podemos usar  $(\sum_t \mathbf{z}_t \mathbf{z}_t^\top + u\mathbf{I})$ , com  $u > 0$  escalar.

## A.5 Métodos Quase-Newton

Os métodos apresentados nas seções anteriores são

- i) O método de Newton-Raphson, que além do gradiente, usa o hessiano e é apropriado para calcular estimadores de máxima verossimilhança por meio de uma aproximação quadrática da verossimilhança ao redor de valores iniciais dos parâmetros;
- ii) o método *scoring* substitui o hessiano pelo seu valor esperado, que é a matriz de informação de Fisher com sinal negativo;
- iii) o método de Gauss-Newton, que consiste de uma sequência de regressões, ajustadas pelo método de mínimos quadrados.

Nesta seção trataremos dos chamados métodos Quase-Newton e em particular do método BFGS. Esses métodos usam aproximações do hessiano e são computacionalmente mais rápidos do que o método Newton-Raphson, embora necessitem de mais passos para a convergência. Eles também são conhecidos como métodos de métrica variável, variância, secante, *update* e foram originalmente desenvolvidos nos trabalhos de Davidon (1959) e Broyden (1965). Para mais detalhes, veja Dennis e Moré (1977) e, para uma atualização do trabalho de Davidon, veja Fletcher e Powell (1963).

Dentre os métodos Quase-Newton destacamos o método de Broyden (1965) e o método SIR (*symmetric single-rank*) além daquele conhecido como BFGS, desenvolvido por Broyden (1970), Fletcher (1970), Goldfarb (1970) e Shanno (1970), cujos trabalhos foram publicados de forma independente. No que segue, baseamo-nos nos trabalhos de Dennis e Moré (1977) e Nocedal e Wright (2006).

Denotemos por  $\mathbf{x}$  o vetor de variáveis,  $f(\mathbf{x})$  a função objetivo (escalar) que queremos minimizar ou maximizar e por  $c_i$ , funções de restrições, que definem equações ou inequações que  $\mathbf{x}$  deve satisfazer. O problema de otimização consiste em minimizar  $f(\mathbf{x})$  sob restrições do tipo  $c_i(\mathbf{x}) = 0$  ou  $c_i(\mathbf{x}) \geq 0$ ,  $i$  em conjuntos de índices.

A função  $f$  deve ter as seguintes propriedades:

- i) ser continuamente derivável num conjunto convexo  $D \subset \mathbb{R}^n$ ;
- ii) deve existir um ponto  $\mathbf{x}^*$  em  $D$  tal que  $f(\mathbf{x}^*) = 0$  e  $f(\mathbf{x}^*)$  seja não singular.

As condições i) e ii) garantem que  $\mathbf{x}^*$  seja uma solução localmente única. Em algumas situações a condição mais forte de  $g(\mathbf{x})$  ser Lipschitz em  $\mathbf{x}^*$  é imposta. O vetor gradiente  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  é definido em (A.1) e a matriz hessiana  $\mathbf{H}(\mathbf{x})$  é definida por (A.2).

A atualização considerada no método BFGS é obtida por meio dos seguintes passos, cujos detalhes podem ser encontrados nas referências indicadas acima:

- i) Assim como no método de Newton-Raphson, começamos com uma aproximação quadrática de  $f$  na iteração atual, correspondente a  $\mathbf{x}_k$ .
- ii) Na iteração seguinte, calculamos

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k, \quad (\text{A.14})$$

em que  $\mathbf{p}_k = -\mathbf{B}_k^{-1} \mathbf{g}_k$  com  $\mathbf{B}_k$  representando uma aproximação do hessiano  $\mathbf{G}$  calculado em  $\mathbf{x}_k$ ,  $\mathbf{g}_k$  denotando o gradiente calculado em  $\mathbf{x}_k$  e com o termo  $\alpha_k$  satisfazendo a chamada condição de Wolfe.

- iii) Ao invés de atualizar  $\mathbf{B}_k$  em cada iteração, Davidon (1959) propõe levar em conta a curvatura medida no passo mais recente. Obtemos, então, uma iteração, chamada de fórmula DFP (de Davidon, Fletcher e Powell), dada por

$$\mathbf{B}_{k+1} = (\mathbf{I} - \rho_k \mathbf{y}_k \mathbf{s}_k^\top) \mathbf{B}_k (\mathbf{I} - \rho_k \mathbf{s}_k \mathbf{y}_k^\top) + \rho_k \mathbf{y}_k \mathbf{s}_k^\top, \quad (\text{A.15})$$

em que  $\mathbf{s}_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k$  e  $\mathbf{y}_k = \mathbf{g}_{k+1} - \mathbf{g}_k$ , com  $\rho_k = 1/\mathbf{y}_k^\top \mathbf{s}_k$ . A matriz  $\mathbf{B}$  deve ser simétrica, positiva definida e deve valer a chamada condição de curvatura,  $\mathbf{s}_k^\top \mathbf{y}_k > 0$ , que é satisfeita se  $f$  for convexa.

- iv) O algoritmo BFGS é obtido quando  $\mathbf{H}_k = \mathbf{B}_k^{-1}$ , ou seja, obtemos uma aproximação para a inversa da matriz hessiana, substituindo em (A.15)  $\mathbf{B}_k$  por  $\mathbf{H}_k$ . Um problema é a inicialização de  $\mathbf{H}_k$ , ou seja,  $\mathbf{H}_0$ . Uma possibilidade é tomar  $\mathbf{H}_0 = \mathbf{I}$  ou um múltiplo da identidade.

Essa atualização é também chamada de **atualização DFP complementar**.

## A.6 Aspectos computacionais

Para obter máximos ou mínimos de funções pode-se usar a função `optim()` do pacote `stats`, que inclui vários métodos de otimização, dentre os quais destacamos:

- i) o método *default* que é o Método Simplex de Nelder e Mead (1965), e corresponde a um método de busca não gradiente (veja a Nota de Capítulo 1),
- ii) o método BFGS, descrito na seção anterior,
- iii) o método do **gradiente conjugado** (*conjugate gradient*-CG), cujos detalhes podem ser obtidos em Fletcher e Reeves (1964),
- iv) o método L-BFGS-B, que permite restrições limitadas (veja Byrd et al. (1995) para detalhes)
- v) o método SANN, que é método não gradiente e pode ser encarado como uma variante do método da **têmpera simulada** (*simulated annealing*). Para detalhes, consulte a Nota de Capítulo 1.

Outra opção é o pacote `optimization`, que também inclui vários métodos, como o método Nelder-Mead e da têmpera simulada. O pacote `maxLik` também é uma opção, contendo quase todas as funções do `stats`, além do algoritmo de Newton-Rapson [função `maxNR()`]. Esse pacote é apropriado para a maximização de verossimilhanças, daí o rótulo `maxLik`.

Os dois exemplos a seguir usam funções do pacote `maxLik`.

**Exemplo A.5.** Considere a função  $f(x,y) = \exp[-(x^2 + y^2)]$ , que tem um máximo no ponto (0,0) e valor máximo igual a 1. Usando a função `maxNR()` obtemos:

```
library(maxLik)
f1 <- function(theta)
{x <- theta[1]
y <- theta[2]
\exp(-(x^2+y^2))}
res <- maxNR(f1, start=c(0,0), constraints = NULL)
print(summary(res))
```

e o resultado é:

```
Number of iterations: 1
Return code: 1
gradient close to zero
Function value: 1
Estimates:
      estimate gradient
[1,]         0         0
[2,]         0         0
```

**Exemplo A.6.** Considere o exemplo anterior, em que a maximização deve ser concretizada sob a restrição  $x + y = 1$ . Com essa finalidade, podemos usar os comandos

```
A <- matrix(c(1,1),1,2)
B <- -1
res <- maxNR(f1,start=c(0,0), constraints = list(eqA=A, eqB=B))
print(summary(res))
```

que geram os resultados

```
Newton-Raphson maximisation
Number of iterations: 1
Return code: 1
gradient close to zero
Function value: 0.6065399
Estimates:
      estimate gradient
[1,] 0.4999848 -0.6065307
[2,] 0.4999848 -0.6065307
Constrained optimization based on SUMT
Return code: 1
penalty close to zero
5 outer iterations, barrier value 9.196987e-10
```

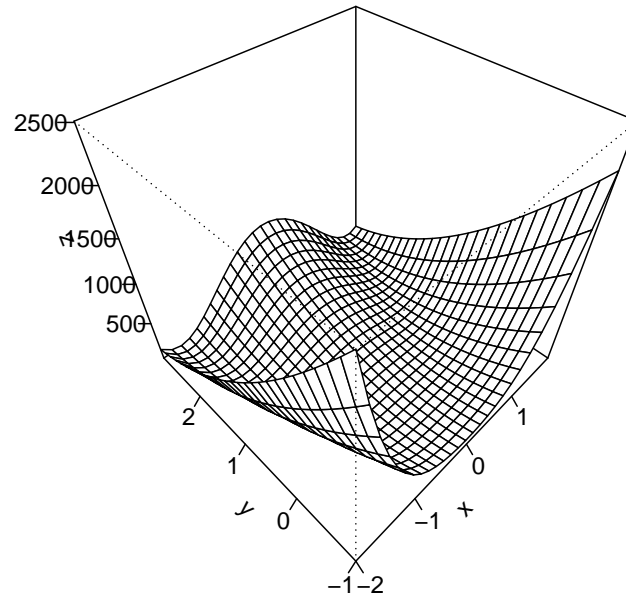
mostrando que o máximo ocorre no ponto (0.5,0.5) e o valor máximo é  $\exp(-0,5) = 0,6065307$ .

**Exemplo A.7.** Uma função comumente usada como teste em otimização é a **função de Rosenbrock**, ou **função banana**

$$f(x,y) = (1-x)^2 + 100(y-x^2)^2. \quad (\text{A.16})$$



cujo gráfico está representado na Figura A.1. Essa função tem um mínimo global em  $(1,1)$ . Normalmente o valor inicial usado nos algoritmos de maximização dessa função é  $(-1,2,1)$ . Detalhes podem ser encontrados em Moré et al. (1981).



**Figura A.1:** Gráfico da função de Rosenbrock.

Os resultados da aplicação da função `optim()` para determinar o mínimo dessa função, usando diferentes métodos são apresentados a seguir.

(a) BFGS

```
optim(c(-1.2,1),f1,gr,method="BFGS")
```

```
\$par
```

```
[1] 0.9992812 0.9979815
```

```
\$value
```

```
[1] 2.373556e-06
```

```
\$counts
```

```
function gradient
```

```
139 NA
```

(b) CG

```
optim(c(-1.2,1),f1,gr,method="CG", control=list(type=2))
```

```
\$par
```

```
[1] 1.053384 1.166083
```

```
\$value
```

```
[1] 0.003618052
```

```
\$counts
```

```
function gradient
```

```
66 13
```

(c) L-BFGS-B

```
optim(c(-1.2,1),f1,gr,method="L-BFGS-B")
```

```
\$par
```

```

[1] -0.5856026  1.1753114
\$value
[1] 191.8881
\$counts
function gradient
      49      49
(d) default (Nelder-Mead)
optim(c(-1.2,1),f1,gr)
\$par
[1] 0.9992812 0.9979815
\$value
[1] 2.373556e-06
\$counts
function gradient
      139      NA

```

Utilizando o pacote `optimization` e o método da têmpera simulada (*simulated annealing*) por meio dos seguintes comandos

```

rosenbrock_sa <- optim_sa(fun=rosenbrock, start=c(-1.2, 1.2),
  maximization = FALSE, trace=TRUE,
  lower=c(-3, -3), upper=c(2, 2), control=list(t0=1000,
  nlimit=1000, t_min=0.1, dyn_rf=TRUE, rf=-1, r=0.6))

```

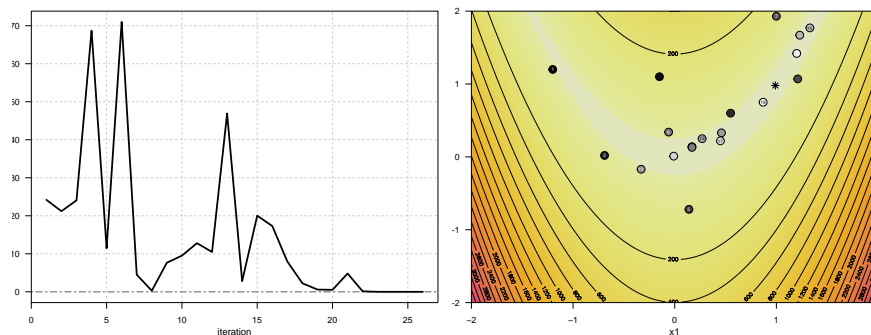
obtemos os resultados:

```

f$par
[1] 0.99 0.98
$function_value
[1] 0.000101

```

Gráficos com a evolução do processo iterativo e com as curvas de nível correspondentes estão apresentados na Figura A.2



**Figura A.2:** Evolução do processo de otimização da função de Rosenbrock (painel esquerdo) e curvas de nível correspondentes (painel direito); ponto de mínimo identificado com \* em (1,1).

**Exemplo A.8.** Com o objetivo de estimar a média e variância de um distribuição normal com média 10 e variância 4, consideremos o pacote `maxLik`, obtendo o resultado

```

Maximum Likelihood estimation
Newton-Raphson maximisation, 12 iterations
Return code 1: gradient close to zero
Log-Likelihood: -2088.856
2 free parameters
Estimates:
      Estimate Std. error t value Pr(> t)
[1,]  9.93836   0.06184  160.71 <2e-16 ***
[2,]  1.95408   0.04369   44.73 <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```

## A.7 Notas de capítulo

### 1) Algoritmos não gradientes

Os métodos não gradientes, ou seja, que não usam derivadas, são recomendados para funções com descontinuidades ou não lineares. Alguns desses métodos são descritos na sequência.

- i) **Algoritmos genéticos.** Esses algoritmos fazem parte de uma classe chamada de **algoritmos evolucionários**, que imitam a evolução natural por meio passos de reprodução, mutação, recombinação e seleção. O mais comum é o algoritmo genético, que seleciona uma população inicial de possíveis soluções, digamos  $P(t)$ , para cada iteração  $t$ . Por meio de transformações estocásticas, algumas soluções passarão por um estágio de mutação. As novas soluções,  $C(t)$ , são chamadas **descendentes** (*offspring*). A partir de  $P(t)$  e  $C(t)$ , as soluções com os melhores valores da função objetivo são selecionadas para formar uma nova população,  $P(t + 1)$ . Após várias gerações, o algoritmo convergirá para uma solução ótima ou sub-ótima da maximização de função objetivo. Detalhes podem ser obtidos em Holland (1975).
- ii) **Algoritmo de Têmpera Simulada** (*Simulated annealing*). Esses algoritmos são baseados em um método probabilístico que imita o processo de têmpera (*annealing*) de materiais submetidos a altas temperaturas. O estado inicial do algoritmo ( $T_0$ ) é um mínimo local, que em sequência é submetido a uma transformação estocástica e a nova solução é aceita de acordo com uma probabilidade que é função do decréscimo da função e de uma nova temperatura. Para detalhes, veja Kirkpatrick et al. (1983).
- iii) **Algoritmo do Enxame de Partículas** (*Particle Swarm algorithm*). Esses algoritmos são baseados na definição de um conjunto de partículas que buscam, iterativamente, um mínimo no conjunto de soluções potenciais (partículas) com respeito a uma métrica de qualidade. Essas partículas são movidas de acordo com suas posições e velocidades e constituem um método de otimização combinatória estocástica baseado em princípios matemáticos da **Teoria dos grafos**. Para detalhes, veja Kennedy e Eberhart (1995).
- iv) **Algoritmos de busca direta.** No caso unidimensional, em que  $f(\theta)$  deve ser maximizada com respeito a um só parâmetro, podem-se usar técnicas de busca lineares, que consistem em ajustar um polinômio de

baixa ordem aos dados. Alternativamente, podem-se empregar procedimentos de busca a partir de uma grade de valores sobre o domínio de variação de  $\theta$ . Uma vez encontrado o mínimo, por exemplo, em  $\theta_0$ , uma busca mais fina pode ser feita num intervalo ao redor de  $\theta_0$ . Um algoritmo bastante usado nessa classe é o **método simplex** de Nelder e Mead (1965). Nesse caso, o algoritmo avalia a função objetivo num conjunto de pontos que formam um **simplex**, que no espaço no  $\mathbb{R}^n$  é o fecho convexo de  $n + 1$  pontos afins independentes. O pacote **MatLab** implementa esse algoritmo.

O método simplex original de Dantzig é baseado no seguinte fato: se a função objetivo possui um máximo (mínimo) finito, então pelo menos uma solução ótima é um ponto extremo do conjunto das soluções (viáveis). Veja Dantzig (1963) para detalhes.

No livro de Conn et al. (2009) pode-se encontrar uma lista de *software* para a implementação de algoritmos de otimização não gradientes.

- 2) Um outro assunto de interesse está relacionado com **otimização restrita**. Para que processo autorregressivo de primeira ordem, da forma

$$X_t = \theta_0 + \phi X_{t-1} + a_t,$$

seja estacionário, devemos ter  $|\phi| < 1$ . Restrições dessa natureza podem ser tratadas com o uso de transformações. Por exemplo, podemos considerar  $\phi = \psi/(1 + |\psi|)$  e então efetuar a maximização com respeito a  $\psi$  irrestritamente. Para detalhes, veja Fletcher (1987).

O algoritmo EM (de esperança-maximização) detalhado no Apêndice C, usado para obter estimadores de máxima verossimilhança, também é um algoritmo dessa classe.

## A.8 Exercícios

- 1) O método **da descida mais íngreme** (*steepest descent*) usa  $V(\theta) = -1$  e de (A.3),

$$\theta^{(i+1)} = \theta^{(i)} - \lambda g(\theta).$$

Obtenha o máximo de  $f(\theta) = \theta^3 - 3\theta^2 + 5$ , com  $\theta \geq 0$ , usando este método.

- 2) O método **da subida de monte quadrática** (*quadratic hill climbing*) devido a Goldfeld et al. (1966) usa  $\lambda \mathbf{Q} \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})$  em (A.10), em que  $\mathbf{Q} = [\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}) + c\mathbf{I}]^{-1}$ , com  $c > 0$  escalar. Obtenha o mínimo da função do problema anterior usando este método.
- 3) Para o Exemplo A.3, gere uma amostra de tamanho  $n = 20$  da distribuição de Cauchy apresentada. Obtenha o estimador de  $\theta$  usando o processo (A.10).
- 4) Seja  $\mathbf{x} = (n_1, n_2, n_3, n_4)^\top$  uma observação de uma distribuição multinomial, com probabilidades de classes dadas por  $\pi_1 = (2 + \theta)/4$ ,  $\pi_2 = \pi_3 = (1 - \theta)/4$  e  $\pi_4 = \theta/4$ ,  $0 < \theta < 1$  e  $n = \sum n_i$ . Com as frequências observadas (1997, 906, 904, 32), estime  $\theta$ , usando o algoritmo de Newton-Raphson, com valores iniciais 0,05 e 0,5.
- 5) Use o algoritmo *scoring* para estimar  $\theta$  no problema anterior.
- 6) Considere uma regressão não linear em que  $f(x; \theta) = \alpha + \log(\beta)x$ . Obtenha os estimadores de Gauss-Newton de  $\alpha$  e  $\beta$ .

- 7) Use a função `maxNR()` para o Exemplo A.2.
- 8) Use o pacote `maxLik` para encontrar os estimadores de máxima verossimilhança para o Exemplo 6.1.
- 9) Mesmo exercício, para os dados da Tabela 6.7 e modelo (6.24).
- 10) Considere o Exemplo A.7. Siga os passos indicados e obtenha o máximo usando a função `optim()` do `stats`.
- 11) Para o Exercício 4, obtenha os estimadores de máxima verossimilhança.
- 12) Refaça o Exercício 9 usando o pacote `optimization`.



# Noções de simulação

The only source of knowledge is experience.

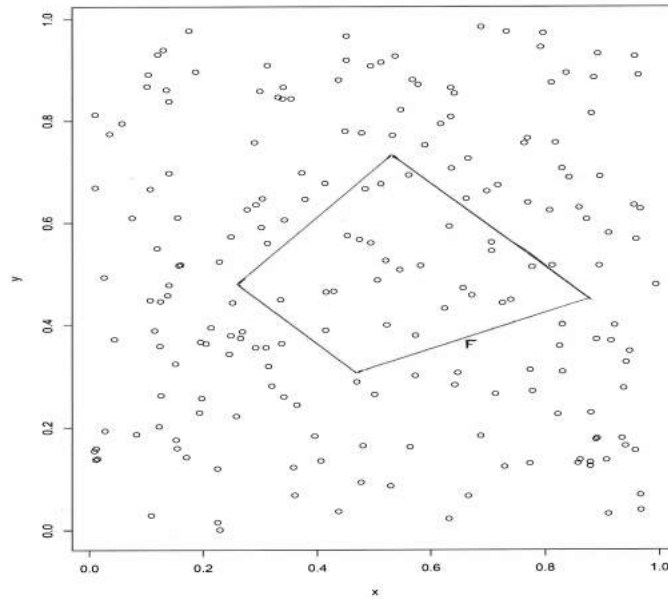
A. Einstein

## B.1 Introdução

Modelos probabilísticos são usados para representar a gênese de fenômenos ou experimentos aleatórios. Com base em um **espaço amostral** e probabilidades associadas aos pontos desse espaço, o modelo probabilístico fica completamente determinado e podemos, então, calcular a probabilidade de qualquer evento aleatório definido nesse espaço. Muitas vezes, mesmo construindo modelos probabilísticos, certas questões não podem ser resolvidas analiticamente e temos que recorrer a **estudos de simulação** para obter aproximações de quantidades de interesse. Esses estudos tentam reproduzir, num ambiente controlado, o que se passa com um problema real. Para esses propósitos, a solução de um problema real pode ser baseada na simulação de variáveis aleatórias (**simulação estática**) ou de processos estocásticos (**simulação dinâmica**).

A simulação de variáveis aleatórias deu origem aos chamados **métodos Monte Carlo**, que por sua vez supõem a disponibilidade de um **gerador de números aleatórios**. O nome Monte Carlo está relacionado com o distrito de mesmo nome no Principado de Mônaco, onde cassinos operam livremente. Os métodos Monte Carlo apareceram durante a segunda guerra mundial, em pesquisas relacionadas à difusão aleatória de neutrons num material radioativo. Os trabalhos pioneiros devem-se a Metropolis e Ulam (1949), Metropolis et al. (1953) e von Neumann (1951). Veja Sóbol (1976), Hammersley e Handscomb (1964) ou Ross (1997), para detalhaes.

Como ilustração, suponha que se queira calcular a área da figura  $F$  contida no quadrado  $Q$  de lado unitário representados na Figura B.1. Se gerarmos  $N$  pontos aleatórios em  $Q$ , de modo homogêneo, isto é, de modo a cobrir toda a área do quadrado, ou ainda, que sejam **uniformemente distribuídos** sobre  $Q$  e observarmos que  $N^*$  desses caíam sobre a figura  $F$ , poderemos aproximar a área de  $F$  por  $N^*/N$ . Quanto mais pontos gerarmos, melhor será a aproximação. Note que embora o problema em si não tem nenhuma componente aleatória, pois queremos calcular a área de uma figura plana, consideramos um mecanismo aleatório para resolvê-lo. Veremos que esse procedimento pode ser utilizado em muitas situações.



**Figura B.1:** Área de uma figura por simulação.

Números aleatórios representam o valor de uma variável aleatória uniformemente distribuída, geralmente no intervalo  $(0,1)$ . Originalmente, esses números aleatórios eram gerados manual ou mecanicamente, usando dados, roletas etc. Modernamente, usamos computadores para essa finalidade. Vejamos algumas maneiras de obter números aleatórios.

**Exemplo B.1.** Lancemos uma moeda 3 vezes e atribuamos o valor 1 ao evento “a face aparente é cara” e o valor 0 se for coroa. Os resultados possíveis são as **sequências** ou **números binários**:

000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111.

Cada um desses números binários corresponde a um número decimal. Por exemplo,  $(111)_2 = (7)_{10}$ , pois  $(111)_2 = 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$ . Considerando a representação decimal de cada sequência acima e dividindo o resultado por  $2^3 - 1 = 7$  obteremos o números aleatórios  $0, 1/7, 2/7, \dots, 1$ . Qualquer uma das 8 sequências acima tem a mesma probabilidade de ser gerada por esse processo, a saber,  $1/2^3 = 1/8$ .

Suponha, agora, que a moeda seja lançada 10 vezes, gerando números binários com 10 dígitos, cada um com probabilidade  $1/2^{10} = 1/1024$ . Para esse caso de 10 lançamentos, procederíamos como no caso de 3 lançamentos, dividindo os 1024 números decimais obtidos por  $2^{10} - 1 = 1023$ , para obter 1024 números aleatórios entre 0 e 1. De modo geral, lançando-se a moeda  $n$  vezes, teremos  $2^n$  resultados e os números aleatórios desejados são obtidos por meio de divisão de cada resultado por  $2^n - 1$ .

**Exemplo B.2.** Números aleatórios também podem ser gerados por meio de uma roleta com dez setores numerados  $0, 1, \dots, 9$ . Giremos a roleta 10 vezes e anotemos



os números obtidos numa linha de uma tabela. Repitamos o processo mais duas vezes, anotando os números obtidos em linhas adjacentes como indicado na Tabela B.1.

**Tabela B.1:** Números aleatórios gerados por uma roleta

6	9	5	5	2	6	1	3	2	0
1	4	0	1	5	3	2	8	2	7
0	4	4	0	4	9	9	0	6	9

Agora, dividamos os números formados pelos 3 algarismos de cada coluna por 1.000, para obter os números aleatórios

0,610; 0,944; 0,504; 0,510; 0,254; 0,639; 0,129; 0,380; 0,226; 0,079.

Para obter números aleatórios com 4 casas decimais, basta girar a roleta 4 vezes. Na realidade, os números acima foram obtidos de uma **tabela de números aleatórios**, como a Tabela VII de Bussab e Morettin (2017). Com essa finalidade, iniciamos no canto superior esquerdo e tomamos as três primeiras colunas com 10 dígitos cada. Tabelas de números aleatórios são construídas por meio de mecanismos como o que descrevemos.

O problema que encontramos muitas vezes é que teremos que gerar uma quantidade muito grande de números aleatórios, por exemplo, da ordem de 1.000 ou 10.000. O procedimento de **simulação manual** que adotamos aqui, usando uma tabela de números aleatórios pode se tornar muito trabalhoso ou mesmo impraticável. O que se faz atualmente é substituir simulação manual por **simulação por meio de computadores**, que utiliza **números pseudo-aleatórios**. Os números pseudo-aleatórios são obtidos por meio de técnicas que usam relações matemáticas **determinísticas** recursivas. Consequentemente, um número pseudo-aleatório gerado numa iteração dependerá do número gerado na iteração anterior, e portanto não será realmente aleatório.

Há vários métodos para gerar números pseudo-aleatórios. Um dos primeiros, formulado pelo matemático John von Neumann, é chamado de **método de quadrados centrais** (veja o Exercício 1). Um método bastante utilizado em pacotes computacionais é o **método congruencial**, discutido no Exercício 3. Como exemplos de pacotes desenvolvidos com essa finalidade, citamos o NAG (Numerical Algorithm Group), atualmente incorporado ao pacote MatLab, e o IMSL (*International Mathematics and Statistics Library*), que é uma coleção de programotecas de *software* para a análise numérica, implementadas em diversas linguagens de programação, como C e Python. No R pode-se usar o comando `runif(n, min, max)`, em que  $n$  é o número de valores a gerar e  $(min, max)$  é o intervalo no qual se quer gerar os números pseudo-aleatórios.

**Exemplo B.3.** Para gerar 10 números aleatórios no intervalo  $(0, 1)$  podemos usar o comando `u <- runif(10,0,1)`, obtendo o resultado

