

# INTRODUÇÃO ÀS CIÊNCIAS FÍSICAS 1

Módulo 3  
Volume 2 – 3ª edição

Maria Antonieta T. de Almeida





Fundação

**CECIERJ**

Consórcio **cederj**

Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

# Introdução às Ciências Físicas 1

Volume 2 - Módulo 3  
3ª edição

Maria Antonieta T. de Almeida



**GOVERNO DO  
Rio de Janeiro**

**SECRETARIA DE  
CIÊNCIA E TECNOLOGIA**



**Ministério  
da Educação**



Apoio:



# Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua Visconde de Niterói, 1364 - Mangueira - Rio de Janeiro, RJ - CEP 20943-001

Tel.: (21) 2299-4565 Fax: (21) 2568-0725

## Presidente

Masako Oya Masuda

## Vice-presidente

Mirian Crapez

## Coordenação do Curso de Física

Luiz Felipe Canto

## Material Didático

### ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO

Maria Antonieta T. de Almeida

### COORDENAÇÃO DE DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL

Cristine Costa Barreto

### DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL E REVISÃO

Alexandre Rodrigues Alves

Márcia Pinheiro

Nilce P. Rangel Del Rio

### COORDENAÇÃO DE LINGUAGEM

Maria Angélica Alves

## Departamento de Produção

### EDITORA

Tereza Queiroz

### REVISÃO TIPOGRÁFICA

Equipe CEDERJ

### COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO

Jorge Moura

### PROGRAMAÇÃO VISUAL

Katy Araújo

Vera Abreu

### ILUSTRAÇÃO

Fábio Muniz de Moura

Morvan de Araujo Neto

### CAPA

Eduardo Bordoni

Fábio Muniz de Moura

### PRODUÇÃO GRÁFICA

Andréa Dias Fiães

Fábio Rapello Alencar

Copyright © 2005, Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada, por qualquer meio eletrônico, mecânico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização, por escrito, da Fundação.

A447i

Almeida, Maria Antonieta T. de.

Introdução às ciências físicas 1. v.2 / Maria Antonieta T. de Almeida. — 3.ed. — Rio de Janeiro : Fundação CECIERJ, 2009. 189p.; 21 x 29,7 cm.

ISBN: 978-85-7648-497-4

1. Movimentos. 2. Vetores. 3. Cinemática vetorial. 4. Leis de Newton. I. Título.

CDD: 530.1

# Governo do Estado do Rio de Janeiro

**Governador**  
Sérgio Cabral Filho

**Secretário de Estado de Ciência e Tecnologia**  
Alexandre Cardoso

## Universidades Consorciadas

**UENF - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO  
NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO**  
Reitor: Almy Junior Cordeiro de Carvalho

**UERJ - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO  
RIO DE JANEIRO**  
Reitor: Ricardo Vieiralves

**UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE**  
Reitor: Roberto de Souza Salles

**UFRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL DO  
RIO DE JANEIRO**  
Reitor: Aloísio Teixeira

**UFRRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL  
DO RIO DE JANEIRO**  
Reitor: Ricardo Motta Miranda

**UNIRIO - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO  
DO RIO DE JANEIRO**  
Reitora: Malvina Tania Tuttman

## SUMÁRIO

### MÓDULO 3 – As medidas experimentais e as observações terrestres

**Recomeçando...** ..... 9

#### **Aula 1 – A descrição do movimento**

Introdução .....	11
O que sei sobre partículas, trajetórias e os vetores deslocamentos? .....	12
Partículas e suas trajetórias .....	13
Referências, observadores e sistemas de coordenadas .....	16
Leituras e exercícios 1 .....	17
Vetores .....	19
Exercícios 2 .....	31
Exercícios programados 5 .....	32
Gabarito .....	33

#### **Aula 2 – Os vetores e suas bases**

Introdução .....	37
O que sei sobre a decomposição de vetores em bases ortogonais? .....	38
Decomposição de vetores .....	39
Exercícios 3 .....	48
Exercícios programados 6 .....	50
Gabarito .....	52

#### **Aula 3 – Cinemática vetorial**

Introdução .....	55
O que sei sobre os vetores cinemáticos e suas relações com as trajetórias? .....	56
Vetores cinemáticos .....	57
Vetor deslocamento .....	58
Vetor posição .....	59
Leituras e exercícios 4 .....	61
Vetor velocidade .....	62
Vetor aceleração .....	67
Movimento unidimensional .....	70
Componentes dos vetores cinemáticos .....	70
Significado geométrico da componente da velocidade e da aceleração no movimento unidimensional .....	70
Problema inverso .....	74
Movimento retilíneo uniforme .....	75
Movimento retilíneo uniformemente acelerado .....	76
Leituras e exercícios 5 .....	78
Exercícios programados 7 .....	79
Gabarito .....	80

## **Aula 4 – O que muda o movimento**

Prática 1 .....	83
-----------------	----

## **Aula 5 – Leis de Newton**

Introdução .....	89
O que sei sobre as leis do movimento e as forças? .....	90
Forças e suas características .....	91
Definição .....	91
Forças de contato .....	92
Forças de ação a distância .....	95
As interações fundamentais da Natureza .....	97
Intensidade, direção e sentido de uma força .....	98
Identificando as forças que atuam sobre corpos .....	99
Leituras e exercícios 6 .....	100
As Leis de Newton .....	102
Primeira Lei de Newton .....	102
As idéias de Galileu sobre o movimento .....	103
Inércia .....	104
A Primeira Lei de Newton .....	105
Leituras e exercícios 7 .....	110
Segunda Lei de Newton .....	112
Leituras e exercícios 8 .....	118
Terceira Lei de Newton .....	119
Leituras e exercícios 9 .....	123
Exercícios programados 8 .....	124
Gabarito .....	126

## **Aula 6 – Outros tipos de movimento**

Introdução .....	135
O que sei sobre a força gravitacional, a força de atrito e os movimentos planos? .....	137
Conhecendo melhor as forças gravitacionais .....	138
Conhecendo melhor a força de atrito .....	139
Leituras e exercícios 10 .....	141
Cinemática do movimento de um projétil e do movimento circular .....	142
Trajetórias parabólicas .....	150
Leituras e exercícios 11 .....	152
Movimento circular .....	153
Explicando a Terceira Lei de Kepler .....	156
Movimento de corpos onde atuam forças impulsivas .....	157
Leituras e exercícios 12 .....	159
Exercícios programados 9 .....	160
Gabarito .....	162

<b>Aula 7 – A flutuação dos corpos</b> .....	169
Prática 2 .....	169
<b>E para terminar...</b> .....	177
<b>Complementos</b>	
Complemento 1 – O centro de massa .....	179
Complemento 2 – Propagação de erros .....	181
Complemento 3 – Construção de um gráfico .....	185
<b>Referências Bibliográficas</b> .....	187
<b>Agradecimentos</b> .....	189



# Recomeçando...

## As medidas experimentais e as observações terrestres

Você está recebendo agora o material referente ao terceiro módulo da nossa disciplina.

No Módulo 2, tentamos entender **de forma qualitativa e descritiva** fenômenos associados aos corpos celestes do **Sistema Solar**. Aprendemos que todos os planetas giram em torno do Sol em órbitas elípticas, que a inclinação do eixo da Terra em relação à sua órbita em torno do Sol é a responsável pelas estações do ano; que as fases da Lua estão associadas ao seu movimento em torno do Terra; que as marés dependem das posições da Lua (em maior escala) e do Sol (em menor escala) em relação à Terra; que o sistema solar surgiu de um colapso gravitacional de uma nuvem de gás e poeira em rotação etc.

Neste módulo, estamos interessados em **descrever quantitativamente** os movimentos de sistemas simples e **entender as suas causas**. Nele, iniciaremos o estudo da teoria denominada **Mecânica da Partícula**.

A escolha dos **conceitos relevantes** para a **descrição dos movimentos** e o estabelecimento das **leis que explicam suas causas** constituem um exemplo belíssimo de modelagem da Natureza construída por cientistas brilhantes como Kepler, Galileu, Newton etc. As **Leis da Mecânica da Partícula** foram apresentadas por Newton no seu livro *Philosophiae naturalis principia mathematica*.

As aulas deste módulo devem ser complementadas por leituras e exercícios dos livros de Antonio Máximo e Beatriz Alvarenga: *Física – volume único*, e do Gref: *Física 1*.

Este módulo foi programado para ter duração média de três semanas e meia. É constituído de sete aulas, é iniciado por este texto, *Recomeçando...* (que você está lendo agora) e acaba no *E para terminar...*

As aulas são:

1. *A descrição dos movimentos*
2. *Os vetores e suas bases*
3. *Cinemática vetorial*
4. *O que muda o movimento*
5. *Leis de Newton*
6. *Outros tipos de movimento*
7. *A flutuação dos corpos*

Ao final do módulo, você encontrará também um complemento sobre o centro de massa, outro complemento sobre incertezas experimentais e a bibliografia.

Nas Aulas de 1 a 3 serão introduzidos os conceitos necessários à descrição dos movimentos: referenciais, partículas, trajetórias, vetor deslocamento, vetor posição, vetor velocidade e vetor aceleração. A construção da trajetória de uma partícula a partir do conhecimento da sua posição inicial e da sua velocidade inicial será realizada qualitativamente e de forma geométrica.

A Aula 4 é um experimento que tem como finalidade mostrar que as forças são vetores.

Na Aula 5 serão discutidas as causas dos movimentos e enunciadas as Leis de Newton. Elas são a base da Mecânica da Partícula. Serão apresentados alguns exemplos simples da aplicação dessas leis.

Na Aula 6 serão analisados movimentos planos, com as Leis de Newton. A Terceira Lei de Kepler será demonstrada para órbitas circulares. Os conceitos de quantidade de movimento e de força média necessários à descrição de colisões também serão apresentados

A Aula 7 é uma prática que tem como finalidade discutir as características da força empuxo e fazer medidas de massas, volumes, densidades etc.

O material para os experimentos a serem utilizados no pólo já está disponível, e os tutores o conhecem bem.

Os principais conceitos abordados são:

- referencial
- partícula
- trajetória
- vetor deslocamento
- vetor posição
- vetor velocidade
- vetor aceleração
- forças

Para acompanhar as discussões feitas, você precisa conhecer as idéias básicas de trigonometria e geometria, saber manipular funções trigonométricas simples e expressões algébricas elementares.

## A descrição do movimento

### Objetivo

Definir alguns dos conceitos necessários para descrever os movimentos: referenciais, trajetórias e vetores.

### Introdução

Estamos cercados por corpos que se movimentam. A maçã que cai da macieira, a Lua que gira em torno da Terra, a Terra que gira em torno do seu eixo e translada em torno do Sol etc. Descrever e descobrir as causas dos movimentos dos corpos é o objetivo da Mecânica.

Nesta aula definiremos alguns dos conceitos necessários para a descrição dos movimentos. Ela é composta por quatro partes:

**O que sei sobre partículas, trajetórias e os vetores deslocamentos?** é um questionário que tem como finalidade levantar as suas idéias prévias sobre o assunto.

**Partículas e suas trajetórias** é um texto que discute estes conceitos.

**Referências, observadores e sistemas de coordenadas** é um texto que discute estes conceitos.

**Vetores** é um texto onde são discutidos os vetores e suas propriedades.

**Leituras e exercícios 1** são textos e exercícios sobre os conceitos tratados nesta aula, dos livros *Mecânica 1 (Gref)* e *Física –Volume Único (Antonio Máximo e Beatriz Alvarenga)*.

Bom trabalho!

## O que sei sobre partículas, trajetórias e os vetores deslocamentos?

As questões apresentadas a seguir têm como finalidade investigar e organizar os seus conhecimentos e idéias prévias sobre partículas, trajetórias e vetores. Escreva em seu caderno, de forma organizada, as respostas às questões. Não consulte livros ou notas de aulas, mas não deixe de respondê-las. A comparação entre suas idéias e conhecimentos sobre partículas, trajetórias e vetores antes e depois de trabalhar esta aula é importante para o seu aprendizado.



### Questionário 1

1. O que é uma *partícula*?
2. Quando um corpo pode ser tratado como *partícula*? Dê exemplos.
3. O que é a *trajetória* de uma partícula?
4. O que é um *referencial*?
5. O que é um *observador*?
6. O que são *coordenadas cartesianas planas*?
7. O que são *coordenadas cartesianas tridimensionais*?
8. Qual a definição do *vetor deslocamento*?
9. Qual é a regra para *somar vetores*?
10. Qual é a regra para *multiplicar um vetor por um número real*?
11. Quais as propriedades *da soma de vetores e da multiplicação de um vetor por um número real*?

## Partículas e suas trajetórias



Na Aula 2 do Módulo 2 foram apresentadas as teorias de Ptolomeu e Copérnico sobre o Sistema Solar. A Teoria de Ptolomeu afirma que o Sol e todos os planetas giram em torno da Terra e a Teoria de Copérnico diz que são os planetas que giram em torno do Sol. Uma pessoa com pouca cultura científica ao ser questionada se é a Terra que gira em torno do Sol ou se é o Sol que gira em torno da Terra responderá que é o Sol que gira em torno da Terra. Todos os dias, todos observam o Sol se deslocar no céu do Leste para o Oeste.

Afinal de contas, é a Terra que gira em torno do Sol ou é o Sol que gira em torno da Terra?

As duas respostas estão corretas, porque a pergunta está incompleta. Para se descrever o movimento de um corpo é necessário se definir o que (objeto de estudo) está se observando e quem (observador) está observando. Na pergunta anterior, o observador não foi especificado. Para um observador fixo na Terra, é o Sol que gira em torno da Terra. Todavia, para um observador fixo no Sol é a Terra que gira em torno do Sol.

O que é incorreto é dizer que todos os planetas e o Sol giram em círculos em torno da Terra. Na Aula 1 do Módulo 2, foi apresentado o argumento utilizado por Galileu para demonstrar que a órbita de Vênus em torno da Terra não podia ser circular.

Todo movimento é relativo, isto é, depende de quem observa.



A escolha do ponto de observação é muito importante na descrição dos movimentos dos corpos. Por exemplo, em um parque de diversões, a carrocinha (objeto de estudo) do pipoqueiro está em repouso para a criança (observador 1) que espera pacientemente a sua pipoca, está se deslocando em linha reta para a mãe (observador 2) que acompanha o filho no passeio do trenzinho e está girando em alta velocidade para o adolescente (observador 3) que está no círculo da morte.

Portanto, podemos concluir que a descrição de um movimento é diferente para diferentes observadores, isto é, todo movimento é relativo a um observador.

Além disso, existem pontos de observação onde a descrição do movimento é mais simples. No caso do nosso exemplo, ele é mais simples para o menino que está esperando a pipoca. Por isso, quando for possível, escolheremos o ponto de observação que permita a descrição mais simples do movimento. Do ponto de vista prático, nem sempre é possível analisar o movimento de um ponto de observação onde a sua descrição é a mais simples. Por exemplo, na ocasião em que foram feitos os estudos para descobrir qual era o movimento dos planetas, as observações só eram possíveis da Terra. No entanto, a descrição do movimento dos planetas é mais simples com o ponto de observação no Sol.

Um corpo pode ter um movimento simples, como no caso de um pequeno pedaço de giz que é arremessado por um estudante para atingir o seu colega de classe, ou um movimento mais complicado, como um atleta de saltos ornamentais que se encolhe após pular de um trampolim. O giz se desloca no espaço sem girar e sem se deformar e o atleta se desloca no espaço girando e deformando.

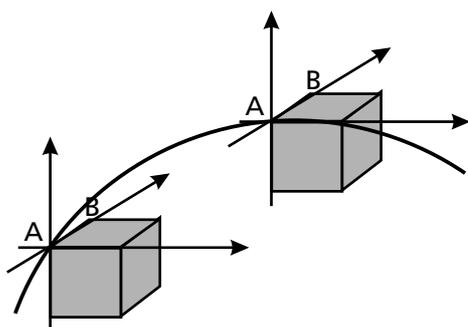


Figura 1 - Movimento de translação.

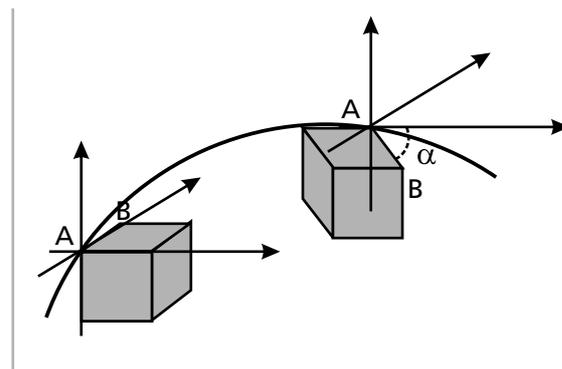


Figura 2 - Movimento de translação e rotação.

Nesta aula, definiremos os conceitos relevantes para a descrição dos movimentos de corpos que se deslocam no espaço sem girar e sem deformar (Figura 1). Neste caso, o conhecimento da forma do corpo e do movimento de um dos seus pontos (por exemplo, do ponto A) permite a descrição completa do seu movimento (Figura 1). Dizemos nesse caso que o corpo pode ser tratado como uma partícula.

**PARTÍCULA**

**PARTÍCULA** é um modelo utilizado na descrição do movimento de um corpo em que se supõe que toda a massa do corpo está em um ponto. A linha gerada pelo deslocamento de uma partícula é denominada de **TRAJETÓRIA**.

**TRAJETÓRIA**

A descrição do movimento de corpos que transladam e giram (Figura 2) só será apresentada na disciplina de Física I.

Em algumas ocasiões, quando estamos interessados em descrever parcialmente o movimento de um corpo, podemos tratar sistemas que giram e deformam como partículas.

Por exemplo, na descrição da órbita da Terra em torno do Sol (ponto de observação) podemos tratar a Terra como uma partícula porque a distância média da Terra ao Sol é muito maior do que o raio da Terra, sendo portanto as dimensões da Terra irrelevantes para solucionar esse problema. No entanto, se quisermos analisar as estações do ano nosso planeta não pode ser tratado como partícula.

P1 – O QUE É UMA *PARTÍCULA*?

P2 – QUANDO UM CORPO PODE SER TRATADO COMO *PARTÍCULA*? DÊ EXEMPLOS.

P3 – O QUE É A *TRAJETÓRIA* DE UMA *PARTÍCULA*?

Chamaremos, a partir de agora, o corpo ou conjunto de corpos que estão sendo observados de *SISTEMA*. Todo o resto do Universo será denominado de exterior. Por exemplo, se a Terra for o nosso sistema, o *EXTERIOR* será constituído por tudo que não é a Terra, por exemplo, corpos celestes, poeira cósmica etc.

Na realidade, é possível demonstrar que para qualquer sistema sempre existe um ponto do espaço, o *CENTRO DE MASSA*, que ao se deslocar gera uma curva (trajetória do centro de massa) igual à da trajetória de uma partícula com a massa do sistema e que sofre as mesmas ações que o exterior exerce sobre o sistema. Por exemplo, se considerarmos a Terra como uma esfera rígida o centro de massa será o centro da esfera. Se considerarmos que somente o Sol atua sobre a Terra, isto é, que as ações dos outros corpos celestes sobre ela são desprezíveis, a trajetória do centro de massa será igual à trajetória de uma partícula com a massa da Terra e que sofre apenas a ação do Sol.

A seguir, definiremos alguns dos conceitos necessários para a descrição do movimento de uma partícula.

Ver Aula 1  
do Módulo 2.

*SISTEMA*  
*EXTERIOR*

*CENTRO DE MASSA*



Leia mais  
detalhes  
sobre o  
centro de  
massa no

Complemento 1.

## Referências, observadores e sistemas de coordenadas

### COORDENADAS CARTESIANAS PLANAS

**SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS NO PLANO:** par ordenado que determina a distância perpendicular a dois eixos perpendiculares. Na Figura 3 as coordenadas cartesianas do ponto A são o par ordenado  $(X_A, Y_A)$ .

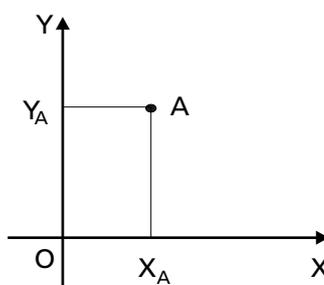


Figura 3 – Coordenadas cartesianas do ponto A.

### COORDENADAS CARTESIANAS TRIDIMENSIONAIS

**COORDENADAS CARTESIANAS TRIDIMENSIONAIS:** conjunto ordenado com 3 números que medem a distância perpendicular de um ponto a três eixos perpendiculares.

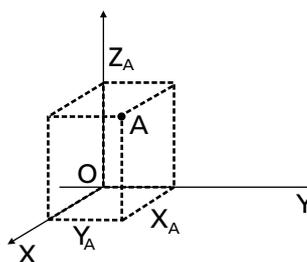


Figura 4 – As coordenadas cartesianas do ponto A são  $X_A, Y_A$  e  $Z_A$ .

### REFERENCIAL

**REFERENCIAL:** é um corpo rígido em relação ao qual se podem especificar as coordenadas espaciais e temporais de eventos físicos. Para se medir distâncias utiliza-se uma régua, e para medir tempos utilizam-se relógios. Um referencial S pode ser visualizado em termos bem concretos: por exemplo, três barras rígidas definindo um sistema de eixos cartesianos, que podem ser tomados como comprimentos unitários, para medidas das coordenadas e um relógio para medida de tempos (Figura 5). Na disciplina de Física I será realizada uma discussão mais detalhada sobre esse conceito. É comum representar os referenciais nas figuras dos livros apenas pelo seu sistema de eixos cartesianos. É essa representação gráfica simplificada dos referenciais que será adotada neste módulo.

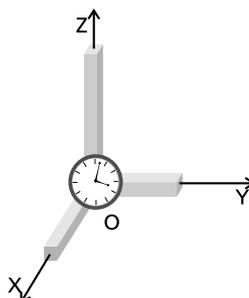


Figura 5 – Referencial S.

**OBSERVADOR:** é um agente físico em um referencial capaz de realizar medições. Ele pode ser uma pessoa ou aparelho programado para medir.

**OBSERVADOR**

P4 – O QUE SÃO COORDENADAS CARTESIANAS PLANAS?

P5 – O QUE SÃO COORDENADAS CARTESIANAS TRIDIMENSIONAIS?

P6 – O QUE É UM REFERENCIAL?

P7 – O QUE É UM OBSERVADOR?

## Leituras e exercícios 1

### Leitura

Leia sobre os assuntos *Conceito do movimento* na seção 2.1 do Capítulo 2 do livro de Antonio Máximo e Beatriz Alvarenga, *Física - volume único*. Dessa mesma seção resolva os exercícios de fixação de números de 1 até 6.

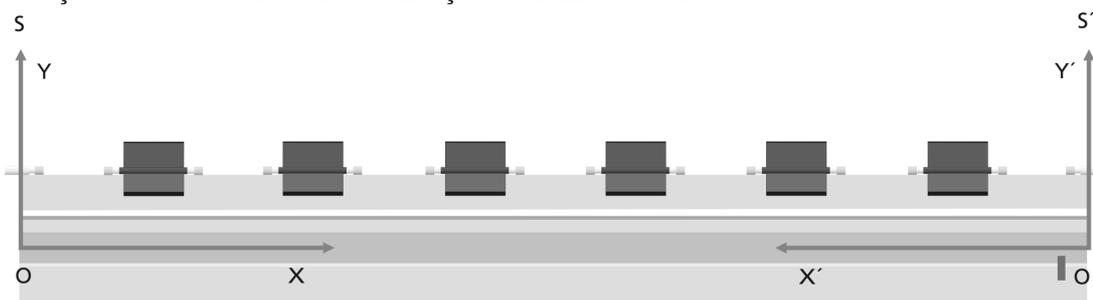


Figura 6 – Carrinho em um trilho de ar.

### Exercício 1

A Figura 6 é uma cópia da foto estroboscópica de carrinho que se desloca em um trilho de ar da esquerda para a direita.

1. Neste movimento, o carrinho pode ser tratado como partícula? Justifique a sua resposta.
2. Escolha um dos pontos do carrinho (A) e desenhe a sua trajetória para o referencial S fixo no trilho e com os eixos coordenados OXY desenhados na Figura 6.
3. Meça na Figura 6 a coordenada  $x$  do ponto A para o sistema de referência S representado pelos eixos coordenados OXY desenhados na Figura 6.
4. Faça um gráfico de  $x$  versus  $t$  para o carrinho. O intervalo de tempo entre as fotografias é o mesmo. Considere este intervalo como unitário. Utilize papel milimetrado.
5. Repita os itens de 2 até 3 para o ponto A e para o referencial S' fixo na Terra com eixos O'X'Y'.

Veja o Complemento 3  
“Construção de  
um gráfico”.

### Exercício 2

A Figura 7 é uma cópia da foto estroboscópica de uma esfera em queda livre.

1. Neste movimento, a esfera pode ser tratada como partícula? Justifique a sua resposta.

2. Escolha um dos pontos da esfera (A) e desenhe a sua trajetória para o referencial S fixo na Terra e com os eixos coordenados OXY desenhados na Figura 7.

3. Meça na Figura 7 a coordenada  $y$  do ponto A para o sistema de eixos coordenados OXY desenhado na figura.

4. Faça um gráfico de  $y$  versus  $t$  da esfera em função do tempo. O intervalo de tempo entre as fotografias é o mesmo. Considere este intervalo como unitário. Utilize papel milimetrado.

5. Repita os itens de 2 até 3 para o ponto A e para o referencial S' fixo no trilho com eixos O'X'Y'.

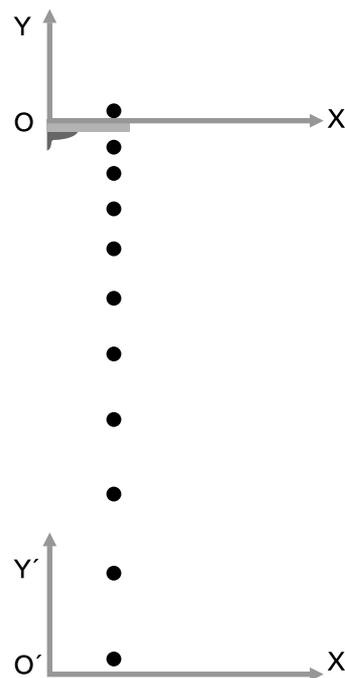


Figura 7 - Queda livre de uma esfera.

### Exercício 3

A Figura 8 é uma cópia da foto estroboscópica de uma esfera que foi arremessada de uma plataforma de madeira.

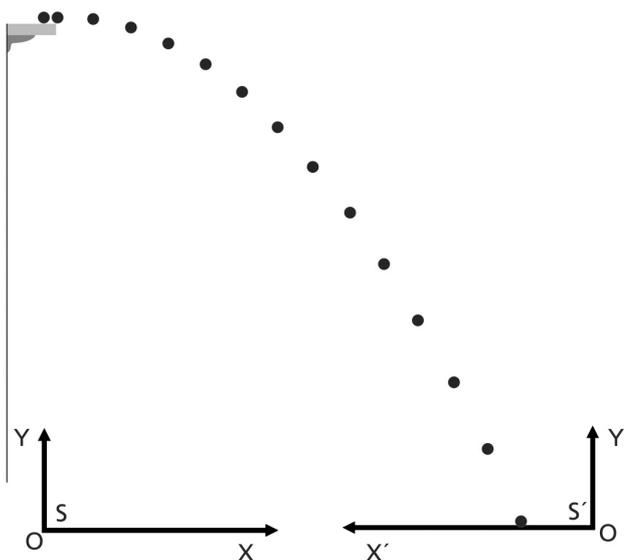


Figura 8 - Esfera arremessada.

1. Neste movimento, a esfera pode ser tratada como partícula? Justifique a sua resposta.
2. Escolha um dos pontos da esfera e desenhe a sua trajetória para o referencial S fixo na Terra e representado pelos eixos coordenados OXY desenhados na figura 8.
3. Meça na Figura 8 as coordenadas  $(x,y)$  do ponto A para o referencial S. Faça os gráficos  $x$  versus  $t$  e  $y$  versus  $t$  para a esfera. O intervalo de tempo entre as fotografias é o mesmo. Considere este intervalo como unitário. Utilize papel milimetrado.
4. Repita os itens de 2 até 3 para o ponto A e para o referencial S' fixo na plataforma com eixos O'X'Y'.

## Vetores



### Vetor deslocamento

Iniciaremos a nossa discussão sobre vetores analisando deslocamentos entre dois pontos.

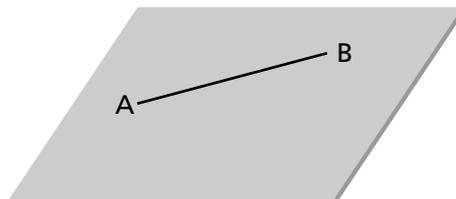


Figura 9 - Menor caminho entre dois pontos de um plano.

Em um plano, o menor caminho entre dois pontos é uma linha reta. Na Figura 9 representamos o menor caminho entre os pontos A e B localizados em um plano.

Em um espaço curvo, o menor caminho entre dois pontos não é uma reta. Por exemplo, em uma superfície esférica o menor caminho entre dois pontos é um arco de círculo. A Figura 10 mostra o menor caminho entre os pontos A e B de uma superfície esférica.

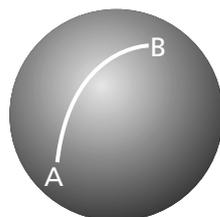


Figura 10- O menor caminho entre dois pontos em uma superfície esférica.

O arco de círculo  $AB$  pode ser tratado aproximadamente como uma reta quando as suas dimensões são muito menores que o raio da esfera.

A superfície da Terra pode ser considerada aproximadamente como uma esfera com raio da ordem de 6400km. As áreas das cidades terrestres são muito menores do que a área da Terra. Por isso, podemos tratar as superfícies das cidades como planos. Nelas o menor caminho entre dois pontos é uma reta. Certamente, essa é uma das razões pelas quais os deslocamentos retilíneos adquiriram importância no estudo do movimento dos corpos. Vamos estudar agora as propriedades relevantes desses deslocamentos.

Para entender quais as propriedades importantes de um deslocamento retilíneo, vamos imaginar que, em uma gincana, a última tarefa da equipe consiste em encontrar um objeto que foi enterrado em um terreno com forma retangular. O terreno está completamente vazio e o seu centro foi marcado por uma pequena pedra (Figura 11). A organização da gincana fez três mapas sem desenhos. Os mapas só contêm informações escritas. Eles são sorteados entre as equipes e os seus conteúdos são:

- Mapa 1: a partir do centro do terreno ande um metro.
- Mapa 2: a partir do centro do terreno ande um metro na direção perpendicular ao portão.
- Mapa 3: a partir do centro do terreno ande um metro, se aproximando do portão e na direção perpendicular a ele.



Figura 11 – Terreno onde o objeto foi enterrado.

Quem vai encontrar o objeto primeiro? Certamente, a equipe que tem a maior chance de encontrar o objeto é aquela que recebeu o mapa 3. Descrevemos a seguir os pontos indicados por cada um dos mapas.

A equipe que recebeu o mapa 1 tem que procurar o objeto enterrado em todos os pontos do círculo com raio de 1m e centro na pedra (Figura 12-a). A equipe com o mapa 2 precisa procurar o objeto apenas nos pontos A e B (Figura 12-b). Aquela com o mapa 3 pode ir direto ao local em que o objeto está enterrado, que é o ponto A da Figura 12-c.

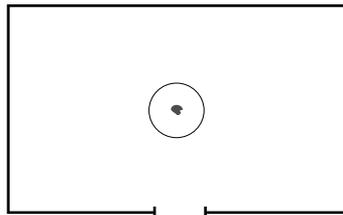


Figura 12-a - Mapa 1.

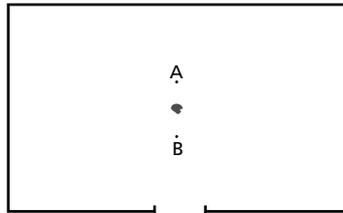


Figura 12-b - Mapa 2.

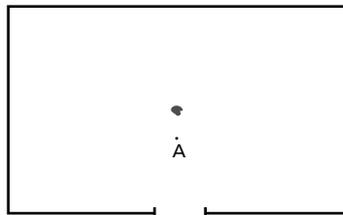


Figura 12-c - Mapa 3.

A discussão anterior mostra que as informações completas sobre um deslocamento têm que conter além do seu tamanho (1m), a sua direção (perpendicular ao muro que contém o portão) e o seu sentido (se aproximando do portão). A figura geométrica que contém todas essas informações é um segmento de reta orientado com comprimento de 1m (Figura 13).

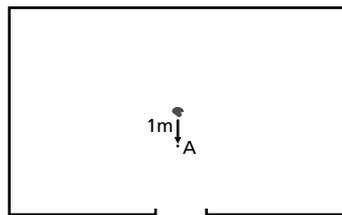


Figura 13 - Deslocamento.

Para reforçar que um deslocamento é um segmento de reta orientado, é costume representá-lo por uma letra com um segmento de reta orientado em cima, por exemplo,  $\vec{a}$ . Dizemos que  $\vec{a}$  é a representação simbólica de um deslocamento, e o segmento de reta orientado é a representação geométrica do deslocamento.

Consideraremos iguais os deslocamentos com a mesma direção, o mesmo módulo (tamanho) e o mesmo sentido, independente do fato de eles serem aplicados em pontos diferentes (pontos A e B da Figura 14).

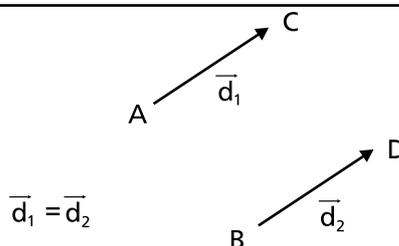


Figura 14 - Deslocamentos iguais.

Apesar de o menor caminho entre dois pontos ser uma reta, nem sempre na vida prática é possível se deslocar em linha reta entre dois pontos. Por exemplo, o muro que cerca o terreno representado da Figura 15 impede o deslocamento retilíneo de uma pessoa entre os pontos C e D. Nesse caso, o menor caminho entre os pontos C e D é constituído por dois deslocamentos retilíneos.

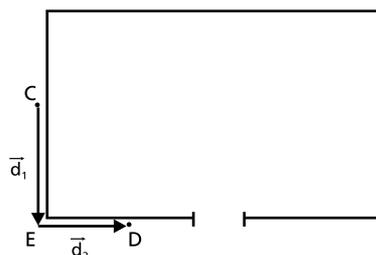


Figura 15 - Deslocamentos.

O primeiro deslocamento é um segmento reta orientado que vai de C para E com tamanho  $d_1$  e o segundo é um segmento de reta orientado que vai de E para D e tem tamanho  $d_2$  (Figura 16).

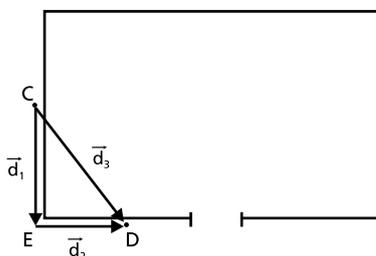
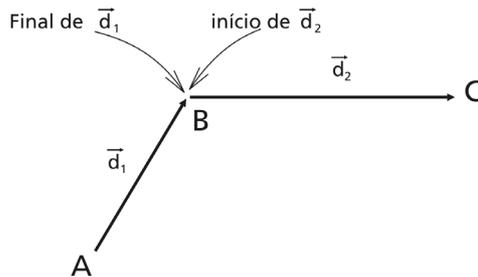


Figura 16 - Soma de deslocamentos.

Dizemos que se deslocar de C para E a seguir se deslocar de E para D é equivalente a se deslocar diretamente de C para D. Na Figura 16 está representado o segmento de reta orientado associado ao deslocamento de C para D ( $\vec{d}_3$ ).

Na realidade, podemos pensar que os deslocamentos foram “somados”, onde somar dois deslocamentos significa encontrar um deslocamento que permita sair diretamente do ponto de origem (C) até o ponto de chegada (D). Na prática, isto significa fazer as seguintes operações:

1. Ligar o final do segmento de reta orientado que representa o primeiro deslocamento (parte com a seta) com o início do segmento de reta orientado que representa o segundo deslocamento (parte sem a seta na Figura 17-a);



2. Ligar o início do segmento de reta orientado que representa o primeiro deslocamento (parte sem a seta) com o final do segmento de reta orientado que representa o segundo deslocamento (parte com a seta).

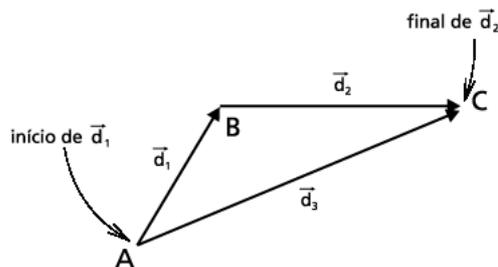


Figura 17-b - Soma de deslocamentos.

Na Figura 17-b estão representados os deslocamentos sucessivos  $\vec{d}_1$  e  $\vec{d}_2$  e a sua soma, que é o deslocamento  $\vec{d}_3$ .

A representação simbólica da operação descrita acima é

$$\vec{d}_3 = \vec{d}_1 + \vec{d}_2.$$

**Atividade 1:** Transforme os quatro metros de pedreiro da sua “Caixa de experimentos” em segmentos de reta orientados da seguinte forma: corte três triângulos de papelão. Cole-os em uma das extremidades do metro de pedreiro. O final do segmento de reta orientado vai coincidir a ponta da seta. A ponta da seta deve coincidir com uma das extremidades do metro de pedreiro. O início do segmento de reta orientado pode ser marcado com um palito.

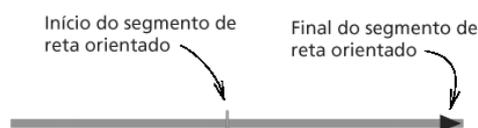


Figura 18 - Metro de pedreiro transformado em segmento de reta orientado.

**Atividade 2:** Faça com os metros de pedreiro já transformados em segmentos de reta orientados as seguintes somas de deslocamentos:

a.  $\vec{d}_1 + \vec{d}_2$ ; b.  $\vec{d}_2 + \vec{d}_1$ ; c.  $\vec{d}_3 + \vec{d}_4$ ; d.  $\vec{d}_2 + \vec{d}_5$ .

Lembre-se de que somar deslocamentos é repetir as operações 1 e 2 definidas anteriormente e representadas nas Figuras 17-a e 17-b.

Os deslocamentos estão representados na Figura 19. A unidade de medida definida pelo quadriculado da Figura 19 vale 20cm.

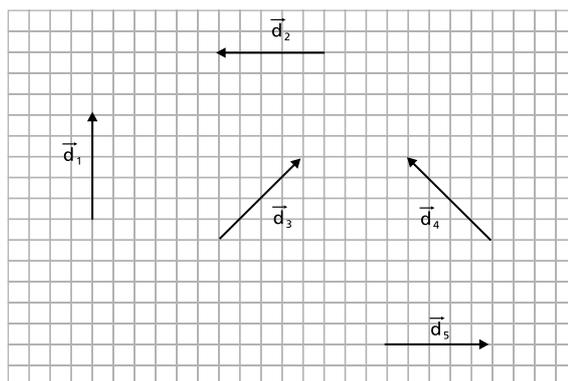


Figura 19 – Atividade 2.

A **Figura 20** mostra que a aplicação sucessiva dos deslocamentos  $\vec{d}_1$  e  $\vec{d}_2$  ao ponto A produz o mesmo ponto D, independentemente da ordem em que os deslocamentos ocorrem.

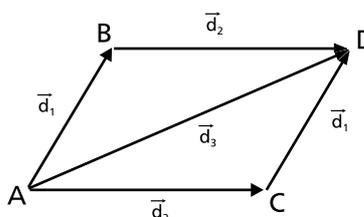


Figura 20 – Regra do paralelogramo.

Podemos deslocar com  $\vec{d}_1$  até B e com  $\vec{d}_2$  até D ou com  $\vec{d}_2$  até C e  $\vec{d}_1$  até D. Isto é, a soma de dois deslocamentos é comutativa.

$$\vec{d}_1 + \vec{d}_2 = \vec{d}_2 + \vec{d}_1.$$

A **Figura 20** mostra que o desenho que descreve as somas  $\vec{d}_1 + \vec{d}_2$  e  $\vec{d}_2 + \vec{d}_1$  é um paralelogramo; dizemos que os deslocamentos se somam pela **regra do paralelogramo**.

**P8 – QUAIS SÃO AS INFORMAÇÕES NECESSÁRIAS PARA CARACTERIZAR COMPLETAMENTE UM DESLOCAMENTO?**

**P9 – COMO SE SOMAM DOIS DESLOCAMENTOS?**

**Atividade 3:** Utilize os metros de pedreiro para verificar a veracidade da regra do paralelogramo para os deslocamentos  $\vec{d}_1 + \vec{d}_2$  e  $\vec{d}_2 + \vec{d}_1$  obtidos na atividade 2 (Figura 18).

Na Figura 20 está representada a soma de deslocamentos  $(\vec{d}_1 + \vec{d}_2)$  e  $\vec{d}_3$ . O deslocamento resultante foi obtido através da aplicação da regra da soma aos deslocamentos  $\vec{d}_1$  e  $\vec{d}_2$ , seguida da aplicação da mesma regra aos deslocamentos  $\vec{d}_1 + \vec{d}_2$  e  $\vec{d}_3$ .

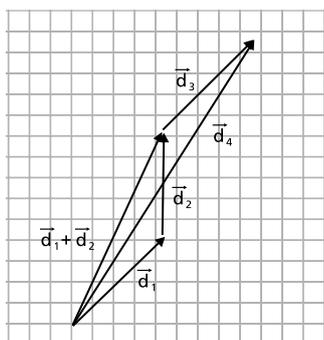


Figura 21 - Soma de deslocamentos sucessivos.

A observação da Figura 21 mostra que para somar deslocamentos sucessivos é suficiente realizar os seguintes passos:

1. Ligar o final (parte com a seta) do deslocamento anterior com o início (parte sem a seta) do deslocamento seguinte;

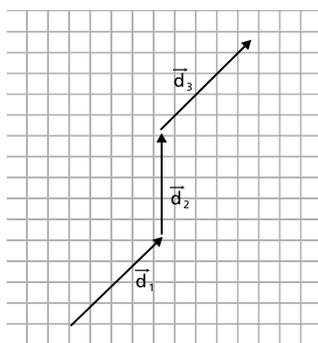


Figura 22-a - Soma de deslocamentos sucessivos.

2. ligar o início (parte sem seta) do primeiro deslocamento com o final (parte com seta) do último deslocamento.

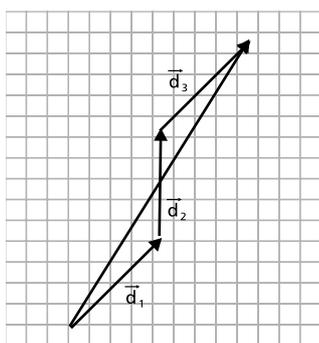


Figura 22-b - Soma de deslocamentos sucessivos.

**Atividade 4:** Utilize os deslocamentos representados na Figura 19 para fazer com os metros de pedreiro a soma do deslocamento  $\vec{d}_1 + \vec{d}_2$  com o deslocamento  $\vec{d}_3$ . Represente o deslocamento resultante (soma dos deslocamentos) com um quarto metro de pedreiro.

Além da soma de deslocamentos, existe uma outra operação com os deslocamentos que relaciona deslocamentos com a mesma direção.

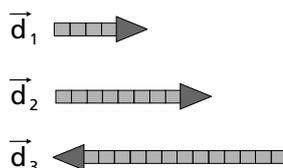


Figura 23 - Deslocamentos com a mesma direção.

Na Figura 23, observamos deslocamentos com a mesma direção e comprimentos proporcionais a 1:2:3. Os dois menores têm o mesmo sentido e o maior tem sentido contrário a eles. Podemos representá-los da seguinte forma:

$$\vec{d}_2 = 2\vec{d}_1; \vec{d}_3 = -3\vec{d}_1.$$

Isto é, podemos definir uma operação de **multiplicação**  $\alpha\vec{d}$  de um deslocamento  $\vec{d}$  por um número real  $\alpha$  da seguinte forma:

Se  $\alpha > 0$  o deslocamento  $\alpha\vec{d}$  tem a mesma direção do deslocamento  $\vec{d}$ , o mesmo sentido e módulo  $|\alpha||\vec{d}|$ .

Se  $\alpha < 0$  o deslocamento  $\alpha\vec{d}$  tem a mesma direção do deslocamento  $\vec{d}$ , o sentido contrário ao de  $\vec{d}$  e módulo  $|\alpha||\vec{d}|$ .

**Atividade 5:** Represente um deslocamento  $\vec{d}$  com um dos metros de pedreiro. Construa com o outro metro de pedreiro os deslocamentos  $2\vec{d}$ ,  $-\vec{d}$ ,  $-3\vec{d}$ .

P10 – QUAL É A REGRA PARA MULTIPLICAR UM DESLOCAMENTO POR UM NÚMERO REAL?

As grandezas que podem ser representadas por segmentos de retas orientados, que se somam pela regra do paralelogramo e têm uma operação de multiplicação por um número real são denominadas VETORES.

A soma e a multiplicação de os números reais têm as seguintes propriedades:

1.  $a + b = b + a$
2. Existe  $e \in \mathbb{R}$  tal que  $a + e = a$

PRODUTO DE UM  
DESLOCAMENTO POR  
UM NÚMERO REAL

VETORES

3. Existe  $b \in \mathbb{R}$  tal que  $a + b = 0$
4.  $a + (b + c) = (a + b) + c$
5.  $ab = ba$
6. Existe  $e \in \mathbb{R}$  tal que  $ae = a$
7. Se  $a \neq 0$  então existe  $b \in \mathbb{R}$  tal que  $ab = e$
8.  $a(b + c) = ab + ac$
9.  $|a - b| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$

São estas propriedades que permitem uma manipulação algébrica simples dos números reais. Com elas podemos inverter a ordem dos fatores na soma e na multiplicação, associar e desassociar elementos de uma soma, fatorar expressões colocando os termos comuns em evidência, distribuir o produto sobre a soma de números reais, trocar de lados elementos de uma igualdade e de uma desigualdade etc.

A operação de soma ( $\vec{a} + \vec{b}$ ) e a multiplicação de um vetor por um número real ( $\alpha\vec{a}$ ) apresentam algumas das propriedades da soma e da multiplicação dos números reais. Listamos algumas destas propriedades a seguir.

1.  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ .

A comutatividade da soma de vetores já foi demonstrada. Ela permite trocar a ordem dos vetores em uma soma.

2. Existe  $\vec{e} \in V$  tal que  $\vec{a} + \vec{e} = \vec{a}$ .

O vetor  $\vec{e} = \vec{0}$  é o elemento neutro da soma de vetores. Ele é um vetor com módulo zero.

3. Existe  $\vec{b} \in V$  tal que  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ .

A aplicação da regra do paralelogramo aos vetores  $\vec{a}$  e  $-\vec{a}$  mostra que o elemento simétrico ( $\vec{b}$ ) de um vetor  $\vec{a}$  é o vetor  $-\vec{a}$ .

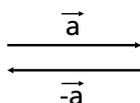


Figura 24-a - Elemento simétrico.

Soma  $\vec{a} + (-\vec{c})$  de um vetor  $\vec{a}$  com o vetor simétrico  $-\vec{c}$  do vetor  $\vec{c}$  define a subtração de vetores. Ela é denotada de forma simplificada como  $\vec{a} - \vec{c}$ . Para realizá-la é suficiente aplicar a regra do paralelogramo aos vetores  $\vec{a}$  e  $-\vec{c}$ .

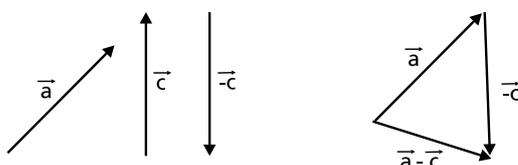


Figura 24-b - Subtração de vetores.

**Atividade 6:** Utilize os deslocamentos representados na Figura 19 para fazer com os metros de pedreiro a subtração de deslocamentos  $\vec{d}_1 - \vec{d}_2$ .

$$4. \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}.$$

A propriedade de associatividade da soma de vetores é facilmente observada na Figura 25.

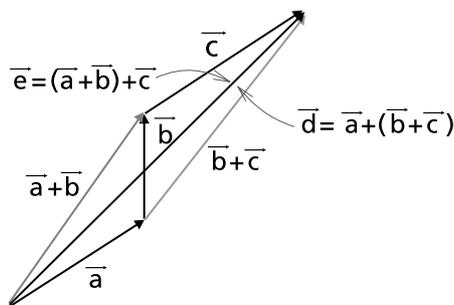


Figura 25 - Associatividade da soma de vetores.

