GRAFOS

1. La matriz de adyacencia del grafo G es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces,

A) G es un pseudografo

B) G es un grafo completo

3. G no es conexo

***Solución**: Supongamos $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ son los vértices del grafo. En los pseudografo están permitidas las aristas cuyos extremos coinciden, es decir, los lazos.*

En la matriz de adyacencia dada se observa que

$m_{11}=1$, un lazo en v_1

$m_{22}=1$, un lazo en v_2

$m_{33}=1$, un lazo en v_3

$m_{44}=1$, un lazo en v_4

Se trata de un pseudografo.

2. Sea A la matriz de adyacencia de un multigrafo G con vértices $\{v_1, v_2,...,v_n\}$ y sea $a_{23}=3$ una de las entradas de A. Entonces,

A) Existe un camino con tres vértices entre v_2 y v_3.

B) Hay tres aristas con extremos los vértices v_2 y v_3.

C) Hay tres vértices adyacentes con v_2 y v_3

***Solución**: en los multigrafos se define la matriz de adyacencia:*

a_{ij}=número de aristas cuyos vértices son v_i y v_j, $i\neq j$

$a_{ii}=0$

Por tanto si $a_{23}=3$ entonces hay 3 aristas con vértices extremos v_2 y v_3

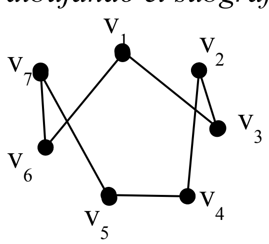
3. Sea G un grafo con 7 vértices y $C=(v_1,v_3,v_2,v_4,v_5,v_7,v_6,v_1)$ un camino en G.

A) C es un camino hamiltoniano

2. C es un ciclo hamiltoniano

C) C no está bien definido

***Solución**: dibujando el subgrafo asociado al camino*



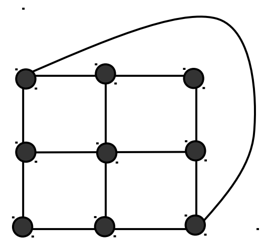
Vemos que se trata de un ciclo hamiltoniano.

Ciclo es un camino cerrado donde los únicos vértices repetidos son el primero y el último

Cuando un ciclo contiene todos los vértices del grafo se llama ciclo hamiltoniano.

Nuestro grafo contiene siete vértices, y el camino en cuestión los recorre todos sin repetir vértice, es por tanto ciclo hamiltoniano.

4. Dado el grafo de la figura

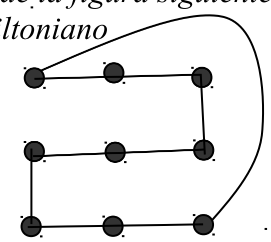


A) Es hamiltoniano

B) Es euleriano

3. Es bipartito

***Solución**: el subgrafo de la figura siguiente contiene un ciclo hamiltoniano*



Un grafo que contiene un ciclo hamiltoniano se denomina grafo hamiltoniano.

No es euleriano porque hay seis vértices que tienen grado 3, es decir grado impar. Recuérdese que si un grafo es euleriano todo vértice tiene grado par.

No es bipartito porque el ciclo asociado a la figura anterior es de longitud impar.

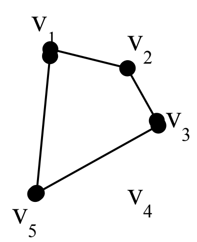
5. Sea G un grafo conexo cuyos vértices son $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. La sucesión $(v_1,v_2,v_3,v_5,v_1,)$ es:

A) Un camino euleriano

B) Un ciclo hamiltoniano

C) Ninguno de los anteriores

***Solución**: el subgrafo asociado al camino es el de la figura.*



Un camino euleriano es un camino que contiene todas las aristas apareciendo cada una de ellas exactamente una vez.

En nuestro caso desconocemos todas las aristas del grafo, no podemos asegurar que sea euleriano.

Tampoco es un ciclo hamiltoniano, puesto que debe pasar por todos los vértices sin repetir repetir ninguno.

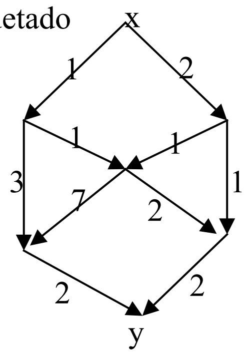
6. Sea M un mapa cuyas regiones se pueden colorear con sólo dos colores:

A) El pseudomultigrafo dual es bipartito
B) Todas las caras son polígonos con un número par de lados.
C) No existen tales mapas.

Solución: *veamos dos ejemplos de tales mapas*

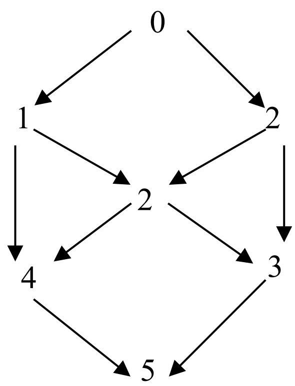
Ambos mapas se pueden colorear con dos colores. Entendiendo que "caras" se refiere a "regiones", el grado de las regiones internas es 3 y 4 respectivamente.
Si un mapa se puede colorear con dos colores, regiones adyacentes tendrán asociados colores diferentes; manteniendo la misma coloración para las regiones que para las aristas asociadas por la transformación dual, las aristas conectaran vértices que provienen de regiones adyacentes y por tanto tendrán distintos colores.

7. Dado el digrafo etiquetado



¿Cuál es la distancia entre x e y?
A) ∞ **B) 5** C)12

Solución: *siguiendo el algoritmo de Dijkstra y colocando en cada vértice la distancia desde x, obtenemos:*



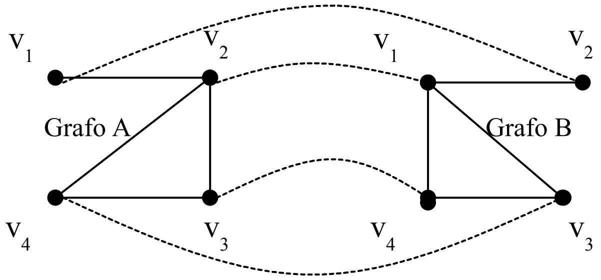
8. Dadas las matrices de adyacencia A, B y C de tres grafos

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&1\\0&1&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&0\\1&0&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix};$$

$$C=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$$

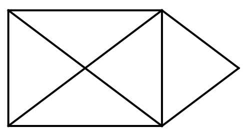
A) A y B son isomorfos
B) A y C son isomorfos
C) B y C son isomorfos

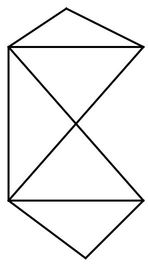
Solución: *el grado de un vértice se obtiene sumando los elementos de la fila.*
Matriz A: $gr(v_1)=1; gr(v_2)=3; gr(v_3)=2; gr(v_4)=2$
Matriz B: $gr(v_1)=3; gr(v_2)=1; gr(v_3)=2; gr(v_4)=2$
Matriz C: $gr(v_1)=3; gr(v_2)=3; gr(v_3)=3; gr(v_4)=3$
No se puede establecer un isomorfismo entre A y C, ni entre B y C, puesto que no se pueden hacer corresponder los grados de los vértices.
Entre A y B se puede establecer el isomorfismo:

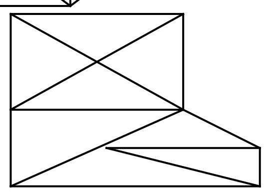


Donde las líneas de puntos indica la correspondencia entre los vértices.
Se observa que se conserva el grado de los vértices por el isomorfismo.