```
> u
[1] 0.80850094 0.56611676 0.75882010 0.89910843 0.48447125
[6] 0.02119849 0.06239355 0.30022882 0.12722598 0.49714446
```

Existem, basicamente, três grandes grupos de métodos de simulação:

- a) **Métodos de Simulação Estática**, dentre os quais citamos os métodos Monte Carlo, aceitação/rejeição e reamostragem ponderada, em que os procedimentos têm como objetivo gerar amostras independentes.

- b) **Métodos de Simulação por Imputação**, dentre os quais citamos o **algoritmo EM** (*Expectation-Maximization*) e o algoritmo de dados aumentados, cuja ideia básica é ampliar o conjunto de dados, introduzindo **dados latentes**, com o intuito de facilitar a simulação.
- c) **Métodos de Simulação Dinâmica**, cujos exemplos mais importantes são o **amostrador de Gibbs** e os **algoritmos de Metropolis** e **Metropolis-Hastings** atualmente denominados **MCMC** (*Markov Chain Monte Carlo*) e que têm como objetivo construir uma cadeia de Markov, cuja distribuição de equilíbrio seja a distribuição da qual queremos amostrar.

Neste apêndice trataremos de modo mais abrangente o caso a). O caso c) está descrito brevemente nas Notas de Capítulo 1), 2) e 3). O caso b) será tratado no Apêndice C.

## B.2 Método Monte Carlo

Consideremos o problema de cálculo da média de uma função  $h(X)$  de uma variável aleatória  $X$  com distribuição  $F$ . Suponhamos, ainda, que exista um método para simular uma amostra  $X_1, \dots, X_n$  de  $F$ . Nas seções seguintes veremos alguns desses métodos. O Método Monte Carlo consiste em aproximar  $E_F[h(X)]$  por

$$\hat{E}_F[h(X)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(X_i). \quad (\text{B.1})$$

Observemos que (B.1) aproxima a integral  $\int h(x)dF(x)$  ou  $\int h(x)f(x)dx$ , se existir a densidade de  $f$  de  $X$ . A **lei (forte) dos grandes números**, por exemplo) garante que, quando  $n \rightarrow \infty$ ,  $\hat{E}_F[h(X)]$  converge para  $E_F[h(X)]$  com probabilidade um. O erro padrão da estimativa (B.1) é  $[\text{Var}_F(h(X))]^{1/2}$ , que pode ser estimado por

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left[ \sum_{i=1}^n \left\{ h(X_i) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(X_i) \right\}^2 \right]^{1/2} = O(n^{-1/2}). \quad (\text{B.2})$$

Para detalhes, veja Sen et al. (2009).

**Exemplo B.4.** Suponhamos que se deseja calcular o valor esperado de  $h(X) = \sqrt{1 - X^2}$  em que  $X$  tem distribuição  $F \sim \mathcal{U}(0,1)$ . Então, se  $X_1, \dots, X_n$  for uma amostra da distribuição uniforme padrão,

$$\hat{E}_F[h(X)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 - X_i^2}. \quad (\text{B.3})$$

Com base em 1.000 valores gerados de uma distribuição  $\mathcal{U}(0,1)$ , o valor obtido para (B.3) foi 0,7880834. Esse valor também corresponde a uma estimativa de um quarto da área de um círculo unitário, ou seja,  $\pi/4 = 0,7853982$  de forma que o erro padrão calculado por (B.2) é 0,0069437.

Uma outra aplicação do Método Monte Carlo é a obtenção de amostras de distribuições marginais. Suponhamos, por exemplo, que as variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  tenham densidade conjunta  $f(x,y)$  com densidades marginais  $f_X(x)$  e  $f_Y(y)$ , respectivamente. Então,

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_{Y|X}(y|x)dx, \quad (\text{B.4})$$

em que  $f_{Y|X}(y|x)$  é a densidade condicional de  $Y$  dado que  $X = x$ . Para obter uma amostra de  $f_Y(y)$ , procedemos pelo **método da composição** ou **mistura** por meio dos seguintes passos:

- a) gere um elemento  $x^*$  de  $f_X(x)$ ;
- b) fixado  $x^*$ , obtenha um elemento  $y^*$  de  $f_{Y|X}(y|x^*)$ .
- c) Repita os passos a) e b)  $n$  vezes, obtendo  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  como uma amostra de  $f(x, y)$ , e  $y_1, \dots, y_n$  como uma amostra de  $f_Y(y)$ .

É óbvio que precisamos saber como amostrar das densidades  $f_X(x)$  e  $f_{Y|X}(y|x)$ ; os valores  $x^*$  são chamados de elementos misturadores.

### B.3 Simulação de variáveis discretas

Todo procedimento de simulação depende da geração de números aleatórios. Nesta seção veremos como gerar valores de algumas distribuições discretas, lembrando que a geração de números aleatórios, em geral, pode ser obtida por meio da geração de valores de uma distribuição uniforme no intervalo  $(0,1)$ .

Consideremos uma variável aleatória  $X$  com a distribuição de probabilidades definida por

$$\begin{aligned} X &: x_1, x_2, \dots, x_n \\ p_j &: p_1, p_2, \dots, p_n \end{aligned}$$

Geremos um número aleatório  $u$  e façamos:

$$X = \begin{cases} x_1, & \text{se } u < p_1, \\ x_2, & \text{se } p_1 \leq u < p_1 + p_2, \\ \dots & \\ x_j, & \text{se } p_1 + \dots + p_{j-1} \leq u < p_1 + \dots + p_j. \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

Lembrando que se  $U \sim \mathcal{U}(0,1)$  e se  $0 < a < b < 1$ , temos

$$P(a < U < b) = b - a, \quad (\text{B.6})$$

obtemos a distribuição desejada para  $X$  por meio de

$$P(X = x_j) = P(p_1 + \dots + p_{j-1} \leq U < p_1 + \dots + p_j) = p_j.$$

#### Exemplo B.5. Simulação de uma distribuição de Bernoulli.

Suponhamos que  $X$  tenha uma distribuição de Bernoulli com  $P(X = 0) = 1 - p = 0,48$  e  $P(X = 1) = p = 0,52$ , simbolicamente denotada como  $X \sim \text{Bernoulli}(0,52)$ . Para gerar um valor dessa distribuição basta gerar um número aleatório  $u$  e considerar  $X = 0$  se  $u < 0,48$  e  $X = 1$  em caso contrário. Por exemplo, para os números aleatórios 0,11; 0,82; 0,00; 0,43; 0,56; 0,60; 0,72; 0,42; 0,08; 0,53, os dez valores gerados da distribuição Bernoulli em questão são, respectivamente, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1.

#### Exemplo B.6. Simulação de uma distribuição binomial.

Se  $Y \sim \text{Bin}(n, p)$ , então  $Y$  é o número de sucessos de um experimento de Bernoulli, com  $n$  repetições independentes e probabilidade de sucesso  $p$ . No Exemplo

B.5, obtivemos 5 sucessos, logo  $Y = 5$ . Portanto, se  $Y \sim \text{Bin}(10; 0,52)$  e quisermos gerar 20 valores dessa distribuição, basta considerar 20 repetições de  $n = 10$  experimentos de Bernoulli com probabilidade de sucesso  $p = 0,52$ . Para cada ensaio  $j$  consideramos o número de sucessos (número de valores iguais a 1),  $y_j$ ,  $j = 1, \dots, 20$  observando que  $0 \leq y_j \leq 10$ .

**Exemplo B.7. Simulação de uma distribuição de Poisson.**

Se  $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$ , então

$$P(N = j) = \frac{\exp(-\lambda)\lambda^j}{j!}, \quad j = 0, 1, \dots \quad (\text{B.7})$$

Denotemos por  $F(j) = P(N \leq j)$  a função distribuição acumulada de  $N$ . A geração de valores de uma distribuição de Poisson parte da seguinte relação recursiva, que pode ser facilmente verificada

$$p_{j+1} = \lambda/(j+1)p_j, \quad j \geq 0. \quad (\text{B.8})$$

Dado um valor  $j$ , seja  $p = p_j$  e  $F = F(j)$ . O algoritmo para gerar valores sucessivos é o seguinte:

- i) Gere um número aleatório  $u$ .
- ii) Faça  $j = 0$ ,  $p = \exp(-\lambda)$  e  $F = p$ .
- iii) Se  $u < F$ , faça  $N = j$ .
- iv) Faça  $p = \lambda/(j+1)p$ ,  $F = F + p$  e  $j = j + 1$ .
- v) Volte ao passo iii).

Note que, no passo ii), se  $j = 0$ ,  $P(N = 0) = p_0 = \exp(-\lambda)$  e  $F(0) = P(N \leq 0) = p_0$ .

Suponhamos, por exemplo, que queiramos simular valores de uma distribuição de Poisson com parâmetro  $\lambda = 2$ . Se no passo i), gerarmos  $u = 0,35$ , para o passo ii) teremos  $j = 0$ ,  $p = \exp(-2) = 0,136$ ,  $F = 0,136$ ; Como  $u > F$ , no passo iv), teremos  $p = 2 \times 0,136 = 0,272$ ,  $F = 0,136 + 0,272 = 0,408$ ,  $j = 1$ . No passo v), voltamos ao passo iii) com  $u < F$  e colocamos  $N = 1$ , obtendo o primeiro valor gerado da distribuição. Prosseguimos com o algoritmo para gerar outros valores.

O R e a planilha Excel possuem sub-rotinas próprias para simular valores de uma dada distribuição de probabilidades. A Tabela B.2 traz as distribuições discretas contempladas por cada um e os comandos apropriados.

**Tabela B.2:** Opções de distribuições discretas

Distribuição	Excel (parâmetros)	R (parâmetros)
Bernoulli	Bernoulli(p)	—
Binomial	Binomial(n,p)	binom(n,p)
Geométrica	—	geom(p)
Hipergeométrica	—	hyper(N,r,k)
Poisson	Poisson( $\lambda$ )	pois( $\lambda$ )

Para gerar uma distribuição de Bernoulli no R basta colocar  $n = 1$  no caso binomial. No R a letra r (de *random*) é sempre colocada antes do comando apropriado. Na planilha Excel pode-se usar tanto a função RAND() como o *Random Number*

*generation tool*. Essa planilha também contém uma opção *Discrete*, para gerar distribuições discretas especificadas  $(x_i, p_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo B.8.** Suponha que queiramos gerar 20 valores de uma variável aleatória binomial, com  $p = 0,5$ , 20 valores de uma distribuição de Poisson, com  $\lambda = 1,7$ , 100 valores de uma distribuição uniforme no intervalo  $[0,1]$  e 20 valores de uma distribuição de Bernoulli, com  $p = 0,7$ , usando o R. Os comandos necessários são