As propriedades 1 e 4 permitem escrever a soma de vetores sem os parênteses, uma vez que a ordem em que os vetores são acionados não altera o resultado, isto é,

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$

$$5. \alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}.$$

A verificação da propriedade 5 é imediata, uma vez que:

- O vetor  $\beta\vec{a}$  tem a direção do vetor  $\vec{a}$  e o módulo  $|\beta||\vec{a}|$ . Se  $\beta > 0$  o sentido de  $\beta\vec{a}$  é igual ao de  $\vec{a}$ , e se for negativo o sentido é contrário.

- O vetor  $\alpha(\beta\vec{a})$  tem a direção do vetor  $\beta\vec{a}$ , que é a mesma do vetor  $\vec{a}$ , e módulo  $|\alpha||\beta\vec{a}| = |\alpha||\beta||\vec{a}|$ . O sentido de  $(\alpha\beta)\vec{a}$  será igual ao sentido de  $\vec{a}$  se  $\alpha\beta > 0$ , e contrário se  $\alpha\beta < 0$ . Por exemplo, suponha que  $\alpha = -2$  e  $\beta = -3$  ( $\alpha\beta = 6 > 0$ ), neste caso o vetor  $-3\vec{a}$  tem o sentido contrário ao do vetor  $\vec{a}$  e o vetor  $-2(-3\vec{a})$  tem o sentido contrário ao do vetor  $-3\vec{a}$ , sendo o seu sentido igual ao sentido do vetor  $\vec{a}$ . No caso em que  $\alpha = 2$  e  $\beta = -3$  ( $\alpha\beta = -6 < 0$ ), o vetor  $-3\vec{a}$  tem o sentido contrário ao sentido do vetor  $\vec{a}$  e o vetor  $2(-3\vec{a})$  tem o mesmo sentido do vetor  $-3\vec{a}$ , sendo o seu sentido contrário ao sentido do vetor  $\vec{a}$ .

- O vetor  $(\alpha\beta)\vec{a}$  tem a direção do vetor  $\vec{a}$  e o módulo igual a  $|(\alpha\beta)\vec{a}| = |\alpha\beta||\vec{a}| = |\alpha||\beta||\vec{a}|$ . O seu sentido será igual ao sentido de  $\vec{a}$  se  $\alpha\beta > 0$ , e contrário se  $\alpha\beta < 0$ .

A comparação entre os módulos, as direções e os sentidos dos vetores  $\alpha(\beta\vec{a})$  e  $(\alpha\beta)\vec{a}$  mostram que eles são iguais.

$$6. \alpha(\vec{b} + \vec{c}) = \alpha\vec{b} + \alpha\vec{c}$$

A propriedade 6, que permite distribuir o produto de um número real sobre a soma de vetores, é fácil de demonstrar utilizando-se propriedades de triângulos semelhantes. Vamos supor inicialmente que  $\alpha > 0$ .

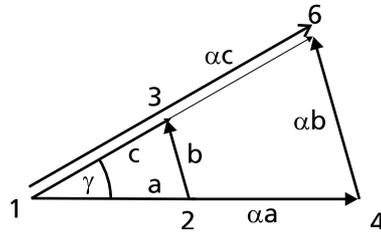


Figura 26 - Distribuindo o produto sobre a soma de vetores.

A Figura 26 mostra o triângulo 123 construído com vetores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e com o vetor  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ . O triângulo 146 foi construído prolongando-se os lados  $\overline{13}$  e  $\overline{12}$  e passando pelo ponto 4, que dista  $\alpha a$  do ponto 1, uma reta paralela ao vetor  $\vec{b}$ . Ele é semelhante ao triângulo 123, uma vez que todos os seus ângulos são iguais aos ângulos do triângulo 123. A semelhança entre os triângulos permite escrever as relações:

$$\frac{a}{\alpha a} = \frac{b}{\overline{46}} = \frac{c}{\overline{16}} \Rightarrow \overline{46} = \alpha b \quad \text{e} \quad \overline{16} = \alpha c .$$

Por isso, o segmento de reta orientado  $\overrightarrow{46}$  é o vetor  $\alpha \vec{b}$ , o segmento orientado  $\overrightarrow{14}$  é o vetor  $\alpha \vec{a}$  e o segmento orientado  $\overrightarrow{16}$  é o vetor  $\alpha \vec{c}$ . O triângulo 146 define a soma dos vetores  $\alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}$  e tem como resultado o vetor  $\alpha \vec{c}$ , isto é,  $\alpha \vec{a} + \alpha \vec{b} = \alpha \vec{c} = \alpha(\vec{a} + \vec{b})$ . A propriedade 6 está demonstrada para  $\alpha > 0$ . A demonstração para  $\alpha < 0$  é análoga e não será apresentada.

**P11 - POR QUE OS ÂNGULOS DO TRIÂNGULO 123 E 146 SÃO IGUAIS?**

$$7. \quad \left| |\vec{a}| - |\vec{b}| \right| \leq |\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}| .$$

A propriedade 7 é uma consequência imediata da regra que define a soma de vetores e das propriedades geométricas de um triângulo. A Figura 27 mostra o triângulo construído com os vetores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ .

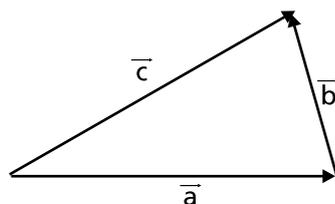


Figura 27 - Desigualdade triangular.

Os lados de um triângulo satisfazem a desigualdade triangular, isto é,  $||\vec{a}| - |\vec{b}|| \leq |\vec{c}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ . A substituição do vetor  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$  na expressão anterior dá origem à propriedade 7. Ela mostra claramente que em geral o módulo de uma soma de vetores é menor do que a soma dos módulos dos vetores. A igualdade só se verifica se os vetores forem colineares (com a mesma direção e o mesmo sentido).

**P12 – QUAIS AS PROPRIEDADES DA SOMA DE VETORES E DA MULTIPLICAÇÃO DE UM VETOR POR UM NÚMERO REAL?**

**P13 – MOSTRE QUE QUANDO DOIS VETORES SÃO COLINEARES O MÓDULO DA SOMA DOS VETORES É IGUAL À SOMA DOS MÓDULOS DOS VETORES.**

As propriedades demonstradas anteriormente permitem a simplificação de expressões vetoriais e a decomposição dos vetores em bases ortogonais. Essa decomposição será apresentada na aula 2 deste módulo.

**Exemplo 1.** Simplifique a seguinte expressão vetorial:

$$3\vec{a} + 4(5\vec{b} + 2\vec{a}) - 7 \times 8(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{0}.$$

Solução: As propriedades discutidas anteriormente permitem fazer as seguintes simplificações na expressão apresentada:

$$(3 + 8 - 56)\vec{a} + (20 + 56)\vec{b} = \vec{0}$$

$$-45\vec{a} + 76\vec{b} = \vec{0}$$

$$\vec{a} = \frac{76}{45}\vec{b}$$

## Exercícios 2

## Exercício 4

Simplifique a seguinte expressão:

$$\vec{a} + 4(\vec{c} + \vec{b}) + 3(\vec{a} + 2\vec{b}) - 4[5(2\vec{a} - 3\vec{b}) + \vec{c}] = \vec{0}.$$

## Exercício 5

Na Figura 19, repetida a seguir, estão representados alguns vetores. Realize geometricamente as operações descritas nos itens de *a até e*. Quais são, em cada um dos casos, o módulo e a direção do vetor  $\vec{d}$ ?

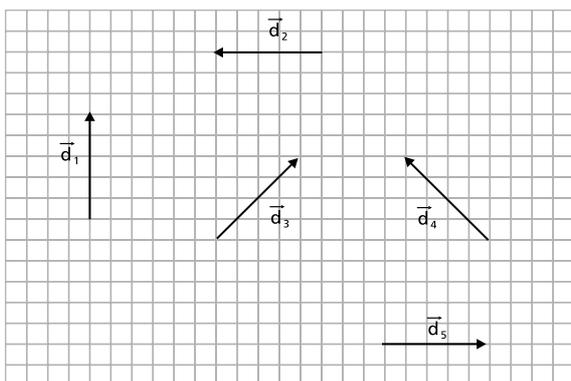


Figura19 - Exercício 2.

- $\vec{d} = \vec{d}_1 + \vec{d}_5.$
- $\vec{d} = -2\vec{d}_3.$
- $\vec{d} = \frac{\vec{d}_1}{|\vec{d}_1|}.$
- $\vec{d} = \vec{d}_1 - 2\vec{d}_3.$
- $\vec{d} = \vec{d}_1 + \vec{d}_4 + \vec{d}_5.$

## Questionário:

Responda novamente ao questionário 1.

Nesta aula definimos alguns dos conceitos necessários para descrever os movimentos: referenciais, trajetórias e vetores.

## Exercícios programados 5

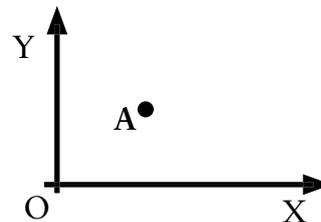
### Exercício 1

Projete o ponto na direção da reta a seguir:



### Exercício 2

Projete o ponto A na direção dos eixos OXY e encontre as coordenadas do ponto.



### Exercício 3

Represente os pontos alcançados por três partículas que sofrem *deslocamentos retilíneos* a partir da origem indicada a seguir.



- A primeira se desloca  $2\text{cm}$  da origem. Onde ela está?
- A segunda se desloca  $2\text{cm}$  da origem na direção da reta representada ao lado. Onde ela está?
- A terceira se desloca  $2\text{cm}$  da origem na direção da reta representada ao lado, de baixo para cima do papel. Onde ela está?



Conclusão: Para se determinar univocamente um deslocamento é necessário fornecer: \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_ e \_\_\_\_\_.

### Exercício 4

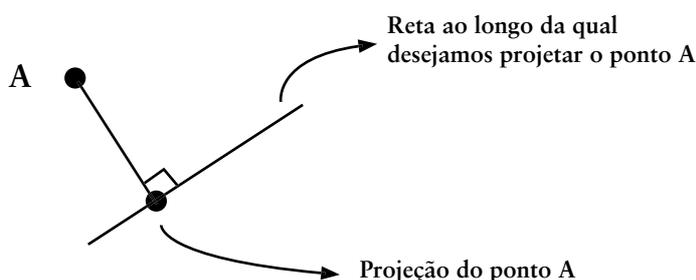
Assista à minipalestra *A descrição do movimento*. Ela está disponível no site: <http://tv.ufrj.br/ladif>.

## Gabarito

### Exercício 1

Projete o ponto na direção da reta a seguir:

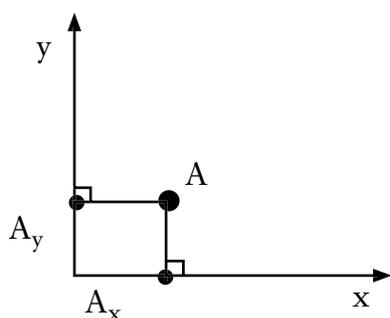
*Projetar um ponto na direção de uma dada reta é traçar uma reta perpendicular a essa reta, que passe pelo ponto que se deseja projetar. O ponto onde ocorre a interseção entre as duas retas é a projeção do ponto A:*



### Exercício 2

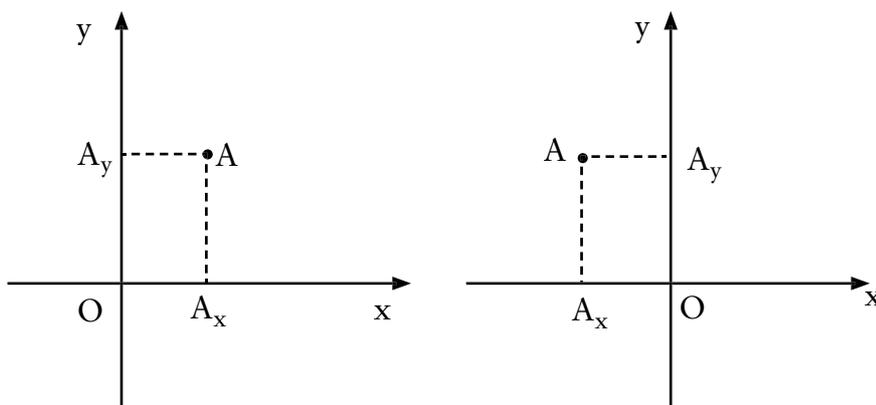
Projete o ponto A da direção dos eixos OXY e encontre as coordenadas do ponto.

*Da mesma forma que no exercício anterior, as projeções do ponto A são obtidas traçando retas perpendiculares aos eixos x e y, que passam pelo ponto A. As projeções do ponto A são os pontos de interseção dessas retas com os eixos coordenados:*



*As coordenadas do ponto A são as distâncias entre a origem e as projeções do ponto. Por exemplo, se o ponto projetado estiver na parte negativa do eixo a coordenada será negativa.*

*Se as unidades dos eixos estiverem em centímetros, basta medir com uma régua as coordenadas do ponto:*



Coordenadas do ponto A no primeiro quadrante:

$$x_A = (1,2 \pm 0,1)\text{cm}$$

$$y_A = (1,0 \pm 0,1)\text{cm}$$

Coordenadas do ponto A no segundo quadrante:

$$x_A = (-1,2 \pm 0,1)\text{cm}$$

$$y_A = (1,0 \pm 0,1)\text{cm}$$

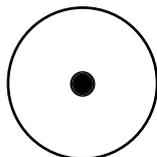
### Exercício 3

Represente os pontos alcançados por três partículas que sofrem **deslocamentos retilíneos** a partir da origem indicada a seguir.

a. A primeira se desloca  $2\text{cm}$  da origem.

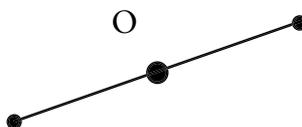
Onde ela está?

*Como só foi informado o tamanho do deslocamento da partícula, ela pode estar em qualquer ponto de uma circunferência com  $2\text{cm}$  de raio centrada na origem:*



b. A segunda se desloca  $2\text{cm}$  da origem na direção da reta representada abaixo. Onde ela está?

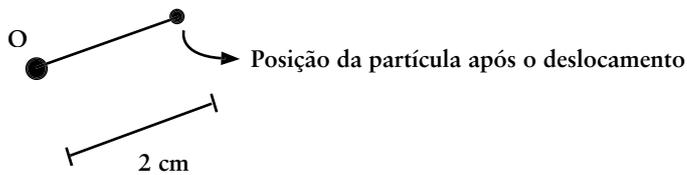
*Agora sabemos o tamanho do deslocamento e também a direção ao longo da qual se dá esse deslocamento. Mas ainda assim a partícula pode ter se deslocado  $2\text{cm}$  para cima ou  $2\text{cm}$  para baixo. Portanto ela pode estar em dois pontos, como mostrado na figura abaixo:*



c. A terceira se desloca  $2\text{ cm}$  da origem na direção da reta, de baixo para cima do papel. Onde ela está?

Conclusão: Para se determinar univocamente um deslocamento precisa-se fornecer: \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_ e \_\_\_\_\_.

Sabemos agora o tamanho do deslocamento ( $2\text{ cm}$ ), a direção na qual se dá o deslocamento (ao longo da reta desenhada) e o sentido do deslocamento (de baixo para cima). A posição final da partícula após o deslocamento pode ser então representada no desenho abaixo:



Portanto, para se determinar univocamente um deslocamento é preciso conhecer seu módulo (isto é, seu tamanho), sua direção e seu sentido.

1.

Para o referencial  $S'$

Para qualquer ponto do carrinho, por exemplo, o ponto A no centro do carrinho, temos que a trajetória para o referencial  $S'$  é uma linha paralela ao eixo  $OX'$ .

#### Exercício 4

*Individual.*



## Os vetores e suas bases

### Objetivo

Representar os vetores de um plano utilizando bases ortogonais.

### Introdução

Na Aula 1 iniciamos a discussão do movimento dos corpos. Concluímos que a escolha do ponto de observação é muito importante na descrição dos movimentos dos corpos. Descrevemos o movimento de alguns corpos (carrinho em um trilho de ar, esferas etc.) tratando-os como partículas. Falamos sobre trajetórias e deslocamentos. Nesta aula vamos definir os conceitos do vetor posição. Serão discutidas também a decomposição de vetores em bases ortogonais.

Esta aula é composta por três partes:

**O que sei sobre a decomposição de vetores em bases ortogonais?** é um questionário que tem como finalidade levantar as suas idéias prévias sobre estes assuntos.

**Decomposição de vetores em bases ortogonais** é um texto no qual o assunto é discutido.

**Exercícios 3** são exercícios propostos sobre vetores.

## O que sei sobre a decomposição de vetores em bases ortogonais?

As questões apresentadas a seguir têm como finalidade investigar e organizar os seus conhecimentos e idéias prévias sobre a decomposição de vetores em bases ortogonais. Escreva em seu caderno, de forma organizada, as respostas às questões. Não consulte livros ou notas de aulas, mas não deixe de respondê-las. A comparação entre suas idéias e conhecimentos sobre a decomposição de vetores em bases ortogonais e o vetor posição antes e depois de trabalhar esta aula é importante para o seu aprendizado.



### Questionário 2

1. O que é um *vetor unitário*?
2. Como se projeta um *vetor na direção de um vetor unitário*  $\hat{u}$ ? Dê exemplos.
3. O que é uma *base de vetores ortogonais*? Dê exemplos.
4. O que são componentes de um vetor *em uma base ortogonal*? Dê exemplos.
5. Enuncie a regra para *somar vetores* utilizando as *suas componentes*.

## Decomposição de vetores



### Projeção de vetores

As regras para somar vetores e multiplicar vetores por números reais apresentadas na aula 1 são geométricas. Elas têm o inconveniente de dependerem da qualidade dos desenhos elaborados. Nesta aula, vamos transformar essas regras em soma e multiplicação de números reais. Com esta finalidade vamos representar os vetores em bases apropriadas. Tal representação aparece naturalmente quando tentamos responder às seguintes perguntas:

1. Quantos vetores existem em um plano?
2. Será que eles estão relacionados?

O número de vetores em um plano é infinito. Todavia, eles estão relacionados. Mostraremos a seguir que qualquer vetor de um plano pode ser representado como a combinação linear de dois vetores com direções diferentes.

Na Figura 28, vemos que o vetor  $\vec{d}_1$  pode ser escrito como a soma de dois vetores paralelos aos vetores  $\vec{d}_2$  e  $\vec{d}_3$ , isto é,  $\vec{d}_1 = \vec{d}_{12} + \vec{d}_{13}$ .

O vetor  $\vec{d}_{12}$  tem a mesma direção do vetor  $\vec{d}_2$  e o vetor  $\vec{d}_{13}$  tem a mesma direção do vetor  $\vec{d}_3$ . Portanto, podemos escrever  $\vec{d}_{12} = \alpha \vec{d}_2$  e  $\vec{d}_{13} = \beta \vec{d}_3$ . Conseqüentemente, temos que  $\vec{d}_1 = \alpha \vec{d}_2 + \beta \vec{d}_3$ . Dizemos que  $\vec{d}_{12}$  é a projeção do vetor  $\vec{d}_1$  na direção do vetor  $\vec{d}_2$  e que  $\vec{d}_{13}$  é a projeção do vetor  $\vec{d}_1$  na direção do vetor  $\vec{d}_3$ . A soma  $\alpha \vec{d}_2 + \beta \vec{d}_3$  é denominada combinação linear dos vetores  $\vec{d}_2$  e  $\vec{d}_3$ .

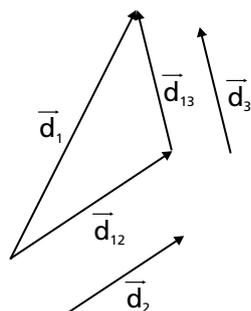


Figura 28 – Decomposição de vetores em uma base oblíqua.

Por uma questão de simplicidade, escolhe-se representar todos os vetores de um plano em termos de dois vetores unitários perpendiculares. Vetores unitários são aqueles que têm módulo um. São representados por uma letra com um acento circunflexo em cima, por exemplo,  $\hat{i}$ . Dizemos, nesse caso, que os vetores unitários formam uma **base ortogonal** para os vetores do plano. Os vetores unitários mais utilizados são aqueles que têm a direção e o sentido dos eixos. No caso dos eixos OX e OY eles são denominados comumente por  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$ .

BASE DE VETORES  
ORTOGONAIS

PROJEÇÃO  
DE UM VETOR

Na Figura 29 estão representados o vetor  $\vec{d}_1$ , as bases  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$  e as projeções do vetor  $\vec{d}_1$  na base escolhida. A projeção do vetor  $\vec{d}_1$  na direção do unitário  $\hat{i}$  foi denominada  $\vec{d}_{1x}$  e aquela na direção do unitário  $\hat{j}$  por  $\vec{d}_{1y}$ .

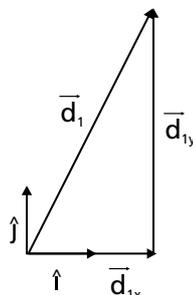


Figura 29 – Decomposição de vetores em uma base ortogonal.

COMPONENTES  
DE UM VETOR

As projeções  $\vec{d}_{1x}$  e  $\vec{d}_{1y}$  podem ser escritas da seguinte forma:  
 $\vec{d}_{1x} = d_{1x}\hat{i}$ ;  $\vec{d}_{1y} = d_{1y}\hat{j}$ , onde  $d_{1x}$  é o número que deve multiplicar a base  $\hat{i}$  para obter o vetor projetado  $\vec{d}_{1x}$  na direção do unitário  $\hat{i}$  e  $d_{1y}$ , é o número por que se deve multiplicar a base para obter  $\vec{d}_{1y}$ . Os números  $d_{1x}$  e  $d_{1y}$  são denominados **componentes do vetor**  $\vec{d}_1$  nas direções dos vetores unitários  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$ . Na Figura 30, observamos que as componentes  $d_{1x}$ ,  $d_{1y}$  e  $d_{2y}$  dos vetores  $\vec{d}_1$  e  $\vec{d}_2$  são positivas e que a componente  $d_{2x}$  é negativa. A componente  $d_{2x}$  é negativa porque para se obter o vetor projetado  $\vec{d}_{2x}$  a partir do vetor unitário  $\hat{i}$  é necessário multiplicá-lo por um número negativo, uma vez que o sentido de  $\vec{d}_{2x}$  é contrário ao sentido de  $\hat{i}$ .

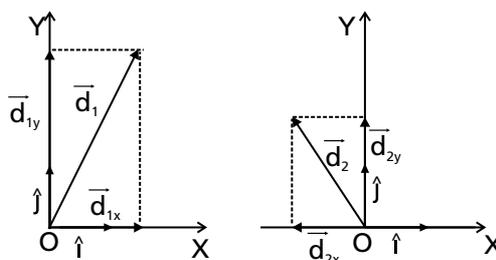


Figura 30 – Sinais das componentes dos vetores.

P1 – O QUE É UM VETOR UNITÁRIO?

P2 – COMO SE PROJETA UM VETOR NA DIREÇÃO DE UM VETOR UNITÁRIO  $\hat{u}$ ? DÊ EXEMPLOS.

P3 – O QUE É UMA BASE DE VETORES ORTOGONAIS? DÊ EXEMPLOS.

P4 – O QUE SÃO COMPONENTES DE UM VETOR EM UMA BASE ORTOGONAL? DÊ EXEMPLOS.

**Exemplo 1:** A figura 31 mostra um carro que parte do ponto A e se desloca até um ponto B que dista 80km de A. A reta que une os pontos A e B faz um ângulo de  $45^\circ$  com o eixo OX .

- Desenhe o vetor deslocamento do carro.
- Desenhe os vetores projetados  $\vec{d}_x$  e  $\vec{d}_y$  .
- Calcule as componentes  $d_x$  e  $d_y$  do vetor deslocamento do carro nas direções dos vetores unitários  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$  .
- Escreva os vetores projetados  $\vec{d}_x$  e  $\vec{d}_y$  em função dos vetores unitários  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$  .

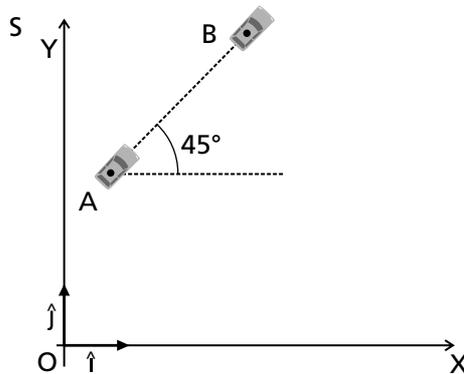


Figura 31 - Um carro que se desloca 80km na direção Nordeste.

### Resolução:

- O vetor deslocamento do carro vai de A até B e está desenhado na Figura 32-a.

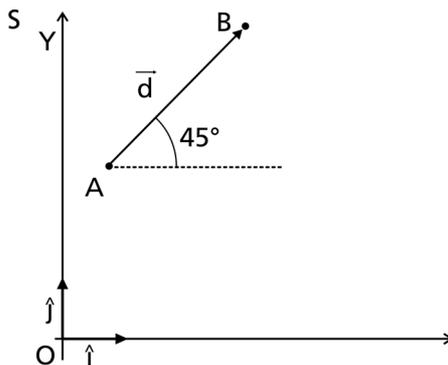


Figura 32-a - Vetor deslocamento do carro.

- Para projetar o vetor deslocamento  $\vec{d}$  na direção do vetor unitário  $\hat{i}$ , é necessário levantar duas retas perpendiculares à direção do vetor unitário  $\hat{i}$ , a partir do eixo OX, e que passem pelo início e pelo final de  $\vec{d}$  (Figura 32b). O vetor projetado  $\vec{d}_x$  é aquele que tem a direção do vetor unitário  $\hat{i}$ , e o módulo igual à distância entre as retas que o projetaram e o sentido do vetor  $\vec{d}$  (Figura 32 b).

Para projetar o vetor deslocamento  $\vec{d}$  na direção do vetor unitário  $\hat{j}$  é necessário levantar duas retas perpendiculares à direção do vetor unitário  $\hat{j}$  a partir do eixo OY que passem pelo início e pelo final de  $\vec{d}$  (Figura 32-b). O vetor projetado  $\vec{d}_y$  é aquele que tem a direção do vetor unitário  $\hat{j}$ , e o módulo igual à distância entre as retas que o projetaram e o sentido do vetor  $\vec{d}$  (Figura 32-b).

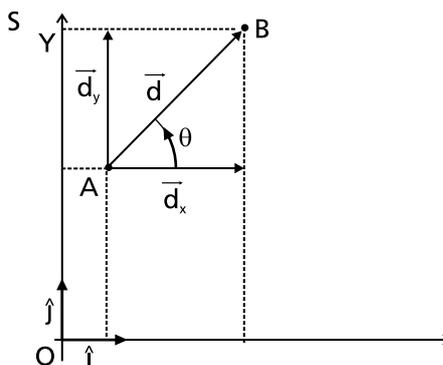


Figura 32-b - Decomposição do vetor deslocamento.

c. A componente  $d_x$  é o número pelo qual se deve multiplicar o vetor unitário  $\hat{i}$  para se obter o vetor projetado  $\vec{d}_x$ . O módulo da componente  $|d_x| = |\vec{d}_x|$  é igual ao módulo do vetor projetado. O módulo da componente  $d_x$  pode ser calculado por trigonometria, uma vez que

$$\cos(45^\circ) = \frac{|\vec{d}_x|}{d} \Rightarrow |\vec{d}_x| = d \cos(45^\circ) = d \frac{\sqrt{2}}{2} = 40\sqrt{2} \text{ km} \Rightarrow |d_x| = 40\sqrt{2} \text{ km}.$$

Como o vetor  $\vec{d}_x$  tem o mesmo sentido do vetor unitário  $\hat{i}$ , a componente  $d_x$  é positiva e igual a  $40\sqrt{2} \text{ km}$ .

A componente  $d_y$  é o número pelo qual se deve multiplicar o vetor unitário  $\hat{j}$  para se obter o vetor projetado  $\vec{d}_y$ . O módulo da componente  $|d_y| = |\vec{d}_y|$  é igual ao módulo do vetor projetado. O módulo da componente  $d_y$  pode ser calculado por trigonometria, uma vez que

$$\sin(45^\circ) = \frac{|\vec{d}_y|}{d} \Rightarrow |\vec{d}_y| = d \sin(45^\circ) = d \frac{\sqrt{2}}{2} = 40\sqrt{2} \text{ km} \Rightarrow |d_y| = 40\sqrt{2} \text{ km}.$$

Como o vetor  $\vec{d}_y$  tem o mesmo sentido do vetor unitário  $\hat{j}$ , a componente  $d_y$  é positiva e igual a  $40\sqrt{2} \text{ km}$ .

d. Os vetores projetados escritos em função dos unitários  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$  são:

$$\vec{d}_x = 40\sqrt{2} \hat{i} \text{ (km)} \text{ e } \vec{d}_y = 40\sqrt{2} \hat{j} \text{ (km)}.$$

**Exemplo 2:** A figura 33 mostra um carro que parte do ponto A e se desloca até um ponto B que dista 80km de A. A reta que une os pontos A e B faz um ângulo de  $135^\circ$  com o eixo OX.

Desenhe o vetor deslocamento do carro.

a. Desenhe os vetores projetados  $\vec{d}_x$  e  $\vec{d}_y$ .

b. Calcule as componentes  $d_x$  e  $d_y$  do vetor deslocamento do carro nas direções dos vetores unitários associados aos eixos representados na figura 33.

c. Escreva os vetores projetados  $\vec{d}_x$  e  $\vec{d}_y$  em função dos vetores unitários  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$ .

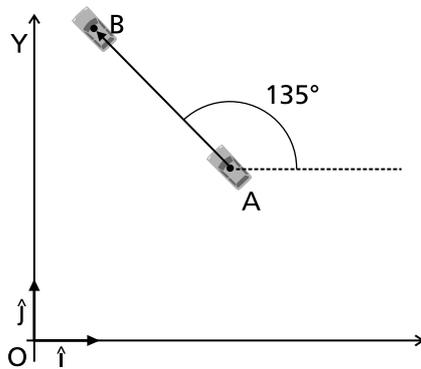


Figura 33 - Exemplo 3.

**Resolução:**

a. O vetor deslocamento  $\vec{d}$  do carro vai de A até B e está desenhado na Figura 34 a.

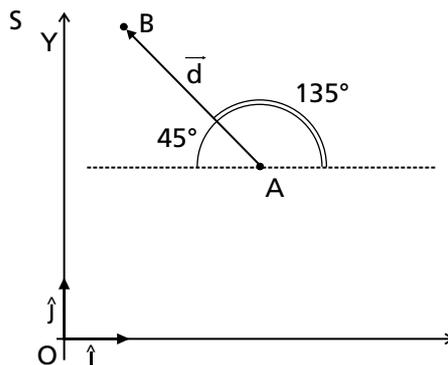


Figura 34-a - Vetor deslocamento do carro.

b. Para projetar o vetor deslocamento  $\vec{d}$  na direção do vetor unitário  $\hat{i}$  é necessário levantar duas retas perpendiculares à direção do vetor unitário  $\hat{i}$  a partir do eixo OX que passem pelo início e pelo final de  $\vec{d}$  (Figura 34-b). O vetor projetado  $\vec{d}_x$  é aquele que tem a direção do vetor unitário  $\hat{i}$ , com o módulo igual à distância entre as retas que o projetaram e o sentido do vetor  $\vec{d}$  (Figura 34-b).

Para projetar o vetor deslocamento  $\vec{d}$  na direção do vetor unitário  $\hat{j}$  é necessário levantar duas retas perpendiculares à direção do vetor unitário  $\hat{j}$  a partir do eixo OY que passem pelo início e pelo final de  $\vec{d}$  (Figura 34-b). O vetor projetado  $\vec{d}_y$  é aquele tem a direção do vetor unitário  $\hat{j}$ , com o módulo igual à distância entre as retas que o projetaram e o sentido do vetor  $\vec{d}$  (Figura 34-b).

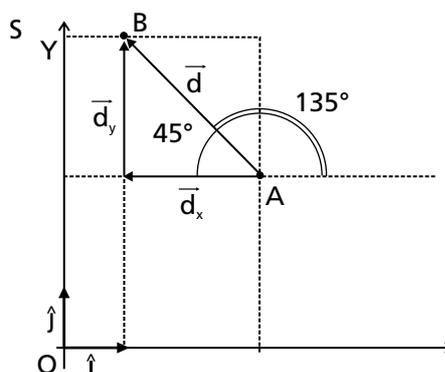


Figura 34-b - Decomposição do vetor deslocamento.

c. A componente  $d_x$  é o número pelo qual se deve multiplicar o vetor unitário  $\hat{i}$  para se obter o vetor projetado  $\vec{d}_x$ . O módulo da componente  $|d_x| = |\vec{d}_x|$  é o módulo do vetor projetado. O módulo da componente  $d_x$  pode ser calculado por trigonometria, uma vez que

$$\cos(45^\circ) = \frac{|\vec{d}_x|}{d} \Rightarrow |\vec{d}_x| = d \cos(45^\circ) = d \frac{\sqrt{2}}{2} = 40\sqrt{2} \text{ km} \Rightarrow |d_x| = 40\sqrt{2} \text{ km}.$$

Como o vetor  $\vec{d}_x$  tem o sentido contrário ao do vetor unitário  $\hat{i}$  a componente é negativa e igual a  $-40\sqrt{2} \text{ km}$ .

A componente  $d_y$  é o número pelo qual se deve multiplicar o vetor unitário  $\hat{j}$  para se obter o vetor projetado  $\vec{d}_y$ . O módulo da componente  $|d_y| = |\vec{d}_y|$  é igual ao módulo do vetor projetado. O módulo da componente  $d_y$  pode ser calculado por trigonometria, uma vez que

$$\sin(45^\circ) = \frac{|\vec{d}_y|}{d} \Rightarrow |\vec{d}_y| = d \sin(45^\circ) = d \frac{\sqrt{2}}{2} = 40\sqrt{2} \text{ km} \Rightarrow |d_y| = 40\sqrt{2} \text{ km}.$$

Como o vetor  $\vec{d}_y$  tem o mesmo sentido do vetor unitário  $\hat{j}$ , a componente  $d_y$  é positiva e igual a  $+40\sqrt{2} \text{ km}$ .

d. Os vetores projetados escritos em função dos unitários  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$  são:

$$\vec{d}_x = -40\sqrt{2} \hat{i} \text{ (km)} \text{ e } \vec{d}_y = 40\sqrt{2} \hat{j} \text{ (km)}.$$

Os exemplos 2 e 3 mostram que é possível caracterizar completamente um vetor em um plano fornecendo-se ou as suas componentes  $d_x$  e  $d_y$  ou o seu módulo  $d$  (tamanho) e ângulo  $\theta$  medido no sentido anti-horário a partir da direção do eixo OX (e a sua direção e sentido). A representação de um vetor que utiliza o seu módulo e o ângulo que ele forma com o eixo OX é denominada polar, e aquela que utiliza as componentes nas direções dos unitários dos eixos é denominada cartesiana. A relação entre estas duas representações de vetores pode ser deduzida facilmente da Figura 35.

Representação polar de um vetor em um plano.

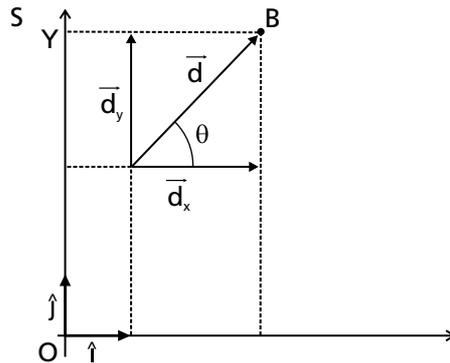


Figura 35 – Representações polar e cartesiana de um vetor.

Se são conhecidos  $d$  e  $\theta$ , é possível obter  $d_x$  e  $d_y$  com as seguintes relações:

$$d_x = d \cos(\theta); \quad d_y = d \sin(\theta).$$

Quando são conhecidos  $d_x$  e  $d_y$ , é possível obter  $d$  e  $\theta$  com as seguintes relações:

$$d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2} \quad \text{e} \quad \theta = \arctan\left(\frac{d_y}{d_x}\right).$$

A Figura 36 mostra que as componentes da soma de dois vetores são iguais à soma das componentes, isto é, se

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \Rightarrow c_x = a_x + b_x \quad \text{e} \quad c_y = a_y + b_y.$$

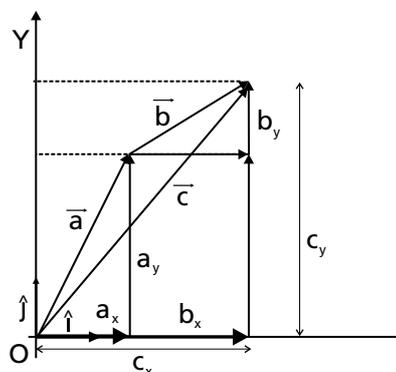


Figura 36 – Componentes de uma soma de vetores.

**P5 – ENUNCIE A REGRA PARA SOMAR VETORES UTILIZANDO AS SUAS COMPONENTES.**

**Exemplo 3:** Um carro se desloca 80km entre os pontos A e B e a seguir 40km entre os pontos B e C (Figura 37). Os deslocamentos são retilíneos. A reta que une os pontos A e B tem a direção leste-oeste e aquela que une os pontos B e C forma um ângulo de  $30^\circ$  com a direção leste-oeste.

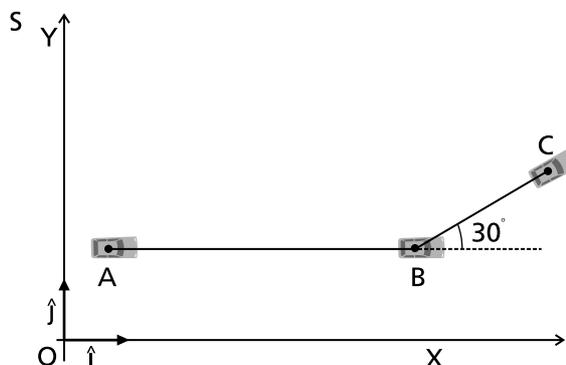


Figura 37 - Exemplo 4

- Desenhe os vetores deslocamento entre os pontos A e B ( $\vec{d}_1$ ), entre os pontos B e C ( $\vec{d}_2$ ) e entre os pontos A e C ( $\vec{d}_3$ ).
- Encontre as componentes dos vetores  $\vec{d}_1$  e  $\vec{d}_2$  na direção dos eixos OXY desenhados na Figura 37.
- Encontre as componentes do vetor  $\vec{d}_3$  na direção dos vetores unitários  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$  desenhados na Figura 37. Expresse o vetor  $\vec{d}_3$  em termos dos vetores unitários.
- Encontre o módulo do deslocamento  $\vec{d}_3$  e o ângulo que ele faz com o eixo OX.

**Resolução:**

- Os vetores deslocamentos  $\vec{d}_1$ ,  $\vec{d}_2$  e  $\vec{d}_3$  estão representados na Figura 38-a.

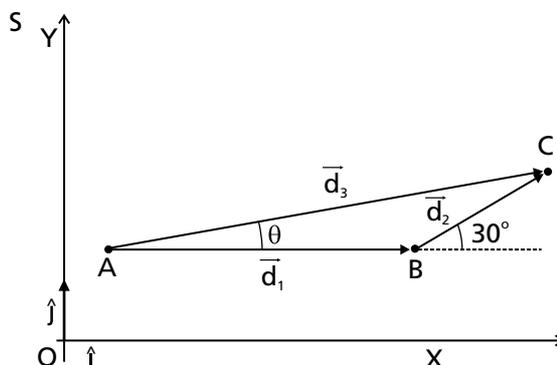


Figura 38-a - Vetor deslocamento resultante do carro.

- A figura 38-b mostra que o vetor projetado  $\vec{d}_{1x}$  é igual ao vetor  $\vec{d}_1$ . O vetor projetado  $\vec{d}_{1y}$  é nulo porque as duas retas perpendiculares ao vetor unitário  $\hat{j}$  que projetam o vetor  $\vec{d}_1$  neste eixo coincidem. Por isso, as componentes do vetor  $\vec{d}_1$  são:  $d_{1x} = d_1$  e  $d_{1y} = 0$ .

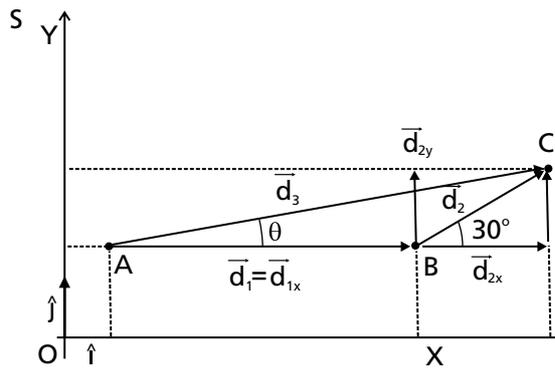


Figura 38-b - Decomposição do vetor deslocamento resultante.

Na Figura 38-b, estão representados os vetores  $\vec{d}_{2x}$  e  $\vec{d}_{2y}$ . Os módulos das componentes do vetor  $\vec{d}_2$  são:

$$|d_{2x}| = |\vec{d}_{2x}| = 40\cos(30^\circ) = 20\sqrt{3} \text{ km} \text{ e } |d_{2y}| = |\vec{d}_{2y}| = 40\sin(30^\circ) = 20 \text{ km}.$$

As componentes  $d_{2x}$  e  $d_{2y}$  são positivas, uma vez que os vetores projetados  $\vec{d}_{2x}$  e  $\vec{d}_{2y}$  têm os mesmos sentidos dos vetores unitários  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$ . Portanto, temos:  $d_{2x} = 20\sqrt{3} \text{ km}$  e  $d_{2y} = 20 \text{ km}$ .

c. As componentes do vetor deslocamento são:

$$d_{3x} = d_{1x} + d_{2x} = (80 + 20\sqrt{3}) \text{ km} \cong 115 \text{ km} \text{ e } d_{3y} = d_{1y} + d_{2y} = 20 \text{ km}.$$

Portanto, temos  $\vec{d}_3 = (115\hat{i} + 20\hat{j}) \text{ km}$ .

d. O módulo do vetor  $\vec{d}_3$  é  $d_3 = \sqrt{d_{3x}^2 + d_{3y}^2} \cong 116 \text{ km}$ . O ângulo  $\theta$  que o vetor  $\vec{d}_3$  faz com o eixo OX pode ser obtido da seguinte forma:

$$\tan \theta = \frac{d_{3y}}{d_{3x}} = \frac{20}{115} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{20}{115}\right) \cong 9,9^\circ.$$

A decomposição de vetores do espaço tridimensional requer três bases. Uma das bases mais utilizadas é aquela que utiliza os vetores unitários  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$  nas direções dos eixos OX, OY e OZ. A Figura 39 mostra as projeções do vetor  $\vec{d}$  nas direções desses unitários.

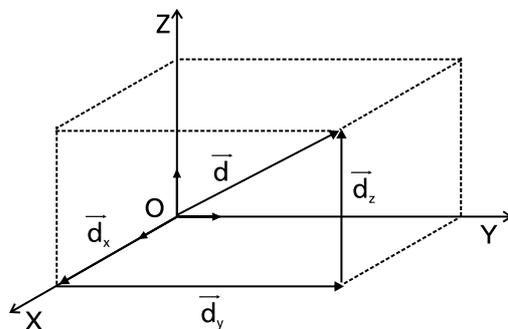


Figura 39 - Base tridimensional.

Nessa base, o vetor  $\vec{d}$  é representado por  $\vec{d} = d_x\hat{i} + d_y\hat{j} + d_z\hat{k}$ , onde  $d_x$ ,  $d_y$  e  $d_z$  são as componentes do vetor.

P18 – VERIFIQUE A VERACIDADE DA DECOMPOSIÇÃO ANTERIOR.

Existem grandezas que têm módulo, direção e sentido e não são vetores. Por exemplo, as rotações em torno de um eixo. Toda rotação tem um eixo de rotação, um ângulo de rotação e um sentido (horário ou anti-horário). No entanto, você aprenderá na disciplina Física I que duas rotações não se somam segundo a regra do paralelogramo.

Várias grandezas físicas são vetores. Na aula 3 alguns desses vetores serão discutidos.

### Exercícios 3

#### Exercício 6

Na Figura 19 repetida a seguir estão representados alguns vetores. Calcule componentes dos seguintes vetores:

a.  $\vec{d}_1$ ,  $\vec{d}_2$ ,  $\vec{d}_3$ ,  $\vec{d}_4$  e  $\vec{d}_5$

b.  $\vec{d} = \vec{d}_1 + \vec{d}_5$

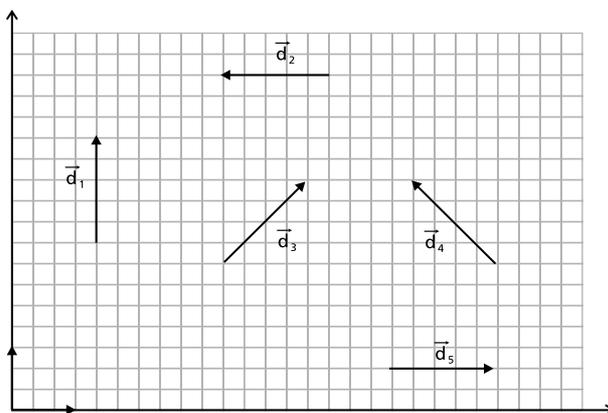
c.  $\vec{d} = -2\vec{d}_3$

d.  $\vec{d} = \frac{\vec{d}_1}{|\vec{d}_1|}$

e.  $\vec{d} = \vec{d}_1 - 2\vec{d}_3$

f.  $\vec{d} = \vec{d}_1 + \vec{d}_4 + \vec{d}_5$

Considere o tamanho do quadriculado como unidade.



## Exercício 7

Uma motocicleta se desloca 40km para o Norte, 60km na direção Nordeste e 20km na direção Oeste.

a. Desenhe os vetores deslocamentos da motocicleta. Não esqueça de desenhar o deslocamento resultante.

b. Represente todos os deslocamentos utilizando os seguintes vetores unitários:

- vetor unitário que tem direção Leste-Oeste e aponta para o Leste ( $\hat{i}$ );
- vetor unitário que tem direção Norte-Sul e aponta para o Norte ( $\hat{j}$ ).

c. Calcule o módulo do deslocamento resultante e o ângulo que ele faz com a direção Leste-Oeste.

## Questionário:

Responda novamente ao questionário 2.

## Exercícios programados 6

### Exercício 1

1. Projete as retas AB, CD e EF representadas na Figura 1, na direção do eixo OX. Com uma régua meça o tamanho da reta projetada;

Projete as retas AB, CD e EF na direção do eixo OY. Com uma régua, meça o tamanho da reta projetada.

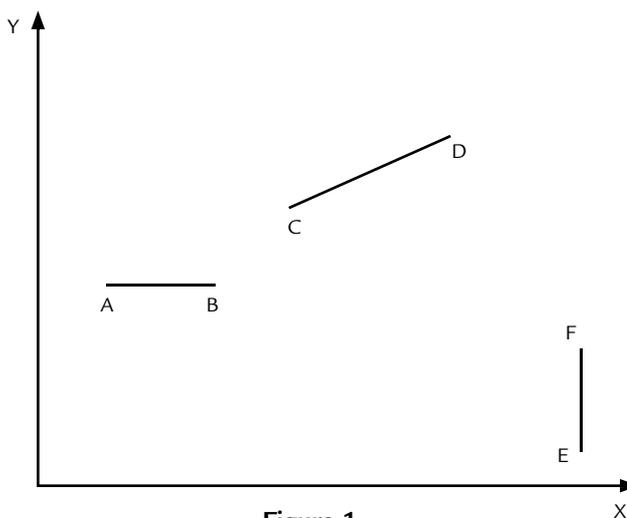


Figura 1

### Exercício 2

1. Projete os vetores  $\vec{d}_1$ ,  $\vec{d}_2$  e  $\vec{d}_3$  representados na Figura 2, na direção do eixo OX. Desenhe os vetores projetados na direção OX. Meça com uma régua os módulos desses vetores projetados.

2. Projete os vetores  $\vec{d}_1$ ,  $\vec{d}_2$  e  $\vec{d}_3$  representados na Figura 2, na direção do eixo OY. Desenhe os vetores projetados na direção OY. Meça com uma régua os módulos desses vetores projetados.