9. ¿Cuál de los siguientes grafos no se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel y sin dibujar dos veces la misma arista?

A) 

B) 

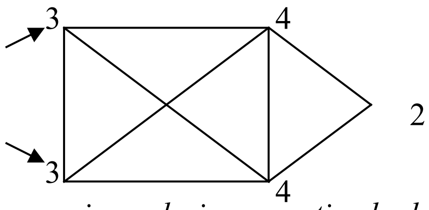
C) 

Solución: *para resolver este ejercicio hay que analizar el grado de cada vértice. Para que se pueda dibujar en las condiciones pedidas debe ocurrir una de:*

- *Todos los grados son pares, entonces es un grafo euleriano, es decir, admite un circuito euleriano.*

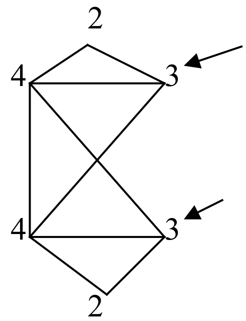
- *Dos y exactamente dos vértices tienen grado impar, entonces se podría dibujar un camino eulariano que parta de uno de los vértices de grado impar y termine en el otro.*

Grafo A:



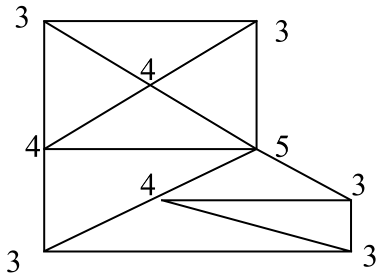
Admite un camino euleriano, partiendo de uno de los vértices señalados por una flecha y terminando en el otro

Grafo B:



Igual situación que en el grafo A.

Grafo C:



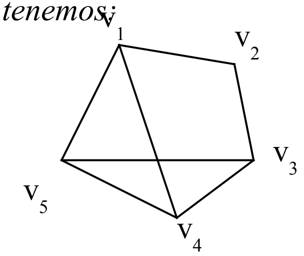
Tiene más de dos vértices con grado impar, luego no admite camino euleriano y no se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel y sin dibujar dos veces la misma arista

10. Dado un grafo con matriz de adyacencia

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A) El grafo es euleriano
B) El grafo es conexo
C) Es un multigrafo

Solución: *considerando el conjunto de vértices $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ y representando el grafo asociado a la matriz, tenemos:*

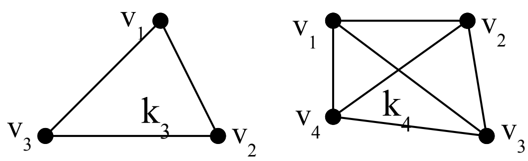


El grafo es visiblemente conexo, es decir, todos sus vértices están conectados a través de un camino.
Un multigrafo es un grafo con (posiblemente) varias aristas entre dos vértices. El que arriba vemos no es multigrafo (propiamente).
Tampoco es euleriano porque tiene 4 vértices con grado impar y por tanto no admite un circuito euleriano.

11. Sea K_n el grafo completo con n vértices, n par, $n\geq 3$.

A) K_n es hamiltoniano
B) K_n es euleriano
C) K_n es bipartito

Solución: *dos ejemplos de grafos completos nos permiten decidirnos por una de las tres opciones:*



Ambos grafos completos son Hamiltoniano, basta escoger el ciclo: (v_1,v_2,v_3) en K_3 y (v_1,v_2,v_3,v_4) en K_4
K_3 es euleriano, pero K_4 no lo es.
Ni K_3 es bipartito, ni K_4 no lo es.
En general K_n es hamiltoniano.
En general K_n no es bipartito, porque tres vértices están conectados entre sí y forman un ciclo de grado impar.
En general K_n para n par y $n>2$ no es euleriano, porque todos los vértices tienen grado n-1(impar).

12. Sea M la matriz de adyacencia de un grafo con $p>1$ vértices. Sea $C=M^p+M^{p-1}+...+M$

A) Si $C\neq 0$ entonces el grafo es conexo.
B) Si la entrada i,j de C es igual a 1 entonces existe una arista entre el vértice i y el j en el grafo.
C) Si el grafo es conexo entonces todas las entradas de C son no nulas.

Solución:

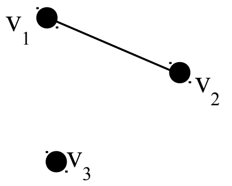
Recordando la teoría: Si M es la matriz de adyacencia de un grafo, el elemento (i,j) de M^n nos da el número de caminos de longitud n con extremos v_i y v_j.
Existirá un camino entre v_i y v_j si la entrada (i,j) de la matriz $C=M^p+M^{p-1}+...+M$ es no nula.

En C estarían reflejados todos los posibles caminos de longitudes: 1, 2, 3,...,p

El grafo es conexo si y sólo si todas las entradas de C son no nulas . Esto nos indica que la respuesta C) es correcta.

Para ver que las otras respuestas son falsas, buscaremos ejemplos adecuados

Ejemplo 1: sea el grafo con tres vértices de la figura



La matriz de adyacencia es:

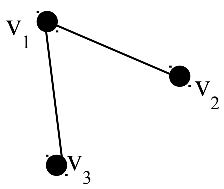
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto: $C = M^3 + M^2 + M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$C \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y no es conexo.

Ejemplo2: sea el grafo de la figura



En este caso:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto: $C = M^3 + M^2 + M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$c_{23}=1$, pero no existe una arista de v_2 a v_3.

13. Sea G un grafo y M un mapa con #R regiones que representa a G. Supongamos que el grado de todos los vértices de G es 4 y que G tiene 14 aristas. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

A) #R=9
B) #R=12
C) #R=10

Solución: *aplicando el primer teorema de la teoría de grafos:*

$$\boxed{\sum_{i=1}^{p} gr(v_i) = 2 \cdot \# E}$$

En nuestro caso: #E=14, gr(v_i)=4 para cualquier i.