```
> x <- rbinom(20,10,0.5)
> y <- rpois(20,1.7)
> z <- runif(100,0,1)
> b <- rbinom(20,1,0.7)
```

e os histogramas correspondentes estão apresentados na Figura B.2.

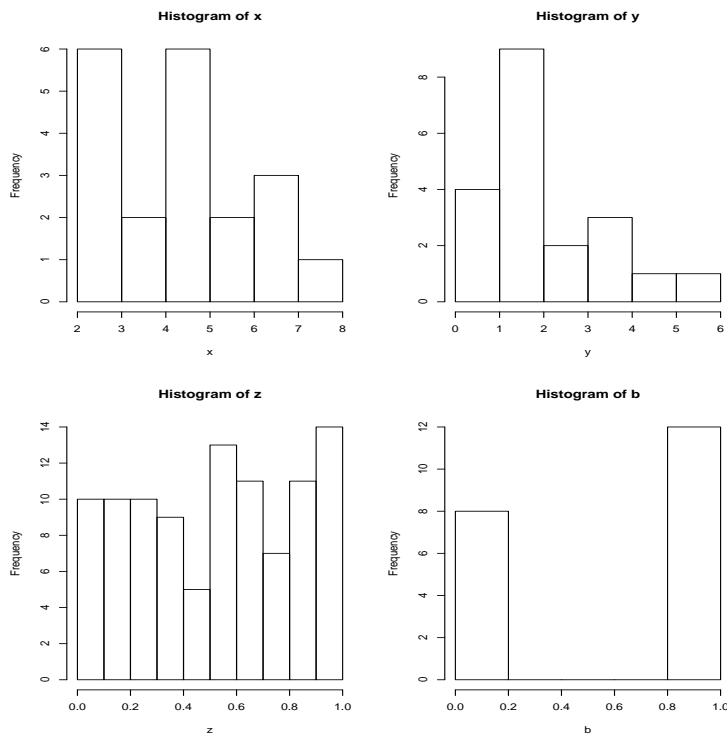
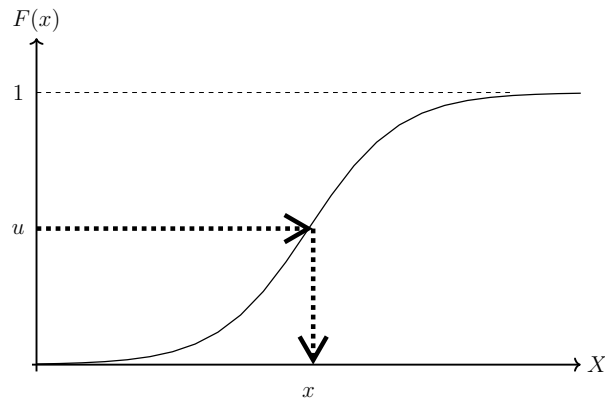


Figura B.2: Histogramas de distribuições simuladas.

## B.4 Simulação de variáveis contínuas

Consideremos uma variável aleatória  $X$ , com função distribuição acumulada  $F$ , representada na Figura B.3.



**Figura B.3:** Função distribuição acumulada de uma variável aleatória  $X$ .

Para gerar um valor dessa distribuição,

- i) Use um gerador de números aleatórios para obter um valor  $0 < u < 1$ .
- ii) Identifique esse valor no eixo das ordenadas e por meio da função inversa de  $F$  e obtenha o valor correspondente da variável aleatória  $X$  no eixo das abscissas.

Essencialmente, esse procedimento corresponde à resolução da equação

$$F(x) = u, \quad (\text{B.9})$$

cuja solução é  $x = F^{-1}(u)$ . Formalmente, estamos usando o **Método da Transformação Integral**, consubstanciada no seguinte teorema.

**Teorema B.1.** Se  $X$  for uma variável aleatória com função distribuição acumulada  $F$  estritamente crescente, então a variável aleatória  $U = F(X)$  tem distribuição uniforme no intervalo  $[0,1]$ .

**Demonstração.** Como  $F$  é estritamente crescente e  $u = F(x)$ , então  $x = F^{-1}(u)$ , pois existe a inversa de  $F$ . Se  $G$  é a função distribuição acumulada de  $U$ , temos

$$G(u) = P(U \leq u) = P[F(X) \leq u] = P[X \leq F^{-1}(u)] = F[F^{-1}(u)] = u,$$

e, portanto,  $U$  tem distribuição uniforme no intervalo  $[0,1]$ . O resultado pode ser estendido para o caso de  $F$  ser não decrescente, usando uma definição mais geral de inversa.

**Exemplo B.9.** Considere uma variável aleatória  $X$  com densidade  $f(x) = 2x$ ,  $0 < x < 1$ . de forma que

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ x^2, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Então, de (B.9) obtemos  $u = x^2$ . Para obter um valor de  $X$  basta gerar um número aleatório  $u$  e depois calcular  $x = \sqrt{u}$ . Como  $0 < x < 1$ , deve-se tomar a raiz quadrada positiva de  $u$ .

**Exemplo B.10. Simulação de uma distribuição exponencial.**

Se a variável aleatória  $T$  tiver densidade

$$f(t) = \frac{1}{\beta} \exp(-t/\beta), \quad t > 0, \quad (\text{B.10})$$

a sua função distribuição acumulada é

$$F(t) = 1 - \exp(-t/\beta). \quad (\text{B.11})$$

Encarando (B.11) como uma equação em  $t$  e tomando o logaritmo na base  $e$ , temos

$$1 - u = \exp(-t/\beta) \Leftrightarrow \log(1 - u) = -\frac{t}{\beta} \Leftrightarrow t = -\beta \log(1 - u).$$

Dado um número aleatório  $u$ , um valor da distribuição  $\text{Exp}(\beta)$  é  $-\beta \log(1 - u)$ .

Por exemplo, suponhamos que  $\beta = 2$  e queremos gerar 5 valores de  $T \sim \text{Exp}(2)$ . Gerados os números aleatórios  $u_1 = 0,57$ ,  $u_2 = 0,19$ ,  $u_3 = 0,38$ ,  $u_4 = 0,33$ ,  $u_5 = 0,31$  de uma distribuição uniforme em  $(0,1)$ , obtemos  $t_1 = (-2)(\log(0,43)) = 1,68$ ,  $t_2 = (-2)(\log(81)) = 0,42$ ,  $t_3 = (-2)(\log(0,62)) = 0,96$ ,  $t_4 = (-2)(\log(0,67)) = 0,80$ ,  $t_5 = (-2)(\log(0,69)) = 0,74$ .

Podemos reduzir o esforço computacional lembrando que se  $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ , então  $1 - U \sim \mathcal{U}(0,1)$ . Consequentemente, podemos gerar os valores de uma distribuição exponencial por meio de

$$t = -\beta \log(u).$$

Usando esta expressão para os valores de  $U$  acima, obtemos os seguintes valores de  $T$  : 1,12; 3,32; 1,93; 0,96; 2,34.

### Exemplo B.11. Simulação de uma distribuição normal.

Para gerar valores de variáveis aleatórias normais, basta gerar uma variável aleatória normal padrão, pois dado um valor  $z_1$  da variável aleatória  $Z \sim N(0,1)$ , para gerar um valor de uma variável aleatória  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  basta usar a transformação  $z = (x - \mu)/\sigma$  para obter

$$x_1 = \mu + \sigma z_1. \quad (\text{B.12})$$

Com essa finalidade podemos usar a transformação integral e uma tabela de probabilidades para a distribuição normal padrão. Por exemplo, suponhamos que  $X \sim N(10; 0,16)$ , ou seja,  $\mu = 10$  e  $\sigma = 0,4$ . A equação a resolver neste caso é

$$\Phi(z) = u,$$

em que  $\Phi(z)$  representa a função distribuição acumulada da distribuição  $N(0,1)$ . Geremos primeiramente um número aleatório  $u$ , obtendo, por exemplo,  $u = 0,230$ . Então precisamos resolver  $\Phi(z) = 0,230$  como uma equação em  $z$ , ou seja, precisamos encontrar o valor  $z$  tal que a área à sua esquerda sob a curva normal padrão seja 0,230. Veja a Figura B.4.

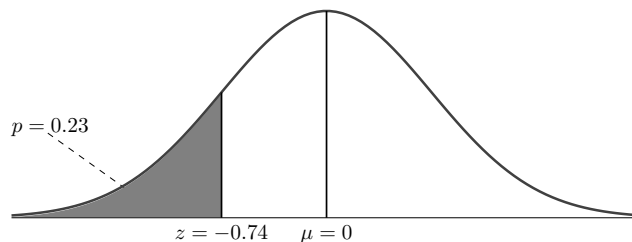


Figura B.4: Geração de um valor  $z \sim N(0,1)$ .

Consultando uma tabela para a distribuição normal, encontramos que  $z = -0,74$ . Logo o valor gerado da distribuição normal em questão satisfaz  $(x - 10)/0,4 = -0,74$ , ou seja,  $x = 10 + 0,4 \times -0,74 = 9,704$ .

Esse método, embora simples, não é prático sob o ponto de vista computacional. Há outros métodos mais eficientes. Alguns são variantes do método de Box e Müller (1958), segundo o qual são geradas duas variáveis aleatórias,  $Z_1$  e  $Z_2$  com distribuições  $N(0,1)$  independentes por meio das transformações

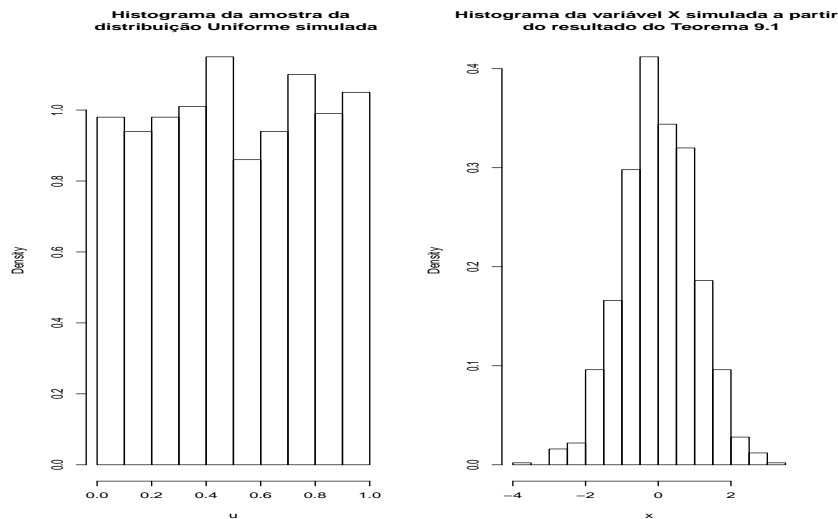
$$\begin{aligned} Z_1 &= \sqrt{-2 \log U_1} \cos(2\pi U_2), \\ Z_2 &= \sqrt{-2 \log U_1} \sin(2\pi U_2), \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

em que  $U_1$  e  $U_2$  são variáveis aleatórias com distribuição uniforme em  $[0,1]$ . Portanto, basta gerar dois números aleatórios  $u_1$  e  $u_2$  e depois gerar  $z_1$  e  $z_2$  usando (B.13). O método de Box-Müller pode ser computacionalmente ineficiente, pois necessita cálculos de senos e cossenos. Uma variante, chamada de método polar, evita esses cálculos. Veja Bussab e Morettin (2017), por exemplo.

Com o R podemos usar a função `qnorm()` para obter um quantil de uma distribuição normal a partir de sua função distribuição acumulada. Por exemplo, para gerar 1.000 valores de uma distribuição normal padrão, usamos:

```
u <- runif(1000,0,1)
x <- qnorm(u,mean=0, sd = 1)
par(mfrow=c(1,2))
hist(u, freq=FALSE, main="Histograma da amostra da distribuição
      Uniforme simulada")
hist(x, freq=FALSE, main="Histograma da variável X simulada
      a partir do resultado do Teorema 15.1")
```

Os histogramas, das correspondentes distribuições uniforme e normal, estão dispostos na Figura B.5.



**Figura B.5:** Resultados da simulação de uma distribuição uniforme e de uma distribuição normal padrão.

### Exemplo B.12. Simulação de uma distribuição qui-quadrado.



Se  $Z \sim N(0,1)$ , então  $Y = Z^2 \sim \chi^2(1)$ . Por outro lado, pode-se mostrar que uma variável aleatória  $W$  com distribuição  $\chi^2(n)$  pode ser escrita como

$$W = Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_n^2,$$

em que as variáveis aleatórias  $Z_1, \dots, Z_n$  são independentes e têm distribuição normal padrão. Portanto, para simular valores de uma variável aleatória com distribuição qui-quadrado, com  $n$  graus de liberdade, basta gerar  $n$  valores de uma variável aleatória com distribuição  $N(0,1)$  e considerar a soma de seus quadrados.

O R e a planilha Excel têm sub-rotinas próprias para gerar muitas das distribuições estudadas nesta seção. A Tabela 3.9 mostra as opções disponíveis e os comandos apropriados. Além da distribuição  $N(0,1)$  o Excel usa a função `INV()` para gerar algumas outras distribuições contínuas.

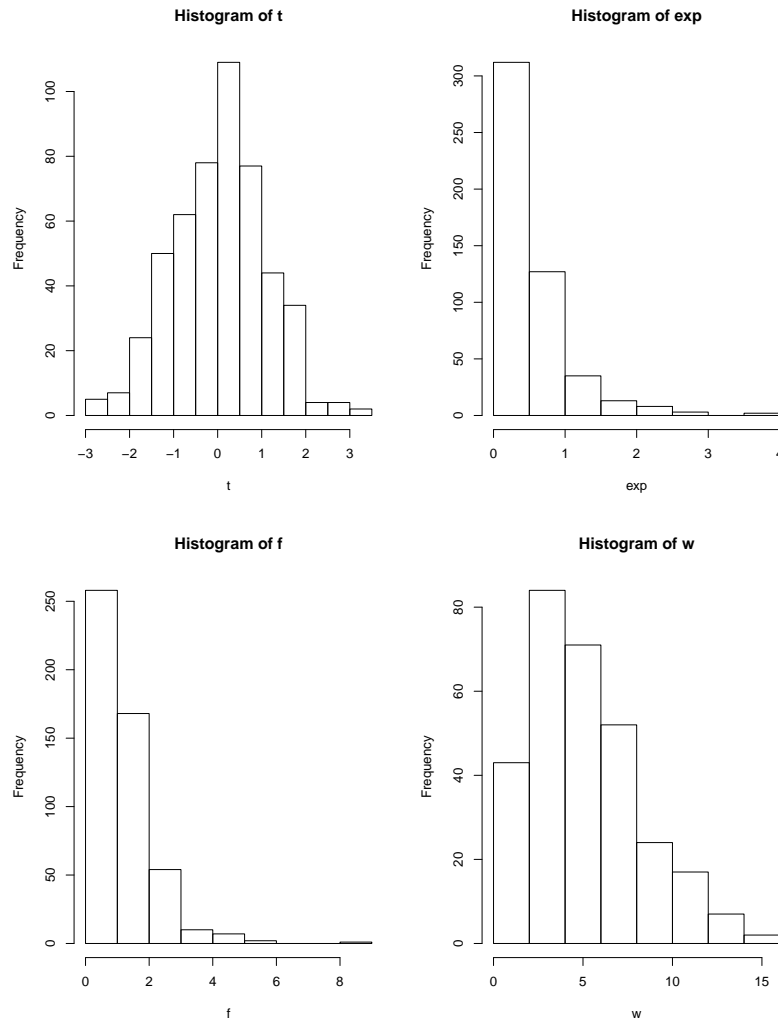
**Tabela B.3:** Geração de distribuições contínuas via R e Excel

Distribuição	Excel (Parâmetros)	R (Parâmetros)
Normal	Normal(0,1)	<code>norm(<math>\mu, \sigma</math>)</code>
Exponencial	–	<code>exp(<math>\beta</math>)</code>
t(Student)	–	<code>t(<math>\nu</math>)</code>
F(Snedecor)	–	<code>f(<math>\nu_1, \nu_2</math>)</code>
Gama	–	<code>gamma(<math>\alpha, \beta</math>)</code>
Qui-Quadrado	–	<code>chisq(<math>\nu</math>)</code>
beta	–	<code>beta(<math>\alpha, \beta</math>)</code>

**Exemplo B.13.** Usando comandos (entre colchetes) do R, simulamos :

- a) 500 valores de uma variável aleatória  $t(35)$  [`t <- rt(500,35)`];
- b) 500 valores de uma variável aleatória  $\text{Exp}(2)$  [`exp <- rexp(500,2)`];
- c) 300 valores de uma variável aleatória  $\chi^2(5)$  [`w <- rchisq(300,5)`];
- d) 500 valores de uma variável aleatória  $F(10,12)$  [`f <- rf(500,10,12)`].

Os histogramas correspondentes estão apresentados na Figura B.6.



**Figura B.6:** Histogramas de algumas distribuições contínuas geradas pelo R.

## B.5 Simulação de vetores aleatórios

Em geral, simular de distribuições multidimensionais é mais complicado do que simular distribuições unidimensionais. No caso de  $X$  e  $Y$  serem variáveis aleatórias contínuas e independentes,

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y);$$

logo, para gerar um valor  $(x,y)$  da densidade conjunta  $f(x,y)$ , basta gerar a componente  $x$  da distribuição marginal de  $X$  e a componente  $y$  da distribuição marginal de  $Y$  independentemente. Para variáveis aleatórias dependentes vale a relação:

$$f(x,y) = f_X(x)f_{Y|X}(y|x).$$

Logo, podemos primeiramente gerar um valor  $x$  da distribuição marginal de  $X$  e fixado esse valor,  $x_0$ , digamos, gerar um valor da distribuição condicional de  $Y$

dado  $X = x_0$ . Isso implica que devemos saber como gerar valores das distribuições  $f_X(x)$  e  $f_{Y|X}(y|x)$ .

Neste texto, limitar-nos-emos a apresentar dois exemplos de variáveis aleatórias contínuas e independentes.

### Exemplo B.13. Distribuição uniforme bidimensional

Para calcular a área do polígono  $F$  da Figura B.1 considerávamos o quociente  $N^*/N$ . Para gerar os  $N$  pontos uniformemente distribuídos sobre o quadrado  $Q$ , basta gerar valores de variáveis  $U_1 \sim \mathcal{U}(0,1)$  e  $U_2 \sim \mathcal{U}(0,1)$ , independentemente, ou seja, a variável aleatória  $(U_1, U_2)$  é uniformemente distribuída em  $Q$ . Então,

$$P[(U_1, U_2) \in F] = \text{área}(F),$$

Os comandos **R** necessários para essa finalidade são:

```
u1 <- runif(200,0,1)
u2 <- runif(200,0,1)
plot(u1,u2, pch=20)
```

No caso da Figura B.1, consideramos 200 valores gerados para  $U_1$  e  $U_2$ , e lembrando que lembrando que a região  $Q$  tem área = 1, temos  $\text{área}(F) = 25/200$ .

### Exemplo B.14. Distribuição normal bidimensional.

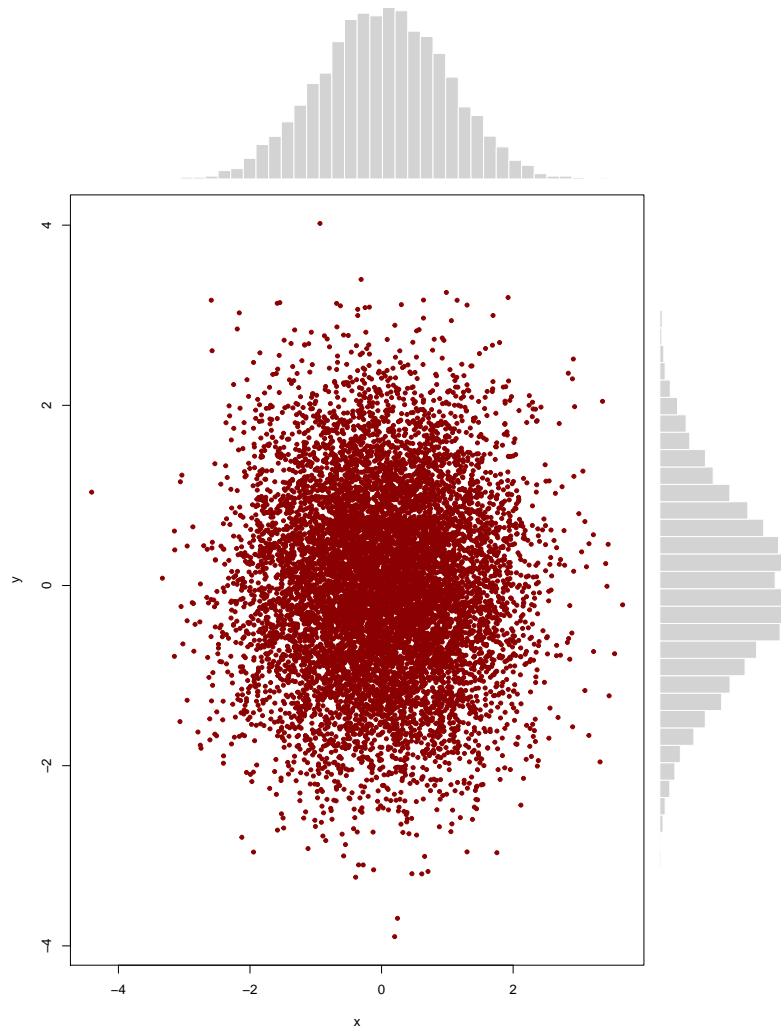
O método de Box-Müller gera valores de duas normais padrões independentes,  $Z_1$  e  $Z_2$ . Logo, se quisermos gerar valores da distribuição conjunta de  $X$  e  $Y$ , independentes com  $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$  e  $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$ , basta considerar

$$X = \mu_x + \sigma_x Z_1, \quad Y = \mu_y + \sigma_y Z_2.$$

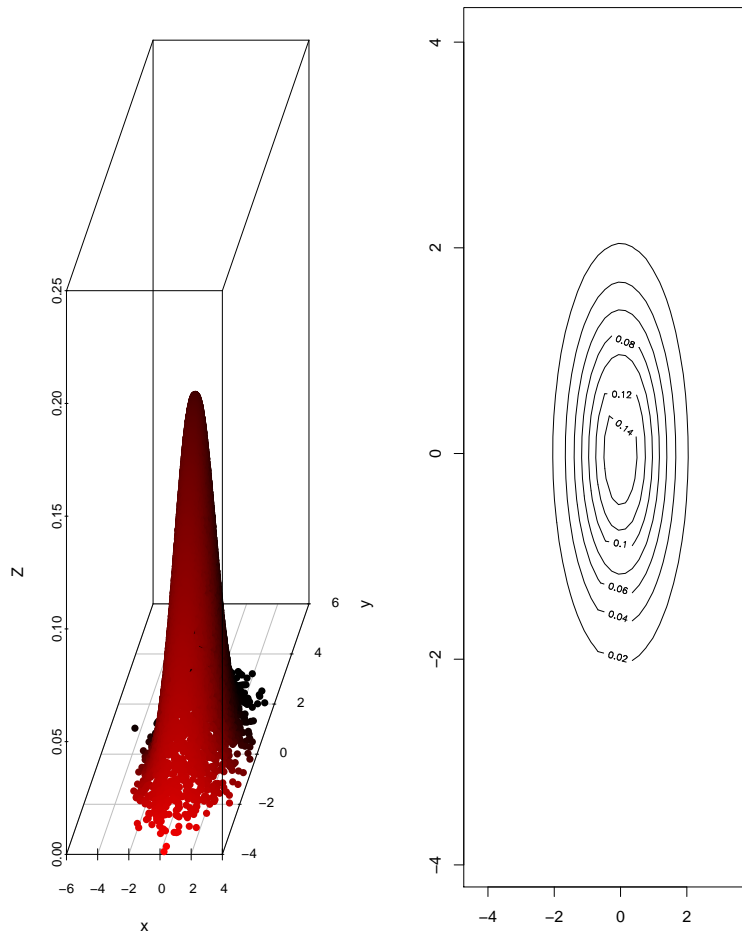
O código R, para o caso de duas normais padrões é

