UNIDAD I: NÚMEROS Y OPERACIONES ARITMÉTICAS

Introducción: El concepto de número es considerado como fundamental dentro de las matemáticas, al grado tal que existe una rama dedicada especialmente a su estudio, es la **Aritmética** la cual a su vez es la base del **Algebra**. Puede decirse que la idea de número aparece desde que el hombre tiene necesidad de ***contar***, es decir relacionar los objetos que le pertenecen con este concepto en su mente, por ello utiliza símbolos diversos para representarlos y así facilitar su manejo y comprensión. La herramienta básica de estas dos ramas de las matemáticas son los números, tanto en su concepto, como en su notación o simbolización.

En esta primera unidad, recordaremos los diferentes conjuntos de números desde los **naturales** $\mathbb{N}$ **, enteros** $\mathbb{Z}$ **, racionales** $\mathbb{Q}$ **, irracionales** I y hasta llegar a los números **reales** $\mathbb{R}$ sobre los que descansan buena parte de las matemáticas tradicionales o elementales. Estudiaremos las operaciones, sus propiedades más importantes, la jerarquía de estas operaciones, su representación en la recta, en especial con los números **racionales** en cuanto sus diversas formas de escribirlos (como fracción o cociente de dos enteros, expansión decimal periódica y en porcentajes), sus operaciones (suma, resta, producto y división), la resolución de algunos problemas de la vida cotidiana a través de los racionales, para concluir con los números reales, trabajando las leyes de los exponentes y radicales.

LOS NÚMEROS NATURALES $\mathbb{N}$

El hombre en el momento que descubre la agricultura deja de ser nómada y se empieza a establecer en regiones de la tierra por periodos de tiempo relativamente largos, ello lo obliga de alguna manera a desarrollar su capacidad de abstracción, es decir en pensar en como poder ***contar*** principalmente lo que cosecha o le pertenece, como los granos, animales domésticos, etc. Se dice pues que los números naturales surgen en esas épocas y cada cultura los representa de muy variadas formas usando símbolos, en la actualidad se utilizan los símbolos que los árabes aportaron, de modo que se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,\ldots\}$$

Se puede observar que el cero no aparece como número natural, se aclara que esto no significa que no existiera desde estos tiempos solo que la cultura dominante durante muchos siglos después de cristo fue la occidental y en ella el cero no se consideraba como natural, es la razón por la que no aparece en muchos textos.

Con estos números se pueden efectuar las operaciones básicas como la suma, el producto, la resta y la división.
Las **primeras propiedades** que los naturales tienen con respecto a las operaciones son las de **cerradura** y se cumplen para la suma y el producto, no así para la resta y la división.

Propiedades de cerradura para la suma y el producto de los números naturales

1. *La suma de dos números naturales cualesquiera da como resultado un natural.*

2. *El producto de dos números naturales cualesquiera da como resultado un natural.*

Otras propiedades son la **conmutatividad, la asociatividad y la distributiva.**
Si consideramos que las letras $a\,,b\;y\;c$ representan a cualquier número natural, tenemos las siguientes propiedades escritas en **forma verbal** y en **forma simbólica**.

Propiedades conmutativas

3. El orden de los sumandos no altera la suma de números naturales.

$$a+b=b+a$$

4. El orden de los factores no altera el producto de números naturales.

$$a\cdot b=b\cdot a$$

Propiedades asociativas

5. Para sumar tres o más números naturales no importa el orden.

$$a+\ \ b+c\ \ =\ \ a+b\ \ +c$$

6. Para realizar el producto de tres o más números naturales no importa el orden.

$$a\cdot\ \ b\cdot c\ \ =\ \ a\cdot b\ \ \cdot c$$

Propiedad distributiva

7. El producto de un número natural con la suma de dos naturales es igual a la suma de los productos.

$$a\cdot\ \ b+c\ \ =a\cdot b+a\cdot c$$

Construyendo una fórmula para sumar los primeros números naturales

Como primer reto vamos a tratar de obtener alguna regla o fórmula que permita sumar los n primeros números naturales, es decir $S=1+2+3+4+5+6+7+8+\cdots+(n-1)+n$

Para lograrlo consideremos casos particulares.

$$
\begin{aligned}
&1+2= \\
&1+2+3= \\
&1+2+3+4= \\
&1+2+3+4+5= \\
&1+2+3+4+5+6= \\
&1+2+3+4+5+6+7= \\
&1+2+3+4+5+6+7+8= \\
&\vdots \\
&1+2+3+\cdots+88+89+90= \\
&1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)+n=S
\end{aligned}
$$

¿Las sumas anteriores dan el mismo resultado, respectivamente que las siguientes? ¿por qué?

$$
\begin{aligned}
&2+1= \\
&3+2+1= \\
&4+3+2+1= \\
&5+4+3+2+1= \\
&6+5+4+3+2+1= \\
&7+6+5+4+3+2+1= \\
&8+7+6+5+4+3+2+1= \\
&90+89+88+\cdots+3+2+1= \\
&\vdots \\
&n+(n-1)+(n-2)+\cdots+3+2+1=S
\end{aligned}
$$

Ahora construye una fórmula para la última suma, en donde n es un número natural tan grande como quieras imaginar.

Ayuda: Toma en cuenta que el orden de la suma no altera el resultado.

$$
\begin{array}{r}
n+(n-1)+(n-2)+\cdots+\quad 3 \quad + \quad 2 \quad +1=S \\
1\ +\quad 2 \quad +\quad 3 \quad +\cdots+(n-2)+(n-1)+n=S \\
\hline
=2S
\end{array}
$$

¿Cómo queda tu fórmula? escríbela y compruébala para casos particulares como $n=2, n=3, n=4, n=5, n=6, etc.$

¿Cuánto vale la suma del número 1 al 150? ______________________

¿Cuánto vale la suma del número 1 al 1,500? ______________________

¿Cuánto vale la suma del número 1 al 15,000? ______________________

¿Cuánto vale la suma del número 1 al 150,000? ______________________

¿Cuánto vale la suma del número 1 al 1,500,000? ______________________

LOS NÚMEROS ENTEROS $\mathbb{Z}$

Al restar dos números naturales el resultado no siempre da un natural, esto quiere decir que la operación resta no cumple con la propiedad de **cerradura**, por ello es necesario utilizar “nuevos” números que vienen a complementar los naturales para que se satisfaga la cerradura en la resta, así como en la suma y el producto.

Dichos números se conocen como los **Enteros**, y son:

$$\mathbb{Z}= \cdots,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,\cdots$$

Represente en la recta los números enteros anteriores.

$$\longleftarrow\!\!\longrightarrow$$

0

Regla de los signos

Producto: $+ \text{ x } + \;=+;\quad + \text{ x } - \;=-;\quad - \text{ x } + \;=-;\quad - \text{ x } - \;=+$

División: $+ \div + \;=+;\quad + \div - \;=-;\quad - \div + \;=-;\quad - \div - \;=+$

o bien

$$\frac{+}{+}=+;\quad \frac{-}{+}=-;\quad \frac{+}{-}=-;\quad \frac{-}{-}=+;$$

Suma y resta:

$$5+2=7,\qquad 5+\ -2\ =5-2=3$$

$$-5+2=-3\quad \text{y}\quad -5+\ -2\ =-5-2=-7$$

Jerarquía de las operaciones

¿Cuál es el resultado correcto? de 5+4x3=
5–4x3=
5x4+3=
5x(–4)+3=

1) Símbolos de agrupación: paréntesis, corchetes, llaves, etc.
2) Potencias y exponentes.
3) Producto y división
4) Suma y resta

En caso de que aparezcan dos operaciones de igual jerarquía en forma seguida, se procede de izquierda a derecha.

Operaciones con números enteros

Propiedades de la suma, resta y producto

Si $a, b\ y\ c$ representan a tres números enteros cualesquiera $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\ y\ c \in \mathbb{Z}$

Se cumple lo siguiente:

$$a+b \in \mathbb{Z} \qquad\qquad a-b \in \mathbb{Z}$$

$$ab \in \mathbb{Z} \qquad\qquad a+b=b+a$$

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$

$$a+0=a \qquad\qquad a+(-a)=a-a=0$$

$$ab=ba \qquad\qquad a(bc)=(ab)c$$

$$a(1)=1(a)=a \qquad\qquad a(b \pm c)=ab \pm ac$$

Actividad 1: Realiza las siguientes operaciones respetando la jerarquía.

1) $4+2\ \ -3\ =$ 2) $-9+4\ \ 2\ =$ 3) $5+\frac{12}{3}\ \ 2\ =$ 4) $2\left[3-2\ \ 5-8\ \ \right]=$

5) $(4+2)(-3)=$ 6) $(-9+4)^2 \;\; 2 \;=$ 7) $(5+\frac{12}{3}) \;\; 2 \;\; ^3 =$ 4) $\frac{2\left[3-2 \;\; 5-8 \;\; ^2\right]}{9-2(5-2)}=$

Orden de los números enteros

Al comparar dos o más números es muy importante saber quien es mayor que $(>)$ o bien menor que $(<)$.

Se dice que un número a es menor que un número b, si a se encuentra a la izquierda de b en la recta numérica y se escribe como: $a<b$ "a es menor que b" o de manera equivalente, b es mayor que a, si b se encuentra a la derecha de a en la recta numérica y se escribe como: $b>a$ "b es mayor que a".

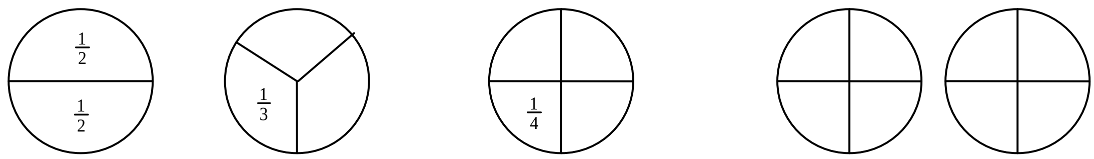
$$a<b$$

Actividad 2:
Completa escribiendo el símbolo correcto $<$ o $>$

3 7	8 3	-2 5	-4 -2	-5 -8
-2 4	0 2	0 -2	5 -3	1 6

LOS NÚMEROS RACIONALES $\mathbb{Q}$ (FRACCIONARIOS)

Uno de los principales problemas que tienen **los números enteros es que no cumplen por completo la propiedad de cerradura en la operación división**, por ello es necesario **"ampliar"** a más números que se conocen como **Racionales o fraccionarios**, estos abarcan a los anteriores y aparecen las fracciones de la unidad.



$$1=\frac{2}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \quad ; \quad 1=\frac{3}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3} \quad ; \quad 1=\frac{4}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} \quad ; \quad 2=\frac{8}{4}=\frac{4}{4}+\frac{4}{4}$$

Los números Racionales o también llamados Fraccionarios vienen a complementar a los enteros, para que la propiedad de cerradura en la división se cumpla para estos nuevos números. Se definen de la siguiente manera:

$$\mathbb{Q}=\left\{x \text{ tal que, } x=\frac{a}{b} \text{ donde } a \text{ y } b \text{ son enteros, con } b\neq 0\right\}$$

Algunos números Racionales aparecen a continuación.

$$\mathbb{Q}=\left\{\cdots,-2=\frac{-6}{3},\frac{-3}{3},\frac{-4}{5},\frac{-2}{3},\frac{-1}{3},\frac{-1}{4},\frac{-1}{5},0,\frac{1}{2},\frac{2}{2},\frac{3}{2},\frac{4}{2},\frac{7}{3},\frac{5}{2},\frac{6}{2}=3,\cdots\right\}$$

Actividad 3: Dibuja los números anteriores en la recta numérica.

Los racionales abarcan como se dijo anteriormente a los enteros y los naturales, lo anterior se escribe simbólicamente de la siguiente manera:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Representación de los números Racionales $\mathbb{Q}$

Existen tres formas para representar a los números racionales, la primera es por medio de **cociente o división**, la segunda es en forma **decimal periódica** y en forma de **porcentajes** (%).

1.- Todo número racional se puede escribir en forma de cociente o división de números enteros con el denominador diferente de cero, es decir

$$x = \frac{a}{b} \; con \; b \neq 0$$

$$\cdots, -2 = \frac{-6}{3}, \frac{-3}{3}, \frac{-4}{5}, \frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{5}, 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{7}{3}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2} = 3, \cdots$$

2.- Todo número racional se puede escribir en forma decimal periódica (expansión decimal periódica), don de el periodo es la secuencia de dígitos que se repiten en un momento dado después del punto decimal.

Algunos números periódicos son:

$$1.5\overline{0} = 1.500000\ldots su \; periodo \; es \; 0$$

$$3.4\overline{5} = 3.455555\ldots su \; periodo \; es \; 5$$

$$-2.10\overline{124} = -2.10124124\ldots su \; periodo \; es \; 124$$

$$4 = 4.0000000\ldots su \; periodo \; es \; 0$$

$$1.\overline{123} = 1.123123123\ldots su \; periodo \; es \; 123$$

$$-5.00\overline{3671} = -5.0036713671\ldots su \; periodo \; es \; 3671$$

$$2.\overline{01} = 2.010101\ldots su \; periodo \; es \; 01$$

3.- todo número racional se puede escribir en forma de porcentaje.
Hay que tomar en cuenta que la unidad equivale al 100%, es decir 1 = 100%. De manera que:

$$\frac{3}{4} = 0.75\overline{0}\ldots = 75\% \qquad \frac{1}{3} = 0.\overline{3} = (33.333\ldots)\%$$

$$\frac{5}{2} = 2.5 = 250\% \qquad \frac{2}{5} = 0.4 = 40\%$$

$$2 = 200\% \qquad\qquad -1 = -100\%$$

$$\frac{-2}{3} = -0.\overline{6} = -(66.666\ldots)\%$$

Conversiones de una forma a otra para los números racionales

$$\frac{a}{b} \Leftrightarrow decimal \Leftrightarrow porcentajes$$

Como se acaba de señalar los números racionales se escriben de tres formas y por consecuencia es posible pasar de una a la otra como se ilustra en los siguientes ejemplos.

De la forma de cociente o división a la decimal periódica

Escribir los números en racionales en forma decimal periódica. $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{20}{11}\ y\ \frac{12}{7}$.

Para obtener la forma decimal periódica solo habrá que realizar la división, hasta encontrar el periodo.

En el caso de la fracción $\frac{3}{4}$ tenemos $\frac{3}{4} = 0.75\overline{0}$, ya que:

$$\begin{array}{r|l} & 0.750\ldots \\ \hline 4 & 3 \\ & 30 \\ & \ \ 20 \\ & \ \ \ \ 0 \end{array}$$

De manera análoga con los demás números.

$\frac{2}{3} = 0.666\ldots = 0.\overline{6}$; $\frac{1}{6} = 0.166\ldots = 0.1\overline{6}$; $\frac{20}{11} = 1.8181\ldots = 1.\overline{81}$

$$\begin{array}{r|l} & 0.666\ldots \\ \hline 3 & 2 \\ & 20 \\ & \ \ 20 \\ & \ \ \vdots \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 0.166\ldots \\ \hline 6 & 1 \\ & 10 \\ & \ \ 40 \\ & \ \ \ 40 \\ & \ \ \ \vdots \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 1.8181\ldots \\ \hline 11 & 20 \\ & \ \ 90 \\ & \ \ \ 20 \\ & \ \ \ \ 90 \\ & \ \ \ \ \vdots \end{array}$$

Actividad 4: Escribe los siguientes números fraccionarios en forma decimal periódica y señala su periodo respectivo.

$$\frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{3}{4}, \frac{8}{5}, \frac{7}{6}, \frac{-5}{4}, \frac{6}{7}\ y\ \frac{8}{11}$$

De la forma decimal periódica a cociente o división

Escribir los siguientes números en forma de cociente o división de enteros.

$3.2\overline{0}$, $1.\overline{2}$, $0.\overline{31}$, $1.\overline{234}$ y $2.8\overline{54}$

Para convertir estos números debemos recorrer el punto decimal las cifras necesarias para que aparezca "empatado" el periodo, como se ilustra a continuación.
Le asignamos al número $3.2\overline{0}$ una letra, por ejemplo $x = 3.2\overline{0}$
Cuando el periodo es cero (0), basta que multipliquemos por 10 para recorrer el punto decimal a donde inicia el periodo y despejamos directamente a x

$$x = 3.2\overline{0}$$
$$10x = 32.\overline{0}$$
$$10x = 32$$
$$x = \frac{32}{10} = \frac{16}{5}$$
$$\therefore \quad 3.2\overline{0} = \frac{16}{5}$$

Ahora para los números que cuyo periodo es diferente de cero y aparece inmediatamente después del punto decimal, primero se multiplica por una potencia de 10 adecuada de acuerdo al periodo de manera que el punto decimal se recorra un periodo y restamos al "nuevo número" el original para después despejar fácilmente a x.

$$1.\overline{2}$$
$$x = 1.\overline{2}$$
$$10x = 12.\overline{2}$$
$$-x = -1.\overline{2}$$
$$9x = 11$$
$$x = \frac{11}{9}$$
$$\therefore \quad 1.\overline{2} = \frac{11}{9}$$

$$0.\overline{31}$$
$$x = 0.\overline{31}$$
$$100x = 31.\overline{31}$$
$$-x = -0.\overline{31}$$
$$99x = 31$$
$$x = \frac{31}{99}$$
$$\therefore \quad 0.\overline{31} = \frac{31}{99}$$

$$1.\overline{234}$$
$$x = 1.\overline{234}$$
$$1000x = 1234.\overline{234}$$
$$-x = -1.\overline{234}$$
$$999x = 1233$$
$$x = \frac{1233}{999} = \frac{411}{333} = \frac{137}{111}$$
$$\therefore \quad 1.\overline{234} = \frac{137}{111}$$

Finalmente cuando entre el punto decimal y el periodo se encuentra alguna o algunas cifras, primero se recorre el punto decimal hasta donde inicia el periodo multiplicando por una potencia de 10 adecuada, después el punto decimal se recorre hasta donde termine un periodo y se resta este ultimo con el anterior para despejar finalmente a x

$$2.8\overline{54}$$
$$x = 2.8\overline{54}$$
$$10x = 28.\overline{54}$$
$$1000x = 2854.\overline{54}$$
$$-10x = -28.\overline{54}$$
$$990x = 2826$$
$$x = \frac{2826}{990} = \frac{314}{110} = \frac{157}{55}$$
$$\therefore \quad 2.8\overline{54} = \frac{157}{55}$$

Actividad 5: Convierte los números $1.4\overline{0}$, $5.\overline{2}$, $0.\overline{34}$, $4.\overline{125}$ y $2.34\overline{59}$.

De la forma decimal periódica a porcentajes

Esta conversión es la más directa, ya que solo hay que multiplicar por 100 el número dado en forma decimal.

$$\frac{3}{4} = 0.75\overline{0}\ldots = 75\% \qquad \frac{1}{3} = 0.\overline{3} = (33.333\ldots)\%$$

$$\frac{5}{2} = 2.5 = 250\% \qquad \frac{2}{5} = 0.4 = 40\%$$

$$2 = 200\% \qquad -1 = -100\%$$

$$\frac{-2}{3} = -0.\overline{6} = (66.666\ldots)\%$$

Actividad 6: escribe los siguientes números en forma de porcentajes.

$$\frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{3}{4}, \frac{8}{5}, \frac{7}{6}, \frac{-5}{4}, \frac{6}{7}\ y\ \frac{8}{11}$$

Operaciones con números racionales o fraccionarios

Suma y resta:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd} \qquad donde\ b \neq 0\ y\ d \neq 0$$

Producto:

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd} \qquad donde\ b \neq 0\ y\ d \neq 0$$

División o cociente:

$$\left(\frac{a}{b}\right) \div \left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ad}{bc} \qquad donde\ b \neq 0,\ c \neq 0\ y\ d \neq 0$$

O bien

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

Los números Irracionales I

Se dice que los números racionales cumplen con la cerradura para las cuatro operaciones, es decir la suma, resta, producto y división de números racionales da como resultado un número racional. Sin embargo existen otro tipo de números distintos a los racionales que no se pueden representar en forma de división de dos números enteros y son conocidos como Números **Irracionales.**

Se pueden definir de la siguiente manera:

$$\mathrm{I} = \left\{ x \;\middle|\; x \neq \frac{a}{b} \quad donde\ a \neq 0\ y\ b \neq 0 \right\}$$

Se puede apreciar que los números Irracionales son distintos a los racionales y en consecuencia a los enteros y naturales, es decir su **expansión decimal no es periódica**.

Algunos de estos números son:

$$\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{5}, \pm\sqrt{6}, \pm\sqrt{7}, \pm\sqrt{8}, \pm\sqrt{10}, \ldots, e = 2.718\ldots, \pi = 3.1415\ldots, etc.$$

La raíz cuadrada de números naturales que no da un entero es considerada como Irracional, el número e y π, entre otros.

Estos números en la antigüedad no fueron aceptados, por que se creía que los números racionales eran ***completos***, es decir que cubrían por completo a la recta numérica si se localizaran en ella y también por que entre dos racionales diferentes siempre existe otro racional.

Ejemplo: Encontrar un número racional que se encuentre entre los números $\frac{1}{3}\ y\ \frac{1}{4}$.

En realidad hay una infinidad de números entre estos dos, uno de estos es su "promedio" y lo podemos obtener fácilmente usando operaciones aritméticas, como se ilustra a continuación.

$$y = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{2} = \frac{\frac{4+3}{12}}{2} = \frac{\frac{7}{12}}{\frac{2}{1}} = \frac{7}{24}$$

Por lo que un número entre $\frac{1}{3}\ y\ \frac{1}{4}$ es $\frac{7}{24}$

Observar que se pueden ir obteniendo más números entre estos dos realizando de manera análoga, tomando el "nuevo" número y uno de los originales.

Actividad 7: Encuentra un número racional que se encuentre entre los siguientes números.