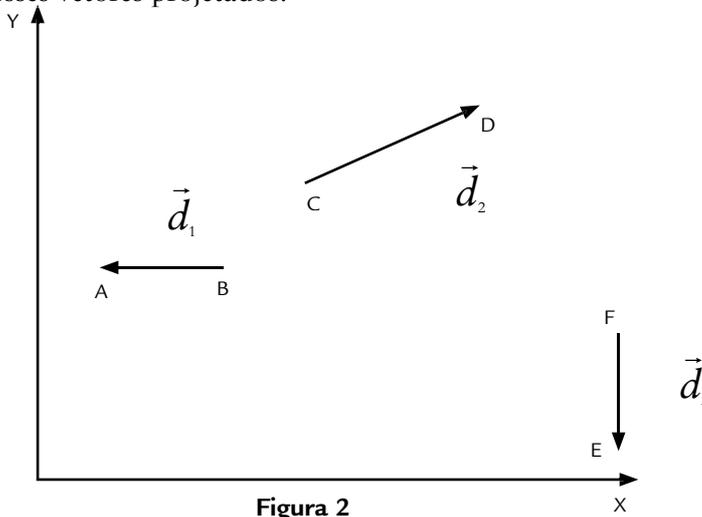


Figura 2

## Exercício 3

Utilize os módulos dos vetores projetados medidos no exercício 2 para responder às seguintes perguntas:

1. Escreva as componentes  $(d_{1x}, d_{2x}$  e  $d_{3x})$  e  $(d_{1y}, d_{2y}$  e  $d_{3y})$  dos vetores  $\vec{d}_1, \vec{d}_2$  e  $\vec{d}_3$  representados na Figura 3.

Escreva os vetores projetados  $(\vec{d}_{1x}, \vec{d}_{2x}$  e  $\vec{d}_{3x})$  e  $(\vec{d}_{1y}, \vec{d}_{2y}$  e  $\vec{d}_{3y})$  como múltiplos dos vetores unitários  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$  representados na Figura 3.

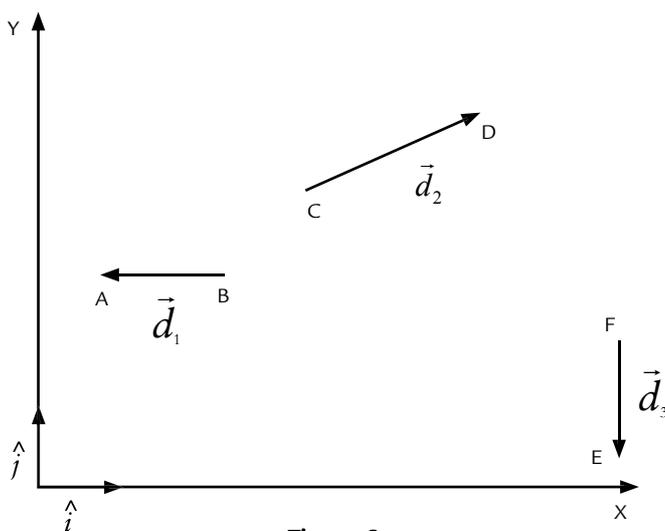


Figura 3

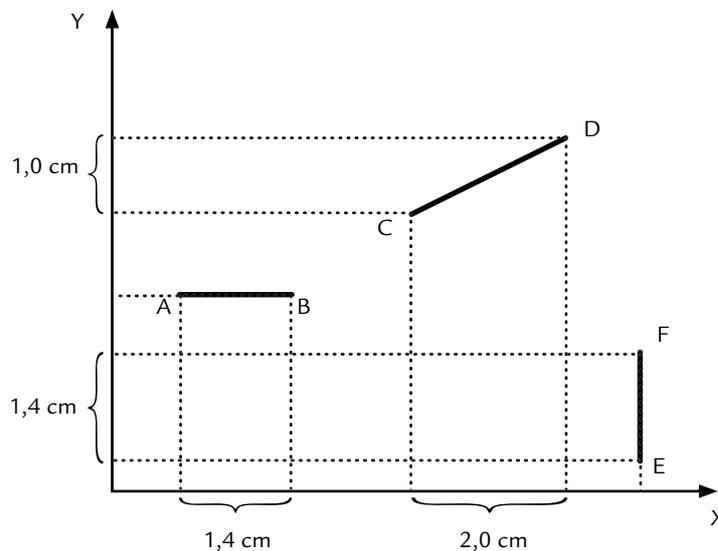
## Exercício 4

Assista à minipalestra *Vetores e suas bases*. Ela está disponível no site: <http://tv.ufrj.br/ladif>, ou você pode copiar o CD disponível no seu pólo.

## Gabarito

### Exercício 1

Projete as retas AB, CD e EF representadas na Figura 1, na direção do eixo OX. Com uma régua meça o tamanho da reta projetada.



Projete as retas AB, CD e EF na direção do eixo OY. Com uma régua meça o tamanho da reta projetada.

As linhas pontilhadas delimitam o tamanho das projeções sobre os eixos OX e OY de cada um dos segmentos de reta.

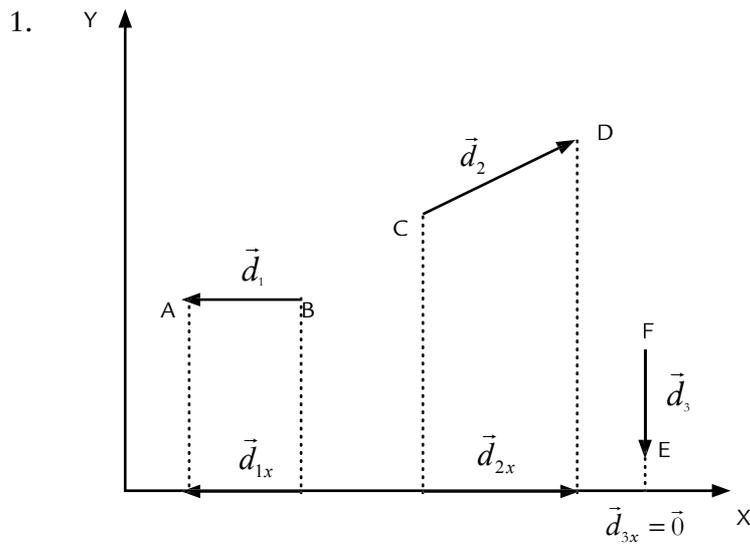
- O tamanho da projeção da reta AB no eixo OX é:  $(1,4 \pm 0,1)$  cm
- O tamanho da projeção da reta AB no eixo OY é:  $(0,0 \pm 0,1)$  cm (ponto)
- O tamanho da projeção da reta CD no eixo OX é:  $(2,0 \pm 0,1)$  cm
- O tamanho da projeção da reta CD no eixo OY é:  $(1,0 \pm 0,1)$  cm
- O tamanho da projeção da reta EF no eixo OY é:  $(1,4 \pm 0,1)$  cm
- O tamanho da projeção da reta EF no eixo OX é:  $(0,0 \pm 0,1)$  cm (ponto)

### Exercício 2

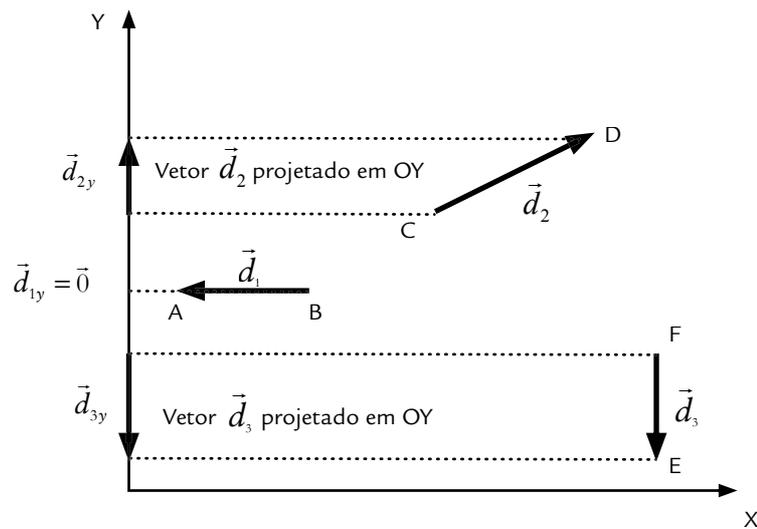
1. Projete os vetores  $\vec{d}_1$ ,  $\vec{d}_2$  e  $\vec{d}_3$  representados na Figura 2, na direção do eixo OX. Desenhe os vetores projetados na direção OX.

2. Projete os vetores  $\vec{d}_1$ ,  $\vec{d}_2$  e  $\vec{d}_3$  representados na Figura 2, na direção do eixo OY. Desenhe os vetores projetados na direção OY.

Denominaremos  $\vec{d}_{1x}$ ,  $\vec{d}_{2x}$  e  $\vec{d}_{3x}$  as projeções dos vetores  $\vec{d}_1$ ,  $\vec{d}_2$  e  $\vec{d}_3$  na direção OX. Denominaremos  $\vec{d}_{1y}$ ,  $\vec{d}_{2y}$  e  $\vec{d}_{3y}$  as projeções dos vetores  $\vec{d}_1$ ,  $\vec{d}_2$  e  $\vec{d}_3$  na direção OY.



2.



### Exercício 3

1. Escreva as componentes  $(d_{1x}, d_{2x}$  e  $d_{3x})$  e  $(d_{1y}, d_{2y}$  e  $d_{3y})$  dos vetores  $\vec{d}_1, \vec{d}_2$  e  $\vec{d}_3$  representados na Figura 3.

- As componentes dos vetores  $\vec{d}_1$  são:

$$d_{1x} = (-1,4 \pm 0,1) \text{ cm}$$

$$d_{1y} = (0,0 \pm 0,1) \text{ cm}$$

- As componentes dos vetores  $\vec{d}_2$  são:

$$d_{2x} = (2,0 \pm 0,1) \text{ cm}$$

$$d_{2y} = (1,0 \pm 0,1) \text{ cm}$$

- As componentes dos vetores  $\vec{d}_3$  são:

$$d_{3x} = (0,0 \pm 0,1)cm$$

$$d_{3y} = (-1,4 \pm 0,1)cm$$

2. Escreva os vetores projetados ( $\vec{d}_{1x}$ ,  $\vec{d}_{2x}$  e  $\vec{d}_{3x}$ ) e ( $\vec{d}_{1y}$ ,  $\vec{d}_{2y}$  e  $\vec{d}_{3y}$ ) como múltiplos dos vetores unitários  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$  representados na figura 3.

Os vetores projetados, escritos como múltiplos dos vetores unitários, são obtidos multiplicando-se as componentes pelos vetores unitários correspondente aos eixos.

$$\vec{d}_{1x} = (-1,4 \pm 0,1) \text{ cm}$$

$$\vec{d}_{1y} = (0,0 \pm 0,1) \text{ cm}$$

$$\vec{d}_{2x} = (2,0 \pm 0,1) \text{ cm}$$

$$\vec{d}_{2y} = (1,0 \pm 0,1) \text{ cm}$$

$$\vec{d}_{3x} = (0,0 \pm 0,1) \text{ cm}$$

$$\vec{d}_{3y} = (-1,4 \pm 0,1) \text{ cm}$$

#### Exercício 4

*Individual.*

## Cinemática vetorial

### Objetivos

Definir os vetores posição, velocidade e aceleração de uma partícula e entender as suas relações com a trajetória da partícula.

### Introdução

Nas Aulas 1 e 2 estudamos os vetores deslocamento. Nesta aula vamos definir novos vetores cinemáticos (vetor posição, vetor velocidade e vetor aceleração de uma partícula) e entender suas relações com a trajetória da partícula. Esta aula é composta por quatro partes:

*O que sei sobre os vetores cinemáticos e as suas relações com a trajetória?* é um questionário que tem como finalidade levantar suas idéias prévias sobre estes assuntos.

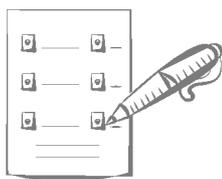
*Vetores cinemáticos* é um texto onde esse tema é discutido.

*Movimento unidimensional* é um texto onde o assunto é discutido.

*Leituras e exercícios 4* reúne textos e exercícios sobre as grandezas cinemáticas (vetor posição, vetor velocidade e vetor aceleração) dos livros *Mecânica 1 (Gref)* e *Física – Volume Único (Antonio Máximo e Beatriz Alvarenga)*.

## O que sei sobre os vetores cinemáticos e as relações com as trajetórias?

As questões apresentadas a seguir têm como finalidade investigar e organizar os seus conhecimentos sobre os vetores cinemáticos e as suas relações com a trajetória. Escreva em seu caderno, de forma organizada, as respostas às questões. Não consulte livros ou notas de aulas, mas não deixe de respondê-las. A comparação entre suas idéias e conhecimentos sobre os vetores cinemáticos e suas relações com a trajetória, antes e depois de trabalhar esta aula, é importante para o seu aprendizado.



### Questionário 3

1. O que é o vetor *posição*?
2. O que é o vetor *velocidade média*?
3. O que é o vetor *velocidade instantânea*?
4. O que é o vetor *aceleração média*?
5. O que é o vetor *aceleração instantânea*?
6. Mostre graficamente como é possível obter o vetor posição em um instante qualquer de tempo quando se conhece a posição inicial da partícula e a sua velocidade instantânea em qualquer instante do tempo.
7. Mostre graficamente como é possível obter o vetor velocidade em um instante qualquer de tempo quando se conhece a velocidade inicial da partícula e sua aceleração instantânea em qualquer instante do tempo.
8. Quais as *equações horárias* da *posição*, da *velocidade* e da *aceleração* de uma partícula que está se deslocando em um movimento retilíneo uniforme sobre o eixo OX?
9. Quais as *equações horárias* da *posição*, da *velocidade* e da *aceleração* de uma partícula que está se deslocando em um movimento retilíneo uniformemente acelerado sobre o eixo OX?

## Vetores cinemáticos

### Introdução



A trajetória de uma partícula é uma curva no espaço. Já vimos que é possível representar a trajetória de uma partícula fornecendo as coordenadas cartesianas dos seus pontos. Por exemplo, na figura 40 a reta AB representa a trajetória de um carro no sistema de referência S fixo à Terra.

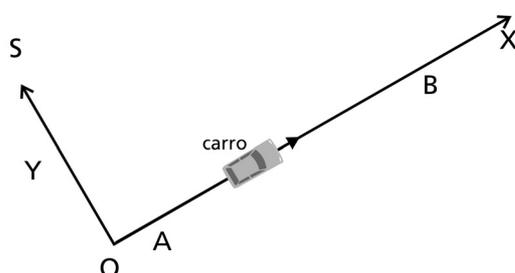


Figura 40 - Equação da trajetória no sistema de eixos coordenados OXY:  $y=0$ .

No sistema de coordenadas OXY, a equação da trajetória do carro é  $y=0$ .

Por outro lado, se tivéssemos utilizado um outro sistema de referência S' fixo na Terra com o sistema de eixos coordenados O'X'Y' a equação seria diferente, isto é,  $y'=x'/2$  (ver Figura 41).

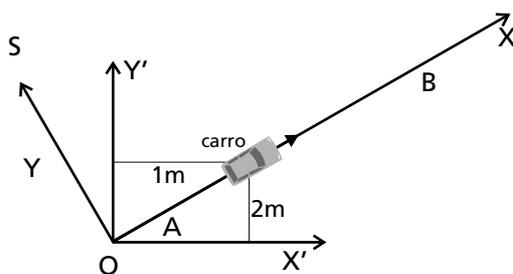


Figura 41 - Equação da trajetória do carro no sistema de referência S' com os eixos de coordenadas O'X'Y':  $y'=x'/2$ .

Visivelmente, a forma da trajetória de uma partícula não depende do sistema de eixos coordenados escolhidos. *Será que existe uma outra representação para a trajetória “mais essencial”, isto é, uma que não dependa do sistema de eixos coordenados?*

Existe, é a representação vetorial da trajetória, que será estudada a seguir.

## Vetor deslocamento

Na aula 1 aprendemos o vetor deslocamento. O vetor deslocamento não coincide com a trajetória da partícula (ver Figura 42).

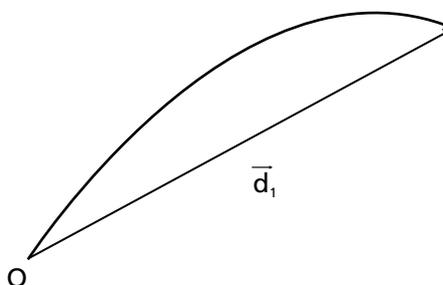


Figura 42 – Vetor deslocamento.

Existem várias trajetórias possíveis entre as extremidades do vetor deslocamento.

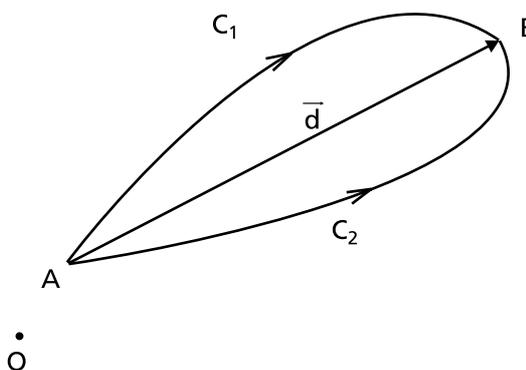


Figura 43 – Vetor deslocamento entre os pontos A e B associado a duas trajetórias  $C_1$  e  $C_2$  diferentes.

Um grande número de vetores deslocamento sucessivos entre os pontos A e B fornece uma linha poligonal que é parecida com a trajetória (ver Figura 44).

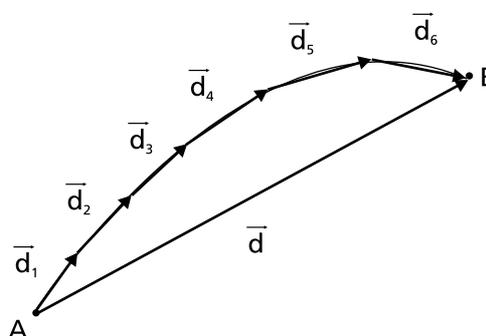


Figura 44 – Poligonal construída com vários pequenos deslocamentos sucessivos entre os pontos A e B.

Conseqüentemente, é fácil concluir que qualquer trajetória pode ser aproximada por um número muito grande de vetores deslocamento sucessivos.

## Vetor posição

Podemos caracterizar a trajetória de uma partícula utilizando o vetor posição. O vetor posição de um ponto  $\vec{r}(t)$  é o vetor deslocamento da origem O até o ponto (ver figura 45-a).

VETOR POSIÇÃO

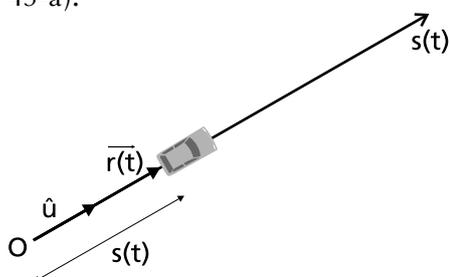


Figura 45-a – Vetor posição.

### P1 – O QUE É O VETOR POSIÇÃO?

A trajetória fica completamente definida quando se conhece o vetor posição da partícula em todos os instantes do tempo.

Quando o movimento ocorre no plano, podemos expressar o vetor posição em função dos vetores unitários  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$  associados ao sistema de eixos coordenados OXY. A figura 45-b mostra que as componentes  $r_x$  e  $r_y$  do vetor posição coincidem com as coordenadas  $x$  e  $y$  do ponto onde a partícula se encontra, isto é,  $r_x = x$  e  $r_y = y$ .

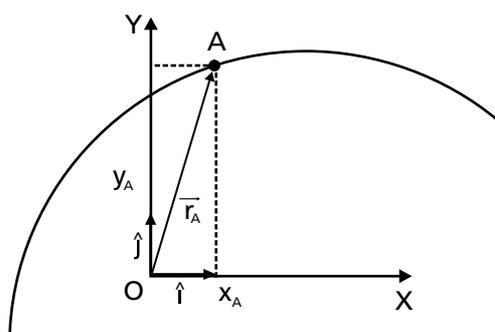


Figura 45-b – Vetor posição do ponto A.

Por isso é comum se representar o vetor posição da seguinte forma:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}.$$

**Exemplo 1:** Um carro se desloca 80km entre os pontos A e B e a seguir 40km entre os pontos B e C (veja Figura 45-c). Os deslocamentos são retilíneos. A reta que une os pontos A e B tem a direção Leste-Oeste e aquela que une os pontos B e C forma um ângulo de  $30^\circ$  com a direção Leste-Oeste. Escreva o vetor posição do carro associado aos pontos A, B e C em função dos vetores unitários  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$ . As coordenadas do ponto A no sistema de eixos coordenados OXY são  $x_A = 16\text{ km}$  e  $y_A = 16\text{ km}$ .

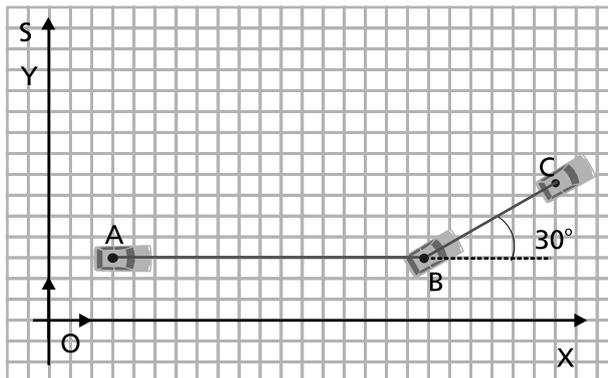


Figura 45-c - Exemplo 1.

**Resolução:**

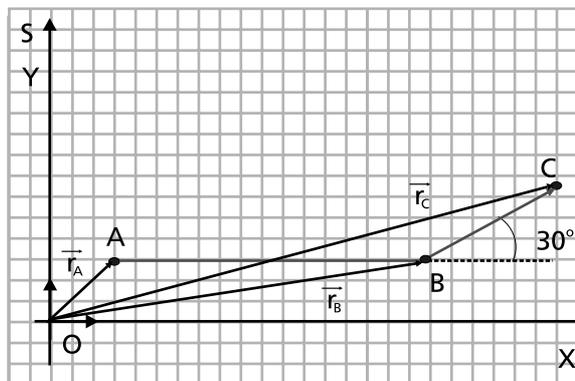


Figura 45-d - Vetor deslocamento resultante.

A Figura 45-d mostra os vetores posição dos pontos A, B e C. As coordenadas dos pontos B são  $x_B = x_A + 80 = 96\text{ km}$  e  $y_B = y_A = 16\text{ km}$ .

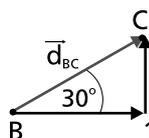


Figura 45-e - Vetor deslocamento  $\vec{d}_{BC}$ .

O triângulo BC1 da Figura 45-e mostra que:

$$\cos(30^0) = \frac{\overline{B1}}{\overline{BC}} \Rightarrow \overline{B1} = 40 \frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3} \text{ km} \cong 35 \text{ km}$$

$$\text{sen}(30^0) = \frac{\overline{C1}}{\overline{BC}} \Rightarrow \overline{C1} = 40 \frac{1}{2} = 20 \text{ km}.$$

Por isso, as coordenadas do ponto C são  $x_C \cong 16 + 80 + 35 = 131 \text{ km}$  e  $y_C \cong 16 + 20 = 36 \text{ km}$ . Conseqüentemente, os vetores posição dos pontos A, B e C são respectivamente iguais a

$$\vec{r}_A = x_A \hat{i} + y_A \hat{j} = 16\hat{i} + 16\hat{j} \text{ (km)},$$

$$\vec{r}_B = x_B \hat{i} + y_B \hat{j} = 96\hat{i} + 16\hat{j} \text{ (km)},$$

$$\vec{r}_C = x_C \hat{i} + y_C \hat{j} = 131\hat{i} + 36\hat{j} \text{ (km)}.$$

O vetor posição associado à trajetória do carro (Figuras 40 e 41) é  $\vec{r}(t) = s(t)\hat{u}$ , onde  $s(t)$  é a distância do carro até a origem O e  $\hat{u}$  é o vetor unitário (módulo 1) na direção da reta que define a trajetória (ver Figura 46).

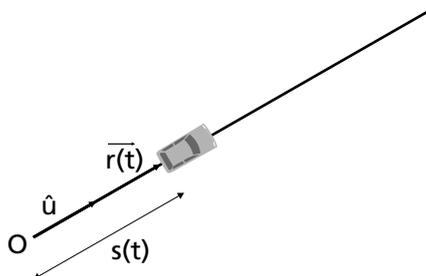


Figura 46 - Representação da trajetória do carro com o vetor posição  $\vec{r}(t) = r(t)\hat{u}$ .

Esta representação é a mesma para os sistemas de eixos coordenados OXY e O'X'Y'. Podemos concluir então que a representação vetorial da trajetória de uma partícula é “**mais essencial**” do que a representação em coordenadas.

## Leituras e exercícios 4

Leia sobre os assuntos *Posição, Deslocamento* nas seções 4.4 e 4.6 do texto *Física I-Mecânica do Gref*.

Faça os exercícios propostos.



VELOCIDADE MÉDIA

### Vetor velocidade

Na vida prática é importante conhecer os deslocamentos associados a um corpo e a rapidez com que esses deslocamentos ocorrem. Por exemplo, é comum se dizer que alguém se deslocou do Rio para São Paulo em seis horas. A grandeza que está associada à rapidez com que um deslocamento ocorre é a velocidade. O **vetor velocidade média**  $\vec{v}_m$  é definido da seguinte forma:

$$\vec{v}_m(t_1, t_2) = \frac{\vec{d}}{(t_2 - t_1)} = \frac{\vec{d}}{(\Delta t)}$$

A velocidade média é um vetor porque é o resultado da multiplicação do vetor deslocamento  $\vec{d}$  pelo número real positivo  $\frac{1}{\Delta t}$ . Ela tem a direção do deslocamento, isto é, a direção da reta secante à trajetória. Na Figura 47 estão representados o vetor deslocamento  $\vec{d}$  da partícula entre os instantes  $t_1$  e  $t_2$  e o vetor velocidade média entre esses instantes.

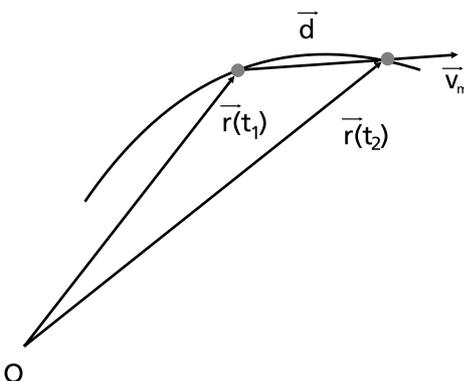


Figura 47 - Vetores deslocamento e velocidade média.

A figura 47 mostra que o vetor deslocamento  $\vec{d}$  é a diferença entre os vetores posição nos instantes  $t_1$  e  $t_2$ , uma vez que

$$\vec{r}(t_2) = \vec{r}(t_1) + \vec{d} \Rightarrow \vec{d} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$$

Essa identidade pode ser verificada facilmente no Exemplo 1 em relação ao vetor deslocamento  $\vec{d}_1$  entre os pontos A e B. O vetor deslocamento  $\vec{d}_1$  é dado por  $\vec{d}_1 = 80\hat{i} \text{ (km)}$ . A diferença entre os vetores posição dos pontos A e B é  $\vec{r}_B - \vec{r}_A = 96\hat{i} + 16\hat{j} - (16\hat{i} + 16\hat{j}) = 80\hat{i} \text{ (km)}$ . Portanto, o vetor deslocamento do ponto A para o ponto B é a diferença entre os vetores posição dos pontos B e A.

É habitual denominar o vetor deslocamento  $\vec{d}$  por  $\vec{d} = \Delta\vec{r}$ . Não adotaremos essa notação nesta aula para não sobrecarregar as expressões.

## P2 – O QUE É O VETOR VELOCIDADE MÉDIA?

**Exemplo 2:** O carro do Exemplo 1 parte do ponto A e leva uma hora para se deslocar do ponto A até o ponto B e meia hora para se deslocar do ponto B até o ponto C. Calcule o vetor velocidade média do carro associada ao deslocamento de A até C.

**Resolução:**

$$v_{mx}(0, 3/2) = \frac{x_C - x_A}{3/2} = \frac{2}{3}(131 - 16) \simeq 77 \text{ km/h.}$$

$$v_{my}(0, 3/2) = \frac{y_C - y_A}{3/2} = \frac{2}{3}(36 - 16) \simeq 13 \text{ km/h.}$$

A velocidade média é

$$\vec{v}_m(0, 3/2) \simeq (77\vec{i} + 13\vec{j}) \text{ km/h.}$$

O conhecimento da velocidade média entre dois instantes permite calcular o deslocamento entre esses instantes, isto é,

$$\vec{d} = \vec{v}_m(t_1, t_2)(t_2 - t_1).$$

A velocidade média associada a intervalos de tempo pequenos conduz ao conceito de velocidade instantânea. Os matemáticos têm uma operação que se adapta perfeitamente à definição de **velocidade instantânea**, é a operação de limite.

$$\vec{v}_{\text{inst}}(t_1) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{d}}{\Delta t}$$

VELOCIDADE  
INSTANTÂNEA

Na Figura 48 está representada graficamente a operação matemática de limite utilizada na definição da velocidade instantânea.

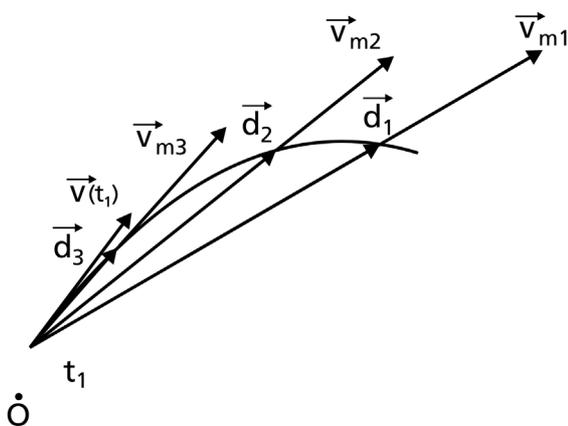


Figura 48 – Representação gráfica do processo limite aplicado à velocidade média.

À medida que o intervalo de tempo diminui, a velocidade média se aproxima da velocidade instantânea. A velocidade média  $\vec{v}_{m3}$  está mais próxima da velocidade instantânea que a velocidade média  $\vec{v}_{m1}$ . Portanto, podemos dizer que quanto menor o intervalo de tempo melhor será a seguinte aproximação:

$$\vec{v}_m(t_1, t_1 + \Delta t) \cong \vec{v}(t_1).$$

A Figura 48 mostra que, à medida que o intervalo de tempo diminui, a direção da velocidade média se aproxima da direção da reta tangente à trajetória. Conseqüentemente, podemos intuir que a direção da velocidade instantânea é igual à direção da reta tangente à trajetória.

**P3 – O QUE É O VETOR VELOCIDADE INSTANTÂNEA?**

A trajetória de uma partícula fica completamente determinada quando se conhece o vetor posição  $\vec{r}(t)$  em todos os instantes de tempo.

A Figura 49 mostra que, se conhecermos o vetor posição  $\vec{r}(t_0)$  em um instante  $t_0$  e o vetor deslocamento entre os instantes  $t_0$  e  $t = t_0 + \Delta t$ , é possível obter o vetor posição em um instante  $\vec{r}(t_0 + \Delta t)$ .

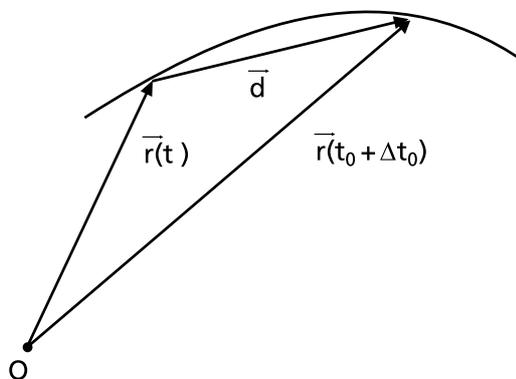


Figura 49 – Soma do vetor posição com o vetor deslocamento.

Quando o intervalo de tempo é pequeno, o vetor deslocamento  $\vec{d} = \vec{v}_m(t_0, t_0 + \Delta t) \Delta t$  pode ser obtido de forma aproximada com o vetor velocidade instantânea, isto é,  $\vec{v}_m(t_0, t_0 + \Delta t) \cong \vec{v}(t_0) \Rightarrow \vec{d} \cong \vec{v}(t_0) \Delta t$ .

**Exemplo 3:** A Figura 50 mostra o vetor posição e o vetor velocidade instantânea de uma partícula no tempo  $t=1s$ . Desenhe o vetor posição aproximado no instante de tempo  $t=1,1s$ .

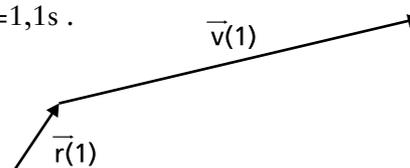


Figura 50 – Exemplo 3

**Resolução:**

O vetor deslocamento associado ao intervalo de tempo 0,1 s é dado por:  $\vec{d} = 0,1 \vec{v}_m$ . O vetor posição no instante de tempo 1,1s é  $\vec{r}(1,1) = \vec{r}(1,0) + \vec{d}$ . Como o intervalo de tempo 0,1s é pequeno, podemos aproximar a velocidade média pela velocidade instantânea  $\vec{v}(1)$ . Conseqüentemente, temos que:

$$\vec{r}(1,1) = \vec{r}(1,0) + \vec{d} \cong \vec{r}(1,0) + 0,1 \vec{v}(1).$$

A representação aproximada do vetor posição  $\vec{r}(1)$  está na figura 51.

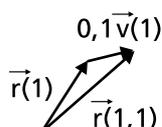


Figura 51 - Vetor posição.

Quando o intervalo de tempo não é pequeno, a velocidade média e a velocidade instantânea são muito diferentes e a aproximação empregada anteriormente para se calcular o vetor deslocamento  $\vec{d}$  não pode ser utilizada. Neste caso, é necessário obter o vetor deslocamento  $\vec{d}$ , somando-se deslocamentos sucessivos (ver Figura 52, com  $n=6$ ) associados a  $n$  intervalos de tempo pequenos  $\left(\frac{\Delta t}{n}\right)$ .

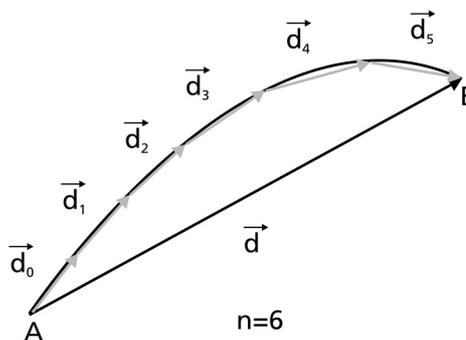


Figura 52 - Obtenção do vetor deslocamento  $\vec{d}$  a partir de seis deslocamentos sucessivos associados a tempos iguais a  $\Delta t/6$ .

Os pequenos deslocamentos sucessivos  $\vec{d}_0, \vec{d}_1, \dots, \vec{d}_{n-1}$  podem ser obtidos aproximadamente com as velocidades instantâneas, isto é,

$$\vec{d}_0 \cong \vec{v}(t_0)(\Delta t/n), \vec{d}_1 \cong \vec{v}(t_0 + \Delta t/n)(\Delta t/n), \dots, \vec{d}_{n-1} \cong \vec{v}(t_0 + (n-1)\Delta t/n)(\Delta t/n).$$

O vetor deslocamento  $\vec{d}$  pode ser escrito com uma boa aproximação da seguinte forma:

$$\vec{d} = \vec{d}_0 + \dots + \vec{d}_{n-1} \cong \vec{v}(t_0) \frac{\Delta t}{n} + \vec{v}(t_1) \frac{\Delta t}{n} + \dots + \vec{v}(t_{n-1}) \frac{\Delta t}{n},$$

onde

$$t_1 = t_0 + \frac{\Delta t}{n}, \dots, t_{n-1} = t_0 + (n-1) \frac{\Delta t}{n}.$$

A aproximação anterior se transforma em uma identidade quando o número de intervalos  $n$  tende para infinito, isto é,

$$\vec{d} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\Delta t}{n} \vec{v}(t_0) + \dots + \frac{\Delta t}{n} \vec{v}(t_{n-1}) \right).$$

Conseqüentemente, podemos concluir que o conhecimento do vetor posição inicial de uma partícula  $\vec{r}(t_0)$  e da sua velocidade instantânea em toda a trajetória permite obter o vetor posição no instante do tempo  $t_0 + \Delta t$ , uma vez que  $\vec{r}(t_0 + \Delta t) = \vec{r}(t_0) + \vec{d}$ . Como o intervalo de tempo  $\Delta t$  foi escolhido arbitrariamente, podemos concluir que é possível conhecer o vetor posição em todo instante de tempo a partir do conhecimento do vetor posição inicial de uma partícula  $\vec{r}(t_0)$  e da sua velocidade instantânea em toda a trajetória.

**P4 – MOSTRE GRAFICAMENTE COMO É POSSÍVEL OBTER O VETOR POSIÇÃO EM UM INSTANTE QUALQUER DE TEMPO QUANDO SE CONHECE A POSIÇÃO INICIAL DA PARTÍCULA E A SUA VELOCIDADE INSTANTÂNEA EM TODO INSTANTE DO TEMPO.**

## Vetor aceleração

Outra informação importante associada a uma trajetória é a rapidez com que a velocidade instantânea muda. Nesse caso, temos a aceleração média e a aceleração instantânea.

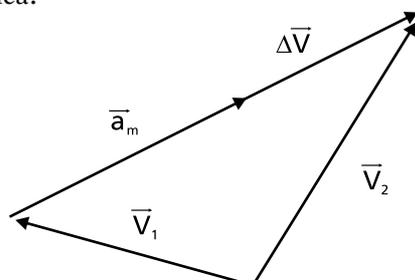


Figura 53 - A aceleração média.

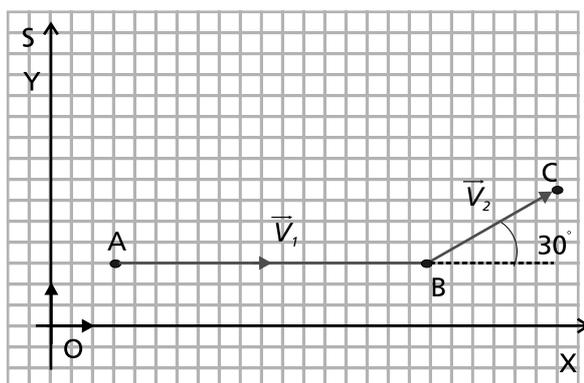
A **aceleração média** (Figura 53) entre dois instantes  $t_1$  e  $t_2$  tem a seguinte definição:

ACELERAÇÃO MÉDIA

$$\vec{a}_m(t_1, t_2) = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t}.$$

**Exemplo 4:** O carro do Exemplo 1 se desloca entre os pontos A e B com uma velocidade  $\vec{v}_1$  com módulo igual a 40km/h e de B para C com uma velocidade  $\vec{v}_2$  com módulo igual a 40km/h. O primeiro deslocamento se dá em duas horas e o segundo em uma hora. Qual o vetor aceleração média do carro?

**Resolução:**



A figura anterior mostra as velocidades do carro. As componentes dos vetores velocidades  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  são:

$$v_{1x} = 40 \text{ km/h}, v_{1y} = 0 \text{ km/h}$$

$$v_{2x} = 40 \frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3} \text{ km/h}, v_{2y} = 20 \text{ km/h}$$

O cálculo das componentes da segunda velocidade  $\vec{v}_2$  é realizado de maneira análoga ao do Exemplo 1 e utiliza o triângulo BC1.

As componentes da aceleração média são:

$$a_{mx}(0,3) = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{3} \cong \frac{35 - 40}{3} = -\frac{5}{3} km/h^2$$

$$a_{my}(0,3) = \frac{v_{2y} - v_{1y}}{3} = \frac{0 - 20}{3} = -\frac{20}{3} km/h^2$$

O vetor aceleração média é dado por:

$$\vec{a}_m(0,3) \cong -(1,7\vec{i} + 6,7\vec{j}) Km/h^2$$

O conhecimento da aceleração média permite calcular a variação da velocidade instantânea em um intervalo de tempo  $\Delta t$ , isto é,

$$\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1) = \vec{a}_m(t_1, t_2)\Delta t.$$

ACELERAÇÃO  
INSTANTÂNEA

A **aceleração instantânea** é a aceleração média tomada em intervalos de tempo muito pequenos e é definida pela operação de limite.

$$\vec{a}_{inst}(t_1) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t},$$

onde  $\Delta t = t_2 - t_1$  e  $\Delta \vec{v} = \vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)$ .

Em intervalos de tempo pequenos, temos que a aceleração média é aproximadamente igual à aceleração instantânea.

$$\vec{a}_m(t_1, t_2) \cong \vec{a}(t_1).$$

Quando o intervalo de tempo é pequeno, a variação de velocidade  $\Delta \vec{v}$  pode ser obtida de forma aproximada com o vetor aceleração e instantânea, isto é,  $\vec{a}_m(t_1, t_2) \cong \vec{a}(t_1) \Rightarrow \Delta \vec{v} \cong \vec{a}(t_1)\Delta t$ .

Quando o intervalo de tempo não é pequeno, a aceleração média e a aceleração instantânea são muito diferentes e a aproximação utilizada anteriormente para calcular a variação de velocidade  $\Delta \vec{v}$  não pode ser utilizada. Nesse caso, é necessário obter a variação de velocidade  $\Delta \vec{v}$  somando variações de velocidades sucessivas (ver Figura-54, com  $n=6$ ) associadas a  $n$  intervalos de tempos pequenos  $\left(\frac{\Delta t}{n}\right)$ .

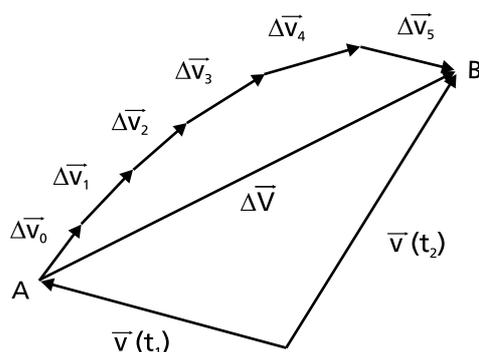


Figura 54 - Soma de variações sucessivas de velocidades em intervalos de tempos iguais a  $\frac{\Delta t}{6}$ .

As pequenas variações de velocidade  $\Delta \vec{v}_0, \Delta \vec{v}_1, \dots, \Delta \vec{v}_{n-1}$  podem ser obtidas aproximadamente com as acelerações instantâneas, isto é,

$$\Delta \vec{v}_0 \cong \vec{a}(t_0)\Delta t/n, \Delta \vec{v}_1 \cong \vec{a}(t_1)\Delta t, \dots, \Delta \vec{v}_{n-1} \cong \vec{a}(t_{n-1})\Delta t/n,$$

$$\text{onde } t_0 = t_I, t_1 = t_0 + \frac{\Delta t}{n}, \dots, t_{n-1} = t_I + (n-1)\frac{\Delta t}{n}.$$

A variação de velocidade  $\Delta \vec{v}$  pode ser escrita como uma boa aproximação da seguinte forma:

$$\Delta \vec{v} \cong \vec{a}(t_0)\frac{\Delta t}{n} + \vec{a}(t_1)\frac{\Delta t}{n} + \dots + \vec{a}(t_{n-1})\frac{\Delta t}{n}.$$

A aproximação anterior se transforma em uma identidade quando o número de intervalos  $n$  tende para infinito, isto é,

$$\Delta \vec{v} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\Delta t}{n} \vec{a}(t_0) + \dots + \frac{\Delta t}{n} \vec{a}(t_{n-1}) \right).$$

Conseqüentemente, podemos concluir que o conhecimento do vetor velocidade inicial de uma partícula ( $\vec{v}(t_0)$ ) e da sua aceleração instantânea em toda a trajetória permite obter o vetor velocidade em um instante de tempo  $t = t_0 + \Delta t$ , uma vez que  $\vec{v}(t_0 + \Delta t) = \vec{v}(t_0) + \Delta \vec{v}$ . Como o intervalo de tempo  $\Delta t$  foi escolhido arbitrariamente, podemos concluir que é possível conhecer o vetor velocidade em todo instante de tempo a partir do conhecimento do vetor velocidade inicial de uma partícula ( $\vec{v}(t_0)$ ) e da sua aceleração instantânea em toda a trajetória.

A Mecânica da Partícula tem como objetivo encontrar a trajetória da partícula a partir das suas leis. Veremos na aula 5 que as Leis de Newton fornecem a aceleração instantânea da partícula. Portanto, se conhecermos a posição inicial, a velocidade inicial da partícula e a sua aceleração instantânea já sabemos como construir graficamente a sua trajetória.

P5 - DEFINA ACELERAÇÃO MÉDIA.

P6 - DEFINA ACELERAÇÃO INSTANTÂNEA.

## Movimento unidimensional

### Componentes dos vetores cinemáticos

Os vetores cinemáticos podem ser representados por suas componentes. Essa representação é simples no caso de movimentos unidimensionais quando um dos eixos coordenados coincide com a direção do movimento. Por exemplo, no caso em que o eixo OX coincide com a direção do movimento temos que:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i}; \quad \vec{a} = (x(t_2) - x(t_1))\hat{i}; \quad \vec{v}_{\text{inst}}(t_1) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{x(t_2) - x(t_1)}{\Delta t} \right);$$

$$\vec{a}_{\text{inst}}(t_1) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{v_x(t_2) - v_x(t_1)}{\Delta t} \right);$$

Em alguns livros se denomina a componente  $x(t)$  do vetor posição por  $p(t)$  ou  $s(t)$ . Os índices  $x$  na aceleração e na velocidade também são esquecidos. Esse relaxamento na notação não deve induzir você a pensar que  $p(t)$  ou  $s(t)$ ,  $v(t)$  e  $a(t)$  são os módulos destas grandezas.

### Significado geométrico da componente da velocidade e da aceleração no movimento unidimensional

#### Significado geométrico da componente da velocidade

A trajetória de uma partícula que se desloca no eixo OX é determinada pela sua posição  $x(t)$ . A velocidade média e a velocidade instantânea têm um significado geométrico de fácil visualização no gráfico de  $x$  versus  $t$ .

No gráfico  $x$  versus  $t$ , a velocidade média é o coeficiente angular da reta secante que passa pelos pontos com coordenadas  $(t_1, x_1)$  e  $(t_2, x_2)$ .

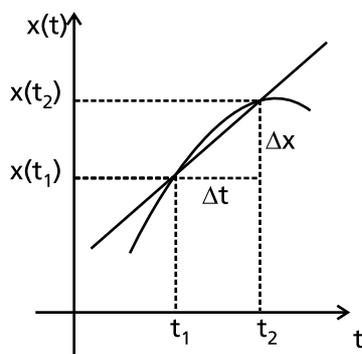


Figura 55 - Significado geométrico da velocidade média.

Na Figura 55 está representada a posição  $x$  da partícula para os instantes de tempo  $t_1$  e  $t_2$ . O coeficiente angular da reta secante à curva que passa pelos pontos com coordenadas  $(t_1, v_{x_1})$  e  $(t_2, v_{x_2})$  é  $\frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$ .

Esse coeficiente angular é, por definição, a velocidade média da partícula, isto é,

$v_{mx}(t_1, t_2) = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$ . Essa é a interpretação geométrica da componente velocidade média em um movimento unidimensional.

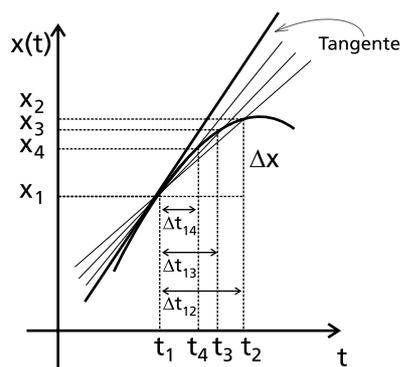


Figura 56 – Representação geométrica da velocidade instantânea.

Na figura 56 foram desenhadas várias retas secantes associadas às velocidades médias em intervalos de tempos cada vez menores ( $t_2 > t_3 > t_4$ ). Observe que à medida que o intervalo de tempo tende a zero, a reta secante se aproxima da reta tangente. Por isso, a velocidade instantânea  $v_x(t_1) = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} v_{mx}(t_1, t_2)$  é representada geometricamente pelo coeficiente angular da reta tangente à curva de  $x$  versus  $t$  no ponto da curva com coordenadas  $(t_1, x_1)$ .

A figura 57 mostra que, no caso em que o gráfico de  $x$  versus  $t$  é uma reta, a velocidade média é o coeficiente angular da reta, sendo portanto constante.

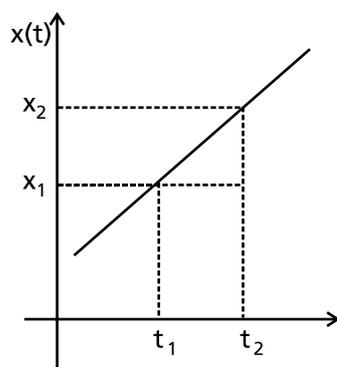


Figura 57

A reta tangente em cada ponto da reta coincide com a própria reta. Como a velocidade instantânea é o coeficiente da reta tangente, ela é constante e igual à velocidade média, isto é,  $v(t_1) = v(t_2)$ .