```
%
u1 <- runif(10000,0,1)
u2 <- runif(10000,0,1)
P <- data.frame(u1,u2)
x <- qnorm(u1)
y <- qnorm(u2)
```

Histogramas das duas curvas juntamente com o diagrama de dispersão bidimensional obtidos por meio da geração de 10.000 valores de cada uma das duas distribuições independentes são apresentados na Figura B.7. A densidade correspondente com curvas de nível está disposta na Figura B.8.



**Figura B.7:** Simulação de duas normais independentes (nas margens) e gráfico de dispersão.



**Figura B.8:** Distribuição normal padrão bidimensional com curvas de nível.

## B.6 Métodos de reamostragem

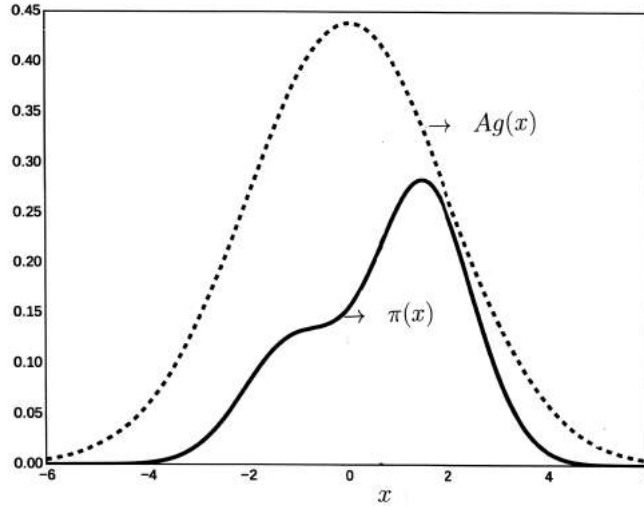
Em algumas situações, a simulação de certas densidades pode ser complicada, mas se existir uma densidade  $g$ , próxima da densidade  $\pi$  da qual pretendemos gerar valores, é possível proceder nas seguintes duas etapas:

- a) Simulamos uma amostra de  $g$ .
- b) Consideramos um mecanismo de correção, de modo que a amostra de  $g$  seja “direcionada” para uma amostra de  $\pi$ . Nesse sentido, cada valor simulado de  $g$  é aceito com certa probabilidade  $p$  escolhida adequadamente para assegurar que o valor aceito seja um valor de  $\pi$ .

Consideramos aqui dois métodos de reamostragem.

### B.6.1 Amostragem por aceitação-rejeição

Suponhamos que exista uma constante finita conhecida  $A$ , tal que  $\pi(x) \leq Ag(x)$ , para todo  $x$ , ou seja,  $Ag$  serve como um envelope para  $\pi$  como sugerido pela Figura B.9.



**Figura B.9:** Densidades  $\pi$  (linha cheia) e  $Ag$  (linha pontilhada).

Os passos do algoritmo de aceitação-rejeição são

- 1) Simular  $x^*$  de  $g(x)$ .
- 2) Simular  $u$  de uma distribuição  $\mathcal{U}(0,1)$ , independentemente de  $x^*$ .
- 3) Aceitar  $x^*$  como gerada de  $\pi(x)$  se  $u \leq \pi(x^*)/Ag(x^*)$  e em caso contrário, voltar ao item 1).

Para justificar o procedimento, suponhamos que  $X \sim g(x)$ . Seja  $p(x)$  a probabilidade que  $x$  seja aceito; então,  $p(x) = \pi(x)/Ag(x)$ . Logo,

$$P(X \leq x \text{ e } X \text{ aceito}) = \int_{-\infty}^x p(y)g(y)dy$$

e

$$P(X \text{ aceito}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(y)g(y)dy.$$

Então

$$P(X \leq x | X \text{ aceito}) = \frac{\int_{-\infty}^x p(y)g(y)dy}{\int_{-\infty}^{\infty} p(y)g(y)dy} = \int_{-\infty}^x \pi(y)dy.$$

Consequentemente, os valores aceitos realmente têm distribuição  $\pi(x)$ . Por outro lado,

$$P(\text{aceitação}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(y)g(y)dy = \frac{1}{A} \int_{-\infty}^{\infty} \pi(y)dy = \frac{1}{A}. \quad (\text{B.14})$$

Observemos que  $\pi$  deve ser conhecida a menos de uma constante de proporcionalidade, ou seja, basta conhecer o que se chama o **núcleo** de  $\pi(x)$ . Devemos escolher  $g(x)$  de modo que ela seja facilmente simulável e de sorte que  $\pi(x) \approx Ag(x)$ , pois nesse caso, a probabilidade de rejeição será menor. Por (B.14), devemos ter  $A \approx 1$ . Seguem algumas observações;

- a)  $0 < \pi(x^*)/Ag(x^*) \leq 1$ ;
- b) O número de iterações,  $N$ , necessárias para gerar  $\pi$  é uma variável aleatória com distribuição geométrica com probabilidade de sucesso

$$p = P[U \leq \pi(x^*)/Ag(x^*)]P(N = n) = (1 - p)^{n-1}p, \quad n \geq 1.$$

Portanto, em média, o número de iterações necessárias é  $E(N) = 1/p$ . Como  $p = 1/A$ , temos  $E(N) = A$ . Logo, é desejável escolher  $g$  de modo que  $A = \sup_x \{\pi(x)/g(x)\}$ .

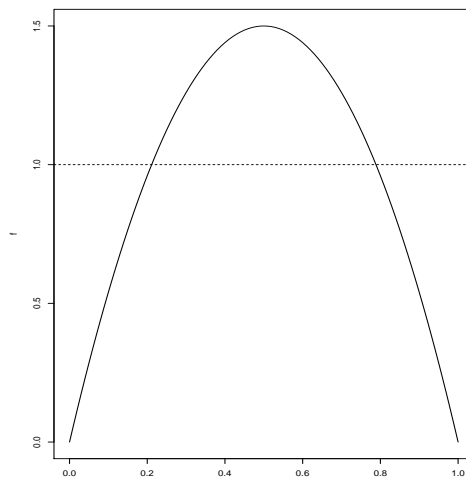
- c) De b), podemos dizer que o número esperado de iterações necessárias até que um valor de  $\pi$  seja gerado com sucesso é exatamente o valor da constante  $A$ .

Esse método pode ser usado também para o caso de variáveis aleatórias discretas.

**Exemplo B.15.** Consideremos a densidade de uma distribuição Beta(2,2), ou seja,

$$\pi(x) = 6x(1 - x), \quad 0 < x < 1.$$

Suponhamos  $g(x) = 1$ ,  $0 < x < 1$ . O máximo de  $\pi(x)$  é 1,5, para  $x = 0,5$ . Logo, podemos escolher  $A = 1,5$  e teremos  $p = P(\text{aceitação}) = 1/A = 0,667$ . Portanto, para obter, por exemplo, uma amostra de tamanho 1.000 de  $\pi(x)$  devemos simular em torno de 1.500 valores de uma distribuição uniforme padrão. Veja a Figura B.10.

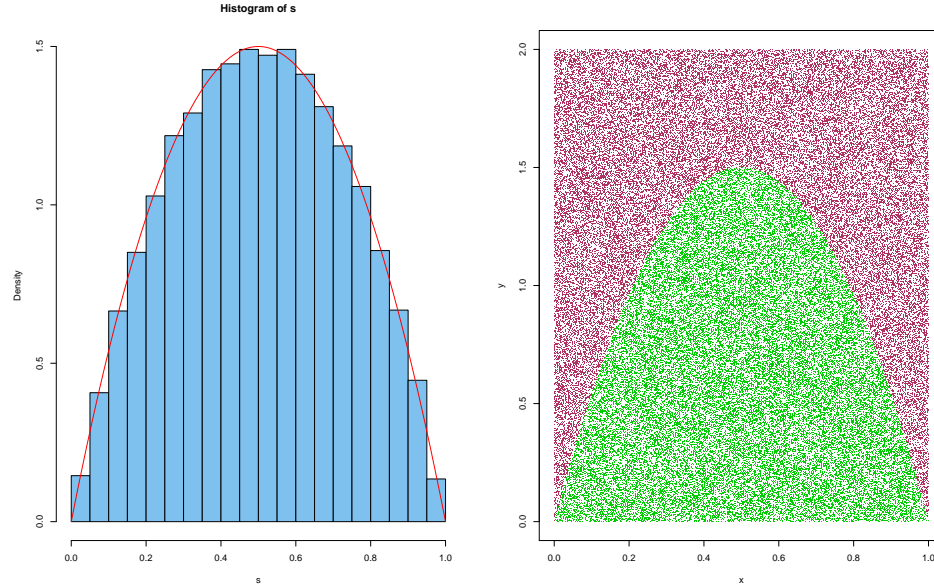


**Figura B.10:** Densidades  $\pi$  (linha cheia) e  $g$  (linha tracejada) para simulação de uma distribuição beta.

Um algoritmo equivalente é o seguinte:

- 1) Simular  $x^*$  de  $g(x)$  e  $y^*$  de  $\mathcal{U}[0, Ag(x^*)]$ .
- 2) Aceitar  $x^*$  se  $y^* \leq \pi(x^*)$ ; em caso contrário, volte ao passo 1).

Usando o R, podemos obter a Figura B.11 que mostra o histograma dos valores gerados (com a verdadeira curva adicionada) e as regiões de aceitação e rejeição.



**Figura B.11:** Histograma dos valores gerados e densidade - (painel esquerdo) e Região de aceitação (verde) e de rejeição (marrom) - (painel direito).

### B.6.2 Reamostragem ponderada

Neste tipo de simulação temos essencialmente as duas etapas anteriores, mas  $Ag(x)$  não precisa ser um envelope para  $\pi$ . O algoritmo correspondente é

- Simular uma amostra  $x_1, \dots, x_n$  de  $g(x)$ .
- Construir os pesos

$$w_i = \frac{\pi(x_i)/g(x_i)}{\sum_{j=1}^n \pi(x_j)/g(x_j)}, \quad i = 1, \dots, n;$$

- Reamostrar da distribuição de probabilidades discreta  $(x_i, w_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  em que o peso  $w_i$  corresponde à probabilidade associada a  $x_i$ . A amostra resultante tem distribuição  $\pi$ .

De fato, se  $x$  for um valor simulado pelo método,

$$F_x(a) = P(X \leq a) = \sum_{i: x_i \leq a} w_i = \frac{\sum_{i=1}^n (\pi(x_i)/g(x_i)) I_{\{x_i \leq a\}}}{\sum_{j=1}^n (\pi(x_j)/g(x_j))},$$

e pela Lei Forte dos Grandes Números, quando  $n \rightarrow \infty$  o último termo converge para

$$\frac{\int [\pi(x)/g(x)] I_{\{x \leq a\}} g(x) dx}{\int [\pi(x)/g(x)] g(x) dx} = \frac{\int \pi(x) I_{\{x \leq a\}} dx}{\int \pi(x) dx} = F_\pi(x).$$

O método de reamostragem ponderada (*importance sampling*) é também usado para reduzir a variância de estimativas obtidas pelo Método Monte Carlo. Suponhamos que em (B.1)  $F$  tenha densidade  $\pi$ . Então

$$\theta_\pi = E_\pi[h(X)] = \int h(x)\pi(x)dx = \int h(x)\left[\frac{\pi(x)}{g(x)}\right]g(x)dx. \quad (\text{B.15})$$



Fazendo  $\varphi(x) = h(x)\pi(x)/g(x)$ , temos

$$\theta_\pi = \int \varphi(x)g(x)dx.$$

Logo, se obtivermos uma amostra  $x_1, \dots, x_n$  de  $g(x)$ , poderemos estimar (B.15) por meio de

$$\hat{\theta}_\pi = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i h(x_i), \quad (\text{B.16})$$

em que  $w_i = \pi(x_i)/g(x_i)$ . O estimador (B.16) é enviesado, em contraste com o estimador Monte Carlo de (B.1), que é não enviesado. Para obter um estimador não enviesado, basta considerar

$$\theta_\pi^* = \frac{\sum_{i=1}^n w_i h(x_i)}{\sum_{i=1}^n w_i}. \quad (\text{B.17})$$

Esse estimador atribui mais peso a regiões em que  $g(x) < \pi(x)$ . Geweke (1989) provou que  $\theta_\pi^* \rightarrow \theta$  com probabilidade um se

- i) o suporte de  $g(x)$  incluir o suporte de  $\pi(x)$ ,
- ii)  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  forem variáveis independentes e identicamente distribuídas com distribuição  $g(x)$ ,
- iii)  $E[h(X)] < \infty$ .

Esse autor também mostrou que o erro padrão da estimativa (B.17) é

$$\frac{\{\sum_{i=1}^n [h(x_i) - \theta_\pi^*]^2 w_i^2\}^{1/2}}{\sum_{i=1}^n w_i}.$$

**Exemplo B.16.** Num **modelo de ligação genética** (*genetic linkage model*)<sup>1</sup>, animais distribuem-se em quatro classes rotuladas segundo o vetor  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^\top$  cujos elementos têm, respectivamente, probabilidades  $(\theta + 2)/4, (1 - \theta)/4, (1 - \theta)/4, \theta/4$ . Num conjunto de 197 animais, as frequências observadas em cada uma das quatro classes são, respectivamente, 125, 18, 20 e 34. O objetivo é estimar  $\theta$ . A verossimilhança associada a esse modelo multinomial é

$$L(\theta|\mathbf{x}) \propto (2 + \theta)^{125} (1 - \theta)^{38} \theta^{34}.$$

Supondo uma distribuição a priori constante para  $\theta$ , a densidade a posteriori é

$$p(\theta|\mathbf{x}) \propto (2 + \theta)^{125} (1 - \theta)^{38} \theta^{34}.$$

Um estimador para  $\theta$  é a média calculada segundo essa densidade a posteriori e é estimada por (B.17). Suponhamos que  $g(\theta) \propto \theta^{34}(1 - \theta)^{38}$ ,  $0 < \theta < 1$ , ou seja, uma distribuição Beta(35, 39). Portanto,

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \theta_i}{\sum_{i=1}^n w_i},$$

em que  $\theta_1, \dots, \theta_n$  corresponde a uma amostra de  $g(x)$ . Os pesos  $w_i$  são

$$w_i = \frac{(2 + \theta_i)^{125}}{\sum_{j=1}^n (2 + \theta_j)^{125}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Gerando 10.000 valores de uma distribuição Beta(35, 39) obtemos  $\hat{\theta} = 0,6180$ .

<sup>1</sup>Para detalhes, veja Rao (1973)

## B.7 Notas de capítulo

### 1) Métodos MCMC

Consideramos dois métodos usados para gerar amostras de uma dada função densidade de probabilidades cujas origens remontam a Metropolis et al. (1953) e Hastings (1970), com interesse mais recente a partir dos artigos de Geman e Geman (1984) e Gelfand e Smith (1990). Concentramos a atenção no **amostrador de Gibbs** e no **algoritmo de Metropolis-Hastings**.

Atualmente, há uma vasta literatura sobre métodos MCMC (*Markov Chain Monte Carlo*), bem como sobre aplicações nas mais diversas áreas. Citamos, em particular, Gamerman e Lopes (2006), Gilks et al. (1996), Tanner (1996), Robert e Casella (2004) e Chen et al. (2000).

Como o próprio nome indica, os algoritmos baseiam-se na teoria de cadeias de Markov. A ideia básica é gerar uma tal cadeia e amostrar de sua distribuição estacionária, que supostamente coincidirá com a distribuição alvo da qual queremos obter amostras. Com essa finalidade, é preciso construir adequadamente o núcleo dessa cadeia.

### 2) O Amostrador de Gibbs

Aqui, seguimos os passos sugeridos por Casella e George (1992). Consideremos uma densidade  $\pi(x)$ , possivelmente multivariada, da qual queremos gerar uma amostra. Com essa finalidade, a ideia é construir uma cadeia de Markov cuja distribuição estacionária seja  $\pi(x)$  e para isso é necessário construir o núcleo (matriz) de transição desta cadeia, obtido a partir das distribuições condicionais completas.

Suponhamos que  $\pi(\mathbf{x}) = \pi(x_1, \dots, x_p)$  com distribuições marginais obtidas segundo o exemplo

$$\pi_1(x_1) = \int \cdots \int \pi(x_1, \dots, x_p) dx_2 \cdots dx_p. \quad (\text{B.18})$$

Particularmente, queremos calcular a média ou a variância de  $x_1$ , o que pode ser complicado analiticamente. Obtida uma amostra de  $X_1$  podemos estimar a média  $E(x_1)$ , por exemplo, pela média amostral.

### O caso de duas variáveis

Consideremos duas variáveis,  $X$  e  $Y$ , com densidade conjunta  $\pi(x, y)$ . Se conhecermos as distribuições condicionais  $\pi_{X|Y}(x|y)$  e  $\pi_{Y|X}(y|x)$ , então o amostrador de Gibbs pode ser utilizado para gerar uma amostra de  $\pi(x)$  (ou de  $\pi(y)$ ) do seguinte modo:

- i) Especificamos um valor inicial  $Y = y_0$ ; os demais valores são obtidos alternando os cálculos entre as distribuições condicionais.
- ii) Amostramos das distribuições de  $X$  e de  $Y$  conforme

$$\begin{aligned} x_j &\sim \pi_{X|Y}(x|Y_j = y_j), \\ y_{j+1} &\sim \pi_{Y|X}(y|X_j = x_j). \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

obtendo a **sequência de Gibbs**  $y_0, x_0, y_1, x_1, \dots, y_k, x_k$ .

Pode-se demonstrar que, para  $k$  suficientemente grande,  $x_k$  corresponde a um valor amostrado de  $\pi(x)$ . Para obter uma amostra de tamanho  $m$  podemos gerar  $m$  sequências de Gibbs independentes e usar o valor final de cada

sequência. Obtida tal amostra, podemos estimar a densidade marginal de  $X$  como

$$\hat{\pi}(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \pi_{X|Y}(x|y_i), \quad (\text{B.20})$$

em que cada  $y_i$  é o valor final de cada sequência de Gibbs, pois  $E[\pi_{X|Y}(x|y)] = \pi(x)$ . No caso discreto, a fórmula análoga é

$$\hat{P}(X = x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m P(X = x|Y_i = y_i). \quad (\text{B.21})$$

Em seguida, apresentamos as ideias básicas que mostram que o esquema iterativo (B.19) de fato produz uma amostra de  $\pi(x)$ .

### O caso geral

Consideramos o contexto bayesiano, em que  $\pi(\boldsymbol{\theta})$  é a densidade de interesse, com  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_p)^\top$ . Cada componente  $\theta_i$  pode ser um escalar, um vetor ou mesmo uma matriz. Admitamos que seja possível calcular as distribuições condicionais completas

$$\pi_i(\theta_i) = \pi(\theta_i|\theta_1, \dots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \dots, \theta_p) = \pi(\theta_i|\theta_{-i}), \quad (\text{B.22})$$

para  $i = 1, 2, \dots, p$ .

O amostrador de Gibbs é construído por meio do seguinte algoritmo:

- i) Considerar valores iniciais  $\boldsymbol{\theta}^{(0)} = (\theta_1^{(0)}, \dots, \theta_p^{(0)})^\top$ ;
- (ii) Obter um novo valor  $\boldsymbol{\theta}^{(j)} = (\theta_1^{(j)}, \dots, \theta_p^{(j)})^\top$  a partir de  $\boldsymbol{\theta}^{(j-1)}$  por meio de gerações sucessivas dos valores

$$\begin{aligned} \theta_1^{(j)} &\sim \pi(\theta_1|\theta_2^{(j-1)}, \dots, \theta_p^{(j-1)}), \\ \theta_2^{(j)} &\sim \pi(\theta_2|\theta_1^{(j)}, \theta_3^{(j-1)}, \dots, \theta_p^{(j-1)}), \\ &\vdots \\ \theta_p^{(j)} &\sim \pi(\theta_p|\theta_1^{(j)}, \dots, \theta_{p-1}^{(j)}). \end{aligned}$$

- iii) Iterar até a convergência.

Os vetores  $\boldsymbol{\theta}^{(0)}, \boldsymbol{\theta}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{\theta}^{(k)}, \dots$  são realizações de uma cadeia de Markov com núcleo de transição

$$p(\boldsymbol{\theta}^*, \boldsymbol{\theta}) = \pi(\theta_1|\theta_2^*, \dots, \theta_p^*)\pi(\theta_2|\theta_1, \theta_3^*, \dots, \theta_p^*) \dots \pi(\theta_p|\theta_1, \dots, \theta_{p-1}). \quad (\text{B.23})$$

É fácil ver que o esquema do amostrador de Gibbs define uma cadeia de Markov (dado que a iteração  $j$  depende somente da iteração  $j-1$ ) homogênea, pois podemos escrever

$$p(\boldsymbol{\theta}^{(j-1)}, \boldsymbol{\theta}^{(j)}) = \pi(\theta_1^{(j)}|\theta_2^{(j-1)}, \dots, \theta_p^{(j-1)}) \dots \pi(\theta_p^{(j)}|\theta_1^{(j)}, \dots, \theta_{p-1}^{(j-1)}), \quad (\text{B.24})$$

que não varia com  $j$ .

### 3) O algoritmo de Metropolis-Hastings

Neste item baseamo-nos nos trabalhos de Chib e Greenberg (1995) e Hastings (1970). Novamente, o objetivo é gerar uma amostra de uma distribuição  $\pi$ , por meio de uma cadeia de Markov. Com esse propósito, construímos um núcleo de transição  $p(\theta, \phi)$  de forma que  $\pi$  seja a distribuição de equilíbrio da cadeia, considerando aquelas que satisfazem a seguinte condição de reversibilidade

$$\pi(\theta)p(\theta, \phi) = \pi(\phi)p(\phi, \theta),$$

para todo  $(\theta, \phi)$ . Essa condição é suficiente para que  $\pi$  seja a distribuição de equilíbrio. Integrando ambos os membros, obtemos

$$\int \pi(\theta)p(\theta, \phi)dx = \int \pi(\phi)p(\phi, \theta)dx = \pi(\phi), \quad \text{para todo } \phi.$$

O núcleo  $p(\theta, \phi)$  é constituído de dois elementos: um núcleo de transição arbitrário,  $q(\theta, \phi)$  e uma probabilidade  $\alpha(\theta, \phi)$ , tal que

$$p(\theta, \phi) = q(\theta, \phi)\alpha(\theta, \phi), \quad \theta \neq \phi. \quad (\text{B.25})$$

O núcleo de transição define uma densidade  $p(\theta, \cdot)$ , para todos os valores distintos de  $\theta$ . Logo, a probabilidade positiva de a cadeia se manter em  $\theta$  é

$$p(\theta, \theta) = 1 - \int q(\theta, \phi)\alpha(\theta, \phi)d\phi.$$

De modo geral,

$$p(\theta, A) = \int_A q(\theta, \phi)\alpha(\theta, \phi)d\phi + I_{\{\theta \in A\}}[1 - \int q(\theta, \phi)\alpha(\theta, \phi)d\phi].$$

Logo  $p(\cdot, \cdot)$  define uma distribuição mista para o novo estado  $\phi$  da cadeia de Markov. Para  $\theta \neq \phi$ , essa distribuição tem uma densidade e para  $\theta = \phi$ , essa distribuição atribui uma probabilidade positiva.

A expressão mais comum para a probabilidade de aceitação é

$$\alpha(\theta, \phi) = \min \left\{ 1, \frac{\pi(\phi)q(\phi, \theta)}{\pi(\theta)q(\theta, \phi)} \right\}. \quad (\text{B.26})$$

O algoritmo pode ser implementado por meio dos seguintes passos

- i) Inicializar o número de iterações com  $j = 1$  e  $\theta^{(0)}$ ;
- ii) Mover a cadeia para um novo valor  $\phi$  gerado da densidade  $q(\theta^{(j-1)}, \cdot)$ ;
- iii) Calcular a probabilidade de aceitação do movimento,  $\alpha(\theta^{(j-1)}, \phi)$ , usando (B.26); se o movimento for aceito, fazer  $\theta^{(j)} = \phi$ ; em caso contrário, fazer  $\theta^{(j)} = \theta^{(j-1)}$  e não alterar a cadeia.
- iv) Mudar o contador de  $j$  para  $j + 1$  e retornar ao item ii) até a convergência.

A etapa iii) é realizada após a geração de um número aleatório  $u$ , independente de todas as outras variáveis. Se  $u \leq \alpha$ , o movimento é aceito e se  $u > \alpha$  o movimento não é aceito. O núcleo de transição  $q$  define apenas uma proposta de movimento, que pode ou não ser confirmada por  $\alpha$ . O sucesso do método depende de taxas de aceitação não muito baixas (da ordem de 20% – 50%) e de propostas  $q$  fáceis de simular.

Algumas escolhas específicas são:

- a) Cadeias simétricas:  $p(\theta, \phi) = p(\phi, \theta)$ , para todo par  $(\theta, \phi)$ . Esta é a escolha da versão original de Metropolis et al. (1953), que não depende de  $q$ , ou seja (B.26) só depende de  $\pi(\phi)/\pi(\theta)$  e nesse caso não é necessário conhecer a forma completa de  $\pi$ .
- b) Passeio aleatório: neste caso a cadeia tem evolução dada por  $\theta^{(j)} = \theta^{(j-1)} + w_j$ , em que  $w_j$  é uma variável aleatória com distribuição independente da cadeia. Normalmente, tomam-se os  $w_j$  como variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com densidade  $f_w$  e nesse caso  $q(\theta, \phi) = f_w(\phi - \theta)$ . Se  $f_w$  for simétrica (como no caso das distribuições normal e  $t$ -Student), obtemos o caso a).
- c) Cadeias independentes: a transição proposta é formulada independentemente da posição atual  $\theta$  da cadeia, ou seja,  $q(\theta, \phi) = f(\phi)$ .

Algumas observações sobre o procedimento Metropolis-Hastings são:

- i) **Metropolis-Hastings em Gibbs:** No amostrador de Gibbs as transições são baseadas nas distribuições condicionais completas das componentes de  $\theta$ . É possível que  $\pi$  tenha uma forma complicada, impossibilitando a geração de valores diretamente, mas alguma distribuição condicional completa  $\pi_i$  pode ser utilizada diretamente para a geração. Müller (1992) sugere que a geração dos componentes  $\theta_i$  para os quais não se pode gerar diretamente  $\pi_i$  seja feita por meio de uma sub-cadeia do algoritmo Metropolis-Hastings dentro do ciclo do amostrador de Gibbs.