El primer miembro es: $\sum_{i=1}^{p} gr(v_i) = 4 \cdot \# V$

El segundo miembro es: 2·#E=2·14=28

Donde:

- *#E es el número de aristas*
- *#V el número de vértices*
- *gr(v_i) es el grado del vértice i*

Resumiendo el primer teorema:

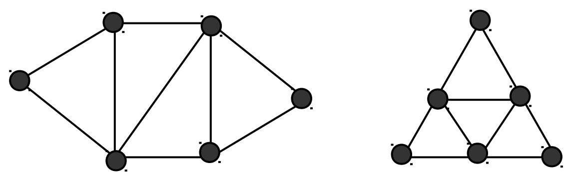
$4 \cdot \#V = 28 \Rightarrow \#V = 7$

Aplicando ahora la fórmula de Euler

$\#V - \#E + \#R = 2$

se obtiene: $7 - 14 + \#R = 2 \Rightarrow \#R = 9$

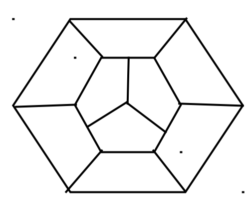
14. Los dos grafos de la figura



A) Son isomorfos pues tienen el mismo número de vértices y de aristas.
B) Son isomorfos porque se puede establecer un isomorfismo entre ellos
C) No son isomorfos pues en uno hay dos vértices de grado 2 y en el otro hay tres vértices de grado 2.

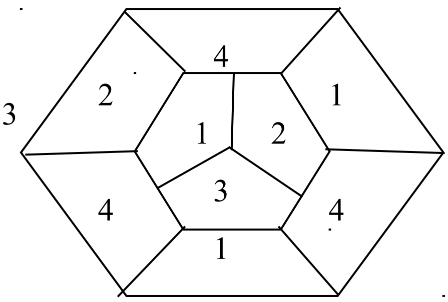
Solución: *analizando los grados de los vértices*
Grados del grafo 1º: 2, 3, 4, 2, 3, 4
Grados del grafo 2º: 2, 4, 2, 4, 2, 4
Si existiera un isomorfismo se tendría que conservar el grado de los vértices isomorfos. Dado que no se pueden hacer corresponder biunívocamente los vértices de grado 2 (por ejemplo), no puede existir un isomorfismo.

15. Sea el mapa M de la figura



A) M se puede colorear con tres colores diferentes.
B) M necesita más de tres colores para ser coloreado.
C) Son necesarios más de cuatro colores para colorear M.

Solución: *según el teorema de los cuatro colores, como máximo son necesarios cuatro colores para colorear un mapa.*
Las tres regiones internas de nuestro mapa necesitan tres colores distintos, dado que están en contacto entre sí.
Como cada una de estas regiones internas toca a tres más va a ser necesario un color más para colorear el mapa.
Una solución con cuatro colores sería:

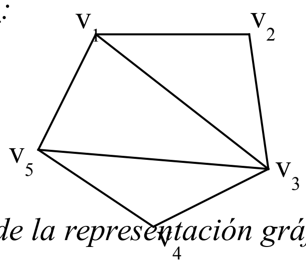


16. Dado el grafo G con matriz de adyacencia

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A) G tiene un camino euleriano
B) G no es conexo
C) G tiene un vértice de grado 5

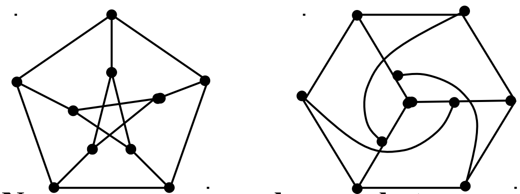
Solución:



A partir de la representación gráfica vemos que es conexo.
Los grados de los vértices son respectivamente: 3,2,4,2,3; como hay exactamente dos vértices con grado impar, admite un camino euleriano.

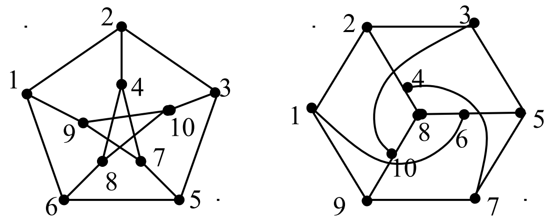
Ninguno de los vértices puede tener grado 5.

17. Los grafos de la figura, ¿son isomorfos?



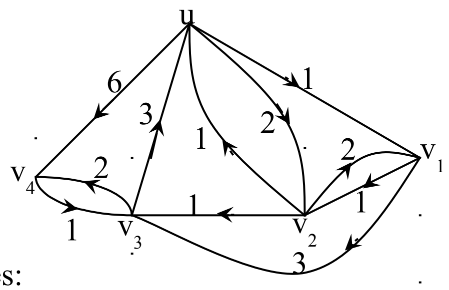
A) No, porque uno es plano y el otro no
B) Sí, pues existe un isomorfismo entre ellos.
C) Sí, porque tienen el mismo número de vértices y aristas.

Solución: *son isomorfos puesto que se puede establecer un isomorfismo.*
La correspondencia a través de los números:



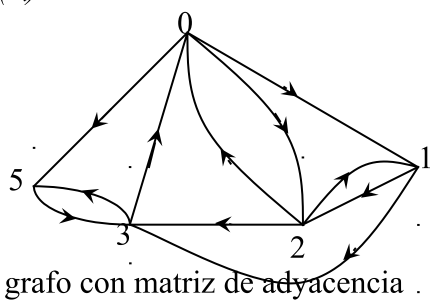
produce el mismo grafo G=(V,E), donde:
V={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}
E={12,19,16,24,23,3A,35,48,47,57,56,68,79,8A,9A}
Se trata de un isomorfismo.

18. En el grafo de la figura sea **L(v_i)** la longitud del camino más corto entre los vértices **u** y **v_i**



Entonces:
A) L(v_4)=6 y L(v_2)=2 B) L(v_3)=4 y L(v_4)=6
B) L(v_3)=3 y L(v_4)=5

Solución: *siguiendo el algoritmo de Dijkstra y colocando L(v_i) en cada vértice tenemos:*
L(v_1)=1
L(v_2)=2
L(v_3)=3
L(v_4)=5

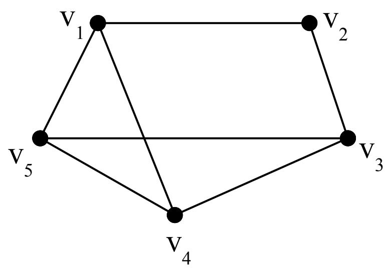


19. Dado un grafo con matriz de adyacencia

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A) El grafo es euleriano
B) El grafo es conexo
C) Es un multigrafo

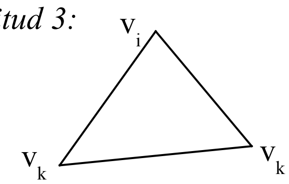
***<u>Solución</u>**: gráficamente tenemos*



Es conexo, dado que no hay ningún vértice aislado de los demás.
No es euleriano porque los grados de los vértices son: 3, 2, 3, 3, 3. (Para que sea grafo euleriano tienen que ser todos los grados pares).
No es multigrafo porque no hay todos los números que aparecen son 0 ó 1. Para que sea multigrafo propiamente deben existir más un número superior a 1, indicando con ellos que dos vértices se conectan con más de una arista.