No gráfico  $x$  versus  $t$  a velocidade instantânea é o coeficiente angular da reta tangente à curva no instante considerado.

As velocidades médias e instantâneas são iguais quando elas são constantes.

Neste caso, a aceleração média

$$\left( a_{mx}(t_1, t_2) = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{v(t_1) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = 0 \right)$$

e a aceleração instantânea

$$\left( a(t_1) = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} 0 = 0 \right)$$

são nulas.

Quando o gráfico de  $x$  versus  $t$  não é uma reta, o cálculo da velocidade instantânea tem que ser feito com a definição exata de limite que é ensinada na disciplina Cálculo I. Todavia, é possível obter uma estimativa numérica da velocidade instantânea calculando a velocidade média em intervalos de tempo cada vez menores e verificando para que valor a velocidade média está tendendo.

Exemplo 5: Uma partícula se desloca sobre o eixo OX em uma trajetória descrita pela equação horária  $x(t) = t^2$  (metros).

1. Demonstre que a velocidade média entre os instantes de tempo  $t_1 = 2s$  e  $t_2 = 2 + \Delta t$  é dada por

$$v_m(2, 2 + \Delta t) = 12 + 6\Delta t + \Delta t^2$$

2. Calcule a velocidade média para os intervalos de tempo  $\Delta t$  iguais a 0,100s, 0,025s, 0,010s, 0,0005s e 0,0001s. Dê a sua resposta com quatro algarismos significativos,

3. Calcule a velocidade instantânea da partícula no instante  $t = 2,000s$ .

4. Para quais intervalos de tempo  $\Delta t$  as velocidades médias calculadas no item 2 e a velocidade instantânea em  $t = 2,000s$  são iguais?

Solução:

1. A velocidade média da partícula entre os instantes de tempo  $t_1 = 2s$  e  $t_2 = 2 + \Delta t$  é dada por

$$v_m(2, 2 + \Delta t) = \frac{(2 + \Delta t)^3 - 8}{\Delta t} = \frac{8 + 12\Delta t + 6\Delta t^2 + \Delta t^3 - 8}{\Delta t} = 12 + 6\Delta t + \Delta t^2.$$

2. A tabela a seguir mostra os valores da velocidade média nos instantes solicitados. As velocidades médias foram expressas com quatro algarismos significativos.

$\Delta t$ (s)	$v_m(2, t + \Delta t)$ (m/s)
0,1000	12,61
0,0250	12,15
0,01000	12,06
0,0005	12,00
0,0001	12,00

3. A velocidade instantânea em  $t = 2\text{ s}$  é

$$v(2) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_m(2, 2 + \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (12 + 6\Delta t + \Delta t^2) = 12\text{ m/s}.$$

4. As velocidades médias associadas aos intervalos de tempo  $0,010\text{ s}$ ,  $0,005\text{ s}$  e  $0,001\text{ s}$  são iguais à velocidade instantânea em  $t = 2,000\text{ s}$

### Significado geométrico da componente da aceleração

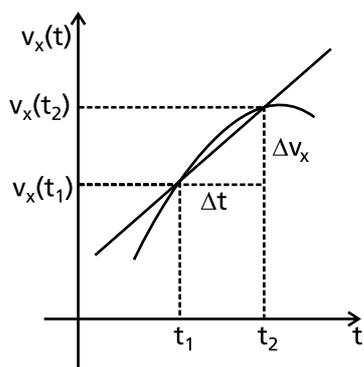


Figura 58 – Significado geométrico da componente da aceleração média.

A aceleração média e a aceleração instantânea têm um significado geométrico que é de fácil visualização quando fazemos o gráfico de  $v_x$  versus  $t$ . Na Figura 58, está representada a velocidade instantânea  $v_x$  da partícula para os instantes de tempo  $t_1$  e  $t_2$ . O coeficiente angular da reta secante à curva que passa pelos pontos com coordenadas  $(t_1, v_{x_1})$  e  $(t_2, v_{x_2})$  é  $\frac{v_x(t_2) - v_x(t_1)}{t_2 - t_1}$ . Esse coeficiente angular é, por definição, a aceleração média da partícula, isto é,

$$a_{mx}(t_1, t_2) = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

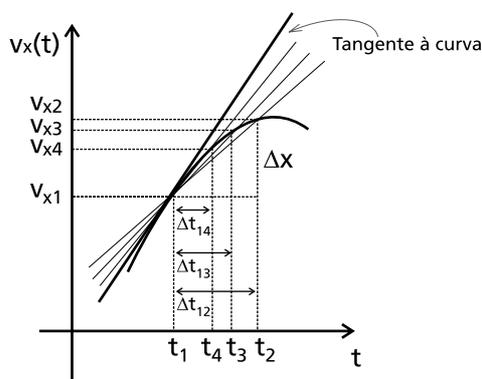


Figura 59 – Significado geométrico da componente da aceleração instantânea.

No gráfico  $v_x$  versus  $t$  a componente da aceleração instantânea é o coeficiente angular da reta tangente no instante considerado.

Na Figura 59 foram desenhadas várias retas secantes associadas às acelerações médias em intervalos de tempos cada vez menores. Neles, o instante que define a aceleração média fica cada vez mais próximo do instante de tempo  $t_1$ . Observe que à medida que o intervalo de tempo tende a zero, a reta secante se aproxima da reta tangente.

Portanto, a aceleração instantânea  $a_x(t_1) = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$  é representada geometricamente pelo coeficiente angular da reta tangente à curva no gráfico de  $v_x$  versus  $t$  no ponto da curva com coordenadas  $(t_1, v_{x_1})$ .

As acelerações médias e instantâneas são iguais quando elas são constantes.

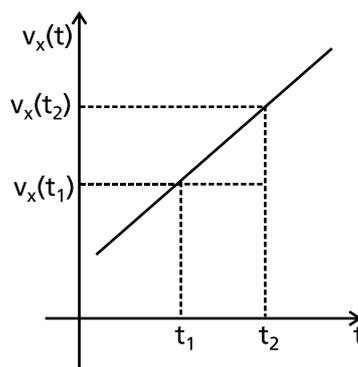


Figura 60 – Movimento uniformemente acelerado.

A Figura 60 mostra que, no caso em que o gráfico de  $v_x$  versus  $t$  é uma reta, a aceleração média é o coeficiente angular da reta, sendo portanto constante. A reta tangente em cada ponto da reta coincide com a própria reta. Como a aceleração instantânea é o coeficiente da reta tangente, ela é também constante e igual à aceleração média.

### Problema inverso

Vimos anteriormente que o objetivo da Mecânica da Partícula é encontrar o vetor posição da partícula como função do tempo. No caso de um movimento unidimensional no eixo OX, o vetor posição da partícula fica completamente determinado quando conhecemos  $x(t)$ . Como as Leis da Mecânica da Partícula fornecem a aceleração instantânea da partícula, nosso problema se reduz a encontrar  $x(t)$  a partir do conhecimento de  $a_x(t)$ . Esse problema é denominado de problema inverso. Ele será resolvido de forma qualitativa e geométrica apenas para o movimento retilíneo uniforme ( $a_x=0$ ) e o para o movimento uniformemente acelerado ( $a_x(t) = \text{constante} \neq 0$ ). A solução rigorosa desse problema e de problemas com acelerações variáveis será deixada para a disciplina de Física I.

## Movimento retilíneo uniforme

O movimento retilíneo uniforme é aquele em que a aceleração instantânea e a aceleração média são nulas. Nesse caso temos que a velocidade instantânea é constante, uma vez que

$$a_m = \frac{v_x(t_2) - v_x(t_1)}{t_2 - t_1} = 0 \Rightarrow v_x(t_2) = v_x(t_1) \Rightarrow v_x(t) = \text{constante}.$$

Como a velocidade instantânea é constante, o gráfico *de x versus t* é uma reta (veja a Figura 61).

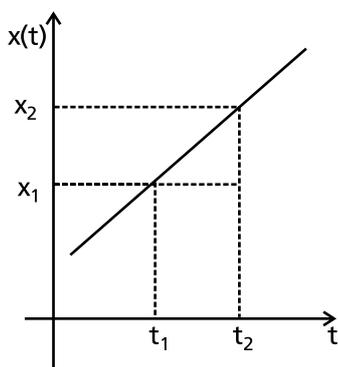


Figura 61 - Movimento retilíneo uniforme.

Portanto, a velocidade média é constante e igual à velocidade instantânea. Conseqüentemente, podemos obter  $x(t)$  utilizando a interpretação geométrica da velocidade média.

$$\begin{aligned} v_{xm}(t_2, t_1) &= \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \Rightarrow x(t_2) = v_{xm}(t_2 - t_1) + x(t_1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x(t_2) = x(t_1) + v_x(t_2 - t_1). \end{aligned}$$

Existe uma representação geométrica para o deslocamento

$$\Delta x = x(t_2) - x(t_1).$$

A figura 62 mostra que o deslocamento  $\Delta x = x(t_2) - x(t_1) = v_x(t_2 - t_1)$  é a área sob a curva de  $v_x(t)$  versus  $t$ .

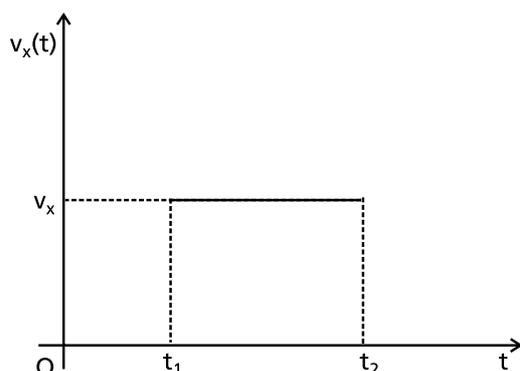


Figura 62 - Representação geométrica do deslocamento  $\Delta x$ .

Se considerarmos o intervalo de tempo entre os instantes  $t_1 = 0$  e  $t_2 = t$  temos que:

$$v_{xm} = \frac{x(t) - x(0)}{t} \Rightarrow x(t) = v_{xm}t + x(0) \Rightarrow x(t) = v_{xm}t + x(0) .$$

Portanto, o gráfico de  $x$  versus  $t$  é uma reta com coeficiente angular igual à velocidade instantânea. É importante ressaltar que é necessário conhecer a posição inicial da partícula  $x(0)$  e a sua velocidade inicial  $v_x(0)$  para que o vetor posição da partícula  $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i}$  fique completamente determinado.

### Movimento retilíneo uniformemente acelerado

O movimento retilíneo uniformemente acelerado é aquele em que a aceleração instantânea é constante. Já sabemos que nesse caso a aceleração média também é constante. Portanto, podemos obter com facilidade a dependência da velocidade instantânea com o tempo.

$$a_x = a_{xm} = \frac{v_x(t_2) - v_x(t_1)}{t_2 - t_1} \Rightarrow v_x(t_2) = a_x(t_2 - t_1) + v_x(t_1) .$$

Se considerarmos o intervalo de tempo entre os instantes  $t_1 = 0$  e  $t_2 = t$  temos:

$$v_x(t) = a_x t + v(0) .$$

Portanto, a equação horária que descreve a velocidade instantânea no movimento retilíneo uniformemente acelerado é  $v_x(t) = a_x t + v_x(0)$ .

A posição  $x(t)$  no movimento uniformemente acelerado pode ser obtida a partir do gráfico de  $v_x$  versus  $t$  da seguinte forma:

- Imagina-se um movimento diferente do real composto de  $N$  movimentos retilíneos uniformes, cada um deles com duração  $\Delta t = \frac{t_f - t_i}{N}$  .

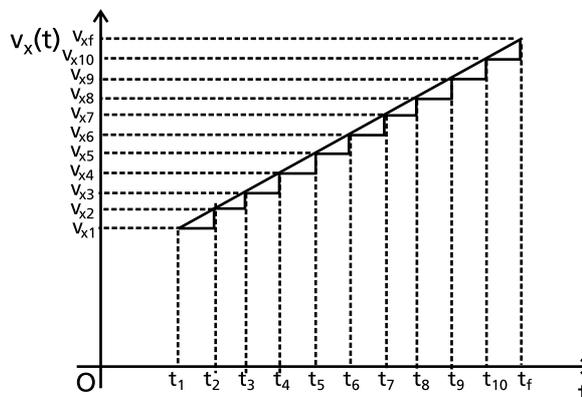


Figura 63 – Representação geométrica do deslocamento  $\Delta x$ .

• Na Figura 63 dividimos o movimento em 10 intervalos ( $N=10$ ) e representamos a velocidade do novo movimento (linha poligonal). Este movimento e o real *não são* iguais. Eles têm em comum o ponto de partida, o ponto de chegada e os valores das velocidades  $v_{x1}, v_{x2}, \dots, v_{x9}, v_{x10}, v_{xf}$ .

• O deslocamento total do movimento imaginário é dado por:

$$x'(t_f) - x'(t_i) = v_{x1}\Delta t + v_{x2}\Delta t + \dots + v_{x10}\Delta t = \sum_{i=1}^N v_{xi}\Delta t,$$

onde denominamos  $v_{xi} = v_{x1}$ .

Observe que o deslocamento imaginário é a soma das áreas dos retângulos, isto é,

$$x'(t_f) - x'(t_i) = A_1 + \dots + A_N = \sum_{i=1}^N A_i.$$

Uma análise qualitativa da Figura 63 permite intuir que, quando o número  $N$  de movimentos retilíneos tender para infinito, o deslocamento imaginário  $\Delta x'$  se transformará no deslocamento real  $\Delta x$  e a soma das áreas dos retângulos se transformará na área sob a reta que representa a velocidade de  $v$  em função do tempo  $t$ . Ela é a área do trapézio retângulo de bases  $x(t_1)$  e  $x(t_2)$  e altura  $h = \Delta t$ . Portanto, o deslocamento  $\Delta x$  no movimento uniformemente acelerado se reduz a

$$\begin{aligned} \Delta x = x(t_f) - x(t_i) &= \frac{(v_x(t_2) + v_x(t_1))\Delta t}{2} = \\ &= \frac{(v_x(t_1) + a_x\Delta t + v_x(t_1))\Delta t}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x(t_f) = x(t_i) + v_x(t_i)\Delta t + \frac{a_x\Delta t^2}{2}. \end{aligned}$$

No caso em que o instante  $t_i = 0$  e  $t_f = t$  ( $\Delta t = t$ ) o deslocamento no movimento uniformemente acelerado se reduz a

$$\Delta x = x(t) - x(0) = v_x(0)t + \frac{a_x t^2}{2}.$$

Portanto, a equação horária do movimento retilíneo uniformemente acelerado é

$$x(t) = x(0) + v_x(0)t + \frac{a_x t^2}{2}.$$

É fundamental que você perceba que as equações horárias obtidas anteriormente só podem ser utilizadas em movimento em que a aceleração instantânea é constante ou nula, uma vez que elas foram obtidas a partir dessas hipóteses.

## Leituras e exercícios 5

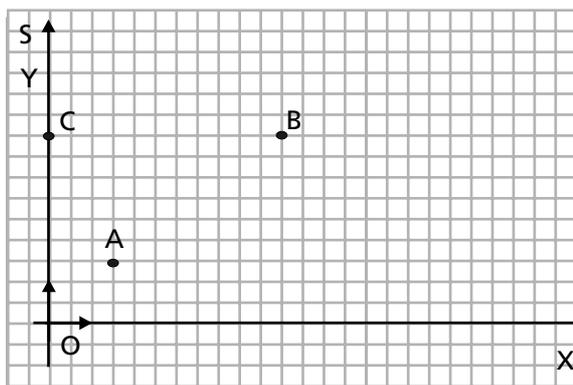
### Leituras

Leia sobre os assuntos Posição, Deslocamento, Velocidade e Aceleração e Cinemática Escalar nas seções 4.4 e 4.6 do texto Física I-Mecânica do Gref.

Faça os Problemas e questões de vestibulares do capítulo 2 do livro de Antonio Máximo e Beatriz Alvarenga, *Física - volume único*.

### Exercício 1

Um homem parte do ponto A e vai até o ponto C passando pelo ponto B (ver figura a seguir). O módulo da sua velocidade é constante igual a 3km/h. Os deslocamentos são retilíneos.



Obtenha, em termos dos unitários  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$ :

os vetores posição dos pontos A, B e C;

os vetores deslocamento entre A e B, entre B e C e entre A e C;

o vetor velocidade média associado ao deslocamento total;

o vetor aceleração média associado ao deslocamento total.

Considere que o lado do quadriculado corresponde a 1m.

Responda novamente ao Questionário 3.

Nesta aula definimos as velocidades e as acelerações e suas relações com as trajetórias. Observamos que é possível construir graficamente a trajetória de uma partícula a partir da sua aceleração instantânea, da posição inicial e da velocidade instantânea inicial. A discussão do movimento unidimensional permitiu obter uma solução geométrica para as trajetórias dos movimentos retilíneo uniforme e uniformemente acelerado.

## Exercícios programados 7

1. Veja a minipalestra Cinemática Vetorial.
2. Um carro vai do ponto A até o ponto B, como ilustra a Figura 1.
  - i. desenhe os vetores-posição dos pontos A e B. Expresse esses vetores em termos dos unitários  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$ .
  - ii. desenhe os vetores-deslocamento do ponto A ao ponto B e expresse em termos dos unitários  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$ .
  - iii. supondo que o deslocamento ocorreu em 2h, calcule o vetor velocidade média entre os pontos A e B.
  - iv. As velocidades instantâneas do carro nos pontos A e B são respectivamente iguais a  $\vec{v}_A = (80\hat{i} + 40\hat{j})\text{km/h}$  e  $\vec{v}_B = (80\hat{i})\text{km/h}$ . Calcule a aceleração vetorial média do carro entre os pontos A e B.

Considere que cada quadrado vale  $10\text{km}$ .

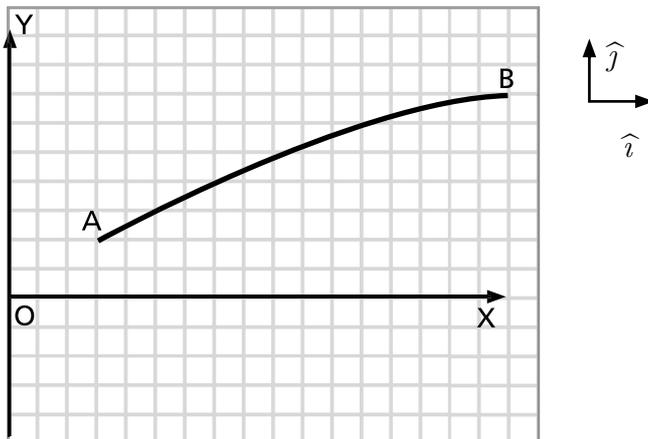


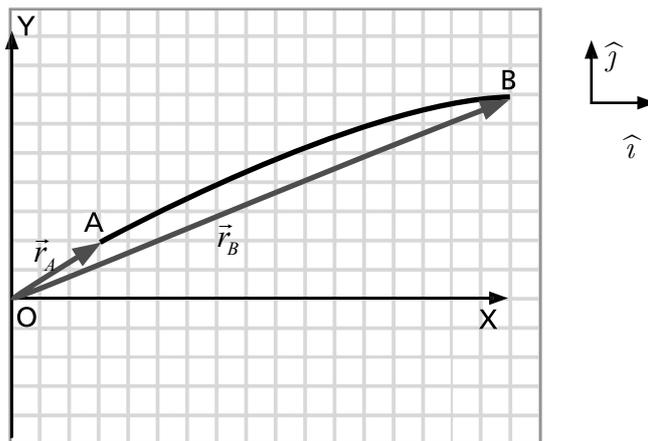
Figura 1

## Gabarito

1. Individual

2. Um carro vai do ponto A até o ponto B como ilustra a figura a seguir.

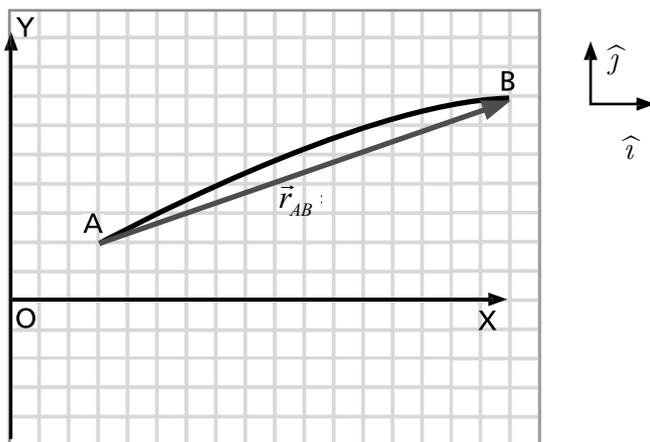
i. Desenhe os vetores posição dos pontos A e B. Expresse esses vetores em termos dos unitários  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$ .



$$\vec{r}_A = 30km\hat{i} + 20km\hat{j}$$

$$\vec{r}_B = 170km\hat{i} + 70km\hat{j}$$

ii. Desenhe o vetor deslocamento do ponto A ao ponto B e expresse-o em termos dos unitários  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$ .



$$\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = 170km\hat{i} + 70km\hat{j} - (30km\hat{i} + 20km\hat{j}) = 140km\hat{i} + 50km\hat{j}$$

iii. Suponha que o deslocamento ocorreu em 2h calcule o vetor velocidade média entre os pontos A e B.

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}_{AB}}{\Delta t} = \frac{140\hat{i} + 50\hat{j}}{2} = (70\hat{i} + 25\hat{j}) \text{ km/h}$$

iv. As velocidades instantâneas do carro nos pontos A e B são respectivamente iguais a  $\vec{v}_A = (80\hat{i} + 40\hat{j}) \text{ km/h}$  e  $\vec{v}_B = (80\hat{i}) \text{ km/h}$ . Calcule a aceleração vetorial média do carro entre os pontos A e B.

*A aceleração média de uma partícula entre dois pontos é o produto do vetor variação de velocidade entre esses pontos ( $\Delta\vec{v}$ ) pelo número  $1/\Delta t$ , onde  $\Delta t$  é o intervalo de tempo que a partícula gasta para se deslocar entre esse pontos. Assim, temos:*

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_B - \vec{v}_A}{\Delta t} = \frac{80\hat{i} - (80\hat{i} + 40\hat{j})}{2} = -20\hat{j} \text{ km/h}^2$$



## O que muda o movimento

### Prática 1 – Mesa de Forças

#### Experimento - Equilíbrio de três forças coplanares concorrentes

- decomposição em componentes;
- obtenção da resultante de um dos pares;
- equilíbrio do sistema.

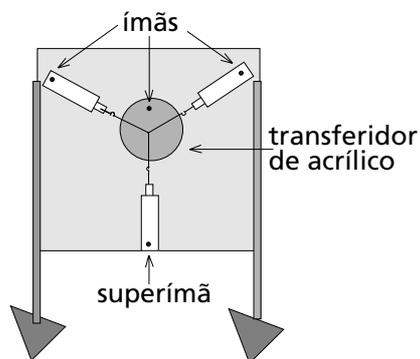


Figura 64 – Mesa de forças.

#### Objetivo

Mostrar experimentalmente que as forças são vetores.

#### Material utilizado

- painel de forças para fixação magnética, apoiado verticalmente sobre par de tripés;
- 3 dinamômetros de fixação magnética, graduados em newtons (máx. 2N);
- 3 ímãs de terras raras para fixar os dinamômetros;
- escala angular pendular, com divisões em graus;
- 3 cordinhas com anéis em suas extremidades.

*Precauções*

Antes de iniciar a experiência, o aluno deve ler as instruções básicas existentes no manual do painel de forças. Aqui repetiremos apenas as que podem prevenir danos:

1. **Nunca** utilize o dinamômetro acima de sua capacidade (2N).
2. **Nunca** solte bruscamente a mola do dinamômetro quando estiver esticada.
3. **Nunca** puxe os ímãs sem antes incliná-los levemente. Para soltar os ímãs de terras raras, use seus manípulos (pequenos cabos) para primeiro incliná-los, diminuindo a força de retenção.
4. Antes de começar o experimento zere os dinamômetros.

**Cuidado!!** O dinamômetro que mede a força  $F_3$  tem que ser zerado na posição em que ele vai ser utilizado.

Informações preliminares

As forças são puxões ou empurrões e podem ser representados por segmentos de retas orientados. Na Figura 65 estão representadas as forças  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ .

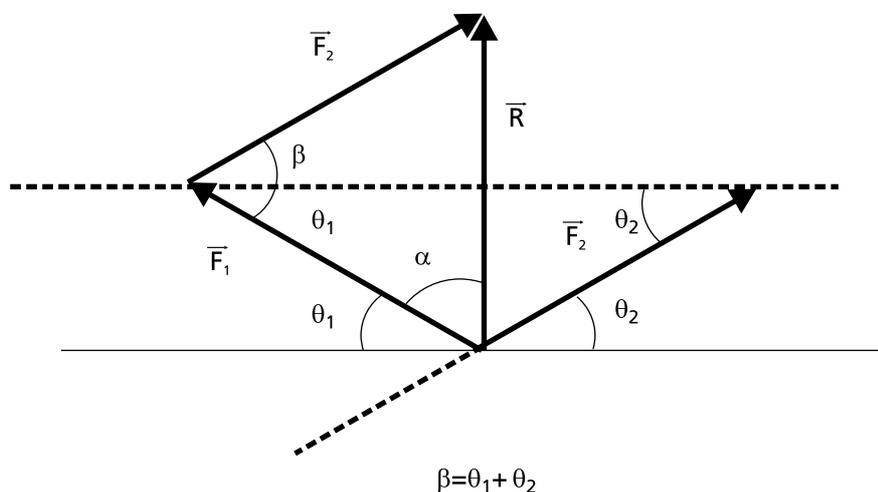


Figura 65 - Soma de forças pela regra do paralelogramo.

Vamos verificar se o modelo que trata as forças como vetores tem comprovação experimental. A condição necessária para que as forças sejam vetores é que elas se somem pela regra do paralelogramo, isto é, que as seguintes relações sejam satisfeitas:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos(\beta)} \text{ e } \frac{\text{sen}(\beta)}{R} = \frac{\text{sen}(\alpha)}{F_2}.$$

Outra forma de expressar esse resultado é através das componentes das forças, isto é,

$$R_x = F_{1x} + F_{2x}; \quad R_y = F_{1y} + F_{2y}$$

Esse experimento permite medir as forças  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  e a força  $\vec{F}_3$  (ver Figura 66).

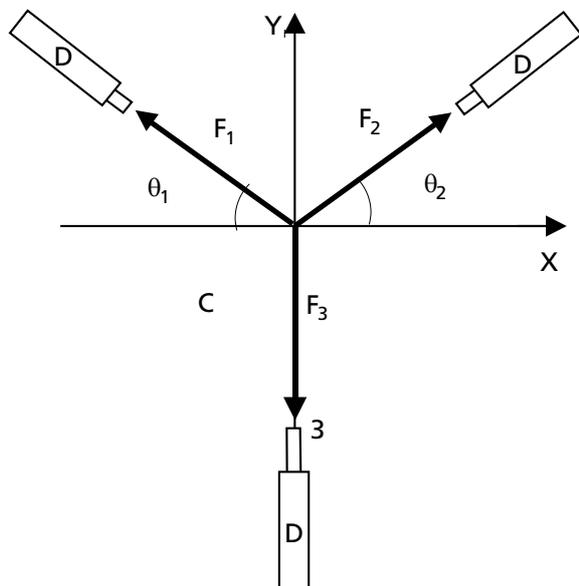


Figura 66 - Medidas diretas das forças.

A Figura 66 mostra que a força  $\vec{F}_3$  anula o efeito das forças  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ . Portanto, ela é força  $-\vec{R}$ . Logo, podemos medir diretamente a força  $-\vec{R}$ . Assim, a mesa de forças também permite medir a força resultante  $\vec{R}$ .

### Atividade experimental

1. Monte o painel de forças na posição vertical, usando um nível de bolha circular para o nivelamento dos tripés e do suporte do painel.

2. Acople os três dinamômetros D, conforme a Figura 64. Use uma cordinha para os dois de cima, com um anel de cada extremidade conectado a cada um deles. Dobre ao meio uma outra cordinha, passe-a sobre a primeira e prenda seus dois anéis no dinamômetro de baixo.

3. Acople a escala angular pendular C ao painel. Veja a Figura 64. *Cuidado, não deixe essa escala cair.* Em caso de dúvida na colocação do painel, consulte o manual da mesa de forças.

4. Movimente os dinamômetros de forma a conseguir que o ponto de concorrência das forças situe-se no centro da escala angular pendular e que os ângulos medidos em relação ao eixo positivo dos X sejam  $\theta_2 = 30^\circ$  e  $\theta_1 = 30^\circ$  (o ângulo entre as forças será de  $120^\circ$ ).

5. Preencha as tabelas

Tabela 1 - Medidas diretas.

$ F_1 $ [N]	$ F_2 $ [N]	$ F_3 $ [N]	$\theta_1$ (graus)	$\theta_2$ (graus)	$\delta F_1 $ [N]	$\delta F_2 $ [N]	$\delta F_3 $ [N]	$\delta\theta_1$ (radianos)	$\delta\theta_2$ (radianos)	$\delta\theta_3$ (radianos)



Leia o complemento 2 sobre o cálculo de erros.

Análise dos dados

As componentes das forças  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  e  $\vec{F}_3$  são, respectivamente:

$$\begin{aligned} F_{1x} &= -F_1 \cos(\theta_1) & ; & & F_{1y} &= F_1 \sin(\theta_1) \\ F_{2x} &= F_2 \cos(\theta_2) & ; & & F_{2y} &= F_2 \sin(\theta_2) \\ F_{3x} &= 0 & ; & & F_{3y} &= -F_3 \end{aligned}$$

O erro de uma soma de uma função  $f = x + y$  é  $\delta f = \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2}$ .

O erro de uma função  $F = F_0 \cos(\theta)$  é  $\delta F = \sqrt{(\cos(\theta)\delta F_0)^2 + (F_0 \sin(\theta)\delta\theta)^2}$ .

O erro de uma função  $F = F_0 \sin(\theta)$  é  $\delta F = \sqrt{(\sin(\theta)\delta F_0)^2 + (F_0 \cos(\theta)\delta\theta)^2}$ .

Tabela 2 - Medidas indiretas.

$F_{1x}$ [N]	$F_{2x}$ [N]	$F_{1y}$ [N]	$F_{2y}$ [N]	$F_{1x} + F_{2x}$ [N]	$F_{1y} + F_{2y}$ [N]

Tabela 3 - Erros das medidas indiretas.

$\delta F_{1x} $ [N]	$\delta F_{1y} $ [N]	$\delta F_{2x} $ [N]	$\delta F_{2y} $ [N]	$\delta F_{1x} + F_{2x} $ [N]	$\delta F_{1y} + F_{2y} $ [N]

Compare as componentes da soma das forças  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  obtidas por cálculo indireto (Tabela 2) com as componentes da força  $\vec{F}_3$  medidas diretamente (Tabela 1) e verifique se o modelo que soma forças como vetores é comprovado por esse experimento.

*Conclusão:*

---

---

---

---

---

---

---

---



## Leis de Newton

### Objetivos:

Discutir o conceito de força e as Leis de Newton.

### Introdução

Nas Aulas 1, 2 e 3 apresentamos os conceitos necessários para a descrição dos movimentos. Nesta aula vamos estudar as causas dos movimentos. Ela é composta de sete partes.

**O que sei sobre as leis do movimento e as forças?** é um questionário que tem como finalidade levantar as suas idéias prévias sobre o assunto.

**Forças e suas características** é um texto que discute as idéias intuitivas sobre forças.

**Leis de Newton** é um texto que discute as leis que permitem entender e prever os movimentos dos corpos.

**Leituras e exercícios 6** são textos e exercícios sobre forças no livro *Física – Volume Único* (Antonio Máximo e Beatriz Alvarenga) e exercícios propostos.

**Leituras e exercícios 7** são textos e exercícios sobre a Primeira Lei de Newton (a lei da inércia) no livro *Física – Volume Único* (Antonio Máximo e Beatriz Alvarenga) e exercícios propostos.

**Leituras e exercícios 8** são textos e exercícios sobre a Segunda Lei de Newton no livro *Física – Volume Único* (Antonio Máximo e Beatriz Alvarenga) e no livro *Física 1- Mecânica*, do Gref, e exercícios propostos.

**Leituras e exercícios 9** são textos e exercícios sobre a Terceira Lei de Newton (a lei da ação e reação) no livro *Física – Volume Único* (Antonio Máximo e Beatriz Alvarenga).

## O que sei sobre as leis do movimento e as forças?

As questões apresentadas a seguir têm como finalidade investigar e organizar os seus conhecimentos e idéias prévias sobre forças e as leis de Newton. Escreva em seu caderno, de forma organizada, as respostas às questões. Não consulte livros ou notas de aulas, mas não deixe de respondê-las. A comparação entre suas idéias e conhecimentos sobre as forças e as leis de Newton antes e depois de trabalhar esta unidade é importante para o seu aprendizado.



### Questionário 4

1. Qual é a noção intuitiva de *força* ?
2. O que são *forças de contato*? Dê exemplos.
3. O que são *forças de ação a distância*? Dê exemplos.
4. Como se *medem as forças*?
5. As forças *são vetores*? Por quê?
6. Qual a expressão da *força gravitacional* entre duas massas?
7. Enuncie a *Primeira Lei de Newton*.
8. Enuncie a *Segunda Lei de Newton*.
9. Enuncie a *Terceira Lei de Newton*.
10. O que a *massa* mede?

## Forças e suas características



### Definição

Desde a Antigüidade, várias perguntas preocupavam os cientistas:

- Quais são as causas do movimento?
- Há necessidade de alguma ação para manter um corpo em movimento?
- O que pode alterar o movimento de um corpo e de que forma essa alteração se realiza?

As respostas a essas questões foram dadas há aproximadamente três séculos por Isaac Newton. Ele formulou as três leis que explicam as causas do movimento baseando-se nas suas observações e em trabalhos de alguns cientistas que o antecederam, como Galileu.

Iniciaremos o estudo dessas leis discutindo o conceito de força.

A nossa experiência cotidiana mostra que puxões e empurrões podem provocar o início e o final de um movimento. Esses puxões e empurrões são denominados **forças**.

### FORÇAS



Figura 67 - A bola entra em movimento quando é empurrada pelo pé do jogador. O pé do jogador exerce uma força sobre a bola.



Figura 68 - O lutador de sumô que está de costas está empurrando o outro lutador, isto é, está exercendo uma força sobre ele.



Figura 69 - O remo está empurrando a água para trás, isto é, está exercendo uma força sobre a água.

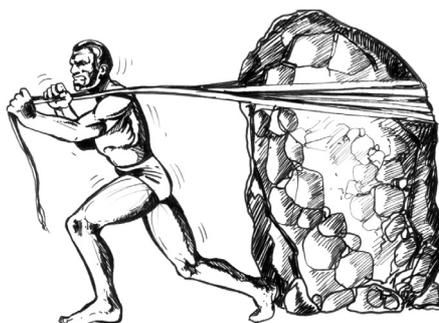


Figura 70 - O homem está puxando a corda, isto é, está exercendo uma força sobre ela.

P-1 QUAL A DEFINIÇÃO INTUITIVA DE FORÇAS?

Forças de contato

FORÇAS DE CONTATO

Em todos os exemplos apresentados anteriormente, a força que atua sobre o corpo é exercida por outro corpo que está em contato com ele. Essas forças são denominadas **forças de contato**.

- A força que atua na bola é exercida pelo pé que está em contato com ela.
- A força que atua sobre o lutador de sumô que está de frente é exercida pelas mãos do outro lutador. Elas estão em contato com ele.
- A força que atua sobre a água está sendo exercida pelo remo que está em contato com ela.
- A força que puxa a corda está sendo exercida pelas mãos do homem, que estão em contato com a corda.

As forças de contato surgem quando tentamos deformar, arrastar ou puxar um corpo.



Figura 71-a - A cama elástica empurra o menino para cima.

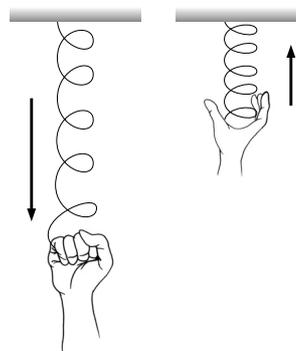


Figura 71-b - A mola puxa a mão quando é esticada e a empurra quando é comprimida.

A cama elástica empurra o menino para cima quando é esticada para baixo (figura 71-a). A mola empurra a mão quando é comprimida e a puxa quando é esticada (figura 71-b).

A mão que empurra a parede na figura 72 deforma a superfície da parede. Nesse caso, a deformação é muito pequena ( $\leq 10^{-6}m$ ), sendo imperceptível. Como a cama elástica, a parede deformada empurra a mão para fora.

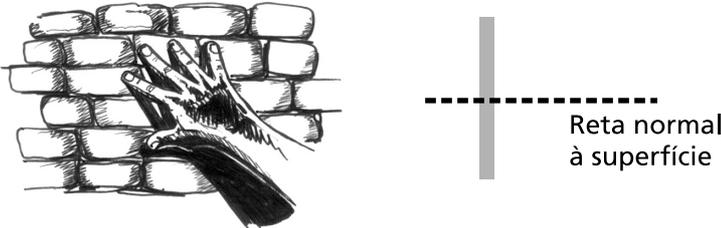


Figura 72 - A superfície da parede empurra a mão, impedindo-a de penetrar no seu interior.

A força que uma superfície exerce sobre um corpo na direção perpendicular a ela é denominada **força normal**.

A resistência que encontramos quando tentamos arrastar um objeto sobre uma superfície depende do par de superfícies. A superfície de uma caixa desliza com mais facilidade sobre uma superfície de mármore do que sobre um tapete (figura 73). A força que dificulta o deslizamento da superfície de um corpo sobre a superfície de outro corpo é chamada **força de atrito**. Ela tem a direção das retas tangentes à superfície. O seu sentido é tal que ela se opõe ao movimento ou à tendência ao movimento de uma superfície em relação a outra superfície.

#### FORÇA NORMAL

#### FORÇA DE ATRITO ENTRE SUPERFÍCIES SÓLIDAS.

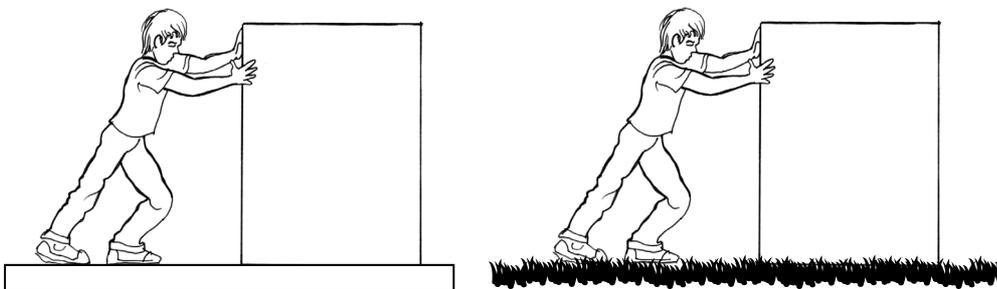


Figura 73- A superfície da caixa desliza com mais facilidade sobre um piso de mármore do que sobre um tapete.

Podemos entender qualitativamente o aparecimento da força de atrito com um modelo simples. Nesse modelo supomos que as superfícies apresentam pequenas irregularidades ( $\leq 10^{-6}m$ ). Elas dificultam o deslizamento de uma superfície sobre a outra.

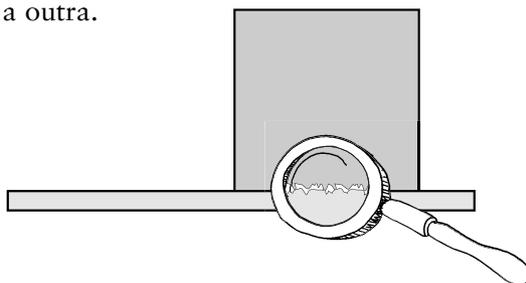


Figura 74 - As pequenas irregularidades entre as superfícies criam a força de atrito que dificulta o deslizamento da caixa.

Dizemos que uma superfície é lisa quando as forças de atrito exercidas por outras superfícies sobre ela são desprezíveis.

## RESISTÊNCIA DO AR

Quando a superfície de um corpo se movimenta no interior de uma camada de fluido, como por exemplo de ar, o fluido exerce uma força de atrito (**resistência do ar**) sobre ele. A nossa experiência diária mostra que essa resistência do ar aumenta com o tamanho da superfície do corpo e com a sua velocidade. Por exemplo, é fácil perceber que uma folha de papel aberta cai muito mais devagar do que uma folha de papel amassada. Em um dia sem vento, não sentimos a presença do ar quando caminhamos. No entanto, se estivermos em um carro com velocidade de 80km/h e colocarmos a mão para fora do carro, sentiremos nitidamente a nossa mão ser empurrada para trás pelo ar.

## FORÇA EMPUXO

Quando entramos em uma piscina nos sentimos mais leves. Isso ocorre porque a água nos empurra para cima com a **força empuxo**. Veremos na aula 7 que o módulo da força empuxo é igual ao peso do volume de água deslocado. Um objeto imerso no ar também é empurrado para cima pela força empuxo que o ar exerce sobre ele. Quando o peso do objeto é muito maior do que o peso do ar deslocado, a força empuxo pode ser desprezada. Este é o caso de objetos com densidades muito maiores do que a densidade do ar ( $\approx 10^{-3}g/cm^3$ ). No caso de um objeto com densidade menor do que a densidade do ar (um balão, por exemplo) a força empuxo não pode ser desprezada.

P2– O QUE SÃO FORÇAS DE CONTATO?

P3– DESCREVA AS CARACTERÍSTICAS DA FORÇA NORMAL. POR QUE A FORÇA NORMAL APARECE?

P4 – DESCREVA AS CARACTERÍSTICAS DA FORÇA DE ATRITO. POR QUE ELA APARECE?

P5– DESCREVA AS CARACTERÍSTICAS DA FORÇA EMPUXO. POR QUE ELA APARECE?

P6 – DESCREVA AS CARACTERÍSTICAS DA FORÇA DE ATRITO COM AR. POR QUE ELA APARECE?

## Forças de ação a distância

A constatação de que na maioria das vezes em que um corpo é colocado em movimento há um outro corpo em contato empurrando-o ou puxando-o nos faz crer erradamente que para que haja força tem que existir contato entre os corpos. Essa crença aparece nos filmes. Neles, somente fadas e bruxas conseguem movimentar os objetos sem tocá-los.



Figura 75 – A fada levanta a bola com sua varinha, sem tocá-la, isto é, exerce uma força sobre a bola a distância.

Existem forças que são exercidas sem que haja contato entre os corpos. Elas são denominadas **forças de ação a distância**. A força gravitacional e a força eletromagnética são forças de ação a distância. A Terra puxa os corpos mesmo quando não está em contato com eles. Na figura 76, a Terra está puxando a maçã mesmo sem estar em contato com ela.

FORÇAS DE AÇÃO  
A DISTÂNCIA



Figura 76 – A maçã é puxada pela Terra, que não está em contato com ela.

Os ímãs e os corpos eletrizados também exercem forças de ação a distância. Na figura 77 o ímã puxa o prego, que não está em contato com ele.

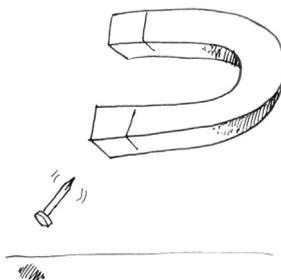


Figura 77 - O ímã puxa o prego, que não está em contato com ele.

FORÇAS GRAVITACIONAIS

Ver aula 2 no Módulo 2

$$F_G = \frac{GmM}{d^2}$$

$$G \cong 6,7 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$$

As **forças gravitacionais** decorrem da interação entre massas. A força gravitacional entre duas massas é proporcional ao produto das massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas.

A razão  $Q$  entre a atração gravitacional exercida por dois corpos celestes sobre uma massa  $m$  é

$$Q = \frac{\left(\frac{Gmm_1}{d_1^2}\right)}{\left(\frac{Gmm_2}{d_2^2}\right)} = \frac{m_1 d_2^2}{m_2 d_1^2}$$

onde  $m_1$  e  $m_2$  são as massas dos corpos celestes e  $d_1$  e  $d_2$  são as distâncias entre eles e a massa  $m$ .

Os dados apresentados a seguir permitem calcular a razão entre os módulos das forças gravitacionais exercidas pela Lua e pela Terra e a razão entre os módulos das forças gravitacionais exercidas pelo Sol e pela Terra em um corpo que está sobre a superfície da Terra.

$$\begin{aligned} M_T &= 6 \times 10^{24} kg; & M_L &= 7 \times 10^{22} kg; & M_S &= 2 \times 10^{30} kg; \\ R_T &= 6 \times 10^3 km; & d_{TL} &= 4 \times 10^5 km; & d_{TS} &= 1,48 \times 10^8 km; \\ Q_{LT} &= 3 \times 10^{-6} kg; & Q_{ST} &= 6 \times 10^{-4}. \end{aligned}$$

O valor da razão  $Q_{LT}$  entre os módulos das forças gravitacionais exercidas pela Lua e pela Terra sobre um corpo na superfície da Terra nos permite desprezar a força gravitacional da Lua sobre esse corpo. Analogamente, o valor da razão  $Q_{ST}$  entre os módulos das forças gravitacionais exercidas pelo Sol e pela Terra sobre um corpo na superfície da Terra nos permite desprezar a força gravitacional do Sol sobre esse corpo. Podemos então concluir que as forças gravitacionais exercidas pelos corpos celestes sobre corpos próximos à Terra podem ser desprezadas.

Estimemos agora a força gravitacional entre corpos do nosso cotidiano (pessoas, mesas, cadeiras, ônibus, caminhões etc). Por exemplo, vamos calcular a força gravitacional entre um homem e uma mulher com massas iguais a 100kg e que estão separados de uma distância de 1m. O módulo da força gravitacional exercida pela mulher sobre o homem é

$$F_G = \frac{Gm^2}{d^2} = \frac{6,7 \times 10^{-11} \times 10^4}{1} = 6,7 \times 10^{-7} N$$

Ela é muito pequena e pode ser desprezada. Fica claro por essa estimativa que as atrações gravitacionais entre objetos do nosso cotidiano (bicicletas, pessoas, casas, edifícios etc.) em relação aos seus pesos podem ser desprezadas.

P7- O QUE SÃO FORÇAS DE AÇÃO A DISTÂNCIA? CITE EXEMPLOS.

P8 - QUAL A RELAÇÃO ENTRE AS FORÇAS GRAVITACIONAIS EXERCIDAS PELO SOL E PELA TERRA EM UM OBJETO DE MASSA M LOCALIZADO NA SUPERFÍCIE DA TERRA?

P9 - QUAL A RELAÇÃO ENTRE AS FORÇAS GRAVITACIONAIS EXERCIDAS PELA LUA E PELA TERRA EM UM OBJETO DE MASSA M LOCALIZADO NA SUPERFÍCIE DA TERRA?

P10 - QUAL A RELAÇÃO ENTRE AS FORÇAS GRAVITACIONAIS EXERCIDAS POR UM CORPO COM MASSA DE 100KG E PELA TERRA EM UM OBJETO DE MASSA M LOCALIZADO NA SUPERFÍCIE DA TERRA? A DISTÂNCIA ENTRE A MASSA M E A MASSA DE 100KG É DE UM METRO.

## As interações fundamentais da Natureza

À primeira vista, poderia parecer que existe uma grande diversidade de forças na Natureza; no entanto, até hoje só foram identificados quatro tipos de **interações fundamentais**.

- A interação **gravitacional** entre as massas.
- A interação **eletromagnética** entre cargas elétricas, ímãs e correntes elétricas.
- A interação **nuclear** entre prótons, nêutrons etc.
- A interação fraca entre nêutrons, prótons, elétrons, neutrinos etc.

A interação nuclear entre os prótons e nêutrons dos núcleos é responsável pela estabilidade dos núcleos dos átomos.

As forças de contato (normais, forças de atrito, forças de molas, forças de cordas etc.) têm natureza eletromagnética. Elas são resultantes das interações entre as cargas elétricas dos átomos e moléculas das superfícies dos corpos neutros. Lembre-se de que todos os **corpos neutros** são compostos por um número igual de cargas elétricas positivas e negativas distribuídas nos seus volumes.

### INTERAÇÕES FUNDAMENTAIS

Neutrino é uma partícula sem massa e sem carga elétrica.

Leia sobre corpos neutros no Módulo 4.



P11—QUAIS SÃO AS INTERAÇÕES FUNDAMENTAIS DA NATUREZA?