- ii) Suponha que  $q$  seja irredutível e aperiódica e  $\alpha(\theta, \phi) > 0$ , para todo  $(\theta, \phi)$ . Então o algoritmo de Metropolis-Hastings define uma cadeia de Markov aperiódica e irredutível, com núcleo de transição  $p$  dado por (B.25) e distribuição de equilíbrio  $\pi$ . Veja Roberts e Smith (1994) para detalhes.

Para mais informações sobre o algoritmo de Metropolis, posteriormente generalizado por Hastings (1970), veja Tanner (1996).

#### 4) Transformação de Box-Müller.

Consideremos as variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$ , independentes e ambas com distribuição  $N(0,1)$ . A densidade conjunta de  $X$  e  $Y$  é

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} \exp[-(x^2 + y^2)/2].$$

Consideremos, agora, a transformação

$$\begin{aligned} r &= x^2 + y^2 \\ \theta &= \arctg(y/x). \end{aligned}$$

Então  $x = \sqrt{r} \cos \theta$ ,  $y = \sqrt{r} \sin \theta$  e o Jacobiano da transformação é  $|J| = 1/2$ . Consequentemente, a densidade conjunta de  $r$  e  $\theta$  é

$$f(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \exp(-r^2) \frac{1}{2}, \quad 0 < r < \infty, \quad 0 < \theta < 2\pi.$$

Desta relação podemos concluir que  $r = R^2$  e  $\theta$  são independentes, com

$$R^2 \sim \text{Exp}(2), \quad \theta \sim \mathcal{U}(0,2\pi).$$

Portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned} X &= R \cos \theta = \sqrt{-2 \log U_1} \cos(2\pi U_2) \\ Y &= R \sin \theta = \sqrt{-2 \log U_1} \sin(2\pi U_2) \end{aligned}$$

pois se  $R^2 \sim \text{Exp}(2)$ , gerado de um número aleatório  $U_1$ , então  $-2 \log U_1 \sim \text{Exp}(2)$ ; por outro lado, se  $\theta \sim \mathcal{U}(0, 2\pi)$ , gerado de um número aleatório  $U_2$ , temos  $2\pi U_2 \sim \mathcal{U}(0, 2\pi)$ .

5) **Simulação de uma distribuição gama.**

Pode-se demonstrar, usando resultados não estudados neste capítulo, que se a variável aleatória  $X \sim \text{Gama}(r, \beta)$ , com  $r$  inteiro, então  $X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_r$ , em que cada  $Y_i \sim \text{Exp}(\beta)$  e as variáveis aleatórias  $Y_i$  são independentes. Logo, para gerar um valor de uma distribuição  $\text{Gama}(r, \beta)$ , com  $r > 0$ , inteiro, basta gerar  $r$  valores de uma distribuição exponencial de parâmetro  $\beta$  e depois somá-los.

## B.8 Exercícios

- 1) **O método dos quadrados centrais** de von Neumann opera do seguinte modo. Considere um inteiro  $n_0$  com  $m$  dígitos e seu quadrado  $n_0^2$ , que terá  $2m$  dígitos (eventualmente acrescentando zeros à esquerda). Tome os dígitos centrais de  $n_0^2$  e divida o número obtido por  $10^m$  para se obter um número aleatório,  $u_0$ , entre 0 e 1. Continue, tomando  $n_1$  como o número inteiro central desse passo. Esse método pode não funcionar bem, como indicado no exemplo abaixo de Kleijnen e van Groenendaal (1994).

Suponha  $m = 2$  e considere  $n_0 = 23$ . Então,  $n_0^2 = 0529$  e o primeiro número aleatório é  $u_0 = 0,52$ . Agora,  $n_1 = 52$ ,  $n_1^2 = 2704$  e  $u_1 = 0,70$ . Sucessivamente, obtemos  $u_2 = 0,90$ ,  $u_3 = 0,10$ ,  $u_4 = 0,10$  etc. Ou seja, a partir de  $u_4$ , os números aleatórios se repetem.

Obtenha números aleatórios, com  $m = 3$ , usando este método.

- 2) O resultado da operação  $x \bmod m$ , na qual  $x$  e  $m$  são inteiros não negativos é o resto da divisão de  $x$  por  $m$ . ou seja, se  $x = mq + r$ , então  $x \bmod m = r$ . Por exemplo,  $13 \bmod 4 = 1$ .

Encontre  $18 \bmod 5$  e  $360 \bmod 100$ .

- 3) No **método congruencial multiplicativo** de gerar números pseudo aleatórios, começamos com um valor inicial  $n_0$ , chamado **semente** e geramos sucessivos valores  $n_1, n_2, \dots$  por meio da relação

$$n_{i+1} = an_i \bmod m,$$

com  $n_0, a, m$  inteiros não negativos e  $i = 0, 1, \dots, m - 1$ . A constante  $a$  é chamada de multiplicador e  $m$  de módulo. Por meio da expressão acima no máximo  $m$  números diferentes são gerados, a saber,  $0, 1, \dots, m - 1$ . Se  $h \leq m$  for o valor de  $i$  correspondente ao número máximo de pontos gerados, a partir do qual os valores se repetem, então  $h$  é chamado de **ciclo** ou de **período** do gerador. Os números pseudo aleatórios são obtidos por meio de

$$u_i = \frac{n_i}{m}, \quad i = 0, 1, \dots, m - 1.$$

Tomemos, por exemplo, a semente  $n_0 = 17$ ,  $a = 7$  e  $m = 100$ . Então obtemos

$i:$	0	1	2	3	4	...
$n_i:$	17	19	33	31	17	...

Nesse caso, o ciclo é  $h = 4$  e os valores  $n_i$  repetem-se a partir daí. Os correspondentes números pseudo aleatórios gerados serão

0,17; 0,19; 0,33; 0,31; 0,17; ...

Na prática, devemos escolher  $a$  e  $m$  de modo a obter ciclos grandes, ou seja, gerar muitos números pseudo aleatórios antes que eles comecem a se repetir. A seleção de  $m$  é normalmente determinada pelo número de “bits” das palavras do computador usado. Atualmente, por exemplo,  $m = 2^{32}$ . Para o valor  $a$ , a sugestão é tomar uma potência grande de um número primo, por exemplo  $a = 7^5$ .

O **método congruencial misto** usa a expressão

$$n_{i+1} = (an_i + b) \bmod m.$$

- 4) Considere a semente  $n_0 = 13$ , o multiplicador  $a = 5$  e o módulo  $m = 100$ , para gerar 10 números pseudo aleatórios. Qual o período  $h$  nesse caso?
- 5) Repita o exercício anterior com  $n_0 = 19$ ,  $a = 13$  e  $m = 100$ .
- 6) Use algum programa ou planilha computacional para gerar 10.000 números pseudo aleatórios. Construa um histograma e um *boxplot* com esses valores. Esses gráficos corroboram o fato que esses números obtidos são observações de uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo  $(0,1)$ ? Comente os resultados.
- 7) Gere 5 valores da variável aleatória  $X$ , cuja distribuição é

$X :$	0,	1,	2,	3,	4
$p_j :$	0,1,	0,2,	0,4,	0,2,	0,1

- 8) Considere a variável aleatória  $X$  contínua com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ 0, & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$

Como você procederia para obter um valor simulado de  $X$ ? Se  $u = 0,5$ , qual é o valor correspondente gerado de  $X$ ?

- 9) Gere 10 valores de uma distribuição de Bernoulli, com  $p = 0,35$ .
- 10) Gere 10 valores de uma variável aleatória  $Y \sim Bin(10; 0,2)$ .
- 11) Simule 10 valores de uma distribuição exponencial com parâmetro  $\beta = 1/2$ .
- 12) Usando o Teorema B.1, gere:
  - a) 10 valores de uma distribuição  $N(10; 4)$ ;
  - b) 10 valores de uma distribuição  $t$ -Student com 24 graus de liberdade.
- 13) Gere 10 valores de uma distribuição qui-quadrado com 3 graus de liberdade.

- 14) Uma distribuição binomial de parâmetros  $n$  e  $p$  também pode ser simulada por meio de

$$p_{j+1} = \frac{n-j}{j+1} \frac{p}{1-p} p_j,$$

com  $p_j = P(X = j)$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ .

Chame de  $j$  o valor atual,  $pr = P(X = j)$ ,  $F = F(j) = P(X \leq j)$  e considere o algoritmo:

1. Gere o número aleatório  $u$ ;
2.  $r = p/(1-p)$ ,  $j = 0$ ,  $pr = (1-p)^n$ ,  $F = pr$ ;
3. Se  $u < F$ , coloque  $X = j$ ;
4.  $pr = r(n-j)/[(j+1)pr]$ ,  $F = F + pr$ ,  $j = j + 1$ .
5. Volte ao passo 3.

Usando esse algoritmo, gere 5 valores da variável aleatória.  $X \sim Bin(5; 0,3)$ .

- 15) Gere 5 valores de uma variável aleatória com distribuição de Poisson de parâmetro  $\lambda = 2$ .
- 16) Considere a distribuição gama truncada  $\pi(x) \propto x^2 \exp(-x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$ . Simule uma amostra de tamanho 1.000 dessa distribuição usando o método da aceitação-rejeição com  $g(x) = \exp(-x)$ .
- 17) Usando o Método Monte Carlo, calcule  $P(X < 1, Y < 1)$  em que  $X$  e  $Y$  seguem distribuições normais padrões e têm coeficiente de correlação  $\rho = 0,5$ . [Sugestão: simule  $x$  de  $X$  e depois  $y$  de  $f(y|x)$  obtendo a média e a variância desta distribuição condicional.]
- 18) Suponha que  $Z \sim N(0,1)$  e considere  $X = |Z|$ . Obtenha a densidade  $\pi(x)$  de  $X$ . Use o método da aceitação-rejeição para obter uma amostra de  $\pi(x)$  com  $g(x) = \exp(-x)$ . A seguir gere uma amostra de  $Z$ , levando em conta que  $Z = X$  ou  $Z = -X$ .
- 19) Considere o método da aceitação-rejeição no caso de variáveis discretas. Especificamente, suponha que queiramos simular valores de uma variável aleatória  $X$ , com probabilidades  $\pi_j = P(X = j)$  e dispomos de um método para simular valores da variável aleatória  $Y$ , com probabilidades  $g_j = P(Y = j)$ . Suponha ainda, que exista uma constante  $c$ , tal que  $\pi_j \leq cg_j$ , para todo  $j$ . Usando o algoritmo de aceitação-rejeição, mostre que  $P(\text{aceitar}) = 1/c$  e que o número de iterações necessárias para obter  $X$  é uma variável aleatória com distribuição geométrica com média  $c$ . Com esse resultado, mostre que  $P(X = j) = \pi_j$ .
- 20) Suponha que  $X$  tenha valores 1, 2, 3, 4 e 5, com probabilidades  $\pi_j$  dadas por 0,2, 0,3, 0,1, 0,1 e 0,3, respectivamente. Como ficaria o algoritmo de aceitação-rejeição, se escolhermos  $Y$  com os mesmos valores de  $X$  e com probabilidades  $g_j = 1/5$ , para todo  $j$ ?



# Algoritmos para dados aumentados

An approximate answer to the right problem is worth a good deal more than an exact answer to an approximate problem.

John Tukey

## C.1 Introdução

Neste capítulo apresentaremos dois algoritmos baseados no conceito de **dados latentes**, que podem ocorrer por diferentes mecanismos. Por exemplo, para facilitar o procedimento de amostragem da verossimilhança ou da densidade a posteriori de alguma variável  $Y$  para as quais temos observações, aumentamos os dados disponíveis introduzindo dados  $Z$ , chamados latentes ou não observados; esse é o caso do **algoritmo de dados aumentados** ou do **algoritmo EM** que discutiremos neste apêndice. Outros procedimentos que utilizam dados latentes são os vários métodos de imputação e os métodos de reamostragem e de reamostragem ponderada que foram tratados no Apêndice B. O leitor interessado poderá consultar Tanner(1996) para detalhes.

As técnicas que se valem de dados latentes também são úteis no caso de dados incompletos, que ilustramos por meio de um exemplo.

**Exemplo C.1.** Suponhamos que dados observados periodicamente (por exemplo, peixes presos em armadilhas). Sejam  $x_1, \dots, x_7$  as quantidades capturadas nos dias  $1, \dots, 7$  constituindo os **dados completos**. Agora imaginemos que as observações ocorrem apenas nos dias 1, 3, 4 e 7 de forma cumulativa, gerando os dados  $y_1 = x_1 + x_2$ ,  $y_2 = x_3$ ,  $y_3 = x_4 + x_5$ ,  $y_4 = x_6 + x_7$ . Os valores  $y_1, y_2, y_3, y_4$  constituem os **dados incompletos**. Se considerarmos observações (não cumulativas) somente nos dias 1, 2, 5 e 7, então  $y_1 = x_1$ ,  $y_2 = x_2$ ,  $y_3 = x_5$ ,  $y_4 = x_7$  constituem os dados incompletos.

Originalmente, a ideia de imputação múltipla estava associada com valores omissos oriundos de respostas omissas em levantamentos amostrais. Esta formulação foi estendida para outras áreas. O método **MCMC** (*Markov Chain Monte Carlo*), descrito no Apêndice B, é um exemplo de procedimento que visa mimetizar informação não observada. Esse tópico de observações omissas remonta a Wilks (1932) e Anderson (1957) e talvez a primeira formulação sistematizada seja aquela de Rubin (1977). Outras referências são sobre esse tema incluem Rubin (1987), Little e Rubin (1987) e Rubin (1996).

## C.2 O algoritmo EM

Consideremos dados  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$  provenientes do modelo  $f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})$  obtidos com o objetivo de encontrar o estimador de máxima verossimilhança de  $\boldsymbol{\theta}$ , ou seja, de maximizar a verossimilhança  $L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$ . Alternativamente, o objetivo poderia ser encontrar a moda da distribuição a posteriori  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$ . Concentremo-nos inicialmente na maximização da verossimilhança.

Suponhamos que os dados  $\mathbf{x}$  não sejam completamente observados mas que alguma função de  $\mathbf{x}$ , digamos  $\mathbf{y} = h(\mathbf{x})$  o seja. Diremos que  $\mathbf{x}$  constituem os dados completos enquanto  $\mathbf{y}$  constituem os dados incompletos. A verossimilhança dos dados observados (incompletos)  $\mathbf{y}$  é dada por

$$L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) = \int_{\mathcal{X}(\mathbf{y})} L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (\text{C.1})$$

em que  $\mathcal{X}(\mathbf{y})$  é a parte do espaço amostral  $\mathcal{X}$  de  $\mathbf{x}$  determinada pela restrição  $\mathbf{y} = h(\mathbf{x})$ .

O algoritmo EM é um procedimento iterativo segundo o qual encontramos o valor de  $\boldsymbol{\theta}$  que maximiza a verossimilhança dos dados observados,  $L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$ , usando  $L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$  de maneira conveniente. “Conveniente” aqui significa escolher  $L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$  de tal forma que  $L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$  seja obtida por meio de (C.1).

**Exemplo C.2.** Retomemos o problema da ligação genética discutido no Exemplo B.16, segundo o qual os dados  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)^\top = (125, 18, 20, 34)^\top$  ocorrem com probabilidades  $\pi_1 = (2 + \theta)/4$ ,  $\pi_2 = \pi_3 = (1 - \theta)/4$ ,  $\pi_4 = \theta/4$ ,  $0 < \theta < 1$ . A verossimilhança dos dados incompletos é

$$L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) = \frac{(y_1 + \dots + y_4)!}{y_1! \dots y_4!} \left(\frac{2 + \theta}{4}\right)^{y_1} \left(\frac{1 - \theta}{4}\right)^{y_2 + y_3} \left(\frac{\theta}{4}\right)^{y_4},$$

cujos núcleo é

$$\left(\frac{2 + \theta}{4}\right)^{y_1} \left(\frac{1 - \theta}{4}\right)^{y_2 + y_3} \left(\frac{\theta}{4}\right)^{y_4}.$$

Admitamos que  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_5)^\top$  sejam os dados completos que ocorrem, respectivamente, com probabilidades  $(1/2, \theta/4, (1 - \theta)/4, (1 - \theta)/4, \theta/4)$ , mas que só observamos  $y_1 = x_1 + x_2$ ,  $y_2 = x_3$ ,  $y_3 = x_4$  e  $y_4 = x_5$ , de modo que o núcleo da verossimilhança dos dados completos seja

$$L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}) \propto \left(\frac{\theta}{4}\right)^{x_2 + x_5} \left(\frac{1 - \theta}{4}\right)^{x_3 + x_4}.$$

Podemos simplificar as expressões acima obtendo

$$L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) \propto (2 + \theta)^{y_1} (1 - \theta)^{y_2 + y_3} \theta^{y_4}, \quad (\text{C.2})$$

e

$$L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X}) \propto \theta^{x_2 + x_5} (1 - \theta)^{x_3 + x_4}. \quad (\text{C.3})$$

Neste caso, a expressão (C.1) se reduz a

$$L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) = \sum_{x_1, x_2} L(\boldsymbol{\theta}|x_1, x_2, 18, 20, 34),$$

em que a soma é estendida a todos os pares  $(x_1, x_2)$  tais que  $x_1 + x_2 = 125$ , com  $x_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2$ . Nesse contexto, o algoritmo **EM** pode ser explicitado como:

- 1) Escolher um valor inicial,  $\theta^{(0)}$ .
- 2) Obter a esperança condicional de  $\mathbf{x}$ , dado  $\mathbf{y}$  (passo **E**), ou seja, estimar os dados completos por meio de suas esperanças condicionais, dados  $\mathbf{y}$  e  $\theta^{(0)}$ , observando que  $E(x_3|\mathbf{y}, \theta^{(0)}) = 18$ ,  $E(x_4|\mathbf{y}, \theta^{(0)}) = 20$ ,  $E(x_5|\mathbf{y}, \theta^{(0)}) = 34$  e que

$$E(x_1|\mathbf{y}, \theta^{(0)}) = E(x_1|x_1 + x_2 = 125, \theta^{(0)}) = x_1^{(0)},$$

$$E(x_2|\mathbf{y}, \theta^{(0)}) = E(x_2|x_1 + x_2 = 125, \theta^{(0)}) = x_2^{(0)}.$$

Como

$$x_1|x_1 + x_2 = 125 \sim \text{Bin}(n, p_1), \quad n = 125, \quad p_1 = \frac{1/2}{1/2 + \theta/4} = \frac{2}{2 + \theta^{(0)}},$$

$$x_2|x_1 + x_2 = 125 \sim \text{Bin}(n, p_2), \quad n = 125, \quad p_2 = \frac{\theta^{(0)}}{2 + \theta^{(0)}},$$

obtemos  $x_1^{(0)} = 250/(2 + \theta^{(0)})$  e  $x_2^{(0)} = 125\theta^{(0)}/(2 + \theta^{(0)})$ . Neste passo, os dados completos estimados são  $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, 18, 20, 34)^\top$ .

- 3) O passo **M** consiste em maximizar a verossimilhança dos dados completos,  $L(\theta|\mathbf{x}^{(0)})$ . Então,

$$\ell(\theta|\mathbf{x}^{(0)}) = x_1^{(0)} \log(1/2) + x_2^{(0)} \log\left(\frac{\theta}{4}\right) + x_3 \log\left(\frac{1-\theta}{4}\right) + x_4 \log\left(\frac{1-\theta}{4}\right) + x_5 \log\left(\frac{\theta}{4}\right)$$

que é proporcional a

$$(x_2^{(0)} + x_5) \log(\theta) + (x_3 + x_4) \log(1 - \theta).$$

Derivando essa expressão em relação a  $\theta$ , obtemos

$$\frac{d\ell(\theta)}{d\theta} = \frac{x_2^{(0)} + x_5}{\theta} - \frac{x_3 + x_4}{1 - \theta};$$

igualando-a a zero temos, finalmente,

$$\theta^{(1)} = \frac{x_2^{(0)} + x_5}{x_2^{(0)} + x_3 + x_4 + x_5} = \frac{x_2^{(0)} + 34}{x_2^{(0)} + 72}. \quad (\text{C.4})$$

De modo geral, dada a estimativa na iteração  $i$ ,  $\theta^{(i)}$ , estimamos os dados latentes por meio de

$$x_1^{(i)} = \frac{250}{2 + \theta^{(i)}}, \quad x_2^{(i)} = \frac{125\theta^{(i)}}{2 + \theta^{(i)}}$$

e atualizamos o estimador de  $\theta$  por intermédio de

$$\theta^{(i+1)} = \frac{x_2^{(i)} + 34}{x_2^{(i)} + 72}. \quad (\text{C.5})$$

Se tomarmos, por exemplo,  $\theta^{(0)} = 0,5$ , obteremos as iterações da Tabela C.1, que produzem a estimativa  $\hat{\theta} = 0,62682$ .

**Tabela C.1:** Iterações do algoritmo **EM** para o modelo genético

Iteração ( $i$ )	$\theta^{(i)}$
0	0,50000
1	0,60800
2	0,62400
3	0,62648
4	0,62677
5	0,62681
6	0,62682
7	0,62682

As estimativas para as probabilidades  $\pi_i$  são,  $\hat{\pi}_1 = 0,6567$ ,  $\hat{\pi}_2 = \hat{\pi}_3 = 0,0933$ ,  $\hat{\pi}_4 = 0,1567$ .

O algoritmo **EM** pode ser usado para maximizar tanto a verossimilhança  $L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$  quanto a distribuição a posteriori  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$ . Neste caso, é preciso considerar a distribuição *a posteriori* aumentada  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{z}) = p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$  e a densidade  $p(\mathbf{z}|\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}^{(i)})$ , que é a distribuição condicional preditora dos dados latentes  $\mathbf{z}$ , condicional ao valor atual da moda e aos dados observados. No Exemplo C.2, em que indicamos os passos necessários para a implementação do algoritmo **EM** em termos da verossimilhança, essa distribuição é a binomial com parâmetros  $n = 125$  e  $p = \theta^{(i)}/(2 + \theta^{(i)})$ . Para a densidade *a posteriori* as modificações são óbvias.