$\frac{1}{3}\ y\ \frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}\ y\ \frac{4}{5}$ $\frac{-3}{4}\ y\ \frac{-2}{3}$ $\frac{-2}{5}\ y\ \frac{6}{11}$

Regresando a los números Irracionales I, solo basta que recordemos que no tienen expansión decimal periódica (no hay periodo) y repasaremos como se obtiene la raíz cuadrada de un número.

Actividad 8: Anota lo que se explica en la clase al respecto de la raíz cuadrada, los ejemplos resueltos y calcula las siguientes raíces sin calculadora.

$\sqrt{2.000000}$ $\sqrt{432.1234}$ $\sqrt{5.123456}$ $\sqrt{42.214365}$

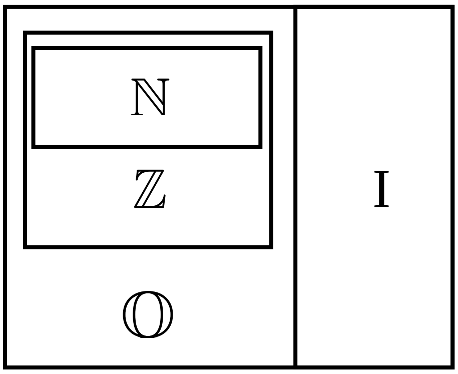
Los números Reales $\mathbb{R}$

Este el conjunto más importante de números para el desarrollo de la Aritmética, el Algebra, la Geometría plana, Analítica y el Calculo Diferencial e Integral.
Se definen como la unión de los números Racionales $\mathbb{Q}$ e Irracionales I ($\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathrm{I}$) y si cubren por completo a la recta numérica, es por ello que los **Reales** se dibujan como la recta sin "huecos".

$\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathrm{I}$

$-\infty$ $\longleftrightarrow$ $+\infty$

Los números reales abarcan a todos los demás y en la figura se ilustra esta afirmación.



$$\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathrm{I}$$

Propiedades de la igualdad en los números Reales.

- **Reflexiva** $x=x$
- **Simetría** $x=y \Leftrightarrow y=x$
- **Transitiva** $x=y\,;\, y=z \Leftrightarrow x=z$

Propiedades de las operaciones con números Reales.

Si las letras $a, b\ y\ c$ representan a números reales ($a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}\ y\ c\in\mathbb{R}$)
Se cumple que:

$a+b\in\mathbb{R}$	*Cerradura para la suma*
$a+b=b+a$	*Conmutativa para la suma*
$a+(b+c)=(a+b)+c$	*Asociativa para la suma*
$a+0=a$	*Neutro para la suma*
$a+(-a)=a-a=0$	*reciproco para la suma*
$ab\in\mathbb{R}$	*Cerradura para el producto*
$ab=ba$	*Conmutativa para el producto*
$a(bc)=(ab)c$	*Asociativa para el producto*

$$a\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{a}{a}=1;\ con\ a\neq 0 \qquad Inverso\ para\ el\ producto$$

$$**\ a(b\pm c)=ab\pm ac \qquad Distributiva(\ factorizacion)$$

$**$ Esta propiedad es muy útil para entender correctamente la factorización, la cual es una herramienta básica para el Álgebra, entre otras ramas de las Matemáticas.

Potencias y Radicales

La primera unidad termina con el estudio de las potencias y radicales, especialmente con sus leyes o propiedades que serán trabajadas en el resto del curso.

Cuando se tiene un número real cualquiera x ($x\in\mathbb{R}$)
Se define la potencia n-esima de x como:

$$x^n=\underbrace{xxxxxx\cdots x}_{n\,veces}$$ a x se le llama base de la potencia y n exponente.

Ejemplos:
Leyes de los exponentes

1) $x^0=1 \quad con\ x\neq 0$ 2) $x^n x^m = x^{n+m}$

3) $\dfrac{x^n}{x^m}=x^{n-m}$ 4) ${x^n}^{\ m}=x^{nm}$

5) $xy^{\ n}=x^n y^n$ 6) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n=\dfrac{x^n}{y^n} \quad donde \quad y\neq 0$

7) $y^{-n}=\dfrac{1}{y^n} \quad donde \quad y\neq 0$

Definición de Radicación.

Se dice que y es la raíz n-esima del número x, si y solo si, $y^n=x$

$$\sqrt[n]{x}=y \Leftrightarrow y^n=x$$

Leyes de los radicales.

1) $\sqrt[n]{x^m}=\sqrt[n]{x}^{\ m}=x^{\frac{m}{n}}$ 2) $\sqrt[n]{x^n}=\sqrt[n]{x}^{\ n}=x$

3) $\sqrt[n]{xy}=\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}$ 4) $\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}=\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} \quad ; \quad y\neq 0$

UNIDAD II
VARIACIÓN DIRECTAMENTE PROPORCIONAL
Y FUNCIONES LINEALES

Los números reales $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathrm{I}$, permiten el desarrollo de los conceptos básicos de las matemáticas, en esta segunda unidad estudiaremos la variación directamente proporcional o simplemente variación directa y las funciones lineales como una ampliación de la primera. Para ello es necesario tener algunas nociones de **constante**, **variable**, **razón** y **proporción**, entre otras.

Constante: Aquello que no cambia, es decir, que asume un solo valor numérico.
Ejemplos:

Variable: Aquello que cambia, o bien, que asume diferentes valores numéricos.
Ejemplos:

Razón: Es la comparación de un par de números o variables a través de una división o cociente.

$$\frac{a}{b} \quad \frac{\leftarrow Numerador}{\leftarrow Deno\min ador} \quad \frac{Dividendo}{Divisor} \quad \frac{Antecedente}{Con\sec uente}$$

Ejemplos:

Proporción: Igualdad de dos o más razones (Fracciones equivalentes)
Ejemplos:

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\cdots=\frac{1.1}{2.2}=\frac{1.3}{2.6}=\cdots=0.5$$
$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{9}{12}=\frac{15}{20}=\frac{27}{36}=\frac{33}{44}=\cdots=0.75$$
$$\frac{2}{5}=\frac{4}{10}=\frac{6}{15}=\frac{8}{20}=\frac{10}{25}=\frac{18}{45}=\cdots=0.4$$

Propiedad fundamental de las proporciones
Para toda proporción se cumple lo siguiente:

$$\frac{x}{y}=\frac{z}{w} \quad \Leftrightarrow \quad xw=yz \quad con \quad y\neq 0\,;\, w\neq 0$$

Actividad 1: Obtén el valor del término que falta en cada proporción indicada.

$\frac{3}{4}=\frac{x}{20}$ $\qquad$ $\frac{1}{5}=\frac{x}{15}$ $\qquad$ $\frac{-8}{x}=\frac{-2}{7}$

$\frac{5}{2}=\frac{-45}{x}$ $\qquad$ $\frac{2}{3}=\frac{x}{4}$ $\qquad$ $\frac{x}{25}=\frac{4}{x}$

$\frac{1}{4}=\frac{x-1}{20}$ $\qquad$ $\frac{x+1}{2}=\frac{3}{2}$ $\qquad$ $\frac{x+2}{5}=\frac{x-2}{7}$

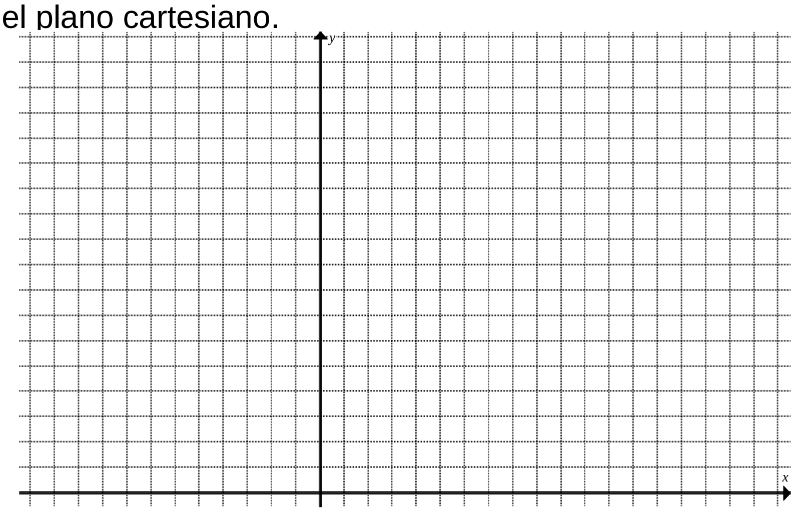
Variación directamente proporcional

Actividad 2:

Viajando en el metro: Luis usa con mucha frecuencia el transporte colectivo metro, como sabemos el precio de cada boleto es de dos pesos. Consideremos las siguientes variables
x : número de boletos que compra Luis.
y : Total a pagar por los boletos.

Completa la tabla escribiendo los valores correctos y dibuja las parejas (x, y), excepto la última, como puntos en el plano cartesiano.

x	y
1	
2	
3	
4	
5	
	12
7	
	18
n	



Ahora efectúa las divisiones tomando cada pareja de la tabla

$$\frac{y}{x} = - = - = - = - = - = \quad — \quad = \quad — \quad = \quad — \quad = \quad — \quad =$$

¿Qué observas?

¿Qué variable afecta a la otra?

Escribe alguna fórmula o expresión que relacione las dos variables que aparecen en la tabla.

Definición: Se dice una variable y es directamente proporcional a otra variable x , si existe una constante k , tal que

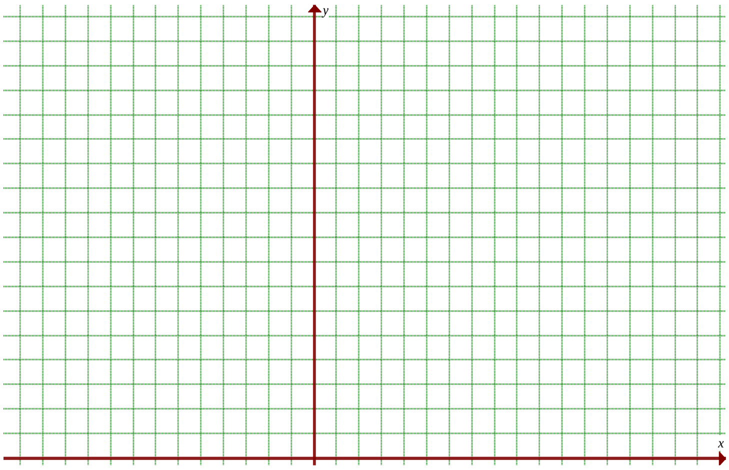
$$\frac{y}{x} = k \quad o\, bien \quad y = kx \quad \underline{\hspace{3cm}}(*)$$

Donde a x se le llama **variable independiente**, a y **variable dependiente**, a y a k **constante de proporcionalidad** y a $(*)$ la **ecuación de variación directa**.

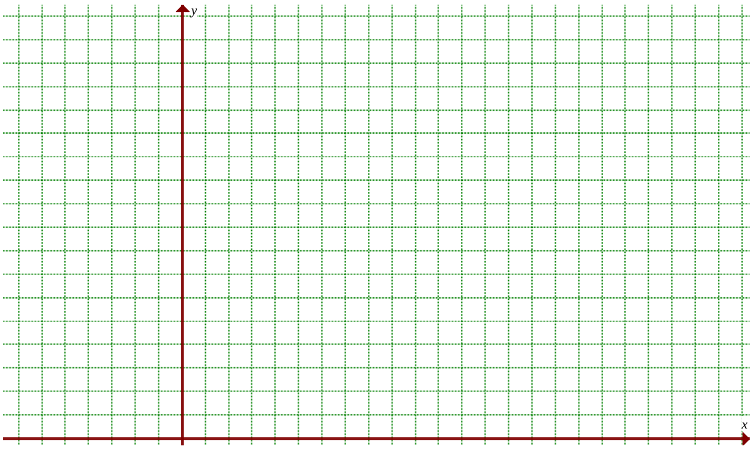
De modo que: $w = kz$; se lee “ w es directamente proporcional a z ”
$r = kt$; se lee “ r es directamente proporcional a t ”
$y = ax$; se lee “ y es directamente proporcional a x ”
$y = mx$; se lee “ y es directamente proporcional a x ”

Actividad 3: En cada tabla determina si la variable y es directamente proporcional a la variable x y en caso afirmativo, escriba el valor de la constante de proporcionalidad, la ecuación de variación y dibuja su gráfica.

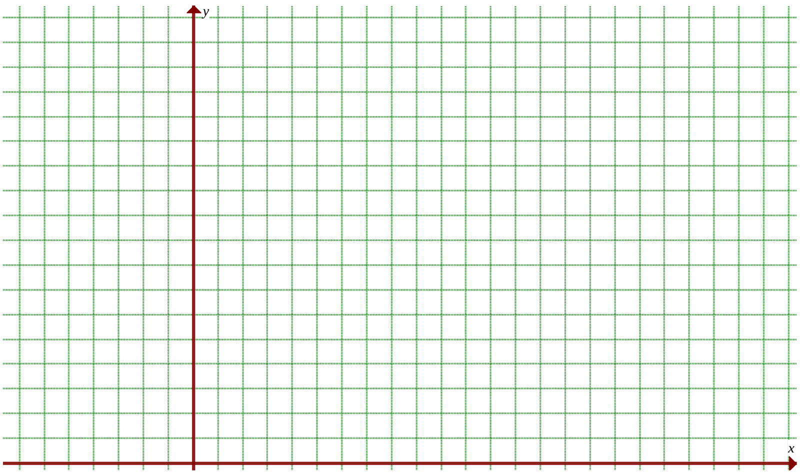
x	y
1	3
2	6
3	9
4	12
5	15



x	y
2	1
4	2
6	3
8	4
10	5
12	6
14	7



x	y
1	4
2	9
3	12
4	15
5	6

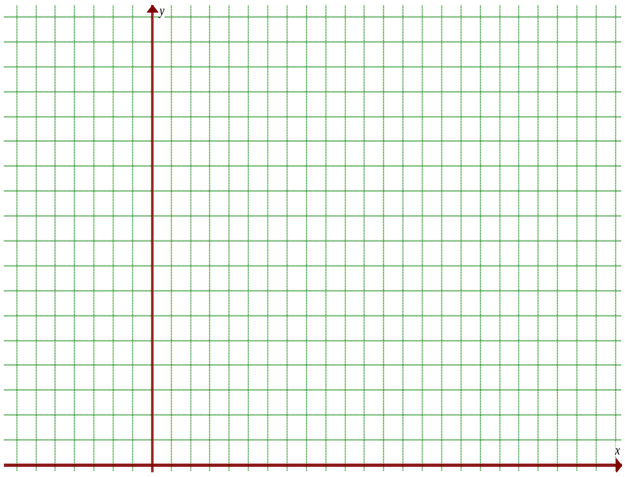


Funciones lineales

Problema de la Kermese: Juan asiste a una Kermese, la entrada cuesta 5 pesos y cada producto que se vende tiene el mismo precio, el cual es de 3 pesos. Completa la tabla y dibuja la grafica, tomando en cuenta que las variables son:

x : Número de productos que compra Juan en la Kermese.
y : Cantidad total de dinero que Juan gasta en la Kermese.

x	y
0	5
1	8
2	
3	
	17
5	
	23
7	
8	
	32
n	



Trata de escribir una **ecuación o fórmula** que resuma la información de la tabla.

¿Qué diferencias notas a este problema con respecto al problema de viajando en el metro?

Definición de función lineal

Definición: Una **función lineal con dos variables** $(x \quad e \quad y)$, es aquella relación entre ellas, de manera tal que su ecuación de variación esta dada por:

$$f(x) = y = kx + b$$
$$y = mx + b$$
$$y = ax + b$$

Donde a x se le llama **variable independiente**, y **variable dependiente**, (k, m, a) **pendiente** y a b **ordenada al origen**.

Ejemplos:

Algunas funciones lineales son:

1) $y = x$	2) $y = -x$	3) $y = x - 1$
4) $y = x + 1$	5) $y = 2x + 3$	6) $y = -2x + 1$
7) $y = -2x + 1$	8) $y = 3x + 5$	9) $y = -3x - 1$
10) $y = \frac{1}{4}x + 1$	11) $y = 0.5x + 3$	12) $y = \frac{2}{3}x + 1$
13) $y = \frac{4}{5}x + 3$	14) $y = \frac{-2}{5}x - 3$	15) $y = \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}$

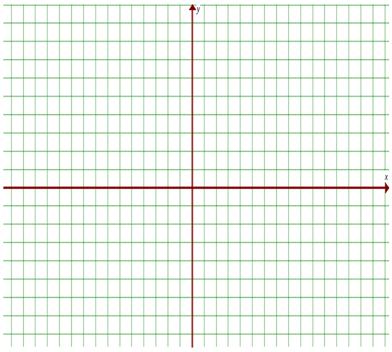
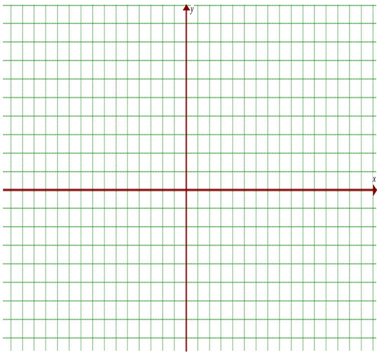
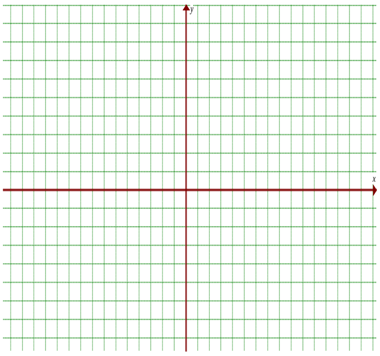
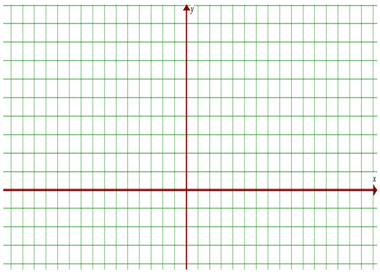
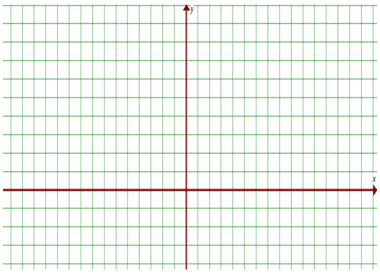
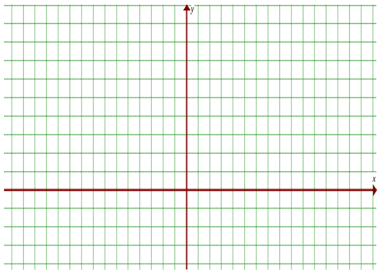
Elaboró: Alberto Carrillo Castrejón

Actividad 5: Para cada de las 15 funciones anteriores escribe el valor de la pendiente y el de la ordenada, respectivamente.

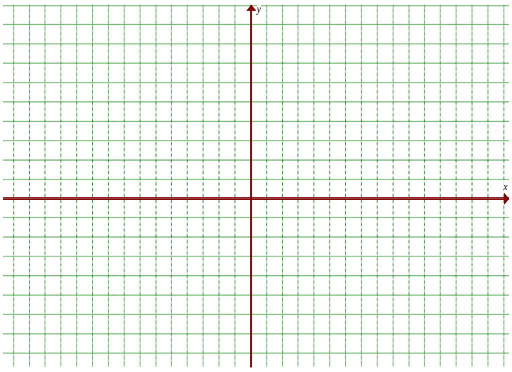
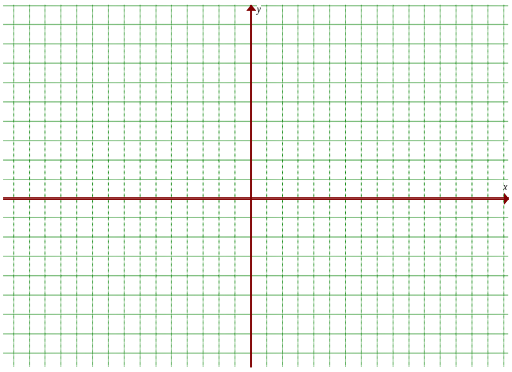
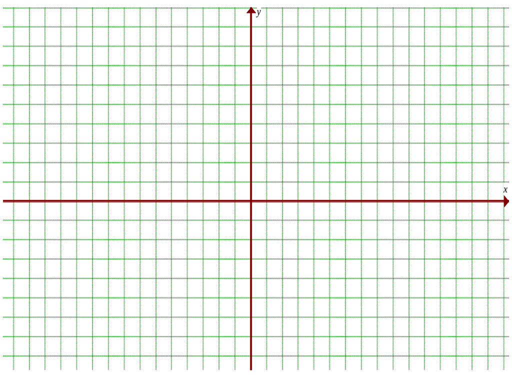
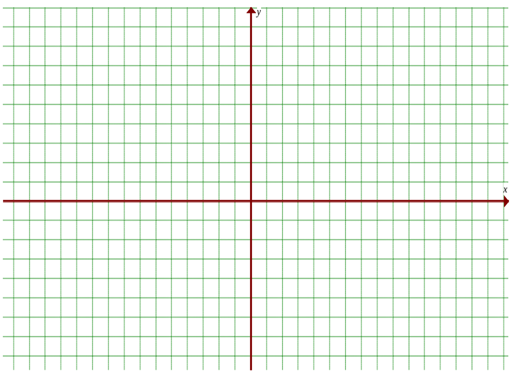
Graficando funciones lineales

Actividad 7: Por medio de **la tabulación** dibuja la gráfica de cada función lineal.