Intensidade, direção e sentido de uma força

As intensidades das forças podem ser medidas com molas lineares. Molas lineares são aquelas cujas elongações são proporcionais às forças que atuam sobre as suas extremidades, isto é,  $F = kd$  ( $d$  é a elongação da mola). O instrumento que utiliza molas para medir forças é chamado de dinamômetro.

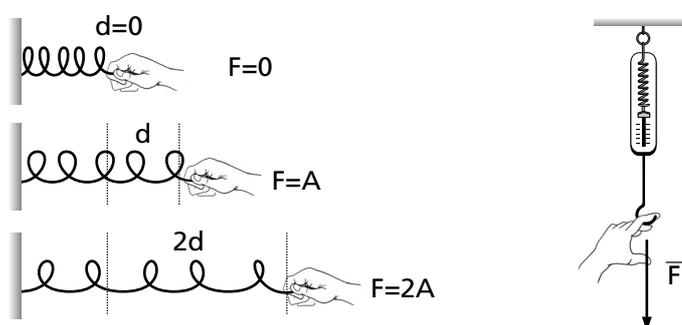


Figura 78 – Os dinamômetros são utilizados para medir forças.

O efeito de uma força sobre um objeto depende da intensidade, direção e sentido em que ela é aplicada. Na figura 79 observamos a trajetória de uma bola de bilhar inicialmente em repouso devido a tacadas com direções e sentidos diferentes.

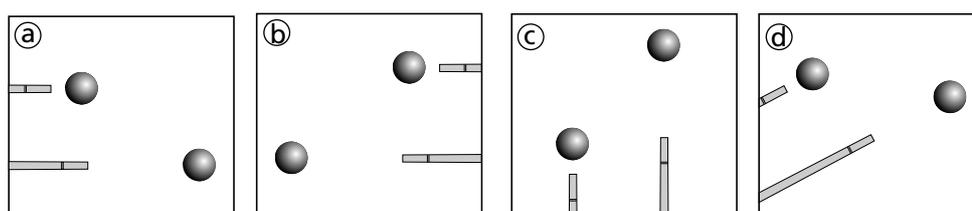


Figura 79 – A força é uma grandeza que tem módulo, direção e sentido.

AS FORÇAS  
SÃO VETORES.

Como as forças têm módulo, direção e sentido, são representadas por segmentos de reta orientados. Além disso, resultados experimentais demonstram que as forças se somam pela regra do paralelogramo. Conseqüentemente, elas são vetores.

P12 – COMO SE MEDEM AS FORÇAS?

## Identificando as forças que atuam sobre corpos

O movimento de um corpo vai depender das forças que atuam sobre ele. Faz-se necessário na análise do movimento de um corpo **identificar todas as forças** que atuam sobre o corpo. Essa identificação é facilitada quando construímos o diagrama de forças do corpo. Propomos o seguinte **algoritmo para construir diagramas** de forças:

1. Identificar o sistema que vai ser analisado (objeto de estudo). Fazer um desenho do objeto de estudo separado dos outros corpos.
2. Identificar os corpos que pertencem ao exterior do sistema e que estão em contato com ele. No caso em que eles exercem forças sobre o sistema (empurrões ou puxões), desenhar essas forças sobre ele.
3. Verificar se existem forças gravitacionais.

Neste módulo, iremos supor que **não existem forças eletromagnéticas produzidas por corpos carregados, correntes elétricas e ímãs atuando sobre os corpos**.

**Exemplo 1:** Um menino está empurrando a caixa com uma força horizontal. Faça o diagrama de forças da caixa. Despreze a força exercida pelo ar.

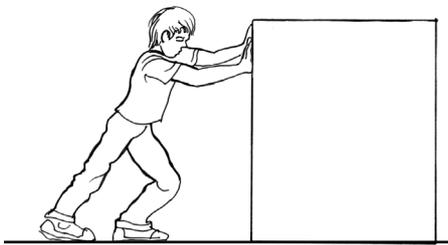


Figura 80 – Menino empurrando a caixa.

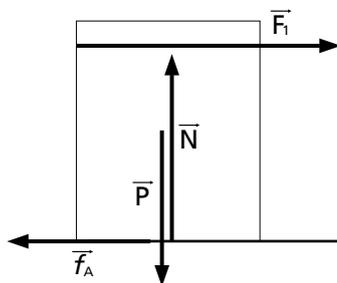


Figura 81 – Desenho que representa o objeto de estudo.

Vamos aplicar o algoritmo de diagramas de forças à caixa.

- A caixa é o objeto de estudo. Ela foi desenhada separada dos outros corpos, na figura 81.

- Estão em contato com a caixa as mãos do menino, o piso e o ar. O exercício manda desprezar a resistência do ar. As mãos do menino estão empurrando a caixa na direção horizontal. A força associada a esse empurrão foi denominada  $\vec{F}_1$ . O piso está sendo empurrado pela caixa que tenta penetrar nele. Ele se deforma de maneira imperceptível e empurra a caixa para cima, como se fosse uma cama elástica. Esse empurrão é a força normal  $\vec{N}$ . As imperfeições da superfície do piso empurram a superfície da caixa em sentido contrário ao da força  $\vec{F}_1$ . Esse empurrão é a força de atrito  $\vec{f}_a$ .

Algoritmo é um conjunto finito de passos para se chegar a um resultado.

Algoritmo do diagrama de forças produzidas por corpos carregados, correntes e ímãs.

- Das forças gravitacionais que atuam sobre a caixa, apenas a força gravitacional  $\vec{P}$  exercida pela Terra não é desprezível.

Todas as forças que atuam na caixa estão representadas na figura 81.

## Leituras e exercícios 6

### Leituras

Leia a seção 3.1, intitulada *Forças e suas características, Intensidade, direção e sentido de uma força, Representação de uma grandeza vetorial e Medida de uma força*, no livro *Física – Volume Único* (Antonio Máximo e Beatriz Alvarenga).

Dessa mesma seção faça os exercícios de fixação de 1 até 7.

**Exercício 9** – A figura 82 mostra uma maçã caindo. Aplique o algoritmo do diagrama de forças à maçã. Despreze a resistência do ar.



Figura 82 – Maçã caindo.

**Exercício 10** – A figura 83 mostra uma maçã em repouso no solo. Aplique o algoritmo do diagrama de forças à maçã. Despreze a resistência do ar.



Figura 83 – A maçã está em repouso no solo.

**Exercício 11** – A figura 84 mostra uma maçã sendo empurrada em uma superfície lisa. Aplique o algoritmo do diagrama de forças à maçã. Despreze a resistência do ar.

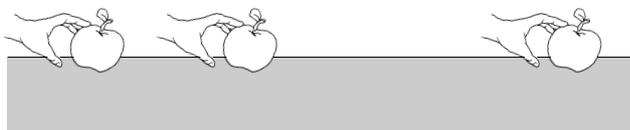


Figura 84 – Maçã sendo empurrada em um plano liso.

**Exercício 12:** A figura 85 mostra uma maçã deslizando sobre um plano inclinado liso. Aplique o algoritmo do diagrama de forças à maçã. Despreze a resistência do ar.

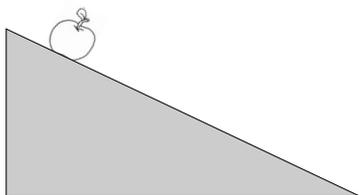


Figura 85 – A maçã descendo um plano inclinado liso.

**Exercício 13** – A figura 86 mostra um político em um palanque improvisado (caixa) que está sobre o solo (o chão). Aplique o algoritmo do diagrama de forças:

- a) à caixa;
- b) ao político.

Despreze a resistência do ar.



Figura 86 – Político no palanque.

**Exercício 14** – A figura 87 mostra um menino que está empurrando uma caixa sobre uma parede com uma força horizontal. Aplique o algoritmo do diagrama de forças:

- a) à caixa;
- b) ao menino.

Despreze as forças exercidas pelo ar sobre a caixa.

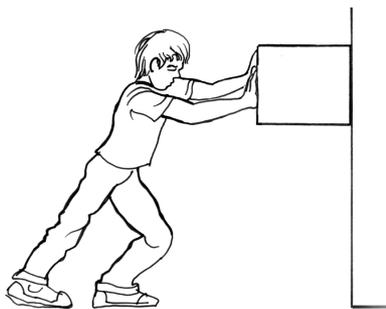


Figura 87 – Menino empurrando a caixa sobre a parede

## As Leis de Newton

Após a discussão qualitativa sobre forças (empurrões e puxões ou interações a distância entre os corpos), vamos retornar às questões iniciais desta aula.

- Quais são as causas do movimento?
- Há necessidade de alguma ação para manter um corpo em movimento?
- O que pode alterar o movimento de um corpo e de que forma essa alteração se realiza?

### Primeira Lei de Newton

Vimos na aula 1 que todo movimento é relativo. A escolha de um referencial é muito importante na descrição dos movimentos dos corpos.

As leis do movimento dos corpos foram obtidas utilizando-se a Terra como referencial. Discutiremos agora algumas das observações que ajudaram e atrapalharam a descoberta das leis do movimento. Tentaremos responder às duas primeiras questões que foram apresentadas no início desta aula.

- Quais as causas do movimento, do ponto de vista do referencial da Terra?

Os exemplos apresentados anteriormente nos levam a concluir que são as forças que colocam os corpos em movimento: a maçã é puxada na direção da superfície da Terra pela força peso, a bola de bilhar é empurrada pelo taco, a caixa é empurrada pelo menino etc.

- Há necessidade de alguma ação para manter um corpo em movimento?

Desde a nossa infância sabemos que, para manter um corpo em movimento, precisamos empurrá-lo de vez em quando, isto é, precisamos aplicar uma força sobre ele. Era isso que fazíamos quando empurrávamos o nosso carrinho de bebê, a cadeira da sala etc. Todos sabemos que se arremessarmos uma caixa sobre a superfície de uma mesa muito comprida ela pára antes de cair.

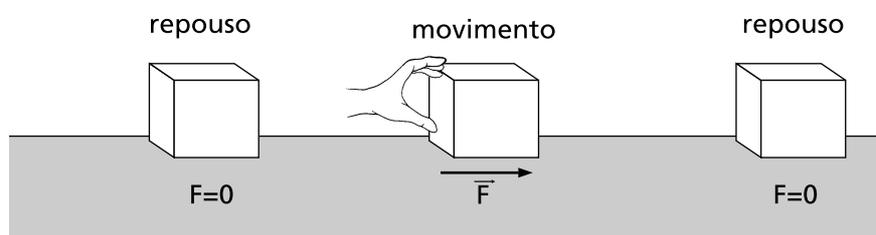


Figura 88 – Nossa experiência diária nos faz crer que um corpo só permanece em movimento enquanto é empurrado.

Quem pára os corpos são as forças de atrito. O nosso mundo tem atrito por toda parte. Por isso, durante muito tempo, a lei do movimento aceita como correta era:

“Um corpo só pode permanecer em movimento se existir uma força atuando sobre ele.” (figura 88).

Qualquer pessoa que não conheça as leis da mecânica concordará com essa lei.

## As idéias de Galileu sobre o movimento

O cientista Galileu fez uma série de experimentos com corpos em movimento. **Imaginou um mundo sem atrito** e concluiu que nesse mundo poderia haver movimento sem que houvesse forças atuando sobre um corpo (figura 89).



Galileu Galilei-Físico e astrônomo italiano (Pisa, 1564 – Arcetri, perto de Florença, 1642). Fez experimentos decisivos para estabelecer os princípios da dinâmica

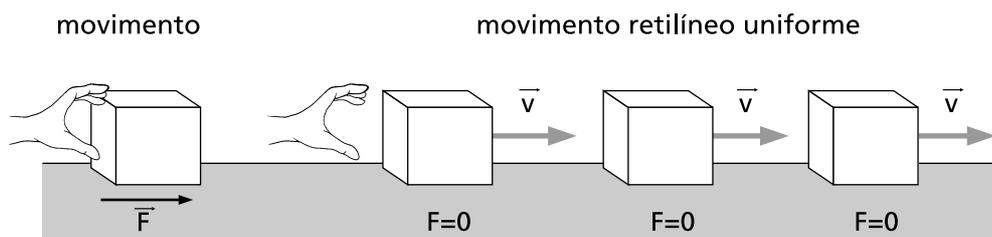


Figura 89 – Movimento de um corpo em uma mesa longa e sem atrito.

Uma das versões atuais da lei do movimento enunciada por Galileu é:

“Se um corpo estiver em repouso, é necessária a ação de uma força sobre ele para colocá-lo em movimento; cessando a ação das forças, o corpo continuará a se mover indefinidamente em linha reta, com velocidade constante.”

Essa lei é conhecida como Lei da Inércia.

Portanto, a lei do movimento de Galileu responde à nossa primeira pergunta.

- Não há necessidade da ação de uma força para manter um corpo em movimento.

## Inércia

Existem vários exemplos do cotidiano onde a lei da inércia é comprovada. Por exemplo, um corpo que está em repouso sobre a superfície da Terra permanece em repouso sobre ela, a menos que uma força atue sobre ele. Um esquiador que se coloca em movimento empurrando a neve para trás permanece em movimento retilíneo uniforme em uma superfície de neve plana até que volte a empurrar a neve para parar (figura 90). Isso ocorre porque o atrito entre a camada de água que está em contato com o esqui e o esqui é pequeno.

Pense em outros exemplos em que os corpos têm a tendência a manter o seu estado de movimento. Essa propriedade dos corpos é denominada **inércia**.



Figura 90 – O esquiador sabe que em uma superfície de neve plana ele permanece em movimento retilíneo uniforme, enquanto não empurrar a neve para parar.

## A Primeira Lei de Newton

Isaac Newton formulou, vários anos após Galileu, as três leis que regem o movimento dos corpos na Terra e nos céus. A Primeira Lei de Newton é a Lei da Inércia de Galileu.

.....

### PRIMEIRA LEI DE NEWTON

“Existem referenciais onde um corpo isolado permanece em repouso ou continua em movimento retilíneo com velocidade constante. Dizemos que um corpo está isolado quando a força resultante que atua sobre ele é nula.”

.....

Os referenciais onde vale a Primeira Lei de Newton são denominados **referenciais inerciais**.

As Leis de Newton foram descobertas no referencial da Terra. Logo, podemos concluir que, pelo menos nas análises dos movimentos dos corpos associados ao nosso cotidiano (movimento de carros, bicicletas etc.), ela pode ser considerada inercial. Na realidade, a Terra não é um referencial inercial porque ela gira em torno do seu eixo. Entretanto, o movimento de rotação da Terra em torno do seu eixo afeta muito pouco os movimentos usuais, na escala de laboratório, e na prática empregamos o laboratório como um referencial inercial. Por outro lado, um referencial ligado às estrelas fixas é, com excelente aproximação, um referencial inercial.

É importante entender o significado da força resultante. Na aula 4 foi verificado experimentalmente que as forças são vetores, somando-se portanto pela regra do paralelogramo. Isso significa que o empurrão ou puxão que várias forças exercem sobre um corpo é equivalente a um único empurrão ou puxão caracterizado pelo módulo, direção e sentido da força resultante. A **força resultante**  $\vec{P}$  é a soma vetorial de todas as forças que atuam em um corpo.

### REFERENCIAIS INERCIAIS

Estrelas fixas são aquelas que não apresentam movimento relativo entre si.

### FORÇA RESULTANTE

P14- ENUNCIE A PRIMEIRA LEI DE NEWTON.

Vamos calcular as forças resultantes dos sistemas descritos nos exercícios de 6 a 9. Mas, antes, é fundamental relembrar as várias representações de vetores e das somas de vetores:

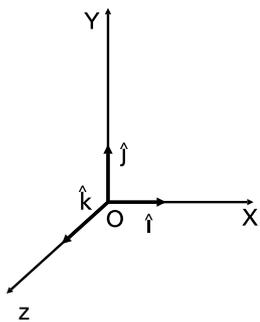
- Representação simbólica de um vetor: o vetor é representado por uma letra com uma seta em cima, por exemplo,  $\vec{P}$ . Ela é abstrata e não fornece nenhuma informação sobre o módulo, direção e sentido do vetor. Ela pode fornecer informações relativas entre vetores, por exemplo, o vetor  $-\vec{P}$  tem a mesma direção e o mesmo módulo do vetor  $\vec{P}$  e sentido contrário ao dele.

- Representação simbólica de uma soma de vetores: a soma dos vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  é denotada por  $\vec{a} + \vec{b}$ . Ela também é abstrata e significa que os vetores devem ser somados pela regra do paralelogramo. Ela não fornece a direção, o módulo e o sentido do vetor obtido pela soma, isto é, do vetor resultante.

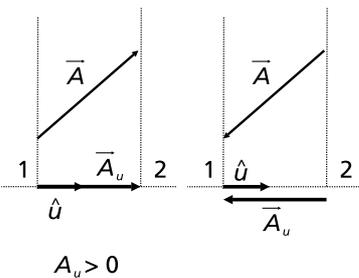
- Representação geométrica de um vetor: é o segmento de reta orientado que representa geometricamente o vetor. Por exemplo, no exemplo 9, a representação da força  $\vec{P}$  é a seta vertical com o sentido de cima para baixo representada na Figura 81.

- Representação geométrica da soma de vetores: é o segmento de reta orientado obtido aplicando-se a regra do paralelogramo aos segmentos de reta orientados que representam os vetores.

- Representação em componentes de um vetor: fornecem-se os eixos coordenados com os seus unitários e os valores das componentes dos vetores. Por exemplo, no sistema de eixos cartesianos da figura ao lado, o vetor  $\vec{a}$  é representado por  $\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$ .

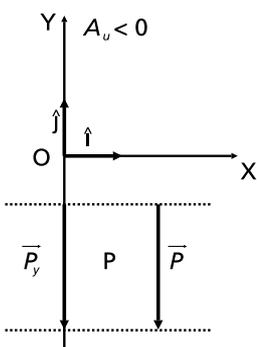


- *Lembre-se de que a componente  $A_u$  de um vetor  $\vec{A}$  em uma direção caracterizada por um vetor unitário  $\hat{u}$  é o número por que se deve multiplicar o vetor unitário naquela direção para se obter o vetor projetado. Ela é positiva quando o vetor projetado tem o sentido de  $\hat{u}$  e negativa quando o sentido é contrário. Projetar um vetor em uma direção caracterizada por uma reta (1-2), é levantar, a partir dessa reta, perpendiculares que passam pelo início e pelo final do vetor. O módulo da projeção  $|A_u| = d$  é a distância entre as perpendiculares.*



Precisamos desse lembrete para calcular as componentes dos vetores.

No caso em que o vetor é perpendicular a um dos eixos, o vetor projetado naquele eixo é nulo porque a distância entre as duas retas que o projetam é nula. Veja na figura ao lado as projeções da força peso. O vetor peso projetado  $\vec{P}_x$  na direção OX é nulo porque as duas retas perpendiculares ao eixo OX que fazem a projeção coincidem, sendo portanto a distância entre elas nula. O módulo do vetor projetado  $\vec{P}_y$  da força peso na direção do eixo OY é P. A sua componente é negativa porque o seu sentido é contrário ao do unitário  $\hat{j}$ .



$$P_x = 0, P_y = -P.$$

**Exemplo 2:** Qual é a força resultante que atua em uma maçã que está caindo? Forneça a representação simbólica, geométrica e em componentes da força resultante. Despreze a resistência do ar.

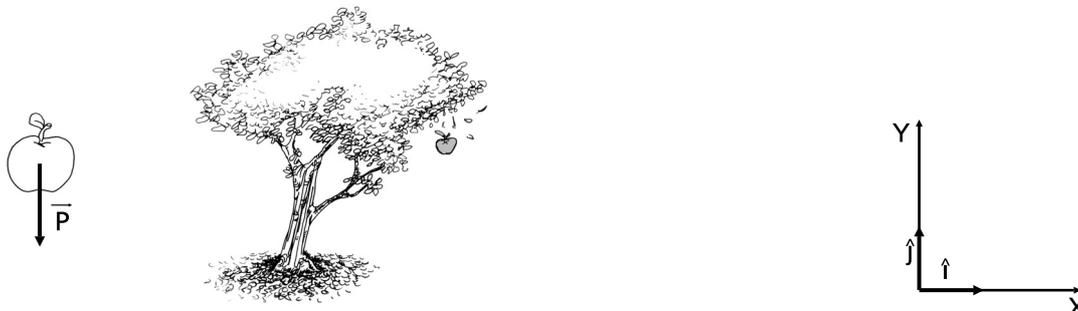


Figura 91- Força resultante na maçã.

**Resolução:**

- Vamos construir o diagrama de forças do nosso sistema utilizando o algoritmo do diagrama de forças.
- O nosso objeto de estudo é a maçã. A maçã desenhada separada dos outros corpos, no lado direito da figura 91.

Nesse caso, somente o ar está em contato com a maçã. Como o problema informa que a força que o ar exerce sobre a maçã é desprezível, não existe força de contato.

- A única força gravitacional que não é desprezível é o peso  $\vec{P}$  da maçã.

A representação simbólica da força resultante na maçã é  $\vec{R} = \vec{P}$ .

A representação geométrica da força resultante é a seta que representa a força peso na figura 91.

A representação em componentes da força resultante é  $\vec{R} = -P\hat{j}$ .

O módulo da força resultante é P.

**Exemplo 3:** Qual é a força resultante que atua em uma maçã que está no solo? Considere o módulo da normal igual ao módulo da força peso. Forneça a representação simbólica, geométrica e em componentes da força resultante. Despreze a resistência do ar.

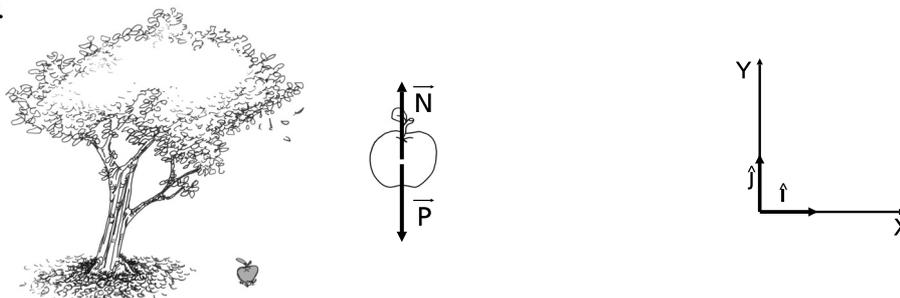


Figura 92 - Força resultante na maçã que está em repouso no solo.

**Resolução:**

Vamos construir o diagrama de forças do nosso sistema utilizando o algoritmo do diagrama de forças.

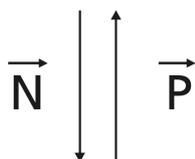
- O nosso objeto de estudo é a maçã. A maçã foi desenhada separada dos outros corpos no lado direito da figura 92.

- Nesse caso, estão em contato com a maçã o ar e o solo. Como o problema informa que a força que o ar exerce sobre a maçã é desprezível, a única força de contato que existe é a que o solo exerce sobre ela. A maçã tenta penetrar no solo deformando de forma imperceptível (como uma cama elástica). A superfície do solo deformada empurra a maçã para cima, isto é, exerce a força normal  $\vec{N}$  sobre a maçã. Como ninguém está tentando arrastar a maçã no solo, não existe força de atrito.

- A única força gravitacional que não é desprezível é o peso  $\vec{P}$  da maçã.

A representação simbólica da força resultante que atua na maçã é a força peso,  $\vec{R} = \vec{P} + \vec{N}$ .

A representação geométrica é obtida aplicando a regra do paralelogramo às setas que representam a força peso e a força normal. A figura ao lado mostra que a força resultante é nula.



A força resultante na representação de componentes é nula,  $\vec{R} = \vec{0}$ .

O módulo R da força resultante é  $R = N - P = 0$ .

*Exemplo 4:* Qual é a força resultante que atua em uma maçã que desliza sobre uma superfície sem atrito empurrada horizontalmente para a direita por uma mão (ver figura 93)? Considere o módulo da força peso igual ao módulo da força normal.

Forneça a representação simbólica, geométrica e em componentes.

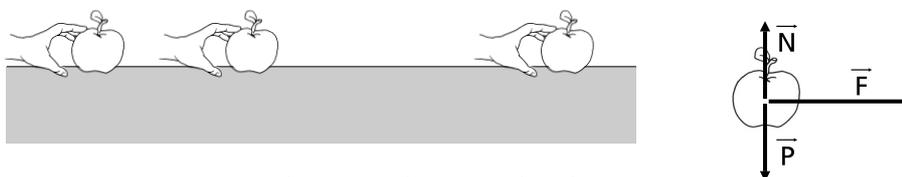


Figura 93 – Maçã sendo empurrada em um plano liso.

- O nosso objeto de estudo é a maçã. A maçã foi separada dos outros corpos e colocada no lado direito da figura 93.

- Nesse caso, estão em contato com a maçã o ar, e o solo e a mão. Como o problema informa que a força que o ar exerce sobre a maçã é desprezível, as forças de contato são exercidas pelo solo e pela mão. A maçã tenta penetrar no solo deformando-o de forma imperceptível (como uma cama elástica).

A superfície do solo deformada empurra a maçã para cima, isto é, exerce a força normal  $\vec{N}$  sobre a maçã. Como a superfície é lisa, não tem atrito. A mão que está em contato com a maçã exerce sobre ela uma força horizontal  $\vec{F}$ .

- A única força gravitacional que não é desprezível é o peso  $\vec{P}$  da maçã.

A representação simbólica da força resultante que atua na maçã é  $\vec{R} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}$ .

A aplicação da regra do paralelogramo aos vetores  $\vec{R}$  e  $\vec{F}$  mostra que a força resultante é igual à força  $\vec{R} = \vec{F}$ . Por isso, a sua representação geométrica é igual à da força  $\vec{F}$ . O módulo da força resultante é  $F$ .

A representação em componentes da força resultante é  $\vec{R} = F\hat{i}$ .

*Exemplo 5* – Qual é a força resultante que atua em uma maçã que desce sobre um plano inclinado liso (Figura 94)? Forneça a representação simbólica, geométrica e em componentes da força resultante.

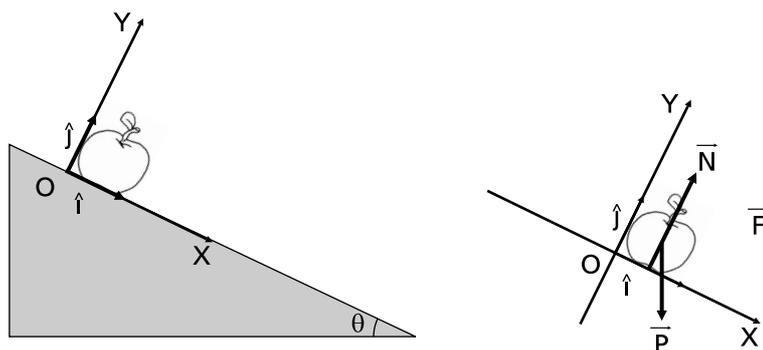


Figura 94 – A maçã descendo um plano inclinado liso.

- O nosso objeto de estudo é a maçã. A maçã foi desenhada separada dos outros corpos e colocada no lado direito da figura 94.
- Nesse caso, estão em contato com a maçã o ar e a superfície do plano inclinado. Como o problema informa que a força que o ar exerce sobre a maçã é desprezível, as forças de contato são exercidas pela superfície do plano. A maçã tenta penetrar na superfície do plano deformando-a de forma imperceptível (como uma cama elástica). A superfície deformada empurra a maçã para cima perpendicularmente à superfície, isto é, exerce a força normal  $\vec{N}$  sobre a maçã. Como a superfície é lisa, não há atrito.

- A única força gravitacional que não é desprezível é o peso  $\vec{P}$  da maçã.

A representação simbólica da força resultante que atua na maçã é  $\vec{R} = \vec{N} + \vec{P}$ .

A representação geométrica é obtida somando-se os vetores  $\vec{N}$  e  $\vec{P}$  pela regra do paralelogramo.

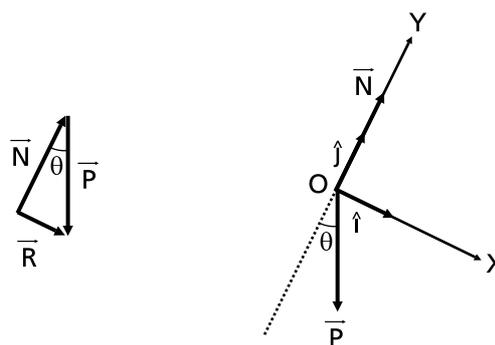


Figura 95 – A força resultante que atua na maçã.

A representação da força resultante em componentes é  

$$\vec{R} = P \text{sen} \theta \hat{i} + (N - P \text{cos} \theta) \hat{j}.$$

## Leituras e exercícios 7

### Leituras

Leia as seções 3.2 e 3.3, intituladas *Inércia - A Primeira Lei de Newton e Força de atrito* do livro Física –Volume Único (Antonio Máximo e Beatriz Alvarenga).

Dessa mesma seção faça os exercícios de fixação de 8 até 15.

**Exercício 15** – O diagrama de forças de uma maçã que está em repouso no solo foi desenhado na figura 92 , repetida abaixo. Considere que os módulos da normal e da força peso são iguais,  $N=P$ .



Figura 96 – Força resultante na maçã que está em repouso no solo.

- Faça a representação geométrica do vetor  $-\vec{P}$  . Qual o módulo desse vetor?
- Faça a representação geométrica do vetor  $\vec{N} + (-\vec{P})$  e compare com a força resultante que atua na maçã. Qual o módulo desse vetor?

**Exercício 16** – Uma maçã com peso de  $10N$  desce um plano inclinado liso. O ângulo que o plano inclinado faz com a horizontal é  $\theta = 30^\circ$  (Figura 97).

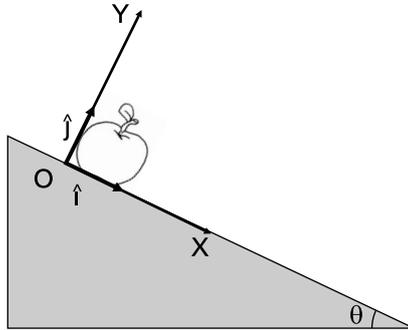


Figura 97 – A maçã descendo um plano inclinado liso.

- Faça o diagrama de forças da maçã.
- Projete o vetor peso nas direções  $OX$  e  $OY$ .
- Desenhe os vetores  $\vec{P}\sin(\theta)$  e  $\vec{P}\cos(\theta)$ . *Veja a definição da operação produto de um vetor por um número real na aula 2.*
- Compare as direções dos vetores representados no item (c) com os vetores projeções da força peso obtidas em (b).

## Segunda Lei de Newton

- O que pode alterar o movimento de um corpo e de que forma essa alteração se realiza?

Os exemplos do nosso cotidiano mostram que são as forças que modificam o movimento dos corpos. **Resta saber de que forma essa modificação ocorre.**

As análises de alguns experimentos nos ajudarão a entender a lei do movimento que responde a essa pergunta. Iniciaremos a nossa discussão relembrando o conceito intuitivo de massa. Massa é a quantidade de matéria de um corpo. A massa de um corpo é medida, desde os tempos antigos, com balanças. As balanças mais simples são aquelas que têm um braço ligado a dois pratos. Medir uma massa desconhecida equivale a equilibrá-la com um conjunto de massas padrões. Quando o braço fica em equilíbrio dizemos que a massa do corpo é igual à soma do conjunto das massas padrões.

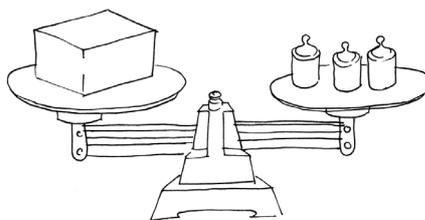


Figura 98 - Balança em equilíbrio.

A experiência mostra que um corpo submetido a uma força resultante constante na direção de sua velocidade adquire uma aceleração constante com a mesma direção e o mesmo sentido da força aplicada. Na figura 99 a força é mantida constante com um dinamômetro.

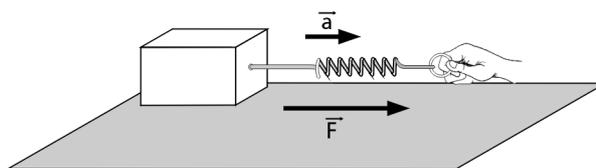


Figura 99 - Um corpo submetido a uma força resultante constante na direção da sua velocidade adquire uma aceleração constante com a mesma direção e o mesmo sentido da força.

Na figura 100, dois corpos com massas diferentes  $m_1$  e  $m_2$  ( $m_1 > m_2$ ) são acelerados por forças resultantes iguais. O corpo de maior massa acelera menos.

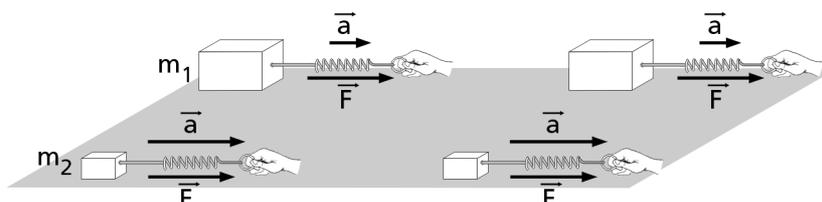


Figura 100 - Corpos com massas diferentes apresentam acelerações diferentes quando são submetidos à mesma força resultante. O corpo de maior massa acelera menos.

Verifica-se experimentalmente que a razão entre as acelerações dos corpos é inversamente proporcional à razão das massas, isto é,

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

A expressão anterior mostra que quanto maior a massa de um corpo menor a sua aceleração. É difícil acelerar e desacelerar um corpo de massa grande. É fácil acelerar e desacelerar um corpo de massa pequena. A massa de um corpo mede a inércia que ele apresenta à mudança do seu estado de movimento. Ninguém em juízo perfeito permaneceria na trajetória de um elefante em movimento se tivesse a opção de se colocar na frente de um inseto em movimento.

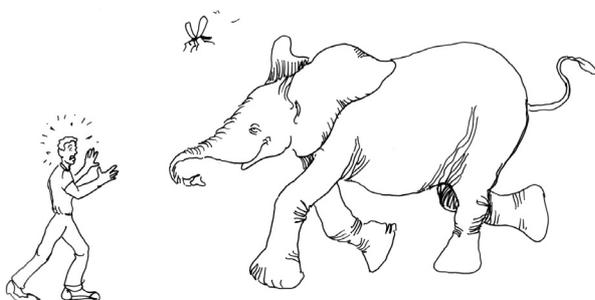


Figura 101- É muito mais difícil parar um elefante do que um inseto.

A figura 99 mostra que a aceleração instantânea do corpo e a força resultante que atua sobre ele têm a mesma direção e o mesmo sentido. **Será que isso é sempre verdade?**

Na figura 102 está representada a trajetória de uma bala que foi arremessada por um canhão. Foram desenhadas sobre a bala a sua velocidade, aceleração e a força resultante. A resistência do ar foi desprezada. A força resultante não tem a direção da velocidade da bala. Ela tem a direção da aceleração da bala.

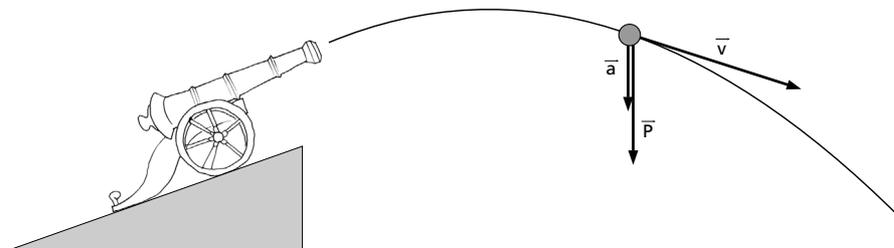


Figura 102 - A força resultante que atua na bala tem a direção da aceleração da bala do canhão.

Na figura 103 está representada a trajetória da Terra em torno do Sol. Foram desenhadas sobre a Terra a sua velocidade, a aceleração e a força resultante, que não tem a direção da velocidade da Terra. Ela tem a direção da aceleração da Terra.

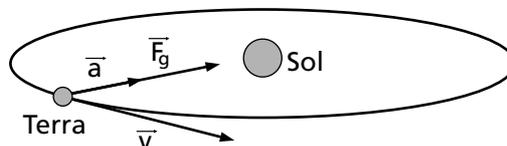


Figura 103 – A força resultante que atua na Terra tem a direção da aceleração da Terra.

Newton analisou vários experimentos e concluiu que a aceleração de um corpo é sempre proporcional à força resultante que atua sobre ele. Esse resultado está enunciado na Segunda Lei de Newton.

.....

**SEGUNDA LEI DE NEWTON**

“ Em um referencial inercial, a aceleração de um corpo é diretamente proporcional à força resultante que atua sobre ele.”

$$\vec{R} = m \vec{a}$$

A constante de proporcionalidade  $m$  é a massa do corpo.

.....



Sir Isaac Newton-  
Matemático  
e físico inglês  
(Woolsthorpe,1642-  
Kensington ,1727).  
Os resultados dos  
seus estudos sobre  
os movimentos  
dos corpos estão  
sintetizados na sua  
obra mais importante:  
*Philosophiae naturalis  
principia mathematica*  
(1686-1687).

**P16 – ENUNCIE A SEGUNDA LEI DE NEWTON.**

Podemos resumir as discussões e os resultados obtidos até agora da seguinte forma:

- A Mecânica é a ciência cuja finalidade é descrever o movimento dos corpos.
- Existem alguns corpos que podem ser tratados como partículas.
- O conhecimento da aceleração da partícula em função do tempo e das condições iniciais do movimento da partícula (velocidade e posição iniciais) permite obter o vetor posição da partícula em função do tempo.
  - A aceleração da partícula é obtida com a aplicação da Segunda Lei de Newton a ela.

Sugerimos o seguinte algoritmo para encontrar a trajetória de uma partícula:

- Escolher o referencial inercial a ser utilizado.
- Aplicar o algoritmo do diagrama de forças para encontrar a força resultante.
- Aplicar a Segunda Lei de Newton ao sistema.
- Analisar os vínculos (restrições ao movimento do sistema).
- Calcular a aceleração.
- Obter o vetor posição da partícula em função do tempo a partir da aceleração e das condições iniciais (velocidade inicial e posição inicial).

Exemplo 6: Na figura 104, uma maçã de massa  $m$  está caindo. Calcule a força resultante e a aceleração da maçã. Despreze a resistência do ar. Considere conhecido o módulo  $P$  do peso da maçã



Figura 104 - Força resultante na maçã caindo

### Resolução:

- O referencial escolhido é a Terra.
- No exemplo 2, mostramos que a força resultante que atua na maçã é a força peso, isto é,  $\vec{R} = \vec{P} = -P\hat{j}$ .
- A aplicação da Segunda Lei de Newton à maçã fornece:  $\vec{R} = \vec{P} = m\vec{a}$ .
- Não existe nenhum vínculo ao movimento da maçã antes de ela chegar ao solo.
- A aceleração do sistema é  $\vec{a} = \frac{\vec{P}}{m} = \vec{g}$ .

A razão entre o peso do sistema e a sua massa é habitualmente denominada de aceleração da gravidade  $\vec{g}$ . É costume escrever o peso de um corpo como  $\vec{P} = m\vec{g}$ . Adotaremos essa notação a partir de agora.

Exemplo 7: Na figura 105, uma maçã de massa  $m$  está em repouso sobre o solo. Calcule a força normal e a força resultante. Despreze a resistência do ar. Suponha que a força peso é conhecida.

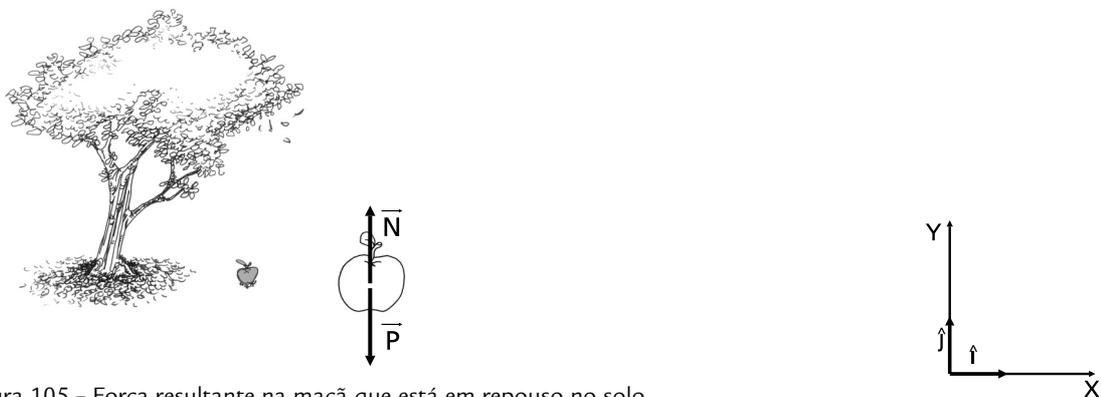


Figura 105 - Força resultante na maçã que está em repouso no solo.

**Resolução:**

- O referencial escolhido é a Terra.
- No exemplo 3, mostramos que a força resultante que atua na maçã é  $\vec{R} = \vec{P} + \vec{N} = (N - P)\hat{j}$ .
- A aplicação da Segunda Lei de Newton à maçã fornece:  $\vec{R} = \vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}$ .

• O problema informa que a maçã está parada. Conseqüentemente, a sua aceleração é nula. Portanto temos que:

$$\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow R_y = 0 \Rightarrow N - P = 0 \Rightarrow N = P \Rightarrow \vec{N} = P\hat{j}.$$

Exemplo 8: Na figura 106, uma maçã de massa  $m$  está no interior de um elevador com aceleração  $\vec{A}$  para cima. A maçã nunca perde o contato com o piso. Calcule a força normal, a força resultante e a aceleração da maçã. Despreze a resistência do ar.

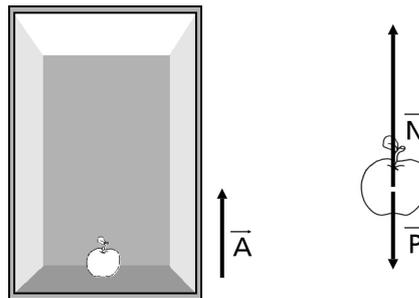
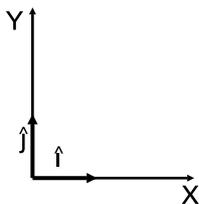
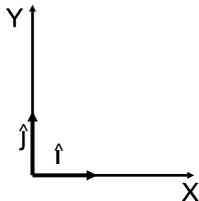


Figura 106 - Maçã no piso de um elevador acelerado para cima.

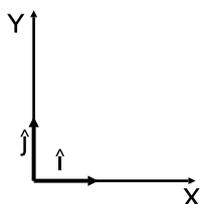
**Resolução:**

- O referencial escolhido é a Terra.
- O piso do elevador e o ar estão em contato com a maçã. Como a resistência do ar é desprezível, apenas o piso exerce força de contato sobre a maçã. O piso deformado pela maçã empurra a maçã para cima com a força normal. A Terra puxa a maçã com a força peso para baixo. A força resultante que atua na maçã é  $\vec{R} = \vec{P} + \vec{N} = (N - P)\hat{j}$ .

• A aplicação da Segunda Lei de Newton à maçã fornece:  $\vec{R} = \vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}$ .

Nesse caso, existe um vínculo ao movimento da maçã. Ela permanece sempre em contato com o piso do elevador. Logo, ela tem a mesma aceleração do elevador, isto é,  $\vec{a} = \vec{A}$ . Portanto, temos que

$$\vec{R} = m\vec{A} \Rightarrow (N - P) = mA \Rightarrow N = P + mA \Rightarrow \vec{N} = (P + mA)\hat{j}$$



É importante ressaltar que nesse caso a normal é maior do que a força peso. Isso sempre vai ocorrer quando o elevador estiver acelerando para cima. Todos nós já experimentamos um aumento de pressão nos pés em elevadores acelerados para cima. Você lerá uma discussão sobre peso aparente no livro do Gref.

**Exemplo 9:** Na figura 107, uma caixa de massa  $m$  é puxada sobre uma superfície lisa por uma corda de massa desprezível que faz um ângulo  $\theta$  de  $30^\circ$  com a horizontal. Calcule a força normal, a força resultante e a aceleração da caixa. Suponha conhecida a força  $\vec{F}$  que a corda exerce sobre a caixa. Despreze a resistência do ar.

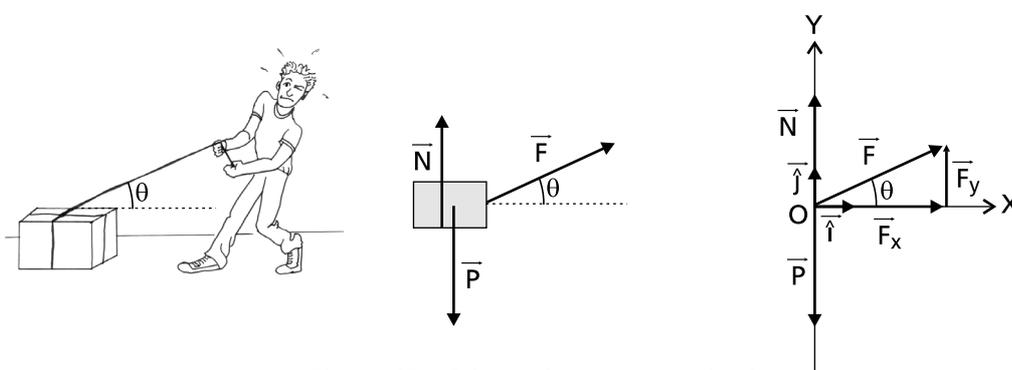


Figura 107 - Caixa deslizando em um piso liso.

### Resolução:

- O referencial é a Terra. A caixa foi desenhada separada dos outros corpos no lado direito da figura 107. Estão em contato com a caixa: o piso, a corda e o ar.

- O problema diz que a resistência do ar é desprezível. A corda puxa o corpo com a força  $\vec{F}$ . A superfície deformada de maneira imperceptível empurra a caixa para cima, como uma cama elástica, exercendo sobre ela a força normal  $\vec{N}$ . Não existe resistência ao deslizamento relativo das superfícies porque elas são lisas.

- A força gravitacional que a Terra exerce sobre a caixa é a única força gravitacional que não é desprezível. Ela é o peso  $\vec{P}$  da caixa.

- A representação simbólica da força resultante é  $\vec{R} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}$ .

As componentes da força resultante são:

$$\begin{aligned} R_x &= P_x + N_x + F_x \\ R_y &= P_y + N_y + F_y \end{aligned}$$

Pela figura 107, vemos que as componentes de cada uma das forças são:

$$\begin{aligned} P_x &= 0 & , & & P_y &= -P \\ N_x &= 0 & , & & N_y &= N \\ F_x &= F \cos \theta & , & & F_y &= F \sin \theta \end{aligned}$$

Portanto, as componentes da força resultante são:

$$R_x = F \cos \theta; R_y = N - P + F \sin \theta.$$

A força resultante na representação de componentes é

$$\vec{R} = F \cos \theta \hat{i} + (N - P + F \sin \theta) \hat{j}.$$

- A aplicação da Segunda Lei de Newton à caixa fornece:

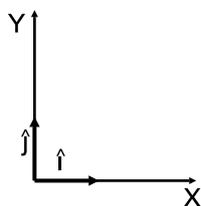
$$\vec{R} = m \vec{a} \Rightarrow R_x = m a_x; R_y = m a_y.$$

- No caso do nosso problema, a caixa tem de ficar sobre a superfície. Esse vínculo (restrição ao movimento) faz com que a aceleração da caixa seja horizontal. Portanto, a componente  $a_y$  da aceleração é nula.

A aplicação desse vínculo à equação da componente y da força resultante fornece a força normal.

$$R_y = 0 \Rightarrow N - P + F \sin \theta = 0 \Rightarrow N = P - F \sin \theta \Rightarrow \vec{N} = (P - F \sin \theta) \hat{j}.$$

A força resultante se reduz a  $\vec{R} = F \cos \theta \hat{i}$ .



## Leituras e exercícios 8

### Leituras

Leia a seção 3.4, intitulada *A Segunda Lei de Newton*, do livro *Física - Volume Único* (Antonio Máximo e Beatriz Alvarenga).

Dessa mesma seção, faça os exercícios de fixação de 24 até 33.

Leia a seção intitulada *Exercícios complementares*, do livro *Física 1 - Mecânica* do Gref, faça o exercício C.14 sobre peso aparente.

**Exercício 17** – Uma maçã desce um plano inclinado liso. Calcule a força resultante, a normal e a aceleração que atua sobre ela. (ver figura 108). Suponha conhecidos o peso  $P$ , o ângulo  $\theta$  e a massa da maçã.