i) **Passo E:** calcular

$$Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^{(i)}) = \mathbb{E}[\ell(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})|\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}^{(i)}], \quad (\text{C.6})$$

ou seja, a esperança condicional da log-verossimilhança aumentada, considerando os dados  $\mathbf{y}$  e o valor atual  $\boldsymbol{\theta}^{(i)}$ .

ii) **Passo M:** obter o valor  $\boldsymbol{\theta}^{(i+1)}$  no espaço paramétrico que maximiza  $Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^{(i)})$ .

iii) Iterar até a convergência, ou seja, até que  $\|\boldsymbol{\theta}^{(i+1)} - \boldsymbol{\theta}^{(i)}\|$  ou  $|Q(\boldsymbol{\theta}^{(i+1)}, \boldsymbol{\theta}^{(i)}) - Q(\boldsymbol{\theta}^{(i)}, \boldsymbol{\theta}^{(i)})|$  sejam suficientemente pequenas.

No caso da distribuição *a posteriori*, considerar

$$Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^{(i)}) = \int_{\mathbf{z}} \log p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{z}) p(\mathbf{z}|\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}^{(i)}) d\mathbf{z}. \quad (\text{C.7})$$

**Exemplo C.3.** Retornando ao Exemplo C.2, temos

$$\begin{aligned} Q(\theta, \theta^{(i)}) &= \mathbb{E}[(x_2 + x_5) \log \theta + (x_3 + x_4) \log(1 - \theta) | \mathbf{y}, \theta^{(i)}] \\ &= [\mathbb{E}(x_2 | \mathbf{y}, \theta^{(i)}) + x_5] \log \theta + (x_3 + x_4) \log(1 - \theta). \end{aligned}$$

Lembremos que, aqui,

$$\mathbb{E}(x_2 | \mathbf{y}, \theta^{(i)}) = \frac{125\theta^{(i)}}{2 + \theta^{(i)}}.$$

e maximizando  $Q(\theta, \theta^{(i)})$ , obtemos

$$\theta^{(i+1)} = \frac{\mathbb{E}(x_2 | \mathbf{y}, \theta^{(i)}) + x_5}{\mathbb{E}(x_2 | \mathbf{y}, \theta^{(i)}) + x_3 + x_4 + x_5}.$$

Dempster et al. (1977) provam alguns resultados de convergência relativos ao algoritmo, mas com incorreções. As correções foram feitas por Boyles (1983) e Wu (1983). A seguir, resumimos os principais resultados. Para as demonstrações, o leitor deve consultar os autores mencionados acima além de Tanner (1996).

**Proposição C.1.** Seja  $\ell(\boldsymbol{\theta})$  a log-verossimilhança dos dados observados. Então,  $\ell(\boldsymbol{\theta}^{(i+1)}) \geq \ell(\boldsymbol{\theta}^{(i)})$ , ou seja, toda iteração do algoritmo **EM** aumenta a log-verossimilhança. O mesmo resultado vale para a densidade a posteriori.

Este é resultado principal de Dempster et al. (1977). A demonstração (no contexto bayesiano) usa os seguintes fatos, que serão de utilidade na sequência do texto. Do Teorema de Bayes segue que

$$\log [p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})] = \log [p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{z})] - \log [p(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y})] + \log [p(\mathbf{z}|\mathbf{y})]. \quad (\text{C.8})$$

Integrando ambos os membros de (C.8) com respeito à distribuição condicional preditora dos dados latentes, obtemos

$$\log [p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})] = Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^*) - H(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^*) + K(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^*), \quad (\text{C.9})$$

em que as quantidades do lado direito foram originalmente definidas no contexto da verossimilhança e são

$$Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^*) = \int_{\mathbf{z}} \log [p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{z})] p(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta}^*, \mathbf{y}) d\mathbf{z},$$

$$H(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^*) = \int_{\mathbf{z}} \log [p(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y})] p(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta}^*, \mathbf{y}) d\mathbf{z},$$

$$K(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^*) = \int_{\mathbf{z}} \log [p(\mathbf{z}|\mathbf{y})] p(\mathbf{z}|\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}^*) d\mathbf{z}.$$

Notando que

$$\begin{aligned} \log \left[ \frac{p(\boldsymbol{\theta}^{(i+1)}|\mathbf{y})}{p(\boldsymbol{\theta}^{(i)}|\mathbf{y})} \right] &= Q(\boldsymbol{\theta}^{(i+1)}, \boldsymbol{\theta}^{(i)}) - Q(\boldsymbol{\theta}^{(i)}, \boldsymbol{\theta}^{(i)}) \\ &\quad - [H(\boldsymbol{\theta}^{(i+1)}, \boldsymbol{\theta}^{(i)}) - H(\boldsymbol{\theta}^{(i)}, \boldsymbol{\theta}^{(i)})] \\ &\quad + [K(\boldsymbol{\theta}^{(i+1)}, \boldsymbol{\theta}^{(i)}) - K(\boldsymbol{\theta}^{(i)}, \boldsymbol{\theta}^{(i)})], \end{aligned}$$

e analisando essa expressão obtemos o resultado da proposição.

Dempster et al. (1977) definem um algoritmo **EM** generalizado, que seleciona  $\boldsymbol{\theta}^{(i+1)}$  de modo que  $Q(\boldsymbol{\theta}^{(i+1)}, \boldsymbol{\theta}^{(i)}) > Q(\boldsymbol{\theta}^{(i)}, \boldsymbol{\theta}^{(i)})$ . Então, o enunciado da Proposição C.1 também é aplicável a esse algoritmo generalizado.

Os resultados básicos de Wu (1983) para famílias exponenciais são apresentados a seguir.

**Proposição C.2.** Suponha que uma sequência de iterações do algoritmo **EM** satisfaça:

$$\text{i) } \partial Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^{(i)}) / \partial \boldsymbol{\theta} |_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}^{(i+1)}} = \mathbf{0};$$

$$\text{ii) } \boldsymbol{\theta}^{(i)} \rightarrow \boldsymbol{\theta}^* .$$

Então, as iterações  $\boldsymbol{\theta}^{(i)}$  convergem para um ponto estacionário de  $L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$ .

Além de i) e ii), condições de regularidade adicionais precisam estar satisfeitas. Por exemplo, a distribuição preditora  $p(\mathbf{z}|\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})$  precisa ser suficientemente suave. O resultado implica que quando existirem pontos estacionários múltiplos, o algoritmo

pode não convergir para o máximo global, ou seja, ele pode convergir para um máximo local ou ponto de sela. A sugestão de Wu (1983) é que devemos tentar vários valores iniciais. Se a função de verossimilhança for unimodal e a derivada parcial de  $Q$  for contínua com relação a ambos os argumentos, então  $\boldsymbol{\theta}^{(i)} \rightarrow \hat{\boldsymbol{\theta}}$ , o estimador de máxima verossimilhança de  $\boldsymbol{\theta}$ .

A convergência do algoritmo pode ser lenta, com uma taxa linear que depende da quantidade de informação sobre  $\boldsymbol{\theta}$  disponível em  $L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$ . Existem métodos para acelerar o algoritmo. Por exemplo, Louis (1982) sugere um procedimento para alcançar uma taxa de convergência quadrática perto do máximo por meio do método de Newton-Raphson. Outra referência importante sobre esse tópico é Meng e Rubin (1993).

**Exemplo C.4.** [Tanner (1996)] Consideremos um exemplo de regressão com dados censurados, discutido por Schmee and Hahn (1979) e Tanner (1996). Na Tabela C.2 dispomos os tempos de falha de 10 motores quando postos em funcionamento sob quatro temperaturas diferentes (em graus Celsius). Os valores com um asterisco (\*) representam tempos de censura, ou seja, em que os motores ainda funcionavam quando o experimento terminou. Isto significa que os tempos de falha nesses casos são maiores do que os tempos de censura.

Chamemos de  $T_i$  os tempos de falha e  $C_i$  os tempos de censura. Consideremos o modelo de regressão

$$t_i = \beta_0 + \beta_1 v_i + e_i, \quad (\text{C.10})$$

em que  $e_i \sim N(0, \sigma^2)$  e  $t_i = \log(T_i)$ ,  $v_i = (1000/(\text{temp} + 273,2))$ , com “temp” denotando a temperatura.

**Tabela C.2:** Tempos de falha para 10 motores

	150	170	190	220
	8064*	1764	408	408
	8064*	2772	408	408
	8064*	3444	1344	504
	8064*	3542	1344	504
	8064*	3780	1440	504
	8064*	4860	1680*	528*
	8064*	5196	1680*	528*
	8064*	5448*	1680*	528*
	8064*	5448*	1680*	528*
	8064*	5448*	1680*	528*

Sejam  $z_i$  os tempos de falha correspondentes aos dados censurados, de forma que  $z_i > c_i$ . Reordenemos os dados  $t_i$ , colocando primeiro os  $m$  valores dos tempos de falha efetivamente observados e depois os  $n - m$  tempos censurados. Os dados observados são  $\mathbf{y} = (t_1, \dots, t_m)^\top$ , enquanto os dados não observados são  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_{n-m})^\top$ .

Como os  $e_i$  seguem distribuições normais independentes, imputamos valores para os tempos censurados a partir de uma estimativa atual de  $\boldsymbol{\theta} = (\beta_0, \beta_1, \sigma)^\top$  e dos dados observados, por meio da distribuição normal condicional ao fato que  $z_i > c_i$ . Estimados os  $z_i$ , atualizamos as estimativas dos parâmetros, iterando até obter convergência.

Supondo uma distribuição *a priori* constante, o logaritmo da densidade *a posteriori* completa é

$$\log p(\boldsymbol{\theta}|t, \mathbf{z}) \propto -n \log \sigma - \sum_{j=1}^m (t_j - \beta_0 - \beta_1 v_j)^2 / 2\sigma^2 - \sum_{j=m+1}^n (z_j - \beta_0 - \beta_1 v_j)^2 / 2\sigma^2. \quad (\text{C.11})$$

A distribuição preditora dos  $z_j$ , condicional a  $z_j > c_j$  é normal truncada, e

$$Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^{(i)}) \propto -n \log \sigma - \sum_{j=1}^m (t_j - \beta_0 - \beta_1 v_j)^2 / 2\sigma^2 - \sum_{j=m+1}^n [\mathbb{E}(z_j^2 | \boldsymbol{\theta}^{(i)}, z_j > c_j) - 2(\beta_0 + \beta_1 v_j) \mathbb{E}(Z_j | \boldsymbol{\theta}^{(i)}, z_j > c_j) + (\beta_0 + \beta_1 v_j)^2] / 2\sigma^2. \quad (\text{C.12})$$

Para os dados censurados,  $e_j = (z_j - \beta_0 - \beta_1 v_j) / \sigma$ , de modo que  $z_j > c_j$  é equivalente a  $e_j > (c_j - \beta_0 - \beta_1 v_j) / \sigma = \tau_j$ , e portanto

$$\mathbb{E}(z_j | \boldsymbol{\theta}, z_j > c_j) = \beta_0 + \beta_1 v_j + \sigma \mathbb{E}(e_j > \tau_j).$$

Como os  $e_j$  seguem uma distribuição  $N(0,1)$ , temos

$$\mathbb{E}(e_j | e_j > \tau_j) = K \int_{\tau_j}^{\infty} z \exp(-z^2/2) dz / \sqrt{2\pi} = K \phi(\tau_j),$$

em que  $K = [1 - \Phi(\tau_j)]^{-1}$ ,  $\phi(z)$  é a densidade e  $\Phi(z)$  é a função distribuição acumulada da distribuição normal padrão. Fazendo  $H(x) = \phi(x) / [1 - \Phi(x)]$ , podemos finalmente escrever

$$\mathbb{E}(z_j | \boldsymbol{\theta}^{(i)}, z_j > c_j) = \beta_0^{(i)} + \beta_1^{(i)} + \sigma^{(i)} H(\tau_j^{(i)}). \quad (\text{C.13})$$

De modo análogo, sendo  $\mu_j = \beta_0 + \beta_1 v_j$ , obtemos

$$\mathbb{E}(z_j^2 | \boldsymbol{\theta}^{(i)}, z_j > c_j) = \mu_j^{2(i)} + \sigma^{2(i)} + \sigma^{(i)} (c_j + \mu_j^{(i)}) H(\tau_j^{(i)}). \quad (\text{C.14})$$

Derivando  $Q(\cdot, \cdot)$  em relação a cada componente de  $\boldsymbol{\theta}$ , obtemos  $\beta_0^{(i+1)}, \beta_1^{(i+1)}$  e  $\sigma^{(i+1)}$ . Notemos que a primeira regressão é conduzida como se os dados não fossem censurados e para obter  $\beta_0^{(i+1)}$  e  $\beta_1^{(i+1)}$  basta substituir  $c_j$  por  $\mathbb{E}(z_j | \boldsymbol{\theta}^{(i)}, z_j > C_j)$  e aplicar a técnica de mínimos quadrados. Após 11 iterações, obtemos  $\hat{\beta}_0 = -5,987$ ,  $\hat{\beta}_1 = 4,295$  e  $\hat{\sigma} = 0,256$ .

### C.3 O algoritmo EM Monte Carlo

No passo **E** do algoritmo **EM** é preciso calcular  $Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^{(i)})$ , uma integral cujo resultado é, em muitos casos, obtido com dificuldade. Para contornar o problema, Wei and Tanner (1990) sugerem usar o Método Monte Carlo nesse passo. O algoritmo correspondente (**MCEM**) para o passo **E** pode ser implementado conforme indicado a seguir

- i) Simular uma amostra  $z_1, \dots, z_m$  de  $p(Z|\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}^{(i)})$ .
- ii) Calcular  $\hat{Q}_{i+1}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^{(i)}) = m^{-1} \sum_{j=1}^m \log p(\boldsymbol{\theta} | z_j, \mathbf{y})$ .

No passo **M**,  $\hat{Q}$  é maximizada para obter  $\boldsymbol{\theta}^{(i+1)}$ . Para especificar o valor de  $m$ , pode-se aumentar o seu valor à medida que o número de iterações cresce e monitorar a convergência, por meio de um gráfico de  $\boldsymbol{\theta}^{(i)} \times i$ .

**Exemplo C.5.** Voltando ao Exemplo C.2, geramos  $z_1, \dots, z_m$  da distribuição de  $x_2|\theta^{(i)}, \mathbf{y}$ , que é uma binomial com parâmetros  $n = 125$  e  $p = \theta^{(i)}/(2 + \theta^{(i)})$  e depois aproximamos  $E(x_2|\theta^{(i)}, \mathbf{y})$  por  $\bar{z} = \sum_{i=1}^m z_j/m$ . O passo **M** continua como antes, obtendo-se

$$\theta^{(i+1)} = \frac{\bar{z} + x_5}{\bar{z} + x_3 + x_4 + x_5}.$$

Na Tabela C.3 mostramos 16 iterações da implementação do algoritmo **MCEM** para esse problema, com  $\theta^{(0)} = 0,5$ ,  $m = 10$  para as primeiras 8 iterações e  $m = 1000$  para as restantes.

**Tabela C.3:** Iterações para MCEM, para os dados do Exemplo C.5

Iteração	$\theta^{(i)}$	Iteração	$\theta^{(i)}$
1	0,61224	9	0,62734
2	0,62227	10	0,62700
3	0,62745	11	0,62747
4	0,62488	12	0,62706
5	0,62927	13	0,62685
6	0,62076	14	0,62799
7	0,62854	15	0,62736
8	0,62672	16	0,62703

## C.4 Cálculo de erros padrões

Com o algoritmo **EM** podemos estimar a moda da distribuição *a posteriori*  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$  ou da função de verossimilhança  $\ell(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$ . Para obter erros padrões dos estimadores de máxima verossimilhança, precisamos obter a matriz hessiana. Isso pode ser feito de várias maneiras.

### a) Cálculo direto ou numérico.

Em princípio, obtido o estimador de máxima verossimilhança  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ , podemos calcular as derivadas segundas de  $\log \ell(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$  ou de  $\log p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$ , no ponto  $\boldsymbol{\theta}$ , o que na prática pode ser difícil. Um enfoque alternativo é calcular as derivadas numericamente, como mencionamos na Seção C.1. Veja, por exemplo, Meilijson (1989).

### b) Método de Louis

De (C.8), podemos escrever

$$-\frac{\partial^2 \log p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = -\frac{\partial^2 \log p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{z})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} + \frac{\partial^2 \log p(\mathbf{z}|\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$$

e integrando ambos os membros com respeito a  $p(\mathbf{z}|\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})$ , obtemos

$$-\frac{\partial^2 \log p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = -\frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\phi})|_{\boldsymbol{\phi}=\boldsymbol{\theta}} - \frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} H(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\phi})|_{\boldsymbol{\phi}=\boldsymbol{\theta}}. \quad (\text{C.15})$$

Esta identidade constitui o **princípio da informação omissa**, que essencialmente corresponde a

$$\text{Informação observada} = \text{Informação completa} - \text{Informação omissa}.$$



**Proposição C.3.**

- a)  $\partial \log p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})/\partial \boldsymbol{\theta} = \int_{\mathbf{z}} [\partial \log p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{z})]/\partial \boldsymbol{\theta} p(\mathbf{z}|\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}) d\mathbf{z}$ .
- b)  $-\partial^2 H(\boldsymbol{\theta})/\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^\top = \text{Var}(\partial \log p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{z})/\partial \boldsymbol{\theta})$ .

Usando esta proposição e (C.15) podemos obter o erro padrão de  $\hat{\theta}$ .

**Exemplo C.5.** Retornemos novamente ao Exemplo C.2, para o qual

$$\frac{\partial \log p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{z})}{\partial \theta} = \frac{x_2 + x_5}{\theta} - \frac{x_3 + x_4}{1 - \theta},$$

de modo que a informação completa é

$$-\frac{\partial^2 Q(\theta)}{\partial \theta^2} = \frac{E(X_2|Y, \hat{\theta}) + x_5}{\hat{\theta}^2} + \frac{x_3 + x_4}{(1 - \hat{\theta})^2} = 435,3,$$

enquanto a informação omissa é

$$\text{Var}\left(\frac{\partial \log p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{z})}{\partial \theta}\right) = \frac{\text{Var}(x_2|\hat{\theta})}{\hat{\theta}^2} = 125(\hat{\theta}/(2 + \hat{\theta}))(2/(2 + \hat{\theta}))/\hat{\theta}^2 = 57,8.$$

Então a informação observada é

$$-\frac{\partial^2 \log p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})}{\partial \theta^2} = 435,3 - 57,8 = 377,5,$$

de modo que e.p.  $(\hat{\theta}) = \sqrt{1/377,5} = 0,05$ .

**c) Simulação**

O cálculo da informação completa em (C.15) pode ser complicado na prática. Se pudermos amostrar da densidade  $p(\mathbf{z}|\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})$  a integral pode ser aproximada por

$$\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 \log p(\boldsymbol{\theta}|y_j, z_j)}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^\top},$$

em que  $z_1, \dots, z_m$  são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas segundo a distribuição  $p(z|\hat{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{y})$ . De modo análogo podemos aproximar a informação omissa por

$$\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial \log p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, z_j)}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)^2 - \left[ \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{\partial \log p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, z_j)}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right]^2.$$

**C.5 O Algoritmo de dados aumentados**

O algoritmo **EM** utiliza a simplicidade da verossimilhança (ou densidade *a posteriori*) dos dados aumentados. No algoritmo de dados aumentados, em vez de obter o máximo dessas funções, estamos interessados em ter uma visão mais completa delas a fim de obter outras informações, como intervalos de confiança ou de credibilidade.

Como antes, trabalharemos com a distribuição *a posteriori*. A ideia é obter uma estimativa de  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$  baseada na distribuição aumentada,  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{z})$ . O amostrador de Gibbs e o algoritmo de dados encadeados (ver Exercício 5) são generalizações baseadas nessa ideia. Consideremos as seguintes distribuições

$$p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) = \int_{\mathbf{z}} p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{z}) p(\mathbf{z}|\mathbf{y}) d\mathbf{z}, \quad (\text{C.16})$$

$$p(\mathbf{z}|\mathbf{y}) = \int_{\boldsymbol{\theta}} p(\mathbf{z}|\phi, \mathbf{y})p(\phi|\mathbf{y})d\phi, \quad (\text{C.17})$$

conhecidas como **identidade da posteriori** e **identidade da preditora**, respectivamente.