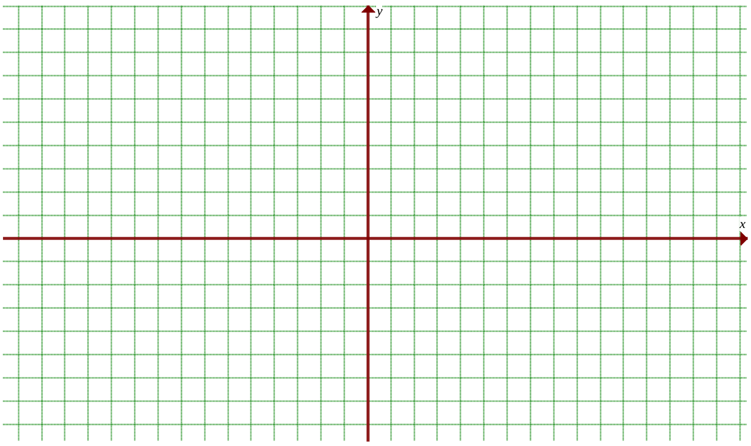
1) $y = x$ 2) $y = 2x$ 3) $y = 3x$ 4) $y = 4x$ 5) $y = \frac{1}{2}x$ 6) $y = \frac{1}{3}x$

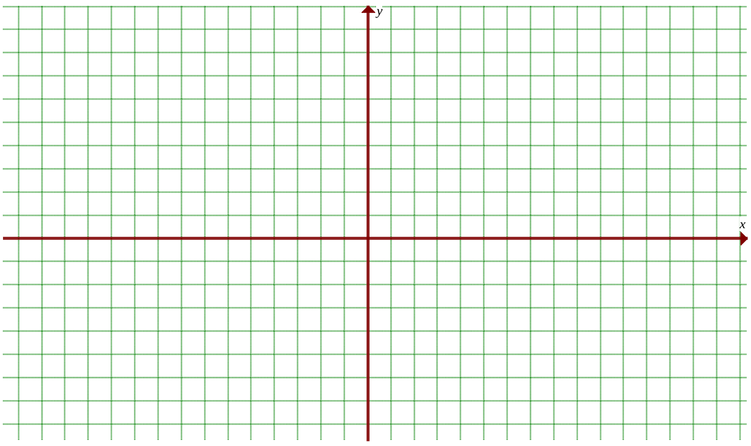







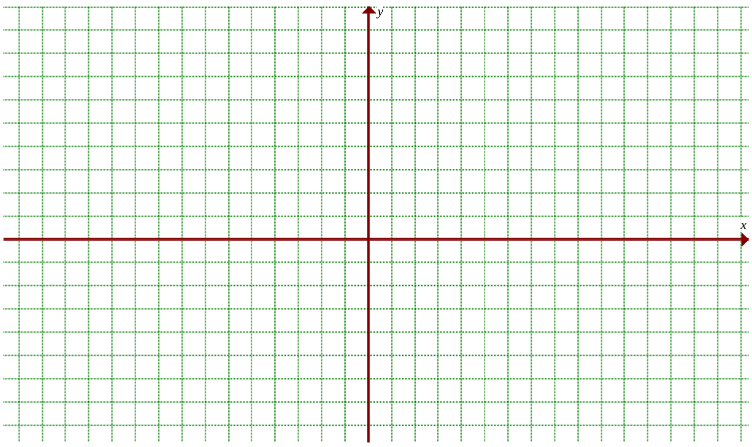
7) $y = x + 3$ 8) $y = x - 5$ 9) $y = 2x + 3$ 10) $y = -2x + 3$

11) $y=\frac{3}{2}x+5$ 12) $y=\frac{-2}{3}x+1$ 13) $y=\frac{-1}{2}x+\frac{3}{2}$

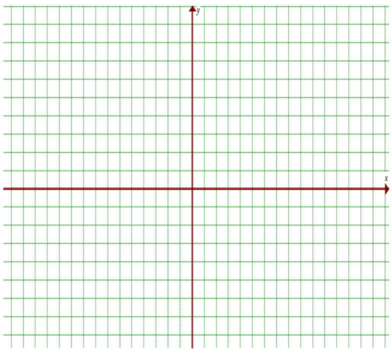
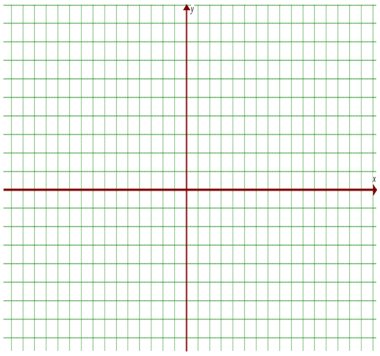
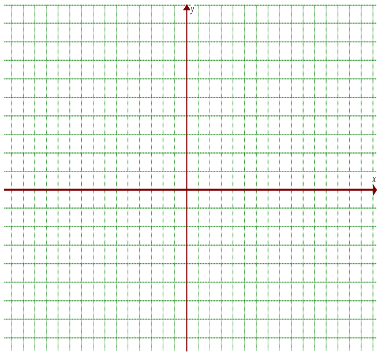
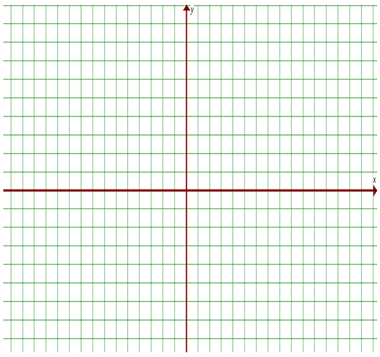
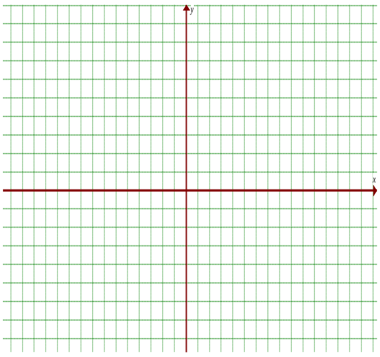
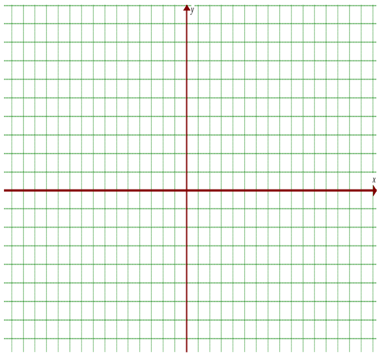






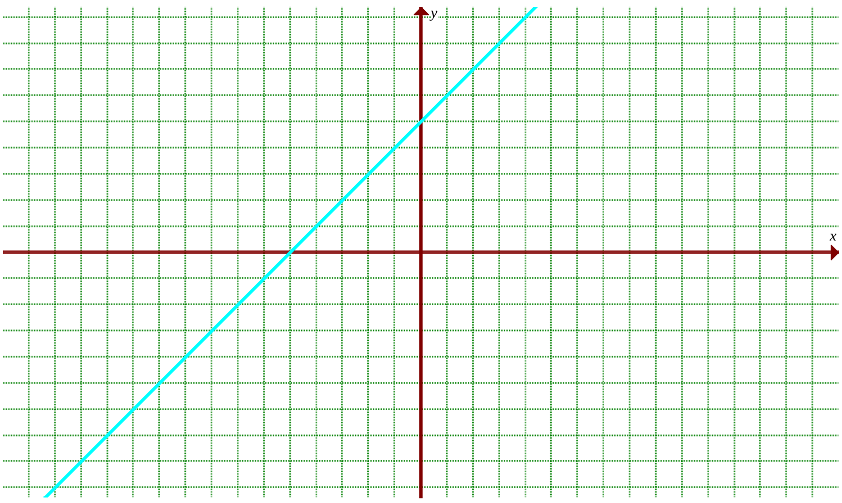
Actividad 8: Usando el valor de la pendiente y el valor de la ordenada al origen de cada función, graficar la funciones de la actividad 7.

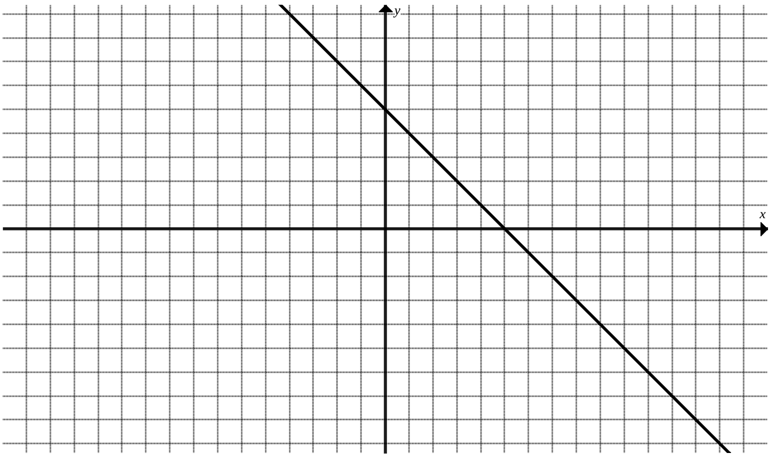
1) $y=x$ 2) $y=2x$ 3) $y=3x$ 4) $y=4x$ 5) $y=\frac{1}{2}x$ 6) $y=\frac{1}{3}x$

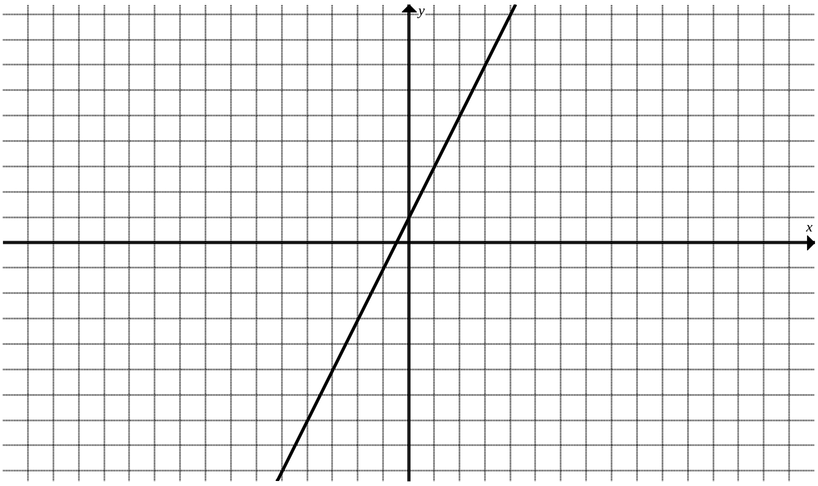







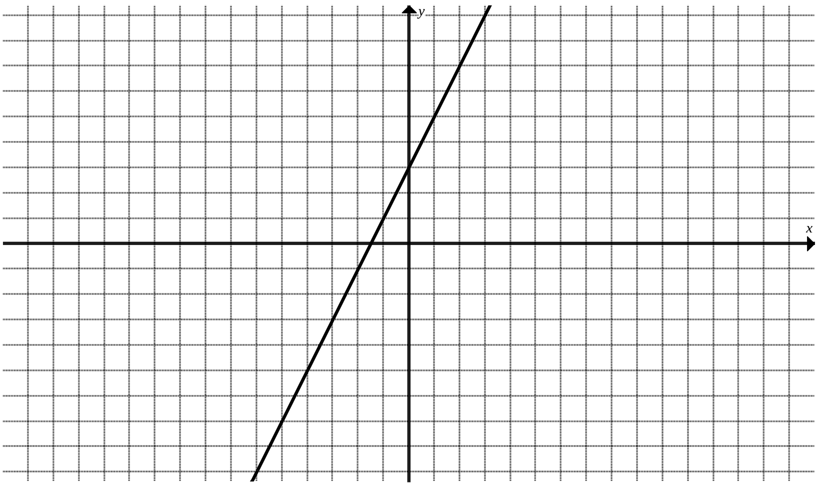
Obteniendo la ecuación de la función lineal a partir de su grafica.

Cuando se nos da información sobre dos puntos por donde pasa una **línea recta (función lineal de dos variables)** es posible obtener la ecuación de la misma, es decir, $y = mx + b$.
A continuación se presentan algunos ejemplos y ejercicios que ilustran lo anterior.
Actividad 9: A partir de la gráfica obtener la ecuación de la función lineal respectiva.









Analizando una función lineal.

Actividad 10: Para concluir con la unidad veremos algunos aspectos relevantes de las funciones lineales, para ello utilizaremos una función particular que nos ilustrara, las características más importantes de toda función lineal.

Consideremos la función lineal cuya ecuación es $y = -2x + 6$

Complete la tabla

x	y
-3	
-2	
	8
0	
1	
2	
4	
5	
	-8
	-10

Calcula la razón de las diferencias de los valores de la variable y con los valores de la variable x , es decir, razón de las diferencias

$$\frac{D_y}{D_x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{D_y}{D_x} = \underline{\qquad\qquad} =$$

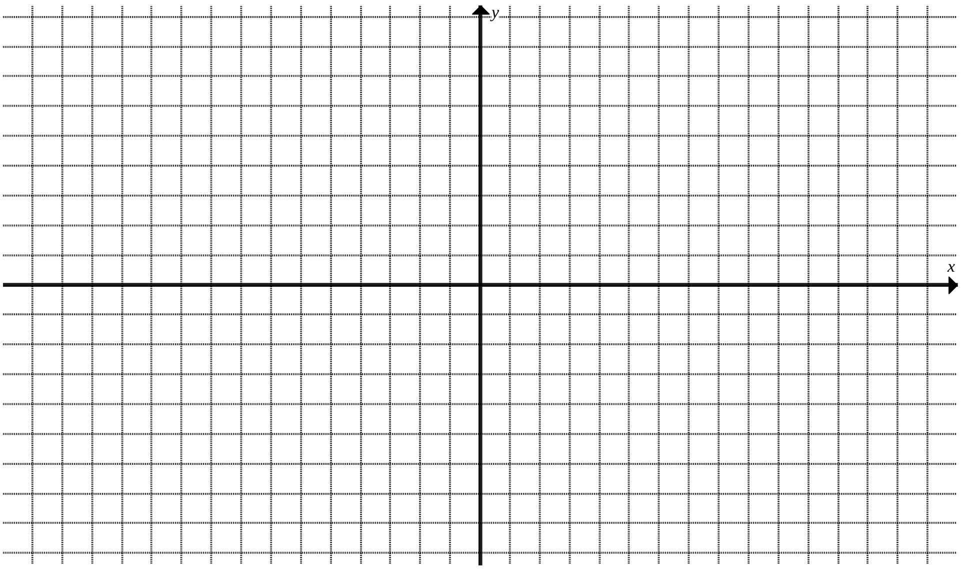
$$\frac{D_y}{D_x} = \underline{\qquad\qquad} =$$

$$\frac{D_y}{D_x} = \underline{\qquad\qquad} = \qquad \frac{D_y}{D_x} = \underline{\qquad\qquad} =$$

$$\frac{D_y}{D_x} = \underline{\qquad\qquad} = \qquad \frac{D_y}{D_x} = \underline{\qquad\qquad} =$$

¿Qué se observa con estas razones?

Dibuja la gráfica de la función $y = -2x + 6$, por cualquiera de los dos métodos que conoces.



¿Cuál es el valor de x en donde se corta la línea recta con el eje de las abscisas (eje horizontal o eje x)?

ECUACIONES LINEALES
(ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA)

Introducción
El Álgebra es una rama de las Matemáticas que estudia a los números reales o complejos a través de símbolos o letras que los representen, es decir, desarrolla un lenguaje propio para manipular cantidades numéricas principalmente. Las letras se conocen como literales y se usan para traducir expresiones verbales del lenguaje cotidiano, al lenguaje simbólico, por ello es conveniente recordar algunas de las palabras más usuales para representar a las cuatro operaciones básicas, tales como:

Adición: sumar, más, agregar, aumentar, más grande que, mayor que, por encima de, subir, etc.
$+$

Sustracción: restar, menos, quitar, disminuir, más pequeño que, menor que, por debajo de, bajar, etc.
$-$

Multiplicación: producto, por, doble, triple, cuádruplo, múltiplo, veces, etc.
$; \#\quad ; \# x$

División: cociente, entre, sobre, razón, mitad, tercio, cuarto, divisor, etc.
$\div \quad ; \frac{\quad}{\quad} ; \frac{\#}{\quad} ; \frac{x}{\#} ; \frac{\#}{x}$

Veamos algunos ejemplos y ejercicios de cómo pasar del lenguaje común al simbólico
.
Actividad 1: Escriba en forma simbólica (algebraica) cada enunciado verbal o viceversa.

Expresión verbal	Expresión simbólica
1) Un número cualquiera ______________________________	x
2) La edad de Luis ______________________________	L
3) La suma de dos números ______________________________	
4) La resta de dos números ______________________________	
5) El producto de tres números ______________________________	
6) La mitad de un número ______________________________	$\frac{x}{2}$
7) El doble de un número menos otro ______________________________	
8) La suma de tres números diferentes ______________________________	
9) El triple de la edad de Jaime ______________________________	$3j$
10) El cuadrado de un número ______________________________	
11) El cubo de un número ______________________________	

Elaboró: Alberto Carrillo castrejón

12) La tercera parte del peso de López ______________________________ $\frac{l}{3}$

13) La semisuma de dos números __________________________________ $\frac{x+y}{2}$

14) la semidiferencia de dos números ______________________________

15) La raíz cuadrada del cubo de un número _________________________

16) Al doble de un número le disminuimos en tres ____________________ $2x-3$

17) Al veinte le quitamos el triple de un número ______________________

18) La suma de las tres edades es igual a 110 años __________________

19) La suma de los cuadrados de dos números ______________________ x^2+y^2

20) El cuadrado de la suma de dos números _________________________

21) El perímetro de un triángulo es igual a la suma de sus lados ________

22) El área de un trapecio es igual a la mitad del producto de la suma de sus bases con su altura ____ $A=\frac{a+b\ \ h}{2}$

23) El volumen de una esfera es igual a cuatro tercios del producto del número π con el cubo del radio _________________________________ $V=\frac{4}{3}\pi r^3$

24) El cuadrado de la suma de dos números es igual a el cuadrado del primer número, más el doble producto de los dos números, más el cuadrado segundo número ______________________________________

25) Un número es igual a cinco veces la suma de otro con cuatro ______ $y=5\ \ x+4$

26) La edad de Pedro es cuatro veces la edad de Luis menos cinco años

27) La suma de dos números enteros consecutivos es igual a 81 _____ $n+\ \ n+1\ \ =81$

28) _____ $z=5x-4$

29) La suma de los cuadrados de dos números es 25 ________________ $x^2+y^2=25$

30) _____ $x+6\ ^2=81$

31) _____ $x+2y+3z=180°$

32) El doble de la suma de dos números es igual a 48 ________________ $2\ \ x+y\ \ =48$

33) _____ $\frac{x+y}{2}=57$

34) _____ $x-y=24$

35) _____ $x^2+3x-10=0$

Elaboró: Alberto Carrillo castrejón

¿Qué diferencia observas de los incisos 21 en adelante, con los anteriores (del 1 al 20)?

TERMINOLOGÍA Y NOTACIÓN

Es necesario además establecer algunas convenciones y definiciones para abordar de mejor manera la presente unidad.

Término o Monomio: Es algún número o un producto de números reales los cuales se pueden representar con símbolos o letras.

Ejemplos: Algunos términos son: $5, \sqrt{3}, -6, 3x, x, -12y, 2ab, -3xy^2, \frac{1}{2}x^3, x^2, etc.$

Binomio: La suma o resta de dos términos.

Ejemplos: Algunos binomios son: $x+y, \quad a-b, \quad 5x-2, \quad x+3, \quad x^2-y^2, etc.$

Trinomio: La suma o resta de tres términos.

Ejemplos: Algunos trinomios son:

$$x+y-z, \quad a-b+c, \quad a+b+c, \quad y+5x-2, \quad x^2+2xy+y^2, \quad x^2-10x+25, etc.$$

Polinomio: Suma o resta de dos o más términos.

Así algunos polinomios son: $x+1, \quad x^2+2x+7, \quad x^3-3x^2+3x-1, \quad etc.$

Términos semejantes: Son aquellos que tienen las mismas literales (letras) con sus respectivos mismos exponentes.

Por ejemplo:

$3x, \quad -5x, \quad 8x$ Son términos semejantes.

$x^2, \quad -2x^2, \quad \frac{1}{2}x^2, \quad 3x^2$ Son términos semejantes.

$3ab, \quad -5ab, \quad 8ab$ Son términos semejantes.

$8, \quad -5, \quad 9, \quad \pi, \quad \frac{3}{7}, \quad 1, \quad \sqrt{3}$ Son términos semejantes.

Sin embargo.

$3x, \quad -5x^3, \quad 8x^2$ No son términos semejantes.

$a, \quad b, \quad c, \quad d$ No son términos semejantes.

$2x, \quad 7, \quad -3y, \quad 7z$ No son términos semejantes.

$2ab, \quad 3ab^2, \quad a^2b$ No son términos semejantes.

La importancia de los términos semejantes, se debe al hecho de que son los únicos que se pueden sumar o restar. Mientras que los no semejantes no es posible sumarlos ni restaros.

Elaboró: Alberto Carrillo castrejón

SUMA O RESTA DE TÉRMINOS SEMEJANTES

Para ilustrarlo veamos algunos ejemplos.

Sumar o restar los términos semejantes

$$7x+3x=\ 7+3\ \ x=10x \qquad 7x-4x=\ 7-4\ \ x=3x$$

$$-7x-4x=-11x \qquad x+5x-2x-6x+5x=3x$$

$$ab+ab=2ab \qquad 5x^2+3x^2-2x^2=6x^2$$

$$a+2a+3a+4a+5a=15a \qquad 5b-5b=0$$

$$2ab-3ab+6ab-5ab=0 \qquad 7x^3+5x^3+2x^3-13x^3=x^3$$

Actividad 2: Realiza las sumas y restas respectivas en cada inciso.

$$4x+6x= \qquad 4x-6x= \qquad -4x-6x=$$

$$4x-x+3x= \qquad 5a-6a-12a= \qquad 3\ \ 2a-5a\ \ +6a=$$

$$2x^2+6x^2-3x+5x= \qquad -x^3-x^3= \qquad -2(x-4)5(3-x)$$

$$2ab+7ab+5ab= \qquad 5b^2+9b^2-2b^2= \qquad 2(x+3)3(x-2)8=$$

PRODUCTO DE POLINOMIOS

Para efectuar esta operación, los términos de un polinomio se deben multiplicar con todos los términos del otro polinomio y posteriormente se suman o restan los términos semejantes que resulten, para simplificar el polinomio final.