20. Sea K_n el grafo completo con vértices, n par, $n \geq 3$, entonces
A) K_n es hamiltoniano
B) K_n es euleriano
C) K_n es bipartito

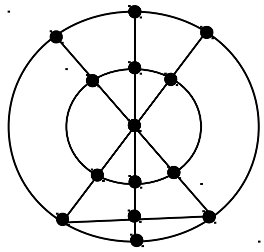
Solución: Todo grafo completo es hamiltoniano, siempre existirá el ciclo (v_1, v_2, v_3,..., v_n,v_1), dado que cualquier pareja de vértices está conectados por una arista.
Todo grafo completo de n vértices, con n pary n>2, no es euleriano, porque cada vértice tendrá grado (n-1), que es impar, y por tanto no admite circuito euleriano.
Todo grafo completo con n>2, no puede ser bipartito, porque tiene ciclos de longitud impar, concretamente tres puntos cualesquiera forman un ciclo de longitud 3:



21. a M la matriz de adyacencia de un grafo con p>1. Sea $C=M^p+M^{p-1}+...+M$
A) Si $C\neq 0$ entonces el grafo es conexo
B) Si la entrada (i,j) de C es igual a 1 entonces existe una arista entre los vértices i y j.
C) Si el grafo es conexo entonces todas las entradas de C son no nulas.

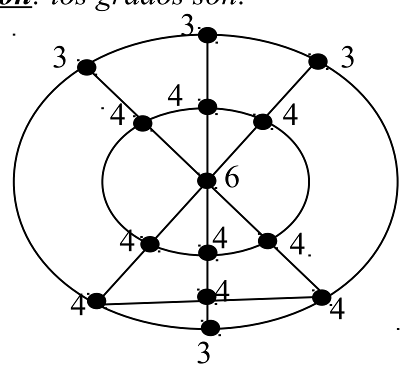
***<u>Solución</u>**: es similar al ejercicio 12*

22. ¿Cuál es el número de veces que se debe levantar el lápiz para dibujar la figura siguiente sin repetir ninguna arista?

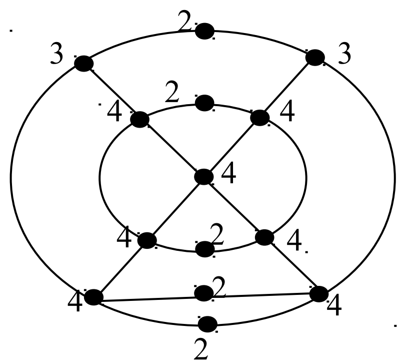


A) Ninguna vez
B) Una vez
C) Dos veces

***<u>Solución</u>**: los grados son:*

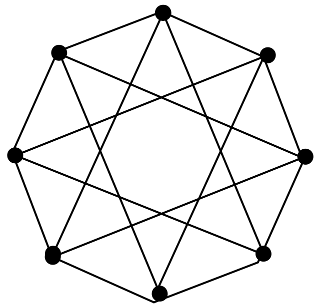


Al haber más de exactamente dos grados impares tendremos que levantar el lápiz al menos una vez. Si eliminamos la línea vertical central, tendremos



Este se podrá dibujar sin levantar el lápiz desde un vértice de grado impar hasta el otro de grado impar.
Luego se levanta el lápiz y se dibuja la línea vertical, con lo que se completa el grafo.

23. Sea el grafo de la figura

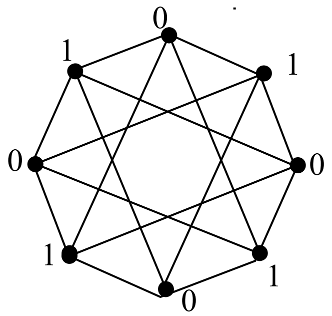


A) Es plano

2. No es plano

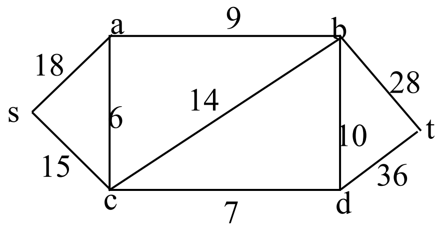
C) No es bipartito

***Solución**: es fácil ver que es bipartito*



Como es conexo, si fuera plano debería cumplir la desigualdad: $\#E \leq 2\cdot\#V-4$
En nuestro caso: $\#E=16$, $\#V=8$ y $\#E>2\cdot\#V-4$
Luego no puede ser plano.

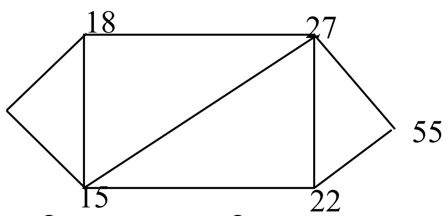
24. Dado el grafo etiquetado



Se aplica el algoritmo de Dijkstra partiendo del vértice **s**. Se designa por **δ(s,w)** la distancia entre **s** y cualquier otro vértice **w**. ¿Cuál de los siguientes resultados es cierto?

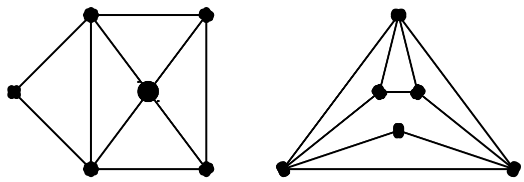
A) **δ(s,a)=18, δ(s,b)=27, δ(s,c)=15, δ(s,d)=22, δ(s,t)=55.**
B) δ(s,a)=18, δ(s,b)=27, δ(s,c)=15, δ(s,d)=22, δ(s,t)=57.
C) δ(s,a)=18, δ(s,b)=29, δ(s,c)=15, δ(s,d)=22, δ(s,t)=57.

***Solución**: aplicando Dijstra tenemos las distancias:*



Con lo que:
δ(s,a)=18   δ(s,b)=27   δ(s,c)=15
δ(s,d)=22   δ(s,t)=55

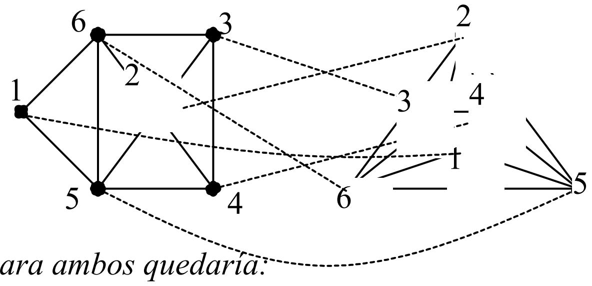
25. Dados los grafos de la figura



A) No son planos
B) Son isomorfos
C) No son isomorfos

***Solución**: ambos grafos son visualmente planos (mapas: las aristas solo se cruzan en los vértices).*

Los grados de los vértices del primer grafo son:
2, 4, 3,4, 4, 4, 3
Los grados de los vértices del segundo grafo son:
4, 3, 3, 4, 2, 4
Un isomorfismo podría ser:



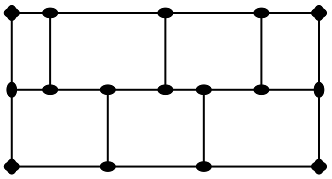
Para ambos quedaría:
G=(V,E)
V={1,2,3,4,5,6}
E={16,15,62,52,65,63,54,24,23,34}

26. Sea G un grafo y A su matriz de adyacencia. ¿Cuál de las siguientes informaciones dan los elementos de la diagonal principal de la matriz A?