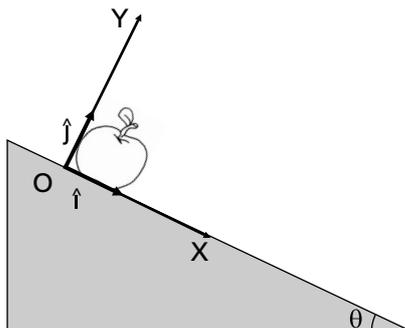


Figura 108 – A maçã desce um plano inclinado liso.

## Terceira Lei de Newton

A Segunda Lei de Newton diz respeito à mudança de movimento do corpo que é objeto de estudo. A maçã caindo, a maçã no solo, a maçã no elevador etc. Nela não existe nenhuma referência à ação do objeto de estudo (a maçã) sobre os agentes externos que atuaram sobre ele (a Terra, o solo, a superfície lisa, a mão). Ela se refere apenas a um dos elementos da interação e ignora o fato de que as interações mais simples ocorrem aos pares.

Antes de enunciá-la, vamos descrever o que vemos e sentimos em algumas situações do cotidiano. Não podemos esquecer de definir claramente quem é o par que está interagindo antes de fazer qualquer análise.

Será que quem empurra é empurrado?  
De que forma?



Figura 109 - Lutadores de sumô se empurrando.

Quando somos empurrados, devido à nossa inércia, empurramos quem nos empurrou. Na figura 109, os lutadores de sumô estão se empurrando. Se o nosso objeto de estudo é o lutador de sumô que está de frente e o agente externo é aquele está de costas, podemos dizer:

O lutador de sumô que está de costas age sobre o lutador que está de frente aplicando-lhe um empurrão (uma força de ação) e o lutador de sumô que está de frente reage empurrando (força de reação) o lutador que está de costas. Conclusão: quem empurra é empurrado!!!

Que relação existe entre a ação e a reação? Elas têm a mesma direção, o mesmo sentido, o mesmo módulo?

Uma maneira simples de analisar as direções e os sentidos da ação e da reação é solicitar aos dois lutadores que se empurrem sem se agarrarem. Ficará nítido que a direções da ação e da reação são iguais e os sentidos são opostos. Todos nós já vivenciamos essa situação na infância quando empurramos alguém.

A visualização da relação entre os módulos requer medidas mais apuradas, uma vez que o que observamos são as acelerações dos lutadores e elas dependem da ação e da reação e das massas dos lutadores. É fácil observar que se as massas são iguais eles serão acelerados da mesma forma nos dois sentidos. No entanto, se as massas forem diferentes é difícil tirar alguma conclusão sem medir as acelerações dos lutadores. O que verificamos é que se as massas forem diferentes o mais leve terá a maior aceleração.

Será que quem puxa é puxado?



De que forma?

Figura 110 – A corda e o menino estão se puxando.

Vamos analisar agora o par formado pela corda+bloco (objeto de estudo) e pelo menino que puxa o bloco (agente externo). O menino puxa a corda+bloco (ação) e a corda puxa a mão do menino (reação). Essa é a vivência que temos do cotidiano. Quem puxa um objeto é puxado por ele.

Que relação existe entre a ação e a reação? Elas têm a mesma direção, o mesmo sentido, o mesmo módulo?

Aqui também é fácil perceber que a ação e a reação têm a mesma direção e sentidos contrários. O conhecimento da relação entre as intensidades depende novamente da medida das acelerações provocadas pela ação no bloco+corda e pela reação no menino.

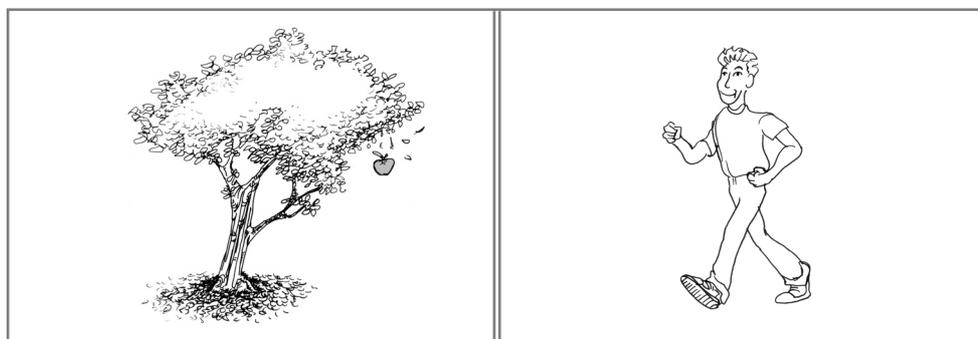


Figura 111 – As reações exercidas pela maçã e pelos pés do homem na Terra não conseguem movimentar visivelmente a enorme massa da Terra.

Será que sempre existe ação e reação? Vemos a Terra puxar a maçã, mas não vemos a maçã puxar a Terra.

Newton realizou experimentos que lhe permitiram concluir que sempre existe reação e que a sua intensidade é igual à da ação. Não vemos a Terra acelerar na direção e sentido da maçã porque sua massa é muito grande e a reação é muito pequena para produzir um deslocamento perceptível da Terra. O mesmo ocorre quando empurramos a Terra para andar. A força de reação exercida sobre a Terra a desloca de forma imperceptível.

.....

#### A LEI DA AÇÃO E REAÇÃO DE NEWTON:

“ A toda ação corresponde uma reação igual e contrária”

ou

“Quando o corpo A sofre a ação de um agente externo B ele exerce sobre o agente externo uma força denominada de reação que tem o mesmo módulo, a mesma direção e o sentido contrário ao da ação.”

.....

Fica claro pelo enunciado da terceira lei que a ação e a reação atuam em corpos diferentes e que nome ação e reação depende do objeto de estudo.

#### P16 – ENUNCIE A TERCEIRA LEI DE NEWTON

Vamos fazer alguns exemplos para entender melhor a terceira lei. Todavia, é importante ressaltar que para descobrir a reação de uma força é preciso fazer a pergunta correta. A pergunta correta é “Quem exerceu a força sobre o agente externo?” E a pergunta errada é “Por que a força foi exercida?”

Exemplo 10: Iniciemos o estudo com o exemplo 10.

O par que interage é a Terra e a maçã. A maçã é o objeto de estudo e a Terra, o agente externo. As ações são as forças que atuam na maçã. No caso desse exemplo, a única ação é a força peso. Quem exerce a força peso na maçã? É a Terra. A reação à força peso age sobre a Terra e é igual a  $-\vec{P}$ .

Se o objeto de estudo fosse a Terra, a ação seria  $-\vec{P}$  e a reação  $\vec{P}$ .

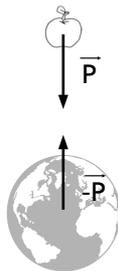


Figura 112 – Reação à força peso da maçã.

Exemplo 11: Vamos analisar as ações e reações do exemplo 7.

Nesse exemplo, existem dois pares de interação. O primeiro par que interage é a Terra e a maçã e o segundo par é a maçã e o solo. A análise do par Terra+maçã é análoga à anterior, já que uma interação não altera a outra. Portanto, basta analisar o par maçã+solo. A maçã é o objeto de estudo e o solo é o agente externo. A ação é a normal. A reação está em quem causou a normal. Quem empurrou a maçã foi o solo, que, deformado imperceptivelmente pela maçã, empurrou a maçã para cima. Portanto, a reação à força normal está no solo e é  $-\vec{N}$ .



Figura 113 - Reações à força peso da maçã e à força normal que atua na maçã.

Alguns alunos respondem erroneamente que a reação à força normal é a força peso. Esses alunos fazem a pergunta errada “Por que o solo empurra a maçã? E respondem, porque a força peso puxa a maçã para baixo deformando o solo. Concluindo, assim, que a reação à força normal é a força peso. Eles não percebem que para se descobrir a reação devem perguntar “Quem exerceu a força sobre o objeto de estudo?” e não “Por que a força foi exercida?” Além disso, para que duas forças sejam ação e reação elas têm que ter módulos iguais e direções iguais. Existem vários exemplos onde a força normal e a força peso não apresentam essas características. Podemos citar o exemplo do elevador, onde os módulos das forças peso e normal são diferentes, e o exemplo do plano inclinado, onde os módulos e direções das forças peso e normal são diferentes.

Exemplo 12: No Exemplo 9, existem três pares de interação. O primeiro par que interage é a Terra e a caixa, o segundo par é a caixa e a superfície e o terceiro é caixa e a corda. A análise dos dois primeiros pares já foi feita. Nos ateremos apenas

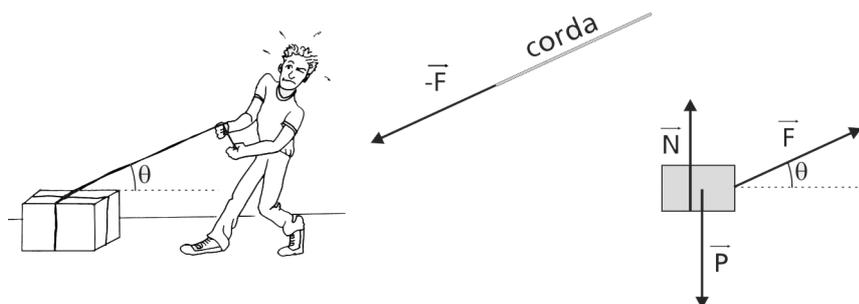


Figura 114 - Reação à força exercida pela corda sobre a caixa.

ao terceiro par. A caixa é o objeto de estudo e a corda é o agente externo. A corda está puxando a caixa com  $\vec{F}$  (ação) e a caixa puxa a corda com  $-\vec{F}$ .

Novamente, para concluir corretamente onde estão as reações o aluno tem que fazer a pergunta correta. Por exemplo, o aluno que pergunta “Quem está puxando a caixa?” responde que é a corda. Ele conclui corretamente que a reação à força  $\vec{F}$  está na caixa. No entanto, o aluno que faz a pergunta “Por que a corda puxa a caixa?” responde: porque que o menino puxa a corda. Ele conclui erradamente que a reação à força  $\vec{F}$  está na mão do menino.

## Leituras e exercícios 9

### Leituras

Leia a seção 3.5, intitulada *Ação e reação-A Terceira Lei de Newton do livro Física –Volume Único* (Antonio Máximo e Beatriz Alvarenga).

Dessa mesma seção, faça os exercícios de fixação de 24 até 33.

### Questionário:

Responda novamente ao questionário 4.

Nesta aula, apresentamos os conceitos de força e as três leis de Newton. Na próxima aula, estudaremos outros movimentos com auxílio dessas leis.

## Exercícios programados 8

1. As expressões a seguir apresentam erros na notação vetorial. Reescreva-as de forma correta.

• De acordo com as forças apresentadas na Figura 1:

a.  $\vec{T} - \vec{P} = m\vec{a}$

b.  $\vec{P} = mg\hat{j}$

c.  $g = -(10m/s^2)\hat{j}$

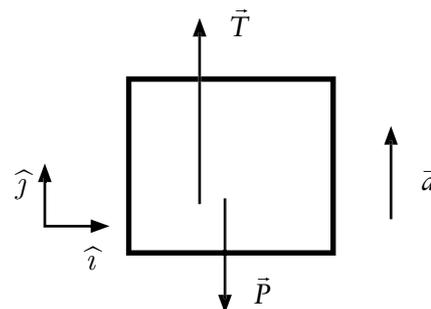


Figura 1

• De acordo com as forças apresentadas na Figura 2:

d.  $N_y - P_y = 0$

e.  $N_x = \vec{N}\text{sen}\theta$

f.  $\vec{N} = |N|\cos\theta\hat{i} + |N|\text{sen}\theta\hat{j}$

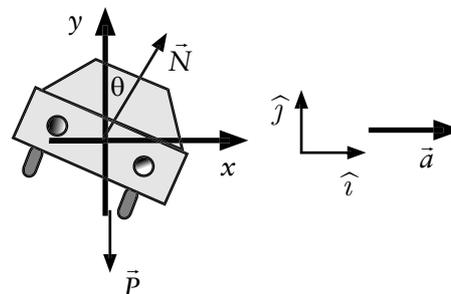


Figura 2

• De acordo com as forças apresentadas na Figura 3:

g.  $\vec{f}_{\text{atrito}} = \mu\vec{N}$

h.  $\vec{P} = -\vec{N}$

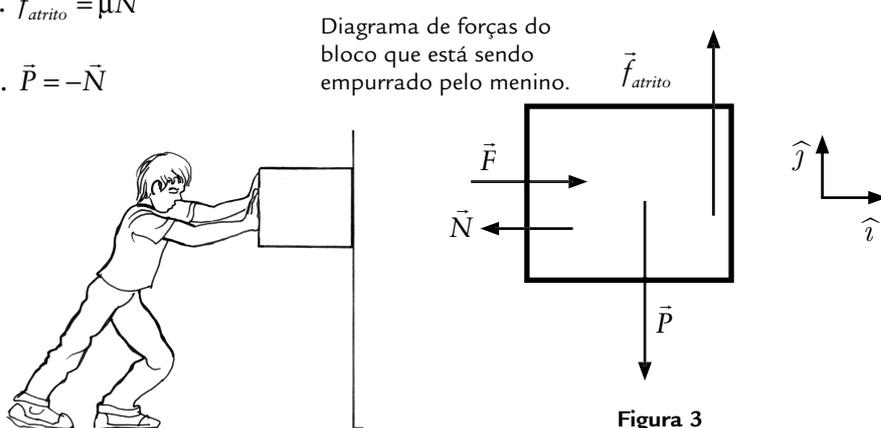


Figura 3

2. Uma caixa de 1.200kg está sendo rebocada para cima em um plano inclinado, por meio de um cabo rígido amarrado na traseira de um caminhão guincho com uma aceleração de módulo  $a = 0,1m/s^2$ . O cabo faz um ângulo de  $\theta = 30^\circ$  com o plano inclinado e o ângulo que o plano inclinado faz com a horizontal também é igual a  $\theta = 30^\circ$ . O coeficiente de atrito entre a superfície e a caixa é  $\mu = 0,8$ . Despreze a resistência do ar. **Análise o problema a partir de um referencial fixo na Terra.**

- O nosso objeto de estudo é a caixa. Faça um desenho da caixa separada do seu exterior.
- Quais os corpos que estão em contato com ela?
- Quais os corpos que estão em contato com a caixa e que exercem força sobre a mesma? Desenhe as forças de contato sobre a caixa.
- Existem forças gravitacionais que atuam sobre a caixa? Qual delas não é desprezível?
- Onde estão aplicadas as reações às forças desenhadas sobre a caixa?
- Calcule todas as forças que atuam sobre a caixa.

Expresse todos estes vetores em termos dos vetores unitários  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$ .

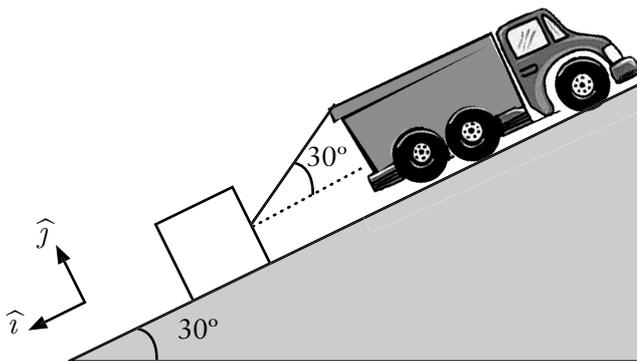


Figura 4

## Gabarito

1. As expressões a seguir apresentam erros na notação vetorial. Reescreva-as de forma correta.

*Todos os diagramas foram considerados a partir do referencial da Terra.*

a. Subtrair dois vetores é o mesmo que somar um vetor com o seu simétrico, isto é,  $\vec{T} - \vec{P} = \vec{T} + (-\vec{P})$ . A figura a seguir mostra a soma do vetor  $\vec{T}$  com o vetor simétrico do vetor  $\vec{P}$ , que é  $-\vec{P}$ .

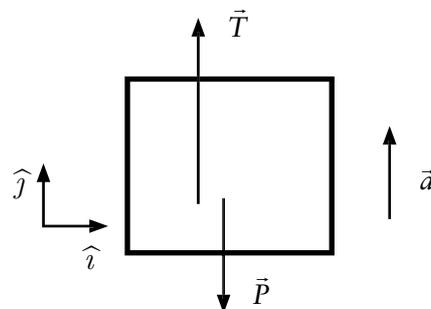
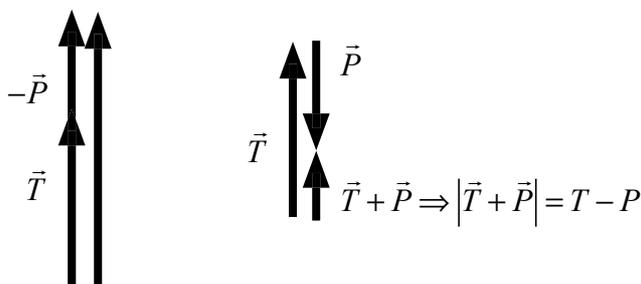


Figura 1



**A Segunda Lei de Newton se refere à soma de vetores e não à diferença de vetores.**

Quem escreve a Segunda Lei como a diferença  $\vec{T} - \vec{P} = m\vec{a}$ , está confundindo a força resultante com o seu módulo. Veja figura anterior!

Por isso, o correto é

$$\vec{T} + \vec{P} = m\vec{a}$$

b.  $\vec{P} = mg\hat{j}$

Quando multiplicamos um vetor por um número, obtemos um vetor com a mesma direção do vetor. Se o número for positivo, o vetor obtido pela multiplicação tem o mesmo sentido do vetor que foi multiplicado. Logo, pela expressão  $\vec{P} = mg\hat{j}$ , a força peso tem a mesma direção e o mesmo sentido do vetor unitário  $\hat{j}$ , uma vez que pela nossa convenção a letra  $g$  associada ao vetor  $\vec{g}$  representa o módulo do vetor aceleração da gravidade e a massa é sempre um número positivo. A figura mostra que a força-peso tem o sentido contrário ao do vetor unitário  $\hat{j}$ .

Portanto, a expressão correta é:  $\vec{P} = -mg\hat{j}$

c.  $g = -(10m/s^2)\hat{j}$

Não podemos igualar um número real a um vetor, uma vez que um vetor não é um número real. Na expressão anterior,  $g$  é o módulo da aceleração da gravidade e  $\hat{j}$  é o vetor unitário na direção do eixo OY com o sentido do eixo OY. A expressão anterior poderia ter as seguintes formas:

$\vec{g} = -(10m/s^2)\hat{j}$  ou  $g = 10m/s^2$  ou  $g_y = -10m/s^2$

d.  $N_y - P_y = 0$

Pela nossa definição de componentes, a componente  $P_y$  da força peso é negativa porque o vetor projetado  $\vec{P}_y = \vec{P}$  tem o sentido contrário ao do unitário  $\hat{j}$ .

A expressão correta é  $N_y + P_y = 0$ .

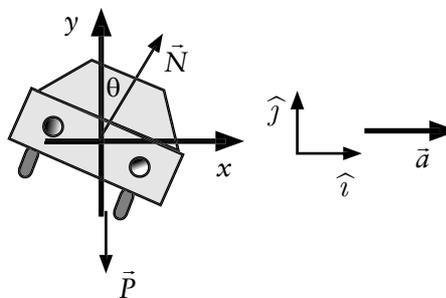
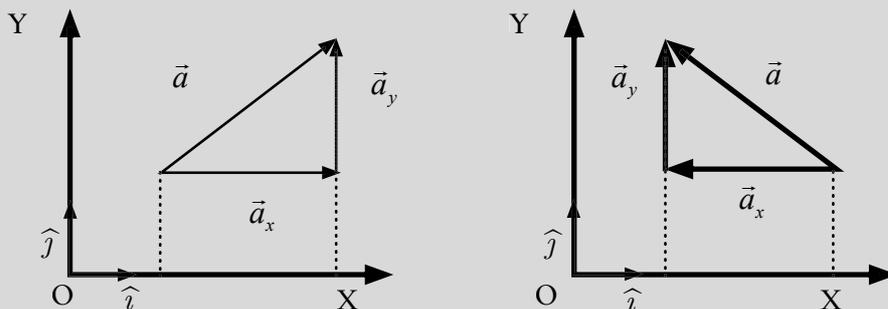
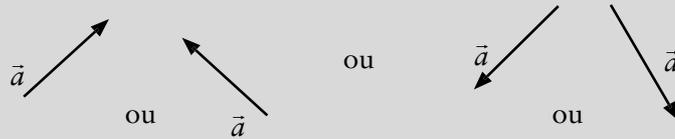


Figura 2

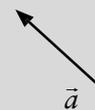
A convenção adotada no Módulo 3 e nos livros de Física mais avançados coloca um sinal na componente que relaciona o sentido do vetor projetado com o sentido do unitário. Se o sentido do vetor projetado é igual ao sentido do vetor unitário, a componente é positiva. Se o sentido for contrário, a componente é negativa. O vetor  $\vec{a}$  representado pelas componentes  $a_x = 2$  e  $a_y = 2$ , está no primeiro quadrante porque os vetores projetados nas direções dos unitários  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$  têm o mesmo sentido dos unitários. O vetor  $a_x = -2$  e  $a_y = 2$  está no segundo quadrante porque o vetor projetado na direção do unitário  $\hat{i}$  tem o sentido contrário ao do unitário  $\hat{i}$  e o vetor projetado na direção do unitário  $\hat{j}$  tem o mesmo sentido ao do unitário  $\hat{j}$ .



Cuidado! É comum encontrar nos livros do Ensino Médio uma convenção para as componentes de um vetor que estipula que elas são sempre números positivos que representam o tamanho da projeção do vetor. Nessa convenção, para se caracterizar univocamente um vetor com suas componentes, é necessário fornecer as componentes do vetor, acompanhadas do quadrante em que o vetor se encontra. Por exemplo, se informo que o vetor  $\vec{a}$  tem componentes  $a_x = 2$  e  $a_y = 2$ , sem dizer em que quadrante está, ele pode ser um dos quatro vetores representados a seguir:



Se tivéssemos informado que o vetor  $\vec{a}$  tem componentes  $a_x = 2$  e  $a_y = 2$  e está no segundo quadrante, o vetor seria



Essa convenção não está errada, mas é **inadequada** para definir operações mais complexas com vetores, tais como o produto escalar entre vetores e o produto vetorial entre vetores. Por essa convenção, a expressão  $N_y - P_y = 0$  está correta, porque ambas componentes são positivas. **Não usaremos essa convenção!**

e.  $N_x = \vec{N} \text{sen} \theta$  está errada porque as componentes dos vetores são números e não podemos escrever que um vetor é igual a um número.

Uma forma correta é  $N_x = N \text{sen} \theta$ .

f.  $\vec{N} = N \cos \theta \hat{i} + N \text{sen} \theta \hat{j}$

Qualquer vetor pode ser escrito como  $\vec{N} = N_x \hat{i} + N_y \hat{j}$ .

A figura ao lado mostra que de acordo com as definições de seno e cosseno temos que:

$$\text{sen}(\theta) = \frac{N_x}{N} \text{ e } \cos(\theta) = \frac{N_y}{N}$$

Portanto, temos que:

$$N_x = N \text{sen}(\theta) = \frac{N_x}{N} \text{ e } N_y = N \cos(\theta)$$

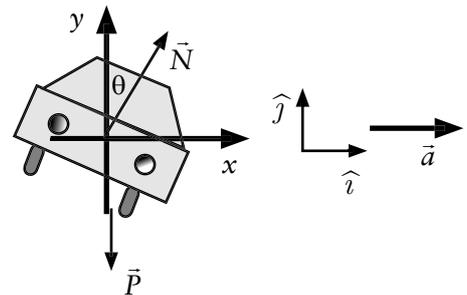
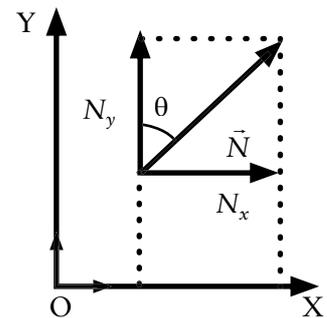


Figura 2



A expressão correta é:  $\vec{N} = N \sin \theta \hat{i} + N \cos \theta \hat{j}$

- De acordo com as forças apresentadas na Figura 3:

g.  $\vec{f}_{\text{atrito}} = \mu \vec{N}$

A expressão anterior afirma que a força de atrito é igual ao vetor que representa a força normal multiplicada pelo coeficiente de atrito, que é um número. Logo, pela expressão escrita, a força de atrito tem a mesma direção e o mesmo sentido da força normal, o que não está correto. As expressões corretas são:

$$f_{\text{atrito}} = \mu N \text{ ou } \vec{f}_{\text{atrito}} = \mu N \hat{j}.$$

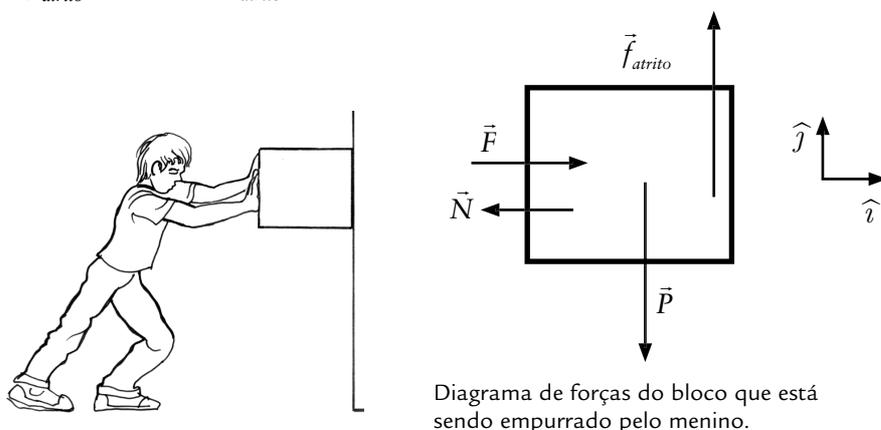


Figura 3

h.  $\vec{P} = -\vec{N}$

A expressão anterior afirma que a direção da força peso é igual à direção da força normal, o que não está de acordo com a Figura 3, que mostra que os módulos da força peso e da força de atrito são iguais. Logo, a expressão correta é

$$\vec{P} = -\vec{f}_{\text{atrito}}$$

2. Uma caixa de 1.200kg está sendo rebocada para cima em um plano inclinado, por meio de um cabo rígido amarrado na traseira de um caminhão guincho, com uma aceleração de módulo  $a = 0,1\text{m/s}^2$ . O cabo faz um ângulo de  $\theta = 30^\circ$  com o plano inclinado e o ângulo que o plano inclinado faz com a horizontal também é igual a  $\theta = 30^\circ$ . O coeficiente de atrito entre a superfície e a caixa é  $\mu = 0,8$ . Despreze a resistência do ar.

a. O nosso objeto de estudo é a caixa. Faça um desenho da caixa separada do seu exterior.

b. Quais os corpos que estão em contato com ela?

c. Quais os corpos que estão em contato com a caixa e que exercem força sobre a mesma? Desenhe as forças de contato sobre a caixa.

- d. Existem forças gravitacionais que atuam sobre a caixa? Qual delas não é desprezível?
- e. Onde estão aplicadas as reações às forças desenhadas sobre a caixa?
- f. Calcule todas as forças que atuam sobre a caixa.

Expresse todos estes vetores em termos dos vetores unitários  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$ .

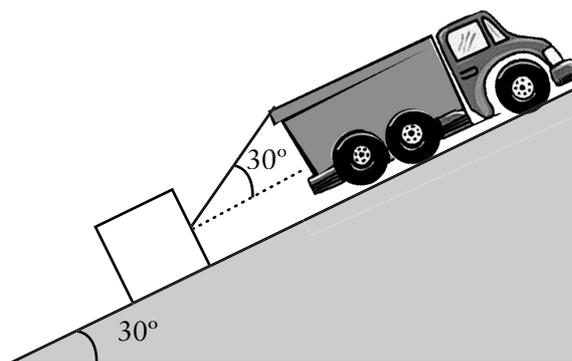
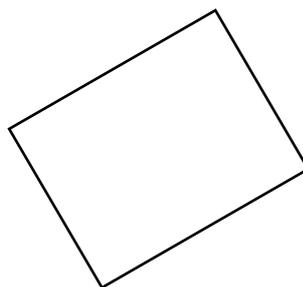


Figura 4

- a. O nosso objeto de estudo é a caixa. Faça um desenho da caixa separada do seu exterior.



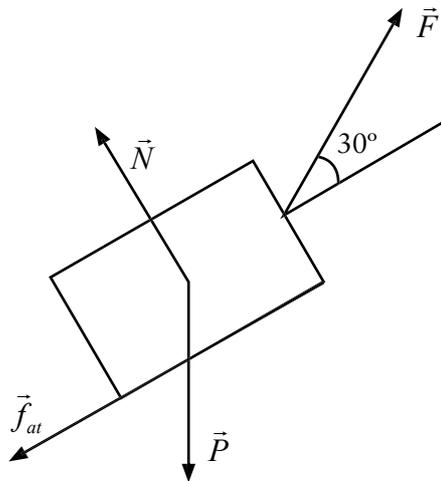
- b. Quais os corpos que estão em contato com ela?

*Vamos analisar o problema no referencial da Terra, que pode ser considerado inercial.*

*O nosso objeto de estudo é a caixa. A caixa está desenhada esquematicamente na figura acima. Os corpos que estão em contato com ela são o ar, a superfície do plano inclinado e o cabo.*

- c. Quais os corpos que estão em contato com a caixa e que exercem força sobre a mesma? Desenhe as forças de contato sobre a caixa.

*O enunciado informa que a resistência do ar é desprezível. Assim, os corpos que estão em contato com a caixa e que exercem força sobre a mesma são a superfície do plano e o cabo. As forças de contato são a  $\vec{f}_{at}$ , a normal  $\vec{N}$  e a força  $\vec{F}$ . A caixa tenta penetrar na superfície do plano inclinado, deformando-a de forma imperceptível. A superfície deformada empurra a caixa para cima perpendicularmente à superfície, isto é, exercendo a força normal  $\vec{N}$ , sobre a caixa. A força com que o cabo puxa a caixa é representada na figura a seguir por  $\vec{F}$ .*



d. Existem forças gravitacionais que atuam sobre a caixa? Qual delas não é desprezível?

*A única força gravitacional que não é desprezível é o peso  $\vec{P}$  da caixa. No Módulo 3, páginas 84 e 85, são feitas estimativas das ordens de grandeza das forças gravitacionais exercidas pelos corpos celestes sobre corpos próximos à Terra e entre corpos do nosso cotidiano. A conclusão é que a única força gravitacional não desprezível é o peso da caixa.*

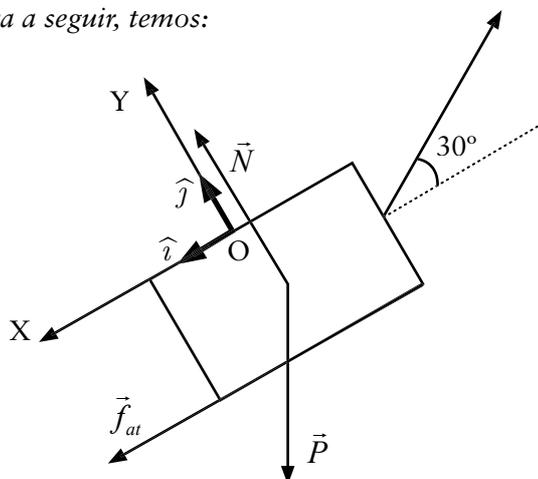
e. Onde estão aplicadas as reações a essas forças?

*As forças e as suas reações são respectivamente:*

Força (atuando na caixa)	Reação
	No plano inclinado
	No centro da Terra
	No plano inclinado
	No guincho do caminhão

f. Calcule todas as forças que atuam sobre a caixa.

Decompondo as forças de acordo com o sistema de coordenadas ilustrado na figura a seguir, temos:



Pela Segunda Lei de Newton temos:

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{P} + \vec{f}_{at} = m\vec{a}$$

Escrevendo a Segunda Lei de Newton para cada eixo, temos:

Eixo x:

$$F_x + P_x + f_{atx} = ma_x$$

$$-F \cos(\theta) + P \sin(\theta) + f_{at} = -ma \quad (1)$$

Eixo y:

$$F_y + P_y + f_{aty} + N_y = ma_y$$

O vínculo do problema é que a caixa não desloca do plano inclinado.

Logo,  $a_y = 0$ .

Temos então:

$$F \sin(\theta) + N - P \cos(\theta) = 0 \Rightarrow N = P \cos(\theta) - F \sin(\theta) \quad (2)$$

O módulo da força de atrito é dado por:

$$f_{at} = \mu N$$

Substituindo o módulo da normal na equação acima obteremos:

$$f_{at} = \mu [P \cos(\theta) - F \sin(\theta)] \quad (3)$$

A introdução da força de atrito na expressão (1) permite calcular o módulo da aceleração:

$$-F \cos(\theta) + P \sin(\theta) + \mu [P \cos(\theta) - F \sin(\theta)] = -ma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F \cos \theta - P \sin \theta - \mu P \cos(\theta) + \mu F \sin \theta = ma$$

$$\Rightarrow F (\cos(\theta) + \mu \sin(\theta)) = ma + P (\sin(\theta) + \mu \cos(\theta))$$

$$\Rightarrow F = \frac{ma + P (\sin(\theta) + \mu \cos(\theta))}{\cos(\theta) + \mu \sin(\theta)}$$

Substituindo os valores fornecidos pelo problema, temos:

$$F = \frac{1200 \cdot 0,1 + 12000 \cdot (0,5 + 0,7)}{0,86 + 0,4} = 11523,8N$$

Da equação (2) temos:

$$N = 12000 \cdot 0,86 - 11523,8 \cdot 0,5 = 4558,1N$$

A equação (3) fornece:  $f_{at} = 0,8 \cdot 4558,1 = 3646,5N$

$$E, P = m \cdot g = 1200 \cdot 10 = 12000N$$

Escrevendo as forças acima em termos dos unitários  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$ , temos:

$$\vec{P} = (6000\hat{i} - 9600\hat{j})N$$

$$\vec{N} = (4558,1\hat{j})N$$

$$\vec{F} = (-9980\hat{i} + 5762\hat{j})N$$

$$\vec{f}_{at} = (3646,5\hat{i})N$$



## Outros tipos de movimento

### Objetivo:

Analisar movimentos de partículas que se deslocam em um plano.

### Introdução

Podemos resumir as discussões e os resultados obtidos até agora da seguinte forma:

- A Mecânica é a ciência cuja finalidade é descrever o movimento dos corpos.
- Existem alguns corpos que podem ser tratados como partículas.
- O conhecimento da aceleração, da posição inicial e da velocidade inicial de uma partícula permite obter o seu vetor posição  $\vec{r}(t)$ .
- A aceleração da partícula é obtida com a aplicação da Segunda Lei de Newton a ela.

Nesta aula, utilizaremos esses resultados para entender alguns movimentos de partículas que se deslocam em um plano. Ela é composta por oito partes:

**O que sei sobre a força gravitacional, a força de atrito e os movimentos planos** é um questionário que tem como finalidade levantar as suas idéias prévias sobre o assunto.

**Conhecendo melhor a força gravitacional** é um texto que introduz o conceito de aceleração da gravidade e que discute as trajetórias de partículas que estão sob a ação exclusiva de forças gravitacionais.

**Conhecendo melhor a força de atrito** é um texto que discute “as leis” do atrito entre superfícies sólidas.

**Cinemática do movimento de um projétil e do movimento circular** é um texto que discute as grandezas cinemáticas desses movimentos.

**Força média e quantidade de movimento** é um texto que analisa os movimentos de partículas que sofrem colisões e introduz os conceitos de quantidade de movimento e força média.

**Leituras e exercícios 10** são textos e exercícios sobre a força de atrito e aplicações das leis de Newton dos livros Mecânica 1 (Gref) e Física –Volume Único (Antonio Máximo e Beatriz Alvarenga).

**Leituras e exercícios 11** são textos e exercícios sobre a independência dos movimentos e movimento de um projétil, do livro Física–Volume Único (Antonio Máximo e Beatriz Alvarenga).

**Leituras e exercícios 12** são textos e exercícios sobre movimento circular, força média e quantidade de movimento dos livros Mecânica 1 (Gref) e Física –Volume Único (Antonio Máximo e Beatriz Alvarenga).

## O que sei sobre a força gravitacional, a força de atrito e os movimentos planos?

As questões apresentadas a seguir têm como finalidade investigar e organizar os seus conhecimentos e idéias prévias sobre a força gravitacional, a força de atrito e os movimentos planos. Escreva em seu caderno, de forma organizada, as respostas às questões. Não consulte livros ou notas de aulas, mas não deixe de respondê-las. A comparação entre suas idéias e conhecimentos sobre a força gravitacional, a força de atrito e os movimentos planos antes e depois de trabalhar esta unidade é importante para o seu aprendizado.

### Questionário 5

1. Descreva as propriedades da *força gravitacional* que a Terra exerce sobre os corpos que estão próximos à sua superfície.
2. Descreva as propriedades da *força de atrito estático* entre superfícies sólidas.
3. Descreva as propriedades da *força de atrito cinético* entre superfícies sólidas.
4. Em que circunstâncias uma *força resultante* dá origem a *um movimento retilíneo*? Dê exemplos.
5. Em que circunstâncias uma *força resultante* dá origem a *um movimento curvilíneo*? Dê exemplos.
6. Escreva as *expressões das grandezas cinemáticas* do movimento de uma partícula submetida a uma *força resultante constante*.
7. Quais as características do *vetor velocidade* em um movimento circular uniforme?
8. Quais as características da *velocidade* angular em um movimento circular uniforme?
9. Qual o significado físico da *força resultante média*?
10. Qual a definição de *quantidade de movimento*?
11. Enuncie a *Segunda Lei de Newton* utilizando os conceitos de *força média* e de *quantidade de movimento*.





## Conhecendo melhor as forças gravitacionais



Figura 115 – Força gravitacional entre duas partículas.

No Módulo 2 enunciaremos a Lei da Gravitação Universal, de Newton.

“A força gravitacional entre duas partículas é diretamente proporcional ao produto das massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas. Ela tem a direção da reta que une as duas massas e é atrativa.”

A expressão vetorial dessa lei é:  $\vec{F}_G = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \hat{r}$ .

A força peso é a força gravitacional exercida pela Terra sobre os corpos, isto é,  $\vec{P} = -\frac{GM_Tm}{r^2} \hat{r}$ . Ela está representada na Figura 116.

LEI DA GRAVITAÇÃO  
UNIVERSAL,  
DE NEWTON

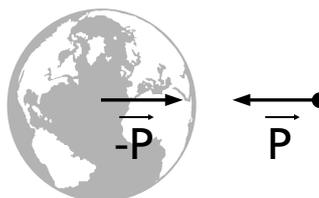


Figura 116 – A Terra pode ser considerada como partícula para efeito de cálculo da força gravitacional que ela exerce sobre os corpos.

Algumas observações sobre a força peso são importantes:

- A Lei da Gravitação Universal diz respeito a partículas. A Terra é um corpo extenso. Por que calculamos a força gravitacional que a Terra exerce sobre os corpos como se ela fosse uma partícula? Para calcular a força gravitacional que a Terra exerce sobre uma partícula é preciso dividi-la em partículas e somar as forças exercidas por elas no corpo que está sendo atraído. Essa soma só pode ser realizada com cálculo integral. O resultado obtido mostra que, para efeito da força gravitacional, a Terra pode ser tratada como uma partícula com a  $M_T$  colocada no seu centro.

- A razão entre a força peso e a massa do corpo é  $\frac{\vec{P}}{m} = -\frac{GM_T}{r^2} \hat{r}$ . Ela só depende das propriedades da Terra e é denominada **aceleração da gravidade**  $\vec{g} = -\frac{GM_T}{r^2} \hat{r}$ . A força peso  $\vec{P}$  é o produto da massa do corpo pela aceleração da gravidade,  $\vec{P} = m\vec{g}$ .

- Quando a força resultante que atua sobre um corpo é a força gravitacional, a sua aceleração  $\vec{a} = \frac{\vec{R}}{m} = \vec{g}$  é igual à aceleração da gravidade. Portanto, nesse caso os corpos com massas diferentes caem todos com a mesma aceleração  $\vec{g}$ . Isto só ocorre quando é possível desprezar a resistência do ar.

ACELERAÇÃO DA  
GRAVIDADE

Todos sabemos que uma folha de papel aberta cai com aceleração diferente daquela de uma folha de papel amassado. A resistência do ar na folha aberta não pode ser desprezada em relação à força peso.

- O valor da aceleração da gravidade na superfície da Terra ( $r = R_T = 6400 \text{ km}$ ) pode ser calculada com os valores da massa da Terra ( $M_T = 6 \times 10^{24} \text{ kg}$ ) e da constante da gravitação universal  $G$  ( $G = 6,7 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$ ) e é igual a  $9,8 \text{ m/s}^2$ . Ela varia pouco nas proximidades da Terra; por exemplo, a aceleração da gravidade em uma altitude de  $2000 \text{ m}$  é a mesma que na superfície da Terra, se utilizarmos dois algarismos significativos. Por isso, podemos considerar que a aceleração da gravidade é constante na superfície da Terra. O valor da aceleração da gravidade a uma distância igual ao dobro do raio da Terra é  $2,6 \text{ m/s}^2$ .

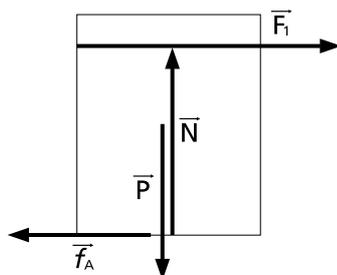
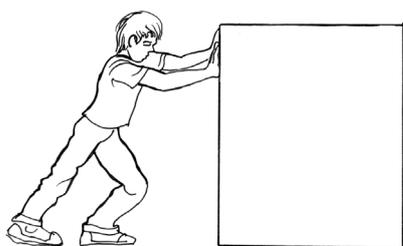
Nesta aula, analisaremos o movimento de corpos caindo na Terra e demonstraremos a Segunda Lei de Kepler.

**P1 – DESCREVA AS PROPRIEDADES DA FORÇA GRAVITACIONAL QUE A TERRA EXERCE SOBRE OS CORPOS QUE ESTÃO PRÓXIMOS À SUA SUPERFÍCIE.**

## Conhecendo melhor a força de atrito

Quando um corpo sólido é empurrado sobre uma superfície sólida, aparece a força de atrito. O atrito pode ser de dois tipos.

O **atrito estático**, que aparece quando um objeto é empurrado e não entra em movimento. Nesse caso, dizemos que a força de atrito aparece no sentido de evitar a tendência ao movimento. Ela é nula quando o corpo não está sendo empurrado e pode variar até um valor máximo que é proporcional ao valor do módulo da normal à superfície,  $0 \leq f_{ae} \leq \mu_e N$ . A constante de proporcionalidade  $\mu_e$  é denominada coeficiente de atrito estático.



FORÇA DE ATRITO  
ESTÁTICO

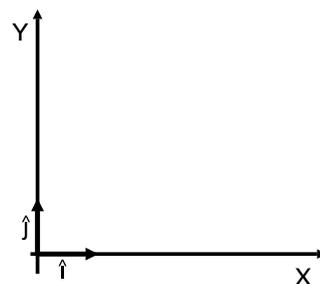


Figura 117- O menino está empurrando a caixa sobre o tapete. O tapete tenta evitar o deslizamento da superfície da caixa exercendo a força de atrito sobre ela.

A Figura 117 representa uma caixa que está sendo empurrada horizontalmente pelo menino. A caixa não descola do chão. Ele vai aumentando gradativamente a força sobre a caixa. Inicialmente, a caixa não desliza. A aplicação da Segunda Lei de Newton à caixa fornece:

$$\vec{F}_1 + \vec{f}_a + \vec{N} + \vec{P} = \vec{0} \Rightarrow F_1 - f_a = 0 ; N - P = 0.$$

Enquanto a caixa não desliza a força de atrito é igual à força horizontal.

Quando a força horizontal fica maior do que a força de atrito máxima ( $F_1 - f_{ac} > 0$ ), a força resultante  $\vec{R} = (F_1 - f_{ac})\hat{i}$  não é nula e a caixa começa a deslizar, uma vez que a aceleração do sistema não é nula ( $\vec{a} = \frac{\vec{R}}{m} = \frac{(F_1 - f_{ac})}{m} \hat{i}$ ). Depois que o deslizamento se inicia, o módulo da força de atrito diminui, ficando menor do que a força de atrito máxima. O seu módulo ainda é proporcional à força normal, mas a constante de proporcionalidade  $\mu_c$  é diferente e menor,  $f_{ac} = \mu_c N$ . A constante de proporcionalidade é denominada coeficiente de atrito cinético e a força de atrito, **força de atrito cinética**.

FORÇA DE ATRITO  
CINÉTICA

A Figura 118 representa o gráfico da força de atrito em função da força horizontal  $F_1$ .

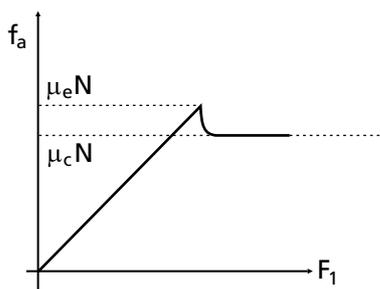


Figura 118 – Gráfico da força de atrito em função da força horizontal que está sendo aplicada na caixa.

É importante ressaltar que a força de atrito aparece quando existe uma tendência ou um movimento relativo entre as superfícies. É errado dizer que a força de atrito tem o sentido contrário ao movimento. A Figura 119 mostra um arremessador de peso que está freando, e a Figura 120 um corredor que está acelerando. O arremessador de pesos empurra a Terra para a frente e é empurrado para trás por ela. Neste caso, a força de atrito se opõe ao movimento do arremessador de pesos.

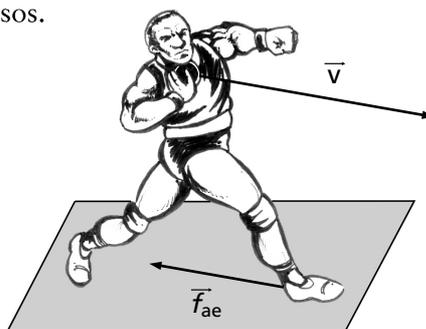


Figura 119 – O arremessador de pesos empurra a Terra para a frente e é empurrado pela Terra para trás. O sentido da força de atrito é contrário ao movimento do arremessador de pesos.

O corredor está empurrando a Terra para trás e sendo empurrado por ela para a frente. Neste caso, a força de atrito tem o sentido do movimento.

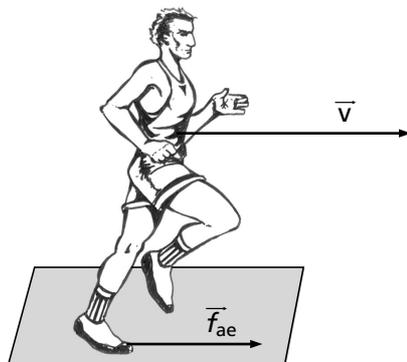


Figura 120 – O corredor empurra a Terra para trás e é empurrado para a frente por ela. A força de atrito tem o sentido do movimento do corredor.

Em ambos os casos a força de atrito está se opondo à tendência de deslizamento relativo entre as superfícies (sola do tênis e superfície do solo).

P2– DESCREVA AS PROPRIEDADES DA FORÇA DE ATRITO ESTÁTICO ENTRE SUPERFÍCIES SÓLIDAS.

P3–DESCREVA AS PROPRIEDADES DA FORÇA DE ATRITO CINÉTICO ENTRE SUPERFÍCIES SÓLIDAS.

## Leituras e exercícios 10

### Leituras

Leia a seção 3.7, intitulada *Coefficiente de atrito* no livro *Física –Volume Único* (Antonio Máximo e Beatriz Alvarenga).

Dessa mesma seção, faça os exercícios de fixação de 44 até 48.

Do capítulo 3 desse mesmo livro faça os problemas 7 até 24.

Leia o *Apêndice 1-Força de Atrito* do livro *Física 1-Mecânica*, de Gref.

## Cinemática do movimento de um projétil e do movimento circular

A trajetória de uma partícula depende da força resultante que atua sobre ela, da sua posição inicial e de sua velocidade inicial. Isto é fácil de observar quando impulsionamos um pedaço de giz de maneiras diferentes.

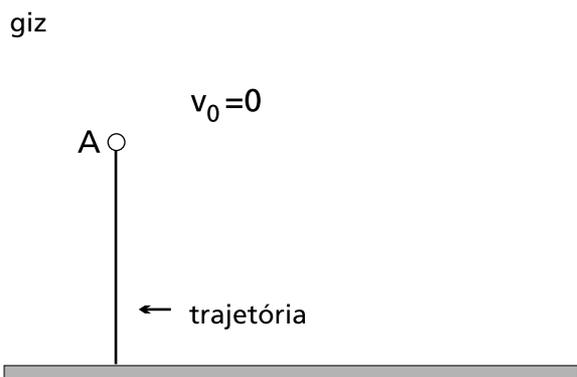


Figura 121-a - Giz largado do ponto A.