Ejemplos:

Realizar los productos indicados.

1) $3x\ \ 2x^2+3x-7\ \ =6x^3+9x^2-21x$

2) $a+b\ \ \ a-b\ \ =a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2$

3) $a+b\ \ \ a+b\ \ =a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$

4) $a-b\ \ \ a-b\ \ =a^2-ab-ab+b^2=a^2-2ab+b^2$

5) $x+3\ \ \ 2x-7\ \ =2x^2-7x+6x-21=2x^2-x-21$

6) $x+7\ \ \ x-5\ \ =x^2-5x+7x-35=x^2+2x-35$

7) $x+2\ \ \ x+3\ \ =x^2+3x+2x+6=x^2+5x+6$

8) $(x-7)(x+5)\ x^2+5x-7x-35=x^2-2x-35$

9) $x+4\ \ ^2=\ \ x+4\ \ \ x+4\ \ =x^2+4x+4x+16=x^2+8x+16$

10) $x-7\ \ ^2=\ \ x-7\ \ \ x-7\ \ =x^2-14x+49$

11) $2x+3\ \ \ 4x-1\ \ =8x^2-2x+12x-3=8x^2+10x-3$

12) $-3y+2 \quad 5y+4 \ = -15y^2 - 12y + 10y + 8 = -15y^2 - 2y + 8$

13) $2+x \quad 3x^2 - 5x + 4 \ = 6x^2 - 10x + 8 + 3x^3 - 5x^2 + 4x = 3x^3 + x^2 - 6x + 8$

Actividad 3: Realiza los productos respectivos y reduce términos semejantes.

1) $2x \ 3x^2 + 5x - 2 \ =$ 2) $5 \ x^3 - 4x^2 + 2x - 1 \ =$

3) $x+6 \quad x-2 \ =$ 4) $x-8 \quad x+3 \ =$

5) $x+5 \quad x+12 \ =$ 6) $2x+3 \quad 5x-1 \ =$

7) $-3x+5 \quad x+2 \ =$ 8) $3y+2 \quad 5y-2 \ =$

9) $x+3 \quad x-3 \ =$ 10) $5x+4 \quad 5x-4 \ =$

11) $(n-m)(n-m)(n-m)$

ECUACIÓN LINEAL CON UNA INCOGNITA

Cuando se tiene la función lineal $y=-3x+36$, podemos estar interesados en obtener el valor de la variable independiente x, de manera que la línea recta se corte con el eje horizontal (eje x).
Para lograrlo debemos igualar con cero a la variable dependiente y, al hacerlo se produce una ecuación lineal con una incógnita, a saber

$$0=-3x+36$$
o bien
$$-3x+36=0$$

Al resolverse llegamos a que $x=12$

En efecto

$0=-3x+36$	
$0-36=-3x+36-36$	restamos 36 a ambos miembros de la igualdad
$-36=-3x+0$	propiedad del reciproco para suma
$-36=-3x$	propiedad del nuetro para la suma
$\frac{-36}{-3}=\frac{-3x}{-3}$	dividimos por -3
$12=x \quad x$	propiedad del inverso para el producto

En forma práctica.

$$0=-3x+36$$
$$-36=-3x$$
$$\frac{-36}{-3}=x$$
$$12=x$$

Elaboró: Alberto Carrillo castrejón

Por lo tanto, la **solución de la ecuación** es $x=12$, la cual es la ecuación es su forma más simple posible, por ello a veces se suele llamar la **raíz de la ecuación**.

Definición de ecuación lineal con una incógnita.

Se dice que una ecuación es lineal con una incógnita o bien que es de primer grado con una incógnita, si se puede escribir o reducir al siguiente forma:

$$mx+b=0 \quad o\,bien \quad ax+b=0$$

Donde x ***se conoce como incógnita de la ecuación, mientras que*** $m, a\ y\ b$ ***son constantes (números reales).***

Ejemplos: Algunas ecuaciones lineales con una incógnita son:

1) $5x-12=0$	2) $-2x+21=5$	3) $2(x+3)=3x$
4) $\frac{3y}{2}=15$	5) $\frac{x-13}{4}=\frac{x-2}{5}$	6) $2(1-3x)=-3(5x+6)$
7) $\frac{-2x}{5}+3=\frac{x}{2}+3$	8) $(w-7)^2=(w-3)^2$	9) $(x+3)(x-2)=x^2+12$
10) $\frac{2z-1}{4z+1}=\frac{3z-2}{6z+5}$	11) $\frac{2x+2}{3}+\frac{x-4}{5}=1$	12) $\frac{x+3}{2}=7-\frac{x+7}{4}$

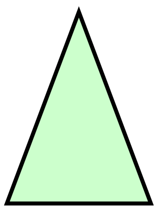
PROBLEMAS QUE CONDUCEN A ECUACIONES LINEALES

Actividad 4: Plantea los siguientes problemas solamente (no resuelvas la ecuación)

1.- El perímetro de un triángulo isósceles es igual a 122 centímetros y se sabe que cada uno de los lados iguales es 7 centímetros mayor que el lado desigual. Encuentre las medidas de los lados del triángulo.

Planteamiento:

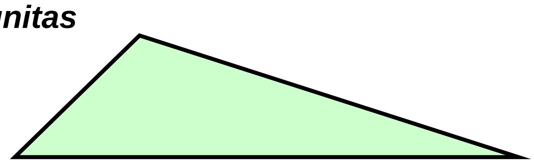
Incógnitas



2.- En un triángulo escaleno el segundo lado mide 6 unidades menos que el doble del primer lado y el tercer lado mide 3 veces el segundo. Obtener las medidas de los lados si sabemos que el perímetro es de 236 cm.

Planteamiento:

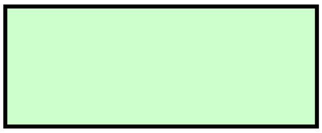
Incógnitas



3.- El largo de un terreno de forma rectangular mide el doble de su ancho más 3 metros. Si el perímetro mide 5010 metros. Determine las dimensiones del terreno.

Planteamiento:

Incógnitas



4.- Obtener tres números enteros consecutivos cuya suma aumentada en el doble del primero sea igual a 5008.

Planteamiento:

Incógnitas
Primer número:
Segundo número:
Tercer número:

5.- Encontrar tres números enteros pares consecutivos cuya suma sea 228.

Planteamiento:

Incógnitas
Primer número par:
Segundo número par:
Tercer número par:

6.- Hallar tres números enteros impares consecutivos tales que tres medios de la suma del primero y el segundo sea igual al tercero más nueve.

Planteamiento:

Incógnitas
Primer número par:
Segundo número par:
Tercer número par:

7.- La edad de Enrique es la mitad de la edad de Pedro, la edad de Juan es el triple de la de Enrique y la de Luis el doble de la de Juan. Si las cuatro edades suman en total 132 años. Obtenga la edad de cada uno.

Planteamiento:

Incógnitas
La edad de Enrique:
La edad de Pedro:
La edad de Juan:
La edad de Luis:

8.- María tiene \$1000 más que Beatriz. Si Beatriz gastará \$8000, tendría \$4000 menos que los $\frac{4}{5}$ de lo que tiene María. ¿Cuánto tiene cada una?

Planteamiento:

Incógnitas
Lo que tiene María:
Lo que tiene Beatriz:

9.- ¿Qué cantidad de agua debe agregarse a 40 litros de una solución que tiene 15% de alcohol si se quiere reducir su concentración al 12%.?

Planteamiento:

Incógnita
Cantidad de litros de agua que debe agregarse:

10.- ¿Cuántos litros de agua deben evaporarse de una solución salina del 6% de concentración de sal, para aumentar su concentración al 10%?

Planteamiento:

Incógnita
Cantidad de litros que deben evaporarse de agua:

11.- La edad de Hugo es de 10 años y la de Paco de 25 años, ¿Cuántos años deben transcurrir para que la edad de paco sea el doble de la Hugo?

Planteamiento:

Incógnita
Años que deben transcurrir:

12.- En 100litros de una solución se tiene el 60% de acido, ¿Cuántos litros de acido puro se deben agregar para que la solución de acido sea del 75%?

Planteamiento:

Incógnita
Cantidad de acido que debe agregarse:

13.-La edad del hijo es 5 años más que el doble del nieto y la edad del abuelo es el triple de la del hijo. Si la suma de las tres edades es de 120 años ¿Cuál es la edad de cada uno?

Planteamiento:

Incógnitas
La edad del nieto:
La edad del hijo:
La edad del abuelo:

(*)14.-Una persona es muy creyente en los milagros de modo que se dirige a un templo a pedir el siguiente milagro: *que se le duplique la cantidad de dinero que lleva y a cambio dejará $1000 de limosna.* El milagro se le concede, deja su limosna y emocionada se dirige a un segundo templo a pedir lo mismo, se le concede y deja su limosna, así se dirige a un tercer templo pide lo mismo, se le concede, deja su limosna y al salir se da cuenta que ya no tiene dinero. ¿Con cuánto dinero llegó al primer templo?

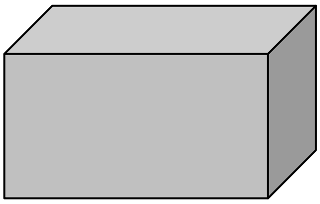
Planteamiento:

Incógnita
Cantidad de dinero con que llegó al primer templo:

15.- Para llenar una cisterna una bomba se tarda 3 horas, mientras que otra bomba se tarda en llenarla 4 horas ¿cuanto tardaran las dos bombas trabajando juntas en llenar la alberca?

Incógnita
Tiempo en llenarse la cisterna con las dos bombas trabajando juntas

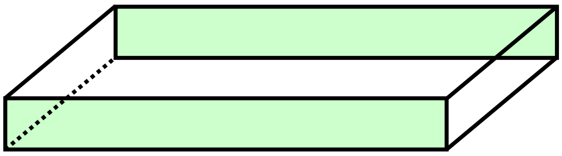
Planteamiento:



16.- Una llave tarda en llenar una alberca 4 horas, una segunda llave se tarda 8 horas en llenarla y una tercera llave se tarda 6 horas en vaciarla. Si la alberca se encuentra vacía y se abren las tres llaves ¿en cuánto tiempo se llenará?

Incógnita
Tiempo en llenarse la alberca con las tres llaves trabajando juntas

Planteamiento:



17.- **Adivinando un número que pensaste.**

Piensa un número ______________________

Súmale el número que pensaste __________

Réstale 4 a lo llevas ____________________

Ahora divídele por 2 ____________________

Súmale 10 ____________________________

¿Qué número te quedó? _________________

RESOLVIENDO ECUACIONES LINEALES CON UNA INCÓGNITA

Para resolver ecuaciones se cuenta con algunas propiedades, mediante ellas llegamos a la forma más simple de estas.

Propiedades de las ecuaciones

1) $x = y \quad \Leftrightarrow \quad x \pm z = y \pm z \qquad z \in \mathbb{R}$

2) $x = y \quad \Leftrightarrow \quad xz = yz \qquad z \in \mathbb{R}\ ;\ z \neq 0$

$$\frac{x}{z} = \frac{y}{z}$$

3) $x = y \quad \Leftrightarrow \quad x^n = y^n$

Verbalmente las tres propiedades se pueden leer de la siguiente manera:

1) A una ecuación le podemos sumar o restar cualquier cantidad, siempre y cuando se lo hagamos a los dos miembros de la ecuación.

2) A una ecuación le podemos multiplicar o dividir por cualquier cantidad diferente de cero, siempre y cuando se lo hagamos a los dos miembros de la ecuación.

3) A una ecuación le podemos elevar a una potencia n-esima siempre y cuando se lo hagamos a los dos miembros de la ecuación.

O bien en forma práctica

Propiedades de las ecuaciones

1) $x \pm z = y \quad \Leftrightarrow \quad x = y \mp z$

2) $xz = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{y}{z} \quad ; \quad z \neq 0$

$\dfrac{x}{z} = y \quad \Leftrightarrow \quad x = yz \quad ; \quad z \neq 0$

3) $x = y \quad \Leftrightarrow \quad x^n = y^n$

$$\sqrt{x} = \sqrt{y}$$

Verbalmente las tres propiedades se pueden leer de la siguiente manera:

1) En una ecuación un término que está sumando en un miembro, pasa restando al otro miembro y viceversa.

2) En una ecuación un término que está multiplicando <u>a todo</u> el miembro, pasa dividiendo <u>a todo</u> el otro miembro y viceversa.

3) En una ecuación podemos sacar una raíz de cualquier grado a los miembros o elevar a la potencia adecuada.

Actividad 5: Resolver cada una de las siguientes ecuaciones usando las propiedades y efectuar su comprobación.

1) $2x+10=0$ *comprobacion*

$$2x=-10 \qquad 2(-5)+10=0$$

$$x=\frac{-10}{2} \qquad -10+10=0$$

$$x=-5 \qquad 0\equiv 0$$

2) $-2x+4=10$ 3) $2(x+3)=-x+3$ 4) $-2\ \ 4x+5\ \ =-7\ \ 3+x\ \ +12$

5) $3x-2(x+4)=5(2x+11)-1$ *comprobacion*

$$3x-2x-8=10x+55-1 \qquad 3\left(\frac{-62}{9}\right)-2\left(\frac{-62}{9}+4\right)=5\left(2\left(\frac{-62}{9}\right)+11\right)-1$$

$$3x-2x-10x=54+8 \qquad \frac{-186}{9}-2\left(\frac{-62+36}{9}\right)=5\left(\frac{-124}{9}+11\right)-1$$

$$-9x=62 \qquad \frac{-186}{9}-2\left(\frac{-26}{9}\right)=5\left(\frac{-124+99}{9}\right)-1$$

$$x=\frac{62}{-9}=\frac{-62}{9} \qquad \frac{-186}{9}+\frac{52}{9}=5\left(\frac{-25}{9}\right)-1$$

$$\frac{-134}{9}=\frac{-125}{9}-1$$

$$\frac{-134}{9}=\frac{-125-9}{9}=\frac{-134}{9}$$

6) $\frac{x}{2}-5=\frac{x}{3}-3$ 7) $\frac{2x+6}{2}=\frac{7x-3}{4}$

8) $\frac{2x+1}{3}+\frac{2x-1}{2}=2$ *comprobacion*

$$\frac{2(2x+1)+3(2x-1)}{6}=2 \qquad \frac{2\left(\frac{13}{10}\right)+1}{3}+\frac{2\left(\frac{13}{10}\right)-1}{2}=2$$

$$4x+2+6x-3=12$$

$$10x=12-2+3 \qquad \frac{\frac{26}{10}+1}{3}+\frac{\frac{26}{10}-1}{2}=2$$

$$x=\frac{13}{10} \qquad \frac{\frac{36}{10}}{3}+\frac{\frac{16}{10}}{2}=2$$

$$\frac{36}{30}+\frac{16}{20}=2$$

$$\frac{72+48}{60}=2$$

$$\frac{120}{60}=2$$

9) $2\ \ 2\ \ 2x-1000\ \ -1000\ \ -1000=0$ 10) $x-3\ ^{2}+5=\ x+2\ ^{2}-2$

11) $\dfrac{x+1}{x-3}=\dfrac{x+2}{x+3}$ *comprobacion*

$$x+1\quad x+3\ =\ x+2\quad x-3$$
$$x^2+4x+3=x^2-x-6$$
$$x^2-x^2+4x+x=-6-3$$
$$5x=-9$$
$$x=\frac{-9}{5}$$

12) $\dfrac{2x-1}{3}+x=3x-15$

Resolución de los problemas “prácticos” con ecuaciones lineales.

Actividad 7: Resuelve los 17 problemas planteados en la actividad 4.

1.- Problema del triángulo isósceles.

2.- Problema del triángulo escaleno.

3.- Problema del terreno rectangular.

4.- Problema de números enteros consecutivos.

5.- Problema de números enteros pares consecutivos.

6.- Problema de números enteros pares consecutivos.

7.- Problema de las edades de Enrique, Pedro, Juan y Luis.

8.-Problema de María y Beatriz.

9.- Problema de concentración de alcohol.

10.- Problema de la sal.

11.- Problema de la edad de Hugo y Paco.

12.- Problema del acido.

13.- Problema de las edades del nieto, del hijo y el abuelo.

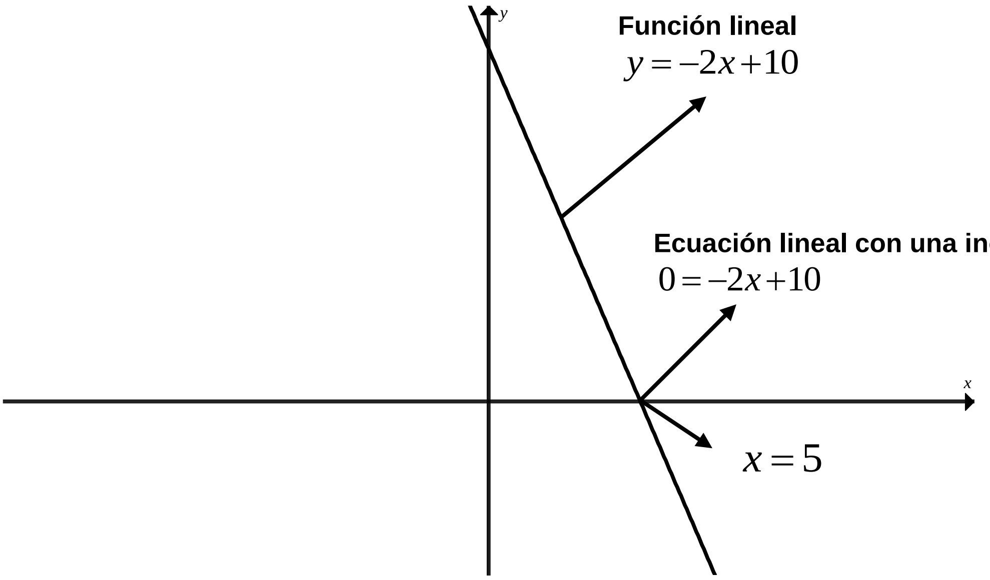
14.- Problema del milagro.

15.- Problema de la cisterna.

16.- Problema de la alberca.

17.- Adivinando el número que pensaste.

Actividad 8: Para finalizar la unidad escribe un resumen de los aspectos y conceptos que tú consideras más importantes de las **ecuaciones lineales con una incógnita.**



Examen de la unidad III ***(Ecuaciones lineales con una incógnita)***

Plantea y resuelve el siguiente problema

El problema de Diofanto.

Diofanto de Alejandría, Matemático griego que vivió a finales del siglo III d.c., es conocido como el padre del Algebra. Diofanto fue el primero en utilizar un símbolo literal para representar una incógnita en una ecuación. Sus trabajos sobre resolución de ecuaciones fueron especialmente importantes. En la lápida de la tumba de Diofanto aparece la siguiente inscripción: ***¡Caminante! Aquí fueron sepultados los restos de Diofanto. Y los números pueden mostrar, ¡Oh, milagro!, cuán larga fue su vida, cuya sexta parte constituyo su hermosa infancia, había trascurrido además una duodécima parte de su vida, cuando de vello cubrióse su barbilla. Y la séptima parte de su existencia trascurrió en un matrimonio estéril. Pero un quinquenio más y le hizo dichoso el nacimiento de su primogénito, que entrego su cuerpo, su bella existencia, a la tierra, que duró tan solo la mitad de la de su padre. Y con profunda pena descendió a la sepultura habiendo sobrevivido 4 años al deceso de su hijo.***
¿Cuántos años vivió Diofanto?

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Introducción: Cuando se tiene un *“grupo”, “colección” o “conjunto” de ecuaciones,* comúnmente se le llama **sistema de ecuaciones**. Existen dos tipos de sistemas de ecuaciones en el Álgebra elemental, son los **lineales** por un lado y los **no lineales** por el otro. En esta unidad iniciaremos con el estudio de **los sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas** (2x2) y eventualmente **sistemas lineales de tres ecuaciones con tres incógnitas** (3x3).

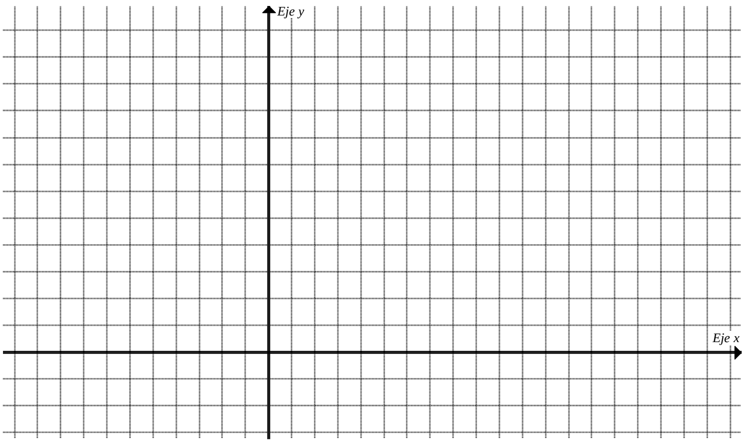
El principal objetivo de la unidad, es que al término de la misma, el alumno sea capaz de plantear y resolver problemas a través de sistemas 2x2 o 3x3, además de interpretar las tres posibles situaciones en las que cae un sistema lineal **(solución única ó ninguna solución ó infinidad de soluciones)**.

Estudiaremos la **interpretación gráfica** de los sistemas lineales 2x2, la relación con sus **coeficientes numéricos**, los diferentes **métodos** que permiten resolver sistemas lineales 2x2 (método **gráfico**, métodos algebraicos de **sustitución**, de **suma y resta**, de **igualación** y método de **los determinantes (regla de Cramer)**.
También el **planteamiento y resolución** de problemas “prácticos” por medio de sistemas lineales 2x2 y 3x3.

GRAFICANDO DOS FUNCIONES LINEALES

Actividad 1:

1.- Se tienen las siguientes funciones lineales, a saber, $y=-2x+8$ y $y=x-1$. Dibuje las graficas de ambas funciones **usando la pendiente y la ordenada**, en el plano cartesiano y trate de obtener las coordenadas del **punto donde se cortan estas líneas rectas**.