A) Los grados de los vértices G.
B) Los ciclos con a lo más dos aristas
C) Ninguna de las anteriores

***Solución**: en los grafos la diagonal son elementos nulos porque no hay lazos, es decir aristas con origen y extremo en el mismo vértice.*
En los pseudografos están permitidos los lazos.
En los pseudografos, por tanto, en la diagonal deben haber elementos no nulos.
La definición de matriz de adyacencia para multigrafos y pseudografos viene propuesta en el problema 5 (página 167 del libro base).
En esencia el elemento m_{ij} debe reflejar el número de aristas que hay entre el vértice v_i y v_j.
En los pseudografos afecta a la diagonal principal y a los multigrafos afecta a los elementos que no se limitan a ser 0 y 1. As-i, $m_{ij}=3$ nos indicaría que existen 3 aristas que unen los vértices v_i y v_j.

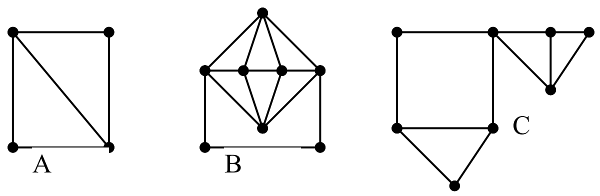
27. Sea G el grafo de la figura



A) G es hamiltoniano
B) No tiene un camino simple que pase por todos los vértices
3. No es hamiltoniano

Pistas: *Es fácil encontrar un camino simple que pase por todos los vértices.*
Hay, por tanto, que decidir si es o no hamiltoniano. Supongamos que es hamiltoniano, entonces si eliminamos k vértices y sus aristas no deben obtenerse más de k componentes conexas.
También podemos intertar buscar eun ciclo hamiltoniano.
Véase al final de este documento

28. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre los grafos de la figura es cierta



A) B y C tienen un camino euleriano
B) A es euleriano
C) A tiene un camino euleriano y B un circuito euleriano.

Solución: *analizamos los grafos por separado.*
En A hay dos vértices de grado impar, no es grafo euleriano pero admite un camino euleriano.
En B todos los vértices son de grado par, luego es una grafo euleriano.
C tiene más de dos vértices con grado impar, luego no es euleriano ni admite camino euleriano.

29. Dadas las matrices de adyacencia de los grafos A, B y C siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A) A y B son isomorfos
B) A y C son isomorfos
C) B y C son isomorfos

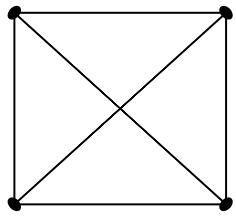
Solución: *analizando los grados tenemos*
Grafo A: 3,1,2,2
Grafo B: 3,3,2,2
Grafo C: 2,2,1,3
De ser isomorfos los serán A y C.

30. Sea K_6 el grafo completo con 6 vértices, entonces:

A) Es bipartito ya que tiene un número par de vértices
B) Es hamiltoniano
C) Es euleriano

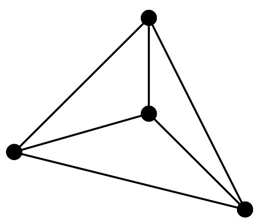
Solución: K_6
Es hamiltoniano como todos los grafos completos.
No es euleriano porque todos seis vértices son de grado 5 (impar).
No esa bipartito porque tiene ciclos de longitud impar (3, por ejemplo).

31. Consideremos el grafo G de la figura:



A) El grafo no es plano porque dos aristas se cortan.
B) El grafo no es plano porque todo vértice es de grado 3.
C) El grafo es plano

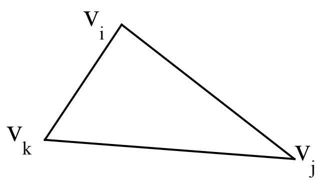
Solución: *Es plano porque es isomorfo al mapa*



32. Sea el grafo completo K_r (r>2). Entonces K_r es bipartito.

A) No, cualquiera que sea r.
B) Sí, para todo valor de r.
C) Sólo si r es par.

Solución: *no puede ser bipartito, cualquiera que sea r, dado que para cualesquiera tres vértices v_i, v_j, v_k podemos encontrar el ciclo de longitud 3:*

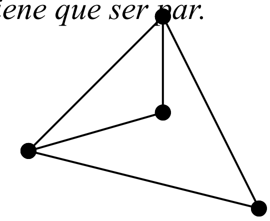


Recordamos el teorema: "Un grafo es bipartito si y solo si no tiene ciclos con longitud impar"

33. Cuál de estas afirmaciones es falsa:

A) Todo grafo tiene un número impar de vértices de grado par.
B) Todo grafo tiene un número par o cero de vértices de grado impar.
C) La suma de los grados de los vértices de un grafo es par.

Solución: *según el primer teorema la suma de todos los grados de los vértices tiene que ser par (proviene del hecho de que cada arista se cuenta dos veces). Por tanto, el número de vértices con grado impar tiene que ser par.*
En el ejemplo:



tenemos los siguientes grados: 3,2,2,3
Tiene por tanto 2 vértices de grado par.

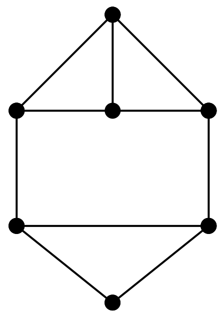
34. Sea el grafo completo K_r (r>1). Su matriz de adyacencia es:

A) $a_{ii}=1$, $a_{ij}=1$ (i distinto de j)
B) $a_{ii}=1$, $a_{ij}=0$ (i distinto de j)
C) $a_{ii}=0$, $a_{ij}=1$ (i distinto de j)

Solución: analizamos
$a_{ii}=1 \Rightarrow$ tiene lazos y por tanto es un pseudografo
$a_{ij}=0 \Rightarrow$ no tiene arista entre los vértices v_i y v_j
Por tanto, en un grafo completo

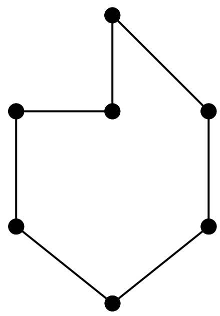
- *no hay lazos $\Rightarrow a_{ii}=0$*
- *toda pareja de vértices están conectados $\Rightarrow a_{ij}=1$ ($i\neq j$)*

35. Sea el grafo de la figura:



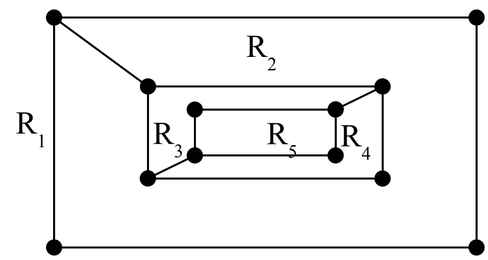
A) El grafo es euleriano
B) El grafo es 3 regular
C) El grafo es hamiltoniano

Solución:
Los grados de los vértices son: 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2 luego no puede ser grafo euleriano.
Un grafo es k-regular si todos los vértices tienen el mismo grado k.
Evidentemente hay un vértice que no es de grado 3, luego no puede ser 3-regular
Es hamiltoniano puesto que el camino cuyo subgrafo:



es un ciclo hamiltoniano, pues es un camino cerrado, pasa por todos los vértices y no repite ninguno.