O algoritmo de dados aumentados utiliza iterações entre essas duas identidades, aproximando sucessivamente a densidade *a posteriori*. Os passos correspondentes são

- i) Simular  $z_1, \dots, z_m$  da estimativa atual  $p(\mathbf{z}|\mathbf{y})$ .
- ii) Atualizar a estimativa  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$  por meio de

$$\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, z_j).$$

- iii) Iterar os passos i) e ii) até a convergência.

No passo i), necessitamos simular da distribuição preditora  $p(\mathbf{z}|\mathbf{y})$ . Por meio da identidade (C.17), que é uma mistura de preditoras aumentadas em relação à distribuição a posteriori observada, esse passo pode ser implementado por meio da iteração de :

- a) Simular  $\boldsymbol{\theta}^*$  da estimativa atual de  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$ .
- b) Amostrar  $z$  de  $p(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta}^*, \mathbf{y})$ .

O passo a), por sua vez, pode ser realizado selecionando-se aleatoriamente  $j$  dos inteiros  $1, \dots, m$  e então simulando de  $p(\boldsymbol{\theta}|z_j, \mathbf{y})$ , dada a forma discreta da estimativa de  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$  em ii).

É interessante comparar os passos desse algoritmo com aqueles do algoritmo **EM**. Basicamente, substituímos os passos **E** e **M** pelos passos que chamaremos **S** e **I**, em que **S** indica que estamos simulando os dados latentes da estimativa atual da distribuição preditora e **I** indica que depois integramos os resultados para obter a distribuição posteriori. Podemos, então, chamar esse algoritmo de **SI** (**S** de **simulação** e **I** de **integração**).

**Exemplo C.6.** Ainda, no contexto do Exemplo C.5, temos

$$p(\theta|\mathbf{x}) \propto \theta^{x_2+x_5}(1-\theta)^{x_3+x_4} \sim \text{Beta}(x_2+x_5+1, x_3+x_4+1).$$

$$x_2|\mathbf{y}, \theta \sim \text{Bin}(125, \theta/(\theta+2)).$$

Os passos do algoritmo **SI** neste caso particular são

- i) Simular  $x_2^1, \dots, x_2^m$  da estimativa atual de  $p(x_2|\mathbf{y})$ .
- ii) Atualizar a estimativa de  $p(\theta|\mathbf{y})$  por meio de

$$\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \text{Beta}(\alpha_j, \beta_j)(\theta),$$

$$\text{com } \alpha_j = x_2^j + x_5 + 1, \beta_j = x_3 + x_4 + 1.$$

- iii) Iterar os passos i) e ii) até a convergência.

O passo i) do algoritmo consiste em repetir  $m$  vezes:

- a) Gerar  $j$  uniformemente de  $1, \dots, m$ .
- b) Simular  $\theta^*$  de  $\text{Beta}(\alpha_j, \beta_j)$ .
- c) Simular  $x$  de  $\text{Bin}(125, \theta^*(2+\theta^*))$ .

## C.6 Exercícios

- 1) Suponha que os dados aumentados  $\mathbf{x} = (\mathbf{y}, \mathbf{z})$  sigam a família exponencial regular

$$f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}) = b(\mathbf{x}) \exp\{\boldsymbol{\theta}^\top \mathbf{s}(\mathbf{x})\} / \alpha(\boldsymbol{\theta}),$$

em que  $\boldsymbol{\theta}$  é um vetor  $d \times 1$  de parâmetros e  $\mathbf{s}(\mathbf{x})$  é um vetor  $d \times 1$  de estatísticas suficientes.

- i) Calcule  $Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^{(i)})$ .
  - ii) Mostre que maximizar  $Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^{(i)})$  é equivalente a resolver a equação  $E\{\mathbf{s}(\mathbf{x})|\boldsymbol{\theta}\} = \mathbf{s}^{(i)}$ , em que  $\mathbf{s}^{(i)} = E[\mathbf{s}(\mathbf{x})|\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}^{(i)}]$ .
- 2) Obtenha as expressões para as estimativas na iteração  $(i + 1)$  a partir de (C.12).
- 3) Implemente o algoritmo **MCEM** para o Exemplo C.4.
- 4) Obtenha o erro padrão do estimador obtido via **EM**, para o Exemplo C.5, por meio de simulações.
- 5) **Algoritmo de Dados Encadeados** (*Chain Data Algorithm*)

Numa abordagem um pouco diferente do algoritmos para dados aumentados, iteramos sucessivamente de  $p(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y})$  e  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{z})$  para obter uma sequência de realizações  $(\mathbf{z}^{(1)}, \boldsymbol{\theta}^{(1)}), \dots, (\mathbf{z}^{(n)}, \boldsymbol{\theta}^{(n)})$  com as simulações de uma variável realizadas condicionalmente aos valores atuais da outra variável. Esperamos que a distribuição de equilíbrio dessa cadeia seja a distribuição conjunta  $p(\mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$ . Este algoritmo é um caso especial do amostrador de Gibbs, descrito na Nota de Capítulo 2 do Apêndice B. Normalmente, estaremos interessados nas distribuições marginais.

Para os dados do Exemplo C.2, obtenha as sequências de realizações de  $Z$  e  $\theta$ . Simule  $n = 200$  valores, desprezando os primeiros 50 valores, conhecidos como **valores de aquecimento** (*burn-in*).

- 6) Considere o Exemplo C.6; obtenha as estimativas em cada iteração do algoritmo **SI** da média e variância da distribuição preditora.
- 7) Construa o gráfico da distribuição *a posteriori* para cada iteração considerada no Exemplo C.6.
- 8) (Tanner, 1996) Sejam  $t_1, \dots, t_n$  variáveis aleatórias distribuídas independente e identicamente segundo uma distribuição com densidade  $-\alpha \exp(-\alpha t)$ ,  $\alpha > 0$ . Suponha que observamos  $(y_j, \delta_j)$ , em que  $y_j = \min(t_j, c_j)$  e  $\delta_j = 1$ , se  $t_j < c_j$  e  $\delta_j = 0$ , em caso contrário, para  $j = 1, \dots, n$ .
  - a) Supondo uma distribuição *a priori* constante para  $\alpha$ , mostre que

$$Q(\alpha, \alpha^{(i)}) \propto n \log(\alpha) - \alpha \sum_{j=1}^n E(t_j | y_j, \delta_j, \alpha^{(i)}),$$

com  $\alpha^{(i)}$  representando a aproximação atual para  $\alpha$ .

- b) Para uma observação não censurada temos  $t_j = y_j$ . Para uma observação censurada, calcule  $E(t_j | y_j, \delta_j, \alpha^{(i)})$ .
- c) Qual é o passo **M** para esse problema?



---

# Referências

- Afiune, J.Y. (2000). Avaliação ecocardiográfica evolutiva de recém-nascidos pré-termo, do nascimento até o termo. Tese de Doutorado, Faculdade de Medicina da USP.
- Anderson, T.W. (1957). Maximum likelihood estimates for a multivariate normal distribution when some observations are missing. *Journal of the American Statistical Association*, **52**, 200–203.
- Bartlett, M.S. (1937). The statistical conception of mental factors. *British Journal of Psychology*, **28**, 97–104.
- Bickel, P. J. and Doksum, K. A. (2015). *Mathematical Statistics*. Second edition. Chapman and Hall.
- Bishop, C.M. (2006). *Pattern Recognition and Machine Learning*. New York: Springer.
- Bland, J.M. and Altman, D.G. (1986). Statistical methods for assessing agreement between two methods of clinical measurement. *Lancet*, **327**, 307–310. doi:10.1016/S0140-6736(86)90837-8
- Blei, D.M. Smyth, P. (2017). Science and data science. *PNAS*, **114**, 8689–8692.
- Box, G.E.P. and Müller, M.E.(1958). A note on the generation of random normal deviates. *The Annals of Statistics*, **29**, 610–611.
- Box, G.E.P. and Cox, D.R. (1964). An analysis of transformations. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **26**: 211–252.
- Box, G.E.P. and Müller, M. E. (1958). A note on the generation of random normal deviates. *The Annals of Mathematical Statistics*, **29**, 610–611.
- Boyles, R.A. (1983). On the convergence of the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B*, **45**: 47–50.
- Breiman, L. (1969). *Probability*. Reading: Addison-Wesley Publishing Co.
- Breiman, L. (1996). Bagging predictors. *Machine Learning*, **24**: 123–140.
- Breiman, L. (2001). Statistical modeling: the two cultures. *Statistical Science*, **16**, 199–231.

- Breiman, L. (2001). Random forests. *Machine Learning*, **45**: 5–32.
- Breiman, L., Friedman, J.H., Olshen, R.A., and Stone, C.J. (1984). *Classification and Regression Trees*. Chapman & Hall/CRC.
- Broyden, C.G. (1965). A class of methods for solving nonlinear simultaneous equations. *Mathematics of Computation*, **19**, 577–593.
- Bühlmann, P. and Yu, B. (2002). Analyzing bagging. *Annals of Statistics*, **30**, 927–961.
- Bühlmann, P. and van de Geer, S. (2011). *Statistics for High-Dimensional Data*. Berlin: Springer.
- Bussab, W.O. e Morettin, P.A. (2017). *Estatística Básica, 9a Edição*. São Paulo: Saraiva.
- Casella, G. and George, E.I. (1992). Explaining the Gibbs sampler. *The American Statistician*, **46**, 167–174.
- Cattell, R.B. (1966). The scree test for the number of factors. *Multivariate Behavioral Research*, **1**, 245–276.
- Chambers, J.M., Cleveland, W.S., Kleiner, B and Tukey, P.A. (1983). *Graphical Methods for Data Analysis*. London: Chapman and Hall.
- Chambers, J.M. and Hastie, T.J. (eds.) (1992). *Statistical Models in S*. Wadsworth and Brooks/Cole, Pacific Grove, CA.
- Chambers, J.M. (1993). Greater or lesser Statistics: A choice for future research. *Statistics and Computing*, **3**, 182–184.
- Chen, M.-H., Shao, Q.-M. and Ibrahim, J.G. (2000). *Monte Carlo Methods in Bayesian Computation*. New York: Springer.
- Chib, S. and Greenberg, E. (1995). Understanding the Metropolis–Hastings algorithm. *The American Statistician*, **49**, 327–335.
- Chollet, F. (2018). *Deep Learning with R*. Shelter Island, NY: Manning Publications Co.
- Cleveland, W.M. (1979). Robust locally weighted regression and smoothing scatterplots. *Journal of the American Statistical Association*, **74**, 829–836.
- Cleveland, W.M. (1985). *The Elements of Graphing Data*. Monterey: Wadsworth.
- Cleveland, W.M. (1993). *Visualizing Data*. Summit, New Jersey: Hobart Press.
- Cleveland, W.M. (2001). Data Science: An action plan for expanding the technical areas of the field of Statistics. *International Statistical Review*, **69**, 21–26.
- Cohen, J. (1960). A coefficient of agreement for nominal scales. *Educational and Psychological Measurement*, **20**, 37–46. doi:10.1177/001316446002000104
- Colosimo, E.A. e Giolo, S.R. (2006). *Análise de Sobrevida Aplicada*. São Paulo: Blücher.

- Cortes, C. and Vapnik, V. (1995). Support vector networks. *Machine Learning*, **20**, 273–297.
- Dantzig, G.B. (1963). *Linear Programming and Extensions*. Princeton: Princeton University Press.
- Davidon, W.C. (1959). Variable metric for minimization. Report ANL-5990 Rev., Argonne National Laboratories, Argonne, Illinois.
- Dempster, A.P., Laird, N. and Rubin, D.B. (1977). Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **39**, 1–38.
- Dennis, J.E. and Moré, J.J. (1977). Quasi-Newton methods, motivation and theory. *SIAMM Review*, **19**, 46–89.
- Donoho, D. (2017). 50 years of Data Science. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, **26**, 745–766.
- Durbin, J. and Watson, G.S. (1950). Testing for serial correlation in least squares regression, I. *Biometrika*, **37**, 409-428.
- Durbin, J. and Watson, G.S. (1951). Testing for serial correlation in least squares regression, II. *Biometrika*, **38**, 159-178.
- Durbin, J. and Watson, G.S. (1971). Testing for serial correlation in least squares regression, III. *Biometrika*, **58**, 1-19.
- Dzik A., Lambert-Messerlian, G., Izzo, V.M., Soares, J.B., Pinotti, J.A. and Seifer, D.B. (2000). Inhibin B response to EFORT is associated with the outcome of oocyte retrieval in the subsequent in vitro fertilization cycle. *Fertility and Sterility*, **74**, 1114-1117.
- Eilers, P. and Marx, B. (1996). Flexible smoothing with b-splines and penalties. *Statistical Science*, **11**, 89–121.
- Efron, B. and Tibshirani, R. (1993). *An Introduction to the Bootstrap*. Chapman and Hall.
- Efron, B. and Hastie, T. (2016). *Computer Age Statistical Inference*. New York: Cambridge University Press.
- Elias, F.M., Birman, E.G., Matsuda, C.K., Oliveira, I.R.S. and Jorge, W.A. (2006). Ultrasonographic findings in normal temporomandibular joints. *Brazilian Oral Research*, **20**, 25-32.
- Embrecchts, P., Lindskog, F. and McNeil, A. (2003). Modelling dependence with copulas and applications to risk management. Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance, ed. S. Rachev, Elsevier, Ch. 8, 329–384.
- Ehrenberg, A.S.C. (1981). The problem of numeracy. *The American Statistician*, **35**, 67-71.
- Ferreira, D.F. (2011). *Análise Discriminante*. Encontro Mineiro de Estatística, São João Del-Rei, M.G.
- Ferreira, J.E., Takecian, P.L., Kamaura, L.T., Padilha, B. and Pu, C. (2017).

- Dependency Management with WED-flow Techniques and Tools: A Case Study. *Proceedings of the IEEE 3rd International Conference on Collaboration and Internet Computing*, 379-388. doi:10.1109/CIC.2017.00055
- Fisher, R. A. (1922). On the Mathematical Foundations of Theoretical Statistics. *Philosophical Transactions of the Royal Society, Series A*, **222**, 309–368.
- Fletcher, R. and Powell, M.J.D. (1963). A rapid convergent descent method for minimization. *Computer Journal*, **6**, 163–168.
- Fletcher, R. (1987). *Practical Methods of Optimization, Second Edition*. New York: Wiley.
- Freedman, D. and Diaconis, P. (1981). On the histogram as a density estimator:  $L_2$  theory. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, **57**, 453–476.
- Freund, Y. and Schapire, R.E. (1997). A decision-theoretic generalization of on-line learning and an application to boosting. *Journal of Computer and System Science*, **55**, 119–139.
- Friedman, J.H., Hastie, T. and Tibshirani, R. (2010). Regularization paths for generalized linear models via coordinate descent. *Journal of Statistical Software*, **33**, 1–22.
- Fuller, W.A. (1996). *Introduction to Statistical Time Series, 2nd Edition*. New York: Wiley.
- Gamerman, D. and Lopes, H.F. (2006). *Markov Chain Monte Carlo*. Boca Raton: Chapman & Hall.
- Gartner, Inc. (2005). *Gartner says more than 50 percent of data warehouse projects will have limited acceptance or will be failures through 2007*. <http://www.gartner.com.2005>.
- Gegembauer, H.V. (2010). *Análise de Componentes Independentes com Aplicações em Séries Temporais Financeiras*. Dissertação de Mestrado, IME-USP.
- Gelfand, A.E. and Smith, A.F.M. (1990). Sampling-based approaches to calculating marginal densities. *Journal of the American Statistical Association*, **85**, 398–409.
- Geman, S. and Geman, D. (1984). Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the Bayesian restoration of images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **6**, 721–741.
- Giampaoli, V., Magalhães, M.N., Fonseca, F.C. e Anoroço, N.F. (2008). Relatório de análise estatística sobre o projeto: “Avaliação e pesquisa: Investigando as dificuldades em Matemática no Ensino Fundamental da Rede Municipal da cidade de São Paulo – 2ª fase”. São Paulo, IME-USP. (RAE – CEA – 08P27).
- Gilks, W.R., Richardson, S. and Spiegelhalter, D.J. (1996). *Markov Chain Monte Carlo in Practices*. London: Chapman and Hall.
- Goldfeld, S.M., Quandt, R.E. and Trotter, H.F. (1966). Maximisation by quadratic hill-climbing. *Econometrica*, **34**, 541–551.
- Goodfellow, I., Bengio, Y. and Courville, A. (2016). *Deep Learning*. The MIT



Press.

Graedel, T. and Kleiner, B. (1985). Exploratory analysis of atmospheric data. In *Probability, Statistics and Decision Making in Atmospheric Sciences*, A.H. Murphy and R.W. Katz, eds), pp 1-43. Boulder: Westview Press.

Guttman, L. (1954). Some necessary conditions for common factor analysis. *Psychometrika*, XIX, 149–161.

Hammersley, J.M. and Handscomb, D.C. (1964). *Monte Carlo Methods*. New York: Wiley.

Hastie, T. and Tibshirani, R. (1990). *Generalized additive models*. London: Chapman & Hall.

Hastie, T., Tibshirani, R. and Friedman, J. (2017). *The Elements of Statistical Learning*, 2nd Edition, Springer.

Hastings, W.K. (1970). Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications. *Biometrika*, **57**, 97–109.

Hinkley, B. (1977). On quick choice of probability transformations. *Applied Statistics*, **26**, 67-69.

Hebb, D.O. (1949). *The organization of behavior*. New York: Wiley.

Hoerl, A.E. and Kennard, R.W. (1970). Ridge regression: biased estimation for nonorthogonal problems. *Technometrics*, **12**, 55–67.

Horn, J.L. (1965). A rationale and test for the number of factors in factor analysis. *Psychometrika*, **30**, 179–185.

Hosmer, D.W. and Lemeshow, S. (1980). A goodness-of-fit test for the multiple logistic regression model. *Communications in Statistics*, **A10**, 1043–1069.

Hosmer, D.W. and Lemeshow, S. (2013). *Applied Logistic Regression*, 3rd edition. New York: John Wiley.

Hyvärinen, A. and Oja, E. (1997). A fast fixed point algorithm for independent component analysis. *Neural Computation*, **9**, 1483–1492.

Hyvärinen, A. (1999). Fast and robust fixed-point algorithm for independent component analysis. *IEEE Transactions on Neural Network*, **10**, 626–634.

Hyvärinen, A. and Oja, E. (2000). Independent component analysis: Algorithms and applications. *Neural Networks*, **13**, 411–430.

Hyvärinen, A., Karhunen, J. and Oja, E. (2001). *Independent Component Analysis*. New York: Wiley.

Jaiswal, S. (2018). K-Means Clustering in R Tutorial. Disponível em <https://www.datacamp.com/community/tutorials/k-means-clustering-r>.

James, G., Witten, D., Hastie, T. and Tibshirani, R. (2017). *Introduction to Statistical Learning*. Springer.

Johnson, N.L. and Leone, F.C. (1964). *Statistics and Experimental Design in En-*

- gineering and Physical Sciences, Vols 1, 2.* New York: Wiley.
- Jordan, M.I. (2019). Artificial intelligence – The revolution hasn't heppened yet. *Harvard Data Science Review*, Issue 1.1.
- Kaiser, H.F. (1960). The application of electronic computers to factor analysis. *Educational and Psychological Measurement*, **20**, 141–151.
- Kleijnen, J. and Groenendall, W. (1994). *Simulation: A Statistical Perspective*. Chichester: Wiley.
- Kutner, M.H., Neter, J., Nachtsheim, C.J. and Li, W. (2004). *Applied Linear Statistical Models. 5th ed.* New York: McGraw-Hill/Irwin. ISBN-10: 007310874X, ISBN-13: 978-0073108742.
- Lee, E.T. and Wang, J.W. (2003). *Statistical Methods for Survival Data Analysis, 3rd edition*. New York: Wiley
- Lemeshow, S. and Hosmer, D.W. (1982). The use of goodness-of-fit statistics in the development of logistic regression models. *American Journal of Epidemiology*, **115**, 92–106.
- Little, R.J.A. and Rubin, D.B. (1987). *Statistical Analysis with Missing Data*. New York: Wiley.
- Louis, T.A. (1982). Finding observed information using the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **44**, 98–130.
- Mantel, N. and Haenszel, W. (1959). Statistical aspects of the analysis of data from retrospective studies of disease. *Journal of the National Cancer Institute*, **22**, 719–748.
- McCarthy, J., Minsky, M.L., Rochester, N. and Shannon, C.E. (1955). A Proposal for the Dartmouth Summer Research Project on Artificial Intelligence. August 31, 1955.
- McCulloch, W.S. and Pitts, W.A. (1943). Logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. *Butt. math. Biophysics*, **S**, 115–133.