¿Cuáles son las coordenadas del punto donde se cortan las dos líneas rectas?

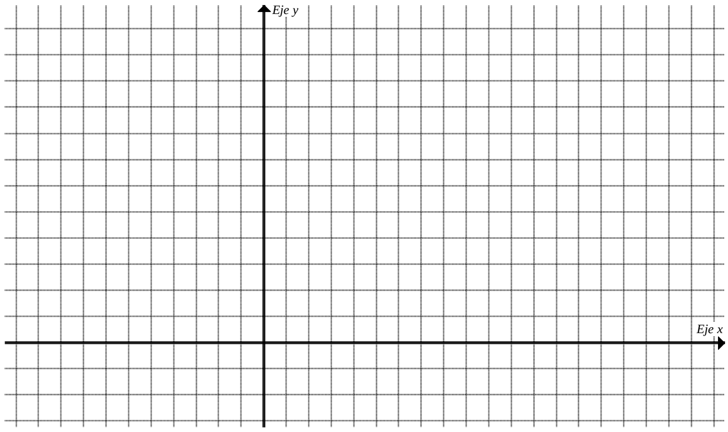
Observa que las dos funciones lineales se pueden escribir en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} y &= -2x + 8 \quad \Rightarrow \quad 2x + y = 8 \\ y &= x - 1 \quad \Rightarrow \quad -x + y = -1 \end{aligned}$$

El cual es un **sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas lineal** y **su solución es el punto de intersección o de corte, de las dos líneas rectas**, es decir, $x=$ y $y=$

Por lo que, la solución del sistema $\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 8 \\ -x & + & y & = & -1 \end{array}$ es **única** $x=$ y $y=$

2.- Ahora grafica las funciones lineales $y=x+4$ y $y=x-1$, usando **la pendiente y la ordenada.**



¿Cómo son estas líneas rectas?
¿Cuál es su solución?

De modo que el sistema de ecuaciones siguiente:

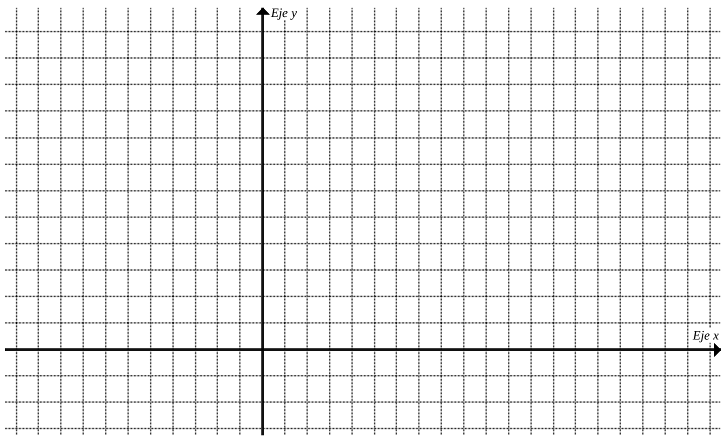
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} y & = & x & + & 4 & \Rightarrow & -x & + & y & = & 4 \\ y & = & x & - & 1 & \Rightarrow & -x & + & y & = & -1 \end{array}$$

No tiene solución, ya que las líneas rectas son____________________ y nunca se cortan.

3.- Por último dibuja las graficas de las funciones lineales

$\begin{array}{rcrcr} -3x & + & 3y & = & -3 \\ -x & + & y & = & -1 \end{array}$ despeja a la variable y de cada ecuación para tener $\begin{array}{l} y= \\ y= \end{array}$

Ahora usa la **pendiente y la ordenada** para graficar cada función.



¿Cómo son estas líneas rectas?

Elaboró: Alberto Carrillo Castrejón

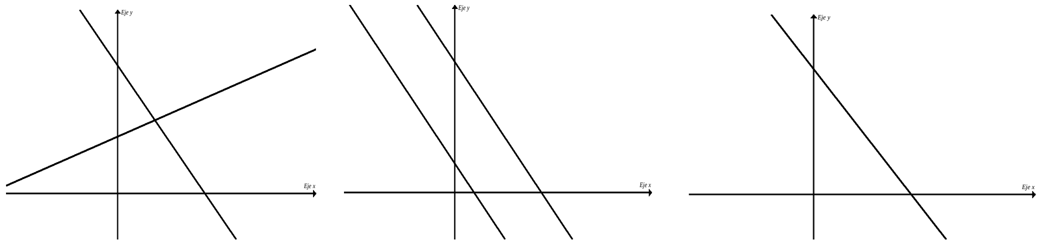
¿Cuál es su solución?

En este caso se dice que el sistema de ecuaciones tiene _________________ de soluciones, por que las dos líneas rectas son _______________.

En conclusión:

Todo sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas lineal, cumple una (solo una) de las siguientes situaciones:

i) Tiene solución única ii) No tiene solución. iii) Tiene infinidad de soluciones



DEFINICIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEAL 2X2

Definición: Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, se dice lineal*, si se puede escribir o simplificar a la forma:*

$$\begin{array}{rcrcr} ax & + & by & = & c \\ dx & + & ey & = & f \end{array}$$

Donde las letras $a, b, c, d, e \text{ y } f$ *representan* ***números reales****, mientras que* $x \;\; ; \;\; y$ *son llamadas las* ***incógnita****s del sistema 2x2*

Las letras $a \text{ y } d$ se llaman los **coeficientes numéricos de la incógnita** x, mientras que las letras $b \text{ y } e$ se llaman los **coeficientes numéricos de la incógnita** y. Por otro lado las letras $c \text{ y } f$ se llaman los **coeficientes numéricos independientes**.

El resolver un sistema como el anterior, significa que debemos encontrar los valores de las incógnitas de manera que **satisfagan** ambas ecuaciones simultáneamente, de ahí que también se le llame a los sistemas de ecuaciones 2x2, **ecuaciones simultáneas**.

Ejemplos de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas lineales.

Algunos sistemas de ecuaciones 2x2 son:

1) $\begin{array}{rcrcr} -2x & + & 3y & = & 4 \\ 4x & - & 2y & = & 0 \end{array}$ 2) $\begin{array}{rcrcr} 5x & + & 3y & = & 4 \\ 4x & + & 2y & = & 2 \end{array}$ 3) $\begin{array}{rcrcr} x & - & 3y & = & -7 \\ 4x & - & 2y & = & 12 \end{array}$

4) $\begin{array}{rcrcr} 3m & - & 3n & = & 12 \\ 4m & + & 2n & = & 4 \end{array}$ 5) $\begin{array}{rcrcr} -2p & - & 3q & = & -26 \\ 5p & - & 2q & = & 21 \end{array}$ 6) $\begin{array}{rcrcr} 7w & - & 2z & = & 1 \\ -4w & + & 2z & = & 2 \end{array}$

7) $\begin{array}{l} 2x+20=-y+15 \\ 2\ \ -x+3\ \ =2y-24 \end{array}$ 8) $\begin{array}{l} 2x+25=3\ \ -y+15 \\ 2\ \ -x+3\ \ =2y+24 \end{array}$ 9) $\begin{array}{l} 6x+2y-1=-4x+y-20 \\ -2x+4y-6=2x+3y-17 \end{array}$

10) $\begin{array}{l} \dfrac{2x+3}{3}=\dfrac{-y+5}{2} \\ \dfrac{-2y+7}{3}=x+21 \end{array}$

Antes de ver los diferentes métodos para resolver sistemas, es conveniente mostrar algunos ejemplos de sistemas de ecuaciones 2x2 y como por mera observación de los coeficientes a, b, c, d, e y f, podemos saber si el sistema tiene **solución única, ninguna solución ó infinidad de soluciones.**

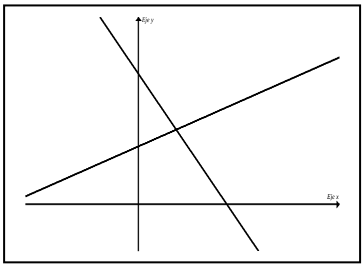
¿CÓMO SABER CUANDO UN SISTEMA 2X2 TIENE SOLUCIÓN ÚNICA, NINGUNA SOLUCIÓN Ó INFINIDAD DE SOLUCIONES?

Revisemos y recordemos los tres sistemas de ecuaciones que se presentaron en la actividad 1.

1.- Las dos líneas rectas se cortan en un solo punto.

$\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 8 \\ -x & + & y & = & -1 \end{array}$ El cual tiene **solución única**. Ahora observemos los coeficientes del sistema, formando divisiones (razones) con los coeficientes de la misma incógnita y los coeficientes independientes.

$$\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 8 \\ -x & + & y & = & -1 \end{array} \Rightarrow \boxed{\frac{2}{-1} \neq \frac{1}{1}}$$

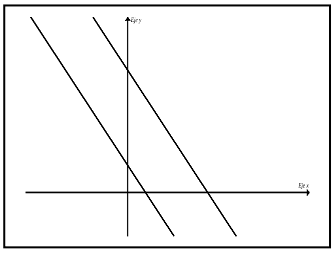


El sistema tiene **solución única.**

2.- Las líneas rectas son paralelas.

$\begin{array}{rcrcr} -x & + & y & = & 4 \\ -x & + & y & = & -1 \end{array}$ El cual **no tiene solución**. Al comparar las divisiones de los coeficientes se observa lo siguiente:

$$\begin{array}{rcrcr} -x & + & y & = & 4 \\ -x & + & y & = & -1 \end{array} \Rightarrow \boxed{\frac{-1}{-1} = \frac{1}{1} \neq \frac{4}{-1}}$$



El sistema **no tiene solución.**

Elaboró: Alberto Carrillo Castrejón

3.- Las dos líneas rectas son la misma.

$$\begin{aligned} -3x &+ 3y &= -3 \\ -x &+ y &= -1 \end{aligned}$$

El cual tiene **infinidad de soluciones.**

$$\begin{aligned} -3x &+ 3y &= -3 \\ -x &+ y &= -1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{-3}{-1} = \frac{3}{1} = \frac{-3}{-1}}$$

El sistema tiene **infinidad de soluciones.**

De modo general podemos escribir el siguiente diagrama que resume **las tres posibles opciones** de acuerdo a las razones de los coeficientes numéricos de las incógnitas e independientes.

$$\boxed{\begin{aligned} ax &+ by &= c \\ dx &+ ey &= f \end{aligned}}$$

$\Rightarrow \boxed{\dfrac{a}{d} \neq \dfrac{b}{e}} \Rightarrow$ *Solucion unica*

$\Rightarrow \boxed{\dfrac{a}{d} = \dfrac{b}{e} \neq \dfrac{c}{f}} \Rightarrow$ *Ninguna solucion*

$\Rightarrow \boxed{\dfrac{a}{d} = \dfrac{b}{e} = \dfrac{c}{f}} \Rightarrow$ *Infinidad de soluciones*

Bajo la condición de que d, e y f sean diferentes del cero.

Actividad 2:

Por observación de las razones con los coeficientes numéricos de las incógnitas e independientes para cada sistema lineal, decida si tiene **solución única, ninguna solución ó infinidad de soluciones**.

(Justifique su respuesta)

1) $\begin{aligned} -2x &+ 3y &= 4 \\ 4x &- 2y &= 0 \end{aligned}$

2) $\begin{aligned} 2x &+ 3y &= 1 \\ 4x &+ 6y &= 2 \end{aligned}$

3) $\begin{aligned} x &- 2y &= -7 \\ 4x &- 8y &= 12 \end{aligned}$

4) $\begin{aligned} -3m &+ 6n &= 12 \\ 4m &- 8n &= -16 \end{aligned}$

5) $\begin{aligned} -2p &- 3q &= -26 \\ 5p &- 2q &= 21 \end{aligned}$

6) $\begin{aligned} 7w &- 2z &= 1 \\ -4w &+ 2z &= 2 \end{aligned}$

7) $\begin{aligned} 9x &+ 6y &= 4 \\ -3x &- 2y &= 0 \end{aligned}$

8) $\begin{aligned} x &+ y &= 12 \\ x &- y &= 3 \end{aligned}$

9) $\begin{aligned} -2x &+ y &= -4 \\ 4x &- 2y &= 8 \end{aligned}$

10) $\begin{aligned} 2m &- 8n &= 4 \\ 3m &- 12n &= 8 \end{aligned}$

11) $\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x &+ \tfrac{1}{3}y &= 4 \\ \tfrac{1}{6}x &+ \tfrac{1}{9}y &= 1 \end{aligned}$

12) $\begin{aligned} -2r &+ 3t &= 12 \\ \tfrac{-2}{3}r &+ t &= 4 \end{aligned}$

Elaboró: Alberto Carrillo Castrejón

PROBLEMAS QUE CONDUCEN A SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2X2 O 3X3

Antes de repasar los diferentes métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales es conveniente plantear algunos problemas “prácticos” en los que se presentan los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas (2x2) o incluso de tres ecuaciones con tres incógnitas (3x3).

Actividad 3:
Plantea cada uno de los siguientes problemas, escribiendo las incógnitas con letras o símbolos y construye un sistema de ecuaciones.

1) Hallar dos números enteros cuya suma sea igual a 23 y su resta sea igual a 11.

Incógnitas:
Un número: x
Otro número: y

Planteamiento:

$$\begin{aligned} x + y &= 23 \\ x - y &= 11 \end{aligned}$$

2) Obtener dos números, tales que, la suma sea igual a 12 y la resta del triple del primero con el doble del segundo sea 11.

Incógnitas:
Primer número: x
Segundo número: y

Planteamiento:

3) Encontrar dos números, tales que, cinco veces uno más dos veces el otro nos de 91 y su resta sea igual a 7.

Incógnitas:
Un número: x
Otro número: y

Planteamiento:

4) Obtener dos números, tales que, el doble de la suma sea igual a 34 y el triple de su resta sea igual a 3.

Incógnitas:
Un número: x
Otro número: y

Planteamiento:

5) Encontrar tres números, tales que, la suma de ellos sea 26, el doble del primero más el triple del segundo menos el tercero de cómo resultado 25 y si al primero le restamos el segundo y le sumamos el doble del tercero tendremos 20.

Incógnitas:
Primer número: x
Segundo número: y
Tercer número: z

Planteamiento:

6) En una granja hay entre gallinas y borregos un total de 135 animales. Además el total de patas es de 430. Si se considera que todos los borregos tienen cuatro patas y las gallinas dos patas ¿Cuántas gallinas y cuantos borregos hay en la granja?

Incógnitas: ***Planteamiento:***

Cantidad de gallinas: g

Cantidad de borregos: b

$$\begin{aligned} g + b &= 135 \\ 2g + 4b &= 430 \end{aligned}$$

7) Para una fiesta de fin de año se vendieron 1000 boletos en total para niños y adultos, el boleto para niño costo 75 pesos, el de adulto 160 pesos y se recaudaron 121,750 pesos de la venta de los boletos. ¿Cuántos niños y adultos asistieron a la fiesta de fin de año?

Incógnitas: ***Planteamiento:***

Cantidad de niños que asistieron: x

Cantidad de adultos que asistieron: y

8) Para preparar ponche Lucía compra cinco kilos de caña y 3 de guayaba pagando por ello $66. Sin embargo se da cuenta que la falta caña y le sobran guayabas, de manera que regresa a comprar tres kilos de caña y devuelve un kilo de guayaba, paga por ello solo $3. ¿Cuál es el precio del kilo de cada producto?

Incógnitas: ***Planteamiento:***

Precio del kilo de caña: v

Precio del kilo de guayaba: w

9) Dos Ingenieros cobraron por un proyecto la cantidad de $120 000. Decidieron repartirse este dinero en una razón de 3 a 5. ¿Cuánto dinero le corresponde a cada Arquitecto?

Incógnitas: ***Planteamiento:***

Lo que le corresponde al Ingeniero A: x

Lo que le corresponde al Ingeniero B: y

10) El papá pesa 10 kilos más que el triple de lo que pesa su hijo. Si la suma de los dos pesos es de 110 kilos ¿Cuál es su peso de cada uno?

Incógnitas: ***Planteamiento:***

Peso del hijo: h

Peso del papá: p

11) El precio de un tipo de tabaco es de 90 pesos el kilo y del otro es de 110 pesos.
Si se mezclan los dos tipos de tabaco para formar 120 kilos en dicha mezcla y por su venta se obtienen 11600 pesos ¿Cuántos kilos de cada tipo de tabaco hay en la mezcla?

Incógnitas: ***Planteamiento:***

Número de kilos de tabaco del tipo A en la mezcla: x

Número de kilos de tabaco del tipo B en la mezcla: w

12) Una lancha con motor tarda dos horas en realizar su recorrido de 140 km, cuando va río abajo (a favor del río) y dos horas y media cuando va en contra del río (río arriba). ¿Cuál es la velocidad de la lancha y cual es la del río?

Incógnitas: ***Planteamiento:***

Velocidad de la lancha: x

Velocidad del río: y

$$2\;\; x+y\;\; =140$$

$$\frac{5}{2}\;\; x-y\;\; =140$$

13) Para cruzar un lago una embarcación se tarda 45 minutos con el viento a su favor, mientras que se tarda 55 minutos cuando el viento está en su contra, si la distancia que recorre es de 15 km. ¿Cuál es la velocidad de la embarcación y cual es la del viento?.

Incógnitas: ***Planteamiento:***

Velocidad de la Embarcación: x

Velocidad del viento: y

14) Juan compra 7 sandias y 5 melones por 340 pesos, Pedro compra 4 sandias y 3 melones por 196 pesos. ¿Cuánto cuesta una sandia y cuanto un melón?

Incógnitas: ***Planteamiento:***

Precio de una sandia: s

Precio de un melón: m

15) La suma de las edades del nieto, del hijo y del abuelo es de 118 años, si la edad del nieto se triplicara sería 2 años mayor que el hijo y si la edad del hijo se duplicara sería 4 años menor que el abuelo. ¿Cuál es la edad de cada uno?

Incógnitas: ***Planteamiento:***

Edad del nieto: x

Edad del hijo: y

Edad del abuelo: z

La suma de las tres edades $\Rightarrow$ $x+y+z=118$

Si la edad del nieto se triplicara sería 2 años mayor que el hijo $\Rightarrow$ $3x=y+2$

Si la edad del hijo se duplicara sería 4 años menor que el abuelo $\Rightarrow$ $2y=z-4$

Este sistema se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 118 \\ 3x & - & y & & & = & 2 \\ & & 2y & - & z & = & -4 \end{array}$$

16) En un salón de belleza el corte de pelo cuesta 50 pesos para los niños, 150 para las mujeres y 80 pesos los hombres. Un día en particular asisten 40 personas para cortarse el pelo, recaudándose por ello la cantidad de 3270 pesos ¿Cuántos niños, cuantas mujeres y cuantos hombres fueron a cortarse el pelo?, si el número de niños es el doble del de mujeres.

Incógnitas: ***Planteamiento:***

Número de niños: x

Número de mujeres: y

Número de hombres: z

17) María compra siete kilos de paletas y dos kilos de chicles pagando $285. Se da cuenta que compro demasiado, así que regresa a la tienda a devolver dos kilos de paletas, medio kilo de chicles y le devuelven $80. ¿Cuál es el precio de cada kilo de estos productos?

Incógnitas: ***Planteamiento:***

Precio del kilo de paletas: p

Precio del kilo de chicles: c

18) Se mezclan dos tipos de café para formar 80 kilos, el kilo del tipo A cuesta $96, mientras que el tipo B cuesta $80. Si la mezcla se vende a $96 el kilo ¿Cuántos kilos de cada tipo de café hay en la mezcla?

Incógnitas: ***Planteamiento:***

Número de kilos de café tipo A: x

Número de kilos de café tipo B: y

19) En una exhibición de insectos se contaron un total de 2100 patas entre escarabajos y arañas. Si se sabe que hay 400 de estos dos tipos de insectos y que los escarabajos tienen cuatro patas, mientras que la arañas seis ¿Cuántos escarabajos y cuantas arañas hay?

Incógnitas: ***Planteamiento:***

Cantidad de escarabajos: e

Cantidad de arañas: a

20) En un grupo de Matemáticas hay 27 estudiantes y se sabe que el número de mujeres es tres menos que el doble de hombres. ¿Cuántas mujeres y hombres hay en el grupo?

Incógnitas: ***Planteamiento:***

Cantidad de mujeres en el grupo: m

Cantidad de hombres en el: h

MÉTODOS PARA RESOLVER SISTEMAS DE ECUACIONES

Para resolver sistemas de ecuaciones lineales, existen diversos métodos conocidos como **algebraicos y numéricos**, dentro de los algebraicos aparecen el de reducción por **sustitución**, reducción por **suma y resta** y reducción por **igualación** y en los numéricos están el método de los **determinantes** (**Regla de Cramer**) y el de **escalonamiento** a través de su matriz aumentada (**proceso de Gauss-Jordan**).
Aquí solo estudiaremos los tres algebraicos y la regla de Cramer para sistemas 2x2 y 3x3.

Los métodos algebraicos se basan en la idea de <u>reducir</u> el sistema de ecuaciones a una ecuación lineal con una incógnita o de primer grado con una incógnita, la cual ya sabemos como resolverla, Enseguida desarrollamos los métodos para resolver sistemas de ecuaciones.

MÉTODO DE REDUCCIÓN POR SUSTITUCIÓN

Este consiste en **despejar** de una ecuación una de las dos incógnitas y **sustituir el despeje en la otra ecuación**, para producir una **ecuación lineal con una incógnita** que al resolverse nos permite conocer el valor una incógnita.

Posteriormente con **el valor encontrado** de una de las incógnitas lo **sustituimos en el despeje** realizado al inicio y con ello conoceremos el valor de la otra incógnita.