36. En el mapa de la figura las regiones que se designan por R_i:

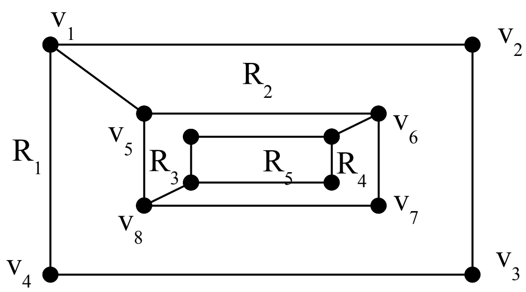


el grado de la región R_2 es:

A) 8
B) 10
C) 5

Solución: *Se denomina gradode una región a la longitud del camino que la bordea.*

Poniendo nombre a los vértices

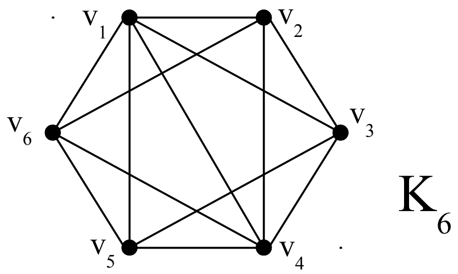


El camino que bordea R_2 es:
$(v_1, v_2, v_3, v_4, v_1, v_5, v_6, v_7, v_8, v_5, v_1)$
luego la longitud es 10

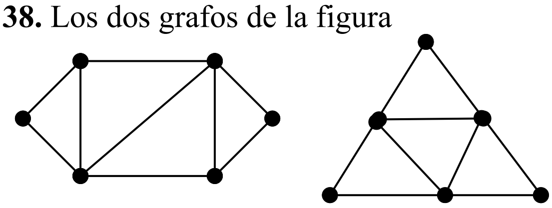
37. Sea K_6 el grafo completo con 6 vértices, entonces:

A) Es bipartito ya que tiene un número par de vértices.
B) Es hamiltoniano
C) Es euleriano

***<u>Solución</u>**: K_6 tiene 6 vértices, el grado de cada vértice es 5, porque existe una arista por cada pareja de vértices.*
Si los vértices son $\{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ los grados son: 5, 5, 5, 5, 5, 5
No puede ser euleriano, para que lo fuera tienen que ser todos los grados pares.
No es bipartito porque de tres vértices se puede obtener un ciclo de grado 3 (impar).
Es hamiltoniano porque el camino:
$(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_1)$
es un ciclo hamiltoniano.



38. Los dos grafos de la figura



A) Son isomorfos pues tienen el mismo número de vértices y de aristas.
B) Son isomorfos porque se puede establecer un isomorfismo entre ellos.
C) No son isomorfos pues en uno hay dos vértices de grado 2 y en el otro hay tres vértices de grado 2.

***<u>Solución</u>**: los grados de ambos grafos son*
Grafo 1º: 2,3,4,2,3,4
Grafo 2º: 2,4,2,4,2,4
Si hubiera un isomorfismo tendría que corresponderse biyectivamente iguales grados. Así por ejemplo, los vértices de grado dos no se pueden asociar biyectivamente, porque en una hay 2 y en el otro grafo hay 3.

39. Sea K_n el grafo completo con n>3 vértices, n par:

A) es euleriano
B) es bipartito
C) es hamiltoniano

***<u>Solución</u>**: este es un ejercicio que ha aparecido en varias ocasiones. En general, para cualquier n>2 tenenmos:*

- *K_n es hamiltoniano*
- *K_n es euleriano si n es impar, no lo es si n es par.*
- *K_n no es bipartito*

40. La matriz de adyacencia del grafo G es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A) G es pseudografo
B) G es un grafo completo
C) G no es conexo

***<u>Solución</u>**: dado que tiene en los elementos de la diagonal un 1, hay lazos en cada vértice, por tanto es un pseudografo.*
No es completo porque, por ejemplo, $m_{14}=0$ y por tanto no hay arista entre v_1 y v_4.
Es conexo porque el camino (v_1,v_2,v_4,v_3,v_1) recorre todos los vértices, y dicho camino es posible porque:

$m_{12}=1 \Rightarrow v_1 — v_2$
$m_{24}=1 \Rightarrow v_2 — v_4$
$m_{43}=1 \Rightarrow v_4 — v_3$
$m_{31}=1 \Rightarrow v_3 — v_1$

41. Sea A la matriz de adyacencia de un digrafo con $\{v_1, v_2, v_3,...,v_7\}$ vértices, y sea $a_{14}=3$, una de las entradas de la matriz A^2.
Entonces:

A) Hay un camino entre v_1 y v_4 con tres vértices intermedios.
B) Hay tres caminos de longitud 2 de v_1 a v_4.
C) Hay tres aristas distintas que unen v_1 y v_4.

***<u>Solución</u>**: la entrada a_{14} de A^2 es el número de caminos de longitud 2 con extremos v_1 y v_4. Como* *es un digrafo, y por tanto las aristas están orientadas dichos caminos de longitud 2 tienen origen en v_1 y extremo en v_4*

42. Sea G un grafo (no pseudografo ni multigrafo) plano conexo con 15 aristas. Entonces el número de vértices de G es como mínimo
A) 5 **B) 7** C) 9

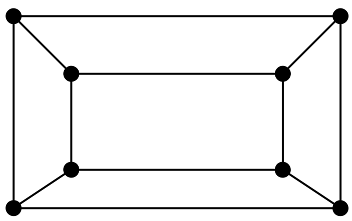
***<u>Solución</u>**: si es un grafo plano conexo debe cumplirse*

- *$\#E \leq 3\cdot\#V - 6$ con $\#V>2$*

(Tal aspecto teórico puede consultarse en la página 174 del libro base)

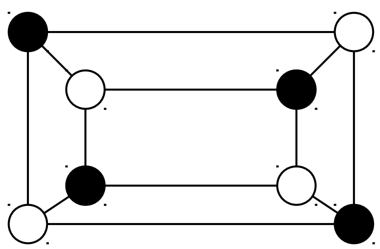
Es decir: $15 \leq 3\cdot\#V - 6 \Rightarrow \#V \geq 7$

43. Sea el grafo de la figura:



A) Es bipartito
B) No es bipartito ya que todos los vértices tienen el mismo grado
C) Es euleriano ya que todos los vértices tienen el mismo grado.