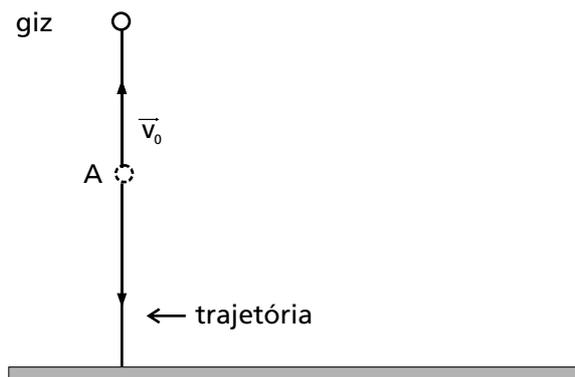


Figura 121-b - Giz arremessado para cima a partir do ponto A.

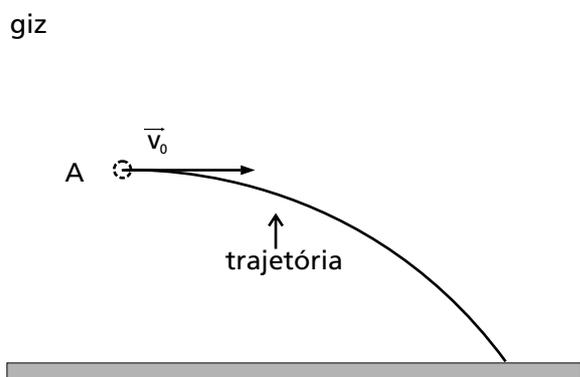


Figura 121-c - Giz arremessado horizontalmente do ponto A.

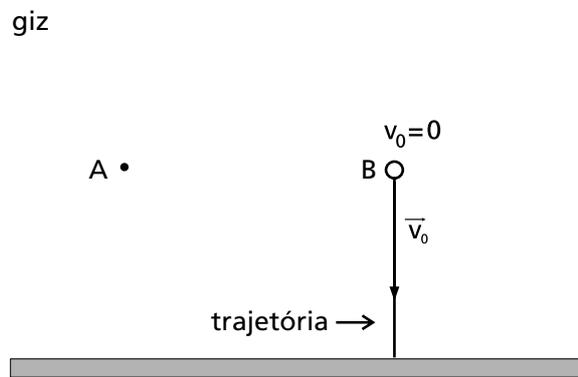


Figura 121-d - Giz largado do ponto B.

Quando largamos ( $v_0 = 0$ ) o pedaço de giz do ponto A, ele cai verticalmente; quando ele é arremessado para cima da mesma posição com uma velocidade inicial com módulo  $v_0$ , ele sobe verticalmente e depois desce; quando é arremessado horizontalmente do ponto A com velocidade  $\vec{v}_0$ , ele cai percorrendo uma trajetória curva (ver Figura 121-c). A dependência da trajetória com a posição inicial do giz aparece quando largamos ( $v_0 = 0$ ) o giz de dois pontos diferentes (A e B). A trajetória do giz que é largado do ponto A é diferente da trajetória do giz que é largado do ponto B (Figura 121-d).

Em todos os casos apresentados na Figura 121 a aceleração do giz  $\vec{a}$  é a mesma,  $\vec{a} = \vec{g}$ . A resistência do ar foi desprezada. O que diferencia as situações descritas na Figura 121 são as velocidades e posições iniciais do giz.

**Em que situação uma força resultante produz uma trajetória curvilínea plana?**

A trajetória do giz que é largado ( $v_0 = 0$ ) é retilínea. A trajetória do giz que é arremessado é curvilínea e plana. Nesta seção, estamos interessados em entender em que condições a trajetória de uma partícula é curvilínea e plana. Discutiremos alguns exemplos com essa finalidade.

No movimento retilíneo, a velocidade do corpo em qualquer instante de tempo tem a direção da reta que define a sua trajetória. As variações de velocidade do corpo também têm a direção da trajetória. Para pequenos intervalos de tempo, as variações de velocidade  $\Delta\vec{v}$  do corpo ( $\Delta\vec{v} = \vec{a}_m\Delta t \cong \vec{a}\Delta t$ ) são proporcionais às acelerações instantâneas. Como a aceleração instantânea é proporcional à força resultante que atua no corpo, podemos dizer que: **A condição necessária e suficiente para que um corpo permaneça em uma trajetória retilínea é que a força resultante que atua sobre ele tenha em qualquer instante de tempo a direção da velocidade inicial do corpo** (Figura 122).

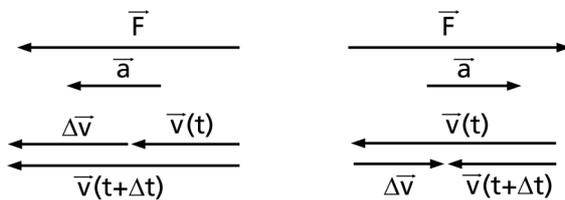


Figura 122 – Quando, durante o movimento de um corpo, a força resultante tem sempre a mesma direção de suas velocidades, o movimento é retilíneo. t

Em um movimento retilíneo a força resultante pode mudar o módulo e o sentido da velocidade, mas não a sua direção. O exemplo 1 ilustra a ação da força resultante em um movimento retilíneo.

Exemplo 1 – Na Figura 123-a, um patinador está se deslocando com velocidade constante  $\vec{v}_1$ . Quando ele passa pelo ponto A (Figura 123-b), apanha uma corda que está sendo puxada por sua amiga. Ela se encontra fora do rink de patinação. Por que, para um observador que está parado fora do rink de patinação, a trajetória do patinador após ele segurar a corda continua retilínea?

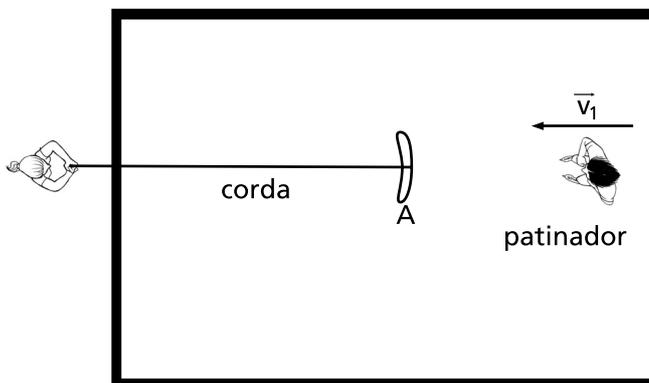


Figura 123-a – Patinador livre

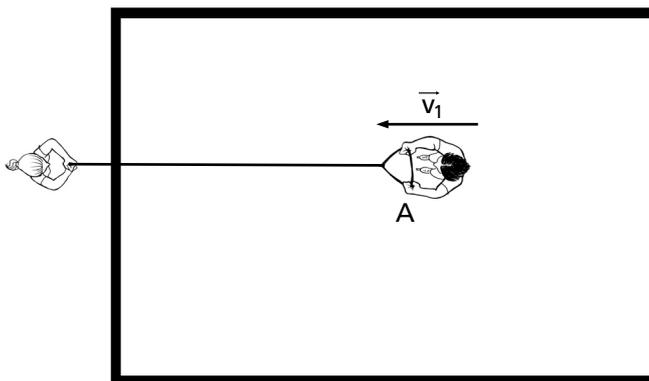


Figura 123-b – Patinador apanha a corda

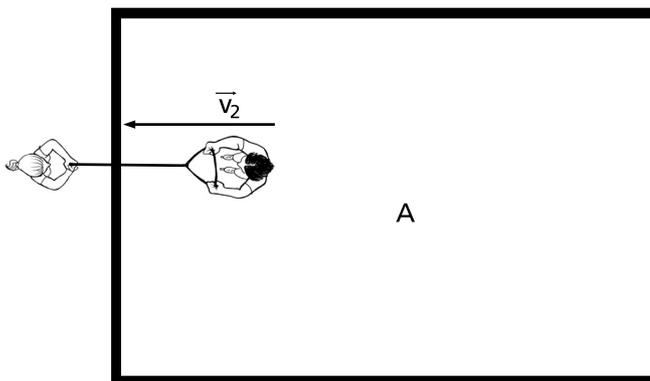


Figura 123-c – Patinador sendo puxado pela amiga.

A descrição do movimento do patinador vai ser dividida em duas partes. A primeira parte é o movimento antes do ponto A (antes de ele apanhar a corda) e a segunda é aquela depois do ponto A (depois que ele apanha a corda).

- O referencial escolhido é o rinko de patinação.

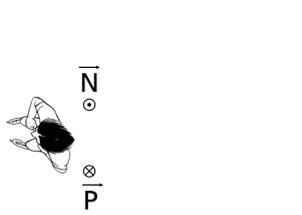


Figura 124-a – Diagrama de forças do patinador livre.

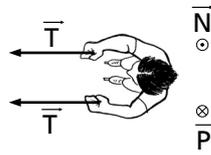
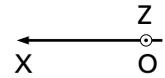
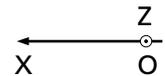


Figura 124-b – Diagrama de forças do patinador segurando a corda.



O eixo OZ aponta para fora da folha do papel.



O eixo OZ aponta para fora da folha do papel.

**Primeira parte:** Movimento do patinador analisado do referencial da terra antes do ponto A.

- O objeto de estudo é o patinador. Ele foi desenhado separado dos outros corpos na Figura 124-a.

Só estão em contato com o patinador o gelo e o ar. Se desprezarmos a resistência do ar e a força de atrito entre os patins e o gelo, a única força de contato que atua sobre o patinador é a normal  $\vec{N}$  que o gelo exerce sobre ele.

- A Terra puxa o patinador com a força peso  $\vec{P}$ .
- A força resultante que atua no patinador é

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{N} \Rightarrow R_x = 0 ; R_z = P_z + N_z = N - P$$

- A aplicação da Segunda Lei de Newton ao patinador fornece:

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}$$

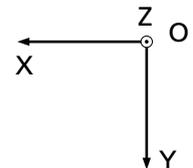
Como o patinador não se desloca na direção vertical, sua aceleração nessa direção é nula,  $a_z = 0$ . A componente  $a_x = 0$  da aceleração na direção do movimento também é nula, porque  $a_x = \frac{R_x}{m} = 0$ . Portanto, a aceleração do patinador é nula.

Conseqüentemente, a sua velocidade permanece constante, sendo a sua trajetória retilínea.

**Segunda parte:** Movimento do patinador analisado do referencial da terra depois do ponto A (o patinador está segurando a corda).

- O objeto de estudo é o patinador. Ele foi desenhado separado dos outros corpos na Figura 124-b.

Só estão em contato com o patinador o gelo, o ar e a corda. Se desprezarmos a resistência do ar e a força de atrito entre os patins e o gelo, as forças de contato que atuam no patinador são a normal  $\vec{N}$  exercida pelo gelo e a tensão  $2\vec{T}$  exercida pela corda.



- A Terra puxa o patinador com a força peso  $\vec{P}$ .
- A força resultante que atua no patinador é

$$\vec{R} = 2\vec{T} + \vec{P} + \vec{N} \Rightarrow R_x = 2T_x = 2T; R_z = P_z + N_z = N - P.$$

- A aplicação da Lei de Newton ao patinador fornece:

$$\vec{R} = 2\vec{T} + \vec{P} + \vec{N} = m\vec{a} \Rightarrow a_x = \frac{2T}{m}; a_z = \frac{N - P}{m}.$$

• Como o patinador não se desloca na direção vertical, sua aceleração nesta direção é nula,  $a_z = 0$ . Conseqüentemente, a aceleração do patinador é  $\vec{a} = \frac{2T}{m}\hat{i}$ . Ela tem a direção da força resultante. Vimos na aula 3 que, para intervalos de tempo pequenos, podemos aproximar a aceleração média pela aceleração instantânea, isto é,  $\vec{a}_m \cong \vec{a}$ . Por isso, a variação da velocidade do patinador nesse intervalo de tempo se reduz a  $\Delta\vec{v} = \vec{a}_m\Delta t \cong \vec{a}\Delta t$ .

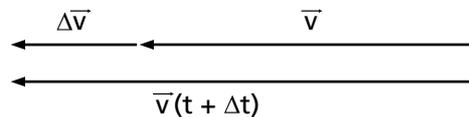


Figura 125 - Variação da velocidade do patinador após o ponto A

A Figura 125 mostra que essa aceleração muda apenas o módulo da velocidade. Ela não consegue modificar a direção da velocidade, garantindo dessa forma que o corpo permanecerá em uma trajetória retilínea.

Um corpo que se movimenta em um plano tem a sua velocidade instantânea sempre paralela a esse plano. Por exemplo, se o plano do movimento coincidir com o plano OXY, a componente  $v_z$  da velocidade instantânea do corpo tem que ser nula em todo instante de tempo. Para que isso ocorra, a componente  $a_z$  da sua aceleração instantânea também tem que ser nula em todo instante de tempo. Como a aceleração instantânea é paralela à força resultante, ela também não pode ter componente na direção perpendicular ao plano. Para que a trajetória não seja retilínea é necessário que a velocidade do corpo mude de direção. Portanto, a aceleração do corpo não pode ser paralela à velocidade instantânea em todos os instantes do tempo. A Figura 126 mostra a variação de velocidade produzida pela aceleração  $\vec{a}$  em um pequeno intervalo de tempo  $\Delta t$ .

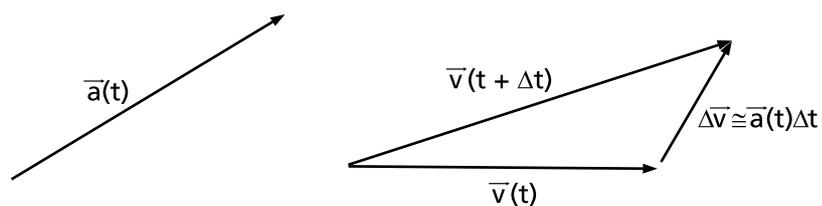


Figura 126 - A aceleração só muda a direção da velocidade se a sua direção for diferente da direção da velocidade.

Podemos dizer que a **condição necessária e suficiente** para que a trajetória de um corpo seja curvilínea é que a **componente da força resultante  $R_z$  perpendicular ao plano (OXY) que contém a trajetória seja nula em todos os instantes de tempo** e que a **força resultante não tenha a mesma direção da velocidade inicial do corpo**. A Figura 127 representa essa situação.

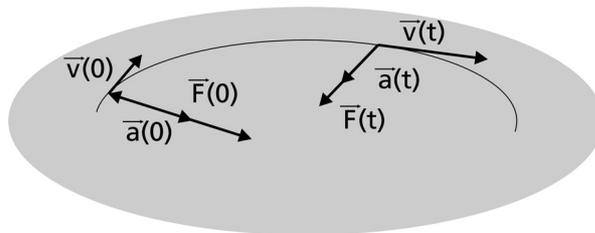


Figura 127 - A força resultante que atua em um corpo cuja trajetória é curvilínea e plana não tem componente na direção perpendicular ao plano da curva em nenhum instante de tempo nem pode ter a direção da velocidade inicial em todos os instantes do tempo.

O exemplo 2 ilustra a ação da força resultante em um movimento plano não retilíneo.

Exemplo 2 - Na Figura 128-a um patinador está se deslocando com velocidade constante  $\vec{v}_1$ . Quando ele passa pelo ponto A ( Figura 128-b), apanha uma corda que está presa nas grades do rink de patinação. A partir desse instante, até atingir as grades do rink, ele se desloca sobre um círculo. O braço do patinador se mantém rígido durante o seu movimento **Por que a trajetória do patinador é curvilínea após o ponto A ?**

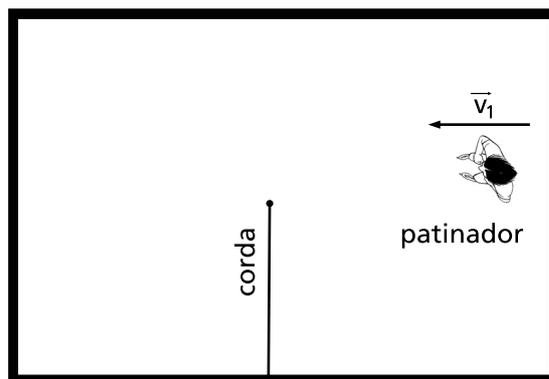


Figura 128-a - O patinador está livre.

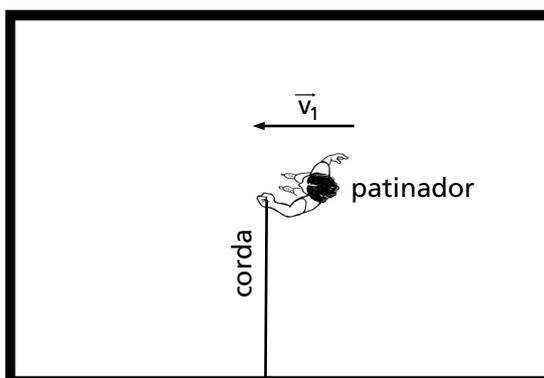


Figura 128-b – O patinador apanha a corda.

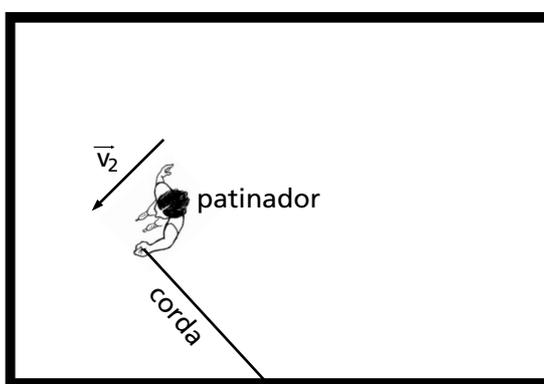


Figura 128-c – O patinador segura a corda.

A análise do movimento do patinador do referencial da terra antes de ele pegar a corda é análoga à realizada no exemplo 1 e não será repetida. Só analisaremos o movimento do patinador depois do ponto A (o patinador está segurando a corda).



Figura 129 – O patinador faz uma curva ao segurar a corda.

- O objeto de estudo é o patinador. Ele foi desenhado separado na dos outros corpos na Figura 129.
- Só estão em contato com o patinador o gelo, o ar e a corda. Se desprezarmos a resistência do ar e a força de atrito entre os patins e o gelo, as forças de contato que atuam sobre o patinador são a normal  $\vec{N}$  exercida pelo gelo e a tensão  $\vec{T}$  exercida pela corda.

- A Terra puxa o patinador com a força peso  $\vec{P}$ .
- A força resultante que atua no patinador é  $\vec{R} = \vec{T} + \vec{P} + \vec{N}$ .
- A aplicação da Segunda Lei de Newton ao patinador fornece:

$$\vec{R} = \vec{T} + \vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}.$$

• Como o patinador não se desloca na direção vertical, sua aceleração nessa direção é nula,  $a_z = 0$ . Conseqüentemente, a soma da força peso e da normal é nula,  $\vec{N} + \vec{P} = \vec{0}$ . A aceleração do patinador é  $\vec{a} = \frac{\vec{T}}{m}$ . Ela tem a direção da força resultante e é perpendicular à velocidade do patinador. Vimos na aula 3 que para intervalos de tempo pequenos podemos aproximar a aceleração média pela aceleração instantânea, isto é,  $\vec{a}_m \cong \vec{a}$ . Por isso, a variação da velocidade do patinador nesse intervalo de tempo se reduz a  $\Delta\vec{v} = \vec{a}_m\Delta t \cong \vec{a}\Delta t$ .

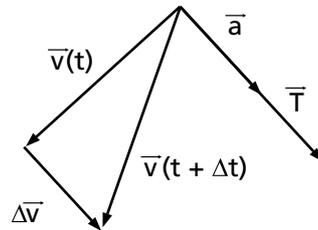


Figura 130 - Variação da velocidade do patinador no instante representado ao lado

A Figura 130 mostra que é a tensão que a corda exerce sobre o patinador que obriga o patinador a fazer a curva, uma vez que ela produz uma aceleração com a direção diferente da velocidade.

P4 – EM QUE CIRCUNSTÂNCIAS UMA FORÇA RESULTANTE DÁ ORIGEM A UM MOVIMENTO RETILÍNEO? DÊ EXEMPLOS.

P5 – EM QUE CIRCUNSTÂNCIAS UMA FORÇA RESULTANTE DÁ ORIGEM A UM MOVIMENTO CURVILÍNEO? DÊ EXEMPLOS.

Analisaremos a seguir dois movimentos planos cujas trajetórias são parábolas e círculos.

### Trajatórias parabólicas

Estamos interessados em estudar o movimento de partículas onde atuam forças resultantes constantes, por exemplo, o movimento dos corpos que caem nas proximidades da superfície da Terra sob a ação exclusiva da força peso.

A aceleração de uma partícula submetida a uma força resultante  $\vec{R}$  constante também é constante, uma vez que:  $m\vec{a} = \vec{R} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{R}}{m}$ .

Na aula 3 foram analisados alguns movimentos retilíneos com acelerações constantes: o movimento retilíneo uniforme e o movimento retilíneo uniformemente acelerado.

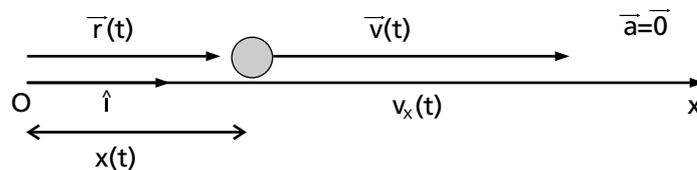


Figura 131 - Vetores cinemáticos do movimento retilíneo uniforme.

A Figura 131 mostra os vetores cinemáticos de uma partícula que se desloca em movimento retilíneo uniforme (com aceleração nula) no eixo OX. Os seus vetores cinemáticos são:

$$\vec{a} = a_x \hat{i} = \vec{0} \Rightarrow a_x = 0; \vec{v} = v_x \hat{i} = \text{vetor constante} \Rightarrow v_x(t) = v_x(0) = v_{0x};$$

$$\vec{r}(t) = x(t) \hat{i} \text{ onde } x(t) = x(0) + v_{0x}t = x_0 + v_{0x}t.$$

A Figura 132 mostra os vetores cinemáticos de uma partícula que se desloca em movimento retilíneo uniformemente acelerado no eixo OY. Os seus vetores cinemáticos são:

$$\vec{a} = a_y \hat{j} = \text{vetor constante} \Rightarrow a_y(t) = a_y(0);$$

$$\vec{v} = v_y \hat{j} \text{ onde } v_y(t) = v_y(0) + a_y t;$$

$$\vec{r}(t) = y(t) \hat{j} \text{ onde } y(t) = y(0) + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2.$$

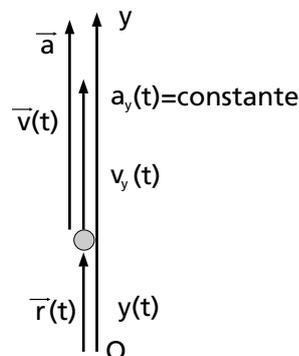


Figura 132 - Vetores cinemáticos de um movimento uniformemente acelerado no eixo OY.

A descrição do movimento de uma partícula submetida a uma aceleração constante fica simplificada quando escolhemos um dos eixos coordenados com a direção da força resultante ( Figura 133).

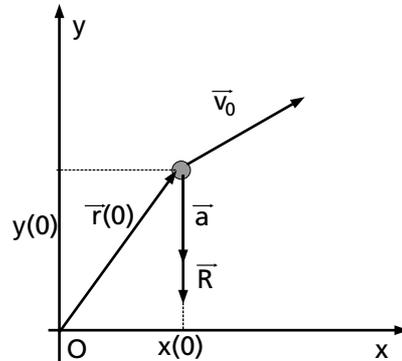


Figura 133 – Representação das condições iniciais de uma partícula submetida a uma força resultante constante.

A Figura 134 é uma fotografia estroboscópica de duas esferas que caíram ao mesmo tempo e da mesma altura.

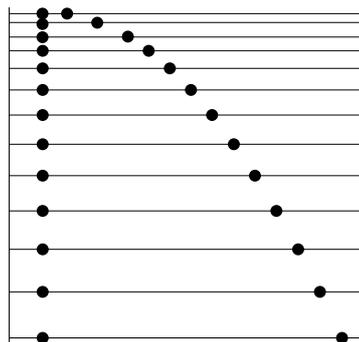


Figura 134 – Quando a força resultante é constante, os movimentos da partícula na direção da força e na direção perpendicular a ela são independentes

Uma observação detalhada das posições verticais das duas esferas mostra que o movimento vertical da esfera que se desloca horizontalmente é igual ao da outra esfera que cai verticalmente. Quer dizer, o movimento horizontal da esfera não modificou o movimento vertical. Esse fato é conhecido como **princípio da independência dos movimentos**. É possível demonstrar com cálculo diferencial e integral que o princípio da independência dos movimentos vale para acelerações constantes. Ele permite escrever o movimento da partícula como a composição de um movimento retilíneo uniforme no eixo OX e uniformemente acelerado no eixo OY, isto é,

$$a_x = 0 ; v_x = v_{ox} ; x(t) = x_0 + v_{ox}t ;$$

$$a_y = \text{constante} ; v_y = v_{oy} + a_y t ; y(t) = y_0 + v_{oy}t + \frac{a_y t^2}{2} ,$$

onde  $v_{ox}$  e  $v_{oy}$  são as componentes do vetor velocidade inicial nas direções dos eixos.

A equação da trajetória da partícula é obtida facilmente se expressarmos o tempo em função da coordenada  $x(t)$  e introduzirmos a expressão obtida na equação da coordenada  $y(t)$ :

$$x = x_0 + v_{ox}t \Rightarrow t = \frac{x - x_0}{v_{ox}}$$

$$y = y_0 + v_{oy}t + \frac{a_y t^2}{2} \Rightarrow y = y_0 + v_{oy} \frac{x - x_0}{v_{ox}} + \frac{a_y}{2} \left( \frac{x - x_0}{v_{ox}} \right)^2$$

A equação que relaciona  $y$  com  $x$  é a equação de uma parábola. Esse resultado fica mais fácil de visualizar se colocarmos a origem do sistema de coordenadas sobre a posição inicial da partícula. Nesse caso temos que:

$$x_0 = y_0 = 0 \Rightarrow y = v_{oy} \frac{x}{v_{ox}} + \frac{a_y}{2} \left( \frac{x}{v_{ox}} \right)^2$$

Uma aplicação interessante dos resultados que acabamos de obter é a da queda dos corpos nas proximidades da Terra sob a ação exclusiva da força peso. Nesse caso, a aceleração dos corpos é constante e igual a  $\vec{g}$  e os seus vetores cinemáticos são:

$$\vec{r}(t) = (x_0 + v_{ox}t)\hat{i} + (y_0 + v_{oy}t - \frac{g}{2}t^2)\hat{j};$$

$$\vec{v}(t) = v_{ox}\hat{i} + (v_{oy} - gt)\hat{j}$$

$$\vec{a} = -g\hat{j},$$

onde  $g$  é o módulo da aceleração da gravidade. Conseqüentemente, as trajetórias dos corpos são parábolas.

P6 – ESCREVA AS EXPRESSÕES DAS GRANDEZAS CINEMÁTICAS DO MOVIMENTO DE UMA PARTÍCULA SUBMETIDA A UMA FORÇA RESULTANTE CONSTANTE.

## Leituras e exercícios 11

### Leituras

Leia as seções 3.6 e 4.8, intituladas *Independência das velocidades*,

*Movimento de um projétil* no livro *Física – Volume Único* (Antonio Máximo e Beatriz Alvarenga).

Da seção 4.8 faça os *Exercícios de fixação* de 46 até 50 e os *Problemas e questões de vestibular* de 18 até 21.

## Movimento circular

O movimento circular é aquele em que a trajetória do corpo é um círculo ou um arco de círculo. Ele é comum no nosso cotidiano. Giram em movimento circular a criança do carrossel, os namorados na roda-gigante, o carro que faz uma curva etc. Giram em movimento quase circular a Lua em torno da Terra, a Terra em torno do Sol etc. Oscilam em movimento circular os pêndulos.

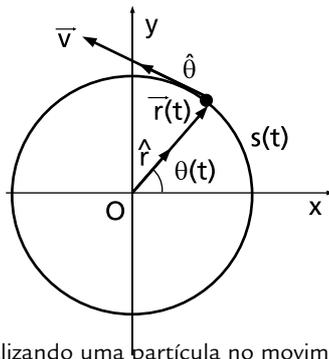


Figura 135 - Localizando uma partícula no movimento circular.

No movimento circular, a partícula pode ser localizada pelo vetor posição  $\vec{r}(t)$ , ou pelo arco  $s(t)$  ou pelo ângulo  $\theta(t)$  subtendidos pelo vetor posição e pelo eixo OX. Tanto o arco como os ângulos são medidos a partir do eixo OX no sentido anti-horário. A velocidade da partícula é tangente ao círculo. A sua componente na direção do vetor unitário  $\hat{\theta}$  tangente ao círculo e que aponta na direção em que o ângulo  $\theta$  aumenta é  $v_\theta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$ . Ela é positiva quando o movimento é no sentido anti-horário (o arco aumenta) e negativa quando o movimento é no sentido horário (o arco diminui).

A velocidade angular  $\omega$  é a variação do ângulo por unidade de tempo:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

Quando o arco é expresso em radianos, as grandezas lineares podem ser obtidas multiplicando-se as grandezas angulares por  $r$ , isto é,

$$s(t) = \theta(t)r, \Delta s(t) = \Delta \theta(t)r \Rightarrow v = \omega r$$

$\Delta s$  é a variação do comprimento do arco  $s$  no intervalo de tempo  $\Delta t$ .

O movimento circular mais simples é o movimento circular uniforme. Ele está representado na Figura 136. Nele, a velocidade angular é constante; isso significa que o vetor posição da partícula percorre ângulos iguais em intervalos de tempo iguais. Por isso, sua velocidade angular é constante,  $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \text{constante}$ .

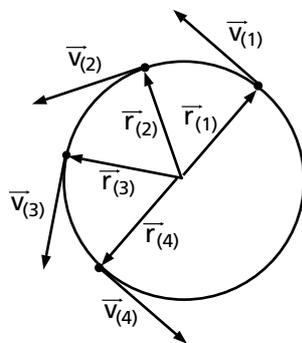


Figura 136 – Em um movimento circular uniforme, a velocidade angular é constante.

Na Figura 137 está representado um movimento circular que não é uniforme. Neste tipo de movimento os ângulos varridos em tempos iguais são diferentes e o módulo da velocidade tangencial varia no tempo. Podemos observar esse tipo de movimento em uma roda-gigante que está parando, um carrossel que está acelerando etc.

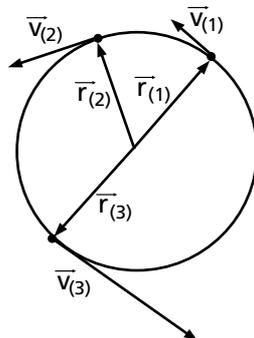


Figura 137 – No movimento circular que não é uniforme, as velocidades angular e tangencial variam.

Nesta disciplina, só abordaremos o movimento circular uniforme. Nesse movimento a variação angular é proporcional à velocidade angular, isto é,

$$\Delta\theta = \omega\Delta t.$$

O período do movimento circular é o tempo que a partícula leva para completar uma volta, isto é, percorrer um ângulo de  $2\pi$ . Portanto, o período do movimento circular é  $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ .

No movimento circular uniforme, o módulo da velocidade tangencial permanece constante. Apenas a direção da velocidade muda. Conseqüentemente, a aceleração do movimento tem que ser radial. Esse resultado pode ser apreendido com facilidade se analisarmos a curva gerada pelos vetores velocidades quando eles são colocados sobre uma mesma origem, por exemplo, sobre  $O_1$ .

A Figura 138 mostra que os vetores velocidades colocados sobre a origem  $O_1$  geram um círculo com raio constante e igual ao módulo  $v$  das velocidades.

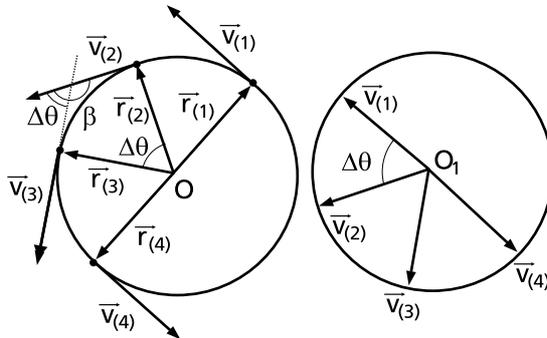


Figura 138 - Os vetores velocidades associados a uma partícula em movimento circular uniforme, quando colocados em uma mesma origem  $O_1$ , geram um círculo com traio  $v$ .

A soma dos ângulos do quadrilátero gerado pelos vetores  $\vec{r}(2)$ ,  $\vec{r}(3)$ ,  $\vec{v}(2)t$  e o prolongamento da direção de  $\vec{v}(3)$  é  $360^\circ$ . São conhecidos os dois ângulos de  $90^\circ$  (as direções das velocidades são perpendiculares aos raios) e o ângulo  $\Delta\theta$ . O quarto ângulo do quadrilátero  $\beta$  vale  $\beta = 360^\circ - 180^\circ - \Delta\theta = 180^\circ - \Delta\theta$ . Conseqüentemente, o ângulo entre as duas velocidades também é  $\Delta\theta$ .

A aceleração instantânea é  $\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ . A Figura 139 mostra a variação de velocidade correspondente ao intervalo de tempo  $\Delta t$ .

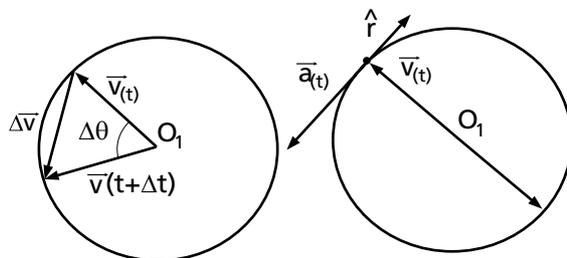


Figura 139 - Análise das propriedades do vetor aceleração instantânea no movimento circular uniforme.

Quando o intervalo de tempo tende a zero, o módulo do vetor  $\Delta \vec{v}$  se aproxima do arco de círculo de raio  $v$  subtendido pelo ângulo  $\Delta\theta$ , isto é,  $a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v \Delta\theta}{\Delta t} = v\omega$ . Como a velocidade  $v$  da partícula é  $v = \omega r$ , o módulo da aceleração é  $a = \omega r \omega = \omega^2 r$ . Também é fácil de perceber que a direção do vetor  $\Delta \vec{v}$  tende a ficar perpendicular ao vetor velocidade  $\vec{v}(t)$ . Por isso, o vetor aceleração instantânea é perpendicular à velocidade, tendo portanto a direção do raio e o sentido de fora para dentro do círculo. Ela é denominada aceleração centrípeta.

P7 – QUAIS AS CARACTERÍSTICAS DO VETOR VELOCIDADE EM UM MOVIMENTO CIRCULAR UNIFORME?

P8 – QUAIS AS CARACTERÍSTICAS DA VELOCIDADE ANGULAR EM UM MOVIMENTO CIRCULAR UNIFORME?

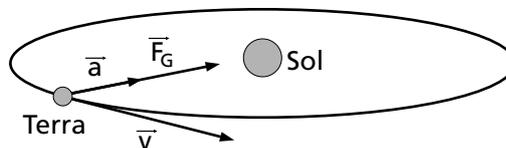


Figura 140 – O movimento da Terra em torno do Sol.

## Explicando a Terceira Lei de Kepler

Na terceira aula do Módulo 2 enunciamos as leis de Kepler. A primeira lei afirma que as órbitas dos planetas são elipses com o Sol em um dos seus focos. A terceira lei diz que o quadrado do raio da órbita é proporcional ao cubo do período. Vamos deduzir a Terceira Lei de Kepler utilizando a Segunda Lei de Newton, a Lei da Gravitação de Newton e a aproximação de que as órbitas dos planetas são círculos.

- O referencial utilizado vai ser o Sol.
- Vamos considerar que a única força gravitacional que não é desprezível é a do Sol. Por isso, a força resultante que atua no planeta é a força gravitacional do Sol. Ela é sempre perpendicular à velocidade do planeta e por isso muda a velocidade do planeta, mas não altera o seu módulo. Portanto, o planeta fica em movimento circular uniforme com raio  $r$ . A Segunda Lei de Newton aplicada ao planeta fornece:

$$\vec{F}_G = M_P \vec{a} \Rightarrow F_G = M_P a = M_P \omega^2 r .$$

A introdução do módulo força gravitacional entre o Sol e o planeta

$$\left( F_G = \frac{GM_S M_P}{r^2} \right) \text{ e a velocidade angular } \omega = \frac{2\pi}{\tau} \text{ na segunda lei}$$

fornece:

$$\frac{GM_S M_P}{r^2} = M_P \left( \frac{2\pi}{\tau} \right)^2 r \Rightarrow r^3 = \frac{GM_S M_P}{(2\pi)^2} \tau^2 .$$

Portanto, o raio da órbita ao cubo é proporcional ao quadrado do período.

## Movimento de corpos onde atuam forças impulsivas

Existem muitos exemplos de movimentos planos no nosso cotidiano produzidos por processos de colisão; por exemplo, a bola de bilhar que colide com outra bola, um carro que colide com um caminhão em uma esquina, uma bolinha de pingue-pongue que encontra a raquete etc. Nesses processos, atuam durante um pequeno intervalo de tempo forças muito intensas (impulsivas) cujos valores se desconhecem. Para descrever os processos de colisão faz-se necessária a definição de novos conceitos: o conceito de força resultante média e o conceito de quantidade de movimento.

A **força resultante média**  $\langle \vec{R} \rangle$  é, por definição, a força constante que produziria uma aceleração instantânea igual à aceleração média do sistema, isto é,  $\langle \vec{R} \rangle = m \vec{a}_m$ . Podemos encontrar uma relação entre a força resultante média e a variação de velocidade introduzindo a expressão da aceleração média na definição da força resultante média, isto é,

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{m(\vec{v}(t_2) - \vec{v}_1(t_1))}{\Delta t} = \frac{m\vec{v}(t_2) - m\vec{v}(t_1)}{\Delta t}.$$

A grandeza física  $m\vec{v}$  é denominada **quantidade de movimento**  $\vec{Q} = m\vec{v}$ . Ela é de grande importância na Física. A relação entre a força resultante média e a variação da quantidade de movimento fornece uma outra expressão da **Segunda Lei de Newton**.

$$\Delta \vec{Q} = \langle \vec{R} \rangle \Delta t$$

Vamos analisar a colisão entre uma bolinha de pingue-pongue e uma raquete para entender melhor o conceito de força média.

A Figura 141 mostra uma bolinha de pingue-pongue sendo rebatida por uma raquete lisa, refletida como um raio luminoso em um espelho. Apenas a direção da velocidade muda.

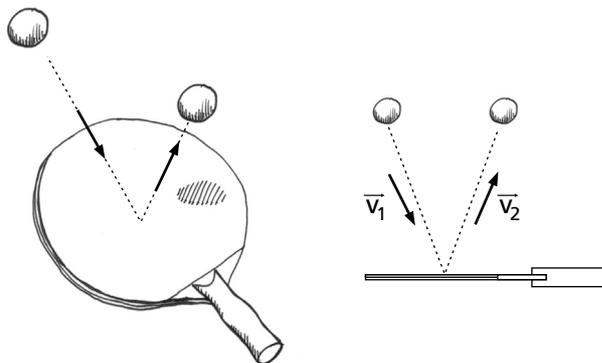


Figura 141 – A bolinha de pingue-pongue é refletida na raquete lisa como um raio de luz em um espelho. Ao ser refletida, o módulo da sua velocidade não muda.

FORÇA  
RESULTANTE  
MÉDIA

QUANTIDADE DE  
MOVIMENTO

SEGUNDA LEI DE  
NEWTON  
NOVA VERSÃO

A Figura 142 mostra a variação da velocidade da bolinha e o diagrama de forças que atuam sobre ela durante a sua colisão com a raquete. A variação de velocidade  $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}_2 + (-\vec{v}_1)$  foi obtida no desenho pela regra do paralelogramo. O algoritmo do diagrama de forças aplicado à bolinha permite calcular a força resultante média que atua na bolinha.

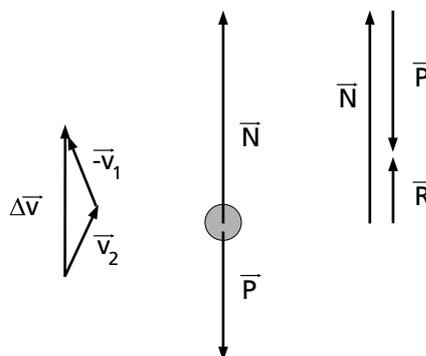


Figura 142 - O diagrama de forças que atuam na bolinha e a variação total da velocidade da bolinha de durante a colisão.

- A bolinha foi isolada no lado direito da Figura 142.
- Apenas a raquete e o ar estão em contato com a bolinha. A bolinha empurra a raquete, deformando-a de forma imperceptível; a raquete, como uma cama elástica, empurra a bolinha para cima exercendo sobre ela a força normal  $\vec{N}$ . Como a força que a raquete exerce sobre a bolinha durante a colisão é muito grande, podemos desprezar a resistência do ar.
- A única força gravitacional que não é desprezível é a da Terra, é o peso  $\vec{P}$  da bolinha.

A representação simbólica da força resultante é  $\vec{R} = \vec{P} + \vec{N}$ . A representação geométrica da força resultante foi obtida no desenho com a regra do paralelogramo.

A aceleração média da bolinha entre o instante imediatamente anterior à colisão e imediatamente após a colisão é  $\vec{a}_m = (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \Delta t$ . Portanto, a força resultante média é

$$\langle \vec{R} \rangle = \langle \vec{N} + \vec{P} \rangle = m \vec{a}_m = \frac{m \Delta \vec{v}}{\Delta t}.$$

P10 – QUAL O SIGNIFICADO FÍSICO DA FORÇA RESULTANTE MÉDIA?

P11 – QUAL A DEFINIÇÃO DE QUANTIDADE DE MOVIMENTO?

P12 – ENUNCIE A SEGUNDA LEI DE NEWTON UTILIZANDO OS CONCEITOS DE FORÇA RESULTANTE MÉDIA E DE QUANTIDADE DE MOVIMENTO.

## Leituras e exercícios 12

### Leituras

Leia as seções 4.1, 4.3 e 4.6, intituladas *Movimento circular uniforme*, *Gravitação universal*, *Cálculo da velocidade e do período de um satélite* no livro *Física – Volume Único* (Antonio Máximo e Beatriz Alvarenga).

Da seção 4.1 faça os *Exercícios de fixação* de 1 até 9.

Do capítulo 4 faça *Problemas e questões de vestibular* de 1 até 7.

Leia as seções de 1.2.1 até 1.2.5 no livro *Física 1-Mecânica*, do Gref. Reproduza em detalhes o exercício resolvido 1.5.

Nesta aula discutimos a cinemática do movimento circular uniforme e do projétil, introduzimos os conceitos de força média e quantidade de movimento.

## Exercícios programados 9

1. Uma pedra de massa  $m = 100g$  é colocada para girar, em um círculo vertical, presa a um fio esticado (Figura 1). Despreze a resistência do ar e considere o referencial fixo na Terra.

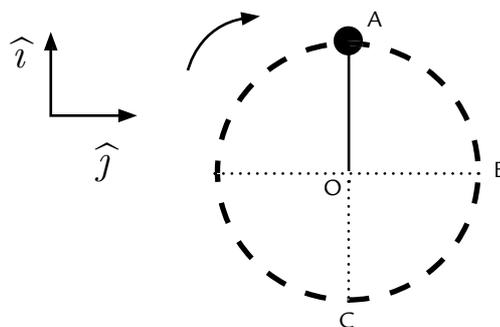


FIGURA 1

Responda, considerando o ponto A:

- Desenhe a pedra separada do seu exterior e diga quais os corpos que estão em contato com ela. Desenhe as forças de contato sobre a pedra.
- Existem forças gravitacionais que atuam sobre a pedra? Qual delas não é desprezível? Represente-a no seu desenho do item a.
- Onde estão aplicadas as reações às forças aplicadas sobre a pedra?
- Desenhe os vetores velocidade e aceleração.

Considere que o raio da trajetória é igual a  $r = 50cm$  e o módulo da velocidade é igual a  $v = 4m/s$ .

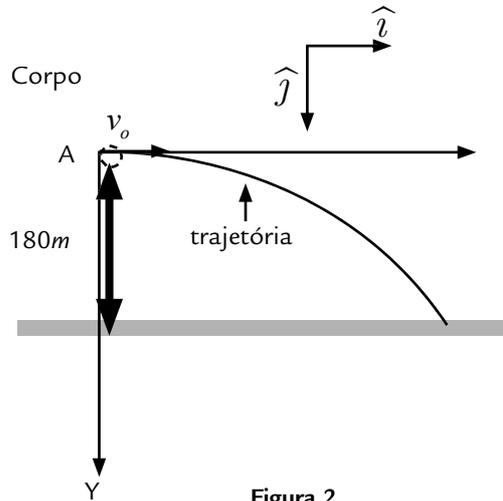
- Calcule o valor da tensão que a corda exerce sobre o fio.
- Calcule a força resultante.

Expresse todos estes vetores em termos dos vetores unitários  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$ .

Refaça esse exercício para os pontos B e C.

Mas considere o módulo da velocidade no ponto B  $v_B = 5m/s$  e no ponto C  $v_C = 6m/s$ .

2. Um corpo é lançado horizontalmente do alto de uma plataforma de  $180m$  de altura em relação ao solo, com velocidade inicial  $\vec{v}_0 = (40\hat{i})m/s$ . Considere a resistência do ar desprezível, o referencial fixo à Terra e  $g = 10m/s^2$ .



- Escreva  $x(t), y(t), v_x(t)$  e  $v_y(t)$  para o corpo.
- Escreva o vetor posição e o vetor velocidade instantânea do corpo para um instante de tempo  $t$ .
- Escreva o vetor posição e o vetor velocidade instantânea em  $t=3s$ .
- Obtenha a velocidade média e a aceleração média entre o tempo  $t=0s$  e  $t=3s$ .
- Obtenha o tempo gasto para o corpo atingir o solo.
- Obtenha o alcance máximo do corpo (maior distância horizontal percorrida).

## Gabarito

1. Uma pedra de massa  $m = 100g$  é colocada para girar em um círculo vertical, presa a um fio esticado (Figura 1). Despreze a resistência do ar e considere o referencial fixo na Terra.

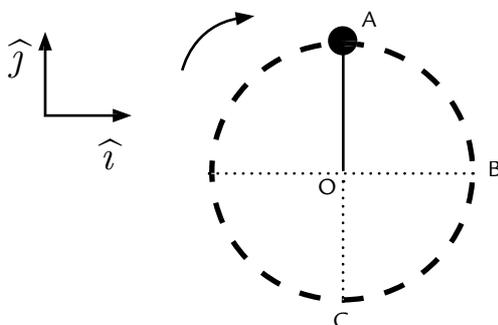


Figura 1

Responda para o ponto A:

a) Desenhe a pedra separada do seu exterior e diga quais os corpos que estão em contato com ela.

*Estão em contato com a pedra o ar e o fio. O enunciado informa que a resistência do ar é desprezível, logo, o fio é o único corpo em contato com a pedra que exerce força sobre a mesma. A força está desenhada na figura A e é a tensão  $\vec{T}$ .*



Figura A

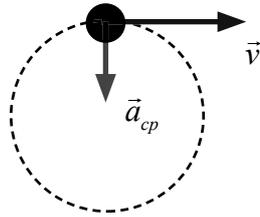
b) Existem forças gravitacionais que atuam sobre a pedra? Qual delas não é desprezível? Represente-a no seu desenho do item a.

*Sim, A única força gravitacional que não é desprezível é o peso  $\vec{P}$  da pedra. No Módulo 3, páginas 84 e 85, são feitas estimativas das ordens de grandeza das forças gravitacionais exercidas pelos corpos celestes sobre corpos próximos à Terra e entre corpos do nosso cotidiano. A conclusão é que a única força gravitacional não desprezível é o peso da pedra.*

c) Onde estão aplicadas as reações às forças aplicadas sobre a pedra?

*A reação à tensão  $\vec{T}$  está aplicada no fio e é  $-\vec{T}$ . A reação à força peso  $\vec{P}$  está localizada no centro da Terra e é  $-\vec{P}$ .*

d) Desenhe os vetores velocidade e aceleração.



Considere que o raio da trajetória é igual a  $r = 50\text{cm}$  e o módulo da velocidade no ponto A igual a  $v = 4\text{m/s}$ .

e) Calcule o valor da tensão.