Ejemplo: Resuelva el sistema de ecuaciones por medio del método de sustitución.

$$\begin{array}{rcrcr} -2x & + & y & = & -1 \\ 3x & + & 2y & = & 19 \end{array}$$

Primero le asignamos un número a cada ecuación para tener mejor control sobre ellas.

$$\begin{array}{rcrcrl} -2x & + & y & = & -1 & \qquad Ec.1 \\ 3x & + & 2y & = & 19 & \qquad Ec.2 \end{array}$$

Después se elije una incógnita para ser despejada de alguna ecuación (se recomienda escoger la que sea más fácil para su despeje), en este caso la incógnita y se despeja de la ecuación 1.

$$y=-1+2x$$

Dicho despeje se sustituye en la otra ecuación (ecuación 2).

$$3x+2\ \ -1+2x\ \ =19$$

Al hacer lo anterior se produce la ecuación lineal con una incógnita, que al resolverse.

$$3x+2\ \ -1+2x\ \ =19$$

$$3x-2+4x=19$$

$$7x=19+2$$

$$7x=21$$

$$x=\frac{21}{7}$$

$$x=3$$

Por último, $x=3$ se sustituye en el despeje inicial $y=-1+2x$; $y=-1+2\ \ 3\ \ =-1+6=5$

Por lo tanto, la solución única es $x=3$; $y=5$

Ejemplo: Resuelva el sistema de ecuaciones por medio del método de sustitución.

$$\begin{array}{rcrcr} -2x & + & 3y & = & -11 \\ 4x & - & 5y & = & 19 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcrcrl} -2x & + & 3y & = & -11 & Ec.1 \\ 4x & - & 5y & = & 19 & Ec.2 \end{array}$$

Despejamos a la incógnita x de la ecuación 2.

$$4x-5y=19$$

$$4x=19+5y$$

$$x=\frac{19+5y}{4}$$

Sustituimos el despeje en la ecuación 1 y resolvemos para y .

$$-2x+3x=-11$$

$$-2\left(\frac{19+5y}{4}\right)+3y=-11$$

$$\frac{-2\ \ 19+5y\ \ +12y}{4}=-11$$
$$-38-10y+12y=-44$$
$$2y=-44+38$$
$$y=\frac{-6}{2}$$
$$y=-3$$

Luego, sustituimos en el despeje inicial, el valor encontrado $y=-3$; $x=\dfrac{19+5\ \ -3}{4}=\dfrac{4}{4}=1$

$\therefore$ La solución única es $x=1$; $y=-3$.

Actividad 4:
Resuelva por medio del método de sustitución cada sistema dado.

1) $\begin{array}{rcrcr} 3x & + & 2y & = & 6 \\ 5x & + & y & = & 17 \end{array}$ 2) $\begin{array}{rcrcr} -x & + & 2y & = & 1 \\ 5x & - & 3y & = & 9 \end{array}$ 3) $\begin{array}{rcrcr} 3m & + & 2n & = & 7 \\ 5m & + & 5n & = & 20 \end{array}$

MÉTODO DE REDUCCIÓN POR SUMA Y RESTA

En este segundo método, el objetivo es ***"eliminar"*** una de las dos incógnitas mediante la suma o resta de las dos ecuaciones. Para lograrlo se deben ***"equilibrar"*** los coeficientes de la incógnita a eliminar, **multiplicando cada ecuación por un número adecuado**. En los siguientes ejemplos se ilustra dicho método de suma y resta.

Ejemplo: Resuelva el sistema de ecuaciones por medio del método de suma y resta.

$$\begin{array}{rcrcr} -2x & + & y & = & -1 \\ 3x & + & 2y & = & 19 \end{array}$$

Si se quiere eliminar a la incógnita x , debemos multiplicar la primera ecuación por el número 3 y la segunda ecuación por el número 2, es decir,

$$\begin{array}{rcrcr} 3(-2x & + & y & = & -1) \\ 2(3x & + & 2y & = & 19) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcrcr} -6x & + & 3y & = & -3 \\ 6x & + & 4y & = & 38 \end{array}$$

Ahora se suman las dos ecuaciones obtenidas de los productos realizados.

$$\begin{array}{rcrcr} \cancel{-6}x & + & 3y & = & -3 \\ \cancel{6}x & + & 4y & = & 38 \\ \hline 0x & + & 7y & = & 35 \end{array}$$

Así se produce una ecuación lineal con una incógnita $7y=35$, la cual al resolverse nos da el valor de la incógnita y , en esta ecuación tenemos $y=\dfrac{35}{7}=5$.

Con este valor, lo sustituimos en cualquiera de las ecuaciones iniciales, por ejemplo en la segunda ecuación y despejamos a la incógnita x .

$$3x+2y=19$$
$$3x+2\ \ 5\ \ =19$$
$$3x=19-10$$
$$3x=9$$
$$x=\frac{9}{3}$$
$$x=3$$

Por lo que la solución única es $x=3$; $y=5$

Ejemplo: Resuelva el sistema de ecuaciones por medio del método de suma y resta.

$$\begin{array}{rcrcr} -2x & + & 3y & = & -11 \\ 4x & - & 5y & = & 19 \end{array}$$

Ahora vamos a eliminar a la incógnita y , por lo debemos multiplicar la primera ecuación por 5 y la segunda por 3.

Ejemplo: Resuelva el sistema de ecuaciones por medio del método de suma y resta.

$$\begin{array}{rcrcr} 5(-2x & + & 3y & = & -11) \\ 3(4x & - & 5y & = & 19) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcrcr} -10x & + & 15y & = & -55 \\ 12x & - & 15y & = & 57 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcr} -10x & + & 1\cancel{5y} & = & -55 \\ 12x & - & 1\cancel{5y} & = & 57 \\ \hline 2x & + & 0y & = & 2 \end{array}$$

Luego, $2x=2$

$$x=\frac{2}{2}$$
$$x=1$$

Finalmente, al sustituir este valor en la primera ecuación tenemos que

$$-2x+3y=-11$$
$$-2\ \ 1\ \ +3y=-11$$
$$-2+3y=-11$$
$$3y=-11+2$$
$$y=\frac{-9}{3}$$
$$y=-3$$

$\therefore$ La solución única es $x=1$; $y=-3$.

Actividad 5:
Resuelva por medio del método de suma y resta cada sistema de ecuaciones dado.

1) $\begin{array}{rcrcr} 3x & + & 2y & = & 6 \\ 5x & + & y & = & 17 \end{array}$ 2) $\begin{array}{rcrcr} -x & + & 2y & = & 1 \\ 5x & - & 3y & = & 9 \end{array}$ 3) $\begin{array}{rcrcr} 3m & + & 2n & = & 7 \\ 5m & + & 5n & = & 20 \end{array}$

MÉTODO DE REDUCCIÓN POR IGUALACIÓN

El nombre de este método se debe a que debemos **despejar la misma incógnita de las dos ecuaciones** y después **igualar estos despejes**, para producir una ecuación lineal con una incógnita y resolverla como se muestra enseguida.

Ejemplo: Resuelva el sistema de ecuaciones por medio del método de igualación.

$$\begin{array}{rcrcr} -2x & + & y & = & -1 \\ 3x & + & 2y & = & 19 \end{array}$$

Despejamos la incógnita y de las dos ecuaciones.

$$y=-1+2x$$

$$y=\frac{19-3x}{2}$$

Ahora se **igualan** estos despejes entre si.

$$y=y \qquad \Rightarrow \qquad -1+2x=\frac{19-3x}{2}$$

Resolvemos la ecuación lineal con una incógnita.

$$-1+2x=\frac{19-3x}{2}$$

$$2\;\; -1+2x\;\; =19-3x$$

$$-2+4x=19-3x$$

$$4x+3x=19+2$$

$$7x=21$$

$$x=\frac{21}{7}$$

$$x=3$$

Luego sustituimos este valor encontrado en un despeje, por ejemplo en el primero para obtener.

$$y=-1+2\;\;3$$

$$y=-1+6$$

$$y=5$$

Por lo tanto, la solución única es $x=3 \quad ; \quad y=5$

Ejemplo: Resuelva el sistema de ecuaciones por medio del método igualación.

$$\begin{array}{rcrcr} -2x & + & 3y & = & -11 \\ 4x & - & 5y & = & 19 \end{array}$$

Despejamos a y de las dos ecuaciones.

$$x = \frac{-11-3y}{-2}$$

$$x = \frac{19+5y}{4}$$

Igualamos estos despejes.

$$\frac{-11-3y}{-2} = \frac{19+5y}{4}$$

$$-44-12y = -38-10y$$

$$-44+38 = -10y+12y$$

$$-6 = 2y$$

$$\frac{-6}{2} = y$$

$$-3 = y$$

Luego $y = \frac{19+5\ \ -3}{4} = \frac{4}{4} = 1$. Por lo tanto, la solución única es $x = 1 \quad ; \quad y = -3$

Actividad 6:
Resuelva por medio del método de igualación cada sistema de ecuaciones dado.

1) $\begin{array}{rcrcr} 3x & + & 2y & = & 6 \\ 5x & + & y & = & 17 \end{array}$ 2) $\begin{array}{rcrcr} -x & + & 2y & = & 1 \\ 5x & - & 3y & = & 9 \end{array}$ 3) $\begin{array}{rcrcr} 3m & + & 2n & = & 7 \\ 5m & + & 5n & = & 20 \end{array}$

MÉTODO DE LOS DETERMINANTES (REGLA DE CRAMER)

Este método a diferencia de los anteriores, **es más bien una regla** para resolver sistemas de ecuaciones lineales 2x2 o 3x3 en donde se utilizan **los determinantes**, a través de **razones de dos determinantes**, es decir se establece que si un sistema lineal tiene solución única, entonces dicha solución queda expresada mediante un par de fórmulas, una para la incógnita x y otra para la incógnita y, pudiéndose generalizarse a sistemas 3x3 o más aun a sistemas nxn.
Antes de enunciar la llamada regla de Cramer, es necesario establecer la definición de lo que llamamos **determinante de arreglos cuadrados de números reales**.

DEFINICIÓN DEL DETERMINANTE PARA ARREGLOS 2X2 Y 3X3.

Definición del determinante 2x2

Si se tiene un arreglo cuadrado de cuatro números reales $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ **, se define su determinante como:**

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$-\qquad +$

Ejemplo: Calcule el valor de cada uno de los siguientes determinantes 2x2.

1) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 3\ \ 6\ -4\ \ 5\ = 18 - 20 = -2$ 2) $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -2\ \ 6\ -3\ \ 4\ = -12 - 12 = -24$

3) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = 3\ \ 6\ -4\ \ -5\ = 18 + 20 = 38$ 4) $\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = -3\ \ -6\ -(-4)\ \ 5\ = 18 + 20 = 38$

5) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 3\ \ 4\ -2\ \ 6\ = 12 - 12 = 0$

Actividad 7:
Calcula los siguientes determinantes.

1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} =$ 2) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} =$ 3) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} =$

4) $\begin{vmatrix} -5 & -3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} =$ 5) $\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} =$ 6) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} =$

Definición del determinante 3x3

Si se tiene un arreglo de nueve números reales $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ **se define su determinante como:**

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

O bien como:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} = a\;e\;i + b\;f\;g + c\;d\;h - c\;e\;g - a\;f\;h - b\;d\;i$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

Ejemplo: Evalúe cada determinante 3x3

1) $\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$

Respuesta:

$$\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 9 & 8 \\ 6 & 5 \\ 3 & 2 \end{matrix} = 9\;5\;\;-1 + 8\;4\;\;3 + 7\;6\;\;2 - 7\;5\;\;3 - 9\;4\;\;2 - 8\;6\;\;-1$$

$$= -45 + 96 + 84 - 105 - 72 + 48 = 228 - 222 = 6$$

Por lo tanto, $\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 6$

2) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

Respuesta:

$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} -2 & 3 \\ 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{matrix} = 10 - 9 + 0 - 60 - 0 + 3 = -56$. Por lo tanto, $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -56$

3) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

Respuesta:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{matrix} = 3-6-1+9-1+2=6. \qquad \text{Por lo tanto, } \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 6$$

Actividad 8:
Evalúe cada determinante.

1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

MÉTODO DE LOS DETERMINANTES (REGLA DE CRAMER) PARA 2X2

Dado un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas de la forma $\begin{matrix} ax & + & by & = & c \\ dx & + & ey & = & f \end{matrix}$ **, si** $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \neq 0$ **, entonces el sistema tiene <u>solución</u> <u>única</u> y esta dada por:**

$$\boxed{x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}} \qquad \boxed{y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}}$$

A $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \neq 0$ **se le conoce como el determinante del sistema.**

Ejemplo: Resuelva cada sistema dado por medio de la regla de **Cramer.**

1) $\begin{matrix} -2x & + & y & = & -1 \\ 3x & + & 2y & = & 19 \end{matrix}$

Respuesta:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 19 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-21}{-7} = 3 \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 19 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-35}{-7} = 5$$

Por lo que, la solución única es $x = 3 \;\; ; \;\; y = 5$

2) $\begin{array}{rcrcr} -2x & + & 3y & = & -11 \\ 4x & - & 5y & = & 19 \end{array}$

Respuesta:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} -11 & 3 \\ 19 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}}=\frac{55-57}{10-12}=\frac{-2}{2}=1 \qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} -2 & -11 \\ 4 & 19 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}}=\frac{-38+44}{10-12}=\frac{6}{-2}=-3$$

Por lo que, la solución única es $x=1$; $y=-3$.

Actividad 9:

Resuelva por medio la regla de **Cramer** cada sistema de ecuaciones dado.

1) $\begin{array}{rcrcr} 3x & + & 2y & = & 6 \\ 5x & + & y & = & 17 \end{array}$ 2) $\begin{array}{rcrcr} -x & + & 2y & = & 1 \\ 5x & - & 3y & = & 9 \end{array}$ 3) $\begin{array}{rcrcr} 3m & + & 2n & = & 7 \\ 5m & + & 5n & = & 20 \end{array}$

4) $\begin{array}{rcrcr} -2x & + & 2y & = & 6 \\ 5x & - & y & = & 7 \end{array}$ 5) $\begin{array}{rcrcr} -x & + & 2y & = & 5 \\ -6x & + & 2y & = & -7 \end{array}$

MÉTODO DE LOS DETERMINANTES (REGLA DE CRAMER) PARA SISTEMAS 3X3

Para un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas lineal de la forma:

$$\begin{array}{rcrcrcr} ax & + & by & + & cz & = & d \\ ex & + & fy & + & gz & = & h \\ ix & + & jy & + & kz & = & l \end{array}$$

Si el determinante del sistema es diferente de cero $\Delta \neq 0$**, entonces el sistema tiene <u>solución única</u> y esta dada por:**

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta} \quad ; \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta} \quad ; \quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}$$

Donde

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & j & k \end{vmatrix} \; ; \; \Delta_x=\begin{vmatrix} d & b & c \\ h & f & g \\ l & j & k \end{vmatrix} \; ; \; \Delta_y=\begin{vmatrix} a & d & c \\ e & h & g \\ i & l & k \end{vmatrix} \; ; \; \Delta_z=\begin{vmatrix} a & b & d \\ e & f & h \\ i & j & l \end{vmatrix}$$

Ejemplo: Resuelva por la regla de **Cramer** el sistema 3x3 dado.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 9 \\ -2x & + & y & - & z & = & -5 \\ x & - & 2y & + & z & = & 0 \end{array}$$

Primero calculamos el determinante del sistema.

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{array} = 1-1+4-1-2+2=3 \quad ; \quad \Delta = 3$$

Ahora se calculan los determinantes para las incógnitas.

$$\Delta_x = \left|\begin{array}{ccc} 9 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 9 & 1 \\ -5 & 1 \\ 0 & -2 \end{array} = 9+10-18+5=6$$

$$\Delta_y = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 9 & 1 \\ -2 & -5 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 1 & 9 \\ -2 & -5 \\ 1 & 0 \end{array} = -5-9+5+18=9$$

$$\Delta_z = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 9 \\ -2 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 0 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{array} = -5+36-9-10=12$$

Por lo tanto, la solución única es

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{6}{3} = 2 \quad ; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{9}{3} = 3 \quad ; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{12}{3} = 4$$

Actividad 10:

Resuelva cada sistema por medio de la regla de **Cramer.**

$$1) \quad \begin{array}{rcrcrcr} -x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ -2x & + & y & - & z & = & -5 \\ 2x & - & 3y & + & z & = & 1 \end{array} \qquad\qquad 2) \quad \begin{array}{rcrcrcr} -x & - & y & - & z & = & -6 \\ 2x & + & y & - & z & = & -1 \\ x & - & 2y & + & z & = & 3 \end{array}$$

RESOLVIENDO LOS PROBLEMAS “PRÁCTICOS” PLANTEADOS

Actividad 11:

Resuelve cada problema que se planteo en la **actividad 3**. Utilizando uno **(solo uno)** de los métodos estudiados con anterioridad (**Sustitución ó Suma y Resta ó Igualación ó regla de Cramer).** Analiza la solución encontrada con respecto al problema, es decir, observa que tiene sentido las respuestas encontradas.

Problema 1)	**Problema 2)**	**Problema 3)**	**Problema 4)**
Problema 5)	**Problema 6)**	**Problema 7)**	**Problema 8)**
Problema 9)	**Problema 10)**	**Problema 11)**	**Problema 12)**
Problema 13)	**Problema 14)**	**Problema 15)**	**Problema 16)**

ECUACIONES CUADRÁTICAS CON UNA INCÓGNITA

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA

Ahora, ya estamos en condiciones de revisar los conceptos más relevantes de las llamadas ecuaciones cuadráticas con una incógnita o más comúnmente conocidas ***ecuaciones de segundo grado con una incógnita***. En esta unidad estudiaremos su definición, su forma general, problemas que nos llevan a estas ecuaciones, sus métodos de solución, la interpretación gráfica de sus soluciones o raíces y finalmente la resolución de los problemas previamente planteados.

Definición de una ecuación cuadrática con una incógnita

Definición: Se dice que una ecuación es cuadrática con una incógnita, si se puede escribir o simplificar a la siguiente forma:

$$\boxed{ax^2+bx+c=0}$$

A esta, se le llama forma general de una ecuación cuadrática con una incógnita.

Donde $a, b, \text{y } c$ **son coeficientes (números) reales,** $a, b, \text{y } c \in \mathbb{R}$ ax^2 **Se llama término cuadrático de la ecuación.**

bx **Se llama término lineal de la ecuación.**

c **Se llama término o coeficiente independiente de la ecuación.**

a **Se llama coeficiente del término cuadrático.**

b **Se llama coeficiente del término lineal.**
x **Se llama incógnita de la ecuación.**

Ejemplo: En la siguiente ecuación cuadrática.

$$-3x^2+10x+7=0$$

Se tiene que:

$-3x^2$ Es el **término cuadrático**
$10x$ Es el **término lineal**.
7 Es el **término independiente**.

-3 Es el **coeficiente del término cuadrático**.
10 Es el **coeficiente del término lineal**.

Actividad 1: Escriba los términos y coeficientes de cada ecuación cuadrática.
1) $-2x^2-4x+5=0$ 2) $x^2+x-1=0$ 3) $4z^2-25=0$ 4) $-x^2+2x=0$

Algunas ecuaciones cuadráticas con una incógnita se presentan en el ejemplo que sigue.

Ejemplo: Ecuaciones cuadráticas con una incógnita.

1) $x^2-4x=0$ 2) $-x^2-4x=0$ 3) $x^2-4x=0$ 4) $z^2-4=0$

5) $4x^2-25=0$ 6) $\frac{z^2}{9}-\frac{64}{25}=0$ 7) $x^2+1=0$ 8) $2y^2+8=0$

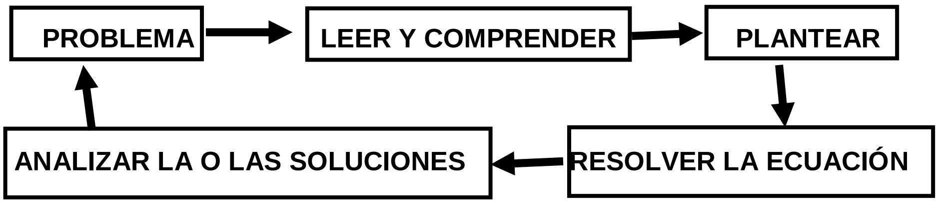
9) $x^2+5x+6=0$ 10) $x^2+x-6=0$ 11) $x^2-x+6=0$ 12) $x^2-5x+6=0$

13) $x^2+13x+40=0$ 14) $x^2=-3x+-40$ 15) $2x^2-12x=-1$ 16) $2z^2-5z+1=-z^2+z+13$

Uno de los primeros objetivos será el aprender a resolver algunas de las ecuaciones anteriores, así como también plantear problemas que produzcan ecuaciones cuadráticas con una incógnita, como se muestra en la primera actividad.

PROBLEMAS QUE CONDUCEN A ECUACIONES CUADRÁTICAS

Ahora se revisan algunos **problemas que al plantearse producen ecuaciones cuadráticas con una incógnita**. Recordemos que es muy importante **leer y comprender** el texto de cada problema, representando adecuadamente la o las incógnitas y traduciendo cada enunciado respectivo a una ecuación.



Actividad 2:

Planteé cada problema a través de ***un sistema de ecuaciones no lineal*** o ***una ecuación cuadrática*** según cada caso.

1) Encontrar dos números que sumados den 9 y que multiplicados den 20.

Incógnitas ***Planteamiento***

Primer número: x $x+y=9$

***Segundo número*:** y $xy=20$

Usando el método de sustitución

Despejamos a y de la primer ecuación

$$x+y=9 \quad \Rightarrow \quad y=9-x$$

Sustituimos en la segunda ecuación

$$xy=20 \quad \Rightarrow \quad x\ \ 9-x\ \ =20$$

$$9x-x^2=20$$

$$-x^2+9x-20=0$$

Esta última ecuación es cuadrática con una incógnita. $\boxed{-x^2+9x-20=0}$

2) Obtener dos números, tales que, la suma sea igual a 14 y la suma de sus cuadrados sea igual a 100.

Incógnitas ***Planteamiento***

Primer número:
Segundo número:

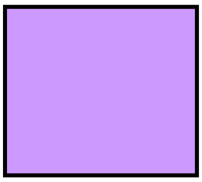
3) Obtener dos números, tales que, la resta sea igual a 8 y su producto sea 105.