***<u>Solución</u>**: es bipartito dado que se puede colorear con dos colores.*



No es euleriano porque los grados de los vértices no son todos pares.

44. Sea G un grafo y M un mapa con r regiones que representa a G. Si el grado de todos los vértices es 5 y G tiene 20 aristas, entonces r es
A) 12
B) 14
C) 18

***<u>Solución</u>**: aplicamoe el primer teorema de grafos y la fórmula de Euler.*

La suma de todos los grados de los vértices es:
5·número de vértices=$5\cdot\#V$
Tiene que coincidir con el doble de aristas
$5\cdot\#V=2\cdot 20=40 \Rightarrow \#V=40/5=8$
La fórmula de Euler: $\#V - \#E + \#R = 2$
Es decir: $8- 20 +r=2 \Rightarrow r=14$

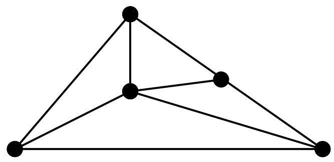
45. Sea G el grafo formado por los vértices y aristas de un tetraedro T más el centro de T y las aristas que unen dicho centro con los vértices de T. Entonces:
A) G es bipartito
B) G es euleriano
C) G no es hamiltoniano

***<u>Solución</u>**:*

Se trata de un grafo completo K_5, por tanto

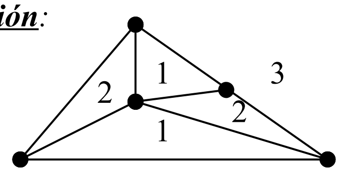
- *G no es bipartito, porque tiene ciclos de longitud impar*
- *G es euleriano porque el grado de cada uno de los vértices es 4 (todos par)*
- *G es hamiltoniano porque el camino (v_1,v_2,v_3, v_4, v_5, v_1) existe y es un ciclo hamiltoniano.*

46. Sea el mapa de la figura



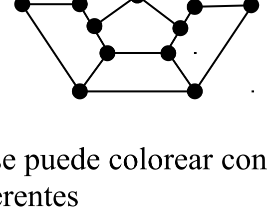
Teniendo también en cuenta la región exterior para colorear el mapa se necesita
A) 2 colores
B) 3 colores
C) 4 colores

***<u>Solución</u>**:*



Se necesitan 3 colores mínimo.

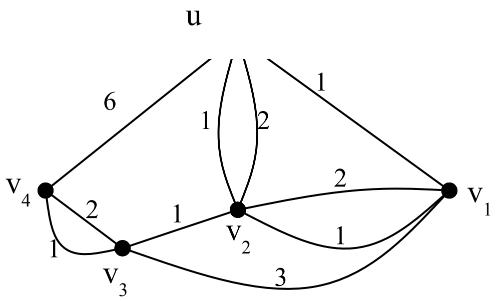
47. Sea el mapa M de la figura



A) M se puede colorear con tres colores diferentes
B) M necesita cuatro colores para ser coloreado.
C) Son necesarios más de cuatro colores para colorear M.

***<u>Solución</u>**: véase el ejercicio 15*

48. En el grafo de la figura sea $L(v_i)$ la longitud del camino más corto entre los vértices u y v_i



A) $L(v_4)=6$ y $L(v_2)=2$
B) $L(v_3)=3$ y $L(v_4)=4$
C) $L(v_3)=2$ y $L(v_4)=3$

Solución:
$L(v_2)=1$ siguiendo el camino $(u(1)v_2)$
$L(v_3)=2$ siguiendo el camino $(u(1)v_2(1)v_3)$
$L(v_4)=3$ siguiendo el camino $(u(1)v_2(1)v_3(1)v_4)$
Recordamos, $L(v_i)$ se forma con los recorridos más cortos.

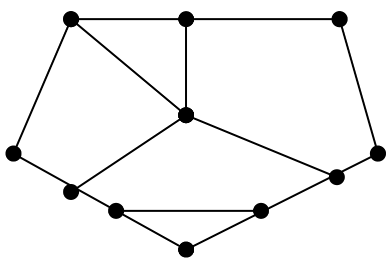
49. Dado el grafo G con matriz de adyacencia:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A) G tiene un camino euleriano
B) G no es conexo
C) G tiene un vértice de grado 5

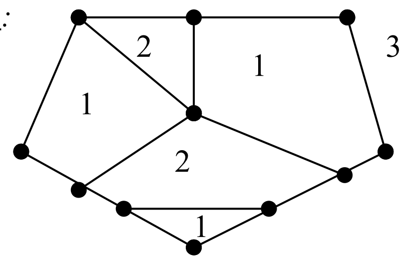
Solución:
Los grados de los vértices se obtiene sumando los números de las filas: 3, 2, 4, 2, 3. Ninguno es de grado 5.
Tiene un camino euleriano:
$(v_1(m_{12}=1)v_2(m_{23}=1)v_3(m_{34}=1)v_4(m_{45}=1)v_5(m_{51}=1)v_1)$
Por tanto es conexo.

50. Teniendo en cuenta la región exterior ¿cuántos colores son necesarios para colorear las regiones del mapa?



A) Tres
B) Cuatro
C) Cinco

Solución:



Son necesarios al menos 3 colores.

51. El grafo formado por los vértices y aristas de la figura anterior es
A) Euleriano
B) Bipartito
C) Ninguno de los dos

Solución:
No puede ser euleriano porque hay vértices de grado impar.
No puede ser bipartito porque hay ciclos de longitud (3) impar.

52. La matriz de adyacencia de un grafo G es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A) G es un pseudografo
B) G no es conexo
C) G es un grafo completo

Solución:
Dado que en la diagonal principal hay unos, significa que hay lazos, es decir, se trata de un pseudografo.
Existe el camino (v_1,v_2,v_4,v_3,v_1) porque:
$m_{12}= m_{24}= m_{43}= m_{31}= 1$
Es conexo porque (v_1,v_2,v_4,v_3,v_1) es un camino que recorre todos los vértices, por tanto están conectados

53. Sea el grafo con matriz de adyacencia:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El número de caminos distintos de longitud tres entre dos vértices v_1 y v_4 es
A) 5
B) 3
C) 2

Solución:

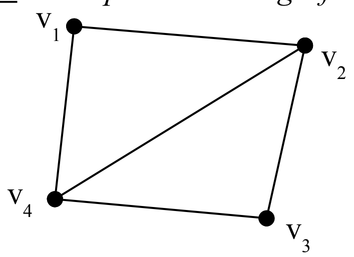
54. El grafo que tiene por matriz de adyacencia

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

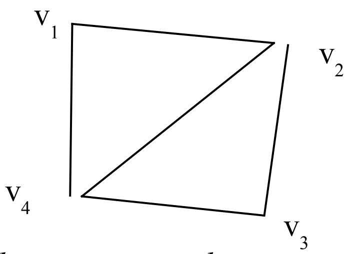
es:

A) Un pseudografo
B) Tiene un camino euleriano
C) Tiene un circuito euleriano

Solución: *su representación gráfica es*



No es pseudografo porque la diagonal está formada por ceros y por tanto no hay lazos.
Contiene un camino euleriano (v_2,v_3,v_4,v_2,v_1,v_4)

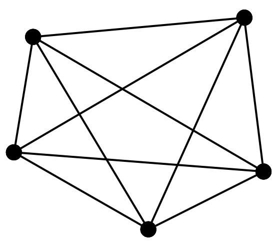


No admite circuito euleriano porque hay vértices con grado impar.