- McGill, R., Tukey, J.W. and Larsen, W.A. (1978). Variations of box plots. *The American Statistician*, **32**, 12–16.
- Medeiros, M.C. (2019). *Machine Learning Theory and Econometrics*. Lecture Notes.
- Meilijson, I. (1989). A fast improvement to the EM algorithm on its own terms. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B*, **51**, 127–138.
- Meng, X.L. and Rubin, D.B. (1993). Maximum likelihood estimation via the ECM algorithm: A general framework. *Biometrika*, **80**, 267–278.
- Metropolis, N. and Ulam, S.(1949). The Monte Carlo method. *Journal of the American Statistical Association*, **44**, 335–341.
- Metropolis, N., Rosenbluth, A.W., Rosenbluth, M.N., Teller, A.H. and teller, E. (1953). Equation of state calculations by fast computing machines. *The Journal of Chemical Physics*, **21**, 1087–1092 .

- Meyer, D. (2018). Support vector machines. The interface to libsvm in package e1071. FH technikum Wien, Austria.
- Miller, R.G. and Halpern, J.H. (1982). Regression via censored data. *Biometrika*, **69**, 521-531.
- Morettin, P.A. (2014). *Ondas e Ondaletas: da Análise de Fourier à Análise de Ondaletas de Séries Temporais*. São Paulo: EDUSP.
- Morettin, P.A. and Tolói, C.M.C. (2018). *Análise de Séries Temporais*, 3a Edição, Volume 1. São Paulo: Blücher.
- Morrison, D.F. (1976). *Multivariate Statistical Methods, 2nd Ed.* New York: McGraw-Hill.
- Müller, P. (1992). Alternatives to the Gibbs sampling scheme. *Technical report*. Institute of Statistics and Decision Sciences, Duke University, Durham.
- Nelder, J.A. and Mead, R. (1965). A simplex method for function minimization. *Computer Journal*, **7**, 308-313.
- Nelder, J.A. and Wedderburn, R.W.M. (1972). Generalized Linear Models. *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, **135**, 370–384.
- Nelder et al. (1988).
- Neyman, J. and Pearson, E. S. (1933). On the problem of the most efficient tests of statistical hypotheses. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A*, **231**, 289—337.
- Nocedal, J. and Wright S. (2006). *Numerical Optimization*. Segunda Edição. Springer.
- Paulino, C.D. e Singer, J.M. (2006). *Análise de Dados Categorizados*. São Paulo: Blücher.
- Pedroso de Lima, A.C., Singer, J.M. e Fusaro, E.R. (2000). *Relatório de análise estatística sobre o projeto “Prognóstico de pacientes com insuficiência cardíaca encaminhados para tratamento cirúrgico.”* São Paulo: Centro de Estatística Aplicada do IME/USP.
- Powell, M.J.D. (1964). An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives. *Computer Journal*, **7**, 155-162.
- R Core Team (2013). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL <http://www.R-project.org/>.
- Rainardi, V. (2008). *Building a Data Warehouse with Examples in SQL Server*. Apress (Springer). doi: 10.1007/978-1-4302-0528-9
- Robert, C. and Casella, G. (2004). *Monte Carlo Statistical Methods*. Second Edition. New York: Springer.
- Roberts, G.O. and Smith, A.F.M. (1994). Simple conditions for the convergence of the Gibbs sampler and Metropolis-Hastings algorithms. *Stochastic Processes and Their Applications*, **49**, 207–216.

- Rosenblatt, F. (1958). The perceptron: A theory of statistical separability in cognitive systems. Buffalo: Cornell Aeronautical Laboratory, Inc. Rep. No. VG-1196-G-1.
- Ross, S.(1997). *Simulation, 2nd Ed.*, New York: Academic Press.
- Rubin, D.B. (1977). Formalizing subjective notions about the effect of nonrespondents in sample surveys. *Journal of the American Statistical Association*, **72**, 538–543.
- Rubin, D.B. (1987). *Multiple Imputation for Nonresponse in Surveys*. New York: Wiley.
- Rubin, D.B. (1996). Multiple imputation after 18+ years. *Journal of the American Statistical Association*, **91**, 473–489.
- Schmee, J. and Hahn, G.J. (1979). A simple method for regression analysis with censored data. *Technometrics*,, **21**, 417-432.
- Sen, P.K., Singer, J.M. and Pedroso-de-Lima, A.C. (2009), *From finite sample to asymptotic methods in Statistics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Singer, J.M. and Andrade, D.F. (1997). Regression models for the analysis of pretest/posttest data. *Biometrics*, **53**, 729–735.
- Singer, J.M. e Ikeda, K. (1996). Relatório de Análise Estatística sobre o projeto “Fatores de risco na doença aterosclerótica coronariana”. São Paulo, SP, IME-USP, 1996, 28p. (CEA-RAE-9608).
- Singer, J.M., Rocha, F.M.M e Nobre, J.S. (2018). *Análise de Dados Longitudinais*. Versão parcial preliminar.
- Smola, A.J. and Schölkopf, B. (2004). A tutorial on support vector regression. *Statistics and Computing*, **14**, 199–222.
- Sobol, I.M.(1976). *Método de Monte Carlo*. Moscow: Editorial MIR.
- Stigler, S. M. (1990). *The History of Statistics: The Measurement of Uncertainty before 1900*. Cambridge: Harvard University Press.
- Stone, J.V. (2004). *Independent Component Analysis: A Tutorial Introduction*. MIT Press.
- Sturges, H.A. (1926). The choice of a class interval. *Journal of the American Statistical Association*, **21**, 65–66.
- Takano, A.P.C., Justo, L.T., Santos, N.V., Marquezini, M.V., André, P.A., Rocha, F.M.M., Barrozo, L.V., Singer, J.M., André, C.D.S., Saldiva, P.H.N. and Veras, M.M., (2019). Pleural anthracosis as an indicator of lifetime exposure to urban air pollution: an autopsy-based study in São Paulo. *Environmental Research*, **173**, 23–32.
- Tanner, M.A. (1996). *Tools for Statistical Inference, 3rd Ed.*. New York: Springer.
- Thurstone, L.L. (1947). *Multiple Factor Analysis: A development and expansion of vectors of the mind.*. Chicago: University of Chicago Press.

- Tibshirani, R. (1996). Regression shrinkage and selection via the lasso. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological)*, **58**, 267–288.
- Trevino, A. (2016). Introduction to K-means Clustering. Disponível em <https://www.datascience.com/blog/k-means-clustering>.
- Tukey, J.W. (1962). The future of data analysis. *The Annals of Mathematical Statistics*, **33**, 1–67.
- Tukey, J.W. (1977). *Exploratory Data Analysis*. Reading: Addison-Wesley.
- Turing, A. (1950). Computing machinery and intelligence”. *Mind*, LIX (236).
- Vapnik, V. and Chervonenkis, A. (1964). A note on a class of perceptrons. *Automation and Remote Control*, **25**.
- Vapnik, V. and Chervonenkis, A. (1974). *Theory of Pattern recognition* [in Russian]. Moskow: Nauka.
- Vapnik, V. (1995). *The Nature of Statistical Learning Theory*. New York: Springer.
- Vapnik, V. (1998). *Statistical Learning Theory*. New York: Wiley.
- Viera, J. and Garrett, J.M. (2005). Understanding interobserver agreement: the kappa statistic. *Family Medicine*, **37**, 360–263
- von Neumann, J.(1951). Various techniques used in connection with random digits, Monte Carlo Method. *U.S. National Bureau of Standards Applied Mathematica Series*, **12**, 36–38.
- Wayne, D.W. (1990). *Applied Nonparametric Statistics, Second Edition* . Boston: PWS-Kent. ISBN 0-534-91976-6.
- Wei, G.C.G. and Tanner, M.A. (1990). A Monte Carlo implementation of the EM algorithm and the poor man’s data augmentation algorithm. *Journal of the American Statistical Association*, **85**, 699-704.
- Wilks, S.S. (1932). Moments and distributions of estimates of population parameters from fragmentary samples. *Annals of Mathematical Statistics*, **2**, 163–195
- Witzel, M.F., Grande, R.H.M. and Singer, J.M. (2000). Bonding systems used for sealing: evaluation of microleakage. *Journal of Clinical Dentistry* , **11**, 47–52.
- Wu, C.F.J. (1983). On the convergence properties of the EM algorithm. *Annals of Statistics*, **11**, 95–103.
- Zan, A.S.C.N. (2005). Ultra-sonografia tridimensional: determinação do volume do lobo hepático direito no doador para transplante intervivos. Tese de doutorado. São Paulo: Faculdade de Medicina, Universidade de São Paulo.
- Zerbini, T., Gianvecchio, V.A.P., Regina, D., Tsujimoto, T., Ritter, V. and Singer, J.M. (2018). Suicides by hanging and its association with meteorological conditions in São Paulo, Brazil. *Journal of Forensic and Legal Medicine*, **53**, 22–24. doi: dx.doi.org/10.1016/j.jflm.2017.10.010

---

# Índice Remissivo

- Odds*, 103
- Accelerated failure time models*, 254
- Bump hunters*, 370
- Data Science*, 1
- Draftsman's display*, 146
- Lowess*, 166
- Particle Swarm algorithm*, 449
- Perceptron*, 418
- Proportional hazards model*, 255
- Simulated annealing*, 449
- Splines*, 292
- Stem and leaf*, 49
  
- Acurácia, 105, 268
- Alavanca, 229, 286
- Algoritmo
  - aglomerativo, 370
  - BFR, 381
  - combinatório, 369
  - CURE, 381
  - DBSCAN, 381
  - de busca direta, 449
  - de dados aumentados, 487
  - de Metropolis-Hastings, 472
  - de suporte vetorial, 305
  - divisivo, 370
  - EM, 480
  - EM Monte Carlo, 485
  - Enxame de partículas, 449
  - evolucionário, 449
  - ganancioso, 320
  - genético, 449
  - gradiente, 437
  - hierárquico, 370
  - não gradiente, 449
  - para dados aumentados, 479
  - Perceptron, 418
  - retropropagação, 424, 432
  - Têmpera simulada, 449
- Amostra, 24, 64
  - aleatória simples, 67, 76
  - bootstrap, 339
- Amostrador de Gibbs, 472
- Amostragem
  - por aceitação-rejeição, 468
- Amplitude, 58
- Análise
  - condicional, 198
  - de agrupamentos, 14
  - de componentes independentes, 14, 403
  - de componentes principais, 14, 146
  - de Confiabilidade, 243
  - de desviância, 359
  - de regressão, 107
  - de séries de tempo, 195
  - de séries temporais, 195
  - de Variância, 80, 121, 153
  - discriminante linear, 272
  - discriminante quadrática, 284
  - discriminante regularizada, 284
  - exploratória de dados, 23
- ANOVA, 121
- Aprendizado
  - automático, 4
  - com Estatística, 4, 291
  - não supervisionado, 14
  - profundo, 430
- Arvores
  - para classificação, 320
  - para regressão, 334
- Associação
  - entre variáveis, 93
- Ativações, 423
- Autocorrelação, 196
- Autovalor, 411

- Autovetor, 411
- Bagging, 327
- Banco de dados, 24
- Boosting, 327
- Bootstrap, 327, 339
- Capa de Cohen, 100
- Carga fatorial, 391
- Censura, 243
  - à direita, 256
  - à esquerda, 256
  - intervalar, 256
- Centróide, 370
- Chance, 103, 219
- Ciência de dados, 1
- Cibernética, 430
- Classe modal, 55, 320
- Classificação, 13
- Classificador, 263
  - CMF, 297
  - CMM, 294
  - CMNL, 302
  - de Bayes, 13, 272, 282
  - de margem flexível, 293, 297
  - de margem máxima, 293
  - de margem não linear, 293
  - forte, 327
  - fraco, 327
  - KNN, 13
- CNN, 431
- Coefficiente
  - de confiança, 76
  - de contingência, 97
  - de correlação, 128
  - de correlação cofenético, 381
  - de correlação de Pearson, 108
  - de correlação de Spearman, 109
  - de correlação linear, 384
  - de correlação múltipla, 393
  - de determinação, 185
  - de determinação ajustado, 214, 228
  - de penalização, 346
  - de Tschuprov, 98
- Comparações múltiplas, 123
- Comunalidade, 391
- Concordância, 99, 113
- Condições de Karush-Kuhn-Tucker, 311
- Confundimento, 270
- Conjunto
  - de dados, 17
  - de treinamento, 319
  - de validação, 319
- Curtose, 62
- Curva ROC, 267
- Dado
  - de treinamento, 263, 285
  - de validação, 263, 285
  - estruturado, 10
  - longitudinal, 28, 112, 195, 215
  - não estruturado, 10
  - omisso, 26
  - para previsão, 263
- Dendrograma, 372
- Desvio
  - absoluto médio, 57
  - médio, 57
  - mediano absoluto, 58
  - padrão, 57
- Diferença significativa, 131
- Distância
  - de Cook, 193, 209
  - de Mahalanobis, 284
  - edit, 379
  - Euclidiana, 369
  - Hamming, 379
  - interquartis, 58
- Distância de Mahalanobis, 281
- Distribuição
  - conjunta, 94
  - de frequências, 46
  - de valores extremos, 254
  - normal bivariada, 383
  - Wishart, 412
- Divisão binária recursiva, 320
- Efeito
  - aleatório, 218
  - de tratamento, 122
  - principal, 155
- Elastic Net, 346
- Ensaio clínico, 24
- Entropia cruzada, 320, 338
- Equação
  - de estimação, 185, 220
- Erro
  - aleatório, 205
  - de classificação, 319, 320
  - de previsão, 319
  - padrão, 73, 486
  - propagação de, 36
  - quadrático médio, 12, 285

- Escore  
fatorial, 396
- Espaço  
característico, 292  
dos dados, 292
- Especificidade, 105, 267
- Estatística, 7  
de Durbin-Watson, 197  
de ordem, 54, 68  
de Pearson, 97, 231
- Estimador  
*Lasso*, 348  
de Kaplan Meier, 247  
de mínimos quadrados, 184, 204  
de mínimos quadrados penalizados, 347  
do limite de produtos, 247  
Lasso adaptativo, 350  
não enviesado, 57  
resistente, 191  
robusto, 191
- Estrutura de dados, 9
- Estudo  
caso-controle, 127  
observacional, 24  
prospectivo, 102, 126  
retrospectivo, 103, 127
- Expansão de Taylor, 80
- Falso  
negativo, 105  
positivo, 105, 268
- Família exponencial, 362
- fastICA, 406
- Fator, 152  
comum, 391  
de risco, 101  
efeito, 153  
específico, 391  
interação, 153
- Floresta  
aleatória, 319
- Florestas  
aleatórias, 332
- Folha, 322
- Forma quadrática, 206
- Fronteira  
de Bayes, 282  
de decisão linear, 261  
de separação, 295
- Função  
banana, 446  
biquadrática, 168  
de ativação, 418, 421, 423  
de distribuição empírica, 247  
de ligação, 362  
de probabilidade, 65  
de risco, 245  
de risco acumulado, 247  
de Rosenbrock, 446  
de sobrevivência, 244  
de variância, 362  
densidade de probabilidade, 65  
discriminante de Fisher, 261  
discriminante linear de Fisher, 281  
distribuição acumulada, 68  
distribuição empírica, 68  
escore, 363, 440  
tricúbica, 167
- Galho, 322
- GPU, 431
- Gráfico  
*dotplot*, 48  
da escarpa sedimentar, 386  
da variável adicionada, 214  
de barras, 46  
de Bland-Altman, 115  
de Cook, 186, 192  
de dispersão, 107  
de dispersão simbólico, 148  
de dispersão unidimensional, 48  
de médias/diferenças, 115  
de perfis, 216  
de perfis individuais, 112  
de perfis médios, 120, 152  
de pizza, 46  
de quantis, 60  
de resíduos, 186  
de simetria, 61  
do cotovelo, 386  
do desenhista, 146, 216  
PP, 130  
QQ, 69, 113, 193  
ramo e folhas, 49  
Ramo-e-Folhas, 49  
torta, 46
- Graus de liberdade, 57
- Hessiano, 438
- Heteroscedasticidade, 190
- Hipótese  
de homogeneidade, 96  
de independência, 96



- Hiperplano, 293  
 de margem máxima, 294
- Homocedasticidade, 188
- ICA, 403
- Índice de Gini, 320, 338
- Inferência Estatística, 24, 65
- Influência  
 local, 186
- Infomax, 406
- Informação  
 de Fisher, 440  
 mútua, 405  
 sistemática, 11
- Inteligência artificial, 4
- Interação  
 essencial, 155  
 não essencial, 155
- Intervalo  
 de confiança, 77, 226  
 de previsão, 226
- JADE, 406
- Janelamento, 151
- Kernel, 292, 302, 314  
 baseado em ondaletas, 292  
 de base exponencial, 292  
 Gaussiano, 292  
 polinomial, 292, 303  
 radial, 303
- Lasso, 345
- Lei forte dos grandes números, 456
- Limiar suave, 349
- LOOCV, 285
- Lowess, 151
- LTSM, 431
- Média, 54  
 aparada, 54
- Método  
*Scoring*, 442  
 BFGS, 445  
 de Bartlett, 396  
 de Gauss-Newton, 442  
 de mínimos quadrados, 7, 206, 235  
 de mínimos quadrados generalizados, 198, 221  
 de máxima verossimilhança, 219, 392  
 de Mantel-Haenszel, 164  
 de Newton-Raphson, 220, 440  
 de reamostragem, 467  
 Delta, 133, 220  
 do centroide, 392  
 do fator principal, 392  
 do gradiente, 404  
 Fisher scoring, 220  
 L-BFGS-B, 445  
 MCMC, 472  
 Monte Carlo, 456
- Métodos  
 Quase-Newton, 444
- Mantel-Haenszel, 172
- Margem de erro, 76
- Matlab, 17
- Matriz  
 cofenética, 380  
 de correlações, 161, 165  
 de correlações reduzida, 393  
 de covariâncias, 161, 164  
 de dados, 10, 145, 160  
 de similaridade, 369  
 ortogonal, 392
- Mediana, 54
- Medida  
 de localização, 54  
 de tendência central, 54  
 resistente, 55  
 robusta, 55
- Megadados, 1
- Meia média, 54
- Microdados, 2
- Minitab, 17
- Moda, 55
- Modelo  
 de regressão de Cox, 255  
 de regressão linear múltipla, 203  
 de regressão linear simples, 184  
 de regressão polinomial, 184  
 de riscos proporcionais, 255  
 de tempo de falha acelerado, 254  
 exponencial, 246  
 hipergeométrico, 253  
 Linear Generalizado, 362  
 linear misto, 216  
 linearizável, 200  
 log normal, 246  
 não linear, 184  
 paramétrico, 254  
 probabilístico, 64  
 semiparamétrico, 255  
 Weibull, 246

- Momento  
centrado, 59
- Multiplicadores de Lagrange, 310, 347, 386
- Nó  
interno, 321  
terminal, 322
- Observação  
discrepante, 191
- Otimização  
numérica, 437
- Parâmetro, 183  
de complexidade, 325, 339  
de encolhimento, 331  
de localização, 154
- Parâmetros, 65
- Paradoxo de Simpson, 173
- Parametrização, 154  
de desvios médios, 170  
de médias de celas, 154
- Partição, 151
- Percentil, 56
- Perceptron, 418
- Poda, 323, 339
- Ponto  
alavanca, 193  
de corte, 266  
influyente, 193
- Ponto de sela, 438
- Posto, 109
- Prevalência, 106
- Previsão, 10, 261
- Previsor  
forte, 327  
fraco, 327
- proalimentação, 423
- Probabilidades, 7
- Processo  
estocástico, 67
- Programação quadrática, 310
- Pureza do nó, 338
- Quantil, 55  
empírico, 55
- Quartil, 56
- Razão de chances, 103, 219, 221  
intervalo de confiança, 132
- Reamostragem  
ponderada, 470
- Rede  
neural, 233
- Rede neural, 417  
com camada escondida, 421
- Redes neurais  
recorrentes, 431
- Redução de dimensionalidade, 14
- Regra  
de classificação, 281
- Regressão  
linear, 7  
linear múltipla, 184, 203  
linear simples, 184  
logística multinomial, 224  
logística politômica, 224  
resistente, 232  
segmentada, 169
- Regularização, 345  
*Ridge*, 345
- Representação dual, 311
- Resíduo, 97, 185, 204  
da desviância, 232  
de Pearson, 231  
estudentizado, 187, 225  
padronizado, 187
- Restrição  
ativa, 310  
inativa, 310
- Risco  
atribuível, 102  
de um classificador, 263  
relativo, 102, 255
- Risco relativo  
intervalo de confiança, 132
- Rotação de fatores, 394
- Série temporal, 146, 198
- SAS, 17
- Sensibilidade, 105, 267
- Separação cega de fontes, 403
- Simulação, 453  
de variáveis aleatórias contínuas, 459  
de variáveis aleatórias discretas, 457  
de vetores aleatórios, 464
- Sobreajuste, 8, 323, 345
- SPlus, 17
- Suavização, 166
- Subespaço, 309
- Tabela

- atuarial, 259
- de contingência, 96
- de dupla entrada, 96
- Taxa
  - de aprendizado, 425
- Teorema
  - de Gauss-Markov, 225
  - Limite Central, 206, 225
- Teste
  - log rank*, 253
  - de McNemar, 287
- Toco, 330
- Transformação
  - ortogonal, 383
- Unidade amostral, 26
- Validação cruzada, 6, 12, 270, 285, 298, 361
  - de ordem  $k$ , 286
- Valor
  - atípico, 62
  - discrepante, 62
  - esperado, 97
  - preditivo negativo, 105
  - preditivo positivo, 105
- Variáveis
  - comonotônicas, 127
  - contramonotônicas, 127
- Variável
  - bimodal, 55
  - contínua, 44
  - de folga, 297, 312
  - discreta, 44
  - explicativa, 94
  - fictícia, 334
  - nominal, 44
  - ordinal, 44
  - padronizada, 82
  - preditora, 94
  - qualitativa, 44
  - quantitativa, 44
  - resposta, 94
  - valor esperado, 65
- Variância, 56
  - aparada, 58, 128
  - específica, 391
- Vetor
  - suporte, 292, 295
- Vizinho mais próximo, 282
- Voto majoritário, 327