*Através da Segunda Lei de Newton, temos:*

*Segunda Lei de Newton:  $\vec{R} = m\vec{a}$*

*A representação simbólica da força resultante é:  $\vec{R} = \vec{T} + \vec{P}$*

*As componentes da força resultante são:*

$$R_x = T_x + P_x$$

$$R_y = T_y + P_y$$

*Pela figura A, vemos que as componentes de cada uma das forças são:*

$$T_x = 0 \quad P_x = 0$$

$$T_y = -T \quad P_y = -P$$

*Portanto, as componentes da força resultante são:*

$$R_x = 0$$

$$R_y = -T - P$$

*A Segunda Lei de Newton fornece:*

$$-T - P = -\frac{mv^2}{r} \Rightarrow T + P = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow T = \frac{0,1 \cdot 4^2}{0,5} - 0,1 \cdot 10 = 2,2\text{N}$$

*A representação simbólica da tensão no ponto A é:  $\vec{T} = -2,2\hat{i} - 2,2\hat{j}$*

f) Calcule a força resultante.

*Como foi visto no item anterior, a força resultante é:*

$$\vec{R} = R_y \hat{j}$$

$$R_y = -T - P = -2,2 - 1 = -3,2\text{N}$$

$$\vec{R} = (-3,2\hat{j})\text{N}$$

*Expresse todos estes vetores em termos dos vetores unitários  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$ .*

$$\vec{T} = (-2,2\hat{i} - 2,2\hat{j})\text{N}$$

$$\vec{P} = (-1\hat{j})\text{N}$$

$$\vec{R} = (-3,2\hat{j})\text{N}$$

$$\vec{v} = (4\hat{i})\text{m/s}$$

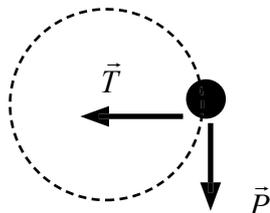
$$\vec{a}_{cp} = (-32\hat{j})\text{m/s}^2$$

Refaça para os pontos B e C.

Mas considere o módulo da velocidade no ponto B,  $v_B = 5\text{ m/s}$  e  $v_C = 6\text{ m/s}$ .

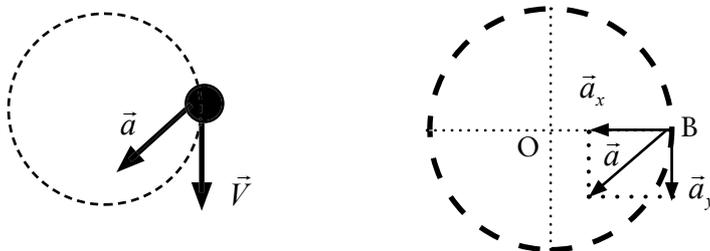
Para o ponto B, temos:

a) Pedra isolada do exterior com as forças que agem nela:



Os itens: b), c), d) e e) são iguais aos referentes ao ponto (A).

f)



g) De acordo com a segunda lei de Newton temos:

Segunda lei de Newton:  $\vec{R} = m\vec{a}$

A representação simbólica da força resultante é:  $\vec{R} = \vec{T} + \vec{P}$

As componentes da força resultante são:

$$R_x = T_x + P_x$$

$$R_y = T_y + P_y$$

Pela figura A, vemos que as componentes de cada uma das forças são:

$$T_x = -T \quad P_x = 0$$

$$T_y = 0 \quad P_y = -P$$

A Segunda Lei de Newton fornece:

$$-T = -\frac{mv^2}{r} \Rightarrow T = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow T = \frac{0,1 \cdot 5^2}{0,5} = 5\text{ N} \Rightarrow \vec{T} = -5\hat{i}\text{ N}$$

h) O valor da força resultante é:

No eixo OY, a pedra move-se em queda livre, logo a Segunda Lei de Newton fornece:

$$P = mg = 0,1 \times 10 = 1\text{ N} \Rightarrow \vec{P} = -1\hat{j}\text{ N}$$

A força resultante é  $\vec{R} = R_x\hat{i} + R_y\hat{j}$

$$\vec{R} = (-5\hat{i} - 1\hat{j})\text{ N}$$

$$\begin{aligned} \vec{T} &= (-5\hat{i})N \\ \vec{P} &= (-1\hat{j})N \\ \vec{R} &= (-5\hat{i}-1\hat{j})N \\ \vec{v} &= (-5\hat{j})m/s \\ \vec{a}_{cp} &= (-5\hat{j})m/s^2 \end{aligned}$$

Para o ponto C, temos:

a) Pedra isolada do exterior com as forças que agem nela:

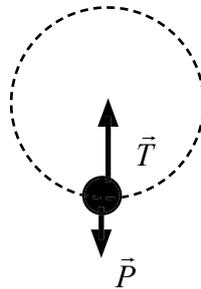
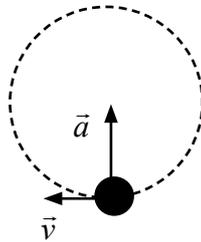


Figura C

Os itens: b), c), d) e e) são iguais aos referentes ao ponto (A).

f)



g) Calcule o valor da tensão que a corda exerce sobre o fio.

De acordo com a segunda lei de Newton temos:

Segunda lei de Newton:  $\vec{R} = m\vec{a}$

A representação simbólica da força resultante é:  $\vec{R} = \vec{T} + \vec{P}$

As componentes da força resultante são:

$$R_x = T_x + P_x$$

$$R_y = T_y + P_y$$

Pela figura C, vemos que as componentes de cada uma das forças são:

$$T_x = 0 \quad P_x = 0$$

$$T_y = T \quad P_y = -P$$

Portanto, as componentes da força resultante são:

$$R_x = 0$$

$$R_y = T - P$$

A força resultante é perpendicular à velocidade da pedra e, por isso, muda a direção da mesma mas não muda o seu módulo. Portanto, a pedra fica em movimento circular uniforme com raio R. A Segunda Lei de Newton fornece:

$$T - P = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow T = P + \frac{mv^2}{r} \Rightarrow T = \frac{0,1 \cdot 6^2}{0,5} + 0,1 \cdot 10 = 8,2N$$

A representação vetorial da tensão no ponto C é:  $\vec{T} = 8,2N\hat{j}$

h) Calcule o valor da força resultante

$$\vec{R} = R_y\hat{j}$$

$$R_y = T - P = 8,2 - 1 = 7,2N$$

$$\vec{R} = (7,2\hat{j})N$$

Expresse todos estes vetores em termos dos vetores unitários  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$ .

$$\vec{T} = (8,2\hat{j})N$$

$$\vec{P} = (-1\hat{j})N$$

$$\vec{R} = (7,2\hat{j})N$$

$$\vec{v} = (-6\hat{i})m/s$$

$$\vec{a} = (72\hat{j})m/s^2$$

2. Um corpo é lançado horizontalmente do alto de uma plataforma de  $180m$  de altura em relação ao solo, com velocidade inicial  $\vec{v}_0 = (40\hat{i})m/s$ . Considere a resistência do ar desprezível, o referencial fixo à Terra e  $g = 10m/s^2$ :

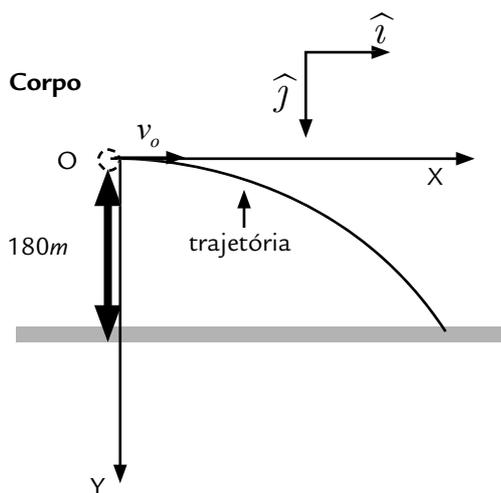


Figura 2

a) Escreva  $x(t), y(t), v_x(t)$  e  $v_y(t)$  para o corpo.

No eixo OX, o corpo move-se em movimento retilíneo uniforme:

$$x(t) = x_0 + v_{ox}t$$

$$\text{onde } x_0 = 0 \text{ e } v_{ox} = 40 \text{ m/s} \Rightarrow x(t) = 40t.$$

No eixo OY, o corpo move-se por ação da força gravitacional. Logo,

$$y(t) = y_0 + v_{0y} \cdot t + \frac{a_y \cdot t^2}{2} \text{ onde } y_0 = 0, v_{0y} = 0 \text{ e } a_y = 10 \text{ m/s}^2 \Rightarrow y(t) = 5t^2.$$

$$v_x(t) = 40$$

$$v_y(t) = v_{0y} + a_y \cdot t = 10 \cdot t$$

b) Escreva os vetores posição, velocidade e aceleração instantâneas do corpo para um instante de tempo t.

O vetor posição é:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} \\ &= (40t)\hat{i} + (5t^2)\hat{j} \end{aligned}$$

O vetor velocidade instantânea é:

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= v_x(t)\hat{i} + v_y(t)\hat{j} \\ &= 40\hat{i} + (10t)\hat{j} \end{aligned}$$

O vetor aceleração instantânea é:

$$\vec{a}(t) = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} = 10\hat{j}$$

c) Escreva o vetor posição e o vetor velocidade instantânea em  $t=3\text{s}$ .

O vetor posição para  $t = 3\text{s}$ :

$$\vec{r}(3) = 40 \cdot 3\hat{i} + 5 \cdot 3^2 \hat{j} = (120\hat{i} + 45\hat{j}) \text{ m}$$

O vetor velocidade instantânea para  $t = 3\text{s}$ :

$$\vec{v}(3) = 40\hat{i} + 10 \cdot 3\hat{j} = (40\hat{i} + 30\hat{j}) \text{ m/s}$$

d) Obtenha as velocidade média e aceleração média entre o tempo  $t=0\text{s}$  e  $t=3\text{s}$ .

velocidade média:

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}(3) - \vec{r}(0)}{3} = \frac{120\hat{i} + 45\hat{j}}{3} = (40\hat{i} + 15\hat{j}) \text{ m/s}$$

aceleração média:

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}(3) - \vec{v}(0)}{3} = \frac{40\hat{i} + 30\hat{j} - 40\hat{i}}{3} = (10\hat{j}) \text{ m/s}^2$$

e) Obtenha o tempo gasto para o corpo atingir o solo.

*O tempo gasto para atingir o solo é o tempo que o projétil atinge  $y(t) = 180m$ .*

$$y(t) = 5 \cdot t^2$$

$$\Rightarrow 5 \cdot t^2 = 180$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{180}{5}} = 6s$$

f) Obtenha o alcance máximo do corpo (maior distância horizontal percorrida).

*A maior distância horizontal percorrida é igual à distância que o móvel percorre no eixo  $x$  durante o tempo de queda:*

$$x(t) = 40t \Rightarrow x(6) = 40 \times 6 = 240m .$$

## A flutuação dos corpos

### Prática 2

#### Experimento 1 – Medir empuxo em um corpo de prova e sua densidade

##### *Objetivo*

Serão efetuadas medições de:

- Massa de um corpo de prova, com uma balança;
- Peso de um corpo de prova, com um dinamômetro;
- Empuxo;

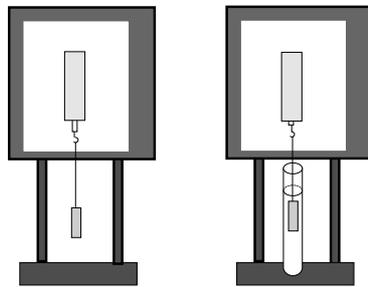


Figura 143 – Equipamento experimental.

- Densidade de um corpo de prova.

##### *Material utilizado*

- Corpo de prova 1: 1 cilindro de alumínio com dois ganchos, com peso de aproximadamente 1N (incluindo os ganchos);
- Corpo de prova 2: 1 cilindro de alumínio com um gancho, com peso de aproximadamente 0,5N (incluindo o gancho);
- 1 dinamômetro graduado em newtons, com prendedor magnético;
- 1 balança graduada em gramas;
- 1 proveta graduada em ml (ou  $\text{cm}^3$ ), cujo volume total é igual a 500ml, altura aproximadamente igual a 40cm e diâmetro externo de 5cm;



*Informações preliminares:*

Na Figura 144 estão representados um fluido em equilíbrio e o diagrama de forças de uma porção desse fluido com volume  $V_{flui}$ . O fluido que está em contato com a porção de fluido com volume  $V_{flui}$  exerce sobre ela a força  $\vec{E}$ . A Terra atrai a porção de fluido com a força peso  $\vec{P}$ . Como a porção de fluido está em equilíbrio, a força resultante que atua sobre ela é nula. Conseqüentemente o módulo da força  $\vec{E}$  é igual ao módulo da força peso, isto é,  $E = m_{flui}g = \rho_{flui}V_{flui}g$ , onde  $\rho_{flui}$  é a densidade volumétrica do fluido e  $g$  é a aceleração da gravidade. Vamos considerar apenas fluidos com densidades volumétricas  $\rho_{flui}$  constantes.



Figura 144 - Fluido em equilíbrio.

A Figura 145 representa um corpo imerso em um fluido em equilíbrio. O volume de fluido deslocado pelo corpo é igual ao da porção de fluido da Figura 144. A quantidade de fluido que envolve o corpo é igual à da Figura 144. A força exercida sobre o corpo pelo fluido que está em contato com ele é igual à força  $\vec{E}$ .

O corpo é empurrado para fora do fluido pela força  $\vec{E}$ , denominada força empuxo. A *força empuxo tem a direção e o sentido contrário ao da força peso e módulo igual ao peso do volume deslocado*, isto é,  $\vec{E} = +\rho_{flui}V_{flui}g\vec{j}$ .

FORÇA EMPUXO

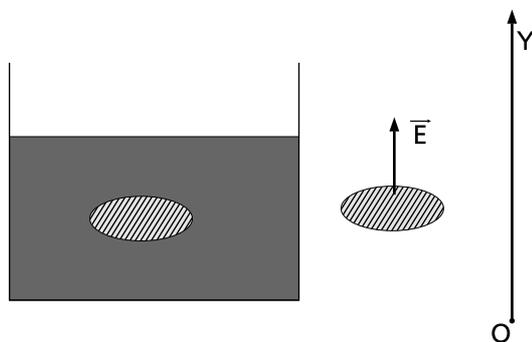


Figura 145 - Corpo imerso no fluido em equilíbrio.

A Figura 146 apresenta um corpo de prova que está pendurado por uma linha em um dinamômetro e os diagramas de forças do corpo e da linha.

*O corpo de prova está imerso no ar*

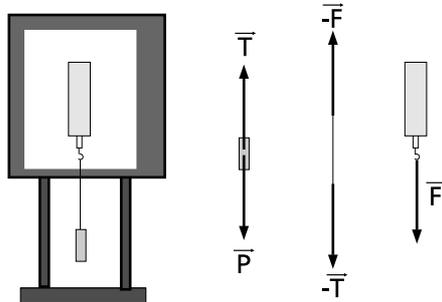


Figura 146 – Diagrama de forças do corpo de prova imerso no ar.

Vamos aplicar o algoritmo do diagrama de forças ao corpo e ao fio para obter os seus diagramas de forças.

O corpo foi desenhado separado do seu exterior na Figura 146. Estão em contato com ele o fio e o ar. A força que o ar exerce sobre o corpo é a força empuxo, que é igual ao peso do volume do ar deslocado. Ela é desprezível em relação ao peso do corpo ( $\rho_{ar} \ll \rho_{corpo}$ ) e não será considerada. O fio exerce sobre o corpo a força  $\vec{T}$ . A Terra atrai o corpo com a força  $\vec{P}$ . O equilíbrio nos dá que:  $\vec{T} + \vec{P} = \vec{0} \Rightarrow \vec{T} = -\vec{P}$ .

A leitura do dinamômetro é o módulo da força  $\vec{F}$  que o fio exerce sobre o dinamômetro.

O fio foi desenhado separado do seu exterior na Figura 146. Estão em contato com ele o ar, o corpo e o dinamômetro. A força empuxo exercida pelo ar sobre o fio é desprezível em relação à força exercida pelo corpo sobre ele, uma vez que o volume de ar deslocado pelo fio é muito pequeno. A força exercida pelo corpo sobre o fio é  $-\vec{T}$ , uma vez que a sua reação é a força que o fio exerce sobre o corpo que é  $\vec{T}$ . A força que o dinamômetro exerce sobre o fio é  $-\vec{F}$ , uma vez que a sua reação é a força que o fio exerce sobre o dinamômetro. A força gravitacional  $\vec{P}_{fio}$  que a Terra exerce sobre o fio é desprezível porque o fio tem massa muito menor que a massa do corpo de prova. Pelo equilíbrio temos que  $-\vec{F} + (-\vec{T}) = 0 \Rightarrow \vec{F} = -\vec{T} = -(-\vec{P}) = \vec{P}$ . Portanto, a leitura no dinamômetro é igual ao *módulo do peso do corpo de prova (P)*.

A Figura 147 apresenta um corpo de prova que está pendurado por uma linha em um dinamômetro e os diagramas de forças do corpo e da linha. O *corpo de prova está imerso na água*.

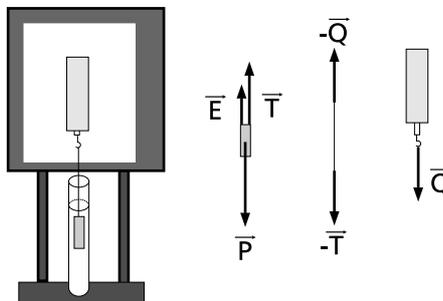


Figura 147 - Diagrama de forças do corpo de prova imerso na água.

Vamos aplicar o algoritmo do diagrama de forças ao corpo e ao fio para obter os seus diagramas de forças.

O corpo foi desenhado separado do seu exterior na figura 147. Estão em contato com ele o fio e a água. A força que a água exerce sobre o corpo é a força empuxo  $\vec{E}$  que é igual ao volume de água deslocada ( $E = \rho_{\text{água}} V_{\text{des}} g$ ). O fio exerce sobre o corpo a força  $\vec{T}$ . A Terra atrai o corpo com a força  $\vec{P}$ . O equilíbrio nos dá que:  $\vec{T} + \vec{P} + \vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \vec{T} = -\vec{P} - \vec{E}$ .

A leitura do dinamômetro é o módulo da força  $\vec{Q}$  que o fio exerce sobre o dinamômetro.

O fio foi desenhado separado do seu exterior na figura 147. Estão em contato com ele o ar, o corpo e o dinamômetro. A força empuxo exercida pelo ar sobre o fio é desprezível em relação à força exercida pelo corpo sobre ele, uma vez que o volume de ar deslocado pelo fio é muito pequeno. A força exercida pelo corpo sobre o fio é  $-\vec{T}$ , uma vez que a sua reação é a força que o fio exerce sobre o corpo, que é  $\vec{T}$ . A força que o dinamômetro exerce sobre o fio é  $-\vec{Q}$ , uma vez que a sua reação é a força  $\vec{Q}$  que o fio exerce sobre o dinamômetro. A força gravitacional  $\vec{P}_{\text{fio}}$  que a Terra exerce sobre o fio é desprezível porque o fio tem massa muito menor que a massa do corpo de prova. Pelo equilíbrio temos que  $-\vec{Q} + (-\vec{T}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{Q} = -\vec{T} = -(-\vec{P} - \vec{E}) = \vec{P} + \vec{E}$ . Portanto, a *leitura no dinamômetro* é igual ao *módulo da força  $\vec{Q}$*  que é igual a  $Q = |\vec{P} + \vec{E}| = P + E$ . A força  $\vec{Q}$  é denominada peso aparente  $\vec{P}_{\text{aparente}}$ .

## Atividade experimental

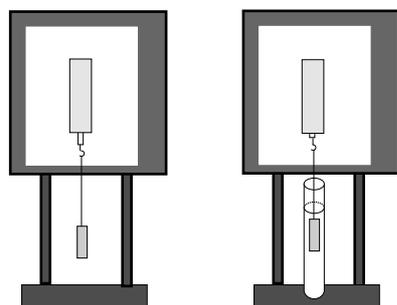


Figura 148 - Equipamento experimental.

1. Encha o recipiente com água até, por exemplo, o nível  $N_0 = 400ml$ . Estime a incerteza nessa leitura,  $\delta N_0 = \text{_____}$ . Coloque  $N_0$  e  $\delta N_0$  na Tabela 1.

2. Usando a balança, leia a massa do corpo,  $M = \text{_____}$ , e estime a incerteza nessa leitura,  $\delta M = \text{_____}$  e coloque na Tabela 1. *Não se esqueça de calibrar a balança.*

3. Posicione o dinamômetro no quadro magnético como mostrado na Figura 148 repetida acima. Não se esqueça de fazer o ajuste inicial do dinamômetro, bem como seu alinhamento na prancha vertical.

*Alinhamento inicial do dinamômetro:* Solte o parafuso libertador da capa e a movimente para cima ou para baixo, nivelando o primeiro traço da escala com a extremidade da capa (referência).

4. Corte um pedaço de linha de alta resistência com um comprimento da ordem de 20cm. dobre a linha e dê um laço. Prenda uma das extremidades da linha no dinamômetro e a outra no corpo de prova 1.

5. Leia o dinamômetro  $L_0 = \text{_____}$  e estime a incerteza dessa leitura  $\delta L_0 = \text{_____}$  e coloque na Tabela 1.

6. Preencha a proveta com água. Verifique se ela está com uma esponja no fundo.

7. Introduza o peso na proveta com água, como na figura 148. Tenha cuidado para não deixar o peso cair. Evite a queda do peso sobre o fundo da proveta.

8. Com  *muito cuidado* repita a medição, agora com o corpo de prova 2 inteiramente mergulhado na água do recipiente.

**Cuidado para não bater com o corpo de prova nas paredes do recipiente de vidro.**

9. Leia o novo nível d'água  $N = \text{————}$  e a sua incerteza experimental  $\delta N = \text{————}$  e coloque na Tabela 1.

10. Leia o dinamômetro  $L = \text{————}$  e estime a incerteza dessa leitura  $\delta L = \text{————}$  e coloque na Tabela 1.

Tabela 1 - Medidas diretas

Corpo	$N_0 \pm \delta N_0$ [ml]	$N \pm \delta N$ [ml]	$M \pm \delta M$ [g]	$L_0 \pm \delta L_0$ [N]	$L \pm \delta L$ [N]
1					
2					

Cálculo das medidas indiretas e de suas incertezas experimentais

Nos cálculos a seguir considere os seguintes valores para a aceleração da gravidade e a densidade d'água:

$$g = (978,7 \pm 0,1) \text{ cm/s}^2, \rho_{\text{água}} = (1,0001 \pm 0,0001) \text{ g/cm}^3.$$

Calcule o *volume do corpo mergulhado* pela diferença do nível da água antes e depois que ele foi imerso na água:  $V_{des} = N - N_0 = \text{————}$ .

Calcule a *incerteza experimental*  $\delta V_{des}$  associada a essa medida:  $\delta V_{des} = \sqrt{(\delta N)^2 + (\delta N_0)^2} = \text{————}$ .

Coloque os valores de  $V_{des}$  e  $\delta V_{des}$  na Tabela 2.

Calcule a *densidade do corpo de prova*  $\rho = \frac{M}{V}$  e a sua incerteza experimental

$$\delta \rho_{\text{corpo}} = \frac{M}{V_{des}} \sqrt{\left(\frac{\delta M}{M}\right)^2 + \left(\frac{\delta V_{des}}{V_{des}}\right)^2} = \text{————}.$$

**Coloque os valores de  $\rho_{\text{corpo}}$  e  $\delta \rho_{\text{corpo}}$  na Tabela 2.**

Calcule, utilizando os dados da Tabela 1 e o valor da aceleração da gravidade, o *peso do corpo de prova*:  $P = Mg = \text{————}$ . Calcule a *incerteza experimental associada a essa medida*:  $\delta P = \delta Mg = \text{————}$ . A incerteza na medida da aceleração da gravidade foi desprezada em relação à incerteza na medida da massa.

**Coloque os valores de  $P$  e  $\delta P$  na Tabela 2.**

Calcule, utilizando os dados da Tabela 1, os valores do empuxo  $E = \rho_{\text{água}} V_{des} g = \text{————}$  da sua incerteza experimental  $\delta E = \rho_{\text{água}} \delta V_{des} g$ . As incertezas nas medidas da aceleração da gravidade e da densidade da água foram desprezadas em relação à incerteza na medida do volume do deslocada de água.

Coloque os valores de  $E$  e  $\delta E$  na Tabela 2.

Calcule, utilizando os dados da Tabela 1, os valores do empuxo  $P_{aparente} = P - \rho_{\text{água}} V_{des} g = \text{_____}$  da sua incerteza experimental  $\delta P_{aparente} = \sqrt{(\delta P)^2 + (\delta E)^2} = \text{_____}$ . As incertezas nas medidas da aceleração da gravidade e da densidade da água foram desprezadas em relação à incerteza na medida do volume deslocado de água.

Coloque os valores de  $P$  e  $\delta P_{aparente}$  na Tabela 2.

Tabela 2 – Medidas indiretas.

Corpo	$L_o \pm \delta L_o$ [N]	$\rho_{\text{corpo}} \pm \delta \rho_{\text{corpo}}$ [g/cm <sup>3</sup> ]	$P \pm \delta P$ [N]	$E = \rho_{\text{água}} V_{des} g$ $E \pm \delta E$ [N]	$E = L - L_o$ $E \pm \delta E$ [N]
1					
2					

#### Análise dos dados

O dinamômetro mede a força que o fio exerce sobre ele. Portanto, de acordo com as informações anteriores, temos que:  $L_o = F = P$  e  $L = Q = P_{aparente}$ .

1. Transfira para a Tabela 3 os valores de  $L_o$ ,  $\delta L_o$ ,  $P$  e  $\delta P$ .

Tabela 3 – Medidas dos pesos.

Corpo	$L_o \pm \delta L_o$ [N]	$P \pm \delta P$ [N]
1		
2		

Escreva o intervalo dos números reais  $I_1 = [L_o - \delta L_o, L_o + \delta L_o] = \text{_____}$  que representa a faixa de valores experimentais para o peso do corpo obtido diretamente da leitura do dinamômetro.

Escreva o intervalo dos números reais  $I_2 = [P - \delta P, P + \delta P] = \text{_____}$  que representa a faixa de valores experimentais para o peso do corpo obtido indiretamente com a medida da massa do corpo e da aceleração da gravidade.

Qual intersecção dos intervalos  $I_1$  e  $I_2$ ? As faixas de valores obtidas pela medida direta e indireta do peso do corpo são compatíveis? Justifique a sua resposta.

2. Transfira para a Tabela 4 os valores de  $E \pm \delta E$  calculados com a densidade da água, o volume deslocado pelo corpo e a aceleração da gravidade e os valores de  $E \pm \delta E$  calculados com as leituras do dinamômetro  $L$  e  $L_o$ .

Tabela 4 – Medidas do empuxo.

Corpo	$E = \rho_{\text{água}} V_{des} g$ $E \pm \delta E$ [N]	$E = L - L_o$ $E \pm \delta E$ [N]
1		
2		

Escreva o intervalo  $I_3 = [E - \delta E, E + \delta E] =$  \_\_\_\_\_ dos números reais que representa a faixa de valores experimentais para empuxo calculado pelo volume deslocado.

Escreva o intervalo  $I_4 = [E - \delta E, E + \delta E] =$  \_\_\_\_\_ dos números reais obtidos indiretamente das leituras  $L$  e  $L_0$  do *dinamômetro*. Qual intersecção dos intervalos  $I_3$  e  $I_4$ ? As faixas de valores do empuxo obtidas pelas leituras dos dinamômetros e pelo volume deslocado são compatíveis? Justifique a sua resposta.

3. O Handbook de Química fornece para a densidade do alumínio puro a seguinte faixa de valores:  $\rho_{Al} = (2,699 \pm 0,001)\text{g/cm}^3$ .

Transfira para a Tabela 5 os valores de  $\rho_{corpo} \pm \delta\rho_{corpo}$  da Tabela 2.

Escreva o intervalo dos números reais  $I_5 = [\rho_{Al} - \delta\rho_{Al}, \rho_{Al} + \delta\rho_{Al}]$  associado à faixa de valores do alumínio puro.

Tabela 5 – Medidas de densidade.

<i>Corpo</i>	$\rho_{corpo} \pm \delta\rho_{corpo}$ [g/cm <sup>3</sup> ]	$\rho_{corpo} \pm \delta\rho_{corpo}$ [g/cm <sup>3</sup> ]
		2,699 ± 0,001
		2,699 ± 0,001

Escreva o intervalo dos números reais  $I_6 = [\rho_{corpo} - \delta\rho_{corpo}, \rho_{corpo} + \delta\rho_{corpo}] =$  \_\_\_\_\_ que representa a faixa de valores das densidades dos corpos.

Qual a intersecção do intervalo  $I_5$  e  $I_6$ ? As faixas de valores para a densidade do corpo e a faixa e valores para o alumínio fornecido pelo Handbook são compatíveis? Justifique a sua resposta.

## E para terminar...

Neste módulo iniciamos o estudo da Mecânica da Partícula. Essa teoria é um dos pilares da Física. Ela é o modelo que explica o movimento de corpos que podem ser tratados como partículas no mundo macroscópico.

Você aprendeu que todo movimento é relativo, que para descrever um movimento é necessário definir um referencial, que os vetores cinemáticos simplificam a representação e a descrição das trajetórias, que são as forças que mudam os movimentos e que as Leis de Newton permitem encontrar as trajetórias de partículas cujas velocidades e posições iniciais são conhecidas.

Vimos que as forças são o resultado das interações entre os corpos e que todas as forças de contato têm natureza eletromagnética.

O conhecimento da interação eletromagnética permitiu o desenvolvimento do mundo moderno. Associadas a ela estão a luz que ilumina cidades, o calor produzido nos aquecedores elétricos, a transmissão de informações utilizadas nos rádios, telefones, televisores, computadores etc.

No Módulo 4, iniciaremos com o auxílio da Mecânica da Partícula o estudo da interação eletromagnética.



## O centro de massa

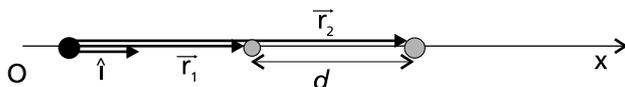
Na disciplina de Física I será demonstrado que o **centro de massa** de um sistema é um ponto do espaço definido pela distribuição de massa do sistema. Ele tem a trajetória de uma partícula com a massa total do sistema e que está submetida a todas as forças que o exterior realiza sobre o sistema. Por exemplo, um carro é composto por muitas partes, as rodas, o volante etc. O centro de massa do carro depende da forma com que a sua massa total  $M$  está distribuída no seu volume. Quando o carro está se deslocando em uma estrada, o seu centro de massa tem a trajetória igual à de uma partícula que tem massa  $M$  e sofre a ação do peso do carro, das normais e das forças de atrito que atuam sobre as rodas e da resistência que o ar oferece ao deslocamento do carro.

CENTRO DE MASSA

Neste complemento estamos interessados apenas em definir o vetor posição do centro de massa de um sistema para começar a desenvolver nossa intuição em relação à sua posição. Ele é uma espécie média ponderada pelas massas dos vetores posição das partes que compõem o sistema. A definição do vetor posição do centro de massa de um sistema de partículas é:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N (m_i \vec{r}_i)}{\sum_{i=1}^N m_i}$$

Vamos calcular o vetor posição do centro de massa de um sistema formado por duas partículas com massas  $m_1$  e  $m_2$  que estão separadas por uma distância  $d$ .



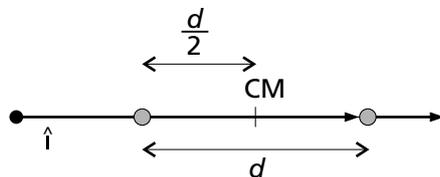
O vetor posição do centro de massa é  $\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$ .

Os vetores posição são dados por:  $\vec{r}_1 = x_1 \hat{i}$ ,  $\vec{r}_2 = x_2 \hat{i} = (x_1 + d) \hat{i}$ .  
As componentes do vetor posição do centro de massa são:

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 x_1 + m_2 (x_1 + d)}{m_1 + m_2}$$

$$y_{CM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = 0.$$

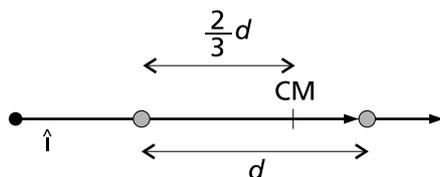
As expressões encontradas mostram que no casos em que as massas são iguais temos :  $x_{CM} = \frac{m_1x_1 + m_1(x_1 + d)}{m_1 + m_1} = x_1 + \frac{d}{2}$  e  $y_{CM} = 0$ .



Portanto, o centro de massa entre duas partículas está no ponto médio entre elas, isto é, a igual distância das massas.

No caso em que  $m_2 = 2m_1$  as coordenadas do centro de massa são:

$$x_{CM} = \frac{m_1x_1 + 2m_1(x_1 + d)}{m_1 + 2m_1} = x_1 + \frac{2d}{3} \text{ e } y_{CM} = 0$$



Neste caso, o centro de massa está mais próximo da maior massa. Isto vai sempre ocorrer, uma vez que o vetor posição das partículas mais pesadas contribuem mais no cálculo do vetor posição do centro de massa.

O cálculo da posição do centro de massa de sistemas mais complicados será realizado em disciplinas mais avançadas do curso. Será possível demonstrar com bastante facilidade com o auxílio do cálculo diferencial e integral que o centro de massa de sistemas homogêneos e simétricos estão no seu centro de simetria. Por exemplo, o centro de massa de uma esfera com distribuição de massa homogênea está no centro da esfera, o centro de massa de um tijolo homogêneo está no centro do tijolo etc.

## Propagação de erros

No Módulo 1, foi discutido no Complemento 3 – *Incerteza numa medida experimental* - que o valor exato de uma grandeza experimental<sup>1</sup> é sempre desconhecido. Por melhores que sejam os métodos e os instrumentos de medida, o valor encontrado para a grandeza será uma *estimativa* para o seu valor verdadeiro. Associamos, então, a cada medida uma *incerteza* ou *erro*. Assim, ao medirmos o valor de uma grandeza experimental determinamos qual o *valor mais provável* e o quão próxima do *valor verdadeiro* está essa medida, com base num tratamento estatístico dos dados.

Neste mesmo módulo, nos confrontamos, no laboratório, com situações em que o resultado do experimento é medido indiretamente, em termos de duas ou mais medidas obtidas diretamente. Por exemplo, o cálculo do tamanho da mancha luminosa ( $L$ ) em função do diâmetro do orifício da máscara ( $d$ ) e das distâncias da fonte à máscara ( $a$ ) e da máscara até o anteparo ( $b$ ). Ou seja, nos defrontamos com a questão de determinar qual é a incerteza no resultado final ( $\delta L$ ), *medida indireta*, em função das incertezas das medidas diretas ( $\delta a, \delta b, \delta d$ ). A sugestão de estimativa para a determinação da incerteza foi calcular o valor máximo e mínimo para  $L$ . Mas, em geral, para resolver esse problema aplicamos o método mais usual, conhecido como *propagação de erros*, que se baseia na aplicação de resultados do cálculo diferencial que você estudará em cursos posteriores.

Para ilustrar como os erros se propagam, apresentamos na figura abaixo uma representação gráfica esquemática da propagação do erro de uma medida direta  $x$  para uma medida indireta  $y$ , tal que  $y = f(x)$ . Nesta ilustração, vemos que uma variação  $\delta x$  no valor de  $x$  resulta numa variação no valor de  $y$ .

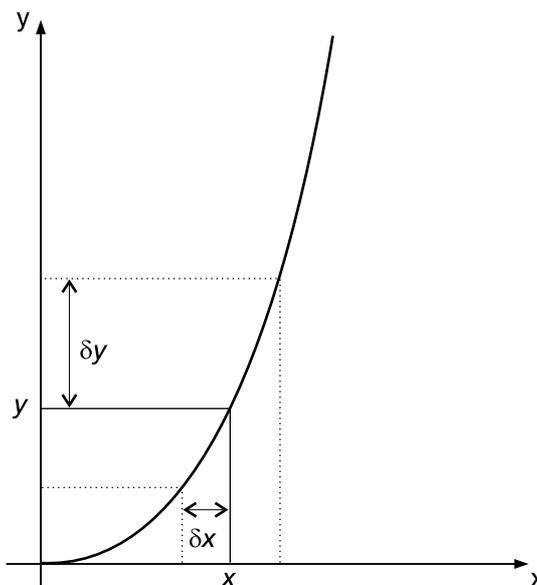


Figura 1 – Representação gráfica esquemática da propagação do erro de uma medida direta  $x$  para uma medida indireta  $y$ , tal que  $y = f(x)$ .

<sup>1</sup> Por grandeza experimental entendemos que se trata de toda grandeza cujo valor é obtido por medidas.

Por enquanto, as expressões específicas para alguns casos mais usuais foram deduzidas para você e estão resumidas na tabela a seguir, onde a grandeza  $f$  é calculada como *função* de outras grandezas  $x$  e  $y$  medidas diretamente, sendo  $\delta x$  e  $\delta y$  as incertezas correspondentes. Os parâmetros  $a$  e  $b$  são supostos isentos de erro, e as incertezas  $\delta x$  e  $\delta y$  são completamente independentes entre si (não-correlacionadas).

Tabela 2 – Fórmulas específicas, para alguns casos mais usuais, para o cálculo da incerteza de uma medida obtida indiretamente.

Função	Incerteza
$f = x \pm y \pm \dots$	$(\delta f)^2 = (\delta x)^2 + (\delta y)^2 + \dots$
$f = ax$	$\delta f = a\delta x$
$f = ax + b$	$\delta f = a\delta x$
$f = axy$	$\delta f = \sqrt{\left(\frac{\delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{y}\right)^2} f$
$f = \frac{x}{y}$	$\delta f = \sqrt{\left(\frac{\delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{y}\right)^2} f$
$f = x^p y^q$	$\delta f = \sqrt{\left(p\frac{\delta x}{x}\right)^2 + \left(q\frac{\delta y}{y}\right)^2} f$
$f = \text{sen } x$	$\delta f = \cos x \delta x$

Para exemplificar, vamos considerar um problema real. Medimos no laboratório a diferença de potencial nos terminais de uma lâmpada e a corrente que a percorre como sendo, respectivamente, iguais a

$$\Delta V = (3,27 \pm 0,06)V \text{ e } i = (0,25 \pm 0,01)A .$$

Queremos determinar, a partir destas medidas, qual é a potência  $P$  dissipada na lâmpada, bem como sua incerteza  $\delta P$ .

Podemos calcular a potência dissipada usando a definição:  $P = \Delta V i$ . Logo,  $P = 3,27 \times 0,25 = 0,8175J$ . Falta determinarmos a respectiva incerteza. Consultando a tabela acima identificamos que a função correspondente ao nosso caso é  $f = axy$ , onde  $a = 1$ ,  $f = P$ ,  $x = \Delta V$  e  $y = i$ , ou seja,  $f = xy \Rightarrow P = \Delta V i$ .

A expressão para a incerteza em  $P$  pode ser escrita como:

$$\delta P = P \sqrt{\left(\frac{\delta \Delta V}{V}\right)^2 + \left(\frac{\delta i}{i}\right)^2} = 0,8175 \sqrt{\left(\frac{0,06}{3,27}\right)^2 + \left(\frac{0,01}{0,25}\right)^2} = 0,035976$$

Vamos apresentar a incerteza com apenas um algarismo significativo; assim, ao arredondarmos  $\delta P$  eliminamos os algarismos excedentes à direita do 5 e aumentamos o 3 para 4. Logo,  $0,035976 \Rightarrow 0,04$ .

A incerteza dada com 1 algarismo significativo,  $\delta P = 0,04V$ , determina os algarismos significativos no resultado da potência,  $P$ . Portanto, como o 4 se encontra na segunda casa decimal, o último algarismo da potência deve também estar na segunda casa decimal,  $0,8175 \Rightarrow 0,82$ . Temos, então,  $P = (0,82 \pm 0,04)$ .

Para finalizar, a interpretação desse resultado dentro do formalismo da teoria de erros<sup>2</sup> nos diz que o valor mais provável para  $P$  é  $0,82J$  e que o intervalo definido por  $0,82 \pm 0,04$ , concentra  $2/3$  dos valores possíveis para  $P$ . Isto é equivalente a dizer que se você tivesse feito um número,  $N$ , muito grande de medidas,  $2/3$  delas estariam nesse intervalo. A justificativa para esta interpretação será feita ao longo das próximas disciplinas de Física que você cursará.

<sup>2</sup> Para uma leitura mais aprofundada consulte o livro Fundamentos da teoria de erros de, J.H. Vuolo.



## Construção de um gráfico

Os resultados de medidas experimentais são representados em tabelas e gráficos. Nesse complemento, discutiremos a construção de gráficos. Construiremos um gráfico com os dados representados na tabela a seguir:

$t \pm \delta t$ [s]	$x \pm \delta x$ [s]
$0,100 \pm 0,001$	$21,5 \pm 0,2$
$0,200 \pm 0,001$	$22,7 \pm 0,2$
$0,300 \pm 0,001$	$23,9 \pm 0,2$
$0,400 \pm 0,001$	$25,1 \pm 0,2$
$0,500 \pm 0,001$	$26,3 \pm 0,2$
$0,600 \pm 0,001$	$27,5 \pm 0,2$
$0,700 \pm 0,001$	$28,7 \pm 0,2$
$0,800 \pm 0,001$	$29,9 \pm 0,2$
$0,900 \pm 0,001$	$31,1 \pm 0,2$

Use papel milimetrado para fazer o seu gráfico. Os seguintes critérios e requisitos devem ser atendidos para que se tenha um bom gráfico:

1. O gráfico deve ter um título. No nosso exemplo, o título é “Distâncias *versus* tempo”.

2. Deve-se indicar nos eixos as grandezas físicas correspondentes e suas respectivas unidades. Veja, na Figura 26, distância  $x$  em *cm* e tempo em segundos (*s*).

3. O gráfico deve ter leitura fácil. Portanto, o centímetro do papel não deve corresponder a valores do tipo 0,66 ou 1,43 etc. Para você escolher o valor do centímetro do papel milimetrado, divida a sua faixa de valores pela faixa de valores do papel milimetrado e escolha um valor maior ou igual aquele obtido. No nosso exemplo, o eixo dos tempos tem 15cm e a faixa de valores do tempo é 0,8s, portanto o centímetro tem que ter um valor maior ou igual a  $(0,9 - 0,1)/15 \cong 0,0533$ . O gráfico cujo centímetro tem o valor 0,0533... não é de leitura fácil. O valor escolhido para o centímetro foi 0,1s. O eixo das distâncias percorridas ( $x$ ) tem 10cm e a faixa de valores das distâncias é de 11cm. O centímetro deste eixo tem que ter um valor maior ou igual a  $(32,2 - 21,5)/15 = 1,1$ . O valor escolhido para o centímetro foi 2cm.

4. O eixo deve conter apenas os valores correspondentes aos valores dos centímetros; por exemplo, no eixo dos tempos 0,1s a 1,5s; no eixo das distâncias de 20cm até 40cm. Não se escrevem os valores medidos; por exemplo, a distância para  $t=0,1s$  é 21,5 cm. Esse valor não é colocado no eixo das distâncias.

5. Não use linhas de chamada, linhas perpendiculares aos eixos utilizadas para localizar os pontos. Elas confundem a leitura dos pontos interpolados.

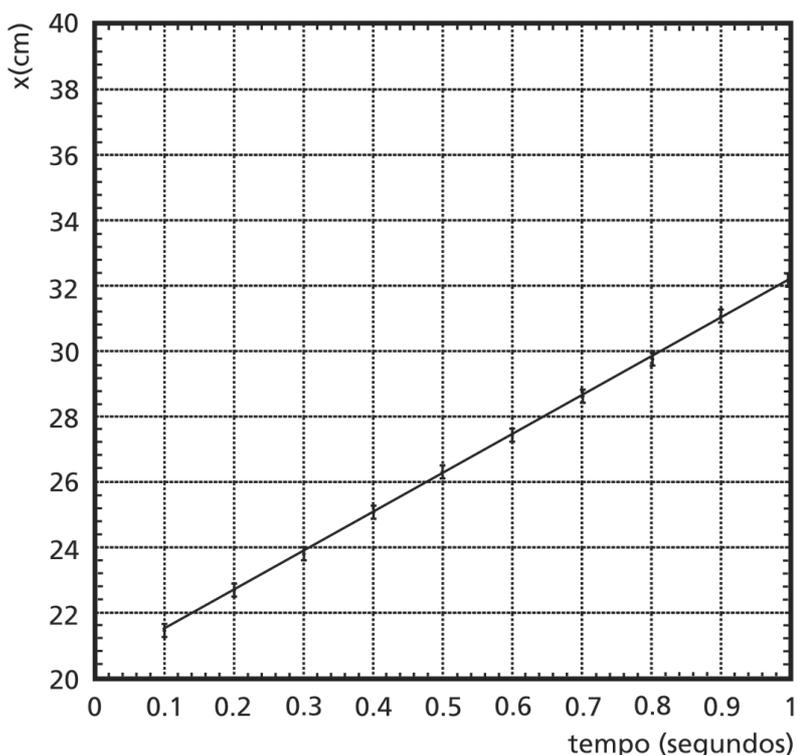
6. Escolha o eixo e a orientação do papel de tal forma que a maior faixa de valores fique sobre o eixo que coincide com a maior dimensão do papel.

7. Os dados devem ocupar a maior parte das escalas, para que seja possível ler os pontos que não foram medidos (interpolados) com maior precisão. Não é necessário que a origem do gráfico coincida com o zero da medida. No nosso gráfico, a origem do eixo das distâncias coincide com o valor 20 cm.

8. As barras de incerteza, [ ] devem ser marcadas nos pontos (ver figura 26). Em algumas situações, as faixas de incertezas são muito pequenas e não podem ser marcadas no gráfico. Este é o caso das faixas de incertezas associadas às medidas de tempo.

9. Avalie os pontos e trace a curva que melhor descreve seus dados. Ela deve interpolar os pontos medidos, cortando o maior número de barras de incertezas possível. Alguns pontos podem ficar fora da sua curva.

### Distâncias versus tempo



## Referências Bibliográficas

GRUPO DE REELABORAÇÃO DO ENSINO DA FÍSICA. USP. *Física*. São Paulo: EdUSP, 2001. 3v.

LUZ, Antonio Maximo Ribeiro; ALVARES, Beatriz Alvarenga. *Física*: volume único. São Paulo: Scipione, 1997. 670p.

NUSSENZVEIG, H. Moysés. *Curso de Física Básica*. v.1: Mecânica. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1997.

RESNICK, R.; HALLIDAY, D. *Física*. v.1: Mecânica. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1981.



## Agradecimentos

Aos professores do Instituto de Física da UFRJ,

Leandro Salasar de Paula, Marcus Venícius C. Pinto, Carlos Farina de Souza,  
pelas sugestões e comentários.

Ao professor

Stenio Dore de Magalhães,  
pelo projeto do experimento da força empuxo.

Aos tutores do Instituto de Física da UFRJ,

Tatiana da Silva

Gisele Cristina Coelho Pinto

José Roberto da Rocha Bernardo,

pelo teste do material e pelas sugestões.

Ao funcionário do Instituto de Física da UFRJ,

Francisco de Souza Oliveira,

pela participação na elaboração dos experimentos.

À funcionária do CEDERJ

Elizabeth Brito,

pela participação na elaboração dos experimentos.

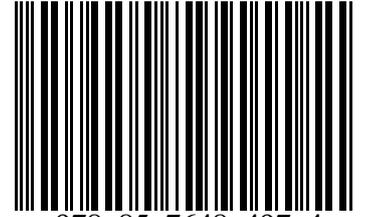


Serviço gráfico realizado em parceria com a Fundação Santa Cabrini por intermédio do gerenciamento laborativo e educacional da mão-de-obra de apenados do sistema prisional do Estado do Rio de Janeiro.



Maiores informações: [www.santacabrini.rj.gov.br](http://www.santacabrini.rj.gov.br)





978-85-7648-497-4



**UENF**  
Universidade Estadual  
do Norte Fluminense



Universidade Federal Fluminense

**UFF**



**UNIRIO**



**FUNDAÇÃO  
SANTA CABRINI**  
Provedora de acesso à Cidadania



**FAPERJ**

Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo  
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro



**GOVERNO DO  
Rio de Janeiro**

SECRETARIA DE  
CIÊNCIA E TECNOLOGIA



**UNIVERSIDADE  
ABERTA DO BRASIL**

**Ministério  
da Educação**



**BRASIL**  
UM PAÍS DE TODOS  
GOVERNO FEDERAL