55. Sea K_5 el grafo completo de cinco vértices

A) Es euleriano
B) Es bipartito
C) Es un pseudografo

Solución: *una representación gráfica es*



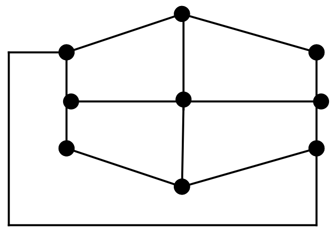
Es euleriano dado que es conexo y todos los vértices tienen grado par.
No es bipartito porque tiene ciclos de longitud 3 y ciclos de longitud 5 (impar).
No es pseudografo poruqe no tiene aristas con origen y extremo el mismo vértice.

56. Sea G un grafo y A su matriz de adyacencia. ¿Cuál de las siguientes informaciones dan los elementos de la diagonal principal de la matriz A^2?

A) Los grados de los vértices de G
B) Los ciclos con a lo sumo dos vértices
C) Ninguna de las anteriores

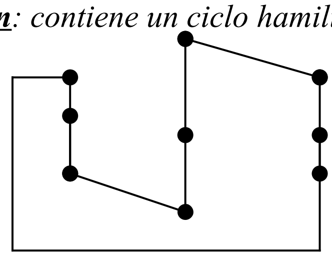
Solución: *recordamos la teoria.*
La entrada (i,j) de la matriz M^n es el número de caminos de longitud n con extremos v_i y v_j.
En nuestro caso el elemento (i,i) de la diagonal de A^2 es el número de caminos de longitud 2 con extremos v_i y v_i. Como el origen y el extremo coinciden, se trata de ciclos de longitud 2.

57. Dado el grafo de la figura:



A) Es bipartito
B) Es hamiltoniano
C) Es euleriano

Solución: *contiene un ciclo hamiltoniano*



No es euleriano porque es conexo y tiene vértices de grado impar.
No es bipartito porque tiene ciclos de grado impar (como el representado)

58. Sea G un grafo y M un mapa con r regiones que representa a G. Supongamos que el grado de todos los vértices de G es 4 y que G tienen 14 aristas. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

A) r=12
B) r=10
C) r=9

Solución: aplicamos el primer teorema y la fórmula de Euler.
Primer teorema: $4\cdot\#V=2\cdot 14 \Rightarrow \#V=7$
Fórmula de Euler: $7-14+r=2 \Rightarrow r=9$

59. Sea G un grafo con n vértices y sea S la suma de los grados de los vértices de G. Entonces:

A) S es par
B) S es impar
C) La paridad depende de n

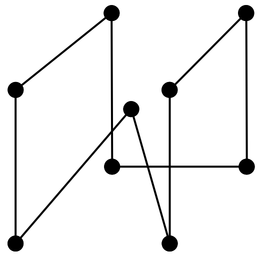
Solución: *según el primer teorema, la suma de los grados de los vértices es exactamente el doble de aristas que hay, por tanto debe ser par.*

60. Sea G el grafo formado por los vértices y aristas de un cubo C más el centro de C y las aristas que unen dicho centro con los vértices de C. Entonces:

A) G es euleriano
B) G es bipartito
C) G no es hamiltoniano

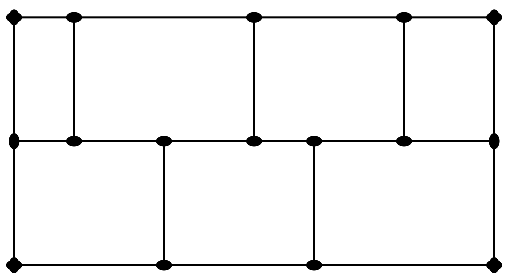
Solución:

Se trata de un grafo conexo, los vértices del cubo tienen grado 4, el centro del cubo tiene grado 8, al ser todos pares admite un circuito euleriano.
No es bipartito porque hay ciclos de longitud impar, concretamente dos vértices conectados por una arista con el centro forman un ciclo de longitud 3.
Tiene un ciclo hamiltoniano:



BÚSQUEDA DE UN CICLO HAMILTONIANO

Ejercicio pospuesto: encontrar un ciclo hamiltoniano al grafo:

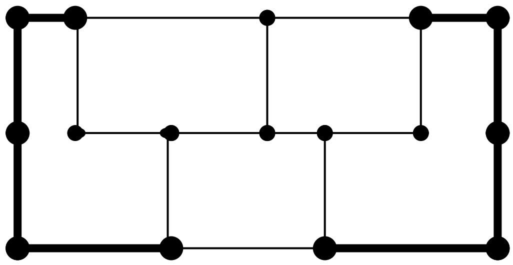


Vamos a suponer que existe para este grafo un ciclo hamiltoniano.
Tengamos en cuenta lo siguiente:

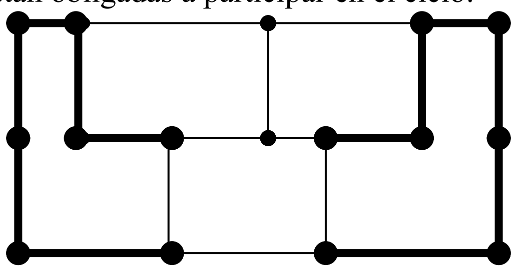
- Cada vértice participa con dos de sus aristas al ciclo
- Si sabemos que un vértice tenemos determinadas dos de sus aristas, las demás no participarán en el ciclo y las podemos eliminar a fin de obtener el posible ciclo.

En el grafo anterior se observa que las cuatro esquinas únicamente tienen dos aristas, luego de existir el ciclo, formarían parte de él.

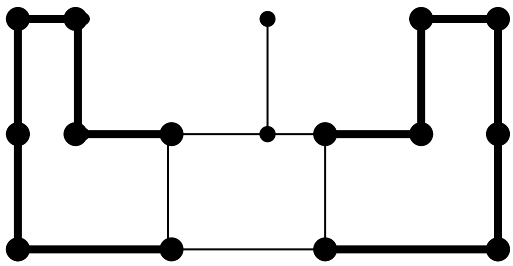
Podemos eliminar



Tenemos ahora dos nuevos vértices con dos aristas, están obligadas a participar en el ciclo:



Podemos eliminar dos aristas que no pueden participar en el ciclo



Hemos obtenido, así, un vértice que no puede participar en el ciclo con dos aristas.
Luego no puede haber tal ciclo hamiltoniano.