Incógnitas ***Planteamiento***

Primer número:
Segundo número:

4) El área de un cuadrado es de 729 m^2, ¿Cuánto mide cada lado?

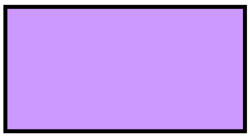
Incógnita
Lado del cuadrado:



Planteamiento

5) El área de un terreno de forma rectangular es de 165 m^2, el largo mide 4 metros más que su ancho ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?

Incógnitas



Planteamiento

Medida del ancho:
Medida del largo:

6) El cuadrado de un número sumado con su triple de el mismo da 270, ¿Cuál es el número?

Incógnita ***Planteamiento***
Un número:

7) Si al triple del cuadrado de un número le restamos su doble obtenemos el cuadrado de la suma del número con seis. ¿Cuál es el número?

Incógnita

Planteamiento

$$3x^2-2x=(x+6)^2$$

Un número: x

$$3x^2-2x=x^2+12x+36$$

$$\boxed{2x^2-14x-36=0}$$

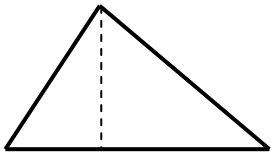
Elaboro: Alberto Carrillo Castrejón

8) El área de un triángulo es de 48 m^2, si la altura mide 4 m menos que la base, ¿Cuánto mide la base y la altura del triángulo?

Incógnitas

Medida de la base:

Medida de la altura:



Planteamiento

9) Hallar un número, tal que la diferencia de su cuadrado con tres veces él, de cómo resultado el número cero.

Incógnita ***Planteamiento***

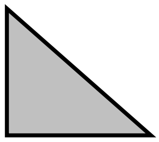
Un número:

10) En un triángulo rectángulo las medidas de sus catetos son números enteros consecutivos, si su área mide 231 m^2, ¿cuánto mide cada cateto?

Incógnitas

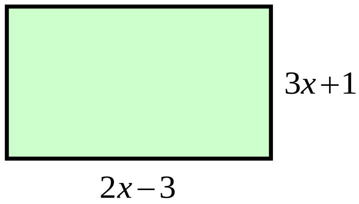
Medida de un cateto:

Medida de otro cateto:



Planteamiento

11) Se tiene un rectángulo con área igual a 325 m^2 como el que aparece en la figura ¿Cuál es el valor correcto de x y cuales son sus dimensiones?

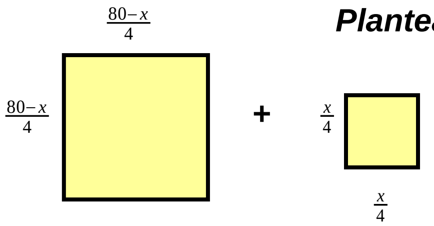


12) Un alambre de 80 cm de longitud, se parte en dos pedazos, de manera que con cada parte se doblan para formar cuadrados cuyas áreas sumadas dan 250 cm^2. ¿Cuánto mide cada pedazo de alambre?

Incógnitas ***Planteamiento***

Medida de un pedazo: x

Medida del otro pedazo: $80-x$



$$= \left(\frac{80-x}{4}\right)^2+\left(\frac{x}{4}\right)^2=250$$

Alambre

Luego desarrollando los paréntesis

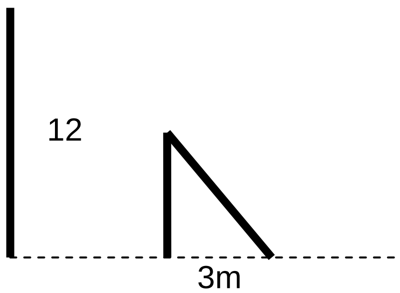
$$\frac{80-x}{4}^{2}+\frac{x}{4}^{2}=250$$
$$\frac{6400-160x+x^2}{16}+\frac{x^2}{16}=250$$
$$2x^2-160x+6400=4000$$
$$2x^2-160x+2400=0$$

La ecuación cuadrática es $\boxed{2x^2-160x-2400=0}$

13) Un poste que mide 12 m de altura se rompió de manera que la distancia de la base de él a la punta que pego con el suelo es de 3 m, ¿a que altura se rompió el poste?

Incógnita ***Planteamiento***

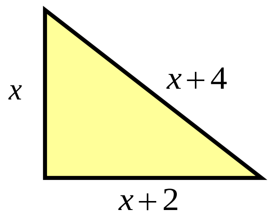
Altura a la que se rompió el poste:



14) En un triángulo rectángulo las medidas de sus catetos y la hipotenusa son tres números enteros pares consecutivos.
¿Cuánto mide cada lado del triángulo?

Incógnitas ***Planteamiento***

Medida del primer cateto:
Medida del segundo cateto:
Medida de la hipotenusa:



15) La mitad del producto de dos números enteros consecutivos es igual a 1431. Encontrar los números.

Incógnitas ***Planteamiento***

Primer número:
Segundo número:

16) Si a lo que tiene Pedro (de dinero) lo elevamos al cuadrado y le restamos mil veces la suma de lo de Pedro con \$600, obtendríamos \$150 000. ¿Cuánto tiene Pedro?

Incógnita ***Planteamiento***

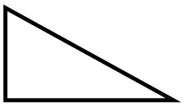
Lo que tiene Pedro:

17) El perímetro de un rectángulo es de 140 m y el área es de 1200 m^2. Determina sus dimensiones.

Incógnitas ***Planteamiento***

Ancho del rectángulo:
Largo del rectángulo:

18) En un triángulo rectángulo el cateto mayor excede en 2 cm al doble del cateto menor y la hipotenusa mide 2 cm menos que el triple del cateto menor. Calcula la medida de cada lado.



Incógnitas ***Planteamiento***

Cateto menor:
Cateto mayor:
Hipotenusa:

19) Se van a repartir 60 dólares a cierto de número de niños, de modo que si a 6 de ellos no se les da dinero, entonces a los demás les tocaría 5 dólares más. ¿Cuántos niños son?

Incógnita ***Planteamiento***
Número de niños:
Cantidad que le toca a cada uno:

MÉTODOS PARA RESOLVER ECUACIONES CUADRÁTICAS CON UNA INCÓGNITA

Para resolver ecuaciones de segundo grado con una incógnita, contamos con algunos métodos, los cuales se irán ilustrando de acuerdo a la forma que tenga la ecuación cuadrática, es decir, cuando la **ecuación sea incompleta o cuando sea completa**.

Se dice que una ecuación cuadrática **es incompleta**, si uno de los **coeficientes** de la forma general $(ax^2+bx+c=0)$ b ó c son iguales a cero (solo uno de los dos).
Así una **ecuación cuadrática es incompleta** si tiene la forma:

1) $\boxed{ax^2+bx=0 \quad ; \quad c=0}$ 2) $\boxed{ax^2+c=0 \quad ; \quad b=0}$

Para resolver este tipo de ecuaciones, si **son del tipo 1)** se debe **factorizar** ***(factorizar significa escribir un polinomio como un producto de dos o más términos, binomios, trinomios, etc. llamados factores)*** el miembro izquierdo de la ecuación y aplicar la siguiente propiedad de una igualdad ***(Si un producto de dos o más factores esta igualado a cero, entonces uno de los factores deberá ser cero*** $zw=0 \quad \leftrightarrow \quad z=0 \quad o \quad w=0$ ***)***

Ejemplos: Resolver cada ecuación cuadrática del **tipo 1**.

1) $x^2 - 5x = 0$

factorizamos el lado izquierdo

$x \;\; x-5 \;\; = 0$

Por la propiedad

$x = 0 \quad o \quad x - 5 = 0$

$x = 5$

$\therefore$ *las soluciones son* $: x = 0$

$x = 5$

2) $3x^2 + 7x = 0$

factorizamos el lado izquierdo

$x \;\; 3x+7 \;\; = 0$

$x = 0 \quad o \quad 3x + 7 = 0$

$x = \frac{-7}{3}$

$\therefore$ *Las soluciones son* $: x = 0$

$x = \frac{-7}{3}$

3) $-2x^2 + 12x = 0$

factorizamos el lado izquierdo

$x \;\; -2x+12 \;\; = 0$

$x = 0 \quad o \quad -2x + 12 = 0$

$x = 6$

$\therefore$ *Las soluciones son* $: x = 0$

$x = 6$

4) $-4x^2 = 5x$

$-4x^2 - 5x = 0$

$x \;\; -4x-5 \;\; = 0$

$x = 0 \quad o \quad -4x - 5 = 0$

$x = \frac{5}{-4} = \frac{-5}{4}$

$\therefore$ *Las soluciones son* $: x = 0$

$x = \frac{-5}{4}$

Actividad 3: Resuelve cada ecuación cuadrática.

1) $4x^2 + 12x = 0$ 2) $-2x^2 + 12x = 0$ 3) $x^2 + 12x = 0$ 4) $-3x^2 = -10x$

Si las ecuaciones **son del tipo 2** ***se despeja la incógnita directamente. Para ello se extrae la raíz cuadrada a los dos miembros de la ecuación toda vez que ya se dejo a*** x^2 ***en uno de los miembros y con ello encontramos los valores de dicha incógnita.***

Ejemplo: Resolver cada ecuación cuadrática del **tipo 2.**

1) $3x^2 - 12 = 0$

$3x^2 - 12 = 0$

$x^2 = \frac{12}{3}$

$x^2 = 4$

$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{4}$

2) $-x^2 + 9 = 0$

$-x^2 + 9 = 0$

$-x^2 = -9$

$x^2 = 9$

$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{9}$

3) $x^2 - 5 = 0$

$x^2 - 5 = 0$

$x^2 = 5$

$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{5}$

$x = \pm\sqrt{5}$

$$x = \pm 2$$

$\therefore$ *Las soluciones son*:

$$x = 2 \quad o \quad x = -2$$

$$x = \pm 3$$

$\therefore$ *Las soluciones son*:

$$x = 3 \quad o \quad x = -3$$

$\therefore$ *Las soluciones son*:

$$x = \sqrt{5} \quad o \quad x = -\sqrt{5}$$

4) $4x^2 - 49 = 0$

$$4x^2 - 49 = 0$$

$$x^2 = \frac{49}{4}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{49}{4}}$$

$$x = \pm\frac{7}{2}$$

$\therefore$ *Las soluciones son*:

$$x = \frac{7}{2} \quad o \quad x = \frac{-7}{2}$$

5) $\frac{x^2}{16} - \frac{25}{9} = 0$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{25}{9} = 0$$

$$\frac{x^2}{16} = \frac{25}{9}$$

$$x^2 = \frac{16\ \ 25}{9}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{16\ \ 25}{9}}$$

$$x = \pm\frac{4\ \ 5}{3} = \pm\frac{20}{3}$$

$\therefore$ *Las soluciones son*:

$$x = \frac{20}{3} \quad o \quad x = \frac{-20}{3}$$

6) $x^2 + 1 = 0$

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \pm\sqrt{-1}$$

En el ejemplo 6 se observa que los valores para la incógnita x son $\pm\sqrt{-1}$. **Los cuales no son números reale**s, es decir **no forman parte de los números reales** $\mathbb{R}$.

A estos "nuevos" números se les conoce como **complejos o imaginarios**.
Su unidad básica es $\sqrt{-1}$ la cual se denota por medio de la letra minúscula $i = \sqrt{-1}$.
Luego entonces las soluciones de esta ecuación $x^2 + 1 = 0$ son números complejos que se pueden escribir de la siguiente manera: $x = -i \quad o \quad x = i$

7) $x^2 + 100 = 0$

$$x^2 = -100$$

$$x = \pm\sqrt{-100}$$

$$x = \pm\sqrt{100\ \ -1} = \pm\sqrt{100}\sqrt{-1} = \pm 10i$$

$\therefore$ *Las soluciones son*: $x = 10i \quad o \quad x = -10i$

Algunas características del número $i = \sqrt{-1}$ **son:**

$i^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$

$i^3 = i^2 i = -1i = -i$

$i^4 = i^2 i^2 = (-1)(-1) = 1$

Es decir

$i = \sqrt{-1}$; $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$

Actividad 4: Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas incompletas.

1) $x^2 - 121 = 0$ 2) $3x^2 - 27 = 0$ 3) $-x^2 + 4 = 0$ 4) $x^2 + 25 = 0$ 5) $2x^2 + 32 = 0$

MÉTODOS DE PARA RESOLVER ECUACIONES CUADRÁTICAS COMPLETAS

Una ecuación cuadrática completa es aquella en donde los tres coeficientes a, b y c **son diferentes de cero** $(a \neq 0, b \neq 0$ y $c \neq 0)$ **, es decir, una ecuación cuadrática completa es de la forma:**

$ax^2 + bx + c = 0$ **, donde** $a \neq 0, b \neq 0$ y $c \neq 0$

MÉTODO DE FACTORIZACIÓN

Consiste en escribir el miembro izquierdo de la ecuación $ax^2 + bx + c$ como un producto de dos binomios y después usar la propiedad ***(Si un producto de dos o más factores esta igualado a cero, entonces uno de los factores deberá ser cero*** $zw = 0 \leftrightarrow z = 0$ *o* $w = 0$ ***).***

Caso 1: Ecuaciones de la forma $x^2 + bx + c = 0$; $a = 1$

Ejemplo: Resuelva cada ecuación cuadrática por factorización.

1) $x^2 + 7x + 12 = 0$

Primero factorizamos el trinomio $x^2 + 7x + 12$ **mediante un producto de dos binomios, tal como se ilustra a continuación y se iguala cada factor a cero.**

$$x^2 + 7x + 12 = 0$$
$$(x+4)(x+3) = 0$$
$$\therefore \quad x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -4$$
$$x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -3$$

Las soluciones o raíces de la ecuación son: $x = -4$, $x = -3$

2) $x^2-x-12=0$

$x^2-x-12=0$

$x-4 \quad x+3 \ =0$

$\therefore \quad x-4=0 \quad \rightarrow \quad x=4$

$x+3=0 \quad \rightarrow \quad x=-3$

Las soluciones o raíces de la ecuación son: $x=4$, $x=-3$

3) $x^2+x-12=0$

$x^2+x-12=0$

$x+4 \quad x-3 \ =0$

$\therefore \quad x+4=0 \quad \rightarrow \quad x=-4$

$x-3=0 \quad \rightarrow \quad x=3$

Las soluciones o raíces de la ecuación son: $x=-4$, $x=3$

4) $x^2-7x-12=0$

$x^2-7x+12=0$

$x-4 \quad x-3 \ =0$

$\therefore \quad x-4=0 \quad \rightarrow \quad x=4$

$x-3=0 \quad \rightarrow \quad x=3$

Las soluciones o raíces de la ecuación son: $x=4$, $x=3$

En conclusión:

Se factoriza el trinomio x^2+bx+c **de manera que** $x^2+bx+c= \ x+d \quad x+e$ **donde la suma de** d **con** e **sea igual a** b **y el producto de** d **con** e **sea igual a** c**, es decir,** $\begin{matrix} d+e=b \\ d \quad e \ =c \end{matrix}$ **De modo que** $x^2+bx+c= \ x+d \quad x+e \ =0$**, esto nos lleva a las siguientes ecuaciones lineales con una incógnita y al resolverlas llegamos a:**

$$x+d=0 \quad \Rightarrow \quad x=-d$$
$$x+e=0 \quad \Rightarrow \quad x=-e$$

Actividad 5: Resuelva cada ecuación cuadrática por factorización.

1) $x^2+12x+32=0$ 2) $x^2-4x-32=0$

3) $x^2+4x-32=0$ 4) $x^2-12x+32=0$

5) $x^2-2x-63=0$ 6) $x^2+15x+50=0$

7) $x^2+2x-224=0$ 8) $x^2+240x+8000=0$

9) $3x^2+12x+9=0$ 10) $-2x^2+14x-24=0$

11) $x^2-2x+3=0$ $*$12) $x^2+x+1=0$

Caso 2: Ecuaciones de la forma $ax^2+bx+c=0 \quad ; \quad a\neq 1$

Se factoriza el trinomio ax^2+bx+c **, buscando cuatro números** $d,\ e,\ f$ y **tales que:**

$$d \quad f \ = a$$
$$e \quad g \ = c$$
$$d \quad g \ + \ f \quad e \ = b$$

Si es que se pueden encontrar estos números, entonces el trinomio se podrá escribir como $ax^2+bx+c= \ dx+e \quad fx+g$ **y en consecuencia la ecuación queda de la siguiente manera.**

$$ax^2+bx+c= \ dx+e \quad fx+g \ =0$$
$$dx+e=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{-e}{d}$$
$$fx+g=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{-g}{f}$$
$$\therefore \quad las\ soluciones\ son: \quad x=\frac{-e}{d} \quad ; \quad x=\frac{-g}{f}$$

Ejemplo: Resuelva cada ecuación por medio de la factorización.

1) $2x^2+11x+5=0$

Buscamos cuatro números, tales que:

$$2 \quad 1 \ =2$$
$$1 \quad 5 \ =5$$
$$2 \quad 5 \ + \ 1 \quad 1 \ =11$$

Luego factorizamos el miembro izquierdo

$$2x^2+11x+5=0$$
$$2x+1 \quad x+5 \ =0$$
$$2x+1=0 \qquad \rightarrow \quad x=\frac{-1}{2}$$
$$x+5=0 \qquad \rightarrow \quad x=-5$$

Por lo que las soluciones o raíces de la ecuación son: $x=\frac{-1}{2} \quad ; \quad x=-5$

2) $12x^2-7x-10=0$

Buscamos cuatro números, tales que:

$$3 \quad 4 \ =12$$
$$2 \quad -5 \ =-10$$
$$3 \quad -5 \ + \ 4 \quad 2 \ =-7$$

Luego factorizamos el miembro izquierdo

$$12x^2 - 7x - 10 = 0$$

$$3x+2 \quad 4x-5 \ = 0$$

$$3x+2=0 \qquad \rightarrow \quad x=\frac{-2}{3}$$

$$4x-5=0 \qquad \rightarrow \quad x=\frac{5}{4}$$

Por lo que las soluciones son: $x=\frac{-2}{3} \quad ; \quad x=\frac{5}{4}$

3) $10x^2 + 7x - 12 = 0$

Buscamos cuatro números, tales que:

$$2 \quad 5 \ = 10$$

$$3 \quad -4 \ = -12$$

$$2 \quad -4 \ + \ 5 \quad 3 \ = 7$$

Luego factorizamos el miembro izquierdo

$$10x^2 + 7x - 12 = 0$$

$$2x+3 \quad 5x-4 \ = 0$$

$$2x+3=0 \qquad \rightarrow \quad x=\frac{-3}{2}$$

$$5x-4=0 \qquad \rightarrow \quad x=\frac{4}{5}$$

Por lo que las soluciones son: $x=\frac{-3}{2} \quad ; \quad x=\frac{4}{5}$

Actividad 6: Resuelva cada ecuación por medio de la factorización.

1) $2x^2 + x - 10 = 0$	2) $6x^2 - 13x - 28 = 0$	3) $6x^2 + 27x + 12 = 0$
=	=	=
=	=	=
+ =	+ =	+ =
Factorizamos el lado izquierdo	Factorizamos el lado izquierdo	Factorizamos el lado izquierdo

MÉTODO DE COMPLETAR UN TRINOMIO CUADRADO PERFECTO (TCP)

Existen ecuaciones cuadráticas con una incógnita, las cuales no se pueden resolver por medio de factorización, por ejemplo $x^2 + x + 1 = 0$**.**
Es por ello que se requiere de una alternativa más general que resuelva toda ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ **con** $a \neq 0$**.**

El método que estudiaremos recibe el nombre de *completar un trinomio cuadrado perfecto (t.c.p.).*

Antes de empezar veamos que es un **trinomio cuadrado perfecto (t.c.p.)**.

En pocas palabras un t.c.p. es aquel trinomio que resulta al desarrollar un binomio al cuadrado, es decir, aquel que tiene la siguiente forma:

$$x^2 \pm 2xy + y^2 = (x \pm y)^2$$

En donde las literales x e y ***pueden cambiarse por otros símbolos o números reales cualesquiera.***

Para identificar trinomios cuadrados perfectos, debemos sacar la raíz cuadrada al primer y tercer término y si el doble del producto de estas dos raíces es igual al segundo término (ignorando el signo), entonces el trinomio es cuadrado perfecto t.c.p., en caso contrario no es trinomio cuadrado perfecto.

Ejemplo: Algunos trinomios cuadrados perfectos son:

1) $x^2 + 8x + 16$ **Es un t.c.p. ya que**

$\sqrt{x^2}$ $\sqrt{16}$

x 4

$\boxed{2(x)(4) = 8x}$

En consecuencia podemos escribir el trinomio, como un binomio al cuadrado

$$x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$$

2) $x^2 - 6x + 9$ **Es un t.c.p. ya que**

$\sqrt{x^2}$ $\sqrt{9}$

x 3

$\boxed{2(x)(3) = 6x}$

En consecuencia podemos escribir el trinomio como un binomio al cuadrado

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$$

3) $4x^2 - 12x + 9$ **Es un t.c.p. ya que**

$\sqrt{4x^2}$ $\sqrt{9}$

$2x$ 3

$\boxed{2(2x)(3) = 12x}$

En consecuencia podemos escribir el trinomio como un binomio al cuadrado

$$4x^2-12x+9=(2x-3)^2$$

Ahora bien, un trinomio que no es cuadrado perfecto es aquel que no cumple lo antes mencionado.

Por ejemplo:

4) x^2-3x+9 No es un t.c.p. ya que

$\sqrt{x^2}$ $\sqrt{9}$

x 3

$\boxed{2(x)(3)=6x\neq 3x}$

5) x^2-4x+5 No es un t.c.p. ya que

$\sqrt{x^2}$ $\sqrt{5}$

x $\sqrt{5}$

$2(x)(\sqrt{5})=2\sqrt{5}x\neq 4x$

Actividad 7: Decida justificando su respuesta, cuales de los siguientes trinomios son cuadrados perfectos y cuando si lo sean, escríbalos como un binomio al cuadrado.

1) x^2+2x+1 2) $y^2-10y+25$ 3) $9x^2+24x+16$ 4) x^2+6x+4

4) x^2-2x+1 6) $4y^2-20y+25$ 7) x^2+x+1 8) $\frac{x^2}{9}+\frac{x}{3}+\frac{1}{4}$

Ahora veamos como se resuelve una ecuación cuadrática con una incógnita completando un trinomio cuadrado perfecto (t.c.p.)

Ejemplo: Resuelva cada ecuación cuadrática completando un t.c.p.

1) $9x^2+24x+16=0$

Primero vemos si el miembro izquierdo es un t.c.p. En este caso, si tenemos un t.c.p., entonces lo escribimos como el cuadrado de un binomio y resolvemos la ecuación despejando la incógnita de manera casi directa.

$$9x^2+24x+16=0$$

$$(3x+4)^2=0$$

$$\sqrt{(3x+4)^2}=\pm\sqrt{0}$$

$$3x+4=\pm 0$$

$$3x=\pm 0-4$$

$$x=\frac{-4}{3}$$

La solución o raíz de la ecuación, se dice *<u>que es repetida o bien que es doble</u>* y esta dada por:

$$x=\frac{-4}{3}$$

2) $x^2+6x+5=0$

Primero vemos si el miembro izquierdo es un t.c.p. y en caso de que no lo sea (para esta ecuación el miembro izquierdo no es t.c.p.), se pasa el coeficiente independiente al miembro derecho con su signo cambiado.

$$x^2+6x=-5$$

Enseguida *les sumamos a los dos miembros de la ecuación obtenida, <u>el cuadrado de la mitad del coeficiente del término lineal</u>. Con ello el trinomio que resulta en el miembro izquierdo será un t.c.p.*

$$x^2+6x+(3)^2=-5+(3)^2$$

Luego escribimos el t.c.p. como un binomio al cuadrado o el cuadrado de un binomio.

$$x^2+6x+(3)^2=-5+(3)^2$$
$$(x+3)^2=-5+9$$
$$(x+3)^2=4$$

Se extrae la raíz cuadrada a ambos miembros y se despeja la incógnita para obtener las soluciones de la ecuación.

$$\sqrt{(x+3)^2}=\pm\sqrt{4}$$
$$x+3=\pm 2$$
$$x=-3\pm 2$$

Por lo tanto, las soluciones o raíces de la ecuación $x^2+6x+5=0$ **son números reales:**

$$x=-3+2=-1$$
$$x=-3-2=-5$$

3) $x^2-10x+21=0$

Primero vemos si el miembro izquierdo es un t.c.p. y en caso de que no lo sea, se pasa el coeficiente independiente al miembro derecho cambiando su signo.

$$x^2-10x=-21$$

Enseguida *les sumamos a los dos miembros de la ecuación obtenida, <u>el cuadrado de la mitad del coeficiente del término lineal</u>. Con ello el trinomio que resulta en el miembro izquierdo será un t.c.p.*

$$x^2-10x+(-5)^2=-21+(-5)^2$$

Luego escribimos el t.c.p. como un binomio al cuadrado o el cuadrado de un binomio.

$$x^2-10x+\ -5\ ^2=-21+\ -5\ ^2$$

$$x-5\ ^2=-21+25$$

$$x-5\ ^2=4$$

Se extrae la raíz cuadrada a ambos miembros y se despeja la incógnita para obtener las soluciones de la ecuación.

$$\sqrt{\ x-5\ ^2}=\pm\sqrt{4}$$

$$x-5=\pm 2$$

$$x=5\pm 2$$

Por lo tanto, las soluciones o raíces de la ecuación $x^2-10x+21=0$ **son números reales:**

$$x=5+2=7$$

$$x=5-2=3$$

4) $x^2+5x-14=0$

Primero vemos si el miembro izquierdo es un t.c.p. y en caso de que no lo sea, se pasa el coeficiente independiente al miembro derecho cambiando su signo.

$$x^2+5x=14$$

Enseguida *les sumamos a los dos miembros de la ecuación obtenida, <u>el cuadrado de la mitad del coeficiente del término lineal</u>. Con ello el trinomio que resulta en el miembro izquierdo será un t.c.p.*

$$x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2=14+\left(\frac{5}{2}\right)^2$$

Luego escribimos el t.c.p. como un binomio al cuadrado o el cuadrado de un binomio y despejamos la incógnita x **.**

$$x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2=14+\left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2=14+\frac{25}{4}$$

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{56+25}{4}$$

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{81}{4}$$

$$\sqrt{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2}=\pm\sqrt{\frac{81}{4}}$$

$$x+\frac{5}{2}=\pm\frac{9}{2}$$

$$x=-\frac{5}{2}\pm\frac{9}{2}$$

Por lo tanto, las soluciones o raíces de la ecuación $x^2+6x+5=0$ **son números reales:**

$$x=-\frac{5}{2}+\frac{9}{2}=\frac{4}{2}=2$$

$$x=-\frac{5}{2}-\frac{9}{2}=-\frac{14}{2}=-7$$

5) $x^2+8x-1=0$

$$x^2+8x=1$$

$$x^2+8x+\ 4\ ^2=1+\ 4\ ^2$$

$$x+4\ ^2=1+16$$

$$x+4\ ^2=17$$

$$x+4=\pm\sqrt{17}$$

$$x=-4\pm\sqrt{17}$$

Por lo que las soluciones reales: $x=-4+\sqrt{17}\approx 0.123$
$x=-4-\sqrt{17}\approx -8.123$

Actividad 8: Resuelve cada ecuación cuadrática completando un trinomio cuadrado perfecto (t.c.p.)

1) $x^2+12x+32=0$ 2) $x^2-4x-32=0$ 3) $x^2+4x-32=0$ 4) $x^2-12x+32=0$
5) $x^2+8x+12=0$ 6) $-x^2-2x+35=0$ 7) $x^2+4x+4=0$ 8) $4x^2-12x+9=0$
9) $x^2+x+1=0$ 10) $2x^2-12x+6=0$ 11) $3x^2+5x-4=0$ 12) $2x^2-7x+9=0$

MÉTODO DE LA FÓRMULA GENERAL

El método anterior (completando un trinomio cuadrado perfecto), permite deducir o construir la fórmula que resuelve a todas las ecuaciones cuadráticas con una incógnita de manera mecánica o rutinaria, ella comúnmente se conoce como la fórmula general para resolver una ecuación de segundo grado con una incógnita.

Enseguida se ilustra como se puede construir dicha fórmula usando el método de completar un **trinomio cuadrado perfecto**.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Completando un trinomio cuadrado perfecto (t.c.p.)

Partimos de la ecuación cuadrática con una incógnita en su forma general y la resolvemos por el método de completar un t.c.p.

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad ; \quad a \neq 0$$

Dividimos la ecuación por a **y obtenemos**

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Se pasa el coeficiente independiente al miembro derecho.

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Ahora completamos un t.c.p. <u>sumando el cuadrado de la mitad del coeficiente del término lineal a los dos miembros de la ecuación</u> y resolvemos (despejamos) para x **.**

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Por lo que, las soluciones o raíces de la ecuación cuadrática quedan dadas por medio de la siguiente fórmula:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Esta se conoce como, la fórmula general para resolver las ecuaciones cuadráticas con una incógnita de la forma:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \quad ; \quad a \neq 0}$$

Al radicando $D = b^2 - 4ac$ **se le llama *discriminante* y permite clasificar las soluciones o raíces de una ecuación cuadrática en tres tipos, a saber,**

Si $D=b^{2}-4ac>0$ **(positivo). Las raíces son reales diferentes.** **Si** $D=b^{2}-4ac=0$ **(cero). La raíz es real, doble o repetida.** **Si** $D=b^{2}-4ac<0$ **(negativo). Las raíces son complejas conjugadas.**

De modo que, con la fórmula general resulta relativamente sencillo resolver cualquier ecuación de segundo grado con una incógnita, siempre que esta se encuentre en la forma ordinaria o general $ax^{2}+bx+c=0$**. En caso que no aparezca en la forma general, hay que llevarla a esta como se ilustra en los siguientes**

Ejemplos: Resuelva cada ecuación cuadrática por medio de **la fórmula general**.

1) $x^{2}+12x+32=0$

Identificamos los coeficientes de los tres términos de la ecuación.

$$a=1 \quad ; \quad b=12 \quad ; \quad c=32$$

Ahora aplicamos la fórmula general.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^{2}-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-12\pm\sqrt{\;12\;^{2}-4\;\;1\;\;\;32}}{2\;\;1}=\frac{-12\pm\sqrt{144-128}}{2}=\frac{-12\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{-12\pm4}{2}$$

De aquí, las raíces de la ecuación son números reales diferentes, a saber

$$x=\frac{-12+4}{2}=\frac{-8}{2}=-4 \quad \text{y} \quad x=\frac{-12-4}{2}=\frac{-16}{2}=-8$$

2) $x^{2}-3x-10=0$

Identificamos los coeficientes de los tres términos de la ecuación.

$$a=1 \quad ; \quad b=-3 \quad ; \quad c=-10$$

Ahora aplicamos la fórmula general.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^{2}-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-\;\;-3\;\;\pm\sqrt{\;-3\;^{2}-4\;\;1\;\;\;-10}}{2\;\;1}=\frac{3\pm\sqrt{9+40}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{3\pm7}{2}$$

De aquí, las raíces de la ecuación son números reales diferentes, a saber:

$$x=\frac{3+7}{2}=\frac{10}{2}=5 \quad \text{y} \quad x=\frac{3-7}{2}=\frac{-4}{2}=-2$$

Actividad 9: Resuelve cada ecuación cuadrática utilizando la fórmula general.

1) $x^2+12x+32=0$ 2) $x^2-4x-32=0$ 3) $x^2+4x-32=0$ 4) $x^2-12x+32=0$

5) $x^2+8x+12=0$ 6) $-x^2-2x+35=0$ 7) $x^2+4x+4=0$ 8) $4x^2-12x+9=0$

9) $x^2+x+1=0$ 10) $2x^2-12x+6=0$ 11) $3x^2+5x-4=0$ 12) $2x^2-7x+9=0$

13) $2x^2-x=3x+10$ 14) $(x+3)^2=2x-1$ 15) $2x=(x+3)(x-2)$ 16) $\frac{2x+1}{3x-4}=x+5$

CLASIFICANDO A LAS RAÍCES DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA

El discriminante permite saber el tipo de raíces que una ecuación cuadrática con una incógnita tiene, es decir si la soluciones o raíces son números reales diferentes, si son repetidas (solución doble) ó si son números complejos conjugados. Todo de acuerdo a su valor de $D=b^2-4ac$, bajo el criterio:

Si $D=b^2-4ac>0$ **las raíces son reales diferentes.**
Si $D=b^2-4ac=0$ **la raíz es real y doble o repetida.**
Si $D=b^2-4ac<0$ **las raíces son complejas conjugadas.**

Ejemplo: De acuerdo al valor del discriminante diga el tipo de soluciones que cada ecuación cuadrática tiene (**sin resolver la ecuación**).

1) $2x^2-5x-3=0$; El valor de su discriminante es $D=(-5)^2-4(2)(-3)=25+24=49>0$
Por lo que, las soluciones son dos números reales diferentes.

2) $9x^2-24x+16=0$; El valor de su discriminante es $D=(-24)^2-4(9)(16)=576-576=0$
Por lo que, las soluciones son números reales repetidos.

3) $x^2+5x+12=0$; El valor de su discriminante es $D=(5)^2-4(1)(12)=25-48=-24<0$
Por lo que, las soluciones son dos números complejos conjugados.

Actividad 10: De acuerdo al valor del discriminante diga el tipo de soluciones que cada ecuación cuadrática tiene (**sin resolver la ecuación**).

1) $x^2+12x+32=0$ 2) $x^2-4x-32=0$ 3) $x^2+4x-32=0$ 4) $x^2-12x+32=0$

5) $x^2+8x+12=0$ 6) $-x^2-2x+35=0$ 7) $x^2+4x+4=0$ 8) $4x^2-12x+9=0$

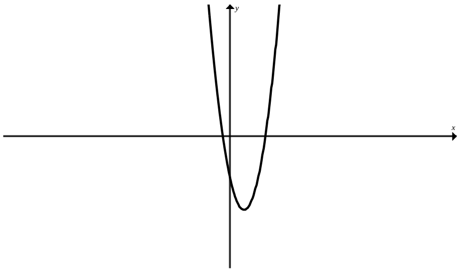
9) $x^2+x+1=0$ 10) $2x^2-12x+6=0$ 11) $3x^2+5x-4=0$ 12) $2x^2-7x+9=0$

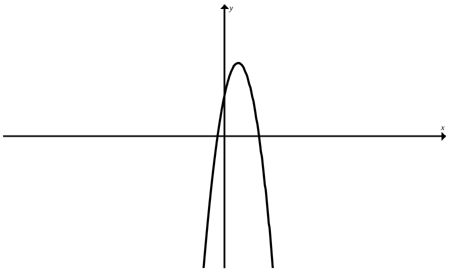
ANÁLISIS GRÁFICO DE LOS TIPOS DE SOLUCIONES O RAÍCES DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA CON UNA INCÓGNITA.

Lo anteriormente expuesto del **discriminante**, se puede visualizar gráficamente en el plano cartesiano, cuando se traza **la grafica de una función cuadrática** de la forma

$$y=ax^2+bx+c$$

Su gráfica de esta función es una **Parábola vertical** como alguna de las que aparecen enseguida.

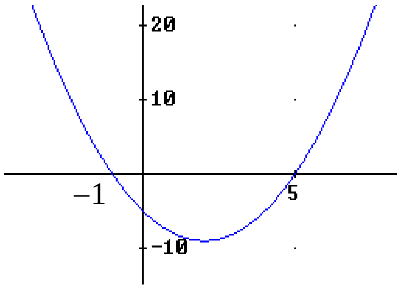




Para ilustrarlo consideremos tres funciones cuadráticas que nos lleven a las tres tipos de soluciones empleando el **método de tabulación (tabla de valores).**

1) La gráfica de la función $y=x^2-4x-5$ es

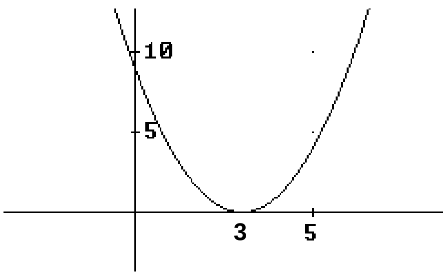
Al hacer $y=0$, se produce la ecuación cuadrática $x^2-4x-5=0$. El valor de su discriminante es $D=36$, lo que significa que la ecuación tiene <u>dos soluciones reales diferentes</u>, a saber $x=-1$ y $x=5$, las cuales son precisamente los puntos donde se corta la parábola con el eje horizontal (eje x)



Cuando el discriminante es positivo $D=36>0$, la parábola se corta en dos puntos, con el eje x

2) La gráfica de la función $y=x^2-6x+9$ es

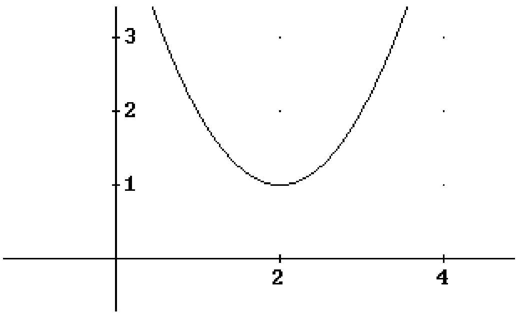
Al hacer $y=0$, se produce la ecuación cuadrática $x^2-6x+9=0$. El valor de su discriminante es $D=0$, lo que significa que la ecuación tiene <u>dos soluciones reales repetidas</u>, a saber $x=3$ y $x=3$, la cual es el único punto donde se corta la parábola con el eje horizontal (eje x)



Cuando el discriminante es cero $D=0$, la parábola se corta en un solo punto con el eje x

3) La gráfica de la función $y=x^2-4x+5$ es

Al hacer $y=0$, se produce la ecuación cuadrática $x^2-6x+9=0$. El valor de su discriminante es $D=0$, lo que significa que la ecuación tiene <u>dos soluciones reales repetidas</u>, a saber $x=3$ y $x=3$, la cual es el único punto donde se corta la parábola con el eje horizontal (eje x)



Cuando el discriminante es negativo $D=-4<0$, la parábola no se corta con el eje x

CONSTRUCCIÓN DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA A PARTIR DE SUS SOLUCIONES O RAÍCES.

Otro aspecto que debemos estudiar es la obtención de una ecuación cuadrática a partir de sus raíces o soluciones, a continuación se presentan diversos ejemplos que muestran como lograrlo.

Recordar que:

$$i^2=\left(\sqrt{-1}\right)^2=-1$$

$$i^3=i^2i=-1i=-i$$

$$i^4=i^2i^2=(-1)(-1)=1$$

Es decir

$$i=\sqrt{-1} \quad ; \quad i^2=-1 \quad ; \quad i^3=-i \quad ; \quad i^4=1$$

Ejemplo: A partir de cada pareja de sus soluciones obtenga la ecuación cuadrática que corresponde.

1) $x=-1$, $x=3$ Escribimos las ecuaciones como: $x+1=0$, $x-3=0$ Luego las multiplicamos entre si para producir $(x+1)(x-3)=0$ y al efectuar dicho producto que aparece en el miembro izquierdo, tenemos la ecuación pedida.

$$x^2-3x+x-3=0$$

$$x^2-2x-3=0$$

Así, la ecuación que tiene como raíces $x=-1$ **y** $x=3$ **es** $x^2-2x-3=0$**.**

$$\begin{aligned} 2)\quad & x=5 && \Rightarrow\; x-5=0 \\ & x=3 && \Rightarrow\; x-3=0 \quad \Rightarrow \quad (x-5)(x-3)=0 \\ & && \qquad\qquad\qquad\quad x^2-8x+15=0 \end{aligned}$$

Así, la ecuación que tiene como raíces $x=5$ **y** $x=3$ **es** $x^2-8x+15=0$

$$\begin{aligned} 3)\quad & x=-7 && \Rightarrow\; x+7=0 \\ & x=3 && \Rightarrow\; x-3=0 \quad \Rightarrow \quad (x+7)(x-3)=0 \\ & && \qquad\qquad\qquad\quad x^2+4x-21=0 \end{aligned}$$

Así, la ecuación que tiene como raíces $x=-7$ **y** $x=3$ **es** $x^2+4x-21=0$

Actividad 11: A partir de cada pareja de sus soluciones obtenga la ecuación cuadrática que corresponde.

1) $x=-1$, $x=4$ 2) $x=-5$, $x=-4$ 3) $x=8$, $x=3$ 4) $x=\frac{-3}{5}$, $x=-7$ 5) $x=\frac{1}{3}$, $x=\frac{5}{2}$ 6) $x=2i$, $x=-2i$

7) $x=1+\sqrt{3}$, $x=1-\sqrt{3}$ 8) $x=4+i$, $x=4-i$

RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS PLANTEADOS EN LA ACTIVIDAD 2

Actividad 12: Resolver cada uno de los 16 problemas planteados en la actividad 2 (utilice el método que quiera para resolver la ecuación cuadrática, (a excepción del 13) construida)

1) Encontrar dos números que sumados den 9 y que multiplicados den 20.

Incógnitas

Primer número: x
Segundo número: y

Planteamiento

$$x+y=9$$
$$xy=20$$

Usando el método de sustitución
Despejamos a y de la primer ecuación

$$x+y=9 \quad\Rightarrow\quad y=9-x$$

Sustituimos en la segunda ecuación

$$xy = 20 \quad \Rightarrow \quad x \;\; 9 - x \;\; = 20$$

$$9x - x^2 = 20$$

$$-x^2 + 9x - 20 = 0$$

Esta última ecuación es cuadrática con una incógnita. $\boxed{-x^2 + 9x - 20 = 0}$

Resolución de la ecuación cuadrática

La ecuación la resolvemos por medio de la factorización del miembro izquierdo.

$$-x^2 + 9x - 20 = 0$$

Se multiplica o divide la ecuación por -1 para obtener

$$x^2 - 9x + 20 = 0$$

Luego factorizamos el trinomio.

$$x - 5 \quad x - 4 \;\; = 0$$

$$Luego \quad x - 5 = 0 \quad \Rightarrow x = 5$$

$$x - 4 = 0 \quad \Rightarrow x = 4$$

$$Si \quad x = 5 \quad \Rightarrow \quad y = 9 - 5 = 4$$

$$Si \quad x = 4 \quad \Rightarrow \quad y = 9 - 4 = 5$$

Finalmente los números solicitados son: $5\ y\ 4$ o $4\ y\ 5$

2) Obtener dos números, tales que, la suma sea igual a 14 y la suma de sus cuadrados sea igual a 100.

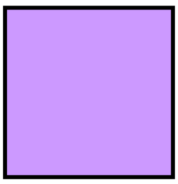
Incógnitas *Planteamiento*
Primer número:
Segundo número:
Resolución de la ecuación cuadrática

3) Obtener dos números, tales que, la resta sea igual a 8 y su producto sea 105.

Incógnitas *Planteamiento*
Primer número:
Segundo número:
Resolución de la ecuación cuadrática

4) El área de un cuadrado es de 729 m^2, ¿Cuánto mide cada lado?

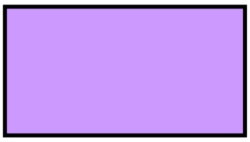
Incógnita *Planteamiento*
Lado del cuadrado:



Resolución de la ecuación cuadrática

5) El área de un terreno de forma rectangular es de 165 m^2, el largo mide 4 metros más que su ancho ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?

Incógnitas *Planteamiento*
Medida del ancho:
Medida del largo:



Resolución de la ecuación cuadrática

6) El cuadrado de un número sumado con su triple de el mismo da 270, ¿Cuál es el número?

Incógnita *Planteamiento*
Un número:
Resolución de la ecuación cuadrática